

В. Н. Тронин

## ЗАМЕТКИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ

(Применение методов неравновесной статистической механики для анализа биологических, экономических и социальных систем)

*Скажу я тебе, мы - странные животные. Нас унесло в сторону, но в своем безумии мы уверили себя, что все понимаем правильно.*

**Карлос Кастанеда. Сказки о силе**

Москва 1998 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Введение

### Глава 1: Физика

### Глава 2: Гидродинамический этап эволюции макроскопических систем

#### Введение

Типичные примеры систем на мезоскопическом этапе эволюции.

Задача о торговце.

Одномодовый лазер.

Динамика популяции.

Модель формирования общественного мнения.

Модель фазового перехода ферромагнетик - парамагнетик.

Модель формирования организованной преступности.

Качественный анализ поведения решений приведенных моделей.

Поляризация общественного мнения. Фазовый переход 2-го рода.

Формирование организованной преступности. Фазовый переход 1-го рода. Поляризация общественного мнения при наличии внешнего поля. Фазовый переход 1-го рода, индуцированный внешним полем.

### Глава 3. Флуктуации

Общие положения. Белый шум.

Броуновское движение. Случайные процессы. Уравнение Фоккера-Планка.

Стационарные решения уравнения Фоккера-Планка. Явления перехода в флуктуирующей среде.

Система Ферхюльста в среде с белым шумом.

### Глава 4. Эволюция. Эволюция эволюции.

Конкуренция и сосуществование.

Симбиоз.

Отношения хищник - жертва.

О возникновении сознания.

Модель возникновения сознания. Фазовый переход первого рода , индуцированный шумом.

Об эволюции сознания.

Глава 5. Другие проблемы, поддающиеся анализу.

Задачи адаптации

Теория страхования.

Конкуренция страховых компаний.

Теория защиты информации.

Глава 6. О топологически нетривиальных дефектах.

Заключение.

Приложение

Литература

## Введение

Лишь Единая Форма Существования ,  
беспредельная, бесконечная, беспричинная  
простиралась, покоилась во Сне,  
лишенном Сновидений; Жизнь  
бессознательная пульсировала в  
Пространстве Вселенском ..

### Из Книги Дзан

И сказал Бог: сотворим человека по образу  
Нашему, подобию Нашему; и да  
владеют они над рыбами морскими,  
и над птицами небесными, и над скотом, и  
над всею землею, и над всеми гадами,  
пресмыкающимися по земле.

### Ветхий Завет, Бытие

Каждый из нас хотя бы один раз на практике встречался или задумывался над проблемой выживания. Почему в результате эволюции (и эволюции ли?) возник человек? Как возникает, формируется и эволюционирует сознание ? Почему появляются диктатуры? Почему распалась Римская империя или Советский союз? Почему на выборах Президента России победил Б.Н. Ельцин? Как формируется организованная преступность ? Какой из финансовых институтов разориться , а какой нет?. Что нужно сделать для обеспечения конфиденциальности информации ?. Каждый из нас задавал себе подобные вопросы. Ответы на них, как правило, сложны и неоднозначны и на первый взгляд не существует общих методов анализа тех проблем, которые приводят к этим вопросам. Между тем это не так. Развитие науки и в первую очередь физики и кибернетики привело в середине нашего века к пониманию возможных механизмов, отвечающих за процессы эволюции и развитию математических методов, позволяющих, хотя бы в принципе, ответить на поставленные выше вопросы. По современным представлениям ответы на эти вопросы лежат в теории самоорганизации (понятие самоорганизации будет дано ниже в Главе 2)"больших" систем, т.е. систем, состоящих из большого числа одинаковых объектов. В рамках этой теории процесс самоорганизации это "автоматический процесс, при котором выживают комбинации, выгодные с точки зрения адаптации всего вида и отдельных организмов", если иметь в виду биологические системы. В такой формулировке процесс самоорганизации не зависит от точных "уравнений движения" каждого объекта системы. Настоящая работа посвящена

применению методов неравновесной статистической механики для анализа поведения "больших" систем. Эти методы позволяют сформулировать общий подход к описанию поведения "больших" систем. Предложенные в данной работе модели формирования организованной преступности, сознания или общественного мнения ни в коем случае не претендуют на полноту описания этих явлений. Однако даже эти простейшие модели позволяют продвинуться в понимании "спусковых механизмов" необходимых для возникновения у системы того или иного нового свойства.

Глава 1 посвящена анализу описания физических систем. Подробно рассмотрены вопросы перехода от описания с помощью законов механики к статистическим закономерностям. Показано, в частности, что введение для описания физических систем "укрупненных" (коллективных) переменных подразумевает наличие неустойчивого поведения траекторий соответствующей механической системы.

В Главе 2 введено понятие мезоскопического этапа эволюции макроскопических систем, сформулирована гипотеза универсальности, приведены примеры систем, поведение которых подчиняется уравнениям мезоскопического этапа эволюции. Подробно исследованы такие задачи как формирование организованной преступности (на примере простой, но нетривиальной модели), поляризация общественного мнения, задача о поведении торговой точки и популяции животных. Показано в частности, что все эти системы релаксируют, переходя в новое состояние, по законам известным в физических науках как законы фазовых переходов. Развитие рассматриваемых систем невозможно без учета случайных изменений их характеристик (флуктуаций).

Глава 3 посвящена изложению математического аппарата, необходимого для описания флуктуаций в макроскопических системах. В частности в этой Главе введены такие понятия как внутренние и внешние флуктуации, фазовые переходы, индуцированные шумом. Сформулировано основное уравнение, к которому приводит описание флуктуаций -уравнение Фоккера-Планка.

Глава 4 целиком посвящена описанию процессов эволюции в живой и неживой природе. На простых моделях исследован вопрос о возникновении и путях эволюции сознания.

В Главе 5 сформулированы некоторые, отличные от описанных в предыдущих главах, задачи, поддающиеся решению. В частности на примере простых моделей разобраны задача об эволюции сознания

и задача об образовании диктатур. Поставлена задача о выживании и конкуренции страховых компаний. Изложен подход, позволяющий получить оценки вероятности нарушения безопасности для конкретной системы.

В Главе 6 описаны топологические методы , применение которых полезно при описании процессов эволюции.

# ГЛАВА 1.

## МАТЕРИЯ .

### Физические системы

И сказал Господь Моисею в пустыне Синайской, в скинии собрания, в первый день второго месяца, во второй год по выходе их из земли Египетской, говоря: исчислите все общество сынов Израилевых по родам их, по семействам их, по числу имен, всех мужского пола поголовно.

**Ветхий Завет, Числа.**

Главная и самая губительная ошибка и заблуждение, сделанные наукой ...заключается в мысли о возможности существования в Природе такой вещи ,как неорганическая ,или мертвая, материя.

**Е.П. Блаватская Тайная доктрина**

### 1. Статистическое описание физических систем.

Физические системы представляют собой уникальный пример, когда можно однозначно определить не только понятие объекта, но и сформулировать микроскопические уравнения движения каждого объекта с учетом его взаимодействий в системе. Действительно под объектом для физических систем будем понимать частицу (в дальнейшем, для простоты, - классическую). Уравнения движения для такой частицы хорошо известны - это уравнения Ньютона. Пусть.  $p = \{\vec{p}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $q = \{\vec{q}_i\}$ ; - импульсы и координаты . системы из  $N$  частиц ,  $\vec{p}_i, \vec{q}_i$  - импульс и координаты отдельной частицы. Состояние системы из  $N$  частиц полностью определяется заданием импульсов и координат каждой частицы в произвольный момент времени. Такое описание можно представить геометрически. Рассматриваемую динамическую систему можно изобразить точкой в  $N$  мерном пространстве с  $N$  взаимно ортогональными осями, соответствующими переменным  $\{\vec{p}_i, \vec{q}_i\}$ . Это пространство называется фазовым пространством. Оно играет фундаментальную

роль в физике\*, поскольку можно считать, что движение механической системы представляет собой своеобразное «течение» в фазовом пространстве. В фазовом пространстве начальные состояния системы могут занимать некоторую область  $U$ . В момент  $t$  все точки области  $U$ , двигаясь каждая по своей фазовой траектории, оказываются в новых точках фазового пространства и образуют новую область  $U(t)$ . Как связаны между собой области  $U(0)$  и  $U(t)$ ? Оказывается, на этот счет для многих механических систем (в частности, для гамильтоновых систем) справедлива следующая замечательная теорема.

*Теорема Лиувилля. Объемы областей  $U(0)$  и  $U(t)$  одинаковы.*

Исходя из этой теоремы, все фазовое пространство можно представлять себе заполненной несжимаемой жидкостью, которая движется в фазовом пространстве. Движение такой «фазовой жидкости» обладает рядом специфических свойств, наиболее ярким из которых является

*Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть  $T$  — сохраняющее объемы взаимно однозначное преобразование пространства, переводящее ограниченную область  $D$  пространства в себя:  $T(D)=D$ . Тогда в любой сколь угодно малой окрестности  $U$  внутри  $D$  найдется точка  $x$ , которая после нескольких применений к ней преобразования  $T$  снова возвращается в область  $U$ . Более того, почти все точки области  $U$  возвращаются снова в  $U$  — объем неевозвращающихся в  $U$  точек равен нулю\*\*.*

Теорема Пуанкаре предсказывает, что движение любой механической системы, для которой справедлива теорема Лиувилля, носит периодический характер. Это обстоятельство является следствием неизменности уравнений классической механики при обращении времени. С другой стороны хорошо известно, что эволюция физических систем, состоящих из большого числа частиц, необратима и описывается законами статистической механики. Для качественного разъяснения этого мнимого

\* Замечание. Понятие фазового пространства может играть определяющую роль в тех разделах знания, которые весьма далеки от физики. Так самого факта существования фазового пространства оказывается достаточно для формулировки и построения ряда моделей в теории защиты информации (см. Главу 5).

\*\* Замечание. Усилением теоремы Пуанкаре служит утверждение, что почти все точки области  $U$  возвращаются в  $U$  бесконечно много раз.



противоречия рассмотрим Пример<sup>\*</sup>. Возьмем два сосуда, один, наполненный газом, другой пустой. Что произойдет, если эти сосуды соединить трубкой и открыть клапан соединительной трубки?

В соответствии со вторым началом термодинамики газ устремится из сосуда *A* в сосуд *B* и будет перетекать из *A* в *B*, пока давление в обоих сосудах не сравняется. Однако мы сейчас рассмотрим эту же ситуацию совершенно с другой точки зрения, при этом привлечем теорему Пуанкаре о возвращении и получим совершенно неожиданный результат!

В статистической механике считается, что газ в сосуде состоит из большого числа молекул, взаимодействующих по законам классической механики. Такой газ является замкнутой (гамильтоновой) системой с большим числом степеней свободы, и поэтому фазовое пространство этой системы имеет очень большую размерность (как известно, в кубическом сантиметре при нормальных условиях содержится приблизительно  $10^{23}$  молекул). Фазовый поток, определяемый уравнениями движения молекул газа, по теореме Лиувилля не меняет объемов областей фазового пространства. Тогда применима теорема Пуанкаре: фазовая точка подходит с течением времени сколь угодно близко к своему начальному состоянию, такому, при котором все молекулы газа перейдут опять в сосуд *A*.

Итак, через некоторое время газ снова соберется в сосуде *A*, а в сосуде *B* вновь будет вакуум. Возникает явное противоречие со вторым началом термодинамики.

Это противоречие носит название *парадокса Цермело*. Разгадка парадокса состоит в том, что «некоторое время», через которое повторится исходное (вернее, почти исходное) положение молекул газа, больше времени существования Солнечной системы.

Указанную разгадку наглядно интерпретировали в 1907 году известные физики Пауль и Татьяна Эренфесты на простой и красивой вероятностной модели. Сосуд *A* содержит большое количество пронумерованных шаров («молекул газа»), а сосуд *B* пуст. Из третьего сосуда, наполненного пронумерованными билетами, вынимается наугад (скажем 17-й), и тогда шар, отмеченный этим номером, перекладывается из *A* в *B*. Билетик возвращается обратно возобновляется вынимание билетиков и перекладывание из сосуда в сосуд. Каждый раз, вынимая наугад какой-то номер от 1 до *N* (*N* — общее первоначальное число шаров в сосуде *A*), шар с этим номером перекладывают из того сосуда, в котором он находится в этот момент, в другой.

Интуиция подсказывает нам, что до тех пор, пока в сосуде *A* шаров намного больше, чем в сосуде *B*, вероятность того, что мы вынем номер, принадлежащий шару из сосуда *A* будет заметно больше вероятности того, что мы вынем номер принадлежащий шару из сосуда *B*. Таким образом, вначале будет наблюдаться сильный «переток» шаров из сосуда *A* в сосуд *B*. Продолжая вынимать билетики, мы заметим, что вероятность вытягивания номера шара из сосуда *A* будет меняться в зависимости от предыдущих выниманий билетиков. (Эта форма зависимости вероятности от предшествующих событий носит название *цепи Маркова*, и в модели, которую мы рассматриваем, все имеющие к этому отношению факты могут быть строго о выведены.) Оказывается, что в среднем число шаров в сосуде *A* действительно убывает с той скоростью, которую

\* Приводимый пример взят из книги Г.А.Гальперина и А.Н.Землякова «Математические бильяды», М., Наука, 1990

предсказывает термодинамическая теория, пока примерно половина шаров не окажется в сосуде *B*. Но вычисления показывают также, что если игру продолжать долго, то с вероятностью 1 все шары попадут назад в сосуд *A*, как и утверждает теорема Пуанкаре!

Сколько же выниманий в среднем требуется, чтобы вернуться снова к этому исходному положению? Ответ гласит  $-2^N$ , а это исключительно большое число, даже если количество шаров *N* не превосходит 100. Этим и объясняется, почему наблюдения, которые мы производим, дают нам движение, шаров только в одном направлении без каких-либо осцилляций— мы слишком недолго ждали!

Прокомментируем парадокс Цермело еще и с других позиций. Рассмотрим для этого прямоугольный бильярдный стол без луз, на котором находятся 16 бильярдных шаров. Предположим, что эти шары, как и молекулы газа в сосуде, движутся без трения по поверхности бильярдного стола, сталкиваясь упруго друг с другом и с его бортом. Мысленно разделим весь стол на две равные части— левую (*L*) и правую (*R*). Введем понятие состояний. Бильярд находится в состоянии 0, если в пределах левой половины нет ни одного шара; в состоянии 1, если в пределах левой половины находится 1 шар; в состоянии 2, если в пределах левой половины находятся 2 шара, и т. д.; в состоянии 16, если в половине *A* собрались все 16 шаров.

Заметим теперь, что состояния 0 и 16 могут быть реализованы единственным способом: когда все шары находятся справа или когда все они находятся слева. Состояния 1 и 15 могут быть реализованы 16-ю различными способами: первый шар находится слева, остальные - справа; второй шар находится слева, остальные -справа и т.д. Для подсчета числа способов, которыми могут быть реализованы состояния 2 и 14, будем рассуждать так. Имеется 15 способов, в которых участвует шар номер 1, а именно: слева (справа) находятся шары 1 и 2, 1 и 3, ..., 1 и 16; 14 способов, в которых участвует шар номер 2: это шары 2-и 3, 2 и 4, ..., 2 и 16 (способ «2 и 1» уже учтен в предыдущем случае); 13 способов с участием шара номер 3: это шары 3 и 4, 3 и 5, ..., 3 и 16; и так далее. Всего получаем  $15+14+...+2+1=120$  способов. Количество способов, которыми может быть реализовано каждое состояние, назовем «весом». Сведем «веса» в таблицу.

Состояния	Количество способов реализации («вес»)
0 и 16	1
0 и 15	16
2 и 14	120
3и 13	660
4 и 12	1820
5 и 11	4368
6 и 10	8008
7 и 9	11440
8	12870

Из таблицы видно, что наибольшим числом способов быть реализованы состояния 7, 8 и 9, т. е. состояния, примерно половина шаров расположена на левой и на правой, а другая половина — на правой. Для каждого отдельного шара нет никаких оснований выделять преимущественную область его пребывания. С тем же успехом мы можем утверждать, что нет никаких оснований предпочесть одну какую-либо конфигурацию расположения другой. А тогда, какова бы ни была эта конфигурация, поздно она реализуется, а средний промежуток времени в течение которого на бильярдном столе имеет место данная конфигурация, одинаков для всех конфигураций. Каждый из рассмотренных выше способов представляет частный случай конфигурации. Следовательно, средний промежуток времени, в течение которого бильярд находится в данном состоянии, пропорционален количеству способов, которыми реализуется данное состояние. Поэтому большую часть времени бильярдный стол провозит в состояниях 7, 8, 9 (примерно в 12 тысяч раз большую, чем в состояниях 0 и 16).

Можно рассуждать и иначе. Если, бросив взгляд на бильярдный стол, мы застали его в состоянии 0 или 1 (15 или 16), у нас есть все основания ожидать, что в скором времени на смену этому состоянию придет какое-нибудь более часто встречающееся (аналог выравнивания давления в примере с сосудами А и В с газом). Наоборот, если мы застаем стол в состоянии 7, 8 или 9, у нас есть все основания считать, что еще в течение достаточно долгого времени он будет пребывать в этом состоянии. Можно сказать, что «состояние бильярда стремится к состояниям 7, 8 или 9». Это верно в том смысле, что действительно на смену редко встречающимся состояниям быстро приходят часто встречающиеся состояния.

Состояния, введенные выше, имеют и определенный физический смысл. Заместим, что общая масса шаров, расположенных, скажем, в левой половине бильярда, равна массе одного шара, умноженной на номер состояния. С этих позиций можно сказать, что большую часть времени бильярдная система проводит в таком состоянии, когда масса шаров, расположенных слева, примерно равна массе шаров справа.

Мы специально потратили так много времени, чтобы читатель смог до конца понять и как следует прочувствовать следующее обстоятельство. Единственно реально наблюдаемое на поверхности стола физическое явление — это то, что шары двигаются, сталкиваются друг с другом и с бортом стола, и вследствие этого описывают весьма сложные траектории. Все остальное есть лишь различные способы описания этого обстоятельства и, возможно, различные его следствия. Обнаруженные нами закономерности выполняются тем точнее, чем больше имеется шаров (или молекул газа в сосуде). Например, для 16 шаров средний промежуток времени, в течение которого стол будет находиться в одном из «средних» состояний, составляет примерно 0,328 от полного времени наблюдения, для 50 шаров — уже 0,8, для 100 шаров — 0,94, ну а для  $10^{23}$  молекул газа в сосуде оно неотличимо от 1.

Тем самым решение парадокса Цермело становится полностью прозрачным: система молекул стремится к состоянию с наибольшим «весом», а состояние с наименьшим возможным «весом», хотя обязательно и реализуется — по теореме Пуанкаре, — но в среднем это происходит ничтожно редко. Как остроумно ответил Л. Больцман на возражения Цермело, связанные с теоремой Пуанкаре: «Долго же Вам придется ждать!».

Рассмотренный пример показывает, что при статистическом описании поведения системы достаточно интересоваться значением величин, которые с одной стороны характеризуют состояние системы, с другой стороны могут быть измерены. Эти величины имеют определенное значение в каждом состоянии системы, описываемой переменными  $(p, q)$ . Таким образом, они могут быть охарактеризованы как множество всех вещественных функций  $6N$  переменных  $(p, q)$ . Такие функции принято [1] называть динамическими функциями в фазовом пространстве  $(p, q)$ . При эволюции система движется по траектории в фазовом пространстве, которую можно представить совокупностью  $6N$  функций времени, определяемых как решения уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{где } H(p, q) \text{ - гамильтониан системы.}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

У систем, содержащих огромное количество частиц, естественно изучать макроскопические характеристики, такие как плотность, энергия, температура и т.д. Для этого естественно использовать для математического представления физических величин непрерывные или кусочно-непрерывные функции  $B(\vec{x}; t)$  от пространственных координат  $\vec{x}$  и времени  $t$ .

В настоящее время ясно, что законы макроскопической физики хорошо описывают макроскопические явления, а законы микроскопической физики - атомно-молекулярные явления. Следовательно, необходимо сформулировать правило соответствия, которое позволяло бы установить однозначную связь между макроскопическими величинами и микроскопическими динамическими функциями. Статистическая механика служит связующим звеном между двумя уровнями описания, т.е. устанавливает соответствие между любой микроскопической динамической функцией  $b(q; p; \vec{x}, t)$  и единственной макроскопической динамической функцией

$$b(q; p; \vec{x}, t) \rightarrow B(\vec{x}, t)$$

Это соответствие определяет отображение фазового пространства на физическое пространство. Наиболее простой и вместе с тем достаточно общий вид этого отображения следующий

$$B(\vec{x}, t) = \int dp dq b(p; q; \vec{x}, t) \cdot F(p, q) \quad (1)$$

где  $F(p, q)$  - произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \int dp dq F &= 1 \\ F(p, q) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Такие функции называются функциями распределения в фазовом пространстве.

Основной постулат статистической физики гласит: "состояние системы в данный момент времени полностью задается некоторой функцией распределения  $F(p, q)$ , удовлетворяющей условиям (2). Наблюдаемое значение  $B(\vec{x}, t)$  динамической функции  $b(q; p; \vec{x}, t)$  для такой системы по определению выражается соотношением (1).

Соотношение (1) вместе с условиями (2) представляет собой просто определение среднего значения функции  $b(q; p; \vec{x}, t)$ . Из наших рассуждений следует, что при таком подходе в каждый момент времени  $t$  каждая точка фазового пространства представляет собой возможное состояние системы. При этом каждая точка учитывается с определенным весом в соответствии со значением  $F(p, q)$  функции распределения в этой точке. При заданной функции распределения можно вычислить значение всех возможных макроскопических переменных. Следовательно, состояние системы в данный момент времени полностью определяется заданием функции распределения  $F(p, q)$ . В этом случае мы приходим к концепции ансамбля хорошо известной в статистической механике [1]. Таким образом, основная задача статистической механики - вычисление функции распределения  $F(p, q)$ .

Изложенная идеология опирается на понятие фазового пространства и не зависит от конкретного вида уравнений движения будь то уравнения Гамильтона или какие-либо иные уравнения. Дальнейшее рассуждение опирается на конкретный вид уравнений движения. Предполагается, что эти уравнения - суть уравнения Гамильтона.

Предположим, что мы подобрали распределение  $F(p, q)$ , описывающее начальное состояние системы. Нам нужно определить временную зависимость наблюдаемой  $B(\vec{x}, t)$  - среднего значения величины  $b(q; p; \vec{x}, t)$ . Предположим, что первоначально

$$b(q; p; \vec{x}, t = 0) = b(q, p, \vec{x})$$

В таком случае

$$B(\vec{x}, 0) = \int dp dq \cdot b(p, q, \vec{x}) F(p, q) \quad (3)$$

Уравнения движения данной системы - уравнения движения Гамильтона. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \sum \left( \frac{\partial b}{\partial y_n} \dot{q}_n + \frac{\partial b}{\partial p_n} \dot{p}_n \right) = \\ &= \sum \left( \frac{\partial b}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial b}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

или в символическом виде

$$\begin{aligned} \dot{b} &= [b; H]_p \equiv [H]b \\ [b; H]_p &= \sum \left( \frac{\partial b}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial b}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) в символическом виде можно записать как

$$b(t) = \exp([H]t) b(t = 0)$$

В этом случае из (1) имеем

$$B(\vec{x}, t) = \int dp dq \exp([H]t) b(p; q; \vec{x}, t = 0) \cdot F(p, q)$$

Это соотношение содержит закон движения, задаваемый уравнениями Гамильтона. Его можно переписать в следующем виде

$$B(\vec{x}, t) = \int dp dq \exp([H]t) \exp(-[H]t) b(p; q; \vec{x}, t = 0) \exp([H]t) F(p, q)$$

так как

$$\exp([H]t) \exp(-[H]t) = 1$$

то

$$B(\vec{x}, t) = \int dp dq \exp b(p; q; \vec{x}, t = 0) \cdot F(p, q, t) \quad \text{где } F(q, p, t) = \exp([H]t) F(q, p)$$

Поскольку функцию распределения можно рассматривать как динамическую функцию, то это преобразование удобно рассматривать в дифференциальной форме

$$\dot{F} = [H; F]_p$$

и

(6)

$$B(\vec{x}, t) = \int dq dp \cdot b(p; q; \vec{x}) F(p, q, t)$$

Уравнение (6) называется уравнением Лиувилля системы и играет основную роль в статистической механике. Уравнение Лиувилля является точным, следовательно, его решение полностью определяет характер эволюции физической системы. В связи с этим возникает естественный вопрос, почему вообще существует такая наука как неравновесная статистическая механика? В конце концов, нам ведь известно с самого начала, что нужно сделать для получения полного и точного решения задачи об эволюции физической системы: мы должны решить соответствующее уравнение Лиувилля. Однако еще никто не решил ни одного нетривиального уравнения Лиувилля для взаимодействующих частиц. Поэтому и возникает задача описания на уровне статистической механики.

В этой науке генеральная идея основана на огромном разрыве между тем количеством информации, которое дается точным механическим описанием, и относительно небольшим количеством данных, необходимых для описания на макроскопическом уровне. Даже если бы нам удалось решить уравнение Лиувилля, скажем для реальной жидкости, то, все равно, подавляющая часть информации не понадобилась бы при расчете термодинамических или гидродинамических величин. Стратегия заключалась бы в том, чтобы с самого начала отбросить излишние детали в постановке задачи и, тем самым, избежать необходимости тратить время и силы на поиски бесполезных решений. Поэтому ключевая идея статистической механики состоит в последовательном сокращении числа переменных, необходимых для описания системы большого числа одинаковых объектов. При проведении подобных сокращений необходимо должным образом установить характерные свойства конкретных систем. Прежде всего, существенное сокращение описания достигается для важного класса систем в том случае, когда

удовлетворяется некоторая совокупность "добавочных условий", которые выполняются для систем с диссипацией. Для таких систем, в силу нерегулярности и большого числа взаимодействий между объектами память о начальном состоянии быстро теряется. Процесс распределения в пространстве и времени определяется теперь как особенностями динамики взаимодействий, так и общими свойствами системы, например, температурой. Эти специфические параметры задают определенный временной масштаб (время релаксации), не зависящий от начального "приготовления" системы. Временная эволюция таких систем определяется кинетическим описанием, которое существенно проще исходного описания на языке уравнений Лиувилля.

Следующий важный шаг в направлении упрощения описания системы заключается в исследовании медленно меняющихся процессов (гидродинамический режим). В этом режиме функция распределения определяется небольшим числом макроскопических функций, таких как плотность, скорость и т.д. Здесь в физике разработаны мощные приближенные методы, позволяющие проводить сравнение с экспериментом либо решать обратную задачу: определять свойства объектов из макроскопических наблюдений.

Последний шаг в процессе сокращения совершается при достижении системой равновесия (равновесного состояния).

Равновесное состояние играет фундаментальную роль как в физике, так и вообще для систем, состоящих из большого числа одинаковых объектов (для таких систем под равновесным следует понимать стационарное состояние, обладающее всеми свойствами равновесного). Существенно, что при изучении подавляющего большинства физических систем, интерес представляет способ их релаксации к равновесному состоянию, которое считается заданным и существующим в бесконечно удаленном Будущем. Такая постановка вопроса не подходит для наших целей, поскольку при развитии «больших» систем, рассматриваемых в данной книге, основной интерес представляет процесс эволюции из одного равновесного (или стационарного) состояния системы в другое.

При этом следует допустить, что для нашего Мира (Вселенной) существует понятие исходного, истинно Равновесного, изначально существующего Состояния. Такое Состояние определено практически во всех древних религиях и мифах.

- 1 Предвечная Матерь- Рождающая, сокрытая в своих Покровах, Вечно-Невидимых, еще раз дремала в продолжении Семи Вечностей.
2. Времени не было, оно покоилось в Бесконечных Недрах Продолжительности.
3. Вселенского Разума не было; ибо не было Ах-хи, чтобы вместить Его.



4. Семи Путей к Блаженству не было. Не было и Великих Причин Страдания, ибо не было никого для порождения их и обольщения ими.
5. Едина Тьма наполняла Беспредельное Все , ибо Отец-Матерь и Сын еще раз были воедино, и Сын не пробудился еще для Нового Колеса и Странствий на нем.
7. Причины Существования исчезли; бывшее Видимое и Сущее Невидимое покоилось в Вечном Не-Бытии -Едином Бытии.
8. Лишь Единая Форма Существования , беспредельная, бесконечная, беспричинная простиралась, покоилась во Сне, лишенном Сновидений; Жизнь бессознательная пульсировала в Пространстве Вселенском ..

### Из Книги Дзан

В начале времен, когда жил Имир, не было в мире ни песка, ни моря  
земли еще не было и небосвода, бездна зияла, трава не росла

### Старшая Эдда

Ничто не существовало: ни ясное Небо ,ни величья свод, над Землею простертый,  
Не было смерти , и бессмертия не было, не было границ между днем и ночью.

### Pur-Bega

В этом случае система описывается одним термодинамическим потенциалом, зависящим от весьма малого числа макропараметров, таких как плотность и температура.

В равновесном случае уравнение Лиувилля может быть решено точно. Соответствующая функция распределения имеет вид

$$F(p, q) = Z^{-1} e^{-\beta H(p, q)}$$

$$Z = \int \exp(-\beta H(p, q)) dq dp$$

и представляет собой распределение Гиббса с температурой  $T = \beta^{-1}$ \*

### Пример. Движение тяжелого шарика в жидкости

Рассматриваемый пример наглядно демонстрирует этапы эволюции механической системы.

Рассмотрим шарик массой  $m$ , движущийся в жидкости с коэффициентом трения  $\gamma$  под действием силы тяжести. Уравнение движения (уравнение Ньютона) имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} = g$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

Решение этого уравнения с начальными условиями имеет вид

$$x(t) = \frac{mg}{\gamma} t + x_0 + \frac{m}{\gamma} \left( v_0 - \frac{mg}{\gamma} \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{mg}{\gamma} + \left( v_0 - \frac{mg}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

1) Механический этап эволюции.

Отсутствует релаксация, как по импульсам, так и по координатам  $-\frac{m}{\gamma} < t \leq \frac{m}{\gamma}$ ; в

этом случае движущаяся частица ничего не знает о трении и из решения  $x(t)$  получим

$$v(t) = v_0 + gt; \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

2) "Классический" этап эволюции

$\left( \frac{v_0}{g} - \frac{m}{g} \right) \gg t \gg \frac{m}{\gamma}$ : релаксация по импульсам уже произошла  $v(t) = \frac{mg}{\gamma}$ , а

релаксация по координатам еще не началась  $x(t) = \frac{m}{\gamma} v_0 + x_0$ . Этот режим

возможен, если  $v_0 \gg \frac{2m}{\gamma} g$ .

3) Гидродинамический этап  $t \gg \max \left\{ \frac{v_0}{g} - \frac{m}{\gamma}; \frac{m}{\gamma} \right\}$ ;

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{mg}{\gamma} t$$

Отметим, что на гидродинамическом этапе эволюции исходные уравнения существенно упрощаются

$$\dot{x} = \frac{mg}{\gamma}$$

Данный пример не является замкнутым, т.к. диссипация (коэффициент  $\gamma$ ) вводится "руками". Однако ниже будет показано, что  $\gamma$  связана с температурой среды и с амплитудой флуктуаций в системе.

## ГЛАВА 2.

### ЖИЗНЬ.

#### **Мезоскопический этап эволюции макроскопических систем**

Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои.

**Ветхий Завет, Книга Екклесиаста или Проповедника.**

Настоящее есть дитя Прошлого, Будущее порождение Настоящего. И , тем не менее , о настоящий мир! Разве не знаешь ты , что не имеешь отца и не можешь иметь потомства; что ты постоянно рождаешь лишь самого себя?

**Е.П. Блаватская Тайная доктрина**

#### **1.Введение. Гипотеза универсальности**

Применение только механических Законов никогда не сможет вывести теоретика за пределы объективного мира, никогда не откроет людям и конечную судьбу Космоса.

**Е.П. Блаватская Тайная доктрина**

Как отмечалось выше, идеология построения статистической механики для физических систем основывается на методе сокращения числа необходимых для описания данного явления переменных. Стратегия решения задач статистической механики основана в значительной степени на интуиции исследователя, позволяющей при описании того или другого явления выделить из всей совокупности переменных те из них, которые определяют существо исследуемого явления. Фактически на этом этапе выбирается такая параметризация рассматриваемого явления или процесса, которая, с одной стороны, охватывает типичные черты исследуемого явления, а с другой -

позволяет ограничиться сравнительно небольшим набором совокупных (коллективных) переменных и уравнений для них.

Правильность выбора коллективных переменных, необходимых для описания данного явления, целиком определяется опытом и интуицией исследователя ( в соответствии с «принципом» "угадал - не угадал"). При таком подходе роль более микроскопических теорий данного явления сводится фактически к обоснованию правильности выбора той или иной параметризации и к вычислению коэффициентов в уравнениях, описывающих данное явление. Несмотря на кажущуюся феноменологичность и зависимость от личности исследователя, такой подход, как будет показано ниже ( см. например Главу 2) слабо зависит как от выбора «уравнений движения» для описываемого явления так и ,естественно ,от исследователя и поэтому может быть применен для описания не только физических явлений, но и процессов, происходящих в экономике, биологии, социологии и других далеких, казалось бы, от физики науках. Основой применимости этого подхода для анализа явлений в других областях знаний, по нашему мнению, является гидродинамический (в дальнейшем - мезоскопический) этап эволюции систем, состоящих из большого числа одинаковых объектов. На этом этапе эволюции поведение системы мало зависит от микроскопических характеристик поведения составляющих систему объектов, подчиняясь более глобальным законам, типа закона возрастания энтропии.

Мезоскопический этап эволюции (определение мезоскопического этапа эволюции будет сформулировано в Заключении) систем характеризуется рассмотрением больших характерных времен и пространственных масштабов. Следовательно, не ограничивая общности, уравнения на этом этапе эволюции системы могут быть записаны в виде (для пространственно-однородных систем)

$$\dot{q}_i = K_i \left( \{q\} \right), \quad i = 1, N \quad (1)$$

где  $q_i$  - набор "коллективных" переменных, характеризующих состояние системы на этом этапе эволюции.

В общем случае, даже на этом этапе эволюции анализ уравнений вида (1) представляет собой весьма сложную задачу . Существенного упрощения можно добиться в том случае, если «силы»  $K_i$  - потенциальны, т.е. существует такая функция  $V(q)$ , что

$$K_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial q_k} = \frac{\partial K_k}{\partial q_i}$$

Второе из этих соотношений есть условие существования у потенциала  $V(q)$  "хорошей" второй производной. Это условие накладывает также ограничения на топологическую структуру пространства изменения набора переменных  $q_i$  (о непотенциальных системах см. ниже в настоящей Главе ,а также в Главе 6). При выполнении условий (2) уравнения (1) приобретают вид:

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (3)$$

Уравнения (3) по форме весьма напоминают уравнения гамильтоновой динамики. Эта формальная аналогия вызывает естественный вопрос: нельзя ли воспользоваться построениями статистической механики для анализа систем, микроскопические уравнения, движения которых имеют вид(3)? Положительный ответ на этот вопрос приводит нас к гипотезе универсальности, формулировку которой мы приведем ниже (см Главу 4). Легко видеть, что большинство рассуждений первого раздела очевидным образом переносятся на рассматриваемый нами случай. Действительно, рассмотрим произвольную динамическую функцию  $b(q)$ . Скорость ее изменения определяется соотношением

$$\dot{b} = -\sum \frac{\partial b}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_i} \equiv [b, V]_p \equiv [V]b \quad (4)$$

Динамическая функция  $b$  в произвольный момент времени определяется уравнением

$$b(x(t)) = e^{t[V]} b(x(0)) \quad (5)$$

Легко получить также, что для произвольной функции  $b(q)$  [1]

$$e^{\alpha[V]} b(q) = b(q(\alpha)) \quad (6)$$

Сохраняет свой смысл и основной постулат статистической физики, что состояние системы в данный момент времени полностью

задается функцией распределения  $F(q)$ , удовлетворяющий условию нормировки  $\int F(q) dq = 1$  и неотрицательности  $F(q) \geq 0$ . Наблюдаемые значения динамической функции  $b(q, \vec{x}, t)$  выражаются соотношением

$$B(\vec{x}, t) = \int b(q, \vec{x}, t) F(q, t) dq = \int b(q, \vec{x}, t) F(q, t=0) dq \quad (7)$$

Функция распределения  $F(q, t)$  в произвольный момент времени удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} = [V, F], \quad (8)$$

а равновесное значение этой функции может быть записано в виде распределения Гиббса

$$F(q) = \frac{1}{Z} e^{-\beta V(q)} \quad (9)$$

$$Z = \int \exp(-\beta V(q)) dq$$

При этом в отличие от равновесной статистической механики параметр  $\beta$  не является, естественно, температурой, а представляет собой коллективный параметр, относящийся к системе в целом. Его вычисления или оценки для конкретных систем будут даны ниже (см Главу 2 и Главу 4).

Проведенные рассуждения не вполне корректны. Дело в том, что рассматриваемые ниже системы относятся, как правило, к классу так называемых диссипативных систем. Формальное отличие диссипативных систем от рассматриваемых в механике гамильтоновых систем состоит в том, что

$\text{div} \vec{K} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial q_i} = \gamma(q) < 0$  в отличие от гамильтоновых систем, для которых  $\gamma = 0$ . Это обстоятельство приводит к тому, что, как следует из уравнения (8)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int F(q, t) dq_1 \dots dq_N = \int F(q, t) \text{div} \vec{K} dq_1 \dots dq_N < 0 \quad (9')$$

в то время как в гамильтоновой динамике

$$\frac{\partial}{\partial t} \int F(q, p, t) dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N = 0$$

Это отличие помимо формального носит и принципиальный характер, приводя, например к появлению таких объектов как странный аттрактор [2]. Преобразуем (9'), используя остроту функции распределения  $F(q, t)$  (что эквивалентно

предположению о том, что система в любой момент времени с большой вероятностью находится в некотором состоянии  $q^0(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int F(q, t) dq_1 \dots dq_N = \int F(q, t) \operatorname{div} \vec{K} dq_1 \dots dq_N \approx \gamma(q^0) \int F(q, t) dq_1 \dots dq_N; \gamma(q^0) < 0$$

Откуда

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-|\gamma|t}; \Omega(t) \equiv \int F(q, t) dq_1 \dots dq_N$$

Предположим, что мы рассматриваем релаксацию системы на временах

$$t \ll \gamma^{-1} \quad (9'')$$

Тогда  $\Omega \approx \Omega_0$  и релаксация системы происходит «примерно» с сохранением фазового объема или что эквивалентно для такой системы приближенно выполнена теорема Лиувилля. В дальнейшем условие (9'') предполагается выполненным. Физически (9'') соответствует условию слабой диссипативности рассматриваемой системы. (см. Приложение). Отметим, что идеологически выполнение условия (9'') аналогично выполнению условия

$$t \ll t_{\text{вбз}}, \text{ где } t_{\text{вбз}} - \text{время возврата Пуанкаре}$$

при котором осуществляется переход от механики с ее теоремой о возвратах Пуанкаре к статистической физике с ее временной необратимостью.

Введение функции распределения  $F(q)$  систем на мезоскопическом этапе эволюции фактически эквивалентно введению статистического ансамбля. Действительно, при заданных начальных условиях  $q_i(0) = q_i^0$  "траектория" движения системы в фазовом пространстве  $\{q_i\}$  однозначно определена решением уравнений (1) или (3). С введением функции распределения  $F(q)$  или, что эквивалентно  $F(q, t) = \exp(t[V])F(q)$ , понятие состояния системы претерпевает существенные изменения. В этом случае состояние системы в момент времени  $t$  уже не задается фиксированной совокупностью величин  $q_i(t)$ , т.е. точкой в фазовом пространстве. Вместо этого в заданный момент времени  $t$  каждая точка фазового пространства представляет собой возможное состояние системы. При этом каждая точка учитывается с определенным статистическим весом в соответствии со значением  $F(q)$  (или  $F(q, t)$ ) функции распределения в этой точке. Может возникнуть естественный вопрос: откуда на мезоскопическом этапе эволюции возникает неопределенность, позволяющая ввести понятие ансамбля? В физике это понятие возникает, например, как следствие неточности (многовариантности) при определении начальных данных - координат и импульсов всех частиц. Аналогично, возникновение неоднозначности в поведении мезоскопической систем, связано с неопределенностью в определении начальных данных. Помимо этого, однако, имеется существенное различие при описании возникновения ансамбля для мезоскопической системы, по сравнению с механической системой. Действительно, в силу макроскопичности мезоскопического этапа эволюции, в изученной системе всегда

имеются флуктуации - силы, вызывающие случайное отклонение "траекторий"  $q_0(t)$  движения системы от ее усредненного значения. Таким образом "ансамбль" возникает "естественным" путем - не только за счет неоднозначности в определении начальных данных  $q_0(0)$ , но и вследствие флуктуаций с необходимостью присутствующих на мезоскопическом этапе эволюции системы. (Мы не будем здесь касаться вопросов связанных с существованием «естественного» шума в динамических системах- явления обязанного своим появлением странным аттракторам.)

В этом случае представляется естественным, что параметр  $T$  "температура" в равновесном распределении (9) определяется амплитудой флуктуаций системы. Следует предположить, что связь между амплитудой флуктуаций и "температурой" системы, даваемая флуктуационно-диссипативными теоремами [1], можно принять за определение "температуры" рассматриваемой неравновесной системы.

Таким образом, общность "уравнений движения" на мезоскопическом этапе эволюции позволяет применять методы неравновесной статистической механики для систем, не имеющих в общем случае никакого отношения к физике.

Предыдущие рассуждения основывались в основном на уравнениях (3). Возникает естественный вопрос о том, что делать с системами, которые на мезоскопическом этапе эволюции описываются "непотенциальными" уравнениями (1)? Ответ на этот, невинный, на первый взгляд, вопрос настолько нетривиален, что подробное его изложение невозможно в рамках настоящей работы. Поэтому попытаемся по возможности кратко изложить логику построения динамики систем, основанных на «непотенциальных» уравнениях движения вида (1).

Начнем с физических систем и попытаемся ответить на вопрос: по каким причинам из хаотического движения отдельных частиц возникает упорядоченное (гидродинамическое) движение, например жидкости. Для этого определим поток в фазовом пространстве как преобразование или отображение фазового пространства самого на себя, при котором каждая точка  $x$  ( $x=(q,p)$ ) преобразуется в какую-то точку  $x_t$ , посредством действия оператора  $R(t)$

$$x \rightarrow x_t = R(t)x$$

При этом динамическая функция  $b(x)$ ,  $x = (q, p)$  преобразуется как

$$b(x) \rightarrow b(x_t) = b(R(t)x)$$



Если рассматриваемая система описывается с помощью уравнений Гамильтона, то говорят, что ее динамика описывается потоками, порожденными гамильтонианом  $H(p, q)$ . В этом случае динамическая функция  $b(x, t)$  в произвольный момент времени определяется соотношением

$$b(x(t)) = b(e^{t[H]} x(0))$$

В общем случае потоки не обязательно порождаются гамильтонианом. Однако те из них, которые отвечают гамильтоновой динамике описываемой системы, обладают тем свойством, что предполагает сохранение меры (фазового объема) \*

$$\int_{\gamma} dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N F(q, p) = \int_{\gamma_t} dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N F(q, p)$$

где  $\gamma$  - некоторая область фазового пространства,  $\gamma_t$  - область, в которую переходит  $\gamma$  в момент времени  $t$ , при условии, что "движение" происходит посредством заданных уравнений движения - уравнений Гамильтона. Для таких потоков первоначальный фазовый элемент движется с сохранением меры в течение всего своего движения. Возможны разнообразные виды потоков [1]. Элемент, имевший вначале, допустим, квадратную форму, становится амебовидным, потом принимает форму осьминога с сильно искривленными щупальцами и, в конце концов, превращается в клубок перепутанных чрезвычайно тонких волокон (при этом мера должна сохраняться), однородно заполняющих фазовое пространство. Такой поток возможен только при условии, что отдельные точки, которые в начальный момент были расположены близко друг к другу, расходятся в фазовом пространстве экспоненциально во времени. Такой режим поведения траектории естественно назвать неустойчивым: малое отклонение траектории от заданной приводит к экспоненциальному росту расстояния между траекториями. Следует ожидать, что переход системы от хаотического к кооперативному поведению происходит вследствие развивающихся неустойчивостей.

---

\* **Замечание.** Потоки, возникающие для большинства систем, рассматриваемых в данной книге, относятся к так называемым диссипативным системам и, поэтому в общем случае не сохраняют меру. Мы, однако, пойдем другим путем и будем считать, что характерный масштаб изменения функции распределения мал, по сравнению с характерным масштабом изменения соответствующего ей потенциала (или эффективного потенциала). В этом случае меру можно считать приблизительно сохраняющейся при выполнении условия (9''). (см выше).

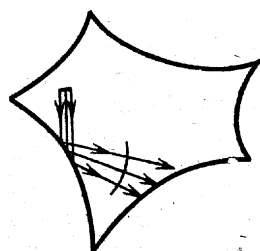
Изложенные выше идеи наглядно можно продемонстрировать на примере так называемых бильярдных систем (бильярдov). Начало современной теории бильярдov было положено Я. Г. Синаем, который ввел и изучил большой класс бильярдных систем - так называемых рассеивающих бильярдov. Эти системы впоследствии стали называться «бильярдами Синая».

Бильярды Синая устроены так: их граница состоит из кусков выпуклых кривых (в пространстве - кусков выпуклых поверхностей), обращенных своими выпуклостями внутрь бильярдной области.



*Бильярд Синая*

Эти бильярды являются рассеивающими: любой (не обязательно узкий) пучок бильярдных частиц, летящих параллельно, после отражения от выпуклой стенки разлетается расходящимся веером и остается расходящимся при всех последующих отражениях от границы бильярдной области. Эта ситуация кардинально отличается от той, которая имеет место, скажем, для бильярда в многоугольнике, где параллельный пучок после столкновения с прямолинейной стенкой остается по-прежнему параллельным, если только не попадает в вершину. В бильярде Синая близкие вначале бильярдные траектории с течением времени достаточно быстро расходятся и угол между соседними траекториями первоначально параллельного пучка возрастает после каждого отражения от границы. Поскольку площадь области бильярда конечна, траектории бесконечной длины начинают со временем перепутываться, что приводит к хаосу.



Расхождение траекторий в бильярде Синая

На математическом языке это обстоятельство находит свое выражение в следующем важном свойстве бильярдных траекторий: в рассеивающих бильярдах имеет место эргодичность, т. е. типичная траектория бильярдного шара проходит сколь угодно близко от любой точки бильярда, причем во всевозможных направлениях и приводит в любой окрестности этой точки долю времени, пропорциональную площади этой окрестности. Бильярды Синая обладают сильной неустойчивостью, которая характеризуется тем, что даже небольшое изменение начального состояния (положения или скорости) бильярдной частицы в области  $Q$  приводит к «сильным» изменениям его траектории, которая очень быстро перестает быть похожей на исходную.

Другой класс бильярдov — так называемые фокусирующие бильярды, в которых,

несмотря на отсутствие рассеивающих участков границы, также обнаруживается явление рассеивания и, как следствие, хаотичность и неустойчивость поведения траекторий.

Наиболее известным и популярным примером такого бильярда является «стадион», который получится, если раздвинуть две половинки круглого бильярда и вставить между ними одинаковые параллельные отрезки (т. е. граница «стадиона» состоит из двух дуг окружностей и двух касательных к ним отрезков). Несмотря на то, что два прямолинейных участка границы «стадиона» могут быть сколь угодно малыми, а сам стадион почти не отличаться от круга, бильярд в «стадионе» будет уже хаотическим.

Следуя Г. Хакену [2], назовем процесс перехода от хаотических движений к упорядоченным, самоорганизацией.

Наличие неустойчивостей в рассматриваемой системе приводит к тому, что в ней "выживает" как правило, одна или несколько переменных, которые характеризуют состояние системы (так называемых неустойчивых мод или параметров порядка [2]). Остальные переменные (моды), являясь устойчивыми за короткие (по сравнению со временем затухания параметра порядка) времена релаксируют к квазистационарному состоянию, которое определяется наиболее медленно релаксирующей модой (параметром порядка). Это позволяет исключить их из рассмотрения, в соответствии с так называемым принципом подчинения, короткоживущих мод [2]. Проведение этой процедуры конкретно для каждой системы и, как правило (сокращая число переменных, описывающих состояние системы) приводит к уравнениям мезоскопического этапа типа (3).

## **2. Типичные примеры систем на мезоскопическом этапе эволюции.**

В настоящем разделе рассмотрим некоторые примеры построения уравнений мезоскопического этапа эволюции. Анализ полученных моделей будет проведен в следующем разделе.

### **Задача о торговце.**

Рассмотрим торговую точку, продающую товар одного наименования по средней цене, сложившейся на рынке этого товара. Предположим далее, что товар мгновенно поступает в торговую точку со склада, на котором имеется в начале  $N$  единиц товара. Пусть  $x(t_1)$  - количество единиц товара, проданного в момент времени  $t_1$ . В момент времени  $t_2$  количество проданного товара

$$x(t_2) = x(t_1) + \alpha x(t_1)$$

где  $\alpha$  - часть товара, проданного за время  $t = t_2 - t_1$ , вычисленное в долях  $x(t_1)$ . Везде в дальнейшем будем считать долю  $\alpha$ , не зависящей от времени, тогда

$$\begin{aligned} x(t_3) &= x(t_2) + \alpha x(t_2) \\ &\vdots \\ x(t_n) &= x(t_{n-1}) + \alpha x(t_{n-1}) \end{aligned}$$

Величина  $\alpha$  пропорциональна количеству товара, имеющегося на складе в соответствующий момент времени,  $\alpha \propto N(t)$ . Поскольку количество товара на складе убывает пропорционально числу проданного товара (торговая точка предполагается единственной), то

$$\alpha = \alpha_0 (N - x(t))$$

Из сказанного выше следует, что количество товара, проданного в момент времени  $t_n$  определяется из уравнения

$$x(t_n) = x(t_{n-1}) + \alpha_0 (N - x(t_{n-1}))x(t_{n-1}) \quad (1)$$

Введем безразмерную переменную  $Z \equiv \frac{x(t_n)}{N}$ , тогда из (1) имеем

$$Z(t_n) = Z(t_{n-1}) + \alpha_0 (N - Z(t_{n-1}))Z(t_{n-1}) \quad (2)$$

Дальнейшее упрощение достигается путем перехода к непрерывному времени

$$\begin{aligned} \frac{Z_n - Z_{n-1}}{\Delta n} &\equiv \dot{Z} \\ \dot{Z} &= \alpha_0 N(1 - Z)Z \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает поведение торговца однородным товаром в произвольный момент времени при сделанных выше предположениях. Аналогичное уравнение возникает при рассмотрении динамики популяции. Анализ построенной модели будет проведен ниже (см. Главу 3)

## Динамика популяции

Рассмотрим сначала какую-либо одну популяцию, состоящую из бактерий, растений или животных одного вида. Задача описания судьбы каждой особи представляется безнадежной. Вместо этого следует найти "макроскопические" характеристики, описывающие популяцию. Очевидно, что такая характеристика - число особей в популяции. Легко видеть, что эта характеристика управляет судьбой особей, по крайней мере, "в среднем". Пусть число (или плотность) особей есть  $n$ . Оно меняется в зависимости от скорости (числа рождений)  $q$  и скорости гибели (числа смертей)  $d$ :

$$\dot{n} = q - d$$

Скорости рождения и смерти зависят от числа имеющихся особей. В простейшей форме можно предположить, что

$$q = \gamma n$$

$$d = \chi n$$

При этом следует иметь в виду, что если количество пищи ограничено, и  $N$  - ее количество в начальный момент времени, то

$$\gamma = \mu (N - \alpha n)$$

Величина  $\alpha$  здесь представляет собой среднее количество пищи, потребляемое одной особью. Коэффициент  $\gamma$  удобно записать в виде

$$\gamma = \mu \alpha \left( \frac{N}{\alpha} - n \right) \equiv \varepsilon (N_0 - n)$$

$$\varepsilon = \mu \alpha; N_0 \equiv \frac{N}{\alpha};$$

В этом случае уравнение динамики рассматриваемой популяции принимает вид

$$\dot{n} = \varepsilon (N_0 - n)n - \chi n \tag{4}$$

После обезразмеривания это уравнение принимает вид:

$$\dot{Z} = (\varepsilon N_0 - \chi)Z(1-Z)$$

$$n = \frac{\varepsilon N_0 - l}{\varepsilon} \quad (5)$$

### Пример из физики. Одномодовый лазер

Лазер - это устройство, в котором в процессе стимулированного излучения порождаются фотоны. Изменения со временем числа фотонов  $n$  определяется уравнением вида

$$\dot{n} = \text{"прирост"} - \text{"потери"}$$

Прирост обусловлен стимулированным излучением. Он пропорционален числу уже имеющихся фотонов и числу возбужденных атомов  $N$ . При этом предполагается, что основной уровень, на который происходят переходы с испусканием света, поддерживается пустым. Таким образом

$$\text{"прирост"} = GNn$$

здесь  $G$  - коэффициент усиления, который, может быть получен из микроскопической теории. Член, описывающий потери, обусловлен уходом фотонов, например, через торцы лазера. Единственное допущение, которое мы принимаем - это то, что скорость ухода пропорциональна числу имеющихся фотонов. Следовательно

$$\text{"потери"} = \beta n$$

$\beta = \frac{1}{\tau}$ ,  $\tau$  - время жизни фотона в лазере. Число возбужденных атомов уменьшается за счет испускания фотонов. Так, если в отсутствие лазерной генерации число возбужденных атомов поддерживается внешней накачкой на постоянном уровне  $N_0$ , то благодаря процессу генерации истинное число фотонов будет меньшим. Это уменьшение пропорционально числу имеющихся в лазере фотонов, поскольку эти фотоны постоянно возвращают атомы в основное состояние. Таким образом

$$N = N_0 - n$$

Используя приведенные соотношения, получаем основное уравнение нашей упрощенной лазерной модели

$$\dot{n} = (GN_0 - \beta)n - Gn^2 \quad (6)$$

Введя обозначение

$$n(t) = \frac{GN_0 - \beta}{G} Z(t)$$

получим окончательно

$$\dot{Z} = (GN_0 - \beta)Z(1 - Z) \quad (7)$$

Рассмотренные примеры демонстрируют удивительное свойство: уравнения, описывающие динамику таких разных процессов, как динамика торговой точки, динамика лазерной генерации, динамика популяции, оказываются удивительно похожими. Это обстоятельство демонстрирует высказанный выше тезис: уравнения гидродинамического этапа эволюции не зависят от деталей поведения объектов рассматриваемой системы. Конечно, конкретные коэффициенты, такие как  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  и т.д. определяются "микроскопической" динамикой поведения объекта. Однако в подавляющем большинстве конкретных приложений эти коэффициенты могут быть вычислены из эмпирических соображений\*.

Конечно, уравнения (7) или (4), или (1) не являются всеобщими. Для более сложных явлений возникают уравнения динамики на гидродинамическом этапе эволюции, отличные от (1), (7).

## Модель формирования общественного мнения.

Интуитивно представляется очевидным, что процессы формирования общественного мнения, действие инициативных групп и т.д. могут быть описаны в рамках развиваемого подхода. С другой стороны микроскопическое рассмотрение этих явлений является чрезвычайно трудной, если не невозможной задачей, поскольку действие индивидуумов (объектов) определяется большим числом, часто неизвестных, параметров. Однако на мезоскопическом этапе

---

\* **Замечание:** Уравнение динамики торговой точки (1) либо его непрерывный аналог

$$\dot{x} = \alpha (N - x)x$$

по форме совпадает с уравнением динамики популяций (7) либо лазерной генерации (4), если ввести потери товара в результате их "усушки и утруски" либо регулярной кражи

$$\dot{x} = \alpha (N - x) - \Theta x \quad (8)$$

где  $\Theta^{-1}$  - время, в течение которого происходят потери.

эволюции становится возможным количественное описание явлений этого класса.

В соответствии с изложенным выше, вначале необходимо найти макроскопические переменные, описывающие общество. Для этого мы должны обратиться к таким понятиям, как общественное мнение. Конечно, понятие мнения определено весьма неточно. Однако, общественное мнение можно измерять с помощью, например, опросов, выборов и т.д. Рассмотрим простейший случай, когда существуют только два типа мнений: "за" и "против", обозначаемых знаками «+» и «-»<sup>\*</sup>.

Очевидно, что удобными для такого описания величинами являются числа индивидуумов с соответствующими мнениями  $n_+$  и  $n_-$ . Введем основное представление формирования общественного мнения - формирование мнения индивидуума происходит под влиянием групп людей с тем же самым или противоположным мнением.

Допустим, что существует определенный социальный климат, облегчающий процесс изменения общественного мнения или затрудняющий процесс его формирования. Предположим также, что существует внешнее информационное поле, влияющее на отдельного индивидуума и приводящее к облегчению принятия им одного из определенных решений. Пусть  $n_0$  - полное число индивидуумов. Число индивидуумов имеющих мнение "за" -  $n_+$  - и "против" -  $n_-$  - во внешнем информационном поле  $H$  в обществе с общественным климатом  $T$  (понятия информационного поля и общественного климата будут определены в следующем разделе) имеет вид:

$$\begin{aligned} n_+ &= A e^{H/T} \\ n_- &= A e^{-H/T} \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A$  - нормировочная постоянная. Внешнее информационное поле благоприятствует принятию решения "за" при  $H > 0$  и решению "против" при  $H < 0$ . Если предположить, что полное число индивидуумов постоянно и равно  $n_0$ , то

---

<sup>\*</sup> **Замечание** Рассматриваемая модель соответствует известной в теории случайных полей модели голосования [3]. В том случае, если в обществе имеется много различных мнений, математическая модель может быть сформулирована аналогично тому как это делается ниже, и приводит к хорошо известной в теории магнетизма сферической модели.



$$p_+ + p_- = n_0$$

Откуда

$$A = n_0 \left( e^{H/T} + e^{-H/T} \right)^{-1} \quad (10)$$

Характеристикой изменения того или иного мнения в обществе служит, очевидно, разность между количеством индивидуумов "за" и "против":

$$\xi = p_+ - p_-$$

Из (9), (10) находим

$$\xi = n_0 \frac{e^{H/T} - e^{-H/T}}{e^{H/T} + e^{-H/T}} \equiv \bar{\xi}(H) \quad (11)$$

Внешнее информационное поле  $H$  складывается из двух частей: из информационного поля, формируемого, например, средствами массовой информации  $H_0$ , и внешнего поля, формируемого самими индивидуумами  $H_{\text{инд}}$  (слухи, сплетни и т.д.). Естественно предположить, что

$$H_{\text{инд}} = \lambda \xi$$

Действительно,  $H_{\text{инд}} > 0$ , при  $p_+ > p_-$  и  $H_{\text{инд}} < 0$ , при  $p_+ < p_-$ , что согласуется со знаком внешнего информационного поля  $H$  (см. (9)). Таким образом

$$H = H_0 + \lambda \xi$$

и из (11) получаем

$$\xi = \bar{\xi}(H_0 + \lambda \xi) \quad (12)$$

В реальных условиях процесс формирования общественного мнения зависит от времени. Поскольку, в случае, когда зависимость от времени отсутствует  $\xi = \bar{\xi}$ , то естественно предположить, что

$$\dot{\xi} = -\rho(\xi - \bar{\xi}) \quad (13)$$

Система (11), (12), (13) определяет основные мезоскопические уравнения рассматриваемой модели. Для дальнейшего упрощения предположим, что  $\frac{H}{T} \ll 1$ . В этом случае, разлагая  $\bar{\xi}(H_0 + \lambda \xi)$  в ряд и вводя новую переменную

$$\psi = H_0 + \lambda \xi$$

получим окончательно

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha \rho}{T} \left\{ \psi \left( n_0 - \frac{T}{\lambda} \right) - \frac{n_0}{3} \psi^3 + \frac{H_0}{\lambda} \right\} \quad (13')$$

Введем новые переменные

$$\tau = t \cdot \frac{3\lambda \alpha}{T n_0}$$

$$h = H_0 \frac{3}{\lambda n_0}$$

тогда уравнение (13') принимает вид

$$\dot{\psi} = a\psi - \psi^3 + h$$

$$a = \frac{3 \left( n_0 - \frac{T}{\lambda} \right)}{n_0} \quad (14)$$

Это уравнение описывает в рамках данной модели динамику формирования общественного мнения. Его подробный анализ будет проведен в следующем разделе.

### **Пример из физики .Модель фазового перехода парамагнетик - ферромагнетик**

Рассмотрим систему  $N$  невзаимодействующих частиц, каждая из которых имеет спин  $S$ . Гамильтониан такой системы во внешнем поле  $\vec{H}$  имеет вид

$$H = - \sum_{j=1}^N \mu \vec{S}_j \vec{H}, \text{ где } \mu = g \frac{eh}{2mc}$$

где  $\mu = g \frac{eh}{2mc}$ ,  $g$  - фактор Ланде;  $e$ ,  $h$ ,  $m$ ,  $c$  - заряд электрона, постоянная Планка, масса электрона, скорость света соответственно.

Из квантовой механики известно, что произведение  $\vec{S}_j \vec{H}$  может принимать лишь следующие значения

$$\vec{S}_j \vec{H} = m_j |\vec{H}|, \quad m_j = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

Вычислим статистическую сумму

$$Z_m = Z_1^N$$

$$Z_1 = \sum_{m=-s}^s e^{mx} = \frac{sh\left(s + \frac{1}{2}\right)x}{sh\frac{1}{2}x}$$

где  $x = \frac{\mu H}{T}$ ;  $T$  - температура системы.

Магнитный вклад в свободную энергию равен

$$G(T, H) = -Nk_B T \cdot \ln Z_1$$

$k_B$  - постоянная Больцмана.

Намагничивание системы определяется соотношением:

$$M(T, H) = -\frac{\partial G}{\partial H}$$

В рассматриваемом случае из статистической суммы  $Z_1$  получаем

$$\begin{aligned} M(T, H) &= M_0 B_s(S\beta \mu H) \\ M_0 &= NS\mu \end{aligned} \tag{15}$$

Функция  $B_s(y)$  оказывается функцией Бриллюэна для спина  $S$  и имеет вид:

$$B_s(y) = \frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth}\left(\frac{2S+1}{2S} y\right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2S} y\right) \tag{16}$$

Идея теории ферромагнетизма Вейсса заключается в том, что система спинов является источником магнитного поля. Поэтому реальное магнитное поле, действующее на индивидуальный спин, представляет собой сумму внешнего поля  $H_0$  и молекулярного поля  $H_m$ . Если спины "не чувствуют" друг друга, то молекулярное поле отсутствует. Оно возникает непосредственно из взаимодействия индивидуальных спинов. Кроме того, если спины ориентированы случайным образом, их взаимодействие компенсируется. Молекулярное поле

может существовать лишь в том случае, когда уже имеется некоторая средняя поляризация; тогда она обуславливает добавочное поле, которое в свою очередь увеличивает поляризацию и т.д. Этот лавинообразный процесс, конечно, ограничивается тепловыми эффектами, которые, противодействуют упорядоченному влиянию взаимодействий. Здесь мы имеем типичный случай кооперативного эффекта.

Можно допустить, что в первом приближении молекулярное поле пропорционально намагниченности и, следовательно,

$$H = H_0 + \lambda \mu \quad (17)$$

где  $\lambda$  называется параметром молекулярного поля.

Используя (17), из (15) получаем

$$M = M_0 B_s (S \beta \mu \lambda H) \quad (18)$$

При выводе соотношения (18) мы предполагаем стационарность системы. В случае, когда имеется зависимость от времени намагниченности, естественно предположить, что

$$\dot{M} = -\alpha (M - \bar{M}) \quad (19)$$

где  $\bar{M} \equiv M_0 B_s (S \beta \mu \lambda M)$

В том случае, когда  $S \beta \mu \lambda M \ll 1$  из (19) получаем

$$\dot{M} = \alpha \chi (T_c - T) M - \alpha b M^3 \quad (20)$$

где  $T_c = \frac{\lambda N \mu^2 S(S+1)}{3K_s}$

Параметры  $\chi$  и  $b$  выражаются через полный спин  $S$ , величину  $\mu$ , число частиц  $N$  и константу  $\lambda$ . Важно, что  $\chi > 0$ ,  $b > 0$ /

Введем обозначение

$$\tau = (\alpha b)^{-1}$$

Тогда из (20) получим ( $\psi \equiv M$ )

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= a \psi - \psi^3 \\ a &\equiv \frac{\chi}{b} (T_c - T) \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что все рассмотренные до сих пор модели носили потенциальный характер, т.е. уравнения мезоскопического этапа эволюции имели вид уравнений (3) раздела 1. Действительно, из (3),

(5), (7) раздела 2 следует, что уравнения торговой точки, лазера или динамики популяции могут быть представлены в виде

$$\dot{Z} = -\frac{\partial V}{\partial Z} \quad (22)$$

$$V = \frac{Z^3}{3} - a \frac{Z^2}{2}$$

$$\text{где } a = \begin{cases} \frac{GN_0 - \beta}{G}, & \text{для лазера} \\ \frac{\varepsilon N_0 - \chi}{\varepsilon}, & \text{для популяции} \\ \frac{\alpha N_0 - \beta}{\alpha}, & \text{для торговой точки} \end{cases}$$

Аналогично, уравнения, описывающие процесс формирования общественного мнения ,либо динамики магнитного фазового перехода могут быть записаны в виде

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$V = \frac{\psi^4}{4} - a \frac{\psi^2}{2} - h\psi$$

здесь для магнетика  $h=0$  ,а для задачи формирования общественного мнения

$$h = \frac{3H_0}{\lambda n_0}$$

Приведем пример системы, для которой уравнения мезоскопического этапа эволюции не носят потенциального характера, однако, после проведения процедуры сокращения числа переменных в соответствии с описанной выше процедурой, приводит к уравнению, носящему потенциальный характер.

## Модель формирования организованной преступности

Рассматриваемая ниже модель исходит из основного предположения о том, что формирование организованной преступности происходит в результате естественного объединения преступников, живущий в основном за счет грабежа богатых людей.

Пусть  $n_1$  - число богатых людей в обществе, которых в дальнейшем будем именовать банкирами,  $n_2$  - число преступников. Уравнения мезоскопического этапа вновь имеют вид

$$\dot{n}_j = (\text{прирост})_j - (\text{потери})_j, \quad j=1,2$$

Рассмотрим изменение числа банкиров. Будем считать, что увеличение их числа будет происходить вследствие перехода руководящих работников, либо других чиновников в финансовый бизнес, тогда

$$(\text{прирост})_1 = Q_1 - \text{число таких приходов в единицу времени.}$$

Число банкиров уменьшается вследствие их естественной смерти (либо перехода на другую работу), банкротства возглавляемых ими банков или вследствие их убийства. Поэтому

$$(\text{потери})_1 = \chi n_1 + \alpha n_1 n_2$$

Здесь первое слагаемое описывает потери в результате естественной смерти, или банкротства, второе - потери из-за убийства преступниками. Таким образом

$$\dot{n}_1 = -\chi n_1 - \alpha n_1 n_2 + Q$$

Рассмотрим теперь уравнение, описывающее динамику числа преступников  $n_2$ . Это число увеличивается за счет выхода преступников из тюрем и вследствие "грабежа" банкиров. Поэтому

$$(\text{прирост})_2 = Q_2 + \beta n_1 n_2$$

где  $Q_2$  - число преступников, выходящих на свободу в единицу времени. Второе слагаемое описывает увеличение числа преступников из-за ограбления банкиров.

Число преступников уменьшается вследствие работы правоохранительных органов

$$(\text{потери})_2 = \gamma n_2$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= -\chi n_1 - \alpha n_1 n_2 + Q_1 \\ \dot{n}_2 &= -\gamma n_2 + \beta n_1 n_2 + Q_2\end{aligned}\tag{24}$$

Уравнения (24) описывают на мезоскопическом этапе динамику изменения числа банкиров и преступников. Очевидно, что эти уравнения не носят потенциального характера: невозможно подобрать такую функцию  $V(n_1, n_2)$ , для которой уравнения (3) раздела 1 приводят к уравнениям (24).

Покажем, однако, что при определенных условиях у системы, описываемой уравнениями (24) возникает неустойчивость, развитие которой приводит к формированию организованной преступности, рассматриваемой как образование коллективной "моды". Уравнение для этой моды будет носить потенциальный характер\*.

Определим в начале стационарные решения уравнений (24)  $n_i^{(0)}$ ,  $i=1,2$

$$\begin{aligned}\chi n_1^{(0)} + \alpha n_1^{(0)} n_2^{(0)} &= Q_1 \\ \gamma n_2^{(0)} - \beta n_1^{(0)} n_2^{(0)} &= Q_2\end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть решены точно. Однако в дальнейшем нас будут интересовать те решения, которые отвечают небольшому числу банкиров и преступников. В этом случае вторыми слагаемыми в (24) можно пренебречь, тогда

$$\begin{aligned}n_1^{(0)} &= \frac{Q_1}{\chi} \\ n_2^{(0)} &= \frac{Q_2}{\gamma}\end{aligned}$$

Смысл этих решений очевиден: количество банкиров и преступников определяется балансом между процессами прихода  $Q_j$  ( $j=1,2$ ) и процессами "естественного" выбывания соответствующих особей.

Для изучения возможности возникновения неустойчивости в рассматриваемой системе проведем линейный анализ устойчивости уравнений (24). Для этого решения уравнений (24) будем искать в виде

---

\* **Замечание.** В рассматриваемом нами случае под системой понимается общество, состоящее из «банкиров» и преступников и взаимодействующее с «остальным миром».

$$n_1 = n_1^{(0)} + \delta n_1$$

$$n_2 = n_2^{(0)} + \delta n_2$$

В этом случае из (24) получим

$$\delta \dot{\vec{n}} = A \delta \vec{n} + \begin{pmatrix} -\alpha \delta n_1 \delta n_2 \\ \beta \delta n_1 \delta n_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta \vec{n} = \begin{pmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -\chi - \alpha n_2^{(0)} & -\alpha n_1^{(0)} \\ \beta n_2^{(0)} & \beta n_2^{(0)} - \gamma \end{pmatrix} \quad (25)$$

Считая, что  $|\delta n_i|$ ,  $i = 1, 2$  малы по сравнению с  $n_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2$ , можно пренебречь нелинейными членами в (25) типа.  $\begin{pmatrix} -\alpha \delta n_1 \delta n_2 \\ \beta \delta n_1 \delta n_2 \end{pmatrix}$  В этом случае

$$\delta \dot{\vec{n}} = A \delta \vec{n} \quad (26)$$

Решения уравнений (26) естественно искать в виде

$$\delta \vec{n} \propto e^{-\lambda t} \quad (27)$$

Параметр  $\lambda$  определяет наличие или отсутствие в рассматриваемой системе неустойчивость мод. При  $\lambda > 0$  неустойчивых мод нет - любое малое отклонение  $\delta \vec{n} \propto e^{-\lambda t}$  экспоненциально затухает со временем,  $\lambda < 0$  отвечает возникновению таких мод,  $\delta \vec{n} \propto e^{-\lambda t}$  и малые отклонения от стационарных решений нарастают.

Подставляя (27) в (26), получим характеристическое уравнение для определения  $\lambda$ , отвечающее существованию нетривиального решения системы однородных уравнений (26)

$$\det B = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda - \alpha n_2^{(0)} - \chi & -\alpha n_1^{(0)} \\ \beta n_2^{(0)} & -\lambda + \beta n_2^{(0)} - \gamma \end{pmatrix} \quad (28)$$

В рамках единых (в рассматриваемой модели) приближений из (28) следует, что



$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \chi + \alpha n_2^{(0)} \\ \lambda_2 &= -\beta n_1^{(0)} + \gamma\end{aligned}\quad (29)$$

Видно, что  $\lambda = \lambda_1$  отвечает устойчивой ( $\lambda > 0$ ) моде, в то время как  $\lambda_2$  при  $n_1^{(0)} > \frac{\gamma}{\beta}$  становится отрицательной и в рассматриваемой системе возникает неустойчивость. Из дальнейшего анализа будет видно, что существенным обстоятельством является сам факт наличия возможности возникновения неустойчивой моды: всегда можно выбрать стационарные решения  $n_1^{(0)}$  и  $n_2^{(0)}$ , так, чтобы мода, отвечающая  $\lambda = \lambda_1 > 0$  затухала значительно быстрее, чем мода с  $\lambda = \lambda_2 > 0$ . Это будет выполнено, если

$$\gamma - \beta n_1^{(0)} < \chi + \alpha n_2^{(0)} \quad (30)$$

Вычислим собственные вектора матрицы  $A$ , отвечающие собственным значениям (29).

$$\begin{aligned}A\vec{q}_1 &= \lambda_1 \vec{q}_1 \\ A\vec{q}_2 &= \lambda_2 \vec{q}_2\end{aligned}$$

Стандартное рассмотрение приводит к следующему результату: собственному значению  $\lambda = \lambda_1 \equiv \chi + \alpha n_2^{(0)}$  отвечает собственный вектор

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}; \quad b \equiv -\frac{\beta n_2^{(0)}}{\beta n_1^{(0)} + \alpha n_2^{(0)} - \gamma + \chi} < 0 \quad (31)$$

Собственному значению  $\lambda = \lambda_2 = -(\beta n_1^{(0)} + \gamma)$  отвечает собственный вектор

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a \equiv -\frac{\alpha n_1^{(0)}}{\beta n_1^{(0)} + \alpha n_2^{(0)} - \gamma + \chi} < 0 \quad (32)$$

При выполнении условия (30) в рассматриваемой системе возникает новая долгоживущая коллективная мода, соответствующая (см (32)) наличию организации преступников с "примесью" (в меру параметра  $a$ ) банкиров. Получим уравнение, определяющее релаксацию амплитуды этой долгоживущей моды. Для этого решение точных уравнений (25) будем искать в виде

$$\delta \vec{n} = \vec{q}_1 \xi_1(t) + \vec{q}_2 \xi_2(t) \quad (33)$$

Из (33) следует, что

$$\begin{aligned} \delta n_1 &= \xi_1 + a \xi_2 \\ \delta n_2 &= b \xi_1 + \xi_2 \end{aligned} \quad (34)$$

Используя это обстоятельство и тот факт, что

$$\begin{aligned} A \vec{q}_1 &= \lambda_1 \vec{q}_1 \\ A \vec{q}_2 &= \lambda_2 \vec{q}_2, \end{aligned}$$

из (25) получим уравнения для амплитуд  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \lambda_1 \xi_1 - \frac{1}{1-ab} (\alpha \xi_1 \xi_2 + \alpha ab \xi_1 \xi_2 + \alpha b \xi_1^2 + \alpha a \xi_2^2 + \beta a \xi_1 \xi_2 + \\ &\quad + \beta ab \xi_1^2 + \beta a^2 \xi_2^2) \\ \dot{\xi}_2 &= \lambda_2 \xi_2 + \beta (\xi_1 \xi_2 + ab \xi_1 \xi_2 + b \xi_1^2 + a \xi_2^2) \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ , то тогда мода, отвечающая параметру  $\xi_1$ , затухает значительно быстрее, чем мода  $\xi_2$ . В этом случае из (34) следует, что

$$\xi_1 = \frac{\alpha a + \beta a^2}{\lambda_1(1-ab)} \xi_2^2 \quad (35)$$

При получении этого результата был использован известный принцип подчинения Г.Хакена[2]. ( $\dot{\xi}_1 \approx 0$ ;  $\xi_2^2 \gg \xi_1 \xi_2$ ;  $\xi_2^2 \gg \xi_1^2$ )

Подставляя (35) в (34), получим окончательно

$$\dot{\xi} = \lambda \xi - B \xi^2 - \Gamma \xi^3 \quad (36)$$

здесь

$$\xi = \xi_2;$$

$$\lambda = \lambda_2 \equiv \beta n_1^{(0)} - \gamma;$$

$$B = -\beta a > 0;$$

$$\Gamma \equiv \beta \cdot (\alpha a + \beta a^2) / (\chi + \alpha n_1^{(0)}) > 0; \quad a < -\alpha / \beta;$$

Уравнение (36) полностью определяет характер решений рассматриваемой системы. Действительно, зная  $\xi = \xi_2$  из уравнения (35) легко вычислить устойчивую моду  $\xi_1 \propto \xi_2^2$ . В этом случае уравнения (33) определяют решения исходной системы уравнений (25).

Уравнение (36) является потенциальным, т.е. может быть приведено к виду

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \text{ где } V = \frac{\Gamma \xi^4}{4} + \frac{B \xi^3}{3} - \lambda \frac{\xi^2}{2} \quad (37)$$

Статистическому анализу решений всех моделей, описанных в предыдущем разделе, будет посвящен следующий параграф.

### **3. Качественный анализ поведения решений рассмотренных моделей.**

Рассмотренные выше примеры систем, релаксирующих на мезоскопическом этапе эволюции, носят потенциальный характер (либо сводятся к таковым). В соответствии с вероятностной интерпретацией, в равновесном состоянии плотность вероятности реализации состояния системы с описывающейся переменной  $\xi$  имеет вид

$$f(\xi) = \frac{1}{Z} e^{-\beta V(\xi)} \quad (1)$$

где  $\beta > 0$ ;  $Z^{-1}$  - нормировочный множитель. Соотношение (1), при заданном  $V(\xi)$  определяет вероятность нахождения изучаемой системы в определенном состоянии  $\xi$  и позволяет вычислять средние значения любой динамической функции  $F(\xi)$

$$\bar{F}(\xi) = \frac{1}{Z} \int e^{-\beta V(q)} F(q) dq$$

Параметр  $\beta$  связан с величиной флуктуаций переменной  $\xi$  в изучаемой системе с помощью флуктуационно-диссипативной

теоремы. Эта связь будет установлена ниже. В дальнейшем будем предполагать, что эта связь установлена и параметр  $\beta$  определен.

## **Поляризация общественного мнения. Фазовый переход 2<sup>го</sup> рода.**

Вернемся к рассмотренной выше модели формирования общественного мнения. Допустим, что внешнее информационное поле  $h$  отсутствует  $h=0$ . Случай  $h \neq 0$  будет рассмотрен ниже. При  $h=0$  уравнение, определяющее разницу  $\psi = n_+ - n_-$  между числом индивидуумов, имеющих мнение "за"  $n_+$  и имеющих мнение "против"  $n_-$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= a\psi - \psi^3; \\ a &= \frac{3(n_0 - T/\lambda)}{n_0} \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $n_0$  - число индивидуумов, принявших участие в выражении общественного мнения,  $T$  - показатель общественного климата, который будет определен ниже,  $\lambda > 0$  - параметр, характеризующий интенсивность возникновения информационного поля вследствие "взаимодействия" между собой отдельных индивидуумов (например, вследствие обмена мнениями между двумя индивидуумами).

Уравнение (2) может быть записано в потенциальном виде

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial V}{\partial \psi}; \quad (3)$$

$$V(\psi) = \frac{\psi^4}{4} - a \frac{\psi^2}{2}$$

Стационарные решения уравнения (3) находятся из условия

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0$$

и соответствуют минимумам потенциала  $V(\psi)$ . В нашем случае эти решения имеют вид

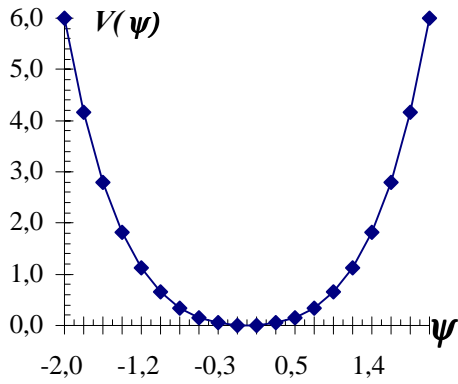
$$\psi = 0, \text{ при } a < 0$$

$$\psi = 0, \text{ при } a > 0$$

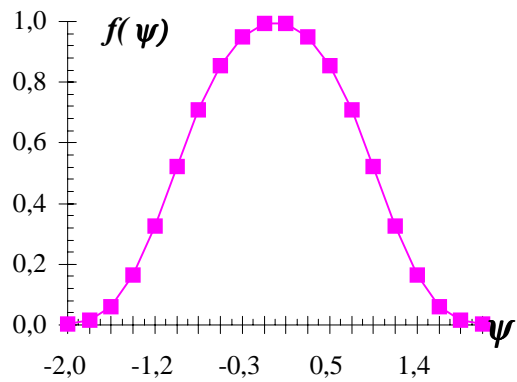
$$\psi = \pm\sqrt{a}, \text{ при } a > 0$$

(4)

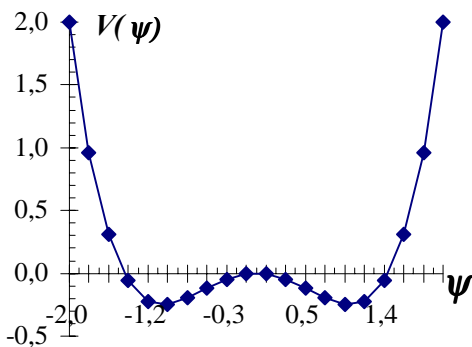
Таким образом, изменение параметра  $a$  (за счет, например, количества индивидуумов, принявших участие в голосовании) с отрицательных значений на положительные приводит к возникновению двух дополнительных решений  $\psi = \pm\sqrt{a}$ . На рисунке 1 приведены зависимости потенциала  $V(\psi)$  и функции распределения  $f(\psi) = e^{-\beta V(\psi)}$  для различных значений параметра  $a$ . Отметим, что максимумы  $f(\psi) = e^{-\beta V(\psi)}$  соответствуют максимумам вероятности нахождения системы при  $\psi = \psi_{\max}$ . Опишем поведение системы, соответствующей приведенным рисункам.



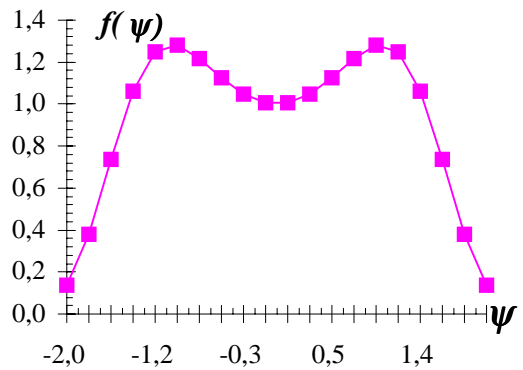
a)



c)



b)



d)

Рис 1 Зависимость потенциала  $V(\psi)$  и функции распределения  $f(\psi)$  при различных значениях параметра  $a$  - рис а) и с) отвечают  $a < 0$ , рис в) и d) отвечают  $a > 0$ .

Если  $a < 0$ , что соответствует высокому значению показателя общественного климата (либо, как будет показано ниже, большим внутренним флуктуациям в обществе, либо низкой активности избирателей), то единственное устойчивое состояние системы - это состояние с  $\psi = 0$  (или  $n_+ = n_-$ ). Таким образом, высокие показатели общественного климата  $T$  в нашей модели соответствуют демократическому обществу, в котором  $n_+ = n_-$ , т.е. общественная идеология отсутствует. Уменьшение показателя общественного климата  $T$  приводит к тому, что при  $T = T_c = \lambda n_0$ , система, первоначально находившаяся в "демократическом" состоянии  $\psi = 0$ , имеет возможность переместиться в одно из состояний  $\psi = \pm \sqrt{a}$ . Возникает типичный случай поляризации общественного мнения: при  $\psi > 0$ , число индивидуумов с мнением "за" превышает число индивидуумов с мнением "против" ( $n_+ > n_-$ ), при  $\psi < 0$ , число индивидуумов с мнением "против" преобладает над числом индивидуумов с мнением "за" ( $n_+ < n_-$ ). Если считать идеологией ее отсутствие, то можно сказать, что при  $a > 0$  возникает сильно идеологизированное общество. Рассмотренная картина аналогична хорошо известному в физике явлению - фазовому переходу второго рода. Образование двух локальных минимумов потенциала  $V(\psi)$  при  $a > 0$  соответствует лишь возможности нахождения системы в одном из минимумов. Предположим, что состояние общества в начальный момент было "демократическим"  $\psi = 0$ . Уменьшение показателя общественного климата  $T$  приводит к тому, что при  $T < T_c$  у  $V(\psi)$  возникает два минимума. Однако система по-прежнему находится в состоянии с  $\psi = 0$ . Это состояние соответствует точке неустойчивого равновесия. Выход системы из этого состояния происходит в результате флуктуаций, которые всегда имеются в системе на мезоскопическом этапе ее эволюции. В рамках настоящей модели вопрос о том, в каком состоянии будет находиться система, определяется случайным образом: с одинаковой вероятностью система может находиться как в состоянии с  $\psi = \sqrt{a}$  так и в состоянии с  $\psi = -\sqrt{a}$ . Эта интерпретация позволяет определить показатель общественного климата  $T$  как величину, характеризующую меру способности индивидуумов к свободе волеизъявления - при низком значении  $T$  индивидуумы не способны к свободному волеизъявлению, при высоком  $T$  - способны.

Иная картина наблюдается при изучении систем, для которых характерные изменения аналогичны фазовым переходам первого рода.

## Формирование организованной преступности. Фазовый переход 1<sup>го</sup> рода.

Формирование организованной преступности (оргпреступности) в рамках рассмотренной выше модели, описывается уравнениями для амплитуды коллективной моды  $\xi$  (Напомним, что коллективная мода в данной модели представляет собой вектор, отвечающий наличию в обществе организованных преступников с "примесью" относительно небольшого числа "банкиров" (см Главу 2)).

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\frac{\partial V}{\partial \xi}; \\ V &= \frac{\Gamma \xi^4}{4} + \frac{B \xi^3}{3} - \frac{\lambda \xi^2}{2} \\ \lambda &= \beta(n_1 - n_c); \\ n_c &= \gamma/\beta.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь  $n_1$ -число "банкиров" в стационарном состоянии:

$$n_1 = Q/\chi\tag{6}$$

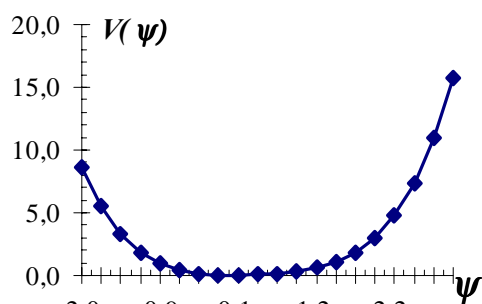
Величины  $B$  и  $\Gamma$  вычислены выше. Существенно то, что и  $B$  и  $\Gamma$  положительны. Число преступников в произвольный момент времени равно

$$n_2 = n_2^{(0)} + \xi\tag{7}$$

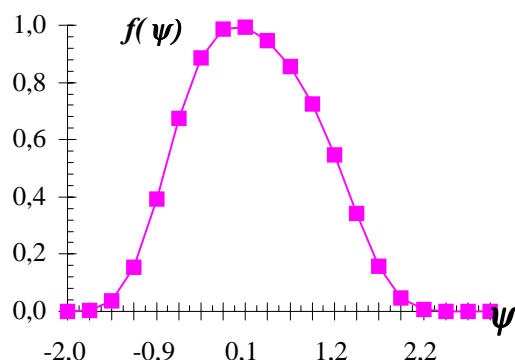
$n_2^{(0)}$  - среднее число неорганизованных преступников, определяемое балансом между выходом из тюрем  $Q_2$  и "посадкой" в тюрьму  $\gamma n_2$ :

$$n_2^{(0)} = Q_2/\gamma\tag{8}$$

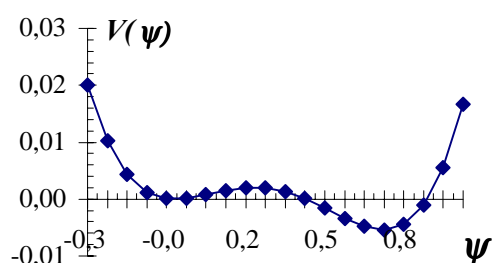
Предположим, что мы умеем управлять процессом увеличения числа банкиров  $n_1$ , например, путем реорганизации органов власти, увеличения числа чиновников, отправленных в отставку и. т.д. Тогда, очевидно, что величина  $n_1$  может увеличиваться в результате этих процессов. Анализ показывает, что при малом числе банкиров у  $V(\xi)$  имеется один минимум в точке  $\xi=0$  (рис.2), отвечающий устойчивому исходному состоянию системы. В этом состоянии вся преступность - неорганизованная. (Под неорганизованной преступностью понимается та ее часть, которая соответствует отсутствию у преступников единой мотивации).



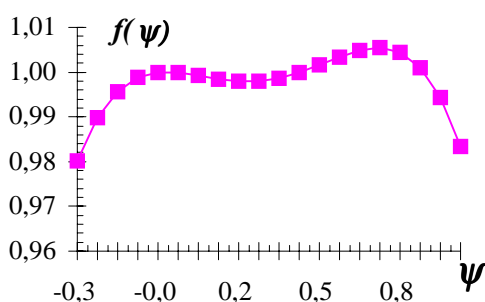
a)



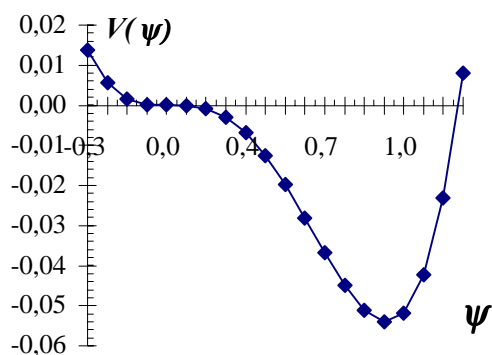
b)



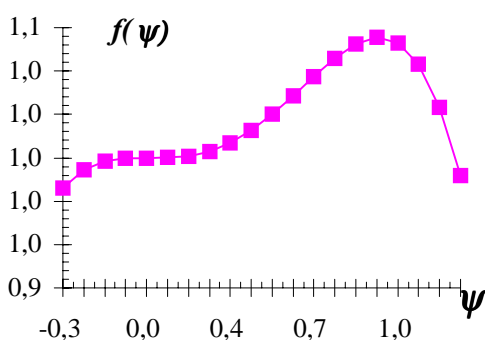
c)



d)



e)



f)

Рис 2. Зависимость потенциала  $V(\psi)$ ;  $\psi \equiv \xi$  и функции распределения  $f(\psi)$  для модели формирования организованной преступности при различном числе "банкиров".  $n_1$

При увеличении числа банкиров  $n_1$  и, следовательно, параметра  $\lambda$  в случае  $-B^2/4\Gamma < \lambda < 0$ , у  $V(\xi)$  является еще один минимум в точке



$\xi = \xi_1$ ;  $\xi_1 = -B/2\Gamma(1 + \sqrt{1-4|\lambda|/B^2})$ . (рис 2.с) В этом случае наша система может находиться как в исходном  $\xi=0$ , так и в метастабильном ( $V(0) < V(\xi_1)$ )  $\xi = \xi_1$  состояниях. Дальнейшее увеличение числа банкиров  $n_1$  постепенно понижает минимум  $V(\xi)$ . При числе банкиров, отвечающих значению  $\lambda_c = -2B^2/9\Gamma$  в системе происходит фазовый переход 1<sup>го</sup> рода: в этой точке в равновесии друг с другом находятся "фазы" с  $\xi=0$  и с  $\xi=\xi_0 = -2B/3\Gamma$ . Это состояние соответствует одинаковой вероятности нахождения преступников в неорганизованном и организованном состояниях. Дальнейшее увеличение  $n_1$  приводит к тому, что "фаза"  $\xi=0$  становится метастабильной, т.е. в системе появляется новый глобальный минимум, отвечающий выгоды образования оргпреступности. (рис 2.е) Этот минимум соответствует значению

$$\xi_2 = -\frac{2}{3} \frac{B}{\Gamma} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{3|\lambda|}{2B^2}} \right) \quad (9)$$

При этом, как видно из (7), структура преступности меняется: общее количество преступников (и, следовательно, преступлений) уменьшается за счет перехода неорганизованной части преступников в преступные организации. Из рисунка 2 следует, что для перехода системы из состояния  $\xi = \xi_0$  в состояние  $\xi = \xi_2$  необходимо преодолеть барьер, "высота" которого  $V(\xi_1) > 0$ . Возникает картина, отличная от рассмотренной выше для фазовых переходов 2<sup>го</sup> рода: для того, чтобы система перешла в новое состояние недостаточно сколь угодно малой флуктуации, необходима флуктуация конечной величины  $\xi = \xi_1 - \delta$ , где  $\delta$  сколь угодно мало. Возникновение такой флуктуации сразу во всей системе затруднительно: в силу большого размера системы (например, России), вероятность  $w$  возникновения такой флуктуации ничтожно мала: Действительно, из (1) следует, что  $w \sim f(\xi = \xi_1) \sim \exp(-V(\xi = \xi_1)\Omega)$ , где  $\Omega$  - размер системы. В этой ситуации, однако, никто не запрещает системе флуктуировать локально (вероятность такой флуктуации не мала для локальных областей  $\Omega_{\text{лок}} \sim V^{-1}(\xi = \xi_1)$ ), так что переход из состояния  $\xi=0$  в состояние  $\xi=\xi_1$  будет происходить лишь в ограниченной области территории России - образуются локальные (городские, районные, областные и т.д.) преступные группировки. На языке фазовых переходов 1<sup>го</sup> рода такой процесс соответствует образованию зародышей новой фазы. Описание этого процесса требует обобщения уравнения (5) на пространственно неоднородный случай. Для этого мысленно разделим нашу систему (в

рассматриваемом случае Россию) на ячейки (регионы), каждая из которых содержит большое число индивидуумов - как банкиров, так и преступников. Обозначим через  $\vec{x}$  координату центра такой ячейки и введем параметр  $\xi(\vec{x})$ , отвечающий количеству организованных преступников в данном регионе. Введем также "взаимодействие" между соседними регионами, рассматривая слагаемое, учитывающее увеличение  $V(\xi)$ , в том случае, когда количества организованных преступников в соседних регионах отличаются друг от друга. Предположим, как обычно [2], что это слагаемое равно  $\gamma(\text{grad}(\xi(\vec{x})))^2$ . Таким образом, в рассматриваемой модели потенциал  $V(\xi)$  представляет собой функционал поля  $\xi(\vec{x}; t)$ :

$$V[\xi] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\Gamma \xi^4}{4} + \frac{B \xi^3}{3} - \frac{\lambda \xi^2}{2} + \gamma(\text{grad}(\xi(\vec{x})))^2 \right\} \quad (10)$$

В рамках этого подхода уравнение (9) и функция распределения  $f[\xi]$  имеют вид:

$$f[\xi] = Z^{-1} \exp(-\beta V[\xi]);$$

$$\dot{\xi} = - \frac{\delta V}{\delta \xi} \quad (11)$$

Из (10), (11) следует, что уравнение релаксации поля  $\xi(\vec{x}; t)$  есть:

$$\dot{\xi} = \lambda \xi - B \xi^2 - \Gamma \xi^3 + \gamma \Delta \xi \quad (12)$$

Решение этого уравнения, описывающее зародыш новой "фазы",  $\xi = \xi_0$  в "фазе"  $\xi = 0$  хорошо известно [4]:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left[ 1 - \tanh(|\vec{r}| - \rho(\tau)) \right] + \frac{h}{4}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \left( \frac{2}{\rho} - \frac{2}{\rho_c} \right);$$

$$\xi_0 = \frac{2B}{3\Gamma};$$

$$\rho_c = \frac{8}{3h};$$

$$h = 8 \left( 1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_c} \right)$$

$$\lambda_c = \frac{2B^2}{9\Gamma};$$
(13)

$$\vec{r} = \vec{x} \sqrt{\frac{\Gamma \xi_0^2}{8 \gamma}}$$

Из (13) следует, что зародыши растут при  $\rho > \rho_c$  и растворяются при  $\rho < \rho_c$ , поэтому  $\rho_c$  обычно называют критическим размером. Поскольку математически уравнения, описывающие образование оргпреступности совпадают с уравнениями применяемыми при описании фазовых переходов первого рода, то в рамках рассматриваемой модели, процесс формирования оргпреступности выглядит следующим образом:

При достаточном числе банкиров  $n_1 > \frac{\gamma}{\beta} - \frac{2B^2}{9\beta \Gamma}$  устойчивым становится состояние "общества", в котором присутствует организованная преступность. При этом возникновение организованной преступности происходит локально за счет флуктуаций (образование территориальных преступных группировок). Если размер территории, контролируемой данной группировкой, достаточно велик, то такая группировка распространяет свое влияние на все большие и большие территории.

Проведенное рассмотрение относится только к начальной стадии формирования оргпреступности. По мере роста числа группировок среднее число банкиров, за счет которых "живут" группировки, уменьшается (см.(35)):

$$n_1 = n_1^{(0)} - S\xi^2;$$

$$S = \frac{\Gamma}{\beta};$$

Флуктуационное возникновение новых устойчивых группировок на этой стадии практически исключено, поскольку критический размер  $\rho_c$  весьма велик. Увеличение критического размера, сопровождающее прогрессирующее падение числа банкиров, приводит к тому, что группировки, контролирующие небольшие территории становятся подкритическими ( $\rho < \rho_c$ ) и исчезают. Таким образом, на этой стадии определяющую роль приобретает процесс поедания мелких группировок более крупными - рост крупных группировок происходит за счет исчезновения мелких. Такой процесс носит название коалесценции. Описание динамики этого процесса подробно изложено в [5]. Качественные результаты этого рассмотрения таковы:

Средняя территория, контролируемая преступниками, увеличивается по закону  $\rho \sim t^{\nu}; \nu \cong 1/3$ .

Среднее число преступных группировок убывает по закону  $N \sim t^{-\eta}; \eta \cong 1$ .

Среднее число выживших банкиров стремится к величине  $n_{\infty} = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{2B^2}{9\beta \Gamma}$  по закону  $n - n_{\infty} \sim t^{-\varepsilon}; \varepsilon \sim 1/3$ .

Рассмотренный пример демонстрирует самосогласованный (эволюционный) подход к образованию в сложной системе коллективной моды. Действительно, в результате развития описанных выше процессов, рассматриваемая система стремится к самосогласованному состоянию, которое определяет как число выживших банкиров, так и число выживших преступников. Существуют, однако, примеры систем, поведение которых носит неэволюционный (в описанном выше смысле) характер. К описанию примера поведения такой системы мы сейчас перейдем.

## **Поляризация общественного мнения. Фазовый переход 1<sup>го</sup> рода, индуцированный внешним полем.**

Рассмотрим модель формирования общественного мнения в случае  $h \neq 0$ . Соответствующее уравнение, определяющее разницу между числом индивидуумов, имеющих мнение "за" и "против"  $\psi = n_+ - n_-$ , имеет вид:

$$\dot{\psi} = a\psi - \psi^3 + h \quad (14)$$

Предположим, что показатель общественного климата  $T$  достаточно мал так, что  $a > 0$  (недемократическое общество). Низкий показатель общественного климата указывает на способность общества к переменам. Стационарные решения уравнения (14) находятся из условия

$$\psi^3 - a\psi = h \quad (15)$$

При  $a > 0$  левая сторона уравнения (15) немонотонная функция, в результате чего в определенном интервале значений  $h$  уравнение имеет три различных вещественных корня, так, что функция  $\psi(h)$

становится немонотонной. Границы этого интервала определяются, очевидно, из условия

$$\frac{d(\psi^3 - a\psi)}{d\psi} = 3\psi_0^2 - a = 0$$

$$\psi_0^3 - a\psi_0 = h_t$$

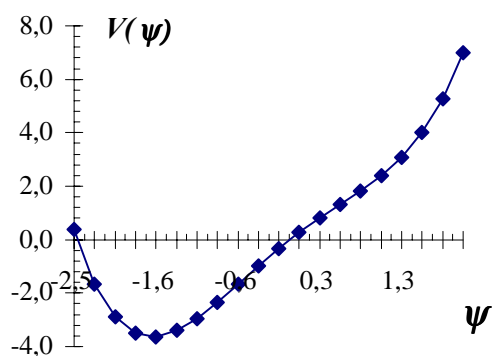
и даются неравенствами  $-h_t < h < h_t$ , где

$$h_t = \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{3}{2}}$$

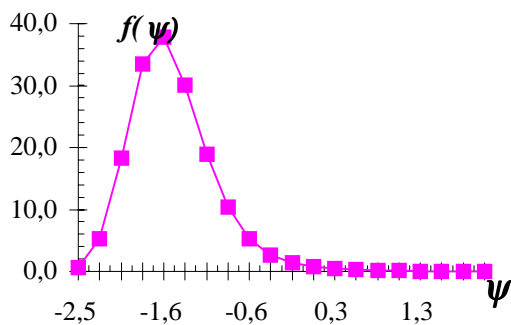
Легко видеть, что ситуация, изображенная на рисунке 4 с),d),e),f),i),k), отвечает неустойчивым состояниям: потенциал, отвечающий уравнению (14)

$$V(\psi) = \frac{\psi^4}{4} - a\frac{\psi^2}{2} - h\psi \quad (17)$$

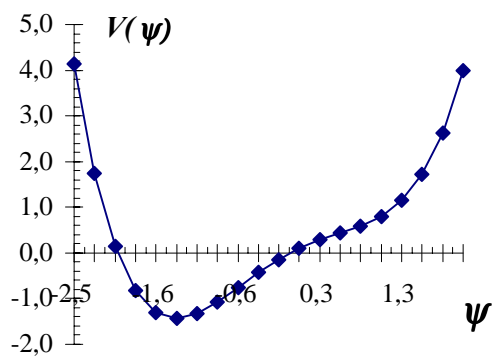
минимален, но величина этого минимума превышает величину другого минимума. Другими словами, этой ситуации отвечают метастабильные состояния системы. Таким образом, если при заданном  $a < 0$  менять внешнее поле  $h$ , то при прохождении параметром  $h$  значения  $h=0$ , возникает фазовый переход первого рода. В этой точке находятся в равновесии друг с другом "фазы" с противоположным по знаку значением параметра  $\psi = \pm\sqrt{a}$ . Вид потенциала, отвечающий рассмотренному случаю при различных значениях внешнего поля  $h$  показан на рисунке 4.



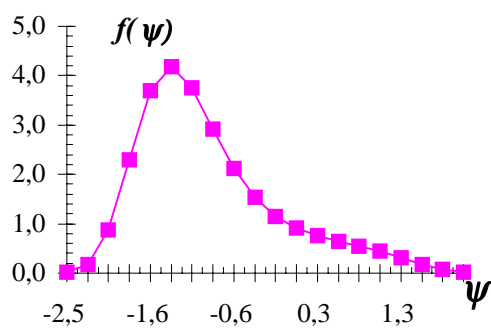
a)



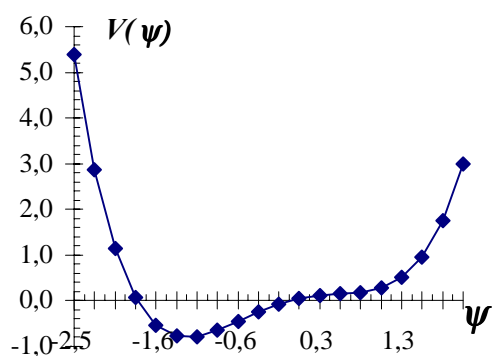
b)



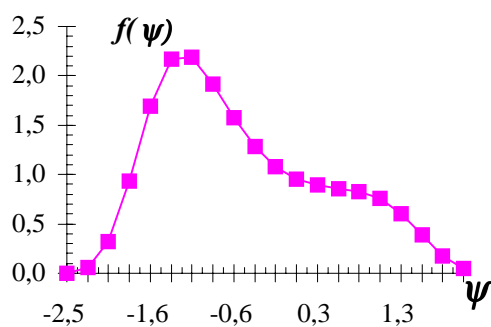
c)



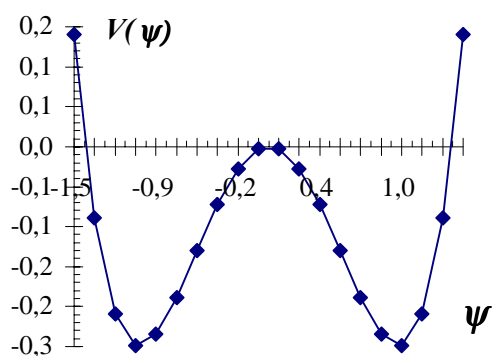
d)



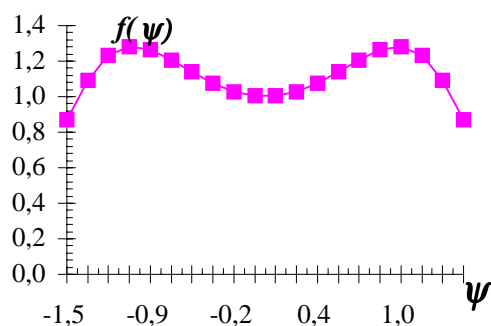
e)



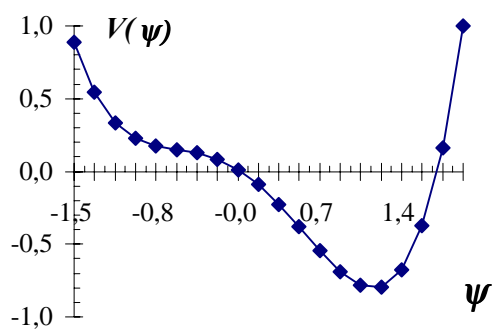
f)



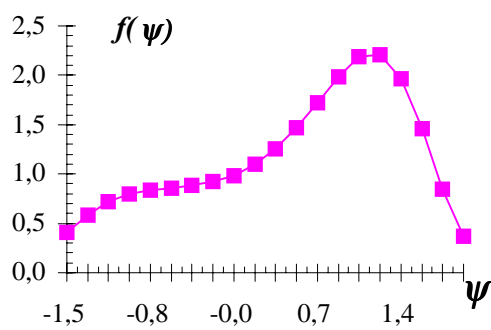
g)



h)



i)



k)

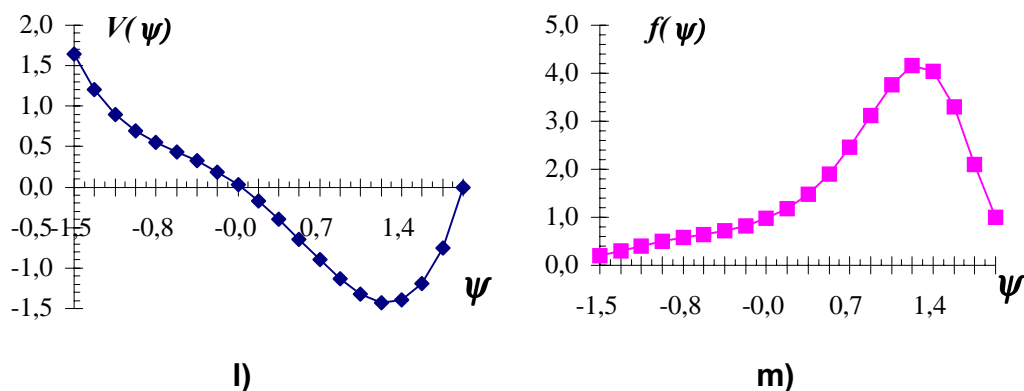


Рис 4 Зависимость потенциала и функции распределения в модели формирования общественного мнения при различных значениях параметра  $h$ -а)  $h = -0.9$ , б)  $h = -0.6$ ; в)  $h = -0.3$

Наличие фазового перехода первого рода в изучаемой системе позволяет сделать вывод о том, что фазовый переход протекает путем образования зародышей новой фазы - локализованных участков территории, на которой мнение, например, "за" преобладает над мнением "против", в то время как на всей остальной территории мнение "против" преобладает над мнением «за».

Анализ, аналогичный проделанному в предыдущем разделе, показывает, что уравнение роста такого зародыша определяется соотношением (в безразмерных единицах):

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_c}, \text{ где } \rho - \text{размер зародыша, } \rho_c = \frac{3}{4h}.$$

При  $h > 0$ , зародыши с  $\rho > \rho_c$  растут, с  $\rho < \rho_c$  - растворяются. Существенным отличием рассмотренного в настоящем разделе фазового перехода состоит в отсутствии режима коалесценции. Внешнее поле  $h$  не зависит самосогласованным образом от характеристик системы. Именно это обстоятельство и определяет неэволюционный характер рассмотренного фазового перехода - система не "подстраивается" под изменение размеров возникающих зародышей. Исчезновение внешнего поля приводит к полному растворению возникших зародышей.

Применим рассмотренную модель к анализу формирования общественного мнения в случае проведения в России кампании по выборам Президента в 1996 году. Будем считать, что имеется всего два кандидата - Б. Н. Ельцин и Г. А. Зюганов. Выбор мнения за

Ельцина автоматически означает выбор против Зюганова и наоборот. К 1996 году в обществе имелось как минимум два существенных фактора:

1. Политика, проводимая за первый срок президентства Ельцина, привела к формированию в обществе тенденции к необходимости перемен (низкий показатель общественного климата Т).

2. Ностальгические настроения значительной части общества, и разумная политика коммунистов привели к формированию внешнего информационного поля  $h_0$ , способствовавшего победе Зюганова.

В рассмотренной ситуации, очевидно, что  $a > 0$ , а рейтинги кандидатов  $n_+, n_-$  определяются соотношениями

$$f(\psi_1) \sim n_+ = A \exp(-\beta V(\psi_1)) \text{ за Ельцина}$$

$$f(\psi_2) \sim n_- = A \exp(-\beta V(\psi_2)) \text{ за Зюганова}$$

$\psi_1, \psi_2$  максимальный положительный и минимальный отрицательный корни уравнения (15) при  $h = h_0 > 0$ . Очевидно, что рейтинг Зюганова значительно превышает рейтинг Ельцина - ситуация, имевшая место в начале 1996 года. В это время действующий Президент России - Б. Н. Ельцин начал проводить интенсивную предвыборную кампанию с использованием всех доступных ему средств массовой информации - телевидения, радио, газет, журналов и т.д. Это привело к возникновению в системе дополнительного внешнего поля  $h_1 < 0$ . Таким образом, полное внешнее поле стало равным  $h = h_0 - |h_1|$ . По мере приближении даты выборов величина внешнего поля  $h_1$  стала такой, что  $|h_1| > h_0$  в результате полное внешнее поле стало отрицательным. В системе произошел фазовый переход первого рода, причем по сценарию образования зародышей новой "фазы" - значительного числа регионов, проголосовавших за Б. Н. Ельцина. Отметим, однако, что такая система неустойчива - отсутствие внешней агитации через средства масс-медиа (выключение поля  $h_1$ ) без изменения внутренней политики (прежде всего экономической) (поле  $h_0$ ) и, как следствие, общественного климата, возвращает общество в исходное состояние, когда коммунисты в значительной степени определяют общественное мнение. Равнодушие значительного числа избирателей, например молодежи (малые  $p_0$ ), лишь способствуют этому процессу.

Рассмотренная модель, естественно, является приближенной, так как не учитывает, например, многообразие кандидатов в



Президенты, образование между ними коалиций и.т.д., однако даже она качественно отражает некоторые черты реальных процессов.

В заключение данного раздела коротко остановимся на анализе модели, описывающей лазер, динамику популяции или торговую точку. Соответствующее уравнение (уравнение Ферхюльста) имеет вид

$$\dot{n} = -\lambda n - n^2 \quad (18)$$

Решение (18) с начальным условием  $n(t=0) = n(0)$  имеет вид:

$$n(t) = -\frac{\lambda}{2} - \frac{|\lambda| (c \exp(-|\lambda| t) - 1)}{2(c \exp(-|\lambda| t) + 1)}$$

$$c = \frac{|\lambda| - \lambda - 2n(0)}{|\lambda| - \lambda + 2n(0)}$$

График зависимости  $n(t)$  приведен на рисунке 5.

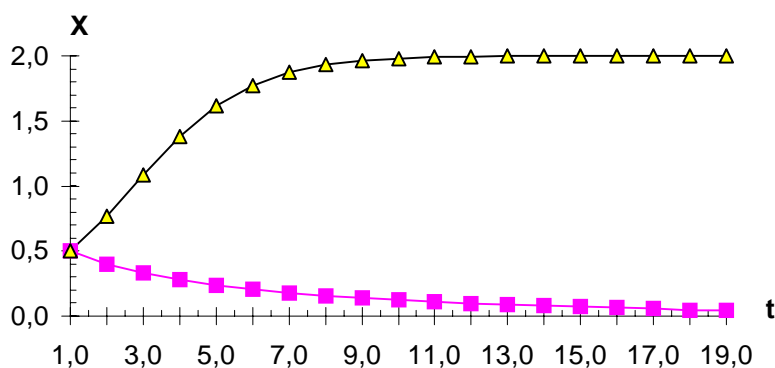


Рис 5. Зависимость от времени количества товара, проданного торговой точкой в модели торговца.

Очевидно, что при  $\lambda > 0$ , вне зависимости от начального значения  $n(0)$ , "популяция" вымирает, при  $\lambda < 0$  - выживает, при этом количество "особей" в популяции  $n = |\lambda|$ . При проведении статистического анализа, заметим, что рассматриваемая система потенциальна

$$\dot{n} = -\frac{dV}{dn}; V(n) = \frac{\lambda n^2}{2} + \frac{n^3}{3};$$

На рисунке 6 приведена зависимость потенциала  $V(n)$  и функции распределения  $f(n) \sim \exp(-\beta V(n))$  при различных значениях параметра  $\lambda$ .

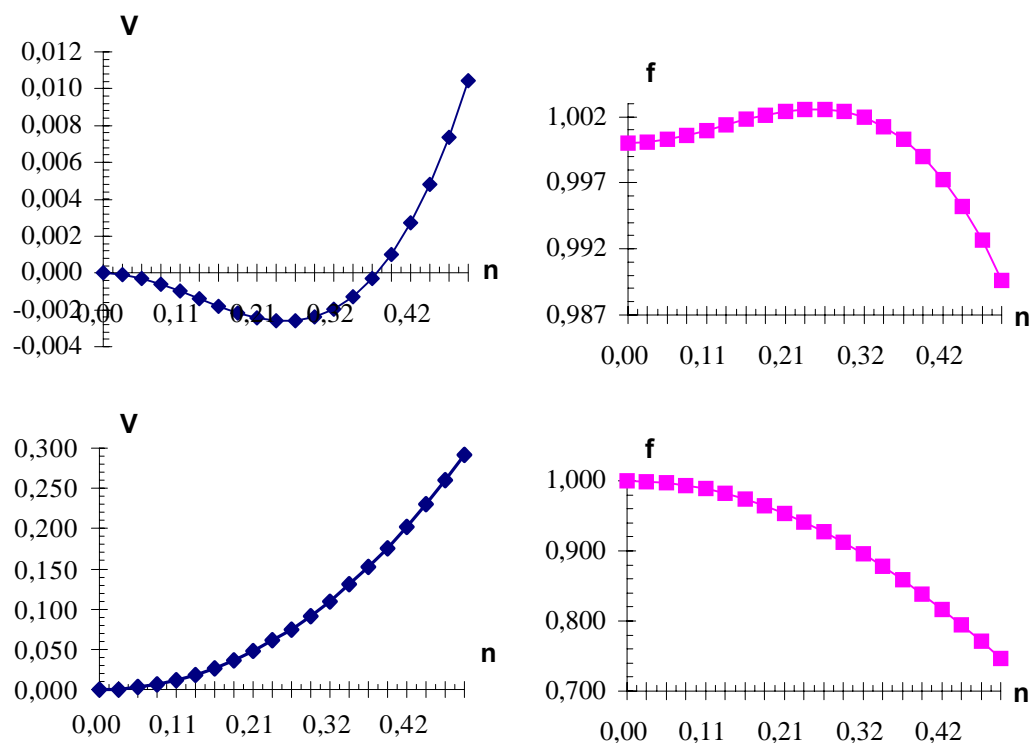


Рис 6. Зависимость потенциала и функции распределения в модели Ферхюльста.

Очевидно, что при  $\lambda > 0$  система с подавляющей вероятностью находится в состоянии с  $n = 0$ . При  $\lambda < 0$  основное состояние системы соответствует наличию ненулевого числа "особей" в "популяции"  $n = |\lambda|$ . Переход из одного состояния в другое происходит вследствие флуктуаций.

## 4. Некоторые общие принципы анализа «непотенциальных» моделей. «Жесткие» и «мягкие» математические модели\*

### МОДЕЛЬ ВОЙНЫ ИЛИ СРАЖЕНИЯ.

В простейшей модели борьбы двух противников (скажем, двух армий) — модели Ланкастера — состояние системы описывается точкой  $\{x, y\}$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки,  $x$  и  $y$  — это численности противостоящих армий. Основные уравнения модели имеют вид

$$\dot{x} = -by$$

$$\dot{y} = -ax$$

Здесь  $a$  — мощность оружия армии  $x$ , а  $b$  — армии  $y$ . Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии  $x$  убивает за единицу времени  $a$  солдат армии  $y$  (и, соответственно, каждый солдат армии  $y$  убивает  $b$  солдат армии  $x$ ). Точка над буквой здесь и далее означает производную по времени  $t$ . Это — жёсткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad axdx = bydy, \quad ax^2 - by^2 = \text{const}.$$

Эволюция численностей армий  $x$  и  $y$  происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. А). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

Эти гиперболы разделены прямой  $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$ . Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. А), то гипербола выходит на ось  $y$ . Это значит, что в ходе войны численность армии  $x$  уменьшается до нуля (за конечное время). Армия  $y$  выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия  $x$ . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается ко всеобщему удовлетворению истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно-большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

---

\* Материал этого раздела взят из доклада В.И. Арнольда ««Жесткие» и «мягкие» математические модели». Этот доклад был прочитан В.И. Арнольдом на Научно-практическом семинаре «Аналитика в государственных учреждениях» в 1997 году.

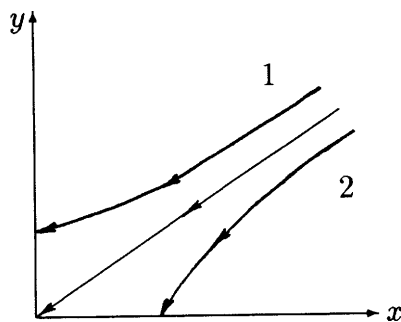


Рис. А. Жёсткая модель войны.

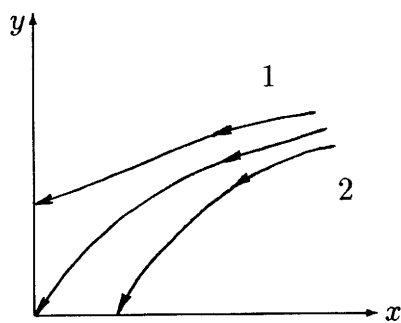


Рис. В. Мягкая модель войны.

Основной вывод из рассмотренной модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным — в девять раз и т.д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Ясно, однако, что наша людоедская модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять её к реальной ситуации. Возникнет вопрос — как изменится вывод, если модель будет несколько иной. Например, коэффициенты  $a$  и  $b$  могут быть не строго постоянными, а могут, скажем, зависеть от  $x$  и от  $y$ . И точный вид этой зависимости нам может не быть известен. В этом случае речь идет о системе

$$\dot{x} = a(x, y)x$$

$$\dot{y} = b(x, y)y$$

которая уже не решается явно.

Однако в математике разработаны топологические методы (см. Главу 6), позволяющие сделать выводы общего характера и не зная точно явного вида функций  $a$  и  $b$ . В этой ситуации принято говорить о мягкой модели — модели, поддающейся изменениям (за счет выбора функций  $a$  и  $b$  в нашем примере).

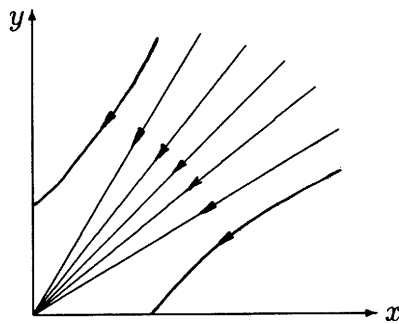


Рис. С. Нереализуемая модель войны.

Общий вывод в данном случае есть утверждение о структурной устойчивости исходной модели: изменение функций  $a$  и  $b$  изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости  $\{x, y\}$  (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод этот состоял в том, что положения « $x$  выигрывает» и (« $y$  выигрывает» разделены нейтральной линией «обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время».

Математики говорят, что топологический тип системы на плоскости  $\{x, y\}$  не меняется при изменении функций  $a$  и  $b$ : изменение приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. В).

Этот математический вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. С. Математическая теория структурной устойчивости утверждает, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций  $a$  и  $b$  (скажем, она не реализуется, если это — положительные в нуле многочлены).

Мы можем сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида жёсткой модели: выводы справедливы для мягкой модели. На самом деле простейшая модель дает даже полезное количественное предсказание: наклон разделяющей нейтральной прямой в нуле определяется формулой  $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$ , где  $a$  и  $b$  — значения коэффициентов в нуле.

То есть принцип «если противников вдвое больше, то надо иметь в четыре раза более мощное оружие» справедлив; на конечном этапе взаимного истребления, в то время как на начальном этапе войны число 4 нужно, быть может, откорректировать (учитывая вид коэффициентов  $a$  и  $b$ ). Для этой корректировки в математике мягких моделей тоже разработаны эффективные методы (несмотря на то, что явная формула для решения уравнений модели не только не известна, но и — это строго доказано — не существует вовсе).

Можно думать, что описанная модель отчасти объясняет как

неудачи Наполеона и Гитлера, так и успех Батыя и надежды мусульманских фундаменталистов.

## Модель Ферхюльста . Обобщенная логистическая модель

Простейшая модель роста предложена Мальтусом (для роста населения Земли):

$$\dot{x} = kx$$

Она ведет, как хорошо известно, к экспоненциальному (т.е. очень быстрому) росту населения  $x$  с течением времени. Эта жёсткая модель применима (разумеется, с оговорками), например, к развитию науки в 1700-1950 годах (измеряемому, скажем, числом научных статей) (рис. D).

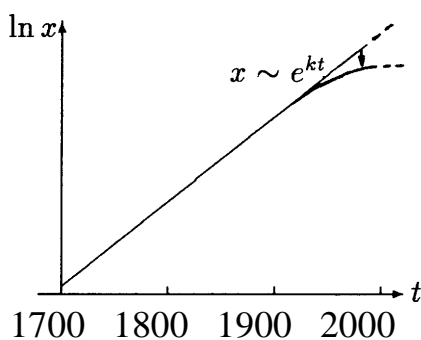


Рис. D. Рост науки.

Продолжение экспоненциального роста науки в следующий век быстро привело бы к исчерпанию бумаги и чернил, причем число ученых должно было бы достичь половины населения земного шара.

Ясно, что общество (во всех странах) не может этого допустить, и следовательно развитие науки должно быть подавлено (что мы и наблюдаем во многих странах; в России реформирование академической науки происходит как раз сейчас).

Аналогичные явления насыщения происходят в любой популяции (и, вероятно, вскоре произойдут с человечеством в целом): когда население становится слишком большим, мальтусовская жёсткая модель с постоянным коэффициентом роста  $k$  перестает быть применимой. Естественно, при слишком больших  $x$  конкуренция за ресурсы (пищу, гранты и т.д.) приводит к уменьшению  $k$ , и жёсткая модель Мальтуса должна быть заменена мягкой моделью

$$\dot{x} = k(x)x$$

с зависящим от населения коэффициентом размножения. Простейшим примером является выбор  $k(x) = a - bx$ , что приводит к так называемой логистической модели ( модели Ферхюльста)(рис. Е):

$$\dot{x} = ax - bx^2$$

Выбором системы единиц  $x$  и  $t$  можно превратить коэффициенты  $a$  и  $b$  в единицу:

$$\dot{x} = x - x^2$$

Подчеркнем, что выводы, которые будут сделаны ниже, остаются (с точностью до числовых значений констант) справедливыми и при любых значениях коэффициентов  $a$  и  $b$  и даже для широкого класса моделей с различными (убывающими с  $x$ ) функциями  $k(x)$ . Иными словами, дальнейшие выводы относятся ко всей мягкой модели, а не к специальной жёсткой логистической модели.

На рис. Е слева изображен график функции  $k(x)x$ .

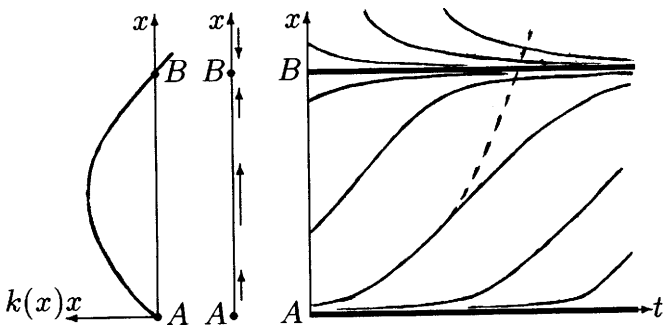


Рис.Е. Модель Ферхюльста(Логистическая модель).

Положительной между точками А и В. В центре изображено векторное поле(  $\dot{x}$ ) на изображающей всевозможные состояния системы оси  $x$ . Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках А и В скорость равна нулю: это стационарные состояния. Между А и В скорость положительна (население растет), а за точкой В — отрицательна (население убывает). Справа изображена результирующая зависимость населения от времени при разных начальных условиях.

Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим В, который устойчив: большее население уменьшается, меньшее — увеличивается.

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи А, когда население мало, она очень близка к мальтузианской модели. Но при достаточно больших  $x$  (порядка  $1/2$  при нашем выборе коэффициентов) наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рис. Е пунктиром): вместо ухода  $x$  на

бесконечность население приближается к стационарному значению  $B$ . Население Земли сейчас приближается к 6 миллиардам. Стационарное значение (по разным оценкам) 16-20 миллиардов человек.

Как отмечалось ранее, логистическая модель является обычной в экологии. Можно себе представить, например, что  $x$  — это количество рыб в озере или в мировом океане. Посмотрим теперь, как скажется на судьбе этих рыб рыболовство с интенсивностью  $c$ :

$$\dot{x} = x - x^2 - c$$

Вычисления показывают, что ответ резко меняется при некотором критическом значении квоты вылова  $c$ . Для нашей жёсткой модели это критическое значение есть  $c = 1/4$ , но аналогичные явления имеют место и для мягкой модели

$$\dot{x} = \kappa(x)x - c$$

(критическое значение  $c$  в этом случае — максимум функции  $\kappa(x)x$ ).

Ход эволюции числа рыб  $x$  с течением времени  $t$  изображен на рис. F.

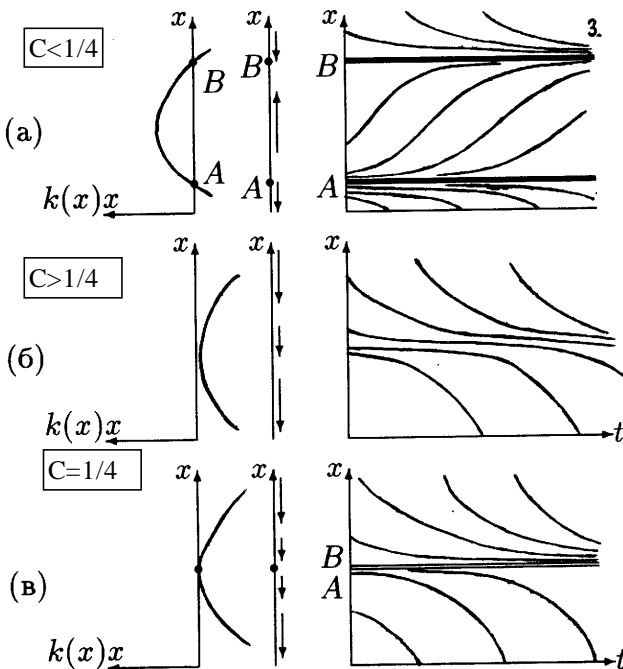


Рис. F. Недолов (а), перелов (б), и оптимизация (в) рыболовства.

Если квота  $c$  мала, то изменения (по сравнению со свободной популяцией, для которой  $c = 0$ , что отвечает логистической модели) состоят в следующем.

Система имеет два равновесных состояния,  $A$  и  $B$ . Состояние  $B$



устойчиво: популяция в этом случае восстанавливается при малых отклонениях  $x$  от равновесного значения  $B$ .

Состояние  $A$  неустойчиво: если вследствие каких-либо причин (скажем, браконьерства или мора) размер популяции упадет хоть немного ниже уровня  $A$ , то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от  $A$  невелико) будет уничтожена полностью за конечное время.

Состояние науки в России в настоящее время описывается примерно точкой  $A$ : оно квазистационарно в том смысле, что небольшое встряхивание может легко привести к необратимому уничтожению.

При больших критической квотах вылова  $s$  популяция  $x$  уничтожается за конечное время, как бы велика она ни была в начальный момент.

Это — судьба мамонтов, бизонов, многих китов — экологи подсчитали, сколько видов погибает ежедневно под влиянием деятельности человека, и эти цифры ужасают. Модели этого рода описывают также банкротство фирм, концернов и государств. Опасность уничтожения в нашей модели появляется тогда, когда неустойчивое состояние  $A$  приближается к устойчивому состоянию  $B$ .

Из сказанного видно, что выбор значения параметра  $s$  является чрезвычайно важным моментом управления эксплуатацией популяции  $x$ . Стремясь к увеличению квоты эксплуатации  $s$ , разумная планирующая организация не должна превосходить критический уровень (в нашем случае  $s = 1/4$ ). Оптимизация приводит к выбору именно критического значения  $s = 1/4$ , при котором эксплуатируемая популяция еще не уничтожается, но доход от эксплуатации за единицу времени достигает максимально возможного значения  $s = 1/4$  (большой доход в нашей популяции в течение длительного времени невозможен, так как максимальная скорость прироста даже и неэксплуатируемой популяции есть  $1/4$ ).

Из нижней части рис. F мы видим, что произойдет при таком «оптимальном» выборе,  $s = 1/4$ . Какова бы ни была начальная популяция  $x \geq 1/2$ , с течением времени она выйдет на стационарный режим  $A = B = 1/2$ . Эта стационарная популяция, однако, неустойчива. Небольшое случайное уменьшение  $x$  приводит к полному уничтожению популяции за конечное время.

Следовательно, оптимизация параметров плана может приводить (и приводит во многих случаях, из которых наша модель — лишь простейший пример) к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости.

Наша мягкая модель, при всей своей очевидной примитивности,

позволяет, однако, предъявить способ борьбы с указанным злом. Оказывается, устойчивость восстанавливается, если заменить жёсткое планирование обратной связью. Иными словами, решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т.д.) следует принимать не директивно ( $c = \text{const}$ ), а в зависимости от достигнутого состояния системы:

$$c = kx$$

где параметр  $k$  («дифференциальная квота») подлежит выбору. В этом случае модель принимает вид

$$\dot{x} = x - x^2 - kx$$

При  $k < 1$  с течением времени устанавливается стационарное состояние  $B$ , которое устойчиво. Средний многолетний «доход»  $c = kx$  в этом состоянии оптимален, когда прямая  $y = kx$  проходит через вершину параболы  $y = x - x^2$ , т.е. при  $k = 1/2$ . При этом выборе дифференциальной квоты  $k$  средний «доход»  $c = 1/4$  достигает максимального возможного в нашей системе значения. Но, в отличие от жестко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента  $k$  (небольшое случайное уменьшение по отношению к стационарному уровню приводит к автоматическому восстановлению стационарного уровня силами самой системы). Более того, небольшое отклонение коэффициента/оптимального значения  $k = 1/2$  приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жёсткого плана  $c$ ), а лишь к небольшому уменьшению «дохода».

Итак, введение обратной связи (т.е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров. Все сказанное выше останется справедливым и для мягкой модели (с соответствующим пересчётом коэффициентов). Следует подчеркнуть, что именно эта независимость от деталей жёсткой модели (которые, как правило, не слишком хорошо известны) делает выводы мягкого моделирования полезными.

Попытки заменить мягкое моделирование жёстким обычно приводят к иерархии все более сложных и громоздких математических построений, исследование которых доставляет прекрасный материал для большого количества диссертаций, но реальная ценность которых зачастую не превосходит в сущности простых (хотя без математики и не очевидных) выводов, основанных

на анализе именно простейших моделей, подобных описанной выше.

### Структурная неустойчивость «жестких» моделей.

Важно, чтобы простейшая модель была структурно устойчивой, т.е. чтобы выводы выдерживали малое изменение параметров и функций, описывающих модель. Описанная выше модель обладает этим свойством структурной устойчивости. Пример модели, не обладающей этим свойством — знаменитая модель Лотки-Вольтерра борьбы за существование :

$$\dot{x} = ax - cxy$$

$$\dot{y} = -bx + dxy$$

В этой модели  $x$  — число карасей,  $y$  — число щук. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа карасей в отсутствие щук,  $b$  — естественное вымирание щук, лишённых карасей. Вероятность взаимодействия карася и щуки считается пропорциональной как количеству карасей, так и числу щук  $\{xy\}$ . Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию карасей, но способствует увеличению популяции щук (члены  $-cxy$  и  $dxy$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние  $A$  приводит к периодическому колебанию численности как карасей, так и щук, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние  $A$ . При малом изменении модели к правым частям добавляются малые члены учитывающие, например, конкуренцию карасей за пищу и щук за карасей, либо имеющиеся в системе случайные изменения числа особей.

$$\dot{x} = ax - cxy + \varepsilon f(x, y)$$

$$\dot{y} = -bx + dxy + \varepsilon g(x, y) \quad |\varepsilon| \ll 1$$

В результате вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние  $A$ ), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерра, теряет силу. В зависимости от вида малых поправок, возможны, например, сценарии 1-3 .

В случае 1 равновесное состояние устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система «идет в разнос». Стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа щук, то к их почти полному вымиранию (вследствие того, что они

съели практически всех карасей ). Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений  $x$  и  $y$ , что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием устанавливается с течением времени периодический режим , в котором, скажем, радикалы и консерваторы или (к сожалению) коммунисты и демократы периодически сменяют друг друга. В отличие от исходной жёсткой модели Лотки-Вольтерра, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния приводит не к малым колебаниям , как в модели Лотки-Вольтерра, а к колебаниям вполне определенной (и независимой от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно-устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жёсткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при её изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой). Это может быть достигнуто , например, путем введения в исследуемую модель флуктуаций, зависящих от состояния системы . Методы анализа систем с такими флуктуациями описаны в Главе 3. Примеры исследования различных систем с флуктуациями, зависящими от состояния самой системы приведены в Главах 4,5. Общая постановка задачи о структурной устойчивости жестких моделей приведена в Приложении.

В случае модели Лотки-Вольтерра — для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок  $\varepsilon f(x,y)$  нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жёсткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жёсткой модели, можно, лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

### **Модель многоступенчатого управления .**

Явление, описываемое в этом разделе, хорошо известно в теории управления техническими системами. Оно наблюдается в чрезвычайно общей ситуации, но здесь оно будет описано в самой простой модели, заменяя лишь технические термины человеческими.

Пусть производство какого-либо продукта  $x$ , управляется

некоторым руководителем, принимающим решение о скорости производства:

$$\dot{x} = y.$$

В свою очередь, поведение руководителя,  $y$ , управляется руководителем второго ранга ( $z$ ), принимающим решение о том, как нужно менять скорость производства:

$$\dot{y} = z.$$

В свою очередь, поведение руководителя второго ранга,  $z$ , управляется руководителем третьего ранга, и т.д., вплоть до генерального руководителя (ранга  $n$ ).

Генеральный руководитель в нашей модели реализует обратную связь: его решение основывается не на желании выполнить приказ начальства (как у руководителей предыдущих рангов), а на интересах дела. Например, он может желать достичь уровня  $X$  величины  $x$  и будет влиять на руководителя предыдущего ранга в положительную сторону, если уровень  $X$  не достигнут, и в отрицательную — если он превзойден.

Например, для  $n = 3$  простейшая модель этого рода имеет вид

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = -k(x - X), k > 0$$

Эту систему можно переписать в виде линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -k(x - X)$$

Уравнения этой (жёсткой) модели легко решаются в явном виде. Устойчивость желаемого стационарного состояния ( $x = X, y = z = \dots = 0$ ) определяется тем, отрицательны ли вещественные части корней  $\lambda$  характеристического уравнения

$$\lambda^n = -k$$

Корни этого уравнения образуют на плоскости комплексного переменного  $\lambda$  вершины правильного  $n$ -угольника. Если  $n \geq 3$ , некоторые вершины обязательно лежат в (неустойчивой) правой полуплоскости ( $\lambda > 0$ ). При  $n = 1$  корень  $\lambda = -k$  лежит в устойчивой полуплоскости, а при  $n = 2$  корни  $\lambda_{1,2} = i k^{1/2}$  лежат на границе устойчивости.

Вывод. Многоступенчатое управление, описываемое нашей моделью при  $n \geq 3$ , неустойчиво. Двуступенчатое управление приводит к периодическим колебаниям, но не вызывает

катастрофического нарастания колебаний, происходящего при трех- и более ступенчатом управлении.

Настоящую устойчивость обеспечивает только одноступенчатое управление, при котором управляющее лицо более заинтересовано в интересах дела, чем в поощрении со стороны начальства.

Эти выводы, сделанные выше на основании анализа простейшей жёсткой модели, на самом деле выдерживают проверку на структурную устойчивость, исключая лишь случай  $n = 2$ : двуступенчатое управление может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от деталей организации дела, которыми мы выше пренебрегли при составлении нашей самой простой модели.

Длительное и по-видимому устойчивое функционирование системы многоступенчатого управления в СССР объяснялось, вероятно, неисполнением директивных указаний и существованием «теневой» системы заинтересовывания управляющих различных рангов в интересах дела. Без такой реальной заинтересованности (которая в современных условиях уже не обязательно обеспечивается коррупцией) многоступенчатое управление всегда ведёт к разрухе.

К счастью, необходимость в независимости Центробанка уже хорошо понята, но многоступенчатое («административное») управление сохраняется во многих других случаях.

## ГЛАВА 3

### ЯЗЫК Флуктуации.

Нет памяти о прежнем, да и о том, что будет не останется памяти у тех, которые будут после.

**Ветхий Завет.**

**Книга Екклесиаста или Проповедника**

Особенность этого языка состояла в том, что он мог заключаться в другом и быть скрытым , и быть понятым лишь при помощи специального знания .

**Ральстон Скиннер**

### 1.Общие положения. Белый шум.

Как было показано в предыдущих разделах, огромное число систем на мезоскопическом этапе эволюции может быть описано с помощью набора переменных (параметров состояния или "коллективных мод")  $\{q_i\}$   $i = 1,2,3,\dots$ ,удовлетворяющих эволюционным уравнениям вида

$$\dot{\vec{q}} = \vec{f}(\vec{q}(\vec{x},t))$$

(1)

где  $\vec{q}(\vec{x},t)$  и  $\vec{f}(\vec{q}(\vec{x},t))$

векторы, компонентами которых являются соответственно переменные, определяющие состояние изучаемой системы (параметры состояния). Функциональные зависимости, выражают локальную эволюцию компонент  $\vec{q}$  во времени и пространстве. Примеры параметров состояния приведены в предыдущей Главе. Ими могут быть количество проданного торговой точкой товара, число особей в популяции, количество "организованных" преступников" и. т. д. Функциональные зависимости в (1), как правило, содержат частные производные по пространственным переменным и нелинейны из-за различных взаимодействий в изучаемой системе (см., например модель формирования организованной преступности). Они могут зависеть от некоторого

набора управляющих параметров  $\lambda$  ( постоянных, входящих в уравнения мезоскопического этапа эволюции), фиксированных концентраций, например стационарного числа банкиров  $n_1^{(0)}$  и. т. д. Управляющие параметры и граничные условия, которые естественно должны быть наложены на систему, воспроизводят воздействие на нее «внешнего мира». При исследовании процессов возникновения коллективного поведения системы обычно считается, что внешняя среда постоянна во времени. Такое предположение требует постоянства управляющих параметров  $\lambda$  и граничных условий. В этом случае проблема возникновения коллективного поведения может быть исследована следующим образом. В силу постоянства среды, можно предположить, что существует, по крайней мере, одно стационарное решение уравнений (1), т.е. решение  $\{\bar{q}_i\}$ , для которого

$$\bar{f}(\bar{q})=0 \quad (2)$$

Это соответствует такому состоянию системы ,которое в дальнейшем будем называть неорганизованным по аналогии с задачей о формировании оргпреступности. Переход к упорядоченному состоянию ассоциируется с идеей неустойчивости: коллективное поведение возникает, когда стационарное состояние  $\bar{q}$  становится неустойчивым и сменяется новым решением уравнений (1).

Последний Трепет Седьмой Вечности дрожит в Бесконечности. Матерь набухает, распространяясь изнутри наружу, подобно почке Лотоса.

Трепет распространяется, касаясь своим стремительным Крылом всей Вселенной и Зародыша, пребывающего во Тьме, Тьме, которая дышит над дремлющими Водами Жизни.

#### Из Книги Дзан

Простейший способ исследования такой возможности состоит, прежде всего, в проверке на устойчивость стационарного состояния относительно малых возмущений. Для этого необходимо положить

$$\bar{q}(\vec{x},t) = \bar{q} + \delta \bar{q}(\vec{x},t), \quad |\delta q_i / q_i| \ll 1 \quad (3)$$

и подставить в (1).Временная эволюция возмущения  $\delta \bar{q}(\vec{x},t)$  задается решением системы уравнений

$$\delta \dot{q}_i = \sum A_{ij} \delta q_j \quad (4)$$



которая получается при линеаризации исходного векторного уравнения (1). Коэффициенты  $A_{ij}$  не зависят от времени, так как линеаризация проводилась в окрестности решения, не зависящего от времени. Следовательно, система уравнений (4) допускает решения вида

$$\delta q_i(\vec{x}, t) = \delta q_i^{(k)}(\vec{x}) \exp(\omega_k t) \quad (5)$$

Эти решения  $\delta \vec{q}^{(k)}(\vec{x})$  являются собственными векторами задачи на собственные значения (индекс "к" относится к собственным числам  $\omega_k$ )

$$(\omega_k I - A) \delta \vec{q}^{(k)}(\vec{x}) = 0 \quad (6)$$

где  $I$  - единичная матрица,  $A$ - матрица из (4). Значения  $\operatorname{Re}\{\omega_k\}$  определяют скорость, с которой эволюционируют возмущения параметров состояния. Время жизни возмущения в системе есть величина порядка

$$\tau \sim \left| \frac{1}{\operatorname{Re}\{\omega_k\}} \right| \quad (7)$$

Очевидно, что если стационарное состояние системы устойчиво, то все  $\operatorname{Re}\{\omega_k\}$  должны быть отрицательными. Следовательно, возникновение перехода от неорганизованного состояния к коллективному поведению системы можно определить, просто исследуя поведение  $\operatorname{Re}\{\omega_k\}$  как функции значений управляющих параметров и наложенных на систему граничных условий. Для простоты предположим, что мы исследуем свойства системы, имея в своем распоряжении только один управляющий параметр  $\lambda$ . В точке  $\lambda = \lambda_c$ , где, по крайней мере, одна из величин  $\operatorname{Re}\{\omega_k\}$  перестает быть отрицательной, и становится положительной, время жизни флуктуаций стремится к бесконечности. Иначе говоря, релаксация флуктуаций замедляется. Такое значение  $\lambda_c$  называется точкой бифуркации. Это та точка, в которой одно или несколько решений уравнения (1) соединяются в рассматриваемом стационарном состоянии  $\vec{q}$ . С каждым новым решением уравнения (1) принято связывать величину  $\xi$  (или параметр порядка), которая обращается в ноль в точке  $\lambda_c$  и служит мерой отклонения от

стационарного состояния. Обычно в качестве параметра порядка выступает амплитуда неустойчивой моды, т.е. амплитуда того собственного вектора, которых отвечает собственному значению  $\omega_k = 0$  при  $\lambda = \lambda_c$ .

Описанный подход к образованию коллективных мод в системах на мезоскопическом этапе эволюции вполне детерминистичен : в описанные выше механизмы самоорганизации не были включены флуктуации. Флуктуации принято делить на внутренние и внешние. К внутренним флуктуациям относятся те случайные изменения, которые порождаются предыдущим микроскопическим этапом эволюции системы, например флуктуации, связанные с непрерывными ударами молекул жидкости о движущийся в ней шарик или флуктуации, связанные с изменением мнения индивидуума с "за" на "против" в результате плохого настроения (не с той ноги встал). Такие флуктуации не зависят от состояния эволюционирующей системы. К внешним флуктуациям относятся те флуктуации, которые определяются изменением параметров окружающей среды и, следовательно, зависят от состояния системы. Например, флуктуации числа избирателей, пришедших на выборы, вследствие изменения погодных условий, поскольку избиратель принимает решение об участии в выборах в зависимости от погодных условий. Как будет показано ниже, внутренние флуктуации приводят к возникновению того коллективного параметра системы, который в равновесных ситуациях соответствует температуре, в то время как внешние флуктуации (внешний шум) могут изменить исход детерминистического описания, в частности, приводя к изменению точки бифуркации, либо даже к ее возникновению.

Находясь под влиянием внутренних флуктуаций, система перестает пребывать в каком-либо определенном состоянии. Таким образом, подходящей величиной для описания системы становится вероятность того, что параметры состояния принимают определенные значения. Определение этой вероятности и ее эволюции во времени может быть проведено с помощью методов, описанных ниже. Эти методы приводят к заключению о том, что внутренние флуктуации не изменяют локальных свойств устойчивости системы. В частности внутренние флуктуации не оказывают никакого влияния на положение точки бифуркации. Экстремумы плотности вероятности, имеющей четко выраженные пики, располагаются (в случае только внутренних флуктуаций) в непосредственной близости от решения детерминированной системы. В отличие от внутренних флуктуаций, флуктуации,

обусловленные случайностью среды весьма существенны: внешний шум может изменить свойства локальной устойчивости макроскопически больших систем, так, что точка бифуркации может сдвигаться или даже появляться в зависимости от характеристик внешнего шума.

Влияние среды на макроскопические свойства системы (релаксирующей в соответствии с уравнениями мезоскопического этапа эволюции) описывается с помощью внешних параметров  $\lambda$ . Если система связана с флуктуирующей средой, то внешние параметры становятся случайными величинами. Эти величины можно представить стационарными случайными процессами.  $\lambda_t$ . Для дальнейшего удобно разложить  $\lambda_t$  на две части,  $\lambda + \zeta_t$  где  $\lambda$  соответствует среднему состоянию среды, а  $\zeta_t$  описывает флуктуации относительно среднего значения. Ясно, что  $\langle \zeta_t \rangle = 0$ . Включение в уравнения мезоскопического этапа эволюции внутренних флуктуаций приводит к следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{\vec{q}}_i = \vec{f}(\vec{q}(\vec{x}, t)) + \zeta_t \psi_i(q_i) + F_i(t)$$

Здесь  $\psi_i$  - заданные функции параметров состояния  $q_i(t)$ ,  $F_i(t)$  - случайные силы, описывающие внутренние флуктуации в системе.

В соответствии с изложенным выше, остановимся подробно на изучении уравнений мезоскопического этапа эволюции, обладающих свойством потенциальности. Изучим флуктуации в случае систем, допускающих удовлетворительное описание с помощью одной переменной, определяющей поведение системы:

$$\dot{q} = -\frac{dV}{dq} + \zeta \psi(q) + F(t); \quad (9)$$

Более того, не имеет смысла выделять случайные силы  $F(t)$  в виде отдельного слагаемого в уравнении (9). Действительно, рассмотрим уравнение

$$\dot{q} = -\frac{dV}{dq} + \zeta \psi(q) \quad (10)$$

Очевидно, что в случае  $\psi = \psi_0 + \phi(q)$  уравнение (10) приводится к виду (9).

Рассмотрим теперь временные свойства флуктуаций. Оказывается, что в подавляющем большинстве моделей существует четкое разделение между временными масштабами макроскопической эволюции системы и временным масштабом флуктуаций, как внутренних, так и внешних: флуктуации подвержены более быстрым временным изменениям, чем исследуемая система. Среда быстро забывает о том, в каком состоянии она недавно находилась. Поскольку это так, то в физической литературе обычно совершают предельный переход-переход к среде без памяти- вводится понятие белого шума.. Так принято называть случайный процесс, немедленно забывающий только что принятое значение. Это означает, что значения, принимаемые белым шумом в каждый момент времени независимы. Процессы, обладающие такими свойствами, называются полностью случайными. Для случайных процессов белый шум означает то же самое, что дельта-функция для детерминированных функций. Это - обобщенный случайный процесс и обращаться с ним нужно крайне осторожно. Так бессмысленно проводить над белым шумом (как и над дельта - функцией) какую-либо нелинейную операцию, например возведение в квадрат и. т. д. Естественно возникает вопрос можно ли придать какой-либо смысл дифференциальному уравнению (10) ,в правой части которого  $\zeta$ - белый шум? Крайняя нерегулярность белого шума означает, что производная по времени от  $q(t)$  должна пониматься не в обычном смысле. Оказывается, однако, что всеми неприятностями, связанными с белым шумом, можно пренебречь, если  $\psi(q)$  - постоянная функция, не зависящая от состояния системы (что соответствует внутренним флуктуациям в изучаемой системе). Если это так, то в случае внутренних флуктуаций с дифференциальным уравнением (10) можно обращаться, как с обычным уравнением и при этом получать вполне осмысленные результаты.

## **2.Броуновское движение. Случайные процессы. Уравнение Фоккера -Планка.**

Броуновское движение сыграло заметную роль, а теории случайных явлений, как в физике, так и в математике. Это быстрое ни на миг не прекращающееся, сильно нерегулярное движение частицы, находящейся в жидкости. В силу нерегулярности броуновского движения, уравнения для броуновской частицы естественно записать в виде

$$\dot{v} = -\gamma v + F(t) \quad (11)$$

где  $v$  - скорость броуновской частицы,  $\gamma$  - коэффициент трения,  $F(t)$  - случайная сила, описывающая внутренние флуктуации жидкости, в которой движется частица. Случайная сила описывает воздействие всех отдельно взятых молекул жидкости на броуновскую частицу. Под действием каждого отдельного столкновения броуновской частицы с молекулой жидкости происходит весьма малое отклонение частицы от ее макроскопической траектории. Если мы не хотим вдаваться в детали систем многих частиц, то единственное утверждение, которое можно сделать относительно столкновений заключается в том, что они весьма многочисленны и чрезвычайно нерегулярны как по своей силе, так и по направлению. Если мы готовы отказаться от детерминизма в описании процесса, то это утверждение дает нам возможность применить закон больших чисел и теорию вероятности. Мы не можем считать случайную силу  $F(t)$  заданной функцией времени, однако можем сделать разумные предположения о влиянии столкновений, усредненном по большому числу одинаковых ситуаций, т.е. по ансамблю. Аналогично мы не можем предсказать скорость или положение броуновской частицы в каждый момент времени, но можем предсказать средний результат большого числа экспериментов, выполненных в одинаковых условиях. Уравнение (11) является типичным представителем класса стохастических уравнений движения. Такие уравнения принято называть уравнениями Ланжевена. Проследим, как решается уравнение (11). Прежде всего, следует количественно определить случайную силу  $F(t)$ . Сделаем следующие предположения

1. Среднее от  $F(t)$  по ансамблю броуновских частиц, обладающих в момент времени  $t=0$  заданной скоростью  $v_0$ , обращается в нуль. Запишем это в следующем виде

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (13)$$

Это условие гарантирует, что средняя скорость броуновской частицы в точности подчиняется детерминистическому уравнению

$$\langle \dot{v} \rangle = -\gamma \langle v \rangle$$

2.Идею о нерегулярности столкновений можно выразить, предположив, что столкновения, значительно разделенные по времени, статистически независимы. Иными словами корреляция между значениями  $F(t)$  в два момента  $t_1, t_2$  отлична от нуля только для временных интервалов порядка длительности столкновения.  $\tau_c$  В явном виде

$$\langle F(t_1), F(t_2) \rangle = \phi(t_1 - t_2) \quad (13)$$

где  $\phi(t)$  функция, имеющая резкий пик при  $t = 0$  и практически равная нулю при  $|t| > \tau$  (рис 7).

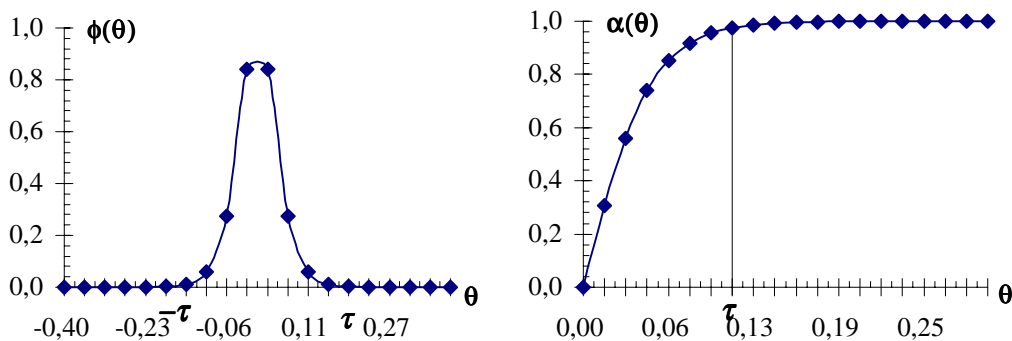


Рис.7

3.Предположим, что все высшие моменты случайной силы  $F(t)$  могут быть выражены через вторые моменты

$$(14)$$

$$\langle F(t_1)F(t_2).....F(t_{2n+1}) \rangle = 0;$$

$$\langle F(t_1)F(t_2).....F(t_{2n}) \rangle = \Sigma \langle F(t_{i_1})F(t_{i_2}) \rangle \langle F(t_{i_3})F(t_{i_4}) \rangle ..... \langle F(t_{i_{2n-1}})F(t_{i_{2n}}) \rangle \quad (15)$$

В последнем уравнении суммирование производится по всевозможным способам разбиения  $2n$  переменных  $t_1.....t_n$  на  $n$  пар. Можно показать, что данное предположение эквивалентно предположению о том, что распределение случайной силы  $F(t)$  описывается гауссовским законом, который связан с законом больших чисел (центральной предельной теоремой) теории вероятности. Теперь мы можем дать очень простое решение уравнения Ланжевена (11).Допустим, что в начальный момент времени броуновская частица начинает двигаться со скоростью

$v_0$ . Если бы мы рассматривали (11) как обыкновенное дифференциальное уравнение, то его решение имело бы вид

$$v = v_0 \exp(-\gamma t) + \exp(\gamma t) \int_0^t d\tau \exp(\gamma \tau) F(\tau) \quad (16)$$

В таком виде это решение ничего не дает, поскольку функция  $F(t)$  неизвестна. Однако если усреднить все члены в (16) по ансамблю, описанному выше, и использовать (12), то получим

$$\langle v \rangle = v_0 \exp(-\gamma t)$$

Это- всего лишь решение детерминированного уравнения. Более интересен квадрат скорости.

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2 \exp(-2\gamma t) + \exp(-2\gamma t) \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp(\gamma(t_1 + t_2)) \langle F(t_1) F(t_2) \rangle \quad (17)$$

Сделав замену переменных

$$t_1 + t_2 = \xi; t_1 - t_2 = \theta$$

и введя функцию  $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \int_{-t}^t d\theta \phi(\theta) \quad (18)$$

после элементарных вычислений получим

$$\begin{aligned} J(t) &\equiv \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \exp(\gamma(\tau_1 + \tau_2)) \langle F(\tau_1) F(\tau_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t dx \exp(\gamma x) \alpha(x) + \frac{1}{2} \int_0^{2t} dx \exp(\gamma x) \alpha(2t - x) \end{aligned} \quad (19)$$

Поведение функции  $\alpha(t)$  подсказывает нам способ приближенного вычисления этих интегралов. При  $t \gg \tau_c$

$$J(t) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^{2t} dx \exp(\gamma x) = \alpha \frac{\exp(2\gamma t) - 1}{2\gamma} \quad (20)$$

здесь

$$\alpha \equiv \alpha(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \quad (21)$$

Подставляя этот результат в (17) , получим

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2 \exp(-2\gamma t) + \frac{\alpha}{2\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t)) \quad (22)$$

Из этого соотношения следует, что на малых временах  $t \ll (2\gamma)^{-1}$  флуктуации скорости определяются главным образом начальным значением.  $v_0$  Однако на больших временах начальные значения забываются, и средний квадрат скорости приближается к значению,  $\frac{\alpha}{2\gamma}$ , которое целиком определяется внутренними флуктуациями в рассматриваемой системе. Для замыкания теории следует выразить постоянную  $\alpha$  через макроскопические параметры. У нас есть все основания считать, что конечным этапом эволюции броуновской частицы является состояние ее теплового равновесия с окружающей средой, находящейся при температуре  $T$ . В этом состоянии квадрат скорости частицы определяется теоремой о равномерном распределении энергии [1], поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle = \frac{\alpha}{2\gamma} = \frac{kT}{M}$$

к-постоянная Больцмана,  $M$ -масса броуновской частицы. Тогда

$$\alpha = 2\gamma \frac{kT}{M} \quad (23)$$

Соотношение (23) служит примером флуктуационно-диссипативной теоремы, позволяющей связать "амплитуду" внутренних флуктуаций  $\alpha$  с температурой среды. Отметим, что при решении уравнения (11) фактически было введено понятие белого шума. Действительно, при  $|t| \gg \tau_c$  система не обладает памятью и, следовательно, без ограничения общности можно предположить, что



$$\phi(x) = \alpha \delta(x)$$

Задача о броуновском движении является частным примером применения общей теории случайных процессов. Применяя эту теорию можно рассмотреть многие другие задачи. Поэтому представляется необходимым дать обзор общих идей и методов теории стохастических процессов.

Пусть через  $q$  обозначена интересующая нас переменная, определяющая состояние рассматриваемой системы. Такой переменной может быть координата или скорость броуновской частицы либо любая другая переменная из описанных выше моделей. Если бы переменная  $q$  была бы детерминированной величиной, то мы могли бы построить функцию времени  $q(t)$ , которая определяла бы значение  $q$  в каждый момент времени  $t$  по соответствующим начальным условиям, заданным, например при  $t=0$ . Однако если  $q$  - случайная переменная, то такой функции не существует. В каждый момент времени переменная  $q$  может принимать любое значение, лежащее в области изменения переменной. Однако всякому возможному значению  $q$  в момент времени  $t$  присваивается некоторая вероятность, которая может принимать любое значение, заключенное между нулем и единицей. Поскольку мы предположим, что  $q$  - непрерывная переменная, то проще говорить о плотности вероятности. (Пример процесса, не удовлетворяющего этому условию, приведен ниже). Точнее, мы можем утверждать, что значение  $q$  случайной переменной в момент времени  $t$  обладает плотностью вероятности  $f(q,t)$ , если существует вероятность  $f(q,t)dq$  найти значение этой переменной в бесконечно малом интервале  $(q, q+dq)$ . Для полной характеристики случайного процесса, вообще говоря, недостаточно задать значение плотности вероятности  $f(q,t)$ . Если нам удалось узнать, что в момент времени  $t_1$  переменная принимает значение  $q_1$ , то это обстоятельство будет влиять на вероятность того, что переменная принимает значение  $q_2$  в момент времени  $t_2$ , ибо различные точки отнюдь не обязательно независимы. (т.е. существует корреляция между тем, что происходит в моменты времени  $t_1, t_2$ ). Другими словами, совместную плотность вероятности  $W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2)$  (вероятность того, что в момент времени  $t_1$  переменная принимает значение  $q_1$ , а в момент времени  $t_2$  значение  $q_2$ ) не обязательно можно определить, зная  $f(q,t)$ . Следовательно, для того, чтобы полностью охарактеризовать случайный процесс, необходимо в принципе

задать все совместные вероятности  $f(q, t)$ ,  $W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2)$ ,  $W_3(q_1, t_1 | q_2, t_2 | q_3, t_3)$  и.т.д. Функции  $W_n$  должны обладать некоторыми очевидными свойствами

а)  $W_n \geq 0$  ибо это плотности вероятности.

б)  $W_n(q_1, t_1 | q_2, t_2 | \dots | q_n, t_n)$  симметрична относительно перестановок группы переменных  $(q_n, t_n)$  среди других групп, поскольку  $W_n$ -совместная плотность вероятности.

в) функция  $W_n$  должна быть согласована со всеми плотностями вероятности низших порядков

$$\int dq_{k+1} dq_k \dots dq_n W_n = W_k \quad (24)$$

В некоторых случаях функцию высшего порядка можно выразить через функции низших порядков. Простейший случай мы имеем, когда для решения задачи достаточно знать  $f(q, t)$

$$W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) = f(q, t) f(q, t)$$

В этом случае корреляции во времени вообще отсутствуют. Однако в случае непрерывного реального процесса такое предположение нереалистично :на малых промежутках времени между последовательными событиями должна существовать причинная связь .Следующий по простоте случай называется марковским процессом .В этом случае вся информация содержится в двух функциях  $f(q, t)$  и  $W_2(q_2, t_2 | q_1, t_1)$  .Чтобы точно охарактеризовать этот процесс удобно ввести представление о вероятности перехода  $w_2(q_2, t_2 | q_1, t_1)$  ,определив ее соотношением

$$W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) = w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) f(q_1, t_1) \quad (25)$$

Из описанных выше свойств а)-в) вытекают следующие свойства вероятности перехода  $w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2)$  :

$$\begin{aligned} 1) & w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) \geq 0 \\ 2) & \int dq_2 w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) = 1 \\ 3) & f(q_2, t_2) = \int dq_1 f(q_1, t_1) w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь мы можем определить марковский процесс соотношением

$$w_n(q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} | \dots | q_1 t_1) = w_2(q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}) \quad (27)$$

$n \geq 2$

Такое условие означает ,что в марковском процессе вероятность перехода от значения  $q_{n-1}$  в момент времени  $t_1$  к значению  $q_n$  в момент  $t_n$  совершенно не зависит от предыстории системы. Легко проверить , что для марковского процесса все  $W_n$  при  $n \geq 3$  выражаются через  $W_1, W_2$  Например

$$\begin{aligned} W_3(q_1, t_1 | q_2, t_2 | q_3, t_3) &= w_3(q_1, t_1 | q_2, t_2 | q_3, t_3) W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) \\ &= w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) = \\ &= W_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) / f(q_2, t_2) \end{aligned} \quad (28)$$

Используя (24) и (28) ,можно записать

$$\begin{aligned} W_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) &= \int dq_2 W_2(q_1, t_1 | q_2, t_2 | q_3, t_3) = \\ &= \int dq_2 w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) f(q_1, t_1) \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда из (25) получим

$$w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) = \int dq_2 w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) w_2(q_1, t_1 | q_2, t_2) \quad (30)$$

Это интегральное уравнение ,называемое уравнением Чепмена-Колмогорова (или иногда уравнением Смолуховского) часто рассматривается в качестве определения марковского процесса. В важном частном случае ,когда вероятность перехода  $w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2)$  зависит только от разности  $t_3 - t_2$

$$w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) = w_2(q_3 | q_2, t_3 - t_2) \quad (31)$$

можно вывести дифференциальное уравнение в частных производных для вероятности перехода  $w_2(q_3, t_3 | q_2, t_2) \equiv w(q | q', \Delta t)$ . Действительно , пусть  $R(q)$  -произвольная достаточно гладкая функция .Рассмотрим выражение

$$\int dq R(q) \frac{\partial w(q | X, \tau)}{\partial \tau} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} (\Delta \tau)^{-1} \int dq R(q) \{w(q | X, \tau + \Delta \tau) - w(q | X, \tau)\} =$$

$$= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} (\Delta \tau)^{-1} \int dq R(q) \left\{ \int dz w(q|z, \Delta \tau) w(z|X, \tau) - w(q|X, \tau) \right\}$$

При этом использовано уравнение (30).Изменим порядок интегрирования в первом члене и разложим  $R(q)$  в ряд Тейлора в точке  $z$

$$\begin{aligned} \int dq R(q) \frac{\partial w(q|X, \tau)}{\partial \tau} &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} (\Delta \tau)^{-1} \left( \int dz R(z) w(z|X, \tau) \int dy w(y|z, \Delta \tau) + \right. \\ &+ \int dz \frac{\partial R}{\partial z} w(z|X, \tau) \int dy (y - z) w(y|z, \Delta \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \int dz \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} w(z|X, \tau) \int dy (y - z)^2 w(y|z, \Delta \tau) - \\ &\left. - \int dy R(y) w(y|X, \tau) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

В силу (26) первый и последний члены в правой части сокращаются . Предположим , что

$$\begin{aligned} \int dq (y - z) w(y|z, \Delta \tau) &= A(z) \Delta \tau \\ \int dq (y - z)^2 w(y|z, \Delta \tau) &= B(z) \Delta \tau \end{aligned} \quad (33)$$

При этих предположениях можно в явном виде вычислить предел в уравнении (32) ,а результат проинтегрировать по частям

$$\int dq R(q) \frac{\partial w(q|X, \tau)}{\partial \tau} = \int dz R(z) \left\{ - \frac{\partial [A(z) w(z|X, \tau)]}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} B(z) w(z|X, \tau) \right\}$$

Это должно быть справедливо для любой функции  $R(q)$  .Откуда следует , что

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial q} [A(q) w(q|X, \tau)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [B(q) w(q|X, \tau)] \quad (34)$$

Это- известное уравнение Фоккера -Планка. Оно играет ведущую роль в нашем рассмотрении. Это уравнение было получено нами при весьма общих предположениях, таких как условие марковости (24), которое уже использовалось нами ранее (см(15)). Отметим , что функция распределения  $f(q,t)$  также подчиняется уравнению Фоккера- Планка. В самом деле из (24) ,(25) следует, что

$$f(q,t) = \int dx w(q|x,t-t_0) f(x,t_0)$$

следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q,t) = \int dx \frac{\partial}{\partial t} w(q|x,t-t_0) f(x,t_0)$$

Подставляя сюда правую часть (34) ,находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} [A(q)f(q,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [B(q)f(q,t)] \quad (35)$$

Конкретизируем теперь уравнение Фоккера -Планка путем вычисления коэффициентов  $A(q)$  и  $B(q)$  для случая стохастического уравнения (10)

$$\dot{q} = F(q) + \zeta \psi(q); F = -\frac{\partial}{\partial q} V(q) \quad (36)$$

где  $\zeta(t)$  представляет собой случайный процесс , являющийся белым шумом

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad (37)$$

$$\langle \zeta(t), \zeta(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t-t')$$

Из (36) следует , что

$$\Delta q = \int_t^{t+\Delta t} d\tau F(q) + \int_t^{t+\Delta t} d\tau \zeta(\tau) \phi(q) \quad (38)$$

Из (33) получаем

$$A(q) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta q \rangle}{\Delta t} = F(q); \quad (39)$$

$$B(q) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta q)^2 \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_t^{t+\Delta t} d\tau' \langle \zeta(\tau) \zeta(\tau') \rangle \phi^2(q) = \sigma^2 \phi^2(q) \quad (40)$$

Таким образом , стохастическое дифференциальное уравнение (36) с белым шумом (37) определяет случайный марковский процесс , такой , что плотность вероятности (функция распределения)  $f(q,t)$  и вероятность перехода  $w_2(q|x,t)$  удовлетворяют уравнению Фоккера-Планка\*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} [F(q)f(q,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [\phi^2(q)f(q,t)] \quad (41)$$

### 3.Решение уравнения Фоккера -Планка для броуновской частицы. Процессы Орнштейна-Уленбека и Пуассона.

Уравнение Фоккера -Планка для броуновской частицы имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} [\gamma v f(v,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [f(v,t)] \quad (42)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде гауссова распределения, записанного в самом общем виде

$$f(v,t) = N(t) \exp\left(-\frac{v^2}{a(t)} + \frac{2b(t)}{a(t)} v\right) \quad (43)$$

Подставляя (43) в (42) , после дифференцирования по времени и скорости после несложных , но длинных преобразований получим уравнения ,определяющие функции а и b

---

\* **Замечание.** Для читателей , знакомых с теорией стохастических дифференциальных уравнений такая формулировка отвечает интерпретации Ито. Везде в дальнейшем мы будем придерживаться этой интерпретации , не вдаваясь в тонкости дилеммы Ито-Стратонович.

$$\dot{a} = -2\gamma a + \sigma^2;$$

$$\dot{b} = -\gamma b \quad (44)$$

$$\frac{\dot{N}}{N} = \gamma + \sigma^2 \frac{b^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{2a}$$

Уравнения (44) представляют собой линейные дифференциальные уравнения относительно функций  $a$  и  $b$ . Их решения в явном виде имеют вид

$$a(t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t))$$

$$b(t) = b_0 \exp(-\gamma t) \quad (45)$$

$$N(t) = (\pi a)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{b^2}{a})$$

Подставляя (45) в (42) получим

$$f(v, t) = (2\pi \frac{\sigma^2}{2\gamma})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2\gamma t))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{(v - v_0 \exp(-\gamma t))^2}{\frac{\sigma^2}{\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t))}) \quad (46)$$

Стационарное значение  $f(v, t \rightarrow \infty) \equiv f_0(v)$  имеет вид

$$f(v, t) = (2\pi \frac{\sigma^2}{2\gamma})^{-\frac{1}{2}} \exp(-v^2 / \frac{\sigma^2}{\gamma}) \quad (47)$$

Аналогично вероятность перехода есть

$$w_2(v, |v_0, t) = (2\pi \frac{\sigma^2}{2\gamma})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2\gamma t))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{(v - v_0 \exp(-\gamma t))^2}{\frac{\sigma^2}{\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t))}) \quad (48)$$

Случайный процесс, описываемый соотношениями (47), (48) называется процессом Орнштейна-Уленбека. Он моделирует непрерывно изменяющиеся физические величины и имеет поэтому "почти" непрерывные траектории. Если обратиться к другой

крайности - величинам , изменяющимся дискретно , то основным примером этого класса процессов и в известном смысле дискретным аналогом процесса Орнштейна-Уленбека является пуассоновский процесс. Иерархия вероятностей для этого процесса имеет вид

$$P(i,t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} \exp(-\lambda t); i = 0,1,2,\dots \quad (49)$$

$$P(j,t) = 0 \quad j = -1,-2,\dots$$

Пуассоновский процесс показывает сколько раз происходит интересующее нас событие в интервале времени от 0 до t.

Отметим , что стационарное решение уравнения Фоккера -Планка для броуновской частицы имеет вид распределения Максвелла , причем параметр  $\sigma^2$ , характеризующий величину амплитуды флуктуаций , напрямую связан с температурой среды.

Это утверждение носит весьма общий характер : в случае внутренних флуктуаций стационарное решение уравнения Фоккера-Планка, определяющее вероятность нахождения системы в состоянии , характеризующимся значением переменной  $q$ , имеет вид распределения , полученного нами при описании различных моделей (Глава 2)

$$f(q) = A \exp(-\beta V(q))$$

при этом параметр  $\beta$  связан с амплитудой флуктуаций

$$\beta^{-1} = \sigma^2$$

В случае внешних флуктуаций такие простые и общие утверждения вообще говоря отсутствуют. Однако и в этом случае уравнение Фоккера -Планка играет фундаментальную роль.

#### **4.Стационарные решения уравнения Фоккера -Планка. Явления перехода в флуктуирующей среде.**

Можно полагать что если флуктуации среды допускают описание с помощью стационарного случайного процесса ( т.е. процесса , характеристики которого зависят только от разности времен  $\Delta t = t_1 - t_2$  ) , то в общем случае система , испытывающая воздействие внешнего шума ,по истечении достаточно большого промежутка времени выходит на стационарный режим.



Стационарное поведение в данном случае означает , что при  $t \rightarrow \infty$  в системе устанавливается плотность вероятности , форма которой не меняется с течением времени. В дальнейшем мы определим стационарную плотность вероятности  $f(q)$ , которая характеризует не зависящее от времени поведение системы , находящейся под воздействием внешнего белого шума , и обсудим ее основные свойства. В частности нас будет интересовать любое изменения в макроскопическом поведении системы, вызываемые флуктуациями среды.

Плотность вероятности  $f(q)$  -стационарное решение уравнения Фоккера -Планка, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial q} = 0, \text{ где} \quad (50)$$

$$J(q) = F(q)f(q,t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial q} \varphi^2(q)f(q,t)$$

Здесь  $\sigma^2$ -амплитуда флуктуаций параметра  $q$  (см.(37)).

Величину  $J(q)$  можно интерпретировать как поток вероятности, Уравнение (50) становится при этом уравнением непрерывности, выражающим закон сохранения вероятности. Стационарное решение уравнения Фоккера -Планка находится из условия

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$J(q) = J_0 = const$$

Таким образом стационарная функция распределения удовлетворяет уравнению

$$J_0 = F(q)f(q) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial q} \varphi^2(q)f(q) \quad (51)$$

Предположим , что  $J_0 = 0$  Ниже везде мы будем рассматривать именно этот случай. Решение уравнения (50) при  $J_0 = 0$  имеет вид

$$f(q) = \frac{N}{\varphi^2(q)} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int^q du \frac{F(u)}{\varphi^2(u)}\right) \quad (52)$$

где  $N$ - нормировочная постоянная

$$N^{-1} = \int dq \frac{1}{\varphi^2(q)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^q du \frac{F(u)}{\varphi^2(u)}\right) < +\infty$$

Здесь первый интеграл берется по всей области изменения параметра  $q$ . По аналогии с тем ,как мы действовали выше, введем вероятностный потенциал  $U(q)$  ,записав  $f(q)$  в виде

$$f(q) = N \exp\left(-\frac{2U(q)}{\sigma^2}\right) \quad (53)$$

$$U(q) = -\left[ \int^q dz \frac{F(z)}{\varphi^2(z)} - \sigma^2 \ln \varphi(q) \right]$$

В случае чисто внутренних флуктуаций вероятностный потенциал совпадает с детерминированным  $U(q) = V(q)$  .При это экстремумы плотности вероятности в точности соответствуют "долинам" и "холмам" ландшафта , задаваемого потенциалом  $V(q)$  .Введение вероятностного потенциала позволяет записать эффективные уравнения движения системы с учетом внешних флуктуаций

$$\dot{q} = -\frac{d}{dq} U(q)$$

Отметим , что если характерный временной масштаб внутренних флуктуаций  $\zeta(t)$  велик по сравнению с временным масштабом внешних флуктуаций , это уравнение приобретает вид стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{q} = -\frac{d}{dq} U(q) + \zeta(t)$$

которое одновременно учитывает в рассматриваемом приближении как внутренние , так и внешние флуктуации в системе. Это уравнение будет использовано нами при построении модели эволюции сознания.( см. Главу 4)

Приведенные выше соображения позволяют отождествить экстремумы стационарной функции распределения с макроскопическими стационарными состояниями системы. Максимумы соответствуют устойчивым , а минимумы - неустойчивым состояниям системы. Если стационарная функция распределения (53) имеет только один максимум, то система

существует в одном состоянии (фазе) , флуктуируя относительно этого макроскопического состояния. Если же  $f(q)$  имеет два или более максимумов , то система при одних и тех же внешних условиях может находиться в двух или более фазах. Физический смысл экстремумов не исчерпывается тем, что они являются наиболее подходящими индикаторами перехода -помимо этого экстремумы соответствуют макроскопическим фазам системы. Экстремумы служат параметрами порядка перехода. Максимумы и минимумы функции распределения нетрудно найти из (53), находя экстремумы вероятностного потенциала  $U(q)$

$$F(q_m) - \frac{\sigma^2}{2} \varphi(q) \varphi'(q) = 0 \quad (54)$$

Первый член этого уравнения при  $\sigma^2 = 0$  соответствует стационарному уравнению для детерминированных процессов, Второй член описывает влияние флуктуаций. Как отмечалось выше , внутренние флуктуации не изменяют качественно стационарное поведение рассматриваемой системы. В случае внешних действие среды зависит от состояния системы. Если интенсивность внешнего шума достаточно велика , то экстремумы функции распределения могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния. Например , если  $F(q)$  многочлен степени  $n$  ,а  $\varphi'(q)\varphi(q)$  -многочлен степени  $m > n$ , то порядок многочлена в (54) увеличивается из-за влияния внешних флуктуаций , что может приводить к возникновению дополнительных экстремумов у функции распределения. Таким образом если амплитуда внешних флуктуаций достаточно велика , то система может переходить в другое устойчивое состояние .Обычно говорят , что в этом случае в системе происходит фазовый переход. Такие переходы принято называть фазовыми переходами ,индуцированными шумом [6]

Анализ возникновения таких переходов производится по следующей схеме

- 1.Ищется стационарное решение уравнения Фоккера- Планка.
- 2.Строится вероятностный потенциал  $U(q)$
- 3.Исследуются экстремумы этого потенциала. Те из них, которые отвечают максимумам функции распределения , соответствуют новым фазам системы.
- 4.Строится эффективное уравнение движения с использованием вероятностного потенциала.

5.Производится учет внутренних флуктуаций по описанной выше схеме.

## 5.Система Ферхюльста в среде с белым шумом.

Основное уравнение модели

$$\dot{q} = \lambda q - q^2 \quad (55)$$

уже встречалось нам раньше при описании динамики торговой точки , популяции либо лазерной генерации. Решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = q(0) \exp(\lambda t) \{1 + q(0)[\exp(\lambda t) - 1] / \lambda\}^{-1} \quad (56)$$

при  $\lambda < 0$  это уравнение допускает только одно стационарное решение  $q = 0$ , которое устойчиво. При  $\lambda = 0$  это решение становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию: от него отделяется новая ветвь стационарных состояний  $q = \lambda$ . При этом в системе происходит фазовый переход второго рода.

Для рассмотрения внешних флуктуаций положим в уравнении (55)

$$\lambda = \lambda_{\zeta} = \lambda_0 + \zeta(t)$$

где  $\lambda_0$  - среднее значение,  $\zeta(t)$  -белый шум с амплитудой  $\sigma^2$

$$\langle \zeta \rangle = 0 \quad (57)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$$

Уравнение Фоккера -Планка , соответствующее уравнению Ланжевена (55),(57), имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} [(\lambda_0 q - q^2) \mathcal{H}(q, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [q^2 f(q, t)] \quad (58)$$

В рассматриваемой модели экстремумы функции распределения (в соответствии с (54)) совпадают с нулями уравнения

$$\lambda_0 q_m - q_m^2 - \sigma^2 q_m = 0;$$

$$q_{m1} = 0$$

$$q_{m2} = \lambda_0 - \sigma^2$$

(60)

Второй корень существует лишь при условии  $\lambda > \sigma^2$ . Корень  $q_{m2}$  - всегда максимум, а  $q_{m1}$  - максимум при  $0 < \lambda_0 < \sigma^2$ . Таким образом в случае внешних флуктуаций в рассматриваемой системе функция распределения имеет следующие особенности

1. Если  $\lambda_0 < 0$ , то стационарная точка  $q=0$  устойчива.
2. В точке  $\lambda_0 = 0$  происходит переход- стационарная точка  $q=0$  становится неустойчивой и возникает новая стационарная функция распределения.
3. Если параметр  $\lambda_0$  становится больше, чем  $\sigma^2$ , то характер распределения  $f(q)$  вновь резко меняется. Следовательно  $\lambda_0 = \sigma^2$  - вторая точка перехода. Зависимости  $f(q)$  при различных значениях  $\lambda_0$  приведены на рисунке 8.

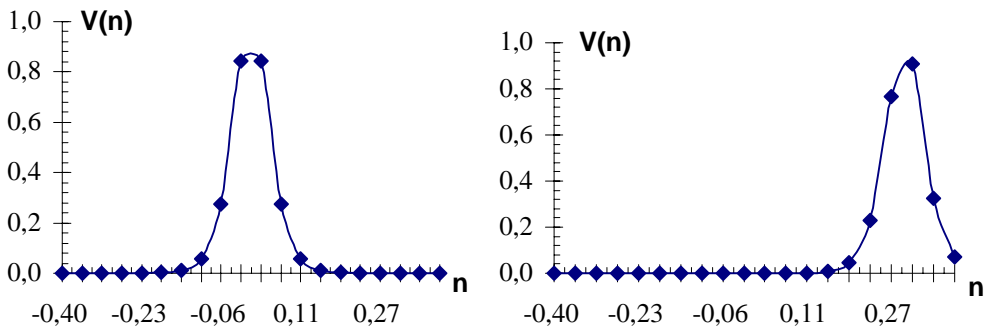


Рис.8 Зависимость функции распределения от плотности  $q = n$  при различных значениях  $\lambda_0$ : а)  $\lambda_0 < 0$  б)  $\lambda_0 > \sigma^2$ .

# ГЛАВА 4

## СОЗНАНИЕ. Часть 1.

### Эволюция. Эволюция эволюции.

В начале было Слово и Слово было у Бога ,  
и Слово было Бог.

**Евангелие от Иоанна**

Четвертая Раса развила Речь  
**Из Книги Дзан**

У гностиков Демиург - творческое начало,  
производящее материю, *отягощенную злом.*

**А.Стругацкий, Б. Стругацкий,**  
**Отягощенные злом или сорок лет спустя**

## 1.Введение

Примеры, рассмотренные выше ,показывают, что развитие (эволюция) любой системы, состоящей из большого числа одинаковых объектов, происходит по следующей схеме:

⟨СИСТЕМА⟩



⟨ПОДСИСТЕМЫ⟩



⟨совместное  
действие⟩



⟨Коллективные переменные  
параметры порядка⟩



⟨Обратная  
связь⟩



⟨Устойчивые  
мода.Принцип  
подчинения.⟩

Система ,как правило, имеет огромное число степеней свободы, так, что знание о всех ее состояниях ограничено. После исключения "системных" переменных определяются "неустойчивые" переменные подсистем- параметры порядка [2],которые подчиняют

себе в процессе развития системы, устойчивые переменные. Устойчивые моды в подавляющем большинстве случаев обеспечивают обратную связь, приводящую к стабилизации системы (принцип подчинения).

Рассмотренная схема является совершенно общей, поэтому естественно попытаться в рамках этой схемы описать эволюционные процессы в живой и неживой природе. В рамках приведенной схемы эволюцию в Природе естественно разделить на эволюционные этапы (эволюционные звенья) и описывать так

$$\{материя\} \Rightarrow \{жизнь\} \Rightarrow \{сознание\} \Rightarrow \{дух\} \quad (A)$$

Приведем определения этих понятий по **Философскому словарю** выпуска 1986 года: **Материя**- вещественное начало, которое однородно, однообразно, едино для всех предметов и процессов и не сводится к какому-либо известному конкретному виду вещества. **Дух**- понятие, которое тождественно **Идеальному Сознанию**, в отличии от материального начала. **Жизнь**- форма движения материи, качественно более высокая, чем физическая или химическая формы. **Сознание** (материалистическое) -высшая, свойственная только человеку форма отражения объективной действительности, способ его отношения к миру и самому себе, опосредованный всеобщими формами общественно-исторической деятельности людей. В дальнейшем следует различать понятие Сознания на начальном этапе его возникновения в процессе эволюции как свойства адаптации к окружающей среде, путем нелокального изменения в дальнейшем характеристик самой среды (в дальнейшем- **сознание**) и Сознания в процессе его дальнейшего формирования, как субстанции не зависящей от объективного мира и созидающей этот мир ( в дальнейшем- **СОЗНАНИЕ**).

Из построений, приведенных в предыдущих разделах следует, что на каждом этапе эволюции в системе возникает новая коллективная переменная, подчиняющая себе "устойчивые моды" и обеспечивая обратную связь и стабилизацию предыдущего эволюционного звена. Переходы от одного эволюционного звена к другому протекают по сценарию фазового перехода в общем случае, видимо, первого рода, обеспечивающего локальность возникновения нового эволюционного звена, с последующим распространением этого звена на всю территорию С примером перехода первого рода, проходящего по этому сценарию, мы уже сталкивались при описании образования организованной преступности(см. Главу 2).

Описание перехода *материя*→*жизнь* относится в значительной степени к компетенции естественных наук. Для описания такого перехода требуется знание "микроскопических уравнений движения" материи, содержащих огромное число переменных и

факторов, характер отношений между которыми определяется физическими законами.

Изучение перехода *жизнь*→**сознание** ( в смысле, определенном выше) относится к компетенции теоретической биологии, изучающей в частности ,такие вопросы как динамика популяций и экология, а также возможные процессы эволюции видов и других биологических систем (бактерий, вирусов, клеток и. т. д.).

Изучением вопросов эволюции на уровне СОЗНАНИЕ→*Дух* занимаются религия и философия. Весьма яркое описание одного из этапов этой эволюции человечества приведено в Откровении Святого Иоанна Богослова.

Отметим, что приведенная схема носит достаточно условный характер, в том смысле, что в пределах одного эволюционного звена рассматриваемой цепи также происходит эволюция. Так, например, переход *материя*→*жизнь* может быть подразделен на следующие эволюционные этапы:

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ → АТОМЫ→ МОЛЕКУЛЫ →  
→БИОЛОГИЧЕСКИЕ МОЛЕКУЛЫ→КЛЕТКИ  
→ ЖИЗНЬ (Б)

Рассматриваемую схему на этом этапе эволюции можно продолжить влево, вводя кварки, глюоны, фотоны и другие элементарные частицы хорошо известные в физике. Продолжение схемы вправо возможно по следующей цепи:

КЛЕТКИ→ПРОСТЕЙШИЕ→ЖИВОТНЫЕ→ЧЕЛОВЕК (В)

**Сознание** возникает на этапе перехода *животные*→*человек*. Дальнейшая эволюция системы определяется эволюцией **сознания**(СОЗНАНИЯ):

ЧЕЛОВЕК→ОБЩЕСТВО→ДУХ (Г)

Более того, на определенном этапе эволюции возникает обратная связь: **сознание**( СОЗНАНИЕ) стремится "подчинить" себе "устойчивые моды" такие как атомы, молекулы, клетки, животные. При этом в процессе эволюции СОЗНАНИЯ количество "подчиненных мод" (эволюционных звеньев) возрастает. В соответствии с этим можно допустить ,что на высоких ступенях эволюции возникает подчинение всех предшествующих мод одной



доминирующей моде так, что ,в частности , ограничением для эволюции на этом этапе является любая форма, будь то форма тела или форма планеты. Очевидно, что на этом этапе эволюции единственным эволюционирующим объектом т.е. объектом, способным к совершенствованию, является человек во всех его связях с общественными, психическими, психофизиологическими , божественными и кармическими структурами внешнего мира .При этом главным фактором, определяющим поступки человека является свобода воли. Это понятие неявно уже было использовано нами ,например, при построении моделей поляризации общественного мнения.

Рассмотренная картина позволяет сформулировать уже высказанную *гипотезу универсальности* в следующем виде: **уравнения движения в пределах одного эволюционного звена представляют собой уравнения мезоскопического этапа эволюции для переменных , характеризующих, состояние данного эволюционного звена.**

## 2.Биологическая эволюция

Остановимся более подробно на биологическом этапе эволюции, рассматривая, следуя [2] ,вопросы о распределении, численности, и выживании видов, обращая основное внимание на несколько основных факторов: какие процессы контролируют численность популяции? Как много различных популяций могут сосуществовать?

Рассмотрим сначала какую-либо одну популяцию состоящую, например, из бактерий, растений или животных данного вида. Задача описания такой популяции рассматривалась выше. В частности было показано, что ограниченность количества пищи приводит к уравнению Ферхюльста, описывающего изменение количества особей в популяции. Поведение систем, описываемых уравнением Ферхюльста достаточно подробно обсуждалось в предыдущих главах.

### Конкуренция и сосуществование.

Если различные виды не питаются одной и той же пищей и не взаимодействуют друг с другом (например особи одного вида не убивают особей другого вида, размножаются в разных местах и.т.д) они очевидно могут сосуществовать. Соответствующие уравнения для численности видов записываются как

$$\dot{n}_j = \alpha_j n_j - \beta_j n_j^2 \quad j=1,2,3,\dots$$

Ситуация существенно усложняется, если различные виды пытаются жить или живут за счет одного и того же источника пищи или зависят от одних и тех же условий жизни. Основной математический подход остается одним и тем же, как в том так и в другом случае, поэтому в дальнейшем будет использоваться термин "пища". Чтобы популяция выжила необходимо улучшить ее индивидуальные постоянные  $\alpha_j; \beta_j$  путем адаптации к внешним условиям. (Пример такого улучшения приведен ниже (см. Главу 5)). Кроме того, для сосуществования важно дополнительное поступление пищи. Рассмотрим в качестве примера два вида, живущие за счет перекрывающихся источников питания. Уравнения, описывающие такую ситуацию, имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= (\alpha_{11} N_1 + \alpha_{12} N_2) n_1 - \delta_1 n_1 \\ \dot{n}_2 &= (\alpha_{21} N_1 + \alpha_{22} N_2) n_2 - \delta_2 n_2\end{aligned}$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  - количества доступной пищи, уравнения, определяющие изменения которой, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \gamma_1 (N_1^{(0)} - N_1) - \mu_{11} n_1 - \mu_{12} n_2 \\ \dot{N}_2 &= \gamma_2 (N_2^{(0)} - N_2) - \mu_{21} n_1 - \mu_{22} n_2\end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_j N_j^{(0)}$  - скорость поступления пищи,  $\gamma_j N_j$  - убыль пищи за счет внутренних причин, например гниения. Предположим, что можно пренебречь производной по времени от количества пищи  $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$ . Это позволяет выразить  $N_1; N_2$  через  $n_1; n_2$ . Таким образом для числа особей в популяциях получим:

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= [(\alpha_{11}^{(0)} N_1^{(0)} + \alpha_{12}^{(0)} N_2^{(0)}) - \delta_1 - (\eta_{11} n_1 + \eta_{12} n_2)] n_1 \\ \dot{n}_2 &= [(\alpha_{21}^{(0)} N_1^{(0)} + \alpha_{22}^{(0)} N_2^{(0)}) - \delta_2 - (\eta_{21} n_1 + \eta_{22} n_2)] n_2\end{aligned}$$

Из этих уравнений легко получить стационарные значения количеств особей в популяциях. Рассматривая правые части уравнений в плоскости  $n_1; n_2$  легко найти условия, зависящие от параметров системы, при которых возможно выживание одного из видов, либо их сосуществование.

Симбиоз.

Имеются многочисленные примеры того ,как кооперация различных видов облегчает их существование и способствует эволюции. Такая кооперация называется симбиозом. Хорошо известна кооперация деревьев и пчел, людей и собак и. т. д.\*

Ее можно смоделировать следующим образом. Поскольку скорость размножения одного вида зависит от наличия другого, то

$$\dot{n}_1 = (\alpha_1 + \alpha_1^1 n_2) n_1 - \delta_1 n_1$$

$$\dot{n}_2 = (\alpha_2 + \alpha_2^1 n_1) n_2 - \delta_2 n_2$$

где для простоты пренебрегалось членами вида  $\beta_i n_i^2$  Слагаемые этого вида возникают вследствие ограниченности источников питания ,однако на начальном этапе развития они малы. В стационарном случае

$$\alpha_1 - \delta_1 + \alpha_1^1 n_2^{(0)} = 0$$

$$\alpha_2 - \delta_2 + \alpha_2^1 n_1^{(0)} = 0$$

Анализ показывает, что при достаточно больших значениях  $n_1^{(0)}; n_2^{(0)}$  всегда имеется неустойчивая мода, отвечающая лавинообразному росту популяции. Слагаемые  $-\beta_i n_i^2$  (аналогично случаю модели организованной преступности) стабилизируют ситуацию.

Отношения хищник-жертва.

Предположим, что имеются животные двух типов- жертвы, живущие за счет внешних источников питания и хищники, питающиеся жертвами. Рассмотренная модель формирования оргпреступности- один из примеров отношений этого типа. Основные уравнения (уравнения Лоттки- Вольтерра ) имеют вид:

$$\dot{n}_1 = \alpha_1 n_1 - \alpha n_1 n_2$$

$$\dot{n}_2 = \beta n_1 n_2 - \chi_2 n_2$$

---

\* **Замечание.** В рассмотренных выше задачах о формировании общественного мнения , симбиоз соответствует образованию коалиций из кандидатов ,скажем на пост Президента, при условии, что число таких кандидатов больше двух.

Эти уравнения имеют периодические решения[2]. Действительно, если хищники размножаются слишком интенсивно, то и жертвы уничтожаются ими очень быстро. Поэтому запасы пищи у хищников уменьшаются и, соответственно, уменьшается численность хищников. В результате число животных-жертв увеличивается и, соответственно, растут запасы доступной пищи у хищников, которые снова начинают размножаться и. т. д.

### 3.0 возникновении сознания.

Изреченное слово имеет скрытую мощь,  
не только неизвестную, но даже  
неподозреваемую нашими современными  
мудрецами

**Е.П.Блаватская Тайная доктрина**

Предыдущий анализ показывает, что главным фактором, определяющим эволюцию биологического вида является наличие источников питания и возможности воспроизводства себе подобных индивидуумов. Возникновение **сознания** можно рассматривать как результат взаимодействия двух процессов:

1. Процесса, определяющего наличие обмена информацией между особями. Возможность обмена информацией может быть реализована, если существует язык внутривидового, либо межвидового общения. При этом в соответствии с имеющимися у человека органами чувств, язык может быть реализован на уровне звукового, визуального либо сенсорного обмена информацией.

2. Процесса, определяющего возможность непрерывного воспроизводства индивидуумов. Непрерывность воспроизводства требует существования готовых к зачатию особей как мужского, так и женского полов. Известно, что у большинства биологических видов самки оказываются готовыми к зачатию лишь в сравнительно небольшие периоды времени. (Так например у собак самки готовы к зачатию в среднем примерно 10-14 дней в году).

Если допустить, что самец всегда готов к зачатию, то, очевидно, что для обеспечения непрерывного зачатия и, следовательно, воспроизводства достаточно выполнения одной из возможностей:

а) Существования "семьи", состоящей из одного самца и нескольких самок(патриархат). В этом случае непрерывность воспроизводства обеспечивается тем, что число женских особей, в "семье" таково, что хотя бы одна из самок в данный момент времени готова к зачатию.

б) Наличия значительного числа "семей" ,состоящих из одной самки и нескольких самцов (матриархат).Непрерывность воспроизводства в этом случае обеспечивает большое количество "семей" ,среди которых всегда найдется такая "семья", где самка готова к зачатию.

С другой стороны ,рождение особей мужского или женского пола в среднем равновероятно. Поэтому непрерывное воспроизводство по схеме а), либо по схеме б) затруднительно: как в одном, так и в другом случае количество особей одного пола значительно больше, чем количество особей другого пола. Таким образом с точки зрения непрерывности воспроизводства эволюция "пошла" по пути отбора тех самок ,у которых периоды возможности зачатия максимальны. Более того эти периоды увеличивались в процессе эволюции и естественного отбора. Тем самым становится возможным образование "семьи", состоящей из одного самца и одной самки ,но всегда готовой к зачатию. Такая эволюция была бы невозможной без развития языка-возможности объяснить отношения типа "хочу - не хочу" ,"могу -не могу" ,"надо -не надо" и. т. д. Развитие языка и возникновение непрерывности воспроизводства привело к появлению **сознания**-способности данного вида к адаптации путем изменения условий среды обитания.

Действительно, существование семьи ,состоящей только из двух особей дало возможность ( вследствие значительной мобильности такой семьи) пользоваться источниками питания, значительно удаленными друг от друга, что привело к эффективному увеличению количества доступной пищи. С другой стороны необходимость далеко передвигаться значительно увеличило вероятность гибели особей в результате стихийных бедствий либо действий хищников (особей другого вида).В семье ,состоящей лишь из двух особей, возможность достижения пищи далеко не всегда означает факт ее достижения. Например большое количество съедобного зверья на данной территории вовсе не означает, что любой "человек" в результате охоты легко добудет себе пищу. Этот факт в совокупности с необходимостью защиты как от хищников, так и от стихийных бедствий привел к возникновению орудий производства и. т. д. Таким образом можно сказать ,что наличие языка и непрерывности воспроизводства привело к возникновению у особей свойства, которое сделало возможным адаптацию к сильно меняющимся внешним условиям , в том числе путем изменения характеристик самой среды обитания (скажем вследствие использования орудий труда).

В дальнейшем эволюция развивалась как эволюция **сознания**(СОЗНАНИЯ): возможность общения и необходимость более точного информационного обмена привели к возникновению такого свойства, как воображение -способности дополнять картину, возникшую в процессе получения информации ,в соответствии со своим опытом. Воображение совместно с необходимостью непрерывного воспроизводства и, следовательно, с необходимостью существования семьи типа "одна самка- один самец" привело к возникновению такого состояния , как любовь и. т . д.

Отметим, что обозначенная здесь картина эволюции приводит к определению понятия "производства добра" как совокупности таких действий индивидуума, которые в конечном итоге способствуют эволюции всего вида в целом по схеме (А) Аналогично можно определить и "производство зла", как совокупность таких действий индивидуума, которые в конечном итоге не способствуют эволюции всего вида. Таким образом, если допустить, что существует параметр (или набор параметров) $\xi$ ,определяющий "уровень" эволюционности в данный момент времени, то его изменение можно представить в символическом виде:

$$\dot{\xi} = \text{"производство добра"} - \text{"производство зла"}$$

При этом как "производство добра" так и "производство зла "- суть функционалы параметра  $\xi$ .

При  $\dot{\xi} > 0$  система развивается "в эволюционном" направлении ,при  $\dot{\xi} < 0$ -наоборот. Очевидно, что для того ,чтобы система эволюционировала необходимо, чтобы в среднем (например за достаточно большой промежуток времени) "производство добра" было больше, чем "производство зла". Этот критерий выполняется лишь в среднем: в каждый данный момент времени "производство добра" может быть как больше, так и меньше, чем "производство зла".

Рассматриваемая система обладает отмечавшимся выше свойством ,согласно которому возникающие коллективные моды "подчиняют" себе все остальные. Действительно, например возникновение такой коллективной моды ,как язык, приводит к подчинению подсистемы, которая называется человек, этому параметру, что выражается ,например, в необходимости ребенку изучать язык, вносить вклад в его развитие ( литература, жаргон, мат и. т. д.).Развитие языка в совокупности с воображением, привело к появлению таких коллективных мод ,как литература, живопись,

музыка, поэзия, наука, архитектура и. т. д. Каждая из этих коллективных мод оказывает огромное, а в совокупности-решающее влияние на развитие общества, "подчиняя" себе его развитие. Параметры такого типа при наличии информационного обмена и любви ,как "склеивающей" характеристики на уровне ощущений и приводят в итоге к формированию той коллективной моды, которая называется духовностью и которая, в соответствии с изложенным выше, является тем "параметром порядка", развитие которого и определяет дальнейшую эволюцию. Из рассмотренной модели следует , что в процессе эволюции любых систем возникают новые свойства, определяющие в дальнейшем весь характер эволюции. Так при эволюции биологических систем возникают все новые и новые виды, при эволюции животных возникает **сознание**, при эволюции **сознания** возникает духовность и. т. д. Возникновения этих свойств определяется флуктуациями. Опишем этот процесс в рамках модели возникновения **сознания** как свойства адаптации к окружающей среде, путем изменения в дальнейшем характеристик самой среды.

#### **4.Модель возникновения сознания. Неравновесный фазовый переход первого рода, индуцированный шумом.**

Рассмотрим популяцию обезьян, состоящую из  $N$  представителей, живущую в изменяющихся внешних условиях. Предположим, что из  $N$  индивидуумов в популяции  $N_A$  особей обладают сознанием в описанном выше смысле (так в соответствии со сказанным в предыдущем разделе, эти индивидуумы, в частности, должны обладать развитым языком и быть способными к непрерывному воспроизводству себе подобных), а  $N_B$ - не обладает им. Очевидно, что  $N = N_A + N_B$  Такая модель кажется весьма искусственной. Однако она имеет вполне реальный смысл ,если предположить что  $N_A = \sum_{Y \in W} N(Y); N_B = \sum_{Y \notin W} N(Y)$  Здесь  $W$ - множество признаков характеризующих **сознание**( к таким признакам могут быть отнесены способность обмениваться информацией, создавать орудия производства и. т. д.). В соответствии со сказанным выше это множество характеризуется различными степенями развития языка и непрерывности воспроизводства. Рассмотрим для простоты популяции с неперекрывающимися поколениями. Пусть  $\Delta t$  продолжительность жизни одного поколения. Нас интересуют

изменения относительного числа особей, обладающих и не обладающих сознанием  $X = \frac{N_A}{N}; \frac{N_B}{N} = 1 - X$  в популяции от поколения к поколению. Величина  $X$  изменяется под действием двух факторов: естественного отбора, благоприятствующего особям, обладающим **сознанием** и, следовательно, наиболее приспособленным к изменяющейся окружающей среде, и мутации, "преобразующих" особей, обладающих **сознанием** в особи, которые им не обладают и наоборот. Рассмотрим случай, когда оба процесса протекают медленно и изменения, вызванные ими в каждом поколении малы. В этих предположениях эффекты, производимые естественным отбором и мутациями, аддитивны. Пусть  $v_A$  и  $v_B$  - скорости мутаций за одно поколение из особей типа А в особи типа В и наоборот.  $u_A = v_A \Delta t, u_B = v_B \Delta t$  - частоты мутаций за одно поколение. Таким образом изменение  $\Delta_{\text{мут}} X$  в результате мутаций можно записать в виде

$$\Delta_{\text{мут}} X = -u_A X + u_B (1 - X) = -(v_A + v_B) X \Delta t + v_B \Delta t \quad (1)$$

Лучшая приспособляемость к окружающей среде индивидуумов, обладающих **сознанием**, означает, что такие особи имеют большую скорость роста за поколение  $w_A > w_B$ :

$$N_A(t + \Delta t) = w_A N_A(t); N_B(t + \Delta t) = w_B N_B(t);$$

$$w_A = 1 + \frac{s}{2}; w_B = 1 - \frac{s}{2}. \quad (2)$$

где  $s$ - коэффициент отбора за одно поколение, который учитывает предпочтение "вида" А над В.

Изменение  $X$  вследствие естественного отбора определяется выражением

$$\Delta_{\text{е.отб}} X = \frac{N_A(t + \Delta t)}{N_A(t + \Delta t) + N_B(t + \Delta t)} - X(t) = \frac{sX(1 - X)}{1 - \frac{s}{2} + sX} \quad (3)$$

При малом коэффициенте отбора  $s = \zeta \Delta t$  имеем

$$\Delta X = \Delta_{\text{мут}} X + \Delta_{\text{е.отб}} X = -(v_A + v_B) X \Delta t + v_B \Delta t + \zeta X(1 - X) \Delta t$$

или



$$\dot{X} = -(v_A + v_B)X + v_B + \zeta X(1 - X) \quad (4)$$

Если окружающая среда подвержена случайным изменениям, то коэффициент отбора  $\zeta(t)$  флуктуирует от поколения к поколению. Мы рассмотрим интервалы времени, большие по сравнению с временем жизни одного поколения, но малые по сравнению с временным масштабом любой систематической эволюции среды в результате **сознательной** деятельности. Следовательно величину  $\zeta$  можно моделировать с помощью случайного процесса. Переходя к новым переменным  $\tau = (v_A + v_B)t$  из (4) получим

$$\dot{X} = -X + \alpha_0 + \lambda X(1 - X) + \varepsilon X(1 - X)$$

$$\lambda = \frac{\langle \zeta \rangle}{v_A + v_B}; \quad \langle \varepsilon \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon(t) \varepsilon(t^1) \rangle = \sigma^2 \delta(t - t^1) \quad (5)$$

$$\alpha_0 = \frac{v_A}{v_A + v_B}$$

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{d\tau}$$

Предположим для простоты, что  $v_A = v_B$ , тогда  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ . Физический смысл имеют стационарные решения детерминированного ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения (5), которое определяется из соотношения:

$$X_0 = \frac{\left[ \lambda - 1 + (\lambda^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]}{2\lambda} \quad (6)$$

Линейный анализ устойчивости детерминированного уравнения (5) в окрестности стационарного решения  $X_0$  показывает, что величина, обратная времени релаксации  $\varpi = \tau^{-1} = -(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$  отрицательна при всех значениях  $\lambda$ . Таким образом в постоянной среде не происходит потери устойчивости и, следовательно, не происходит процесса, приводящего к образованию **сознания**.

Совершенно иная ситуация наблюдается в флуктуирующей среде. Для изучения этого явления, заметим, что стационарное решение

уравнения Фоккера- Планка, соответствующего стохастическому уравнению Ланжевена(5)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} [F(X)f(X,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [\varphi^2(X)f(X,t)]$$

$$F(X) = -X + \alpha_0 + \lambda X(1-X);$$

$$\varphi(X) = X(1-X)$$

имеет вид [ 6 ] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} [F(X)f(X,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [\varphi^2(X)f(X,t)]$$

$$f(X) = N(X(1-X))^{-1} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left[ -\frac{1}{2X(1-X)} - \lambda \ln \frac{X}{1-X} \right] \right\} \quad (7)$$

где N - нормировочная постоянная, которая при  $\lambda = 0$  имеет вид:

$$N = \frac{1}{2} \exp \left( \frac{2}{\sigma^2} \right) K_0^{-1} \left( \frac{2}{\sigma^2} \right) \quad (8)$$

$K_0$ - модифицированная функция Бесселя. При изучении вопроса о возникновении **сознания** как фазовом переходе в изучаемой модели, последуем общей схеме, изложенной выше ,рассматривая поведение экстремумов функции распределения  $f(X)$  ,для того ,чтобы обнаружить любые качественные изменения в стационарном поведении системы. Экстремумы  $f(X)$  могут быть вычислены из уравнения :

$$\frac{1}{2} - X_m - \lambda X_m(1-X_m) - \frac{\sigma^2}{2} X_m(1-X_m)(1-2X_m) = 0 \quad (9)$$

При  $\lambda = 0$  . стационарное решение в этом случае равно

$$X_0 = \frac{1}{2} \quad (10)$$

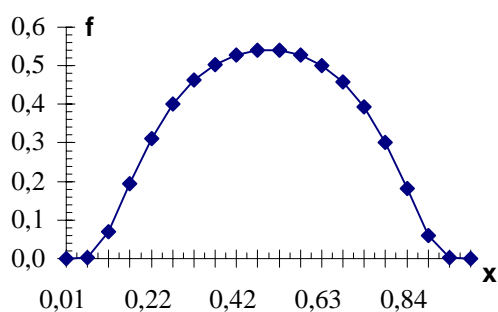
При  $\lambda \neq 0$  из (9) получаем

$$X_{m1} = \frac{1}{2}; X_{m\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (11)$$

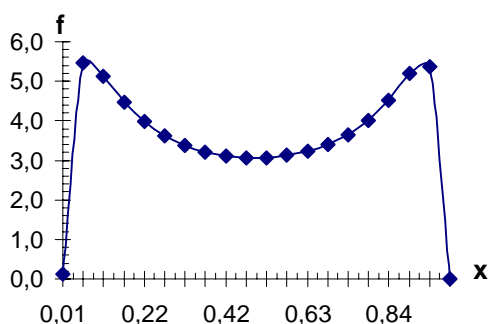
Таким образом при  $\sigma^2 > 4$  стационарная функция распределения имеет три экстремума, из которых  $X_{m\pm}$  - максимумы.

Детерминированное состояние

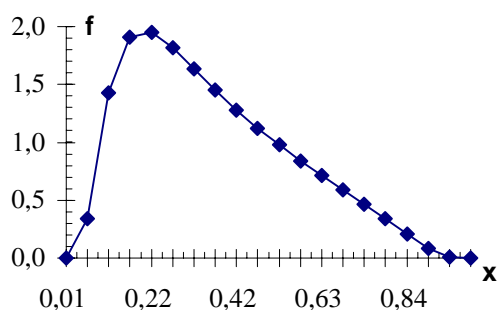
$X_{m1} = X_0 = \frac{1}{2}$  при  $\sigma^2 > 4$  превращается в минимум (рис.9 а).



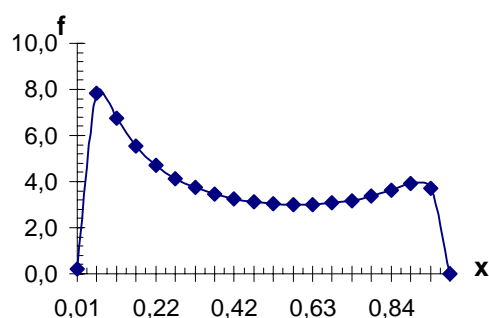
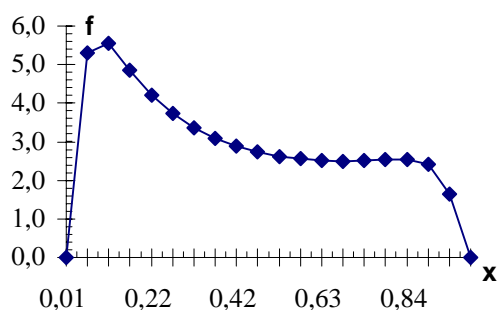
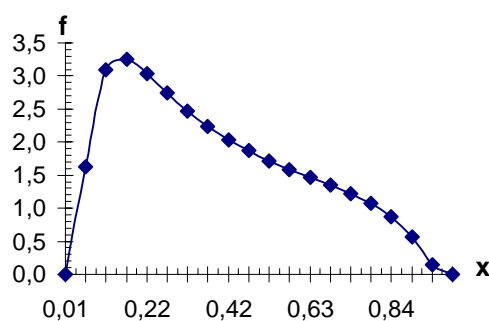
а



б



в



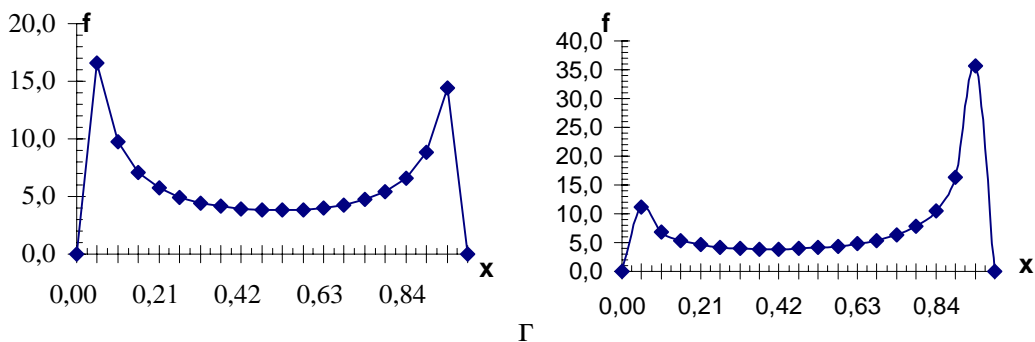


Рис 9 Зависимость функции распределения в модели возникновения сознания при различных уровнях флуктуаций среды. а -  $\lambda = 0$   $\sigma^2 < 4$   
б, в -  $\sigma^2 > 4$ ,  $\lambda \neq 0$  г - самосогласованный случай. (см. Главу 5)

Таким образом наблюдается типичная картина фазового перехода второго рода. При  $\lambda \neq 0$  ситуация качественно демонстрирует все типичные черты фазового перехода первого рода (рис.9б,в) - увеличение амплитуды флуктуаций приводит к формированию второго максимума у функции распределения, величина которого растет по мере роста амплитуды флуктуаций. Таким образом, если в среднем оба состояния  $N_A u N_B$  (отсутствие сознания, либо его наличие) одинаково пригодны ( $\lambda = 0$ ) (в детерминированной среде в этом случае никакого отбора не происходило бы), в случайной среде при  $\sigma^2 > 4$  следует ожидать выживания преимущественно особей, обладающих сознанием. При больших значениях  $\sigma^2$  переход из одного состояния в другое становится все менее и менее вероятным

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right) K_0^{-1}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow \infty$$

При больших  $\sigma^2$  переход из одного пика в другой становится весьма редким событием: вероятность того, что оно произойдет за время жизни десяти или даже ста поколений ничтожно мала.

Таким образом требование адаптации к локально ограниченному количеству пищи привело к необходимости обеспечить процесс непрерывного воспроизводства путем образования семьи, состоящей из одного самца и одной самки. Такая семья, по-видимому, не могла образоваться без развития языка - возможности информационного обмена между особями, способствовавшего процессу воспроизводства. Мобильность семьи из одного самца и одной самки привела с одной стороны к увеличению доступных источников питания, а с другой - к

необходимости добычи имеющейся в источниках пищи , к необходимости защиты семьи от хищников и природных катаклизмов. Это, в свою очередь, привело к возникновению орудий труда. Требование о "передачи опыта" новым поколениям способствовало развитию языка и. т. д. В результате произошло значительное увеличение числа особей, обладающих **сознанием**, по сравнению с числом особей, не обладающим им.

## 5.Об эволюции СОЗНАНИЯ.

Времени не было, оно покоилось в  
Бесконечных Недрах Продолжительности.

Из Книги Дзан

Рассмотренная картина справедлива лишь на начальной стадии возникновения **сознания**. На более поздних временах эволюции развитие **сознания** ,как отмечалось выше, приводит к изменению свойств окружающей среды. т.е. на этих временах все параметры ( $\lambda$  ,  $\sigma$ ,  $u_a$ ,  $u_b$ , и.т.д.) становятся функционалами функции распределения  $f(X,t)$ . В простейшем случае можно положить что (эти выражения будут получены в Главе5)

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 [1 + \int (X - X_s) f(X,t) dX] \quad (12)$$

$$\lambda = \lambda_0 [1 - \int (X - X_s) f(X,t) dX]$$

Здесь  $X_s$  - тот корень уравнения

$$\frac{1}{2} - X_m - \lambda X_m (1 - X_m) - \frac{\sigma^2}{2} X_m (1 - X_m) (1 - 2X_m) = 0$$

который переходит в стационарное решение детерминированного уравнения (5)

$$X_0(\lambda) = \frac{\left[ \lambda - 1 + (\lambda^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]}{2\lambda}$$

при  $\sigma^2 \rightarrow 0$ .  $X_s(\sigma, \lambda) \rightarrow X_0(\lambda)$

Соотношения (12) показывают ,что по мере возникновения сознания (это соответствует формированию второго максимума у  $f(X,t)$ ) среда изменяется- увеличиваются флуктуации ( $\sigma^2$ ) ,связанные с

сознательной деятельностью, уменьшается скорость мутаций , приводящих к возникновению **сознания**, что связано с принципом подчинения. Такие изменения направлены на адаптацию человека путем изменения среды обитания и приводят к формированию ярко выраженного максимума у функции распределения  $f(X,t)$ , отвечающего наличию **сознания**. (рис 9 г). Таким образом дальнейшая эволюция определяется эволюцией СОЗНАНИЯ.

Как отмечалось выше ,в процессе эволюции СОЗНАНИЯ возникают такие параметры и характеристики как воображение , наука ,любовь ,религия ,искусство и. т. д. Этот процесс можно условно изобразить следующей схемой



В процессе такой эволюции изучаемая система (человек, общество, человечество) может находиться в огромном числе состояний, характеризующихся развитием таких характеристик, как наука, религия, искусство, техника, философия, любовь, воображение и т. д. Очевидно, что на этом этапе эволюции определяющую роль будет играть энтропия, которая служит мерой разнообразия таких состояний [7]. Более того, детали поведения системы на этом этапе эволюции, вероятно, не зависят от того, какие причины привели к возникновению **сознания**, т.е. не зависят от начальной функции распределения  $f(\hat{X}) \sim \exp(-U(\hat{X}))$ . Где  $U(\hat{X})$  - вероятностный потенциал, определяемый из соотношения

$$U(\hat{X}) = -\frac{\sigma^2}{\gamma} \ln f(\hat{X}) \quad (13)$$

$\bar{X}$  - набор переменных, характеризующих состояние рассматриваемой системы. В рамках рассмотренной выше модели формирования **сознания**

$$U(X) = -\frac{\sigma^2}{2} \ln f_{\infty}(X)$$

$$f_{\infty}(X) = N(X(1-X))^{-1} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left[ -\frac{1}{2X(1-X)} - \lambda \ln \frac{X}{1-X} \right] \right\}$$

В соответствие с приведенной выше схемой ,например ,мы можем охарактеризовать систему набором переменных , принимающих значения либо 0 если система не обладает нужным свойством , либо 1 если обладает \*.

Состояние рассматриваемой системы в этом случае может быть охарактеризовано N -мерным вектором

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \phi_N \end{pmatrix}. \quad (13^1)$$

Причем в практически всегда  $N \gg 1$ , может быть даже , что  $N \rightarrow \infty$ . Эти факты имеет далеко идущие последствия .В частности , используя (13<sup>1</sup>), можно построить нетривиальные модели , имеющие отношение к эволюции, и не только к ней. В Главе 6 показано , что

---

\* Приведем пример .Состояние подсистемы , называемой Союз Советских Социалистических Республик на заключительном этапе своего развития можно в рамках этой модели можно условно охарактеризовать ( условно) следующим набором переменных :

музыка)=1  
 (литература)=1  
 (живопись)=0  
 (поэзия)=0  
 (архитектура)=0  
 (философия)=0  
 (наука)=1  
 (техника)=1  
 (религия)=0

в процессе эволюции в системе, состояние которой может быть охарактеризовано вектором типа (13<sup>1</sup>) в Общем случае имеются неисчезающие топологические дефекты, которые возникли на ранних стадиях эволюции СОЗНАНИЯ, когда число  $N$  конечно, но велико (например  $N > 10$ ). Внутренняя структура дефектов слабо зависит от состояния, в котором находится система в данный момент времени. Дефекты взаимодействуют между собой посредством так называемых калибровочных полей. Общие принципы построения таких моделей приведены в Главе 6.

В непрерывном случае набор переменных  $\hat{X}$  можно представить как совокупность разностей между количеством индивидуумов обладающих данным свойством (например музыкально образованных) и не обладающих им.

Фактически на этом этапе эволюцию систему можно образно представить как процесс случайного блуждания по описанным выше состояниям. Сформулируем простейшую математическую модель такой эволюции. Для этого заметим, что эффективные уравнения движения системы можно представить в виде

$$\dot{X}_i = \frac{d \ln f(\hat{X}, t)}{dX_i} \quad (14)$$

здесь  $X_i$  - одна переменная из набора  $\hat{X}$ ,  $f(\hat{X}, t)$  - функция распределения в момент времени  $t$ . Уравнение (14) является точным, если  $f(\hat{X}, t) = f(\hat{X}, t \rightarrow \infty) = f(\hat{X})$  где  $f(\hat{X})$  - стационарная функция распределения.

**Замечание.** Если справедливо уравнение (14) с функцией распределения  $f(\hat{X}, t) = f(\hat{X}, t \rightarrow \infty) = f(\hat{X})$ , то возникает неожиданная ситуация - значения переменных, характеризующих состояние системы определяется значением функции распределения  $f(\hat{X}, t) = f(\hat{X}, t \rightarrow \infty) = f(\hat{X})$ , которая содержит информацию как о прошлом системы, так и о ее будущем. Исходя из этого можно допустить, что «Время есть лишь иллюзия, создаваемая последовательными чередованиями наших состояний СОЗНАНИЯ на протяжении нашего странствования в Вечности..... Настоящее есть лишь математическая линия, отделяющая ту часть Вечной Длительности, которую мы называем Будущим, от части, именуемо нами Прошлым..... Время Прошлое есть Время Настоящее, также и Будущее, которое, хотя еще и не выявилось, все же существует». Е.П.Блаватская «Тайная доктрина»

В том случае, если функция распределения отлична от стационарной, уравнение (14) справедливо, очевидно, на конечных этапах эволюции системы. Действительно на таких этапах существуют переменные,  $X_i; i = 1, 2, \dots, r < N$ , ( $N$  - полное число



переменных в системе) которые , отрелаксировав, приняли свои стационарные значения и те переменные , которые не успели придти к своим стационарным значениям. (  $\hat{X}_i; i = r + 1, \dots, N$  ) Очевидно, что в этом случае полная функция распределения  $f(X, \hat{X})$  - функционал частичной функции распределения  $F_s(\hat{X}, t)$

$$f(X, \hat{X}) = f(X, F_s(\hat{X}, t)), F_s = \int dX f(q, \hat{X})$$

В рассматриваемой системе , очевидно , имеются внутренние флуктуации. (На рассматриваемых временах внешние флуктуации можно считать подавленными в соответствии с (12)). Будем считать , что характерное время внутренних флуктуаций значительно меньше , характерного времени изменения параметров  $\hat{X}$  В этом случае уравнения . принимают вид

$$\dot{X}_i = \frac{d \ln f(\hat{X}, t)}{dX_i} + \zeta_i(t) \quad (15)$$

$$\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$$

$$\langle \zeta_i(t), \xi_k(t') \rangle = 2D_{ik} \delta(t - t')$$

Уравнение (15) показывает , что на рассматриваемых этапах эволюции функция распределения  $f(\hat{X}, t)$  сама представляет собой случайную величину. Такие конструкции в математике принято называть случайными полями [3]. Эволюция системы в этом случае может быть и не марковской в описанном выше смысле. Из этого следует , что уравнения для функции распределения , усредненной по распределению внутренних флуктуаций  $F_s(\hat{X}, t) = \langle f(\hat{X}, t) \rangle \equiv F(\hat{X}, t)$  не является уже уравнением Фоккера-Планка и его следует выводить заново. Одна из возможностей состоит в том , чтобы записать "поточный" член в уравнении Фоккера -Планка в виде

$$\left\langle \frac{\partial Z(\hat{X}) f(\hat{X}, t)}{\partial \hat{X}} \right\rangle \equiv \alpha (\ln F(\hat{X}, t) - \{ \ln F(\hat{X}, t) \}) F(\hat{X}, t) \text{ где } Z(\hat{X}) \equiv \frac{\partial \ln f}{\partial \hat{X}}$$

Здесь {.....} означают усреднение с детерминированной функцией распределения  $F(\hat{X}, t)$  :

$$\{\ln F(\hat{X}, t)\} \equiv \int d\{\hat{X}\} F(\hat{X}, t) \ln F(\hat{X}, t)$$

$d\{\hat{X}\}$ - мера на пространстве  $\hat{X}$ .  $\alpha$ -параметр , выражающийся через

$$\Delta \hat{X}; \alpha \approx \frac{1}{\langle \Delta \hat{X} \rangle} \left\langle \frac{1}{(\Delta \hat{X})} \right\rangle.$$

Так в частном случае ,когда функция распределения  $f_0(X)$  на начальном этапе эволюции СОЗНАНИЯ определяется соотношением

(7)

$$\alpha \approx \frac{\int \frac{f_0(X)}{X - X_0} dX}{\int (X - X_0) f_0(X) dX}$$

Существенно , что  $\alpha$  ( называемый иногда параметром эволюции [ 7 ]) зависит от параметров исходного вероятностного потенциала и может быть как положительным , так и отрицательным. В этом случае из уравнения Фоккера- Планка получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha (\ln F - \{\ln F\}) F + \sum_{i,k} D_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_k} \quad (16)$$

Уравнение этого типа хорошо известно [ 7,8 ] и использовалось при описании эволюции биологических систем. Для его анализа запишем , следуя [7] , уравнение баланса энтропии  $S = -\{\ln F\}$  :

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha (\{(\ln F)^2\} - \{\ln F\}^2) + \int F^{-1} (D_{ik} \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial F}{\partial X_k}) d\{\hat{X}\}$$

Из этого соотношения следует , что при  $\alpha < 0, \frac{dS}{dt} \geq 0$ . Следовательно , в этом случае решением уравнения (16) будет функция распределения , отвечающая однородному распределению системы по переменным состояниям  $\hat{X}$  -

$$F(\hat{X}) = \Omega^{-1} = const; \Omega \equiv \int d\{\hat{X}\}$$

При  $\alpha = 0$  в системе происходит эволюционный фазовый переход , отвечающий переходу системы из однородного состояния в неоднородное . Это состояние соответствует реализации с большей вероятностью набора из нескольких переменных состояний. Эти переменные состояния в ходе дальнейшей эволюции и являются тем

набором коллективных переменных , который определяет характер эволюции следующего эволюционного звена. Возникновение набора коллективных переменных , "выживающих" в системе , в рамках настоящей модели, слабо зависит (как и следовало ожидать) от конкретных условий возникновения **сознания** ( зависит от параметров потенциала  $V(X)$  только через параметр эволюции  $\alpha$  ) и целиком определяется корреляциями ( матрица коэффициентов  $D_{ik}$  ) в развитии той или другой характеристики  $X_i$  системы (например корреляциями между музыкой и средствами производства , наукой и религией , литературой и техникой и. т. д.). Интересно отметить , что многовековая история развития цивилизации позволяет в принципе вычислить такие корреляции эмпирическим путем. В этом случае уравнение (16) дает принципиальную возможность (в рамках рассмотренной модели) прогнозировать основные тенденции в развитии человечества.

## ГЛАВА 5

### СОЗНАНИЕ. Часть 2

#### Другие задачи, поддающиеся анализу.

*Тональ* -это все, что мы знаем .....И это включает не только нас как личности, но и все в нашем мире .Можно сказать, что *тональ*- это все , что мы способны видеть глазами.

**Карлос Кастанеда. Сказки о силе**

#### Введение

Предыдущее рассмотрение основывалось на том, что система свободно эволюционирует, причем характер эволюции может быть описан уравнениями мезоскопического этапа. Большинство изученных нами явлений носили характер фазового перехода. Однако в процессе развития любой системы, состоящей из большого числа объектов, встречаются периоды "спокойного" течения эволюции, когда система развивается сама по себе, но без описанных выше потрясений. Такой характер носят, как правило, системы, развивающиеся в пределах одного эволюционного этапа на приведенных выше схемах.(например в пределах этапа "человек", "общество" и. т. д.).В этом случае могут возникать проблемы, несколько отличающиеся от описанных выше. Опишем некоторые из таких проблем и способы их решения.

### 1.Задачи адаптации

Как уже отмечалось для выживания популяции в процессе эволюции необходима адаптация ее к изменяющимся внешним условиям. Более того сама популяция в результате своей жизнедеятельности способна изменять (по крайней мере локально ) условия своего обитания. В этом случае возникает класс задач, которые можно назвать задачами адаптации- популяция в результате своей жизнедеятельности изменяет параметры среды обитания , что в свою очередь приводит к изменению условий выживания самой популяции .Такие задачи принято называть самосогласованными. В неявном виде задачу этого типа мы уже рассматривали в разделе о возникновении **сознания**. Сформулируем эту задачу более подробно.

## О формировании СОЗНАНИЯ

Уравнение , для функции распределения в модели возникновения **сознания** имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} [F(X)f(X,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [\varphi^2(X)f(X,t)]$$

$$F(X) = -X + \alpha_0 + \lambda X(1-X);$$

$$\varphi(X) = X(1-X)$$

здесь параметры  $\sigma, \lambda, \alpha_0$  определены в Главе 4.

На поздних временах эволюции развитие СОЗНАНИЯ , как отмечалось выше, приводит к изменению свойств окружающей среды. т.е. на этих временах все параметры ( $\lambda, \sigma, \alpha$ , и. т. д.) становятся функционалами функции распределения  $f(X,t)$ .

$$\sigma^2 = \sigma^2[f], \lambda = \lambda[f], \alpha = \alpha[f]$$

Для получения их явного вида, разложим эти функционалы в функциональный ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_r^2 + \int D(X)f(X,t)dX & D(X) &= \frac{\delta \sigma^2}{\delta f} \Big|_{\text{при } f(X)=0}; \sigma_r^2 = \sigma^2[f=0] \\ \lambda &= \lambda_r + \int G(X)f(X,t)dX & G(X) &= \frac{\delta \lambda}{\delta f} \Big|_{\text{при } f(X)=0}; \lambda[f=0] = \lambda_r \\ \alpha &= \alpha_r + \int H(X)f(X,t)dX & H(X) &= \frac{\delta \alpha}{\delta f} \Big|_{\text{при } f(X)=0}; \alpha[f=0] = \alpha_r \end{aligned} \quad (1)$$

Представим эти соотношения в виде

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_r^2 + \int \{[D(X) - D(X_s)] + D(X_s)\} f(X,t) dX \\ \lambda &= \lambda_r + \int \{[G(X) - G(X_s)] + G(X_s)\} f(X,t) dX \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha = \alpha_r + \int \{ [H(X) - H(X_s)] + H(X_s) \} f(X, t) dX$$

Здесь  $X_s$  - тот корень уравнения

$$\alpha - X_m - \lambda X_m(1 - X_m) - \frac{\sigma^2}{2} X_m(1 - X_m)(1 - 2X_m) = 0$$

который переходит в стационарное решение детерминированного ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения

$$\dot{X} = -X + \alpha + \lambda X(1 - X) + \varepsilon X(1 - X)$$

$$\lambda = \frac{\langle \xi \rangle}{v_A + v_B}; \quad \langle \varepsilon \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon(t) \varepsilon(t^1) \rangle = \sigma^2 \delta(t - t^1)$$

$$\alpha = \frac{v_A}{v_A + v_B}$$

$$X_0(\lambda) = \frac{\left[ \lambda - 1 + (\lambda^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]}{2\lambda}$$

$$\text{при } \sigma^2 \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \frac{1}{2}, X_s(\sigma, \lambda, \alpha) \rightarrow X_0(\lambda),$$

В уравнениях (2) последние слагаемые постоянны и не зависят от функции распределения  $f(X, t)$  вследствие условия нормировки

$$\int dX f(X, t) = 1$$

В этом случае, разлагая подинтегральные выражения в (2) в ряд по степеням  $X - X_s$ , получим окончательно

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \kappa \int (X - X_s) f(X, t) dX,$$

$$\sigma_0^2 \equiv \sigma_r + D(X_s)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \eta \int (X - X_s) f(X, t) dX$$

$$\lambda_0 \equiv \lambda_r + G(X_s) \quad (3)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \mu \int (X - X_s) f(X, t) dX$$

$$\alpha_0 \equiv \alpha_r + H(X_s)$$

$$\text{где } \kappa \equiv \frac{dD}{dX} \Big|_{X=X_s}; \quad \eta \equiv \frac{dG}{dX} \Big|_{X=X_s}; \quad \mu \equiv \frac{dH}{dX} \Big|_{X=X_s}$$

Величины  $\alpha_0, \sigma_0^2, \lambda_0$  следует рассматривать как начальные значения параметров исходной системы при  $f(X, t) = 0$ . Параметры  $\kappa, \eta, \mu$  в общем случае зависят от  $\alpha_0, \sigma_0^2, \lambda_0$ . Исходя из общих соображений следует ожидать, что в данной модели  $\kappa > 0, \eta < 0, \mu < 0$ . Без ограничения общности можно положить  $\kappa = \sigma_0^2, \eta = -\lambda_0, \mu = -\alpha_0$ . В этом случае из (3) имеем

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 [1 + \int (X - X_s) f(X, t) dX],$$

$$\lambda = \lambda_0 [1 - \int (X - X_s) f(X, t) dX]$$

(4)

$$\alpha = \alpha_0 [1 - \int (X - X_s) f(X, t) dX]$$

**Замечание.** Покажем, что соотношения (4) следуют из общих принципов. Для простоты рассмотрим случай, когда функция распределения  $f(X, t)$  зависит всего от двух параметров  $f(X, t) = f(X, \lambda, \sigma^2 t)$ , являющихся функционалами функции распределения  $\sigma^2 = \sigma^2[f], \lambda = \lambda[f]$ . Для этого рассмотрим функционал

$$J(\lambda[f], \sigma^2[f], f) = \int dX f(X, \lambda, \sigma^2 t)$$

В силу условия нормировки  $J(\lambda[f], \sigma^2[f], f) = \int dX f(X, \lambda, \sigma^2 t) = 1$

$$\frac{\delta J}{\delta f} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \frac{\delta \sigma^2}{\delta x f} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\delta \lambda}{\delta x f} \right) dx = \int \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} k(x) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \eta(x) \right) dx = 0$$

Откуда

$$\int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} k(x) dx = - \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} \eta(x) dx$$

Разложим функции  $k(x), \eta(x)$  в ряд вблизи некоторой точки  $x = x_s$ , которая будет определена ниже.

$$k(x) = k(x_s) + \alpha(x - x_s); \quad \eta(x) = \eta(x_s) + \beta(x - x_s); \quad \alpha \equiv k'(x_s); \quad \beta \equiv \eta'(x_s)$$

Тогда

$$\int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} (k(x_s) + \alpha(x - x_s)) dx = - \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\eta(x_s) + \beta(x - x_s)) dx \equiv \Xi(x_s)$$

В силу соотношений  $\int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} dx = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx = 0$ , которые следуют из условий нормировки,  $\Xi(x_s)$  не зависит от точки  $x_s$ , тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} (k(x_s) + \alpha(x - x_s)) dx &= - \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\eta(x_s) + \beta(x - x_s)) dx = \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \alpha(x - x_s) dx = - \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} \beta(x - x_s) dx = \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \alpha x dx = - \int \frac{\partial f}{\partial \lambda} \beta x dx \end{aligned}$$

Используя явный вид функции распределения (см. (52) Главы 3),

$$f(x, \sigma^2, \lambda) = \frac{N(\sigma^2, \lambda)}{\varphi^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x du \frac{F(u)}{\varphi^2(u)}\right) \equiv \frac{N(\sigma^2, \lambda)}{\varphi^2(x)} \exp \Phi(x, \sigma^2, \lambda)$$

получим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} f(x, \lambda, \sigma^2) (\Phi - \langle \Phi \rangle);$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = f(x, \lambda, \sigma^2) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right\rangle \right); \quad \text{Здесь } \langle \Phi \rangle \equiv \int f \Phi dx; \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right\rangle \equiv \int f \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} dx$$

Из анализа, проведенного в Главе 3 следует, что величина  $\Phi(x, \lambda, \sigma^2)$  может быть представлена в виде

$$\Phi(x, \lambda, \sigma^2) = \Phi_0(x, \sigma^2) + \lambda \Psi(x, \sigma^2)$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} f(x, \lambda, \sigma^2) (\Phi - \langle \Phi \rangle) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x, \lambda, \sigma^2) \{ \Phi_0 - \langle \Phi_0 \rangle + \lambda (\Psi - \langle \Psi \rangle) \}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = f(x, \lambda, \sigma^2) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right\rangle \right) = f(x, \lambda, \sigma^2) \lambda (\Psi - \langle \Psi \rangle);$$

Предположим, что функция  $\Phi_0(x, \sigma^2)$  симметрична относительно некоторой точки  $x = x_z$ . Тогда очевидно, что



$$\int dx(x-x_z)\Phi_o(x,\sigma^2)f(x,\lambda=0,\sigma^2)=0$$

Выбирая точку  $x_s = x_z$  из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \approx -\frac{1}{\sigma^2} f(x,\lambda=0,\sigma^2) (\Phi - \langle \Phi \rangle) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x,\lambda=0,\sigma^2) \{\Phi_0 - \langle \Phi_0 \rangle + \lambda(\Psi - \langle \Psi \rangle)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \approx f(x,\lambda=0,\sigma^2) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right\rangle \right) = f(x,\lambda=0,\sigma^2) \lambda (\Psi - \langle \Psi \rangle);$$

получим

$$\frac{\alpha}{\sigma^2} = -\frac{\beta}{\lambda}$$

Это уравнение , очевидно удовлетворяется ,если  $\alpha = \pm \sigma^2; \beta = \mp \lambda$  .Легко видеть ,однако, что

$$sign \alpha = sign \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta \sigma^2}{\delta f} \right) \right)_{x=x_s} \sim sign f'_{x=x_s} > 0$$

откуда

$$\alpha = \sigma^2;$$

$$\beta = -\lambda$$

Соотношения (4) показывают ,что по мере возникновения **сознания** (это соответствует формированию второго максимума у  $f(X,t)$ ) среда изменяется- увеличиваются флуктуации ( $\sigma^2$ ) ,связанные с сознательной деятельностью, уменьшается скорость мутаций , приводящих к возникновению сознания, что связано с принципом подчинения. Уравнение для функции распределения в этом случае становится нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Решение этого уравнения наиболее просто проанализировать в случае стационарного распределения  $f_{\infty}(X)$  , которое удовлетворяет самосогласованному уравнению

$$f_{\infty}(X) = N[f_{\infty}](X(1-X))^{-1} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2[f_{\infty}]} \left[ -\frac{1}{2X(1-X)} - \lambda [f_{\infty}] \ln \frac{X}{1-X} \right] \right\}$$

(5)

$$N[f_{\infty}] = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2[f_{\infty}]}\right) K_0^{-1}\left(\frac{2}{\sigma^2[f_{\infty}]}\right) \quad \text{при } \lambda = 0$$

$$\sigma^2[f_{\infty}] = \sigma_0^2 \left[1 + \int (X - X_s) f_{\infty}(X) dX\right]$$

$$\lambda[f_{\infty}] = \lambda_0 \left[1 - \int (X - X_s) f_{\infty}(X) dX\right]$$

Для простоты везде в дальнейшем положим  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Это уравнение можно решать итерациями. Так начальную функцию распределения естественно выбрать в виде

$$f^0_{\infty}(X) = N(\sigma_0^2)(X(1-X))^{-1} \exp\left\{\frac{2}{\sigma_0^2} \left[-\frac{1}{2X(1-X)} - \lambda_0 \ln \frac{X}{1-X}\right]\right\}$$

Поведение этой функции различно для различных  $\sigma_0^2, \lambda_0$ . Так при  $\sigma_0^2 < 4$  зависимость начальной функции распределения  $f^0_{\infty}(X)$  от  $X$  характеризуется единственным максимумом, который отвечает значению  $X = X_s$  (рис 11).

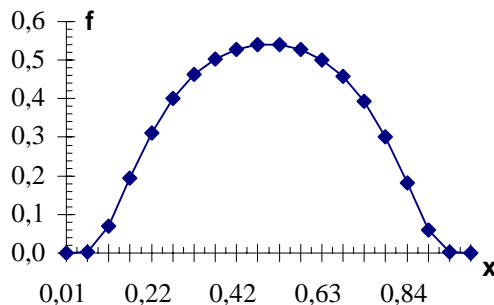


Рис11

Зависимость начальной функции распределения от  $X$  при  $\sigma_0^2 < 4$ .

В этом случае следующий шаг итерации приводит тем же самым значениям параметров  $\sigma^2[f_{\infty}^0] \approx \sigma_0^2, \lambda[f_{\infty}^0] \approx \lambda_0$  поскольку  $\int (X - X_s) f^0_{\infty}(X) dX \approx 0$  если функция распределения имеет вид, изображенный на рисунке 11. Таким образом при  $\sigma_0^2 < 4$  с подстраивающейся системой ничего особенного не происходит - она по-прежнему находится с подавляющей вероятностью в состоянии с

$X = X_s$  По мере увеличения амплитуды начальных флуктуаций, величина  $\sigma_0^2$  возрастает. Это приводит к возникновению второго максимума у функции распределения ( см рис12)

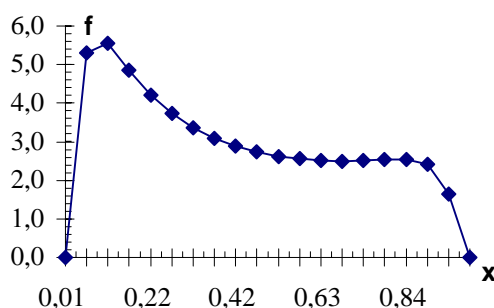


Рис 12

Зависимость начальной функции распределения от  $X$  при  $\sigma_0^2 \geq 4$

Формирование второго максимума существенно изменяет характер поведения системы- величина  $\sigma^2$  увеличивается , величина  $\lambda$  уменьшается , поскольку  $\int (X - X_s) f^0(X) dX$  в этом случае положителен ( см. рис 12). Дальнейшие итерации следует таким образом проводить с измененными параметрами  $\sigma$  и  $\lambda$  . При этом величины этих параметров меняются от итерации к итерации так , что величина  $\sigma^2$  увеличивается , а величина  $\lambda$  уменьшается. В конечном итоге это приводит к возникновению у функции распределения ярко выраженного второго максимума, соответствующего достаточно сформированному СОЗНАНИЮ (рис 13).

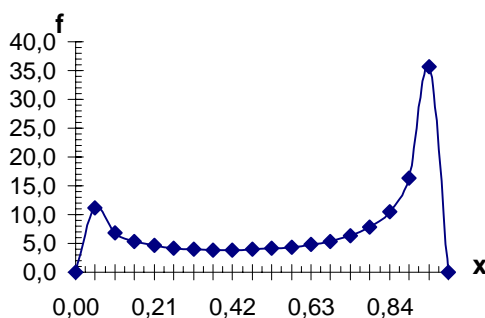


Рис 13

Зависимость функции распределения для большого количества итераций при  $\sigma_0^2 \geq 4$

Таким образом решение уравнения (5) имеет вид ,изображенный на рисунке 13, причем параметры этого распределения  $\lambda, \sigma$  определяются самосогласованным образом в процессе решения-система адаптируется к изменяющимся внешним условиям путем "улучшения" этих параметров.

Приведенное рассмотрение является весьма общим и не зависит от конкретной модели. Стратегию подхода при решении задач адаптации можно сформулировать следующим образом .

1.Определяются уравнения мезоскопического этапа эволюции

2.Записываются соответствующие им уравнения Ланжевена учитывающие характер флуктуаций в рассматриваемой системе.

3.Определяется уравнение Фоккера-Планка, соответствующее полученным уравнениям Ланжевена.

4.Находится стационарное решение уравнения Фоккера-Планка.

5.Предполагается , что параметры этого распределения - суть линейные функционалы функции распределения. Из общих соображений определяются численные постоянные, входящие в эти функционалы.

6.Ищется стационарное решение возникающих нелинейных уравнений и определяются параметры распределения , отвечающие адаптации системы.

Анализ функции распределения с новыми параметрами показывает какое свойство системы "выживает" в процессе эволюции.

Рассмотренный подход позволяет например проанализировать проблему возникновения диктатур в рамках описанной выше модели формирования общественного мнения .

### О возникновении диктатур

Основное уравнение модели формирования общественного мнения имеет вид

$$\dot{\psi} = a\psi - \psi^3 + h$$

$$a = \frac{3\left(n_0 - \frac{T}{\lambda}\right)}{n_0}$$

Это уравнение содержит три параметра -величину внешнего информационного поля  $h$ , показатель общественного климата  $T$  и количество индивидуумов , принимающих участие в формировании общественного мнения  $n_0$  .Случай  $h=0, T > \lambda n_0$  отвечает полностью

демократическому обществу - единственным стационарным решением основного уравнения модели является отсутствие предпочтения одного мнения над другим ( $\psi = 0$ ). Случай  $h=0, T < \lambda n_0$  отвечает полностью поляризованному обществу-стационарными решениями основного уравнения модели служат  $\psi = \mp \sqrt{a}$ , при  $a > 0$

Таким образом изменение параметра  $a$  за счет, например, количества индивидуумов, принявших участие в голосовании, с отрицательных значений на положительные приводит к возникновению двух дополнительных решений  $\psi = \pm \sqrt{a}$ . Если  $a < 0$ , что соответствует высокому значению показателя общественного климата  $T$  (либо большим внутренним флуктуациям в обществе, либо низкой активности избирателей). В этом случае единственное устойчивое состояние системы - это состояние с  $\psi = 0$ . Таким образом высокие показатели общественного климата  $T$  в нашей модели соответствуют демократическому обществу  $n_+ = n_-$  - общественная идеология отсутствует. (Рис 14)

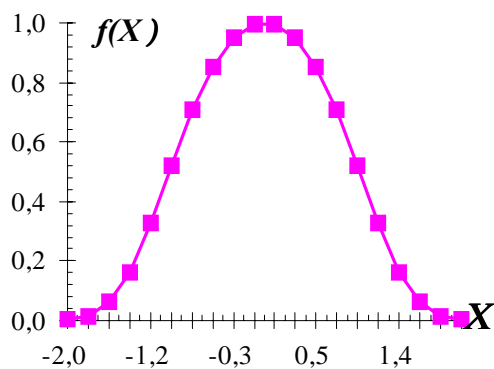


Рис 14

Зависимость функции распределения от  $X \equiv \psi = n_+ - n_-$  отвечающая демократическому обществу

Уменьшение показателя общественного климата  $T$  приводит к тому, что при  $T = T_c = \lambda n_0$ , система, первоначально находившаяся в "демократическом" состоянии  $\psi = 0$  имеет возможность переместиться в одно из состояний  $\psi = \pm \sqrt{a}$ . Возникает типичный случай поляризации общественного мнения при  $\psi > 0$ , число индивидуумов с мнением "за" превышает число индивидуумов с мнением "против", при  $\psi < 0$ , число индивидуумов с мнением "против" преобладает над числом индивидуумов с мнением "за". Можно сказать, что при  $a > 0$  возникает сильно идеологизированное общество (Рис 15).

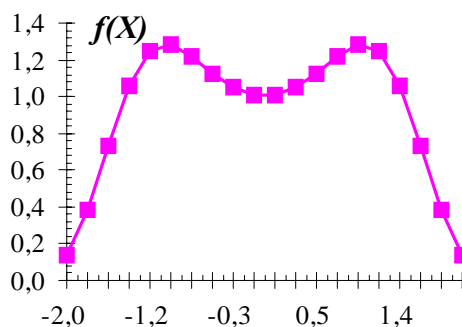


Рис 15

Зависимость функции распределения от  $X \equiv \psi = n_+ - n_-$  отвечающая сильно идеологизированному обществу

Под диктатурой будем понимать полностью идеологизированное общество с возможностью иметь только одно мнение. Других мнений с таком обществе не существует в принципе (Рис 16).

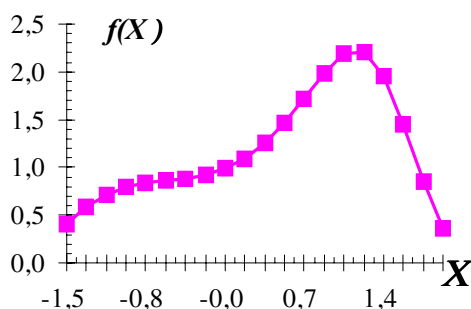


Рис 16

Зависимость функции распределения от  $X \equiv \psi = n_+ - n_-$  отвечающая почти сформировавшейся диктатуре

В соответствии с нашей программой, сформулированной в предидущем разделе, введем в модель внутренние флуктуации с амплитудой  $T$  и запишем соответствующее уравнение Фоккера-Планка (везде ниже положим  $X \equiv \psi$ )

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} [F(X)f(X,t)] + \frac{T}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [f(X,t)]$$

$$F(X) = -\frac{\partial V}{\partial X};$$

$$V(X) = \frac{X^4}{4} - a \frac{X^2}{2} - hX$$

Его стационарное решение имеет вид

$$f(X) = N \exp(-\beta^{-1} ( \frac{X^4}{4} - a \frac{X^2}{2} - hX )) , \quad \beta^{-1} = T$$

Здесь N- нормировочный множитель

$$N^{-1} = \int dX \exp(-\beta^{-1} ( \frac{X^4}{4} - a \frac{X^2}{2} - hX ))$$

Самосогласованное уравнение отвечающее задаче адаптации есть

$$f(X) = N \exp(-\beta^{-1} ( \frac{X^4}{4} - a \frac{X^2}{2} - hX )) \quad (6)$$

$$n_0 = n_0^0 + r \int X f(X) dX$$

$$T = T_0 + p \int X f(X) dX$$

$$h = h_0 + l \int X f(X) dX$$

где  $r > 0, p < 0$ . Что касается параметра  $l$  то без ограничения общности положим  $l = h_0$ , тогда

$$h = h_0 [1 + \int X f(X) dX] \quad (7)$$

$$a = a_0 + m \int X f(X) dX \quad a_0 \equiv \frac{n_0^{(0)} - T_0}{n_0^{(0)}}, \quad m \equiv \left( \frac{T_0}{n_0^{(0)}} r + |p| \right) > 0$$

Это уравнение можно решать итерациями. Начальную функцию распределения естественно выбрать в виде

$$f_0(X) = N \exp(-\beta^{-1} ( \frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2} - h_0 X )) \quad (8)$$

. Характер решений уравнения (6) различен для различных  $a_0, h_0$ . Так при  $a_0 < 0, h_0 = 0$  зависимость начальной функции распределения  $f_0(X)$  от  $X$  характеризуется единственным максимумом, который отвечает значению  $X = 0$  (рис 14).

В этом случае следующий шаг итерации приводит тем же самым значениям параметров  $a[f_0] \approx a_0, h[f_0] = h_0 = 0$  поскольку  $\int X f_0(X) dX \approx 0$  если функция распределения имеет вид, изображенный на рисунке 14. Таким образом при  $a_0 < 0, h_0 = 0$  с подстраивающейся системой ничего не происходит - она по прежнему находится с подавляющей вероятностью в состоянии с  $X = 0$ . Интересно, что подобная картина возникает и при

$a_0 > 0, h_0 = 0$ . В силу симметрии функции распределения в этом случае (рис 15) по-прежнему  $\int X f_0(X) dX \approx 0$ , в этом случае правда система находится либо в состоянии  $X = \sqrt{a}$  либо в состоянии  $X = -\sqrt{a}$ , отвечающим полностью идеологизированному обществу. Диктатура возникает лишь при наличии сколь угодно малого внешнего поля  $h_0 \neq 0$ . Действительно, при  $h_0 > 0$  начальная функция распределения  $f_0(X)$  имеет вид, изображенный на рисунке 17.

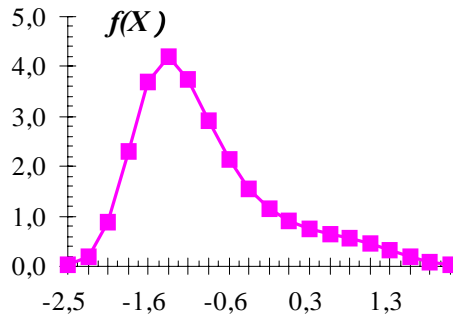


Рис 17

Начальная функция распределения, необходимая для возникновения диктатуры

Для такой функции распределения  $J = \int X f_0(X) dX > 0$  причем величина этого интеграла пропорциональна внешнему полю  $h_0 > 0$ . Действительно, из (8) имеем

$$\begin{aligned} J &= \int dX X f_0(X) = N \int dX X \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2} - h_0 X)) \approx \\ &\approx N \int dX X (1 + \beta^{-1} h_0 X) \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2})) = \\ &= N \int dX X \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2})) + h_0 N \int dX X^2 \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2})) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю в силу симметрии функции

$$f_1(X) = N \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2}))$$

$$f_1(X) = f_1(-X)$$

Таким образом

$$J = h_0 N \int dX X^2 \exp(-\beta^{-1} (\frac{X^4}{4} - a_0 \frac{X^2}{2})) > 0 \text{ при } h_0 > 0$$



Положительность этого интеграла приводит к тому, что в результате следующих итераций величины  $a$  и  $h$ , определяемые соотношениями (7), возрастают, что в свою очередь приводит к изменению функции распределения так как это изображено на рисунках 18, 19, 20

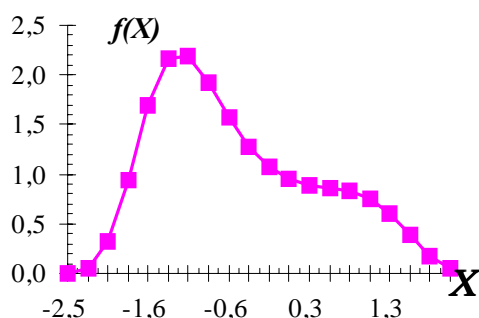


Рис 18

Функция распределения к модели образования диктатур после первой итерации

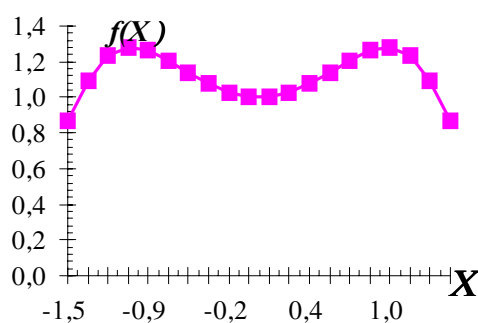


Рис 19

Функция распределения к модели образования диктатур после второй итерации

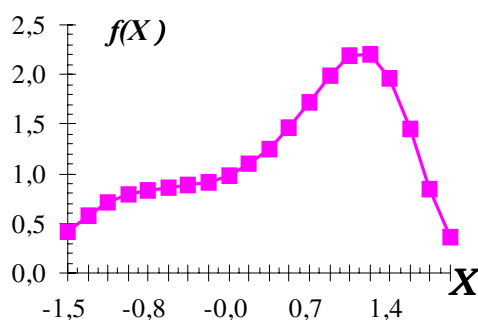


Рис 20

Функция распределения к модели образования диктатур после большого числа (~10) итераций

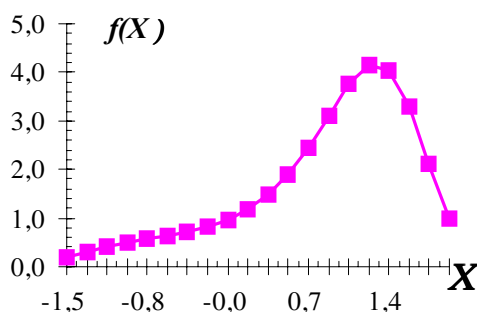


Рис 21

Функция распределения , отвечающая образовавшейся диктатуре

Таким образом образование диктатуры из демократического общества происходит по следующей схеме

1. Наличие внешнего поля  $h_0$  , что в демократическом обществе соответствует существованию некоторой глобальной идеи , в которую верят значительное число индивидуумов , приводит к асимметрии начальной функции распределения .

2. Вследствие асимметрии  $f_0(X)$  снижается показатель общественного климата  $T$  . на фоне увеличения активности "избирателей" ( увеличение  $n_0$  ).

3. Действуя самосогласованным образом эти факторы приводят к возникновению и дальнейшему увеличению второго максимума у функции распределения.

4. Увеличение второго максимума происходит параллельно с процессом уменьшения максимума, отвечающего демократическому обществу.

5. Стационарным состоянием такого процесса является общество , в котором демократия полностью отсутствует . в то время как количество индивидуумов , придерживающихся глобальной (государственной ) идеологии является доминирующим.

Отметим , что для "запуска" процесса образования диктатуры требуется существование внешнего поля  $h_0$  сколь угодно малой величины. Можно считать поэтому , что демократическое общество , в котором отсутствует глобальная (национальная ) идея, неустойчиво.

Сформулируем другие задачи , анализ который возможен в рамках мезоскопического подхода.

## 2. Задачи о разорении страховой компании.

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся только одним видом страхования. Предположим, что уставной фонд компании составляет  $Z_0$  рублей. Изменение резервов страховой компании происходит за счет следующих процессов:

1. Увеличение за счет "прокрутки" уставного капитала.
2. Увеличение за счет заключения новых договоров страхования.
3. Уменьшение за счет расходов на зарплату сотрудникам, налоги, рекламу и. т. д.

В рассматриваемом случае изменение резервов описывается уравнением

$$\dot{Z} = Q + \chi \dot{n} - \beta Z \quad (1)$$

где  $Q$  - увеличение резервов в единицу времени за счет "прокрутки" уставного капитала  $Z_0$ . Например, если  $\omega$  - годовой банковский процент, то  $Q = Z_0 \omega$ ,  $n$  - количество объектов (людей или предприятий), охваченных страхованием,  $\chi$  - страховая премия (количество денег, получаемых страховой компанией с одного договора).  $\beta Z$  - часть средств, расходуемых на зарплату, рекламу, налоги и. т. д.\*

Если страховая компания действует в регионе, где количество объектов страхования ограничено и равно  $N$ , то для  $n(t)$  можно записать уравнение, аналогичное уравнению Ферхюльста:

$$\dot{n} = \alpha n(N - n) \quad (2)$$

причем величина  $\alpha$  зависит от количества средств, направляемых на рекламу

$$\alpha = \alpha_0 Z$$

Из уравнений (1), (2), получим систему уравнений мезоскопического этапа, определяющую прирост резервов страховой компании:

---

\* **Замечание.** Приведенное уравнение учитывает так называемый одноразовый платеж. В случае рассроченного платежа в (1) следует добавить слагаемое вида  $\phi \dot{n}$ .

$$\begin{cases} \dot{Z} = Q + \chi \dot{n} - \beta Z \\ \dot{n} = \alpha_0 Z (N - n)n \end{cases} \quad (3)$$

Возникает вопрос не разорится ли такая страховая компания.?. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случайный процесс  $\bar{X}(t)$ , который обозначает объем требований, предъявленных страховой компании за время  $t$ . Предположим, что поступление претензий описывается пуассоновским процессом и отдельные претензии имеют заданное распределение  $\Phi(X)$ . Если  $Z(t)$  -резервы страховой компании в момент времени  $t$ , то общий резерв  $\bar{Y}(t) = Z(t) - \bar{X}(t)$  представляет собой случайную величину. Разорение компании происходит, если резерв  $\bar{Y}(t)$  станет отрицательным. Обозначим через  $P(Z)$  вероятность того, что разорение никогда не произойдет. Следовательно,  $1 - P(Z)$  -вероятность разорения. Получим уравнение, определяющее эту вероятность. Чтобы разорение никогда не произошло, необходимо, чтобы  $X \leq Z(t)$  и чтобы при всех  $t > \tau$  приращения  $\bar{X} - X(t)$  не превосходили бы значения  $Z(t) - X(t)$ . Поскольку приращения независимы, то последнее из этих событий имеет вероятность равную  $P(Z(t) - X)$ . Интегрируя по всем возможным значениям  $\tau$  и  $X$ , получим [9]:

$$P(Z) = \int_0^{\infty} \gamma \exp(-\gamma\tau) d\tau \int_{-\infty}^{Z(\tau)} P(Z(\tau) - X) \Phi(X) dX \quad (4)$$

здесь  $\gamma^{-1}$  - среднее время поступления претензий. Уравнения (3),(4) позволяют полностью решить задачу о вероятности разорения страховой компании с начальным уставным капиталом  $Z_0$ . Стратегию развития страховой компании в данной модели можно определить, находя те значения параметров  $\alpha_0, Z_0, Q$  и. т. д., которые минимизируют вероятность разорения  $1 - P(Z_0, \alpha_0, N, Q)$ .

### 3. Конкуренция страховых компаний.

Аналогичным образом может быть поставлена задача о конкуренции двух страховых компаний, действующих в одном регионе и занимающихся одним и тем же видом страхования. Действительно, пусть  $Z_1(t)$  и  $Z_2(t)$  -резервы первой и второй страховой компании в момент времени  $t$ , тогда

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_1 &= Q_1 + \chi_1 \dot{n}_1 - \beta_1 Z_1 \\
\dot{Z}_2 &= Q_2 + \chi_2 \dot{n}_2 - \beta_2 Z_2 \\
\dot{n}_1 &= \alpha_0^{(1)} Z_1 (N - n_1 - n_2) n_1 \\
\dot{n}_2 &= \alpha_0^{(2)} Z_2 (N - n_1 - n_2) n_2 \\
P_1(Z_1) &= \int_0^\infty d\gamma \gamma \exp(-\gamma\tau) \int_{-\infty}^{Z_1(\tau)} P_1(Z_1 - X) \Phi(X) dX \\
P_2(Z_2) &= \int_0^\infty d\gamma \gamma \exp(-\gamma\tau) \int_{-\infty}^{Z_2(\tau)} P_2(Z_2 - X) \Phi(X) dX
\end{aligned} \tag{5}$$

Если  $\max P_1 > \max P_2$ , то в результате конкуренции выживет первая страховая компания (при оптимальной стратегии, т.е. при тех значениях параметров  $\alpha_0^{(i)}, Z_0^{(i)}, \chi_i$   $i=1,2$  и т. д., при которых достигается  $\max P_i$ ). При выполнении обратного неравенства выживает вторая страховая компания. Возможен случай, когда одна из страховых компаний "подчиняет" себе другую, разоряясь в дальнейшем. Это будет происходить в том случае, когда при определенных значениях параметров  $P_1 > P_2$ , но сама вероятность разорения весьма велика, например  $P_1 < \frac{1}{2}$ .

#### 4. Задача о нарушении безопасности.

Рассмотренный подход может быть применен к анализу систем, входящих в компетенцию теории защиты информации [10]. Сделаем отступление и введем основные понятия теории защиты информации.

Любая защита подразумевает наличие объекта защиты, сохранение которого является основной задачей защиты. Целью проведения работ по защите (например вычислительных систем) является достижение максимально возможного уровня защиты информации. Таким образом, информация является основным объектом защиты. Кроме информации защите могут подлежать ресурсы системы, аппаратное обеспечение сети, вспомогательное оборудование и т.д. В общем случае под информацией понимают совокупность сведений о каких либо событиях, явлениях или предметах. Для более точного описания этого понятия можно привести следующее определение информации:

Информация - это результат отражения и обработки в человеческом сознании многообразия окружающего мира, это сведения об

окружающих человека предметах, явлениях природы, деятельности других людей и т.д.

Проблема защиты информации от постороннего доступа и нежелательного воздействия на нее возникла давно, с той поры, когда человеку первый раз по каким - либо причинам не захотелось делиться ее ни с кем или не с каждым человеком. С дальнейшим развитием человеческих отношений информация начинает приобретать определенную цену. Ценность информации начинает определяться ее важностью и тем выигрышем, материальным, политическим, военным и т.д., который получает ее владелец. При решении вопросов защиты информации необходимо понимание того, насколько информация, которую необходимо защищать, является ценной и какой материальный ущерб будет нанесен, в случае ее уничтожения или изменения. И именно этой ценностью должны определяться средства, которые необходимо использовать для защиты информации. В общем случае, стоимость этих средств не должна превышать предполагаемые потери.

Для определения ценности информации могут применяться следующие методы:

Аддитивный метод. Данный метод применяется для определения совокупной стоимости защиты конечного множества элементов, где каждый элемент множества содержит некоторую информацию. Применение метода можно разделить на несколько этапов:

Определении относительной ценности элементов относительно друг друга.

Определения ценности одного из элементов.

Определение ценности остальных элементов множества используя относительную ценность элементов.

Определение суммарной ценности всех элементов множества, как суммы ценностей элементов множества.

Анализ риска. Если надежность защиты отдельных элементов имеет различное значение, то простая сумма ценностей может иметь необъективное значение. Для того, что бы учесть это применяют метод анализа риска. При этом, ценность каждого элементов множества, полученного с использованием аддитивного метода, перед суммированием умножают на вероятность нанесения ущерба этому элементу множества.

Порядковая шкала ценностей. При использовании шкалы ценностей все элементы разбиваются на группы. Всем документам, входящим в одну группу, назначается одна ценность. Примером шкалы ценностей могут служить грифы секретности.

Метод решетки ценностей. Как и при использовании порядковой шкалы ценностей, все элементы множества разделяются на группы по ценности. Дополнительно элементы разделяются на группы по тематике. При объединении нескольких элементов в один ему присваивается ценность входящего в него элемента, имеющего наибольшую ценность, а тематика определяется как совокупность тематик, входящих в него элементов.

Одного понимания того, что нужно защищать недостаточно для построения защиты. Кроме определения объекта защиты необходимо определить нежелательные воздействия, которым может подвергнуться объект защиты. Для этого используется понятие угрозы.

Угроза определяет потенциально возможное происшествие, независимо, преднамеренное или нет, которое может оказать нежелательное воздействие на саму систему, а также на информацию, хранящуюся в ней. Всего выделяется три основных типа угроз:

Угроза секретности заключается в том, что информация становится доступной лицам, которые не имеют на это достаточных полномочий. Угроза секретности имеет место всякий раз, когда получен доступ к некоторой секретной информации, хранящейся в вычислительной системе или передаваемой от одной системы к другой.

Угроза целостности. Нарушение целостности информации - это незаконное уничтожение или модификация информации.

Угроза целостности включает в себя любое умышленное изменение информации, хранящейся в вычислительной системе или передаваемой из одной системы в другую.

Угроза доступности возникает когда в результате некоторых действий доступ к некоторому ресурсу вычислительной системы становится невозможным. Ресурс может блокироваться либо на определенное время, достаточно длительное что бы ресурс стал бесполезным, либо постоянно. В таких случаях говорят, что ресурс исчерпан.

Для обеспечения защиты информации необходимо построение системы защиты, которая должна отвечать за целостность и безопасность информации.

Система защиты информации от несанкционированного доступа - комплекс организационных мер и программно-технических (в том числе криптографических) средств защиты от несанкционированного доступа к информации в автоматизированных системах.

Таким образом, можно сказать, что система защиты информации должна обеспечивать безопасность и целостность информации.

Безопасность информации - состояние защищенности информации, обрабатываемой средствами вычислительной техники или автоматизированной системы от внешних и внутренних угроз.

Целостность - способность средств вычислительной техники или автоматизированной системы обеспечивать неизменность вида и качества информации в условиях случайного искажения или угрозы разрушения.

При создании системы защиты необходимо определять действия, которые будут считаться нормальными для данной системы и те действия, выполнение которых может отрицательно сказаться на защищенности системы. Совокупность таких правил называется политикой безопасности. Политика безопасности является окончательным вариантом решения того, что - хорошо и что - плохо при обращении к информации. После принятия политики безопасности можно строить защиту, то есть систему поддержки выполнения правил политики безопасности. Таким образом, построенная система защиты хорошая, если она надежно поддерживает выполнение правил политики безопасности. И наоборот, система защиты информации - плохая, если она ненадежно поддерживает политику безопасности.

Политика безопасности - это набор норм, правил и практических приемов, которые регулируют управление, защиту и распределение ценной информации.

На сегодняшний день существует большое количество разнообразных политик безопасности двумя основными из которых являются: дискреционная и мандатная политики.

Основой дискреционной политики является понятие объекта и субъекта. Можно сказать, что объект - это тот, кто хранит или пересылает информацию, субъект - тот, кто определяет условия хранения, обработки и пересылки информации. Примерами объектов могут служить файлы, тома, устройства и т.д., субъектов - процессы пользователей и сами пользователи. Кроме того, дискреционная политика использует понятие доступа. Под доступом понимается выполнение субъектом некоторой операции над объектом из множества разрешенных для этих объектов.

Основой данной политики является дискреционный контроль доступа, который определяет средства ограничения доступа к объектам на основе идентификации субъектов и/или групп, к которым они принадлежат. Контроль осуществляется таким образом, что получить доступ к объекту может лишь тот субъект



или группа субъектов, кому это разрешено каким-либо условием. Кроме того, субъект с определенным типом доступа может передать эти полномочия какому-либо другому субъекту.

Основным инструментом, с помощью которого выполняются разграничение доступа является матрица контроля доступа, которая определяет типы доступа, разрешенные для каждого из субъектов при обращении к любому из объектов.

Мандатная политика безопасности основывается на понятии многоуровневой защиты - это класс систем, содержащих информацию с различными уровнями ценности и управляющих пользователями также с различными уровнями полномочий. Каждому объекту в системе приписывается метка безопасности, определяющая ценность содержащейся в ней информации. Каждому субъекту приписан уровень прозрачности - метка, определяющая максимальное значение метки безопасности объектов, к которым тот имеет доступ. Назначение полномочной политики - регулировать доступ к объектам с различными метками критичности. Если совокупность меток имеет одинаковое значения, будем говорить, что все они принадлежат одному уровню безопасности.

Для реализации этой политики используется модель Белла - Лападула [10]. Для разрешения доступа осуществляется сравнение метки безопасности объекта и уровня прозрачности субъекта. Результат определяется следующим правилом, что информация может передаваться только вверх, т.е. субъект может читать объект, если его уровень безопасности не ниже метки безопасности объекта, и записывать в него - если не выше.

Самая простая сеть состоит как минимум из двух компьютеров, соединенных друг с другом кабелем. Это позволяет им совместно использовать данные. Все сети (независимо от сложности) основываются на этом простом принципе.

Основное назначение компьютерных сетей - совместное использование ресурсов и осуществление интерактивной связи как внутри одной сети, так и за ее пределами. Ресурсы - это данные, приложения и периферийные устройства, такие как внешний дисковод, принтер, мышь, модем или джойстик. Понятие интерактивной связи компьютеров подразумевает обмен сообщениями в реальном режиме времени.

Все сети имеют некоторые общие компоненты, функции и характеристики. В их числе: серверы - компьютеры предоставляющие свои ресурсы сетевым пользователям; клиенты - компьютеры, осуществляющие доступ к сетевым ресурсам,

предоставляемым сервером; среда - способ соединения компьютеров; совместно используемые данные - файлы, предоставляемые серверами; совместно используемые периферийные устройства, такие как принтеры, модемы; ресурсы - файлы, принтеры и другие элементы, используемые в сети. Выделяют два типа сетей- одноранговые и на основе сервера. Различия между одноранговыми сетями и сетями на основе сервера имеют принципиальное значение, поскольку определяют разные возможности этих сетей. Выбор типа сети может зависеть от многих факторов: размера сети, необходимого уровня безопасности, уровня доступа административной поддержки, объема сетевого трафика, потребностей сетевых пользователей, финансовых затрат.

В одноранговой сети все компьютеры равноправны: нет иерархии среди компьютеров и нет выделенного сервера. Как правило, каждый компьютер функционирует и как клиент, и как сервер; другими словами нет отдельного компьютера ответственного за администрирование всей сети. Все пользователи самостоятельно решают, какие данные на своем компьютере сделать общедоступными по сети.

Одноранговые сети относительно просты. Поскольку каждый компьютер является одновременно и клиентом и сервером, нет необходимости в мощном централизованном сервере или других компонентах, обязательных для более сложных сетей. Одноранговые сети обычно дешевле сетей на основе сервера, но требуют более мощных ( и более дорогих) компьютеров.

В одноранговой сети к производительности и к уровню защиты сетевого программного обеспечения, как правило ниже, чем в сетях с выделенным сервером.

Защита в одноранговой сети подразумевает установку пароля на каждый разделяемый ресурс, например каталог. Каждый пользователь устанавливает защиту своих ресурсов самостоятельно. Такая ситуация может представлять серьезную угрозу для защищенности всей сети, отчасти из-за того, что некоторые пользователи могут вообще не установить защиту. Если в сети используется большое количество разделяемых ресурсов, то одноранговая сеть может оказаться недостаточно производительной. Поэтому в большинстве сетей используют выделенные серверы. Выделенным называется такой сервер, который функционирует только как сервер ( исключая функции рабочей станции или клиента). Они специально оптимизированы для быстрой обработки запросов от сетевых клиентов и для управления защитой файлов и каталогов.

Круг задач, которые должны выполнять серверы, многообразен и сложен. Чтобы приспособиться к возрастающим потребностям пользователей, серверы в больших сетях стали специализированными. Выделяют такие серверы, как: файл-серверы, серверы печати, серверы приложений, почтовые серверы, факс серверы, коммуникационные серверы. Основным аргументом при выборе сети на основе сервера, является как правило, защита данных. В таких сетях проблемами безопасности может заниматься один администратор. Он формирует политику безопасности и применяет ее в отношении каждого пользователя сети. Существуют и комбинированные типы сетей, совмещающие лучшие качества одноранговых сетей и сетей на основе сервера. Комбинированные сети являются наиболее распространенным типом сетей, так как позволяют проводить централизованную политику безопасности и одновременно обеспечивают такую же гибкость как и одноранговые сети.

Применение сетей позволяет быстро и в удобном виде получать доступ к распределенным ресурсам сети, при этом, требуемые ресурсы могут храниться на соседней машине или за тысячи километров. Использование распределенного способа хранения данных является огромным плюсом при использовании сети однако это приводит к тому, что многим пользователям необходимо предоставлять ресурсы, распределенные на большой территории. Учитывая то, что в сети могут храниться ресурсы, к которым необходимо ограничить доступ становится ясно, что необходимо создание системы защиты, которая должна определять возможность получения доступа к ресурсам сети. Ее построение можно разделить на несколько этапов:

- анализа возможного риска
- построение модели нарушителя
- построения политики безопасности
- поддержки полученной политики безопасности

Основная задача, которая при этом преследуется заключается в предоставлении пользователю максимально удобного способа получения доступа к ресурсам сети и обеспечения при этом максимальной степени защищенности как отдельных компонент сети так и всей сети в целом.

При анализе возможных угроз определяются возможные пути получения несанкционированного доступа к сети и строится модель поведения нарушителя, которая должна максимально полно описывать потенциально возможное поведение нарушителя: каналы доступа, которыми он может воспользоваться, ресурсы, к которым

он будет пытаться получить доступ, и способы, которыми он будет пользоваться. На основе выявленных угроз и построенной модели поведения нарушителя вырабатывается политика безопасности сети, которая представляет собой набор норм, правил и практических приемов, которые регулируют управление, защиту и распределение ценной информации. Другими словами, политика безопасности определяет какие пользователи к каким образом и каким ресурсам смогут получить доступ. После того, как будет определена политика безопасности необходимо осуществлять поддержку полученной политики безопасности. Поддержка осуществляется с целью контроля за исполнением политики безопасности и выявления возможных попыток ее нарушения. Контроль за исполнением политики безопасности является обязательным для обеспечения безопасности данных. Таким образом одной из основных работ в теории защиты информации является работа по построению модели нарушителя. При построении модели нарушителя будем пользоваться следующей схемой:

1. Исходные данные для рассматриваемой системы и их анализ.
2. Выявление возможных угроз нарушения функционирования системы.
3. На основании выявленных угроз построение профилей для каждого объекта системы в отдельности и для системы в целом.
4. определение нормального поведения системы на основе построения профилей.
5. Выявление на основе нормального поведения системы ненормальных фактов и тенденций.
6. построение критериев нарушения безопасности

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  связанных друг с другом объектов, имея в виду, что к каждому из этих объектов возможен доступ как со стороны одного или нескольких субъектов (пользователей), так и со стороны одного или нескольких объектов.

Обычно профили, используемые в моделях нарушения, имеют несколько переменных таких как:

- 1) данные использования ресурсов,
- 2) тип статистики,
- 3) период измерений,
- 4) порог допустимых значений в соответствии с моделью нарушения и т.д.

В нашем случае в силу значительного количества объектов и субъектов при описании профиля требуется ввести еще несколько переменных. (Везде в дальнейшем будем предполагать, что

рассматриваются профили одного объекта в системе и действия пользователей и других объектов в отношении данного):

5) время доступа отношению к внешним устройствам, не являющихся объектами (например, принтеры, сканеры и т.д.)

6) время занятости центрального процессора,

7) время доступа других объектов для данного объекта.

Отметим, что переменные 3), 4), 5) описывают выделенный объект как таковой, а переменные 1), 6), 7) описывают взаимодействие данного объекта с другими объектами в системе. Приведенный набор переменных является всего лишь примером, количество переменных может быть увеличено на основании анализа исходных данных. Следует иметь в виду, что все переменные могут быть разделены на три класса:

- переменные, описывающие поведение объекта как такового вне его связи с другими объектами,

- переменные, описывающие взаимодействие данного объекта с другими.

- смешанные переменные.

Существенно, что переменные первого класса зависят лишь от объектов как такового и подключенных к нему внешних устройств, в то время как переменные второго класса зависят как от самого объекта, так и от других объектов системы, а также ее топологии. Для дальнейшего обозначим совокупность переменных профиля как  $X = \{x_i\}$ ,  $i=1, \dots, k$ . Будем считать, что совокупность переменных  $X_m = \{x_i\}_m$  определяет состояние объекта  $m$  в системе.

Введем функцию распределения  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ , описывающую состояние системы в целом. В силу сделанных предположений  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  может быть представлена в виде произведения парциальных функций распределения каждого из объектов

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \prod_{i=1}^N f_i(\{x_m; m=1, \dots, k\}_i) \quad (1)$$

Отметим, что парциальные функции распределения  $f_i(X_i)$  зависят от состояния самого объекта и учитывают его связь с другими объектами системы.

Пусть  $f_i^{(0)}(X_i)$  - функции распределения объекта  $i$  в нормально функционирующей системе, т.е. в системе, которая гарантировано защищена, например, аппаратными средствами, от нарушения политики безопасности. Для построения этих функций распределения для каждого объекта системы можно

воспользоваться центральной предельной теоремой и считать, что  $f_i^{(0)}(X_i)$  - гауссовские функции

$$f_i^{(0)}(X_i) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta x_i A_{ij} \Delta x_j \right\}$$

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x_i}$$

$$Z = \int d\{x_i\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta x_i A_{ij} \Delta x_j \right\}$$
(2)

Здесь  $\overline{x_i}$  - средние значения профилей  $x_i$ , которые для каждого объекта нормально функционирующей системы могут быть вычислены на основании анализа аудиторских данных наблюдения за данным объектом.

$$\overline{x_i} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k x_i^{(l)}$$
(3)

Здесь  $x_i^{(l)}$  - значение переменной  $x_i$  при анализе 1 - тых аудиторских данных. Матрица  $A_{ij}$  может быть также вычислена на основе данных аудита.

$$\overline{\Delta x_i \Delta x_j} = (A^{-1})_{ij},$$
(4)

где  $\overline{\Delta x_i \Delta x_j}$  - среднее по данным аудита значение

$$\overline{\Delta x_i \Delta x_j} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \Delta x_j^l \Delta x_i^l$$
(5)

Таким образом параметры  $f_i^{(0)}(X_i)$  могут быть определены по аудиторской информации для нормально функционирующей системы. Для построения критерия нарушения безопасности системы введем понятие информации  $S$  :

$$S[f] = - \int dX_1 \dots dX_N f(X_1, \dots, X_N) \ln(f(X_1, \dots, X_N))$$
(6)

Предположим, что существует режим нормально функционирующей системы. Обычно различают пять таких режимов [10]:

а. Режим , в котором система постоянно обрабатывает ценную информацию одного класса в окружении, которое обеспечивает безопасность для работы с этим классом.

б. Режим особой секретности самой системы. Все пользователи и элементы системы имеют один класс и могут получить доступ к любой информации. Этот режим отличается от предыдущего тем, что здесь обрабатывается информация высших грифов секретности.

с. Многоуровневый режим, который позволяет системе обработку информации двух или более уровней секретности. Причем не все пользователи имеют доступ ко всем уровням обрабатываемой информации.

д. Контролирующий режим. Это многоуровневый режим обработки информации, при котором нет полной гарантии защищенности. Это накладывает ограничения на допустимые классы ценной информации, подлежащей обработке.

е. Режим изолированной безопасности. Этот режим позволяет изолированно обрабатывать информацию различных классов или классифицированную и неклассифицированную информацию.

Введем понятие информации для одного класса (S):

$$S_p = - \int f_p \ln(f_p) \cdot dx \quad (7)$$

где  $f_p$  - функция распределения объектов, обрабатывающих информацию одного класса. В соответствии с изложенным выше можно сформулировать модель, описать один из режимов нормально функционирующей системы. В нашем случае существенно, что изменение информации данного класса  $S_p$  может быть описана дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{\partial S_p}{\partial t} = F(S_p) \quad (8)$$

где  $F(S_p)$  - известная функция. Решение уравнений (8)  $S_p^{(0)}$  определяет режим нормального функционирования системы.

В соответствии с известными теоремами информация  $S_p$  не убывает  $S_p \geq 0$ . Рассмотрим информацию  $S_p(t)$  как случайную величину. Очевидно, что нарушение нормального функционирования системы и, следовательно, нарушение безопасности произойдет, если случайная величина  $S_p(t)$  станет больше, чем величина  $S_p^{(0)}(t)$ , определяемая уравнениями (8).

Пусть  $R_p$  - вероятность нарушения безопасности уровня  $p$ . Тогда  $1 - R_p$  - вероятность нарушения безопасности уровня  $p$ . Предположим также, что нарушение безопасности может происходить в случайные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , распределение которых определяется законом Пуассона:

$$P_N(t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \quad (9)$$

При такой постановке информация  $S_p$  - случайная величина, определяемая случайной функцией  $S_p(f_p)$  согласно (7). Легко видеть, что вероятность нарушения безопасности  $R_p$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} R_p = \int_0^\infty \alpha_p e^{-\alpha_p \tau} d\tau \int_{-\infty}^{S_p^{(0)}(\tau)} R(S_p^{(0)} - S_p) e^{-S_p} dS_p, p = 1, \dots, k \\ \frac{\partial S_p^{(0)}}{\partial t} = F_p(S_p^{(0)}) \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим в качестве примера двухуровневую систему. Предположим, что информация верхнего уровня устаревает за время  $\beta_1^{-1}$ , превращаясь в информацию низшего уровня, а информация низшего уровня устаревает за время  $\beta_2^{-1}$ . Предположим также, что на каждом из уровней имеется постоянный приток информации величины  $Q_p$ ,  $p = 1, 2$ . В этих предположениях

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -\beta_1 S_1 + Q_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= -\beta_2 S_2 + \beta_1 S_1 + Q_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим случай, когда информация не устаревает  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . В этом случае

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = Q_1 \\ \frac{dS_2}{dt} = Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = S_1^{(0)} + Q_1 t = x + Q_1 t \\ S_2 = S_2^{(0)} + Q_2 t = y + Q_2 t \end{cases} \quad (12)$$

Из (10) получаем



$$\begin{cases} R_1(x) = \int_0^{\infty} \alpha_1 e^{-\alpha_1 \tau} d\tau \int_{-\infty}^{x+Q_1 \tau} R_1(x+Q_1 \tau - S) e^{-S} dS \\ R_2(y) = \int_0^{\infty} \alpha_2 e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \int_{-\infty}^{x+Q_2 \tau} R_2(x+Q_2 \tau - S) e^{-S} dS \end{cases} \quad (13)$$

Эти уравнения совпадают с хорошо известными уравнениями теории разорения [9]. Используя полученные в [9] результаты, получим при  $x \rightarrow \infty$ ;  $y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1 - R_1 &= \frac{1}{\gamma_1 \mu_1} \left( 1 - \frac{\alpha_1}{Q_1} \mu \right) e^{-\gamma_1 x} \\ 1 - R_2 &= \frac{1}{\gamma_2 \mu_2} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{Q_2} \mu \right) e^{-\gamma_2 y} \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mu_p$ ,  $\gamma_p = 1,2$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_p}{Q_p} \int_0^{\infty} e^{\gamma_p t} e^{-t} dt &= 1 \\ \mu_p &= \frac{\alpha_p}{Q_p} \int_0^{\infty} e^{\gamma_p t} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что  $\mu = 1$

$$\begin{aligned} R_p &= 1 - \frac{\alpha_p}{Q_p} \\ \mu_p &= \frac{\alpha_p}{Q_p} \frac{1}{(1 - \gamma_p)^2} = \frac{Q_p}{\alpha_p} \end{aligned}$$

Таким образом, из получим окончательно для вероятности нарушения безопасности такой системы

$$P = (1 - R_1) + (1 - R_2) = \frac{\alpha_1}{Q_1} e^{-\left(1 - \frac{\alpha_1}{Q_1}\right) \cdot x} + \frac{\alpha_2}{Q_2} e^{-\left(1 - \frac{\alpha_2}{Q_2}\right) \cdot y} \quad (16)$$

Соотношение (16) позволяет получить критерий нарушения безопасности

$$P \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha_1}{Q_1} e^{-\left(1 - \frac{\alpha_1}{Q_1}\right) \cdot x} + \frac{\alpha_2}{Q_2} e^{-\left(1 - \frac{\alpha_2}{Q_2}\right) \cdot y} \geq \frac{1}{2} \quad (17)$$

здесь  $x, y$  - начальные информации первого и второго классов соответственно.

Стратегию безопасности в данной модели можно определить, находя те значения параметров  $\alpha_i, x, y, Q_i$  и. т. д., которые минимизируют вероятность  $1 - P(x, y, \alpha_2, \alpha_1, Q_1, Q_2)$ . В общем случае допустимы следующие варианты поведения системы-  
 $\max R_1 > \max R_2 > 1/2$ , в этом случае нарушения безопасности любого уровня не происходит.  $\max R_1 > \max R_2$ , но  $\max R_1 > 1/2, \max R_2 < 1/2$ , в этом случае нарушение происходит как нарушение безопасности уровня 2, в обратном случае, когда  $\max R_2 > \max R_1$ , но  $\max R_2 > 1/2, \max R_1 < 1/2$  нарушение происходит как нарушение безопасности по уровню 1,  $\max R_1 > \max R_2, \max R_i < 1/2, i = 1, 2$  нарушение безопасности происходит одновременно по двум уровням.

## ГЛАВА 6.\*

### ДУХ

#### О топологически нетривиальных дефектах .

Идея есть бесплотное Существо, не имеющее существования само по себе, но которое имеет образ и форму бесформенной материи и становится причиной проявления.

**Плутарх**

*Нагваль*- это та часть нас ,для которой нет никакого описания - ни слов , ни названий, ни чувств , ни знаний.

**Карлос Кастанеда. Сказки о силе**

Я чувствую возмущение, будучи вынужденным употреблять эти три неуклюжие слова - Прошрое , Настоящее и Будущее - жалкие представления объективных фаз субъективного целого; они также мало приспособлены к назначению , как топор к тонкой резьбе.

**Е . П. Блаватская Тайная доктрина**

#### 1.Некоторые топологические понятия<sup>\*\*</sup>

Два пространства  $X$  и  $Y$  называются топологически эквивалентными (гомеоморфными), если существует взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками этих пространств . Такое соответствие называется топологическим отображением или гомеоморфизмом. Иными словами, два пространства топологически эквивалентны, если одно можно перенести в другое без разрывов и склеиваний (удобно представлять себе рассматриваемые объекты сделанными из резины).

---

<sup>\*</sup>**Замечание.** Вследствие относительной сложности материала Дополнения, предлагаем читателю не знакомому с современной геометрией , топологией и теорией поля, предварительно ознакомиться с основными понятиями этих дисциплин ,скажем по монографиям [12,13]

<sup>\*\*</sup>**Замечание.** Изложение основ топологии и теории поля производится в основном следуя [12].

Например, два замкнутых отрезка конечной длины топологически эквивалентны . Прямая топологически эквивалентна открытому отрезку конечной длины (топологическое соответствие между отрезком  $(\pi/2; \pi/2)$  и прямой может быть задано формулой  $x = \operatorname{tg} x$  . Аналогично открытый куб любой размерности топологически эквивалентен евклидову пространству той же размерности . Термин "пространство" здесь и далее обозначает метрическое или топологическое пространство. Однако читатель, стремящийся к максимальной наглядности, без существенного ущерба может представлять себе рассматриваемые объекты просто как подмножества  $n$ - мерного евклидова пространства.

Всякое  $n$ - мерное ограниченное замкнутое выпуклое множество  $X$  топологически эквивалентно  $n$ - мерному замкнутому шару. Отсюда следует, в частности, что открытый  $n$ - мерный шар топологически эквивалентен открытому  $n$ - мерному кубу и, значит, топологически эквивалентен  $n$ - мерному евклидову пространству (это легко, конечно, проверить непосредственно).

Интересные примеры пространств, обладающих нетривиальной топологией, можно получить, рассматривая пространства конфигураций простых механических систем. Так, например, пространство конфигураций двойного пространственного маятника топологически эквивалентно произведению  $S^2 \times S^2$  двух двумерных сфер  $S^2$  . Первый из составляющих маятник стержней закреплен в одном из концов, другой его конец описывает сферу  $S^2$  . При заданном положении первого стержня положение второго также определяется точкой сферы  $S^2$  . Таким образом, конфигурация маятника определяется парой  $(s_1, s_2)$ , где  $s_1$  и  $s_2$  -произвольные точки сферы  $S^2$

Положение двухатомной молекулы, состоящей из различных атомов, описывается координатами центра инерции и сферическими углами, определяющими направление отрезка, соединяющего атомы. Это означает, что пространство конфигураций топологически эквивалентно произведению  $\mathbb{R}^3 \times S^2$  . При этом предполагается, что молекула не меняет внутреннего состояния; ее можно тогда рассматривать как твердый стержень. Пространство конфигураций двухатомной молекулы, состоящей из одинаковых атомов, топологически эквивалентно произведению  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^2$  . Здесь  $\mathbb{RP}^2$  -так называемая проективная плоскость, т.е. пространство всех прямых в  $\mathbb{R}^3$  , проходящих через начало координат. Действительно, при фиксированном центре инерции положение молекулы определяется прямой, проходящей через центр инерции. Благодаря тому, что атомы одинаковы, направление на этой прямой не задано,

приходим к указанному выше описанию пространства конфигураций. Представляет интерес также не только топология пространства конфигураций, но и топология фазового пространства. Фигура называется связной, если две любые ее точки можно соединить путем. Под путем, соединяющем точки  $X_0$  и  $X_1$ , понимается семейство  $\alpha_t$  точек фигуры, непрерывно зависящее от параметра  $t$ , пробегающего отрезок  $[0; 1]$ . Иными словами, путь -это непрерывное отображение отрезка в фигуру. Если фигура связна, то топологически эквивалентная ей фигура также связна, иначе говоря, связность является топологическим свойством.

В топологии связность пространства обычно определяется несколько иным образом. Именно принято называть пространство связным, если его нельзя разбить на два непересекающихся непустых замкнутых множества Пространства, связные в указанном ранее смысле, называются в топологии линейно связными. Легко проверить, что всякое линейно связное пространство связно; обратное неверно. Мы в дальнейшем всегда будем использовать термин "связность", имея в виду линейную связность. Всякая фигура распадается на связные куски (связные компоненты) , две точки принадлежат одной компоненте, если их можно соединить путем. Число компонент, на которое распадается фигура, является топологическим инвариантом (не меняется при топологических преобразованиях). Например, буква "Ы" состоит из двух компонент, очевидно, что она негомеоморфна А, которая связна (состоит из одной компоненты).Еще одним примером топологического свойства является компактность (метрическое пространство называется компактным, если из любой последовательности ее точек можно выделить подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий тому же пространству). Известно, что подмножество евклидова пространства компактно тогда, и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. В частности, замкнутый шар компактен, поэтому он негомеоморфен никакой области в евклидовом пространстве, в частности открытому шару. (Под областью понимается связное открытое подмножество евклидова пространства.)

Рассмотрим в качестве примера топологические свойства важнейших матричных групп. Множество всех квадратных матриц порядка  $n$  можно рассматривать как векторное пространство размерности  $n^2$ . Топология в любом множестве матриц порождается топологией этого векторного пространства.

Группа  $GL(n, R)$  невырожденных действительных матриц порядка  $n$  некомпактна и несвязна. Она состоит из двух компонент - матриц с

положительным определителем и матриц с отрицательным определителем. Нетрудно проверить, что две матрицы, имеющие детерминант одного и того же знака, можно соединить непрерывным семейством матриц.

Группа  $O(n)$ , состоящая из всех действительных ортогональных матриц порядка  $n$ , компактна и несвязна; она также распадается на две компоненты (матрицы с определителем 1 и матрицы с определителем -1). Ортогональные матрицы с определителем 1 образуют компактную связную группу, которая обозначается символом  $SO(n)$ . Группу  $SO(n)$  можно рассматривать как связную компоненту группы  $O(n)$ , которой принадлежит единичный элемент этой группы.

Группа  $U(n)$  комплексных унитарных матриц порядка  $n$  компактна и связна. Этими же свойствами обладает группа  $SU(n)$  комплексных унитарных матриц, имеющих определитель 1. Группы  $U(1)$  и  $SO(2)$  топологически эквивалентны окружности  $S^1$ . Группа  $SU(2)$  топологически эквивалентна сфере  $S^3$ .

Топологические свойства и топологические инварианты могут быть использованы для доказательства негомеоморфности двух фигур. К сожалению, соображения, основанные на связности и компактности, позволяют установить негомеоморфность лишь в простейших случаях. Например, наглядные соображения показывают, что  $n$ -мерная сфера негомеоморфна  $n$ - мерному шару (для того чтобы расстелить резиновый мячик на плоскости, нужно проделать в нем дырку).

В топологии рассматриваются не только конечномерные фигуры (например, подмножества евклидова пространства), но и бесконечномерные объекты (в квантовой теории поля мы прежде всего сталкиваемся именно с такими). Типичным примером интересного бесконечномерного объекта является пространство непрерывных отображений одной конечномерной фигуры в другую. Пространство непрерывных отображений  $X$  в  $Y$  обозначается символом  $C(X, Y)$ .

Особенно важна информация о связных компонентах пространства  $C(X, Y)$ . Два отображения  $f_0$  и  $f_1$  принадлежат одной компоненте пространства отображений  $C(X, Y)$  в том и только в том случае, если существует соединяющее их семейство отображений  $f_t$ , непрерывно зависящее от параметра  $t$ , пробегающего отрезок  $I = [0; 1]$ . (Семейство  $f_t$  можно рассматривать как путь в пространстве  $C(X, Y)$ .) Отображения, принадлежащие одной компоненте пространства отображений, называются гомотопными

друг другу; иначе можно сказать, что два отображения гомотопны в случае, если одно можно непрерывно продеформировать в другое.

Таким образом, все отображения  $X$  в  $Y$  разбиваются на классы гомотопных друг другу отображений - гомотопические классы. Множество гомотопических классов отображений  $X$  в  $Y$  будем обозначать символом  $\{X, Y\}$ . (Можно сказать, что  $\{X, Y\}$ - это множество компонент пространства  $C(X, Y)$ ).

Отображение пространства  $X$  в  $Y$  называется гомотопным нулю, если оно гомотопно отображению, переводящему все  $X$  в одну точку пространства  $Y$ . Если пространство  $Y$  связно, то все гомотопные нулю отображения гомотопны друг другу; гомотопический класс этих отображений называется нулевым.

Отображение сферы  $S^{n-1}$  в  $Y$  гомотопно нулю в том и только в том случае, если его можно непрерывно продолжить на шар  $D^n$ , ограниченный сферой  $S^{n-1}$ .

Геометрически очевидно, что тождественное отображение сферы  $S^{n-1}$  на себя не может быть продолжено до отображения шара  $D^n$  в  $S^{n-1}$  и, значит, негомотопно нулю. (Если граница резинового диска жестко закреплена, то, для того чтобы весь диск сдвинуть на границу, необходимо проделать в нем дырку.)

Если всякое отображение окружности в пространство  $X$  гомотопно нулю, то пространство  $X$  называется односвязным. Если в односвязном пространстве  $X$  заданы два пути  $f_0$  и  $f_1$ , соединяющих точки  $\alpha$  и  $\beta$  (т.е. два отображения отрезка  $[0;1]$ , удовлетворяющих условиям  $f_0(0)=f_1(0)=\alpha$ ,  $f_0(1)=f_1(1)=\beta$ ), то можно продеформировать путь  $f_0$  в путь  $f_1$ , таким образом, чтобы во время деформации начало пути все время находилось в точке  $\alpha$ , а конец - в точке  $\beta$ .

Если всякое отображение сферы  $S^n$  в пространство  $X$  гомотопно нулю, то пространство  $X$  называется асферичным в размерности  $n$  (таким образом, односвязность-это асферичность в размерности 1). Так например сфера  $S^n$  асферична в размерностях  $< n$ .

Рассмотрим теперь отображения окружности в окружность. Точки окружности удобно описывать с помощью угловой координаты  $\varphi$ , считая, что  $\varphi$ , и  $\varphi+2\pi$ , отвечают одной и той же точке окружности. Непрерывная числовая функция  $f(\varphi)$ , заданная на отрезке  $[0; 2\pi]$ , определяет непрерывное отображение окружности в окружность при условии

$$f(2\pi)-f(0) = 2\pi m, \quad (a)$$

где  $m$  - целое число. Всякое непрерывное отображение окружности в окружность может быть записано таким способом.

Число  $m$ , фигурирующее в условии (а), называется степенью отображения, оно показывает, сколько раз одна окружность накрунулась на другую. При непрерывном изменении отображения его степень не изменяется, поэтому гомотопные друг другу отображения имеют одну и ту же степень. С другой стороны, если отображения, определяемые функциями  $f_0$  и  $f_1$ , имеют одну и ту же степень  $m$ , то они гомотопны.

Таким образом, мы построили взаимно однозначное соответствие между множеством  $\{S^1, S^1\}$  гомотопических классов отображений окружности в окружность и множеством целых чисел. Несколько более сложные рассуждения позволяют сопоставить целое число - степень отображения - каждому отображению  $k$ - мерной сферы в  $k$ - мерную сферу и показать, что при этом также возникает взаимно однозначное соответствие между множеством гомотопических классов  $\{S^n, S^n\}$  и целыми числами[12]. Гомотопические классы отображений окружности в плоскость с выколотой точкой также находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством целых чисел.

Во многих проблемах возникает задача о классификации отображений  $k$ - мерной сферы  $S^k$  в какое -либо пространство  $E$ . Эта классификация обычно производится с помощью множества отображений сферы  $S^k$  в пространство  $E$ . Это множество естественно обозначить  $\{S^k, E\}$ . На таком множестве можно определить операцию сложения [12]. Множество  $\{S^k, E\}$  на котором определена операция сложения называется  $k$ - мерной гомотопической группой пространства  $E$  и обозначается символом  $\pi_k(E)$ . Гомотопические группы двух гомотопически эквивалентных пространств изоморфны друг другу. Если группы  $\pi_k(E)$  тривиальны ( $\pi_k(E)=0$ ), то отображение сферы  $S^k$  в  $E$  гомотопно нулю. Приведем примеры гомотопических групп некоторых пространств

Сфера

$$\pi_n(S^k) = 0 \quad \text{при } k < n$$

$$\pi_n(S^1) = 0$$

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

Пространство  $SO(n)$

$$\pi_i(SO(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i > 1 \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 3 \end{cases}$$



$$\pi_i(SO(4)) = \begin{cases} Z_2 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i = 2 \\ Z + Z & \text{при } i = 3 \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(n)) = \begin{cases} Z_2 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i = 2 \\ Z & \text{при } i = 3 \end{cases} \text{ если } n \geq 5$$

Здесь  $Z$ - группа целых чисел,  $Z_2$ -циклическая группа из двух элементов.

Эти соотношения будут использованы нами ниже в частности при рассмотрении задачи об эволюции СОЗНАНИЯ.

### 1.Внутренние симметрии. Калибровочные поля

Рассмотрим описанную выше модель фазового перехода ферромагнетик-парамагнетик. Основные уравнения модели

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$V = \frac{\psi^4}{4} - a \frac{\psi^2}{2} - h\psi$$

в случае  $h=0$  могут быть переписаны в виде

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$V = \lambda(\psi^2 - a)^2 \quad \lambda \equiv \frac{1}{4} \tag{1}$$

Везде в дальнейшем будем предполагать , что  $a>0$ .Эти уравнения не учитывают тот факт , что спонтанная намагниченность - векторная величина .Учет этого обстоятельства тривиален -он состоит в замене в (1)  $\psi \rightarrow \vec{\psi} ; \psi^2 \rightarrow |\vec{\psi}|^2$  .В дальнейшем нас будут интересовать неоднородные состояния системы , поэтому к потенциалу из (1) следует добавить градиентное слагаемое. В этом случае потенциал  $V[\vec{\psi}]$  имеет вид

$$V[\vec{\psi}] = \int d\vec{x} \{ (grad \vec{\psi})^2 + \lambda (|\vec{\psi}|^2 - a)^2 \} \tag{2}$$

Под симметрией понимается преобразование полей , при котором функционал , отвечающий потенциалу рассматриваемой системы

,остается неизменным. Симметрия называется внутренней , если преобразование затрагивает только значения полей  $\bar{\psi}(\bar{x})$  но не координатные переменные. Здесь и в дальнейшем под координатными переменными  $\bar{x}$  будем понимать n- мерные векторы. В рассматриваемом нами случае магнетика , очевидно, что потенциал (2) не меняется при преобразованиях вида

$$\psi'_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \psi_j \quad (3)$$

где  $S_{ij}$  -ортогональная матрица. Это означает, что потенциал (2) обладает группой внутренних симметрий  $O(3)$  Рассмотрим в качестве системы СОЗНАНИЕ на некотором этапе своего развития. В соответствие с приведенной выше схемой мы можем охарактеризовать такую систему набором переменных , принимающих значения либо 0 если система не обладает нужным свойством , либо 1 если обладает.

Пример .Состояние подсистемы , называемой Союз Советских Социалистических Республик на заключительном этапе своего развития можно в рамках модели (0,1) можно условно охарактеризовать ( условно) следующим набором переменных :

музыка)=1  
 (литература)=1  
 (живопись)=0  
 (поэзия)=0  
 (архитектура)=0  
 (философия)=0  
 (наука)=1  
 (техника)=1  
 (религия)=0

Таким образом , состояние рассматриваемой системы может быть охарактеризовано N -мерным вектором (см .Приложение)

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \phi_N \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Причем в общем случае  $N \gg 1$ . Естественнo предположить , что потенциал рассматриваемой системы имеет вид аналогичный (2) , но для поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$ .

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \{ (grad \vec{\phi})^2 + \lambda (|\vec{\phi}|^2 - a)^2 \} \quad (5)$$

очевидно, что потенциал (5) не меняется при преобразованиях вида

$$\phi_i' = \sum_{j=1}^N S_{ij} \phi_j \quad (6)$$

где  $S_{ij}$  -ортогональная матрица. Это означает, что потенциал (5) обладает группой внутренних симметрий  $O(N)$  Эта группа соответствует вращениям в  $N$ - мерном пространстве полей  $\vec{\phi}(\vec{x})$ . Рассмотренная модель все еще носит весьма искусственный характер. Действительно состояние общества в целом не может быть однородным - в каждой точке пространства  $\vec{x}$  вектор  $\vec{\phi}(\vec{x})$  может принимать значения , отвечающие состоянию общества в данном регионе , стране, городе, доме и. т. д. Из этого следует , что потенциал (5) не должен меняться при преобразованиях полей  $\vec{\phi}(\vec{x})$  вида (6) , где матрица  $S$  зависит от точки реального физического пространства, т.е. при преобразованиях

$$\vec{\phi}' = S(\vec{x}) \vec{\phi} \quad (7)$$

Из (5) видно , что потенциал этого типа нужным свойством не обладает. Однако исходя из него можно построить потенциал  $\hat{V}[\vec{\phi}, \hat{A}]$  , который обладает необходимой симметрией. Эта симметрия

обеспечивается введением дополнительного поля  $\hat{A}$ , зависящего от пространственных координат. Такое поле называется калибровочным [12]. Для получения потенциала  $\hat{V}[\vec{\phi}, \hat{A}]$  можно воспользоваться стандартным подходом [12] и произвести в исходном потенциале (5) замену

$$grad_i \rightarrow \hat{E} grad_i + \hat{A}_i(\vec{x}); i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

где  $\hat{A}_i(\vec{x})$  - векторное поле, принимающее значение в пространстве матриц размером  $N \times N$ ,  $\hat{E}$  единичная матрица размером  $N \times N$ . В соответствии с обычно используемыми обозначениями [12,13], будем опускать в дальнейшем матрицу  $\hat{E}$  при написании формул. Выражение

$$D_i = grad_i + \hat{A}_i(\vec{x}); i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

носит название ковариантной производной. Предположим, что мы в потенциале (5) после проведения замены (8) преобразовали поле  $\vec{\phi}'(\vec{x}) = S(\vec{x})\vec{\phi}(\vec{x})$ . Тогда, если поле  $\hat{A}_i(\vec{x})$  преобразуется по закону

$$\hat{A}'_i(\vec{x}) = S(\vec{x}) \hat{A}_i(\vec{x}) S^{-1}(\vec{x}) - (grad S(\vec{x}))_i S^{-1}(\vec{x}) \quad (10)$$

то

$$D'_i \vec{\phi}'(\vec{x}) = S(\vec{x}) D_i \vec{\phi}(\vec{x}) \quad (11)$$

где

$$D'_i = grad_i + \hat{A}'_i(\vec{x}); i = 1, 2, 3.$$

и потенциал

$$V[\vec{\phi}, \hat{A}] = \int d\vec{x} \{ (D_i \vec{\phi})^2 + \lambda (|\vec{\phi}|^2 - a)^2 \} \quad (12)$$

не меняется.

Таким образом по потенциалу (5), обладающему глобальной (не зависящей от  $\vec{x}$  группой внутренних симметрий  $O(N)$ ), с помощью замены (8) мы построили потенциал (12), обладающий инвариантностью относительно преобразований (7), (10). Такие преобразования носят название локальных калибровочных преобразований. Физический смысл калибровочного поля в том, что оно "связывает" между собой поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$  в различных точках, обеспечивая локальную калибровочную инвариантность.

Геометрический смысл введения калибровочного поля состоит во введении понятия расслоенного пространства (или расслоения)[10]. Понятие расслоенного пространства возникает, когда на многообразии  $M$  вводят структуру слоев. А именно, пусть  $M$  разбивается на подмножества, так называемые слои, каждый из которых изоморфен некоторому множеству  $P$ . Слои можно занумеровать точками некоторого множества  $B$ , называемого базой расслоения. Считается по определению, что локально, т.е. над некоторой окрестностью множества  $B$  расслоение  $M$  имеет структуру прямого произведения. Глобальная структура расслоения может быть весьма нетривиальной. По этой причине расслоения иногда называют косыми произведениями.

В расслоенном пространстве ( точнее в так называемом главном расслоении ) калибровочное поле отвечает введению связности, понятия аналогичного обычному гравитационному полю в общей теории относительности.

Введенное поле  $\hat{A}_i(\vec{x})$  считается заданным. Однако, если мы хотим избавиться от этого и хотим рассматривать поле  $\hat{A}_i(\vec{x})$  как независимое, мы должны добавить к (12) инвариантное относительно калибровочных преобразований слагаемое, содержащее производные от  $\hat{A}_i(\vec{x})$ . Вид этого слагаемого определяется калибровочной инвариантностью [12,13]

$$V'[\hat{A}] = \int d\vec{x} Sp \sum_{i,j=1}^N \hat{F}_{ij} \hat{F}_{ij}, \quad \hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i - [\hat{A}_i, \hat{A}_j] \quad (13)$$

$$\text{здесь } Sp \hat{D} \equiv \sum_{i=1}^N D_{ii}, \quad [\hat{D}, \hat{G}] = \hat{D} \hat{G} - \hat{G} \hat{D}.$$

Может возникнуть резонный вопрос - зачем нам нужны эти не очень простые построения? Ответ на этот вопрос состоит в том что в рассмотренных конструкциях при определенных условиях могут существовать топологически стабильные дефекты, внутри которых среднее значение поля  $|\vec{\phi}(\vec{x})| = 0$  в то время как во всем остальном пространстве  $|\vec{\phi}(\vec{x})| \neq 0$

## 2.Топологические дефекты

Мы опишем сейчас применение топологии к классификации дефектов (нарушений локального равновесия) в конденсированных средах. Возможности приложения топологии связаны с тем, что во многих важных случаях состояние термодинамического равновесия оказывается вырожденным при температурах ниже некоторой критической температуры  $T_c$ . Например, в ферромагнетике ниже

критической температуры (точки Кюри) возникает спонтанная намагниченность и вектор намагниченности  $\vec{\psi} \equiv \vec{M}$  может иметь различные направления в состоянии термодинамического равновесия.(см Главу 2).

В изотропном ферромагнетике вектор  $\vec{M}$  при  $T < T_c$  может иметь произвольное направление; длина этого вектора зависит от температуры  $|\vec{M}| = M(T)$ . Это означает, что при  $T < T_c$  равновесные состояния изотропного ферромагнетика находятся во взаимно однозначном соответствии с точками двумерной сферы  $S^2$ . Иными словами, пространством вырождения равновесного состояния для изотропного ферромагнетика является сфера  $S^2$ .

Для анизотропного ферромагнетика типа "легкая плоскость" вектор спонтанной намагниченности  $\vec{M}$  лежит в некоторой плоскости; длина его снова зависит от температуры. В этом случае пространством вырождения является окружность  $S^1$  (равновесные состояния находятся во взаимно однозначном соответствии с точками окружности). Наконец, в ферромагнетике типа "легкая ось" в равновесном состоянии возможны два значения вектора намагниченности, отличающиеся друг от друга знаком. Пространство вырождения состоит в данном случае из двух точек (его можно рассматривать как нульмерную сферу  $S^0$ ).

В общем случае множество всех равновесных состояний при фиксированной температуре  $T$  будем называть пространством вырождения и обозначать символом  $R$ . Пространство вырождения  $R$  можно рассматривать как топологическое пространство; иными словами можно говорить о равновесных состояниях, близких друг к другу. (Можно дать общее определение топологии в пространстве  $R$ , мы не будем этого делать, поскольку в конкретных ситуациях всегда ясно, какие равновесные состояния следует считать близкими.)

Структуру пространства вырождения обычно можно исследовать с помощью теории Ландау фазовых переходов второго рода [1]. Напомним, что равновесное состояние определяется условием минимальности свободной энергии. В теории Ландау предполагается, что равновесное состояние можно найти, минимизируя свободную энергию не по множеству всех состояний, а по множеству состояний, определяемому конечным числом параметров ( параметров порядка). Например, для ферромагнетика параметром порядка является вектор намагниченности  $\vec{M}$ . В изотропном случае свойства симметрии позволяют заключить, что свободная энергия является функцией от  $\vec{M}$  и  $T$ . При  $T > T_c$

минимум свободной энергии по  $\vec{M}$  достигается при  $\vec{M} = 0$ , при  $T < T_c$  этот минимум достигается при  $|\vec{M}| = M(T) > 0$ . В случае одноосного кристалла малая анизотропная добавка к свободной энергии имеет при соответствующем выборе координат вид  $KM_z$ . Если  $K > 0$ , то минимуму свободной энергии отвечает  $M_z = 0$ ; поскольку свободная энергия остается инвариантной относительно вращений вокруг оси  $z$  при  $T < T_c$  множество минимумов образует окружность. Мы имеем дело с ферромагнетиком типа "легкая плоскость". При  $K < 0$  свободная энергия достигает минимума, когда вектор  $\vec{M}$  направлен по оси  $z$  (ферромагнетик типа "легкая ось").

Обычно вырождение равновесного состояния связано с явлением нарушения симметрии. Так, например, функционал энергии для изотропного ферромагнетика инвариантен относительно группы вращений  $S0(3)$ . В то же время равновесные состояния характеризуются вектором  $\vec{M}$  и, следовательно, не обладают  $S0(3)$ -симметрией; подгруппа группы симметрий, состоящая из вращений, оставляющих на месте фиксированный вектор  $\vec{M}$ , изоморфна группе  $S0(2)$ . В общем случае обозначим символом  $G$  группу преобразований, не меняющих функционала энергии, а символом  $H$  - подгруппу группы  $G$ , состоящую из преобразований, оставляющих инвариантным фиксированное равновесное состояние  $e \in R$ . (Группа  $H$  называется в математике стационарной подгруппой элемента  $e \in R$ , а в физике - группой ненарушенных симметрий.) При преобразованиях из группы  $G$  равновесное состояние снова переходит в равновесное состояние. (Равновесное состояние находится из условия минимальности свободной энергии, а функционал свободной энергии, как и функционал энергии, инвариантен относительно группы  $G$ .) Обычно приходится сталкиваться с ситуацией, когда два любых равновесных состояния можно получить друг из друга с помощью преобразования из группы  $G$ . Физически это означает, что вырождение равновесного состояния полностью обусловлено свойствами симметрии. Если эта ситуация имеет место, то пространство вырождения  $R$  можно отождествить с пространством смежных классов  $G/H$  [12,13].

Мы рассмотрим сейчас ситуацию, когда в некоторой области исследуемого тела установилось локальное термодинамическое равновесие, т.е. в каждой точке можно говорить о температуре тела, но эта температура зависит от точки. Если равновесное состояние вырождено, то при локальном термодинамическом равновесии будут зависеть от точки не только температура, но и другие параметры, характеризующие равновесное состояние (например,

вектор намагниченности для ферромагнетиков). Естественно считать, что эта зависимость непрерывна.

Покажем, прежде всего, что, имея информацию о локально равновесном состоянии на некотором множестве, мы иногда можем сделать вывод, что вне этого множества локальное равновесие должно нарушаться. Рассмотрим простейший случай ферромагнетика типа "легкая ось" и предположим, что существуют две точки, в которых вектор спонтанной намагниченности имеет противоположные направления. Соединим эти две точки произвольной кривой. Если бы на всей кривой состояние ферромагнетика было локально равновесным, то вектор намагниченности был бы непрерывной функцией от точки кривой и, следовательно, обращался бы в нуль в некоторой точке этой кривой. (Напомним, что вектор намагниченности все время направлен по "легкой оси", т.е. имеет вид  $M(\vec{x})\vec{n}$ , где  $M(\vec{x})$  - числовая функция,  $\vec{n}$  - постоянный вектор. Поскольку функция  $M(\vec{x})$  меняет знак, она должна обращаться в нуль.)

Мы видим, что либо на кривой существует точка с температурой  $T > T_c$ , либо где-то нарушается условие локального равновесия. Если исключить возможность  $T > T_c$ , то мы приходим к выводу, что локальное равновесие нарушается на двумерной поверхности. (Это следует из того, что выбранные точки можно соединить зависящим от двух параметров семейством кривых, не пересекающихся друг с другом, и на каждой из кривых этого семейства существует по крайней мере одна точка, в которой локальное равновесие нарушено;). Дефекты такого типа называются доменными стенками. Конечно, равновесие может нарушаться и на множестве, имеющем большую размерность (например, возможно, что нарушение происходит в некоторой окрестности двумерной поверхности - доменная стенка имеет ненулевую толщину).

Перейдем к изотропному ферромагнетику. Будем считать, что локальное равновесие с  $T < T_c$  имеет место на некоторой двумерной сфере. Тогда векторы намагниченности в точках этой сферы образуют ненулевое векторное поле. Иными словами, сопоставляя каждой точке сферы вектор намагниченности в этой точке, мы получаем отображение сферы  $S^2$  в пространство  $R^3 \setminus \{0\}$  (пространство  $R^3$  с выколотым началом координат).

Если локальное равновесие с  $T < T_c$  реализуется также внутри сферы, то ненулевое векторное поле определено также в шаре  $D^3$ , ограниченном сферой  $S^2$ , и, значит, отображение сферы  $S^2$  в  $R^3 \setminus \{0\}$  может быть продолжено до отображения шара  $D^3$  в  $R^3 \setminus \{0\}$ . Не любое отображение сферы можно продолжить на шар; для того,



чтобы такое продолжение было возможным, отображение должно быть гомотопным нулю.[12].(Отображение называется гомотопным нулю, если его можно непрерывно продеформировать в отображение, переводящее всю сферу в одну точку.) Например, если все векторы намагниченности на сфере  $S^2$  направлены по нормали к сфере (поле этих векторов имеет вид ежа), то нельзя с помощью непрерывной деформации сделать все векторы поля параллельными друг другу и, следовательно, нельзя продолжить это поле в поле ненулевых векторов на  $D^3$ . Это означает, что всюду внутри сферы  $S^2$  не может быть локального равновесия с  $T < T_c$ .

Равновесие может быть нарушено всего в одной точке; тогда говорят, что мы имеем дело с точечным дефектом. Однако, нельзя исключить возможность того, что равновесие нарушено в нескольких точках или даже в целой области (быть может, состоящей из нескольких связных компонент).

Всякому отображению  $f$  сферы  $S^2$  в  $R^3 \setminus \{0\}$  можно сопоставить целое число  $n(f)$ , не изменяющееся при непрерывном изменении отображения  $f$ . Отображение  $f_0$  гомотопно отображению  $f_1$  (т.е.  $f_0$  можно непрерывно продеформировать в  $f_1$ ) в том и только в том случае, если и  $n(f_0) = n(f_1)$ . В частности, отображение сферы  $S^k$  в  $R^{k+1} \setminus \{0\}$  гомотопно нулю в том и только в том случае, если  $n(f) = 0$ . Пользуясь этими утверждениями, сопоставляем дефекту (множеству, где нарушено локальное равновесие) в изотропном ферромагнетике целое число, характеризующее топологический тип дефекта. Нужно окружить дефект сферой  $S^2$  и сопоставить ему целое число, определяемое векторным полем  $\vec{M}(\vec{x})$ , рассматриваемым как отображение сферы  $S^2$  в  $R^3 \setminus \{0\}$ . Если это целое число не равно нулю, то дефект называется топологически нетривиальным.

Наконец, обратимся к ферромагнетику типа "легкая плоскость". Рассмотрим окружность, на которой имеет место локальное равновесие с  $T < T_c$ . Сопоставляя каждой точке окружности значение вектора намагниченности в этой точке, мы получаем отображение окружности  $S^1$  в  $R^2 \setminus \{0\}$  (напомним, что вектор намагниченности является ненулевым вектором, лежащим в "легкой плоскости"). Если это отображение не гомотопно нулю, то его нельзя продолжить в непрерывное отображение круга  $D^2$ , ограниченного окружностью  $S^1$ , в  $R^2 \setminus \{0\}$ . На окружность  $S^1$  можно натянуть однопараметрическое семейство непересекающихся друг с другом поверхностей, топологически эквивалентных кругу. Если векторы намагниченности на  $S^1$  порождают негомотопное нулю отображение, то на каждой из этих поверхностей должна быть по

крайней мере одна точка, в которой нарушается локальное равновесие (или  $T > T_c$ ). Таким образом, в предположении  $T < T_c$  должна существовать целая линия, состоящая из точек, в которых нарушено локальное равновесие (топологически нетривиальный нитевидный дефект.).

Снова следует подчеркнуть, что равновесие может нарушаться не только на линии, но и на множестве, имеющем большую размерность. Как правило, равновесие нарушается в малой окрестности некоторой линии.

Важно отметить, что все дефекты, существование которых гарантируется указанными выше соображениями, устойчивы, т.е. не могут исчезнуть с течением времени. Рассмотрим для определенности топологически нетривиальный дефект в изотропном ферромагнетике. На сфере  $S^2$ , окружающей этот дефект, векторы намагниченности  $\vec{M}(\vec{x})$  задают негомотопное нулю отображение этой сферы в  $R^3 \setminus \{0\}$ . Если с течением времени локальное равновесие на сфере не нарушается, то это отображение деформируется непрерывно. Это означает, что в начальный и конечный момент времени отображения сферы гомотопны друг другу. По предположению в начальный момент времени отображение сферы, определяемое векторами  $\vec{M}(\vec{x})$ , негомотопно нулю; отсюда следует, что это же справедливо и в конечный момент времени.

Таким образом, при наложенных нами условиях внутри сферы все время существует дефект (хотя, конечно, положение этого дефекта может меняться). Более того, сохраняется не только сам дефект, но и число, характеризующее топологический тип этого дефекта, поскольку это число не меняется при непрерывном изменении поля  $\vec{M}(\vec{x})$  на сфере, окружающей дефект.

### 3. Топологические интегралы движения

Начнем с простейшего примера. Рассмотрим одномерную частицу, двигающуюся в поле с потенциальной энергией  $V(x)$ , и предположим, что потенциальная энергия обращается в бесконечность в некоторой точке  $a$ . Тогда очевидно, что частица не может преодолеть бесконечно-высокий потенциальный барьер в точке  $a$ ; если она находилась в начальный момент времени левее точки  $a$ , то она будет продолжать находиться левее точки  $a$  все время. Сформулированное только что утверждение можно переформулировать на несколько ином языке.

Обозначим символом  $U$  множество, в котором может находиться интересующая нас частица. В нашей ситуации это множество несвязно (состоит из двух компонент - лучей  $((-\infty, a)$  и  $(a, +\infty)$ ), и мы видим, что частица остается в той компоненте, в которой она была в начальный момент времени. (Напомним, что две точки принадлежат одной компоненте, если их можно соединить путем - непрерывной кривой, начинающейся в одной точке и кончающейся в другой.)

Рассмотрим теперь классическую систему с  $p$  степенями свободы, описываемую функцией Гамильтона  $H = T + V$ , где кинетическая энергия  $T$  является квадратичной функцией от импульсов, а потенциальная энергия

$V(x^1, \dots, x^r)$  может обращаться в бесконечность в некоторых точках пространства  $R^n$ . Предположим, что область  $U$ , в которой потенциальная энергия конечна, несвязна - состоит из нескольких компонент  $U_1, \dots, U_k$ . Тогда очевидно, что классическая частица, находившаяся в начальный момент времени в компоненте  $U_i$ , во все последующие моменты будет находиться в той же области (т.е. номер компоненты, в которой находится частица, является интегралом движения). Область  $U$ , где потенциальная энергия конечна, может рассматриваться как пространство конфигураций интересующей нас системы. Вместо того чтобы рассматривать компоненты пространства конфигураций, можно рассматривать компоненты фазового пространства, т.е. пространства, состоящего из тех точек  $(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)$ , для которых функция Гамильтона конечна. Очевидно, что число компонент этого фазового пространства совпадает с числом компонент пространства конфигураций. (Фазовое пространство можно в данном случае рассматривать как прямое произведение  $R^n \times U$ ).

В общем случае для того, чтобы изучить вопрос о топологических интегралах движения, нужно исследовать связность фазового пространства системы. (В фазовое пространство включаются только те точки, в которых функция Гамильтона  $H(p, x)$  конечна.) Ясно, что траектория классической механической системы все время остается в той компоненте фазового пространства, в которой она была в начальный момент времени, иными словами, номер компоненты связности может рассматриваться как интеграл движения. Такие интегралы носят название топологических интегралов движения. (топологических квантовых чисел.)

Топологические интегралы движения возникают не только в системах с конечным числом степеней свободы, но и в теории поля. Рассмотрим в качестве примера Теорию, описывающую скалярное

поле  $\phi(\vec{x})$  в одномерном пространстве  $\vec{x} \in R_1$ , считая, что функционал  $V[\phi]$  записывается в виде

$$V[\phi] = \int d\vec{x} \{ (\text{grad}\phi)^2 + \lambda(|\phi|^2 - a)^2 \} \quad (14)$$

Под конфигурационным пространством следует понимать множество полей  $\phi(\vec{x})$ , удовлетворяющих условию  $V[\phi] < +\infty$ .

Пространство конфигураций в рассматриваемом случае несвязно - состоит из четырех компонент. В самом деле, для того чтобы обеспечить конечность выражения (14) мы должны предположить, что  $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\phi(\vec{x})| = a$ . Отсюда следует, что поля с конечной энергией могут

принадлежать к одному из следующих четырех типов:

- 1)  $\phi(|\vec{x}| \rightarrow +\infty) = \phi(|\vec{x}| \rightarrow -\infty) = a$ , 2)  $\phi(|\vec{x}| \rightarrow +\infty) = \phi(|\vec{x}| \rightarrow -\infty) = a$
- 3)  $\phi(|\vec{x}| \rightarrow +\infty) = \phi(|\vec{x}| \rightarrow -\infty) = -a$ , 4)  $\phi(|\vec{x}| \rightarrow +\infty) = \phi(|\vec{x}| \rightarrow -\infty) = -a$

Поле одного типа нельзя непрерывным образом перевести в поле другого типа таким образом, чтобы все промежуточные поля имели конечную энергию. (Тот факт, что при переходе от поля одного типа к полю другого типа мы обязательно переходим через поле с бесконечной энергией означает, что поля разных типов разделены бесконечно высоким энергетическим барьером.) С другой стороны, два поля, принадлежащие одному и тому же классу, можно соединить непрерывным семейством полей с конечной энергией. Мы видим, что четыре класса, на которые были разбиты поля  $\phi(\vec{x})$ , являются компонентами связности пространства конфигураций.

Наименьшее значение функционала энергии (4) равно нулю; оно достигается при условии, что  $\phi(\vec{x}) = a$  или  $\phi(\vec{x}) = -a$ . Таким образом, минимум функционала энергии достигается в двух точках фазового пространства, разделенных бесконечным энергетическим барьером. Рассмотрим теперь минимум функционала энергии на компоненте фазового пространства, для которой  $\phi(|\vec{x}| \rightarrow +\infty) = a, \phi(|\vec{x}| \rightarrow -\infty) = -a$ . Легко видеть, что интересующий нас минимум равен

$$H = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{\lambda} a^3$$

и достигается на функции

$$\phi(\vec{x}) = ath(a\sqrt{2\lambda}(\vec{x} - \vec{c})) \quad (15)$$

В рассмотренном случае поля (15) трансляционно инвариантны (не меняются при сдвиге). В частности, поля (15) можно рассматривать как солитоны. Заметим, что солитон является не зависящим от времени решением классических уравнений движения. В интересующем нас Галилей- инвариантном случае с помощью преобразования Галилея из не зависящего от времени решения можно получить решение, изменяющееся с течением времени по закону  $\phi(\vec{x} - \vec{v}t)$  где  $\vec{v}$  постоянный вектор (солитон со скоростью  $\vec{v}$ ). Солитон классической задачи по своим свойствам напоминает частицу. В самом деле, солитон является локализованным решением уравнений движения, форма которого не меняется с течением времени. Солитон, как и все рассматриваемые нами поля, имеет конечную энергию. Это означает, что только в конечной части пространства солитон может существенно отличаться от  $\phi(\vec{x})=a$  или  $\phi(\vec{x}) = -a$ . В этой области локализована энергия солитона.

#### 4.Топологически нетривиальные дефекты в трехмерном пространстве. Монополи Полякова - Хоофта

Для того чтобы построить в трехмерном пространстве теорию, обладающую топологическими интегралами движения, начнем с рассмотрения потенциала вида (5)

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \{ (\text{grad}\vec{\phi})^2 + \lambda(|\vec{\phi}|^2 - a)^2 \} \quad (16)$$

где

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{x}) \\ \phi_2(\vec{x}) \\ \phi_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Исследуем сначала пространство полей  $\vec{\phi}(\vec{x})$ , для которых интеграл

$$\int d\vec{x} \{ \lambda(|\vec{\phi}|^2 - a)^2 \} \quad (17)$$

конечен. Мы предполагаем, что рассматриваемые поля непрерывны, существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\lambda \vec{n}) = \vec{\Phi}(\vec{n}) \quad (18)$$

для всякого вектора  $\vec{n}$ . При наложенных нами условиях вектор  $\vec{\Phi}(\vec{n})$  непрерывно зависит от  $\vec{n}$ . Из конечности интеграла следует, что  $|\vec{\Phi}(\vec{n})| = a$ , поэтому, рассматривая векторное поле  $\vec{\Phi}(\vec{n})$  на множестве векторов единичной длины, мы получаем непрерывное отображение двумерной сферы,  $|\vec{n}| = 1$ , в двумерную сферу  $|\vec{\Phi}(\vec{n})| = a$ . Каждому такому отображению сопоставляется целое число - степень отображения. Это означает, что каждому полю  $\vec{\phi}(\vec{x})$  отвечает целое число - топологическое число поля, определяемое асимптотикой  $|\vec{\Phi}(\vec{n})| = a$  рассматриваемого поля. Топологическое число поля не меняется при непрерывном изменении поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$  [12].

Таким образом, множество полей, для которых конечен интеграл (17), несвязно оно разбивается на компоненты, отвечающие различным значениям топологического числа. Однако отсюда не следует несвязность пространства полей, для которых конечен функционал (15), поскольку из конечности интеграла  $\int d\vec{x} \{(\text{grad} \vec{\phi})^2$  вытекает тривиальность асимптотики поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$  (при стремлении  $|\vec{x}|$  к бесконечности по любому лучу поле  $\vec{\phi}(\vec{x})$  стремится к одному и тому же пределу). Это значит, что топологическое число любого поля, для которого функционал (15) конечен, равно нулю.

Для того чтобы получить из (15) теорию, обладающую топологическими интегралами движения, включим в нее поле

$$\vec{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \\ A_\mu^3 \end{pmatrix},$$

являющееся обобщением электромагнитного поля (это поле называется полем Янга —Миллса или калибровочным полем). Именно, рассмотрим потенциал, полученный в первом параграфе настоящего раздела при  $N=3$

$$V[\vec{\phi}, \vec{A}] = \int d\vec{x} \{ (D_i \vec{\phi})^2 + \lambda (|\vec{\phi}|^2 - a)^2 \} + \int d\vec{x} \sum_{i,j=1}^3 \vec{F}_{ij} \vec{F}_{ij},$$

$$\vec{F}_{ij} = \partial_i \vec{A}_j - \partial_j \vec{A}_i - [\vec{A}_i, \vec{A}_j] \quad (19)$$

$$D_i \vec{\phi}(\vec{x}) = \text{grad}_i \vec{\phi}(\vec{x}) + [\vec{A}_i(\vec{x}); \vec{\phi}(\vec{x})]; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

символ  $[\vec{A}, \vec{B}]$  обозначает векторное произведение. Переход от потенциала (16) к потенциалу (19) является частным случаем стандартной процедуры, позволяющей по потенциалу, обладающему группой внутренних симметрий, построить с помощью включения калибровочных полей теорию, в которой эта группа внутренних симметрий локализована. Пространство полей, для которых функционал (19) конечен, несвязно. Поэтому каждому полю с конечной энергией можно сопоставить целое число  $n$  - топологическое число поля. С другой стороны, для каждого  $n$  можно построить поле, имеющее топологическое число  $n$  и конечный функционал (19). Например, для  $n = 1$  можно положить

$$A_j^i(\vec{x}) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kij} x_k \frac{\alpha(r) + 1}{r^2}$$

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = (\beta(r) + a) \vec{n} \quad (20)$$

где  $k, i, j = 1, 2, 3$ ,  $r = |\vec{x}|$ ,  $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$ ,  $\alpha(r), \beta(r)$  - быстро убывающие функции,  $\alpha(0) = -1, \beta(0) = -a$

Для того чтобы построить обладающее конечной энергией поле с любым топологическим числом  $n$ , рассмотрим произвольное векторное поле  $\vec{\Phi}(\vec{n})$ , определенное на множестве векторов единичной длины и удовлетворяющее условию  $|\vec{\Phi}(\vec{n})| = a$ . Используя поле  $\vec{\Phi}(\vec{n})$ , построим поле  $\vec{\phi}(\vec{x})$  вне единичного шара, положив  $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|})$ . Калибровочное поле  $\vec{A}_i(\vec{x})$  подберем таким образом, чтобы ковариантная производная

$$D_i \vec{\phi}(\vec{x}) = \text{grad}_i \vec{\phi}(\vec{x}) + [\vec{A}_i(\vec{x}); \vec{\phi}(\vec{x})]; \quad i = 1, 2, 3.$$

обращалась в нуль. Такое построение возможно, поскольку в силу условия  $|\vec{\Phi}(\vec{n})| = a$ , вектор  $\vec{\phi}(\vec{x})$  ортогонален векторам  $\text{grad}_i \vec{\phi}(\vec{x})$   $i = 1, 2, 3$ . Именно следует положить

$$\vec{A}_i(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{\phi}(\vec{x})|^2} [\vec{\phi}(\vec{x}), grad_i \vec{\phi}(\vec{x})] + \omega_i(\vec{x}) \vec{\phi}(\vec{x})$$

где  $\omega_i(\vec{x})$  - произвольные функции. Внутри единичного шара определим поля  $\vec{A}_i(\vec{x}); \vec{\phi}(\vec{x})$  произвольным образом, наложив единственное условие гладкости. Легко видеть, что функционал (19) построенного поля конечен (по крайней мере, в случае  $\omega_i(\vec{x}) = 0$ ). В самом деле, единичного шара функционал (19) сводится к функционалу калибровочного поля  $\vec{A}_i(\vec{x})$ ., конечность которого следует из того, что оно может быть записано в виде [12]:

$$\vec{A}_i(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \vec{w}_i\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right).$$

## 5.Топологические дефекты в модели формирования СОЗНАНИЯ.

Признаюсь, что я очень склонен утверждать существование нематериальных существ в мире и поместить мою душу в категорию этих существ. Впоследствии , не знаю , где или когда , но будет доказано, что человеческая душа , даже в этой жизни, находится в неразрывной связи со всеми нематериальными сущностями в Мире Духа и , что она действует на них и получает воздействие от них.

**Эммануил Кант**

Как отмечалось выше ,в процессе эволюции СОЗНАНИЯ возникают такие параметры и характеристики как воображение ,наука ,любовь , религия ,искусство и. т. д. Этот процесс можно условно изобразить следующей схемой



язык $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$	$\Updownarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Updownarrow$	$\Updownarrow$	музыка $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ воображение	$\Updownarrow \Rightarrow \Rightarrow \Updownarrow$	литература $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ любовь	$\Updownarrow \quad \Updownarrow$	поэзия $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ обмен инфор	$\Updownarrow \Rightarrow \Rightarrow \Updownarrow$	архитектура $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ магией	$\Updownarrow \quad \Updownarrow$	живопись $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ средства произ -	$\Updownarrow \Rightarrow \Rightarrow \Updownarrow$	религия $\Rightarrow$
	$\Updownarrow$ водства	$\Updownarrow \quad \Updownarrow$	наука $\Rightarrow$
непрерывность $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$	$\Updownarrow \dots\dots ? \dots\dots$	$\Updownarrow \Rightarrow \Rightarrow \Updownarrow$	философия $\Rightarrow$
воспроиз - $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$	$\Updownarrow \dots ? \dots\dots$	$\Updownarrow$	техника $\Rightarrow$
водства $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$	$\Updownarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow$		....???.\dots\dots

В процессе такой эволюции изучаемая система (человек, общество, человечество) может находиться в огромном числе состояний , характеризующихся уровнем развития таких характеристик , как наука, религия ,искусство , техника ,философия ,любовь, воображение и.т. д.

В качестве примера приведем краткий (и далеко не полный) очерк эволюции взглядов человечества на проблему детерминизма и стохастичности в **макроскопических** системах. С точки зрения описанной выше модели этот очерк можно рассматривать как развитие сравнительно небольшой части того состояния, которое принято называть наукой.

В общем случае под наукой часто понимают поиск неизвестных чудодейственных законов, которые таятся за неисчерпаемым разнообразием природы. Многие глубоко убеждены в том, что явления природы при всей их изменчивости и сложности подчиняются небольшому числу фундаментальных законов и что стоит лишь познать эти законы, как все станет простым и ясным. Именно это убеждение так прекрасно выразил Иоганн Кеплер , которому принадлежат следующие строки: «Ум человеческий никогда не будет испытывать недостатка в свежей пище - столь велико разнообразие явлений природы и столь обильны эти скрытые небесами сокровища, особенно в том, что касается порядка».

Порядок, о котором говорит Кеплер, тесно связан с глубоко детерминистической концепцией мироздания. Ее сторонники видели высшую задачу науки в поиске законов, позволяющих точно предсказывать события, которые на первый взгляд кажутся не поддающимися определению, например солнечные и лунные затмения или появление комет. Динамика Ньютона увенчала этот поиск грандиозным триумфом, в результате чего детерминистическая концепция законов природы стала основой методологии всего естествознания. Детерминизм, о котором идет речь, исходит из предположения о материальном происхождении явлений природы. Он постулирует, что за любым явлением, сколь бы загадочным оно ни было, кроются чисто материальные причины, которые рано или поздно будут обнаружены. Кроме того, детерминистическая концепция исходит из постулата о совершенной организации природы. Согласно этому постулату, в законах,

которым подчиняются явления природы, нет места столь «неточно подогнанным» деталям, как элементы вероятностного или случайного характера. После того как открытия астрономов-наблюдателей подтвердили точность и красоту небесной механики, была отброшена всякая мысль о том, что случайные процессы (даже если речь идет о самых сложных системах) могут играть существенную роль в физическом мире и их необходимо принимать во внимание.

В еще большей степени детерминистическую концепцию укрепили первые успехи естественных наук. Такие законы, вносящие порядок и ясность в нагромождение огромного количества экспериментальных данных, как закон кратных отношений Дальтона, которому следуют элементы в химических соединениях, или закон Бойля-Мариотта, которому подчиняются сжатие и расширение газов при постоянной температуре, самым убедительным образом подтвердили правоту тех, кто считал, что за сложностью физико-химических процессов кроется отнюдь не произвол. Тем самым было показано, что физика и химия, как и небесная механика, подчиняются строго детерминистическим принципам.

Идея о том, что детерминистические принципы во всех областях знания служат своего рода ключами понимания и прогресса, была доминирующей в развитии науки на протяжении всего XIX в. Достижения естественных наук рассматривались как универсальная модель для любой области человеческой деятельности, еще не свободной от эмпиризма. Со всей определенностью это выражено в словах Клода Бернара : «Все явления жизни строго детерминированы, поэтому-то и существует биологическая наука». С отставанием на несколько десятилетий те же идеи проникли и в социальные науки. Дюркгейм ставил знак тождества между наукой и детерминизмом. Мысль о том, что человеческие сообщества подчиняются законам природы и образуют «естественное царство» была для него эквивалентна допущению о выполнимости для человеческих сообществ «принципа детерминизма», который к тому времени был незыблемо установлен в так называемых точных науках.

Тем не менее с современных позиций ясно, что полный отказ от случайности, сыгравший столь важную роль в XIX в., не обоснован. Ощутимый удар по классическому детерминизму был нанесен, когда в ходе исследования атомных и субатомных свойств вещества были обнаружены принципиально неустраняемые неопределенности, что привело к формулировке новой - квантовой - механики. Но даже независимо от открытий на микроуровне незыблемость детерминистических позиций была поколеблена и по другим причинам, связанным с проблемами, которые возникли в ходе исследования свойств вещества непосредственно на макроскопическом уровне. Одной из наиболее старых проблем макроскопической физики, не утративших актуальность и поныне, является выяснение смысла энтропии и необратимости, которую призвана описывать энтропия. Сделав дерзкий шаг, повергший в смятение многих из наиболее именитых современников, Больцман предложил интерпретацию энтропии, в которой законы динамики дополнялись соображениями, связанными с понятием случайности. Последние было принято рассматривать как дополнительные приближения, вводимые из-за того, что проблема многих тел не может быть проинтегрирована точно. Имеются все основания полагать, что эта традиционная точка зрения

нуждается в пересмотре. Действительно, все новые доводы свидетельствуют в пользу представления о том, что источником необратимости является динамика, а не иллюзия, обусловленная неточностью наших знаний о состоянии системы. Показано, что в эволюции классических динамических систем внутренняя стохастичность сосуществует с полностью детерминистическими законами динамики. Более точно то же утверждение можно сформулировать следующим образом: в то время как движение отдельных частиц по траекториям детерминировано в самом полном значении этого слова, движение областей фазового пространства, т.е. пучков траекторий, обретает стохастические свойства.(см. Главу 1)

С необратимостью связана и другая проблема, в которой стохастическими элементами вряд ли можно пренебречь: конструктивная роль необратимых процессов в образовании крупномасштабных молекулярных образований, известных под названием диссипативных структур. Наиболее удивительная особенность этой проблемы, ставящая перед исследователями один из наиболее трудных вопросов, - глубокое различие между поведением материи на макроскопическом уровне и ее поведением на микроскопическом уровне. Каким образом становится возможной пространственно-временная когерентность химических диссипативных структур или лазерных лучей? Каким образом может спонтанно возникнуть и самоподдерживаться столь дальний макроскопический порядок, несмотря на молекулярный хаос и внутренние флуктуации? Столь же глубокое различие мы обнаруживаем в процессах самоорганизации, происходящих в биологических системах. Процессы метаболизма по существу представляют собой химические превращения. Ясно, что в подобных превращениях элемент случайности весьма велик. Дело в том, что в живых клетках число молекул, участвующих в метаболических превращениях, часто очень мало. Тем не менее метаболизм протекает без сбоев, с необычайной точностью. Например, он с поразительной надежностью производит молекулы белков. Последовательность аминокислот в белках и пространственная структура этих гигантских молекул настолько специфичны, что вероятность их случайного образования практически равна нулю.

Другая грань конструктивной роли необратимых процессов и резкого различия между порядком и случайностью открывается перед нами, если мы рассмотрим в качестве примера механизм биологической эволюции. Со времен Дарвина принято считать маловероятным, что биосфера является тем статическим, гармонично детерминированным миром, который некогда открылся Кеплеру, созерцавшему звездное небо. Биологические виды и даже предбиологические макромолекулярные соединения являются самоорганизующимися системами. Они непрестанно «становятся», т. е. пребывают в состоянии возникновения, которое существенно зависит от случайных событий. Случайно и независимо от направления эволюции создается обширный банк наследственных генетических вариаций. Этот банк служит бесценной сырьевой базой для эволюции. Именно в нем эволюция находит благоприятные вариации, частота которых в популяции последовательно возрастает и стабилизируется точными, однозначно определенными законами передачи наследственных признаков. Нетрудно видеть, что отличительная особенность эволюционной теории, заведомо не имевшая аналогов в физических науках в те времена, когда создавалась эволюционная теория, придает случайным событиям необычайно

важное значение. Мутации играют роль случайного двигателя прогресса. Однако мутации приводят и к гораздо более важным и далеко идущим последствиям, поскольку именно такие случайные события наугад выбирают один из нескольких возможных путей эволюции. По общепринятому ныне мнению исход эволюции биосферы не определен однозначно. Если бы жизнь и сознание на какой-нибудь другой планете развивались в тех же условиях, в каких происходила эволюция на Земле, то мы вполне готовы к тому, что формы жизни могли бы быть совершенно иными (не исключено даже, что в основе их лежала бы совершенно другая химия). По общему мнению при надлежащих условиях возникновение жизни неизбежно. В этом смысле жизнь - явление физическое, материальное, детерминированное. Однако из сказанного отнюдь не следует, что жизнь предсказуема. Наоборот, на более современном языке можно было бы сказать, что в процессе развития жизнь и сознание непрерывно осуществляют случайный выбор одного из многих (быть может, даже бесконечно многих) возможных сценариев. Предсказать достоверно, какого именно сценария будет придерживаться эволюция в данной единичной реализации процесса, решительно невозможно.

Некоторые исследователи и поныне считают, что в теории Дарвина случайности придается чрезмерно большое значение. Они пытаются установить более сильную зависимость между биологической изменчивостью и условиями окружающей среды. Согласно традиционным представлениям, мутации и другие случайные аспекты эволюции настолько глубоко связаны со специфическими особенностями живого состояния материи, что являются неотъемлемым свойством живого состояния. Именно этому обстоятельству в большинстве случаев приписывают различия между эволюцией биосферы и физического (неорганического) мира. Ныне ситуация претерпевает изменения. За последние годы стали гораздо лучше понятны механизмы самоорганизации в физических науках, и возникла новая оценка роли случайности в явлениях природы и общества. Новые результаты показали, что макроскопический мир гораздо менее детерминирован, т. е. предсказуем в классическом смысле, чем можно было ожидать. Выяснились совершенно новые аспекты стохастичности, требующие глубокой переоценки роли и значения случайных явлений в природе.

Во-первых, было обнаружено, что механизмы самоорганизации в сильно диссипативных системах гораздо сложнее, чем в системах равновесного типа. В окрестности состояния устойчивого термодинамического равновесия поведение диссипативной системы легко предсказуемо, если известно, что в этой области система обладает единственным аттрактором (областью притяжения траекторий системы)- термодинамической ветвью. Наоборот, вдали от термодинамического равновесия та же система может обладать поразительно сложной цепью бифуркаций. Тем самым неизбежно возрастает важность таких случайных элементов, как внутренние флуктуации. Влияние случайных элементов становится решающим в актах выбора, которые производит в ходе эволюции система, между многочисленными областями притяжения или диссипативными структурами, возникающими в результате бифуркаций. При изменении внешнего параметра (примерно так, как это происходит в ходе биологической эволюции) могут разворачиваться различные сценарии: в зависимости от случайных флуктуаций в каждый момент времени система «посетит» одни аттракторы и обойдет стороной другие. Стоит

отметить, что такая чувствительность к флуктуациям встречается уже в простейших самоорганизующихся гидродинамических системах.

Во-вторых, удар по традиционным представлениям относительно свойств макроскопического мира был нанесен той легкостью, с которой сценарии эволюции детерминированных макроскопических систем (например, систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) порождают нерегулярные апериодические решения, называемые хаотическими или турбулентными. Такие решения, полученные одновременно с развитием неравновесной теории устойчивости, вызвали потрясение в физических и биологических науках: новые режимы разительно отличались от сценария, предложенного Л. Д. Ландау для объяснения гидродинамической турбулентности, а именно возбуждения бесконечного числа частотных мод в непрерывной системе. В первом альтернативном сценарии, предложенном Рюэлем и Такенсом, использованы только три частоты. «Шумное» поведение в этом сценарии было связано со странным аттрактором, возникавшим после трех последовательных бифуркаций рождения цикла. Характерной особенностью странного аттрактора является чувствительная зависимость от начальных условий: соседние траектории разбегаются экспоненциально со временем. Нельзя не удивляться тому, что странный аттрактор, порождающий турбулентный режим, может существовать уже в системах столь малой размерности, а именно в системах, описываемых тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка (модель Лоренца).

Простые детерминированные системы не только оказались способными (вопреки наивным ожиданиям) генерировать внутренний шум. Было показано также, что возможны и другие маршруты, ведущие к хаосу не только через последовательность бифуркаций Хопфа. Были описаны по крайней мере два главных альтернативных сценария: переход к турбулентности через перемежаемость и через удвоение периода. Следует также отметить, что, когда управляющий параметр диссипативной системы изменяется непрерывно и систематически, хаос не обязательно является «предельным» типом поведения, возникающим после того, как будут исчерпаны более «когерентные» режимы на бифуркационных диаграммах.

Изучение самоорганизации в неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами, стало третьим основным стимулом к переоценке роли случайности. За любой нашей попыткой взглянуть на природу «детерминистическими глазами» кроется наивное интуитивное убеждение в тривиальности влияния флуктуаций в среде (под которыми обычно подразумевают быстрые флуктуации). В подтверждение правильности своих взглядов сторонники этого убеждения приводят следующие доводы.

Быстрый шум усредняется, и макроскопическая система по существу приспособливает свое состояние к средним условиям в среде.

Стохастическая вариабельность условий в среде приводит к расплыванию, или размазыванию, состояния системы вокруг среднего состояния. Флуктуации являются помехами, они оказывают дезорганизующее действие, но в конечном счете их роль вторична.

Такого рода интуитивные представления были выработаны на рассмотрении определенного типа связи между системой и окружающей ее средой. Удивительно, однако, что поведение нелинейной системы в среде с шумом, как правило, противоречит подобным интуитивным представлениям. В широком

классе явлений случайный характер среды, несмотря на свое, казалось бы, дезорганизирующее действие, способен индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов, чем те, которые возможны при соответствующих детерминированных условиях. Как ни странно, но усиление стохастичности среды может приводить к структурированию нелинейных систем, не имеющему детерминированного аналога. Еще более замечательно то, что переходы от одной структуры к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и переходам, встречающимся в неравновесных системах при детерминированных внешних воздействиях. Понятие фазового перехода было обобщено на переходы последнего типа около двадцати лет назад, поскольку некоторые свойства, характеризующие равновесный фазовый переход, были обнаружены и в этих явлениях [6].

Можно распространить понятие фазового перехода на новый класс неравновесных явлений перехода, индуцированных случайными свойствами среды. Этот тип переходов мы называли неравновесными фазовыми переходами, индуцированными шумом, или, короче, переходами, индуцированными шумом. Выбором такого названия подчеркнуто, что новый класс явлений перехода тесно связан с классическими равновесными фазовыми переходами и с открытыми не столь давно неравновесными фазовыми переходами. Однако выбранное нами название отнюдь не означает, что переходы, индуцированные шумом, обладают в точности такими свойствами, как равновесные переходы. Уже детерминированные неравновесные условия приводят к более широкому диапазону переходов с такими новыми возможностями, как переход к незатухающему периодическому поведению, известному как предельный цикл. Для нового класса явлений перехода, более важно то, что новые состояния, порождаемые индуцированными шумом переходами, несут на себе «несмываемое пятно» своего турбулентного происхождения. Они являются творениями шума, и как таковые на первый взгляд чужды нашим глубоко укоренившимся детерминистическим концепциям порядка.

Явление переходов, индуцированных внешним шумом, лежит в русле идей, коренным образом изменивших классические представления о соотношении между детерминированным и случайным поведением. Эти идеи по существу опровергли наши интуитивные представления о роли флуктуаций. И хотя для индуцированных шумом переходов ситуация не столь ясна и прозрачна, как в случае классических равновесных и неравновесных фазовых переходов, она отнюдь не является непредсказуемой и нерегулярной.

Идея о том, что случайные факторы, не учитываемые в обычной теории Дарвина, играют важную роль в эволюции, начинает обретать под собой почву и за пределами физических наук. Анализируя возможные причины пермской катастрофы, в результате которой около 225 миллионов лет назад с лица Земли исчезло около 80 % обитавших тогда видов животных, Гулд приходит к заключению, которое звучит, как своеобразный ответ Иоганну Кеплеру: «Вполне возможно, что случайность не является лишь адекватным описанием сложных случаев, в которых дать точное описание нельзя. Вполне возможно, что так устроен сам мир, и многие происходящие в нем события не обусловлены какими-либо причинами, понимаемыми в традиционном значении этого слова. Наше бессознательное убеждение в том, что такое невозможно, по-видимому, отражает лишь наши надежды и предрассудки,

наше отчаянное стремление разобраться в видимой стороне сложного, запутанного мира, но не в том, как действует природа».

Таким образом , состояние рассматриваемой системы может быть описано дифференциальными уравнениями

$$\dot{q}_i = f_i(\vec{q}(\vec{x}, t)) + \sum_{k=1}^N \zeta_k \psi_{ki}(q_i) \quad (24)$$

Здесь  $\psi_{ki}$  - заданные функции параметров состояния  $q_i(t)$ ,  $\zeta_i(t)$  - случайные силы, описывающие флуктуации в системе, такие, что

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \zeta_i(t) \zeta_k(t') \rangle &= A_{ik} \delta(t - t') \end{aligned} \quad (24)$$

В Приложении показано , что изучение поведения системы, которая описывается стохастическими уравнениями типа (24),(24<sup>1</sup>), сводится к решению задачи об определении N-мерного векторного поля на римановом многообразии параметров состояния  $q_i(t)$ . Таким образом , состояние рассматриваемой системы может быть N - мерным вектором ( $N \gg 1$ )

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \phi_N \end{pmatrix}, \quad \phi_i(\vec{x}, t) \equiv q_i(\vec{x}, t). \quad (24^*)$$

Будем считать , что раз возникнув, СОЗНАНИЕ развивается непрерывно во времени t, причем  $N \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Покажем , что такая система может быть изучена с помощью топологических методов.

В классической теории поля обычно изучаются поля, принимающие числовые значения или поля, принимающие значения в пространстве  $R^n$  (совокупность п числовых полей можно рассматривать как поле, принимающее значения в  $R^n$ , - многокомпонентное поле). Мы будем рассматривать сейчас теории, в которых поля принимают значения в многообразии, обладающем нетривиальной топологией. Такие поля возникают в различных

ситуациях. В частности, мы видели в разделе 2 , что локально равновесное состояние описывается полем, принимающим значения в пространстве вырождения  $R$ . К этому же классу полей принадлежат поля  $q_i(\vec{x}, t)$ , возникающие в модели формирования СОЗНАНИЯ. На геометрическом языке модель формирования СОЗНАНИЯ отвечает нахождению полей  $q_i(\vec{x}, t)$  и связностей (калибровочных полей) на многообразии  $R$ , с базой  $R$ , соответствующей нашему обычному пространству  $R$ , слоем, отвечающим « внутреннему» пространству состояний  $R$  с координатами  $q_i(\vec{x}, t)$  в каждой точке  $\vec{x}$  и структурной группой  $G$ , соответствующей тем преобразованием слоя, которые сохраняют метрический тензор « внутреннего» пространства. Динамика локально равновесного состояния задается потенциалом, вид которого в значительной степени определяется свойствами симметрии рассматриваемой системы.

Аналоги локально равновесных состояний мы будем называть голдстоуновскими полями. Таким образом, голдстоуновские поля принимают значения в многообразии основных состояний  $R$ . (Так в модели формирования СОЗНАНИЯ голдстоуновским полем является поле  $q_i(\vec{x}, t)$ ). Если вырождение основных состояний полностью обусловлено действием группы внутренних симметрий  $G$  (группа  $G$  транзитивно действует на  $R$ ), то многообразие  $R$  можно отождествить с факторпространством  $G/H$ , где  $H$  - группа ненарушенных симметрий. В этом случае голдстоуновские поля принимают значения в однородном многообразии  $G/H$ . Голдстоуновские поля естественно считать медленно меняющимися. В самом деле, особая роль этих полей связана с тем, что их потенциал мало отличается от потенциала основного состояния. Сделанные только что замечания позволяют записать потенциал голдстоуновских полей в виде

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \sum_{i,j=1}^M g_{ij}(\vec{\phi}) \text{grad}_i \vec{\phi} \text{grad}_j \vec{\phi}$$

Здесь  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)$  - локальные координаты на многообразии основных состояний  $R$ ,  $g_{ij}(\phi)$  метрический тензор на многообразии  $R$ . Предполагается, что это многообразие имеет размерность  $M$ . Например, для потенциала (5) для голдстоуновских полей имеем

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \{(\text{grad} \vec{\phi})^2\} \quad (21)$$



где значения поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$ . связаны соотношением  $\sum_{i=1}^M \phi_i^2 = a^2$  (лежат на сфере  $S^{M-1}$ ). Переходя на сфере к стереографическим координатам  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{M-1}$ , получаем для потенциала (21) выражение

$$V[\vec{\pi}] = 2a^4 \int d\vec{x} \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{M-1} \text{grad}_i \pi^k \text{grad}_i \pi^k}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)} \quad (22)$$

(стереографические координаты связаны с  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)$ ) соотношением

$$\phi^k = 2a^2 \frac{\pi^k}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)}, 1 \leq i < M, \phi^M = a \frac{(a^2 - \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)}$$

Потенциал (21) очевидным образом инвариантен относительно группы  $SO(M)$ . Поэтому то же можно сказать о потенциале (22). Многообразие  $R$  представляет собой риманово многообразие.

В случае, если вырождение основного состояния обусловлено действием группы, т.е.  $R = G/H$ , риманова метрика на  $R$  должна быть инвариантной относительно группы  $G$ . Это означает, что тензорное поле  $g_{ij}(\phi)$  полностью определяется своими значениями в какой-то точке  $\vec{\phi}_0$  многообразия  $R$ . Более того, даже в этой точке тензор  $g_{ij}(\phi)$  не может быть выбран произвольным образом - он должен быть инвариантным относительно стационарной группы  $H$  в этой точке. Если  $G=SO(N)$ ,  $H=SO(N-1)$ ,  $G/H=S^{N-1}$  то для полей, принимающих значения на сфере  $S^{N-1}$ , существует единственный (с точностью до множителя)  $SO(N)$ -инвариантный потенциал вида (21) (в стереографических координатах он принимает форму (22)).

Остановимся теперь на топологических интегралах движения в теориях с нелинейными полями. При рассмотрении полей с конечной энергией естественно считать, что эти поля имеют предел при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}_0 \quad (23)$$

Поле  $\vec{\phi}(\vec{x})$  можно рассматривать как отображение пространства  $R^3$  в  $R = G/H$ . Условие (23) означает, что это отображение может быть продолжено в непрерывное отображение на сферу  $S^3$ . (Напомним,

что сфера  $S^3$  получается из пространства  $R^3$  с помощью присоединения к нему бесконечно удаленной точки. Определяя отображение сферы  $S^3$  в  $R$ , мы сопоставляем бесконечно удаленной точке точку  $\vec{\phi}_0$ .) Мы видим, что два голдстоуновских поля  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  и  $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_N)$  разделены бесконечно высоким энергетическим барьером, если соответствующие отображения сфер негомотопны друг другу. Иными словами, топологический тип голдстоуновского поля определяется гомотопическим классом отображения сферы  $S^3$  в  $R = G/H$ . В случае, если пространство  $R$  односвязно (т.е. если отображение сферы  $S^1$  в  $R$  гомотопно нулю или, что то же самое группа  $\pi_1(R) = 0$ ), можно отождествить это множество гомотопических классов с группой  $\pi_3(R) = \pi_3(G/H)$ . В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда  $G = SO(N), H = SO(N-k)$ . В этом случае многообразие основных состояний представляет собой так называемое многообразие Штифеля  $V_{N,k}$ . Известно [13], что

$$\pi_1(V_{N,k}) = 0 \quad \text{при } N > k + 1 \text{ т.е. пространство } R = V_{N,k} \text{ односвязно.}$$

Тогда

$$\pi_3(V_{N,k}) = A, \text{ при } k=N-3, \text{ где } A - \text{циклическая группа}$$

Таким образом следует ожидать, что в нашей модели формирования СОЗНАНИЯ существуют топологические дефекты. Отметим, что это утверждение есть частный случай более общего утверждения [12], согласно которому  $\pi_2(R) = \pi_1(H)$ . При этом группа  $\pi_1(H)$  изоморфна прямой сумме  $r$  экземпляров группы целых чисел  $Z$  и конечной циклической группе  $Z_m$  вида  $Z_m = Z_{n_1} + Z_{n_2} + \dots + Z_{n_k}$ .

Таким образом в процессе эволюции в рассматриваемой системе могут существовать неисчезающие топологические дефекты, которые возникли на ранних стадиях эволюции СОЗНАНИЯ, когда  $N$  конечно, но велико (например  $N > 10$ ). Внутренняя структура дефектов слабо зависит от состояния, в котором находится система в данный момент времени. Эти дефекты взаимодействуют между собой посредством соответствующих калибровочных полей.

## ЗАКЛУЧЕНИЕ

Читатель, следивший за ходом изложения материала ,вероятно был удивлен теми глубокими аналогиями ,которые проявляются между различными системами. Эти аналогии в поведении систем, состоящих и большого числа одинаковых элементов ,связаны с наличием у них мезоскопического этапа эволюции, который возникает (что ,как надеется автор, продемонстрировано в настоящей работе ) вследствие прохождения системой точки возникновения неустойчивости. Неустойчивость приводит в конечном итоге к образованию новых макроскопических коллективных переменных, определяющих дальнейшую эволюцию системы. Детальный механизм этого во многих случаях можно описать следующим образом. Вблизи точки возникновения неустойчивости можно провести различие между устойчивыми и неустойчивыми коллективными движениями (модами). Устойчивые моды подстраиваются под неустойчивые и могут быть исключены (принцип подчинения Г.Хакена [2]). Это приводит к колоссальному уменьшению числа степеней свободы. Уравнения для неустойчивых мод (уравнения мезоскопического этапа эволюции) зависят от точных "микроскопических уравнений движения" лишь через набор совокупных параметров, которые в большинстве случаев можно определить из опыта. Совместное действие стохастических и детерминированных сил переводят системы из исходных состояний в новые ,определяя какие именно новые конфигурации реализуются. Существенно ,что уравнения мезоскопического этапа эволюции могут быть рассмотрены в качестве "микроскопический уравнений движения" для следующего эволюционного звена и , следовательно , к ним могут быть применены большинство методов , разработанных в равновесной и неравновесной статистической механике. Нарисованная картина позволяет по новому взглянуть на детерминизм и стохастичность эволюционных процессов. Можно полагать , что детерминизм в таких процессах (процессах эволюции) можно трактовать как наличие универсальности поведения систем на каждом этапе эволюции внутри одного эволюционного звена. В этом случае стохастичность на каждом этапе выполняет ту же роль, которую она играет в физических системах.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> В настоящей работе мы не затрагивали вопросов , связанных с зависимостью от времени поведения различных характеристик таких , например ,как разность

В заключение приведем цитату из книги Е.П. Блаватской «Тайная доктрина», которая , по нашему мнению ,в некоторой степени отражает суть приведенных в настоящей работе построений:

**« Человек ... не состоит только из того , что видимо в нем в какой-либо данный момент, но является совокупностью всех своих различных и сменяющихся состояний с момента своего появления в материальной форме вплоть до своего исчезновения с нашей Земли. Именно «эти совокупности», существующие извечно в Будущем, и проходят через материю , чтобы вечно существовать в Прошлом.»**

*январь-сентябрь 1998г.*

---

между числом индивидуумов , имеющих мнение "за" и " против" ,обладающих и не обладающих сознанием и.т.д. Такие зависимости без труда могу быть получены с помощью описанного подхода в рамках конкретной модели. Общие закономерности в поведении спектральных характеристик могут быть изучены с помощью методов типа метда функционала плотности[11].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### О СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФЛУКТУИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В. Н. Тронин

#### Введение

Хорошо известно, что подавляющее большинство систем, изучаемых как в естественных науках [1,2], так и в экономике, [3], социологии [4], биологии [5] на определенном этапе их эволюции может быть описано с помощью набора переменных (параметров состояния [6] или "коллективных мод" [1,2])  $\{q_i\}$   $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , удовлетворяющих эволюционным уравнениям вида

$$\dot{\vec{q}} = \vec{f}(\vec{q}(\vec{x}, t)) \quad (1)$$

где  $\vec{q}(\vec{x}, t)$  и  $\vec{f}(\vec{q}(\vec{x}, t))$  - векторы, компонентами которых являются соответственно переменные, определяющие состояние изучаемой системы (параметры состояния). Функциональные зависимости, выражают локальную эволюцию компонент  $\vec{q}$  во времени и пространстве. Параметрами состояния различны для различных систем. Ими могут быть, например, количество проданного торговой точкой товара [7], число особей в популяции [2], количество "организованных" преступников [7] и т. д. Функциональные зависимости в (1), как правило, содержат частные производные по пространственным переменным и нелинейны из-за различных взаимодействий в изучаемой системе. Они могут зависеть от некоторого набора управляющих параметров  $\lambda$  (постоянных, входящих в уравнения (1)), фиксированных концентраций, например стационарного числа банкиров в модели формирования организованной преступности и т. д. Управляющие параметры и граничные условия, которые естественно должны быть наложены на систему, воспроизводят воздействие на нее «внешнего мира».

При исследовании процессов возникновения коллективного поведения системы обычно считается, что внешняя среда постоянна во времени. Такое предположение требует постоянства управляющих параметров  $\lambda$  и граничных условий. В этом случае проблема возникновения коллективного поведения может быть исследована следующим образом. В силу постоянства среды, можно предположить, что существует, по крайней мере, одно стационарное решение уравнений (1), т.е. решение  $\{\bar{\bar{q}}_i\}$ , для которого

$$\vec{f}(\bar{\bar{q}}) = 0 \quad (2)$$

Это соответствует такому состоянию системы, которое в дальнейшем будем называть неорганизованным по аналогии с задачей о формировании

организованной преступности [7]. Переход к упорядоченному состоянию ассоциируется с идеей неустойчивости: коллективное поведение возникает, когда стационарное состояние  $\bar{q}$  становится неустойчивым и сменяется новым решением уравнений (1). Простейший способ исследования такой возможности состоит, прежде всего, в проверке на устойчивость стационарного состояния относительно малых возмущений [2,6]. При всех достоинствах этого способа он существенно локален, т.е. зависит от точки вблизи которой проводится исследование устойчивого поведения системы. Между тем в последнее время особый интерес представляют проблемы структурной устойчивости систем, описываемых уравнениями типа (1) [8]. Эти проблемы изучаются как правило с помощью методов алгебраической топологии [9], которые при всей их мощи и красоте представляются несколько формальными. Одна из целей настоящей работы - построить удобный математический аппарат пригодный для анализа структурной устойчивости систем типа (1). Следует иметь ввиду, что в описанные выше механизмы релаксации не были включены флуктуации. Между тем флуктуации могут играть доминирующую роль при развитии различных систем, приводя например к возможности возникновения фазовых переходов, индуцированных шумом [6]. В связи с этим возникает задача о структурной устойчивости систем, описываемых уравнениями (1) в присутствии флуктуаций. Эта проблема также является предметом настоящего исследования.

### **Постановка задачи. Коэффициенты Сили.**

Флуктуации принято делить на внутренние и внешние. К внутренним флуктуациям относятся те случайные изменения, которые порождаются предыдущим микроскопическим этапом эволюции системы, например флуктуации, связанные с непрерывными ударами молекул жидкости о движущийся в ней шарик или флуктуации, связанные с изменением мнения индивидуума с "за" на "против" в результате плохого настроения. Такие флуктуации не зависят от состояния эволюционирующей системы. К внешним флуктуациям относятся те флуктуации, которые определяются изменением параметров окружающей среды и, следовательно, зависят от состояния системы. Например, флуктуации числа избирателей, пришедших на выборы, вследствие изменения погодных условий, поскольку избиратель принимает решение об участии в выборах в зависимости от погодных условий. Как хорошо известно [6], внутренние флуктуации приводят к возникновению того коллективного параметра системы, который в равновесных ситуациях соответствует температуре, в то время как внешние флуктуации (внешний шум) могут изменить исход детерминистического описания, в частности, приводя к изменению точки бифуркации, либо даже к ее возникновению. Находясь под влиянием внутренних флуктуаций, система перестает пребывать в каком-либо определенном состоянии. Таким образом, подходящей величиной для описания системы становится вероятность того, что параметры состояния принимают определенные значения. Определение этой вероятности и составляет одну из целей данной работы. Экстремумы плотности вероятности, имеющей четко выраженные пики, располагаются (в случае только внутренних флуктуаций) в непосредственной близости от решения детерминированной системы. В отличие от внутренних флуктуаций, флуктуации, обусловленные случайностью

среды весьма существенны: внешний шум может изменить свойства локальной устойчивости макроскопически больших систем, так, что точка бифуркации может сдвигаться или даже появляться в зависимости от характеристик внешнего шума.

Влияние среды на макроскопические свойства системы (релаксирующей в соответствии с уравнениями (1)) описывается с помощью внешних параметров  $\lambda$ . Если система связана с флуктуирующей средой, то внешние параметры становятся случайными величинами. Эти величины можно представить стационарными случайными процессами.  $\lambda_t$ . Для дальнейшего удобно разложить  $\lambda_t$  на две части,  $\lambda + \zeta_t$ , где  $\lambda$  соответствует среднему состоянию среды, а  $\zeta_t$  описывает флуктуации относительно среднего значения. Ясно, что  $\langle \zeta_t \rangle = 0$ . Включение в уравнения (1) внутренних флуктуаций приводит к следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{q}_i = f_i(\vec{q}(\vec{x}, t)) + \sum_{k=1}^N \zeta_k \psi_{ki}(q_i) \quad (3)$$

Здесь  $\psi_{li}$  - заданные функции параметров состояния  $q_i(t)$ ,  $\zeta_i(t)$  - случайные силы, описывающие флуктуации в системе, такие, что

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \zeta_i(t) \zeta_k(t') \rangle &= A_{ik} \delta(t - t') \end{aligned} \quad (3^1)$$

Хорошо известно [1,2,6], что в том случае если случайные силы представляют из себя белый шум, то задача о поведении системы, описываемой стохастическими уравнениями сводится к решению уравнения Фоккера-Планка для вероятности  $w(X, \tau)$  нахождения системы в момент времени  $\tau$  в данном состоянии  $X = \{q_i\}, i=1, 2, \dots, N$ .

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial q_i} [f_i(q) w(X, \tau)] + \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} [a_{ik}(q) w(X, \tau)] \quad (4)$$

Здесь  $a_{\mu\nu} = A_{ik} \psi_{\mu i} \psi_{\nu k}$ . Эта величина предполагается в дальнейшем знакоопределенной, например положительно определенной,  $A_{ik}$  - амплитуда коррелятора случайной силы  $\zeta_i(t)$  (3<sup>1</sup>). В уравнении (4) и везде ниже по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Для удобства перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial q_i} [b_i(q) w(X, \tau)] + \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} [a_{ik}(q) w(X, \tau)] \equiv \hat{L} w(X, \tau); \quad (5)$$

$$b_i(q) \equiv -f_i(q)$$

Предположим, что стационарное решение этого уравнения существует. Покажем, что оно может быть выражено через входящие в (4) величины  $b_i(q)$  и  $a_{ik}(q)$ . Для этого вычислим величину  $\langle X | \exp(Lt) | Y \rangle$ , которая пропорциональна вероятности перехода системы из состояния  $|Y\rangle = |q_1^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_N^0\rangle$  в состояние  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$  в за время  $t$  и величину  $\langle X | \exp(Lt) | X \rangle$ , пропорциональную вероятности нахождения системы в состоянии  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$  в момент времени  $t$  (в дальнейшем вероятность нахождения системы в данном состоянии и величину  $\langle X | \exp(Lt) | X \rangle$ , ей пропорциональную будем называть вероятностью нахождения системы в данном состоянии  $X$  всегда, когда это не приводит к путанице). Отметим, что величина  $\langle X | \exp(Lt) | Y \rangle$  нормирована

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle X | \exp(Lt) | Y \rangle = \delta(X - Y) \quad (6)$$

Рассмотрим собственные значения  $\omega_k$  и собственные функции  $\chi_k(x)$  оператора  $\hat{L}$ :

$$\hat{L} \chi_k(x) = \omega_k \chi_k(x) \quad (7)$$

По предположению стационарное состояние существует, следовательно  $\omega_k \leq 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \langle X | \exp(Lt) | X \rangle &= \sum_k \chi_k(X) \chi_k(X) e^{-|\omega_k|t} = \\ &= \sum_{k, \omega_k=0} \chi_k(X) \chi_k(X) + \sum_{k, \omega_k \neq 0} \chi_k(X) \chi_k(X) e^{-|\omega_k|t} \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что при больших временах асимптотика вероятности  $\langle X | \exp(Lt) | X \rangle$  имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle X | \exp(Lt) | X \rangle = \sum_{k, \omega_k=0} \chi_k(X) \chi_k(X) \equiv \Psi_0^L(X) \quad (9)$$

С другой стороны для при малых временах из соотношения (8) и условия нормировки (6) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle X | \exp(Lt) | X \rangle &= \sum_{k, \omega_k=0} \chi_k(X) \chi_k(X) + \lim_{X \rightarrow Y} \sum_{k, \omega_k \neq 0} \chi_k(X) \chi_k(Y) e^{-|\omega_k|t} = \\ &= \Psi_0^L(X) + C(X, t) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $C(X, t)$ -функция, расходящаяся при  $t \rightarrow 0$ ;

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(X, t) = \infty$$

Асимптотику вероятности  $\langle X | \exp(Lt) | X \rangle$  при малых временах принято



записывать в виде[9]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle X | \exp(Lt) | X \rangle = \sum_k \Psi_{-k}^L(X) t^k; \quad k = -\frac{N}{2}; -\frac{N}{2} + 1; \dots \dots \dots (11)$$

Величины  $\Psi_{-k}^L(X)$  называются коэффициентами Сили оператора  $\hat{L}$  [9]. Центральную роль в настоящей работе играет нулевой коэффициент Сили  $\Psi_0^L(X)$  поскольку именно он определяет вероятность нахождения системы в данном состоянии  $X$  при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, из (9),(10),(11) имеем для вероятности  $w(X)$

$$w(X) \propto \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X | \exp(Lt) | X \rangle = \Psi_0^L(X) \quad (12)$$

Таким образом, задача об определении вероятности нахождения системы, описываемой уравнениями (3), в состоянии  $X$  сводится к вычислению нулевого коэффициента Сили оператора  $L$ , соответствующего стохастическим уравнениям (3).

### Вычисление коэффициентов Сили

Для вычисления коэффициентов Сили преобразуем оператор  $L$ . Будем считать, что форма  $\omega = a_{ik}(X) p^i p^k$  знакоопределена (везде ниже будем считать для простоты что форма  $\omega = a_{ik} p^i p^k$  отрицательно определена). Это означает, что можно ввести метрику в пространстве переменных состояния  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$  положив

$$ds^2 = -a^{ik} dq_i dq_k \quad (13)$$

где  $a^{ik}$  -матрица обратная к  $a_{ik}$ . Тем самым можно считать, что пространство состояний системы представляет собой  $N$ -мерное риманово многообразие  $M^N$  с локальным расстоянием между близкими точками, определенным соотношением (13). Определенный на многообразии  $M^N$  оператор

$$\hat{L}f = \partial_i \partial_k (a_{ik} f) + \partial_i (b_i f); \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial q_\mu} \quad (14)$$

введением «калибровочного» поля

$$B_k = -\frac{1}{2} (a^{-1})_{ik} (b_k + \partial_\mu a_{\mu k}) \quad (15)$$

приводится к виду

$$\hat{L} = a_{ik} \hat{\Omega}_i \hat{\Omega}_k + E \quad (16)$$

Здесь

$$\hat{\Omega}_i \equiv \hat{D}_i + B_i \quad (17)$$

$\widehat{D}_i$  есть ковариантная производная в римановом пространстве с метрикой (13)

$$\begin{aligned}\widehat{D}_i f &= \partial_i f \quad \text{если } f - \text{скаляр} \\ \widehat{D}_i B^k &= \partial_i B^k + \Gamma_{\mu i}^k B^\mu \\ \widehat{D}_i \tilde{B}_k &= \partial_i \tilde{B}_k - \Gamma_{ki}^\nu \tilde{B}_\nu; \quad \tilde{B}_\mu \equiv (a^{-1})_{\mu\nu} B^\nu \quad \text{если } B^\nu - \text{вектор}\end{aligned} \quad (18)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  -символы Кристоффеля для метрики  $a_{ik}$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{lj} + \partial_j a_{li} - \partial_l a_{ij}) \quad (19)$$

Величина  $E$ , фигурирующая в (16) имеет вид

$$E = \widehat{\Omega}_i b_i \equiv \frac{1}{2} (\partial_i b_i + a^{ik} b_i b_k + \partial_i \partial_k a_{ik} - 2\Gamma_{ii}^\mu b_\mu) \quad (20)$$

Рассмотрим вероятность перехода  $\langle X | \exp(Lt) | Y \rangle$  системы из состояния  $|Y\rangle = |q_1^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_N^0\rangle$  в состояние  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$  в за время  $t$ . Эта величина удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X | \exp(Lt) | Y \rangle = \widehat{L} \langle X | \exp(Lt) | Y \rangle \quad (21)$$

с начальным условием(6)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle X | \exp(Lt) | Y \rangle = \delta(X - Y)$$

Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$\langle X | \exp(Lt) | Y \rangle \approx e^{\frac{\sigma(X,Y)}{t}} \sum_k A_k(X, Y) t^k; k = -\frac{N}{2}; -\frac{N}{2} + 1; \dots \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) получим для систему уравнений для определения коэффициентов  $c_k(X, Y) \equiv A_{-\frac{N}{2}+k}(X, Y)$  и величины  $\sigma(X, Y)$ :

$$\begin{aligned}(\widehat{D}_\nu \sigma)(\widehat{D}_\nu c_1) + c_1 &= G^{-\frac{1}{2}} \widehat{D}_\mu \widehat{D}_\mu G^{-\frac{1}{2}} + E \\ (\widehat{D}_\nu \sigma)(\widehat{D}_\nu c_2) + 2c_2 &= G^{-1} \widehat{D}_\mu (G \widehat{D}_\mu c_1) \\ (\widehat{D}_\nu \sigma)(\widehat{D}_\nu c_2) + nc_n &= G^{-1} \widehat{D}_\mu (G \widehat{D}_\mu c_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-2} \widehat{D}_\mu c_r \widehat{D}_\mu c_{n-r-1} \quad n \geq 3 \\ \sigma &= \frac{1}{2} (\widehat{D}_\mu \sigma)(\widehat{D}_\mu \sigma)\end{aligned} \quad (23)$$

$$G \equiv \det\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_\mu \partial y_\nu}\right)$$

Величина  $\sigma(X, Y)$  есть половина квадрата расстояния между точками  $X$  и  $Y$ , измеренного вдоль геодезической [10].

Из (22) следует, что коэффициенты Сили  $\Psi_{-k}^L(X)$  оператора  $L$  равны

$$\Psi_{k-\frac{N}{2}}^L(X) = A_k(X, X) = c_{k+\frac{N}{2}}(X, X) \equiv d_k(X) \quad (24)$$

Переходя в уравнениях (23) к пределу  $X \rightarrow Y$  и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow Y} \sigma(X, Y) &= 0; \quad \lim_{X \rightarrow Y} \hat{D}_\mu \sigma(X, Y) = 0; \\ \lim_{X \rightarrow Y} \hat{D}_\mu \hat{D}_\nu \sigma(X, Y) &= a_{\mu\nu}(X); \quad \lim_{X \rightarrow Y} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \sigma(X, Y) = -a_{\mu\nu}(X); \quad (25) \\ \lim_{X \rightarrow Y} G(X, Y) &= \det a_{ik}(X) \equiv g(X) \end{aligned}$$

получим систему уравнений для определения коэффициентов  $d_k(X)$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= g^{-\frac{1}{2}} \hat{D}_\mu \hat{D}_\mu g^{-\frac{1}{2}} + E \\ 2d_2 &= g^{-1} \hat{D}_\mu (g \hat{D}_\mu d_1) \\ nd_n &= g^{-1} \hat{D}_\mu (g \hat{D}_\mu d_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-2} \hat{D}_\mu d_r \hat{D}_\mu g_{n-r-1} \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (26)$$

Решение уравнений (26) сводится к вычислению коэффициента  $d_1(X)$  и его дальнейшему ковариантному дифференцированию. Несложные, но громоздкие вычисления приводят к следующим значениям коэффициентов Сили  $\Psi_{1-\frac{N}{2}}^L(X); \Psi_{2-\frac{N}{2}}^L(X)$  [10,11]:

$$\begin{aligned} \Psi_{1-\frac{N}{2}}^L(X) &= (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(E + \frac{1}{6} R\right); \\ \Psi_{2-\frac{N}{2}}^L(X) &= (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(-\frac{1}{3} \Delta R + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{180} R_{ik} R^{ik} + \frac{1}{180} R_{ijk1} R^{ijk1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} RE + \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{6} \Delta E + \frac{1}{12} \Theta_{ik} \Theta^{ik}\right); \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $R_{ijkl}(X)$ ,  $R_{ik}(X)$ ,  $R(X)$  -тензоры Римана, Риччи и скалярная кривизна риманова пространства с метрикой (6):

$$\begin{aligned} R_{qkl}^i &= -(\partial_k \Gamma_{ql}^i - \partial_l \Gamma_{qk}^i + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p); \\ R_{jqkl} &= (a^{-1})_{ij} R_{qkl}^i; R_{ql} = R_{qil}^i; R = (a^{-1})_{ij} R_{ilj} \end{aligned} \quad (28)$$

$\Theta_{ij}(X) = \partial_j B_i - \partial_i B_j$  -напряженность «калибровочного» поля  $B_j(X)$ .

Соотношения (27) позволяют вычислить нулевой коэффициент Сили  $\Psi_0^L(X)$  для пространств размерности  $N=2, N=4$  (размерность риманова пространства соответствует количеству уравнение в исходной системе (1)). Из (27) имеем:

$$\begin{aligned}\Psi_0^L(X) &= (4\pi)^{-1} (E + \frac{1}{6}R); \text{при } N=2 \\ \Psi_0^L(X) &= (4\pi)^{-2} (-\frac{1}{3}\Delta R + \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{180}R_{ik}R^{ik} + \frac{1}{180}R_{ijk1}R^{ijk1} + \\ &+ \frac{1}{6}RE + \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{6}\Delta E + \frac{1}{12}\Theta_{ik}\Theta^{ik}); \text{при } N=4\end{aligned}\quad (29)$$

Вычисление всех коэффициентов Сили в общем случае затруднительно. Однако интересующий нас коэффициент  $\Psi_0^L(X)$  может быть вычислен в общем случае при  $N \gg 2$ . Для его вычисления проведем анализ размерностей величин, входящих в выражение (14), определяющее оператор  $L$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned}[a_{ik}] &= \frac{l^2}{t}; [b_i] = \frac{l}{t}; [(a^{-1})_{ik}] = (\frac{l^2}{t})^{-1}; [\Gamma_{ik}^l] = \frac{l}{t}; [\partial_i] = \frac{1}{l}; [\hat{D}_i] = \frac{1}{l} \\ [\hat{\Omega}_i] &= \frac{1}{l}\end{aligned}\quad (30)$$

Здесь  $l, t$ - параметры размерности длины и времени соответственно. Используя (30), а также тот факт, что  $[\Psi_0^L(X)] = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}}$ , получим, что

$$\Psi_0^L(X) = W(N) \text{Sp}\{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \}^{\frac{N}{2}} \quad (31)$$

Здесь  $\text{Sp}\{.....\}$ -шпур оператора (тензора  $4^{ro}$  ранга), стоящего в фигурных скобках. Соотношение (31) дает правильное выражение для нулевого коэффициента Сили при  $N=2, N=4$ . Действительно при  $N=2$  из (31) имеем

$$\Psi_0^L(X) = W(2) \text{Sp}\{ (\hat{D}_i + B_i)(\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \} = W(2)(E + \frac{1}{6}R) \quad (32)$$

что совпадает с (29) при  $W(2) = (4\pi)^{-1}$ . Аналогично хотя и несколько более длинно доказывается совпадение выражений (29) и (31) при  $N=4$ . Для вычисления функции  $W(N)$ , подставим (31) в уравнения (27). При  $N \gg 2$  получим  $W(N) = \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}}$ . Таким образом для нулевого коэффициента Сили получим окончательно:

$$\Psi_0^L(X) = \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \text{Sp}\{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \}^{\frac{N}{2}} \quad (33)$$

Соотношение (33) определяет вероятность нахождения системы в

состоянии  $X$   $w \propto \Psi_0^L(X)$  для четных значений размерности  $N$ . В том случае когда размерность  $N$  -нечетная величина и  $N>1$  в систему уравнений (3) следует добавить дополнительное уравнение для фиктивного параметра  $q_{N+1}$ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{N+1} &= \zeta_{N+1}(t); \\ \langle \zeta_{N+1}(t) \rangle &= 0; \\ \langle \zeta_{N+1}(t) \zeta_l(t') \rangle &= 0; \quad l = 1, 2, \dots, N; \\ \langle \zeta_{N+1}(t) \zeta_{N+1}(t') \rangle &= \beta \delta(t - t') \end{aligned} \quad (34)$$

В этом случае задача о вычислении нулевого коэффициента Сили сводится к предыдущей, причем  $\Psi_0^L(X)$  зависит от величины  $\beta$  как от параметра  $\Psi_0^L(X) = \Psi_0^L(X, \beta)$ . Вследствие фиктивности  $q_{N+1}$ , в окончательных выражениях следует положить  $\beta = 0$ . Таким образом вычисление вероятности нахождения системы в данном состоянии  $X$   $w \propto \Psi_0^L(X)$  проведено как для четных так и для нечетных значений размерности  $N$ .

### «Фазовое пространство» автономных систем с внешним белым шумом.

Проведенное рассмотрение показывает, что вероятность нахождения автономной системы описываемой с помощью  $N$  параметров  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_N\}$  (с внешними флуктуациями, зависящими от состояния системы (3)), в заданном состоянии  $X = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_N\}$ , определяется геометрией риманова пространства с метрикой

$$ds^2 = -a^{ik} dx_i dx_k, \quad \text{связностью} \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{lj} + \partial_j a_{li} - \partial_l a_{ij}) \quad (19), \text{ в каждой точке } X = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_N\}$$

которого определено «калибровочное» поле  $B_k = -\frac{1}{2} (a^{-1})_{ik} (b_k + \partial_\mu a_{\mu k})$ . Если поля  $b_k(X)$   $a_{\mu k}(X)$  заданы, то соотношение (33) определяет вероятность нахождения системы в состоянии  $X$  при условии, что оно существует как стационарное. Условия существования стационарного состояния были сформулированы при выводе (33). Действительно отрицательная определенность формы  $a_{ik} p^i p^k + b_i p^i$  определяет возможность существования у оператора  $L$  отрицательных собственных значений и, следовательно, приводит к построению вероятности нахождения системы в состоянии  $X$  в виде (33). Таким образом следует предположить стационарное состояние для системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями (3) существует, если

$$a_{ik}(X) p^i p^k + b_i(X) p^i \leq 0 \quad (35)$$

для любых значений  $p^i$  и  $X$ , причем знак равенства достигается лишь при  $p^i = 0$ . Соотношение (35) гарантирует существование стационарных состояний у рассматриваемой системы. Однако не является в общем случае

достаточным: можно представить себе систему ( т.е. конкретные значения полей  $a_{ik}(X)$  и  $b_i(X)$ ) для которой условие (35) не выполнено, однако спектр оператора  $L$  отрицателен и следовательно стационарное состояние системы существует. Везде в дальнейшем будем считать , что условие (35) выполнено. Введенное выше риманово пространство представляет собой фазовое пространство системы , соответствующей уравнениям (3)( или точнее оператору  $L$  ,который определен соотношением (5)) .Это фазовое пространство в общем случае не является связанным. Различные компоненты связности фазового пространства различаются значением топологического инварианта-индекса оператора  $L$   $index \hat{L}$  [9], который представляет собой разность количества нулевых мод ( которое обозначим  $\Phi_0(L)$ ) оператора  $\hat{L}$  и сопряженного ему в смысле Колмогорова-Феллера [12] оператора  $\hat{L}^+$  ( которое обозначим  $\Phi_0(L^+)$ ):

$$index L = \Phi_0(L) - \Phi_0(L^+) \quad (35^1)$$

Физический смысл сопряженного оператора  $\hat{L}^+$  состоит в том , что если оператор  $\hat{L}$  , в соответствии со сказанным выше , определяет вероятность перехода системы из данного состояния  $|Y\rangle = |q_1^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_N^0\rangle$  в любое состояние  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$  в за время  $t$  , то оператор  $\hat{L}^+$  определяет вероятность перехода системы из любого состояния  $|X'\rangle = |q_1^{-t}, q_2^{-t}, q_3^{-t}, \dots, q_N^{-t}\rangle$  в заданное состояние  $|Y\rangle = |q_1^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_N^0\rangle$  за время  $t$ . Фактически сопряженный оператор соответствует системе , описываемой обращенными во времени уравнениями (3). Спряженный оператор  $\hat{L}^+$  , соответствующий системе , которая описывается уравнениями (3) , имеет вид

$$\hat{L}^+ = a_{ik} \partial_i \partial_k + b_i \partial_i; \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (36)$$

Введением «калибровочного» поля

$$B^+_k = -\frac{1}{2}(a^{-1})_{ik} b_k \quad (37)$$

этот оператор можно привести к виду

$$\hat{L}^+ = a_{ik} \hat{\Omega}^+_i \hat{\Omega}^+_k + E^+ \quad (38)$$

Здесь

$$\hat{\Omega}^+_i \equiv \hat{D}_i + B^+_i \quad (39)$$

Оператор  $\hat{D}_i$  есть ковариантная производная в римановом пространстве

с метрикой (13), определенная соотношениями (18). Величина  $E^+$ , фигурирующая в (38) имеет вид

$$E^+ = \hat{\Omega}^+_{,i} b_i \equiv \frac{1}{2} (-\partial_{,i} b_i + a^{ik} b_i b_k + \partial_{,i} \partial_{,k} a_{ik} + 2\Gamma_{ii}^{\mu} b_{\mu}) \quad (40)$$

Из соотношений (9), (10) следует, что числа нулевых мод оператора  $\hat{L}$  ( $\hat{L}^+$ ) есть интегралы от нулевых коэффициентов Сили соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \Phi_0(L) &= \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_N \Psi_0^L(X) \\ \Phi_0(L^+) &= \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_N \Psi_0^{L^+}(X) \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь  $g = \det(a_{ik})$ . Вычисления нулевого коэффициента Сили оператора  $L^+$  аналогичны сделанным выше:

$$\Psi_0^{L^+}(X) = \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \text{Sp} \{ \hat{\Omega}^+_{,i} (-\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \}^{\frac{N}{2}} \quad (42)$$

Из (33), (43) для индекса оператора  $L$  получаем

$$\begin{aligned} \text{index } \hat{L} &= \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_{\frac{N}{2}} \left( \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \right) \text{Sp} \{ \hat{\Omega}_{,i} (\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \}^{\frac{N}{2}} - \\ &- \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_{\frac{N}{2}} \left( \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \right) \text{Sp} \{ \hat{\Omega}^+_{,i} (-\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu}) \}^{\frac{N}{2}} \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом для того, чтобы изучить вопрос о поведении системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями (3) помимо всего прочего необходимо исследовать глобальную структуру фазового пространства системы. При проведении исследований такого рода полезна следующая механическая аналогия.

### Механическая аналогия

Рассмотрим классическую систему с  $N$  степенями свободы, описываемую функцией Гамильтона  $H = T + U$ , где кинетическая энергия  $T$  является квадратичной функцией от импульсов, а потенциальная энергия  $U(X)$  может обращаться в бесконечность в некоторых точках пространства  $R^N$ . Предположим, что область, в которой потенциальная энергия конечна, несвязна - состоит из нескольких компонент. Тогда очевидно, что классическая частица, находившаяся в начальный момент времени в одной компоненте, во все последующие моменты будет находиться в той же области (т.е. номер компоненты, в которой находится частица, является интегралом движения). Область, где потенциальная энергия конечна, может рассматриваться как пространство конфигураций интересующей нас системы. Вместо того чтобы

рассматривать компоненты пространства конфигураций, можно рассматривать компоненты фазового пространства, для которых функция Гамильтона конечна. При исследовании связности фазового пространства механической системы (в фазовое пространство включаются только те точки, в которых функция Гамильтона  $H(P, X)$  конечна.) следует иметь в виду, что траектория классической механической системы все время остается в той компоненте фазового пространства, в которой она была в начальный момент времени, иными словами, номер компоненты связности может рассматриваться как интеграл движения. Такие интегралы носят название топологических интегралов движения (топологических квантовых чисел). Введенная выше величина  $index \hat{L}$  представляет собой один из таких интегралов. Покажем, что вероятность нахождения системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями (3), в некотором состоянии  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$ , которая определяется соотношением (33), может быть приведена к виду аналогичному «микроканоническому» и «каноническому» распределениям классической статистической механики [1]. Для этого рассмотрим «большую» систему (Вселенную), которая описывается уравнениями (3) при  $N=M \gg 1$ . Предположим для простоты, что для рассматриваемой системы тензор  $a_{ik}$  постоянен. Рассмотрим оператор  $\{\hat{\Omega}_i(\delta_\mu^v b_k + \Gamma_{\mu k}^v)\}$  в случае постоянного (не зависящего от  $X$ ) тензора  $a_{ik}$ . В этом случае все символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{lj} + \partial_j a_{li} - \partial_l a_{ij})$  равны нулю и рассматриваемый оператор сводится к тензору второго ранга, который можно рассматривать как обычную матрицу  $Z$  с компонентами  $Z_{ik}(X) = \frac{1}{2} \partial_i b_k(X) + B_i(X) b_k(X)$ . При этом вычисление возведение оператора  $\{\hat{\Omega}_i(\delta_\mu^v b_k + \Gamma_{\mu k}^v)\}$  в степень осуществляется по обычному правилу умножения матриц. Обозначим через  $R^2 = \sum_{a=1}^{\frac{M}{2}} \theta^a(X)$  сумму собственных значений  $\theta^a(X)$  матрицы  $Z$ . Будем считать, что  $R^2 > 0$ . При сделанных предположениях нулевое число Сили оператора  $L$  можно представить в виде:

$$\Psi_0^L(X) \propto \text{Sp} \{ \hat{\Omega}_i(\delta_\mu^v b_k + \Gamma_{\mu k}^v) \}^{\frac{M}{2}} = \\ = R^M(X) \propto \int dp_1 dp_2 \dots dp_{\frac{M}{2}+1} \delta(p_1^2 + p_2^2 + \dots p_{\frac{M}{2}+1}^2 + U(X) - E) \quad (44)$$

где  $E$ - положительная постоянная,

$$U(X) \equiv E - R^2(X) \quad (45)$$

Из (44), (45), следует, что вычисление вероятности нахождения «большой» системы (Вселенной), которая описывается уравнениями (3), в заданном



состоянии  $|X\rangle = |q'_1, q'_2, q'_3, \dots, q'_N\rangle$ , сводится к вычислению равновесной функции распределения для системы классических частиц с полной энергией  $E$ , массой  $m = \frac{1}{2}$  и гамильтонианом

$$H(X, P) = p_1^2 + p_2^2 + \dots p_{\frac{M}{2}+1}^2 + U(X)$$

$$P \equiv \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{\frac{M}{2}+1}\}$$
(46)

В такой интерпретации величина

$$f(X, P) = \Phi_0^{-1} \delta(p_1^2 + p_2^2 + \dots p_{\frac{M}{2}+1}^2 + U(X) - E)$$
(47)

представляет собой функцию распределения микроканонического ансамбля для рассматриваемой «большой» системы. В связи со сказанным выше совершенно естественным представляется переход от «микроканонического» к «каноническому», т.е. к вероятности нахождения в заданном состоянии  $|X\rangle = |q'_1, q'_2, q'_3, \dots, q'_K\rangle$ ,  $K \ll M$  подсистемы, «малой» по сравнению с самой системой («Вселенной»), но тем не менее «большой» в том смысле, что количество уравнений типа (3) для подсистемы по-прежнему велико  $K \gg 1$ . «Каноническое» распределение легко получается из «микроканонического» (47) путем стандартных рассуждений (16):

$$w(X, P) = \Phi^{-1} \exp\left(-\frac{H(X, P)}{T}\right)$$
(48)

Здесь величина

$$H(X, P) = p_1^2 + p_2^2 + \dots p_{\frac{K}{2}+1}^2 - R^2(X)$$

$$P \equiv \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{\frac{K}{2}+1}\}$$
(49)

представляет собой «гамильтониан» подсистемы,  $R^2 = \sum_{a=1}^{\frac{K}{2}} \theta^a(X)$  сумму собственных значений  $\theta^a(X)$  матрицы  $Z$ , отвечающей подсистеме. При этом следует иметь в виду, что величина  $R^2 = \sum_{a=1}^{\frac{K}{2}} \theta^a(X)$  для подсистемы может быть любого знака, в отличие от системы, для которой по предположению

$R^2 = \sum_{a=1}^{\frac{M}{2}} \theta^a(X) > 0$ . Параметр  $T$  играет роль температуры

$$T \equiv \frac{2}{3} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M p_i^2$$
(50)

а

$$\Phi = \int dXdP \exp\left(-\frac{H(X, P)}{T}\right) \quad (51)$$

роль статистической суммы. Все проведенные выше рассуждения справедливы, очевидно, и в общем случае, когда  $\Gamma_{\mu k}^v \neq 0$ . При этом в соотношениях (44)-(51)

роль величины  $R^2 = \sum_{a=1}^{\frac{M}{2}} \vartheta^a(X) > 0$  играет сумма собственных значений  $\vartheta^a(X)$  оператора  $\hat{\Omega}_i(\delta_{\mu}^v b_k + \Gamma_{\mu k}^v)$ . Таким образом, задача о поведении подсистемы, описываемой уравнениями типа (3) сводится к вычислению собственных значений оператора  $\hat{\Omega}_i(\delta_{\mu}^v b_k + \Gamma_{\mu k}^v)$ , (где величины  $b_k(X)$  — взятые с обратным знаком правые части уравнений (3) для подсистемы в отсутствие случайных сил), и последующим исследованием «термодинамических» свойств подсистемы с гамильтонианом (49), находящейся в «термостате» при температуре (50). При этом фазовое пространство оказывается разбитым на несвязные компоненты в соответствии с значениями величины  $index \hat{L}$ .

## Структурная устойчивость автономных систем с внешним белым шумом. Теоретико-полевая аналогия.

При всей привлекательности механической аналогии она оказывается практически бесполезной при анализе структурной устойчивости так называемых «мягких» моделей [8]. Поясним смысл введенных понятий на примере, который взят из работы [8]. Рассмотрим модель войны или сражения. В простейшей модели борьбы двух противников (скажем, двух армий) — модели Ланкастера — состояние системы описывается точкой  $\{x, y\}$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки,  $x$  и  $y$  — это численности противостоящих армий. Основные уравнения модели имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -by \\ \dot{y} &= -ax \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь  $a$  — мощность оружия армии  $x$ , а  $b$  — армии  $y$ . Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии  $x$  убивает за единицу времени  $a$  солдат армии  $y$  (и, соответственно, каждый солдат армии  $y$  убивает  $b$  солдат армии  $x$ ). Это — жёсткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad axdx = bydy, \quad ax^2 - by^2 = const. \quad (53)$$

Эволюция численностей армий  $x$  и  $y$  происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис.1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

Эти гиперболы разделены прямой  $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$ . Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. А), то гипербола выходит на ось  $y$ . Это

значит, что в ходе войны численность армии  $x$  уменьшается до нуля (за конечное время). Армия  $y$  выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия  $x$ . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается ко всеобщему удовлетворению истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно-большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

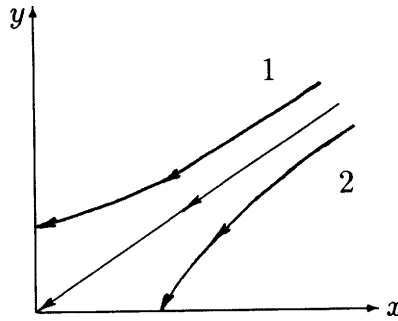


Рис. 1. Жёсткая модель войны.

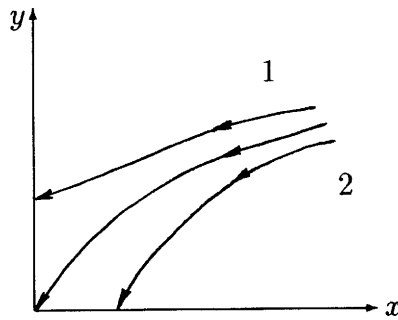


Рис. 2. Мягкая модель войны.

Основной вывод из рассмотренной модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным — в девять раз и т.д. Ясно, однако, что модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять её к реальной ситуации. Возникнет вопрос — как изменится вывод, если модель будет несколько иной. Например, коэффициенты  $a$  и  $b$  могут быть не строго постоянными, а могут зависеть от  $x$  и от  $y$ . И точный вид этой зависимости нам может не быть известен. В этом случае речь идет о системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x, y)x \\ \dot{y} &= b(x, y)y\end{aligned}\tag{54}$$

которая уже не решается явно. Можно однако сделать выводы общего характера и не зная точно явного вида функций  $a$  и  $b$ . В этой ситуации принято говорить о мягкой модели - модели, поддающейся изменениям (за счет выбора функций  $a$  и  $b$  в нашем примере).

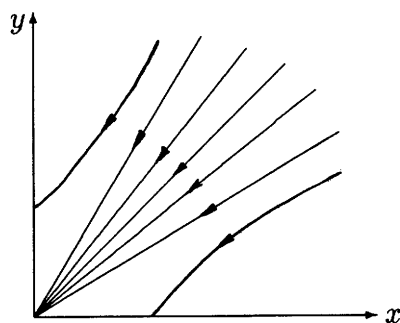


Рис. 3. Нереализуемая модель войны.

Общий вывод в данном случае есть утверждение о структурной устойчивости исходной модели: изменение функций  $a$  и  $b$  изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости  $\{x, y\}$  (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод этот состоял в том, что положения « $x$  выигрывает» и « $y$  выигрывает» разделены нейтральной линией «обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время». Топологический тип системы на плоскости  $\{x, y\}$  не меняется при изменении функций  $a$  и  $b$ : изменение приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. 2). Этот вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. 3. Утверждается, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций  $a$  и  $b$ . Таким образом, мы можем сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида жёсткой модели: выводы справедливы для мягкой модели.

Рассмотренный пример позволяет дать определение структурной устойчивости системы:

система, описываемая уравнениями (3) при заданных значениях функций  $b_i(X) = b_i^0(X)$  и  $a_{ik}(X) = a_{ik}^0(X)$  называется структурно устойчивой, если для любого состояния  $|X\rangle = |q_1^t, q_2^t, q_3^t, \dots, q_N^t\rangle$ , вероятность ее нахождения в этом состоянии максимально возможная среди всех значений вероятности, вычисляемой для различных функций  $b_i(X) \neq b_i^0(X)$  и  $a_{ik}(X) \neq a_{ik}^0(X)$ .

С формальной точки зрения это определение эквивалентно задаче о минимуме величины

$$\Phi_0(L) = \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_N \Psi_0^L(X), \quad (55)$$

рассматриваемой как функционал полей  $b_i(X)$  и  $a_{ik}(X)$ ,  $\Phi_0(L) \equiv \Phi_0[b_i(X); a_{ik}(X); L]$ . В такой постановке задачи неизменность топологического типа системы соответствует неизменности индекса оператора  $L$  (т.е. величины  $\text{index } \hat{L}$ ) при малых изменениях полей  $b_i(X)$  и  $a_{ik}(X)$  «вблизи» значений  $b_i(X) = b_i^0(X)$  и  $a_{ik}(X) = a_{ik}^0(X)$ , определяемых из уравнений:

$$\frac{\delta}{\delta b_i(X)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_N \Psi_0^L(X) = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}(X)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \dots dq_N \Psi_0^L(X) = 0 \quad (57)$$

Таким образом,  $b_i^0(X)$  и  $a_{ik}^0(X)$  представляют собой «классические» значения полей  $b_i(X)$  и  $a_{ik}(X)$ , реализующие экстремум функционала (55). Естественно предположить, что

$$\Xi = \int Db_i Da_{ik} \Phi_0[b_i(X), a_{ik}(X)] \quad (58)$$

где  $Db_i Da_{ik}$ -мера на пространстве полей  $b_i(X); a_{ik}(X)$ , представляет собой величину эквивалентную статистической сумме, или производящему функционалу квантовой теории поля. Легко видеть, что соотношение (58) может быть преобразовано к виду

$$\Xi = a \int Db_i Da_{ik} \exp\left(-\frac{1}{a} \Phi_0[b_i(X), a_{ik}(X)]\right) + const \quad (59)$$

совпадающему по форме с соответствующими выражениями квантовой теории поля. Действительно, полагая, что параметр  $a \rightarrow \infty$  и разлагая подинтегральное выражение в (59) в ряд, получим, что соотношения (58) и (59) совпадают при  $const = -a \int Db_i Da_{ik}$ . В дальнейшем не будем интересоваться значением этой постоянной и будем записывать (59) в виде:

$$\Xi = a \int Db_i Da_{ik} \exp\left(-\frac{1}{a} \Phi_0[b_i(X), a_{ik}(X)]\right) \quad (60)$$

имея при этом ввиду, что параметр  $a > 0$ , который будет определен ниже весьма велик  $a \rightarrow \infty$ . Дальнейшие вычисления удобно проводить, введя собственные функции  $Y_{\mu\nu}^{(a)}(X)$  оператора  $\hat{\Omega}_i(\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu})$ , отвечающие собственным значениям  $\vartheta^a(X)$ :

$$\{\hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu k}^{\mu})\} Y_{\mu k}^{(a)}(X) = \vartheta^a(X) Y_{i\nu}^{(a)}(X) \quad (61)$$

$$\Gamma_{\nu\mu k}(X) = a_{\nu\epsilon}(X) \Gamma_{\mu k}^{\epsilon}(X)$$

Используя (61), запишем  $\Phi_0(L) \equiv \Phi_0[b_i(X); a_{ik}(X); L]$  в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0[b_i(X); a_{ik}(X); L] &= \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \text{Sp}\{\hat{\Omega}_i(\delta_{\mu}^{\nu} b_k + \Gamma_{\mu k}^{\nu})\}^{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ \sum_a \vartheta^a(X) \right\}^{\frac{N}{2}} = \end{aligned} \quad (62)$$

$$= \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ \sum_a Y_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) \right\}^{\frac{N}{2}}$$

Рассмотрим соотношение (62) при любых функциях  $Y_{\mu\nu}^{(a)}(X)$ . Для этого, используя (62) запишем (60) в виде:

$$\Xi = a \int Db_i Da_{ik} DY_{\mu\nu}^a \delta(Q[Y]) \exp\left\{-\frac{1}{a} \Phi_0[b_i(X), a_{ik}(X), Y_{\mu\nu}^b(X)]\right\} \quad (63)$$

$$Q[Y] \equiv [\{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) - \vartheta^a(X) Y_{iv}^{(a)}(X)]$$

Здесь  $\Phi_0[b_i(X), a_{ik}(X), Y_{\mu\nu}^b(X)]$  определено соотношением (62). Представляя дельта-функцию в виде

$$\delta(Q[Y]) = \int D\Delta_{\mu\nu}^a \exp\{-\Pi[\Delta_{\mu\nu}^b, Y_{\mu\nu}^b(X)]\}$$

$$\Pi[\Delta_{\mu\nu}^b, Y_{\mu\nu}^b(X)] \equiv [\Delta_{iv}^a \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) - \Delta_{iv}^a \vartheta^a(X) Y_{iv}^{(a)}(X)] \quad (64)$$

получим, что (63), (64) определяют теорию для трех тензорных  $\Delta_{\mu\nu}^b(X)$ ,  $Y_{\mu\nu}^b(X)$ ,  $a_{\mu\nu}(X)$  полей, одного векторного поля  $b_i(X)$  и с неквадратичным «функционалом действия» (62), (63). Дальнейшее упрощение возможно, если предположить, что число  $N \gg 1$ . В этом случае функционал (62) можно упростить:

$$\Phi_0 \equiv \alpha(N) \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ \sum_a Y_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) \right\}^{\frac{N}{2}} =$$

$$= \alpha(N) \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ c + \sum_a Y_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) - c \right\}^{\frac{N}{2}} \approx$$

$$\approx (1 - \frac{N}{2}) c^{\frac{N}{2}} V_N + \frac{N\Lambda}{2c} c^{\frac{N}{2}}, \text{ где } c > 0, \alpha(N) \equiv \frac{2}{N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}}, \quad (65)$$

$$\Lambda \equiv \alpha(N) \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ \sum_a Y_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) \right\};$$

$$V_N \equiv \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Используя (65) для производящего функционала (60), получим

$$\Xi = a \int Db_i Da_{ik} \exp\left(-\frac{1}{a} \left[ \left(1 - \frac{N}{2}\right) c^{\frac{N}{2}} V_N + \frac{N\Lambda}{2c} c^{\frac{N}{2}} \right]\right) \quad (66)$$

Выбирая связь параметров  $a$  и  $c$  в виде  $a = \frac{N}{2} c^{\frac{N}{2}-1}$ , для производящего функционала (66) найдем

$$\Xi = C \int Db_i Da_{ik} \exp(-\Lambda) \quad (67)$$

$$C \equiv \frac{N}{2} c^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(\frac{N-2}{N} c V_N\right)$$

$$\Lambda \equiv \alpha(N) \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_N \left\{ \sum_a Y_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) \right\};$$

Дальнейшее преобразование соотношения (67) соответствует переходу к независимым переменным  $Y_{\mu\nu}^{(a)}(X)$  и эквивалентно переходу от (62) к (64).

$$\Xi = C \int Db_i Da_{ik} DY_{il}^b D\Delta_{ik}^a \exp(-\Lambda[b_i; a_{ik}; Y_{kl}^b] + \Pi[Y_{kl}^b; \Delta_{qr}^c]) \quad (67)$$

$$\Pi[\Delta_{\mu\nu}^b, Y_{\mu\nu}^b(X)] \equiv [\Delta_{iv}^a \{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \} Y_{\mu k}^{(a)}(X) - \Delta_{iv}^a \vartheta^a(X) Y_{iv}^{(a)}(X)] \quad (68)$$

Функционалы  $\Lambda[b_i; a_{ik}; Y_{kl}^b]$  и  $\Pi[Y_{kl}^b; \Delta_{qr}^c]$  квадратичны по полям  $Y_{kl}^b(X); \Delta_{qr}^c(X)$ . Проводя в (67) интегрирование по  $Y_{kl}^b(X)$  и сохраняя в окончательных выражениях только неотрицательные степени оператора  $\{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \}$  найдем:

$$\Xi = C \int Db_i Da_{ik} D\Delta_{ik}^a \exp(-\Theta[b_i; a_{ik}; \Delta_{kl}^b]) \quad (69)$$

$$\Theta \equiv \frac{\alpha_N}{4} \int \sqrt{g} dX \left\{ \sum_a \Delta_{vi}^{(a)}(X) \{ \hat{\Omega}_i (\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) - 2\delta_{\nu\mu} \delta_{ik} \vartheta^a(X) \} \Delta_{\mu k}^{(a)}(X) \right\}$$

$$dX \equiv dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

$$\frac{\alpha_N}{4} = \frac{1}{2N} (4\pi)^{-\frac{N}{2}}$$

Соотношения (69) соответствуют теории поля с квадратичным по полям  $b_i(X); \Delta_{\mu\nu}^d(X)$  «функционалом действия»  $\Theta[b_i; a_{ik}; \Delta_{kl}^b]$ . Это обстоятельство позволяет проинтегрировать по полям  $b_i(X)$ . В результате получим

$$\Xi = C \int Da_{ik} D\Delta_{ik}^a \exp(-S[a_{ik}; \Delta_{kl}^b]) \quad (70)$$

$$S[a_{ik}; \Delta_{kl}^b] = \int \sqrt{g} dX \left\{ \sum_a G_{\alpha\beta\mu\nu\gamma\sigma}(\Delta, a_{ik}) \hat{D}_\alpha \Delta_{\mu\gamma}^a \hat{D}_\beta \Delta_{\nu\sigma}^a + M_{\mu\nu ik}(X, a_{ik}) \Delta_{\mu k}^a \Delta_{vi}^a; \right.$$

здесь  $G_{\alpha\beta\mu\nu\gamma\sigma}(\Delta, a_{ik})$  довольно сложным образом выражается через поля  $\Delta_{\mu\nu}^\beta(X), a_{ik}(X), \Gamma_{\mu\nu k}(X)$ . Тензор  $M_{\mu\nu\alpha\beta}(X, a_{ik})$  имеет вид

$$M_{\mu\nu\alpha\beta}(X, a_{ik}) \propto \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{всем} \\ \text{пере-} \\ \text{стан-} \\ \text{овкам}}} \beta_k \Gamma_{\mu\nu i_k} \Gamma_{i_k \alpha\beta} + a \delta_{\nu\mu} \delta_{ik} \vartheta^a(X) \quad (71)$$

Здесь  $a, \beta_k$ -числа, которые можно вычислить непосредственно. Анализ теории поля, основанной на соотношении (71), несмотря на внешнюю сложность, идеологически ничем не отличается от известной теории полей, принимающих значения на многообразии отличном от  $R^n$  [13]. Остановимся коротко (следуя [10]) на простейших моделях таких полей и методах анализа возникающих при этом задач.

Будем рассматривать сейчас теории, в которых поля принимают значения в многообразии, обладающем нетривиальной топологией. Такие поля возникают в различных ситуациях. В частности, известно [10,11,13], что локально

равновесное состояние описывается полем, принимающим значения в пространстве вырождения  $T$ . Динамика локально равновесного состояния задается потенциалом, вид которого в значительной степени определяется свойствами симметрии рассматриваемой системы. Аналоги локально равновесных состояний принято называть голдстоуновскими полями. Таким образом, голдстоуновские поля принимают значения в многообразии основных состояний  $T$ . Если вырождение основных состояний полностью обусловлено действием группы внутренних симметрий  $G$  (группа  $G$  транзитивно действует на  $T$ ), то многообразие  $T$  можно отождествить с факторпространством  $G/H$ , где  $H$  - группа ненарушенных симметрий. В этом случае голдстоуновские поля принимают значения в однородном многообразии  $G/H$ . Голдстоуновские поля естественно считать медленно меняющимися. Это позволяет записать потенциал голдстоуновских полей в виде

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \sum_{i,j=1}^M g_{ij}(\vec{\phi}) \text{grad}_i \vec{\phi} \text{grad}_j \vec{\phi} \quad (72)$$

Здесь  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)$  - локальные координаты на многообразии основных состояний  $T$ ,  $g_{ij}(\phi)$  метрический тензор на многообразии  $T$ . Предполагается, что это многообразие имеет размерность  $M$ . Рассмотрим в качестве примера потенциала

$$V[\vec{\phi}] = \int d\vec{x} \{(\text{grad} \vec{\phi})^2\} \quad (73)$$

для голдстоуновских полей. Здесь значения поля  $\vec{\phi}(\vec{x})$  связаны соотношением  $\sum_{i=1}^M \phi_i^2 = a^2$  (лежат на сфере  $S^{M-1}$ ). Переходя на сфере к стереографическим координатам  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{M-1}$ , получаем для потенциала (73) выражение

$$V[\vec{\pi}] = 2a^4 \int d\vec{x} \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{M-1} \text{grad}_i \pi^k \text{grad}_i \pi^k}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)} \quad (74)$$

(стереографические координаты связаны с  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)$ ) соотношением

$$\phi^k = 2a^2 \frac{\pi^k}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)}, 1 \leq i < M, \phi^M = a \frac{(a^2 - \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)}{(a^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \pi^i \pi^i)} \quad (74^1)$$

Потенциал (73) очевидным образом инвариантен относительно группы  $SO(M)$ . Поэтому то же можно сказать о потенциале (74). Многообразие  $T$  представляет собой риманово многообразие.

В случае, если вырождение основного состояния обусловлено действием группы, т.е.  $T = G/H$ , риманова метрика на  $T$  должна быть инвариантной относительно группы  $G$ . Это означает, что тензорное поле  $g_{ij}(\phi)$  полностью определяется своими значениями в какой-то точке  $\vec{\phi}_0$  многообразия  $T$ . Более того, даже в этой точке тензор  $g_{ij}(\phi)$  не может быть выбран произвольным образом - он должен быть инвариантным относительно стационарной группы  $H$



в этой точке. Если  $G=SO(N)$ ,  $H=SO(N-1)$ ,  $G/H=S^{N-1}$  то для полей, принимающих значения на сфере  $S^{N-1}$ , существует единственный (с точностью до множителя)  $SO(N)$ -инвариантный потенциал вида (73) (в стереографических координатах он принимает форму (74)).

Остановимся теперь на топологических интегралах движения в теориях с нелинейными полями. При рассмотрении полей с конечной энергией естественно считать, что эти поля имеют предел при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}_0 \quad (75)$$

Поле  $\vec{\phi}(\vec{x})$  можно рассматривать как отображение пространства  $R^3$  в  $T = G/H$ . Условие (75) означает, что это отображение может быть продолжено в непрерывное отображение на сферу  $S^3$ . Таким образом два голдстоуновских поля  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  и  $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_N)$  разделены бесконечно высоким энергетическим барьером, если соответствующие отображения сфер негомотопны друг другу. Иными словами, топологический тип голдстоуновского поля определяется гомотопическим классом отображения сферы  $S^3$  в  $T = G/H$ . В случае, если пространство  $T$  односвязно (т.е. если отображение сферы  $S^1$  в  $T$  гомотопно нулю или, что то же самое группа  $\pi_1(R) = 0$ ), можно отождествить это множество гомотопических классов с группой  $\pi_3(R) = \pi_3(G/H)$ . В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда  $G = SO(N)$ ,  $H = SO(N-k)$ . В этом случае многообразие основных состояний представляет собой так называемое многообразие Штифеля  $V_{N,k}$ . Известно [13], что

$$\pi_1(V_{N,k}) = 0 \quad \text{при } N > k + 1 \text{ т.е. пространство } T = V_{N,k} \text{ односвязно.}$$

Тогда

$$\pi_3(V_{N,k}) = A, \text{ при } k=N-3, \text{ где } A - \text{циклическая группа}$$

Таким образом в рассматриваемой модели существуют топологические дефекты. Это утверждение есть частный случай более общего утверждения [10], согласно которому  $\pi_2(R) = \pi_1(H)$ . При этом группа  $\pi_1(H)$  изоморфна прямой сумме  $r$  экземпляров группы целых чисел  $Z$  и конечной циклической группе  $Z_m$  вида  $Z_m = Z_{m_1} + Z_{m_2} + \dots + Z_{m_k}$ .

Анализ теории поля с «действием» (70) аналогичен рассмотренному. Действительно, поле  $\Delta_{\mu\nu}^\beta(X)$  задает отображение риманова многообразия  $\Pi^N$  с метрическим тензором  $a_{ik}(X)$ , коэффициентами связности  $\Gamma_{\mu\nu\kappa}(X)$ , на многообразие с метрическим тензором  $G_{\alpha\beta[\mu\nu\gamma\sigma]}(\Delta, a_{ik})$ . (В квадратные скобки поставлены индексы, относящиеся к пространству  $\Pi^N$ ). Величина  $M_{\mu\nu\alpha\beta}(X, a_{ik})$  представляет собой тензор эффективных масс поля  $\Delta_{\mu\nu}^\beta(X)$ . Отметим, что при получении выражения (70) предполагалось, что величины  $\vartheta^a(X)$  не зависят от поля  $b_i(X)$ . Это предположение выполненное, при  $\vartheta^a(X) \rightarrow 0$ , в общем случае, очевидно, не справедливо. При  $\vartheta^a(X) \neq 0$  под  $\vartheta^a(X)$ , которые входят в соотношения (68)-(71), следует понимать

собственные числа оператора  $\hat{\Omega}[b_i(X), a_{ik}(X)] \equiv \{ \hat{\Omega}_i(\delta_{\nu\mu} b_k + \Gamma_{\nu\mu k}) \}$ , вычисленного при заданных конкретных значениях полей  $b_i(X) = b^0_i(X), a_{ik}(X) = a^0_{ik}(X)$ . Так, например, для описанной выше модели войны следует положить  $b^0_i(X) = \begin{pmatrix} ay \\ bx \end{pmatrix}, a^0_{ik}(X) = 0$ . В указанных приближениях задача о поведении и структурной устойчивости автономной системы с внешним белым шумом сводится к анализу задачи о нахождении массивного тензорного поля  $\Delta^{(\beta)}_{\mu\nu}(X)$ , принимающего значения на нелинейном многообразии с метрическим тензором  $G_{\alpha\beta[\mu\nu\gamma\sigma]}(\Delta, a_{ik})$ . В общем случае задача о поведении и структурной устойчивости автономной системы с внешним белым шумом сводится к построению теории поля для трех тензорных  $\Delta^b_{\mu\nu}(X), Y^b_{\mu\nu}(X), a_{\mu\nu}(X)$  полей, одного векторного поля  $b_i(X)$  с не квадратичным «функционалом действия» (62),(63) Для анализа задач этих классов в последнее время разработаны мощные методы [10,11,13].

## Автономные системы с внешним белым шумом при N=2.

Построенная в предыдущих разделах теория ,в силу своей общности , технически достаточно сложна при конкретных ее применениях. Задача существенно упрощается для случая N=2.В этом случае удобно провести весь анализ структурной устойчивости заново, не прибегая к помощи полученных выше общих соотношений. Действительно для системы , описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -b_1(q_1, q_2) + \zeta_1(t)\psi_{11}(q_1, q_2) + \zeta_2(t)\psi_{21}(q_1, q_2) \\ \dot{q}_2 &= -b_2(q_1, q_2) + \zeta_1(t)\psi_{12}(q_1, q_2) + \zeta_2(t)\psi_{22}(q_1, q_2) \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta_1(t) \rangle &= \langle \zeta_2(t) \rangle = 0 \\ \langle \zeta_1(t)\zeta_1(t') \rangle &= A_{11}\delta(t-t') \\ \langle \zeta_1(t)\zeta_2(t') \rangle &= A_{12}\delta(t-t') \\ \langle \zeta_2(t)\zeta_1(t') \rangle &= A_{21}\delta(t-t') \\ \langle \zeta_2(t)\zeta_2(t') \rangle &= A_{11}\delta(t-t') \end{aligned} \quad (77)$$

из (29) следует, что нулевой коэффициент Сили , определяющий вероятность нахождения системы, в данном состоянии  $|X\rangle = |q_1, q_2\rangle$ , имеет вид

$$\Psi_0^L(X) = (4\pi)^{-1} (E + \frac{1}{6} R); \quad (78)$$

здесь

$$E = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1,2} \partial_i b_i - \sum_{i,k=1,2} (a^{ik} b_i b_k - \partial_i \partial_k a_{ik}) - 2 \sum_{i,\mu=1,2} \Gamma_{ii}^\mu b_\mu \right) \quad (79)$$

$R(q_1, q_2), \Gamma_{\mu\nu}^\kappa(q_1, q_2)$  - скалярная кривизна и связность риманова пространства с метрикой

$$a_{\mu\nu}(q_1, q_2) = \sum_{i,k=1,2} A_{ik} \psi_{\mu i}(q_1, q_2) \psi_{\nu k}(q_1, q_2) \quad (80)$$

Используя (61), запишем  $\Phi_0(L) \equiv \Phi_0[b_i(X); a_{ik}(X); L]$  в виде:

$$\Phi_0[b_i(X); a_{ik}(X); L] = (4\pi)^{-1} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \left( \frac{1}{6} R + E \right) \quad (81)$$

$$g \equiv \det a_{ik}$$

При проведении дальнейших вычислений учтем то обстоятельство, что величины

$$\chi \equiv \frac{1}{4\pi} \int R \sqrt{g} dq_1 dq_2 \quad (82)$$

$$I \equiv \frac{1}{4\pi} \int \hat{D}_i b_i \sqrt{g} dq_1 dq_2 \quad (83)$$

(здесь и далее  $\hat{D}_i$  - ковариантная производная в метрике  $a_{ik}(X)$ ) представляют собой топологические инварианты и не зависят от полей  $b_i(X)$  и  $a_{ik}(X)$ :

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}} \int R \sqrt{g} dq_1 dq_2 = 0 \quad (84)$$

$$\frac{\delta}{\delta b_i} \int \hat{D}_i b_i \sqrt{g} dq_1 dq_2 = 0 = \frac{\delta}{\delta a_{ik}} \int \hat{D}_i b_i \sqrt{g} dq_1 dq_2 \quad (85)$$

Действительно, величина  $\chi$  есть эйлерова характеристика двумерного многообразия [11]. Величина  $I = \frac{1}{4\pi} \int \hat{D}_i b_i \sqrt{g} dq_1 dq_2$  представляет собой индекс оператора  $L$ . Последнее утверждение следует непосредственно из определения индекса оператора (35<sup>1</sup>) и выражений для коэффициентов  $E$  и  $E^+$

$$E = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1,2} \partial_i b_i - \sum_{i,k=1,2} (a^{ik} b_i b_k + \partial_i \partial_k a_{ik}) - 2 \sum_{i,\mu=1,2} \Gamma_{ii}^\mu b_\mu \right)$$

$$E^+ = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1,2} -\partial_i b_i - \sum_{i,k=1,2} (a^{ik} b_i b_k + \partial_i \partial_k a_{ik}) + 2 \sum_{i,\mu=1,2} \Gamma_{ii}^\mu b_\mu \right)$$

Известно [13], что векторное поле можно представить в виде дивергенции тензорного поля. Представим векторное поле  $b_i(X)$  в виде

$$b_i(X) = \hat{D}_\mu A_{i\mu} \quad (86)$$

Это представление носит весьма общий характер, однако оно неоднозначно: одни и те же значения поля  $b_i(X)$  получаются при различных значениях тензорного поля  $A_{\mu\nu}$ . Так, если выбрать тензор  $A_{\mu\nu}$  в виде

$$A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \Psi(X) + \varepsilon_{\mu\nu\kappa} B_{\kappa}(X)$$

то получим, что такое представление соответствует разложению 3-х мерного вектора  $b_i(X)$  на градиент и ротор. Такое представление уже однозначно. Формально неоднозначность представления (86) связана с тем, что тензор  $A_{\mu\nu}$  при  $N=2$  в общем случае содержит четыре независимых параметра. При заданном векторном поле  $b_i(X)$ , соотношение (86) позволяет определить лишь два из них. Для фиксации двух оставшиеся параметров на тензор  $A_{\mu\nu}$  следует наложить два дополнительных условия (калибровку). В общем случае тензор  $A_{\mu\nu}$  можно представить в виде:

$$A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \Psi(X) + \varepsilon_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X) \quad (87)$$

Здесь  $\varepsilon_{\mu\nu}(X) = \varepsilon_{\nu\mu}(X)$ ;  $\varepsilon_{ii} = 0$  - симметричный тензор с равным нулю шпуром,  $B_{\mu\nu}(X) = -B_{\nu\mu}(X)$  - антисимметричный тензор. В двумерном случае  $N=2$  тензор  $A_{\mu\nu}$  удобно разложить по матрицам  $\sigma_{\mu\nu}^{(a)}$ , которые связаны с матрицами Паули  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ :

$$A_{\mu\nu}(X) = \sigma_{\mu\nu}^{(a)} \psi_a(X) \quad (88)$$

$$a = 0, 1, 2, 3. \quad \sigma_{\mu\nu}^{(0)} = \delta_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x; \quad \sigma_{\mu\nu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y; \quad \sigma_{\mu\nu}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z$$

Тогда из (81) получим:

$$\Phi_0[\psi_a; a_{ik}] = (4\pi)^{-1} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \left( \frac{1}{6} R + E \right) = \frac{\chi}{6} + \frac{I}{2} + H[\psi_a; a_{ik}]$$

$$H[\psi_a; a_{ik}] = \frac{1}{8\pi} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \}, \quad (89)$$

$$\nabla_i^a \equiv \sigma_{ik}^a \partial_k - C_i^a; \quad C_i^a \equiv \Gamma_{ik}^l \sigma_{lk}^a + \Gamma_{kk}^l \sigma_{il}^a$$

где  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{lj} + \partial_j a_{li} - \partial_l a_{ij})$  - символы Кристоффеля,  $a^{ik}$  - матрица, обратная к  $a_{ik}$ . Из (56), (57) следует, что уравнения, определяющие структурно устойчивые поля  $\psi_a$ , имеют вид:

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \} = 0 \quad (90)$$

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \} = 0$$

Таким образом задача о поведении и структурной устойчивости автономной системы с внешним белым шумом при  $N=2$  сводится к вычислению тензорного поля  $A_{\mu\nu}$  (или, что эквивалентно, поля  $\psi_a$ ) на двумерном многообразии с метрикой  $a_{ik}$ .

В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда величины  $a_{ik}$  заданы и постоянны  $a^{ik} = a_0^{ik} = \text{const}$ . Не ограничивая общности можно положить  $a^{ik} = a_0^{ik} = \delta^{ik}$ .

Эта модель соответствует случаю, когда флуктуации не зависят от состояния системы и описывается уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -b_1(q_1, q_2) + \zeta_1(t) \\ \dot{q}_2 &= -b_2(q_1, q_2) + \zeta_2(t) \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta_1(t) \rangle &= \langle \zeta_2(t) \rangle = 0 \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_1(t') \rangle &= A_{11} \delta(t - t'); \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t') \rangle = 0 \\ \langle \zeta_2(t) \zeta_1(t') \rangle &= 0; \langle \zeta_2(t) \zeta_2(t') \rangle = A_{22} \delta(t - t'); \\ A_{11} &> 0; A_{22} > 0 \end{aligned} \quad (92)$$

Вид уравнений, определяющих структурно-устойчивые поля  $\psi_a$  (и, следовательно, поля  $b_i(X)$ ) зависит от выбора калибровки. Так выбрав калибровку вида

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \quad (\psi_0 = 0), \\ \sum_{k=1,2,3} \psi_k^2 &\equiv \psi_k^2 = 1 \end{aligned} \quad (93)$$

из (90) получим, что задача об определении полей  $\psi_k$ , обеспечивающих структурную устойчивость модели (91), (92) эквивалентна задаче нахождении минимума «энергии» векторного поля  $\vec{\psi}$  при условии  $(\vec{\psi} \cdot \vec{\psi}) = 1$ .

$$\int dq_1 dq_2 \{ \partial_i \vec{\psi} \partial_i \vec{\psi} + \lambda(q) (\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} - 1) \} = \min \quad (94)$$

Хорошо известно [14], что эта задача сводится к изучению нетривиальных решений уравнения

$$\Delta \vec{\psi} - (\vec{\psi} \Delta \vec{\psi}) \vec{\psi} = 0 \quad (95)$$

Решения этого уравнения разделены на сектора, отвечающие различным значениям топологического инварианта

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int dq_1 dq_2 \sigma_{\mu\nu}^{(3)} \vec{\psi} [\partial_{\mu} \vec{\psi} \times \partial_{\nu} \vec{\psi}] \quad (96)$$

здесь через «х» обозначает векторное произведение.

Уравнение (95) можно упростить специальным выбором переменных. Действительно, разрешенные уравнением связи  $(\vec{\psi} \cdot \vec{\psi})=1$  значения поля  $\vec{\psi}$  образуют поверхность единичной сферы. Поставим в соответствие точкам сферы декартовы координаты точек плоскости  $\omega_1, \omega_2$ , на которой, например, данная сфера лежит, касаясь южным полюсом (стереографические координаты (см. (74<sup>1</sup>)). Переменные  $\omega_1, \omega_2$  связаны с переменными  $\psi_a$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\psi_1}{1-\psi_3} \\ \omega_2 &= \frac{2\psi_2}{1-\psi_3} \end{aligned} \quad (97)$$

И наоборот, переменные  $\psi_1, \psi_2$  выражаются через переменные  $\omega_1, \omega_2$  по формулам (см. (74<sup>1</sup>)):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2\omega_1}{1+\omega_1^2+\omega_2^2} \\ \psi_2 &= \frac{2\omega_2}{1+\omega_1^2+\omega_2^2} \\ \psi_3 &= \frac{\omega_1^2+\omega_2^2-1}{1+\omega_1^2+\omega_2^2} \end{aligned} \quad (98)$$

Введем также полезные в дальнейшем функции

$$\begin{aligned} \omega(z) &\equiv \omega_1(z) + i\omega_2 \\ \psi(z) &\equiv \psi_1(z) + i\psi_2 \\ z &= q_1 + iq_2 \end{aligned} \quad (99)$$

Для решения уравнения (95) заметим, что достаточным условием его решения является условие самоуальности [14]:

$$\partial_{\mu} \vec{\psi} = \pm \sigma_{\mu\nu}^{(3)} \times \partial_{\nu} \vec{\psi} \quad (100)$$

Таким образом, любое решение уравнения (99) является решением уравнения (95). Обратное, вообще говоря, неверно: существуют решения уравнения (95), которые не являются решениями (100). Такие решения отвечают локальным экстремумам функционала (94), в то время, как решения уравнения (100) соответствуют глобальным экстремумам (100). Будем интересоваться лишь такими решениями. Уравнение (100) в переменных  $\omega_1, \omega_2$  имеет вид:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial q_1} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial q_2} = \mp \frac{\partial \omega_2}{\partial q_1} \quad (101)$$

Уравнения (101) представляют собой условия аналитичности Коши-Римана  $\omega$  как функции от  $z^*$  (верхние знаки) или  $z$  (нижние знаки). Таким образом, любая аналитическая функция  $\omega(z)$  или  $\omega(z^*)$ , записанная в переменных  $\psi_a, q_1, q_2$  автоматически удовлетворяет уравнению (100) и, следовательно, уравнению (95). Образец решения для произвольного положительного  $Q=n$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \left[ \frac{z - z_0}{\lambda} \right]^n \\ \psi(z) &= \frac{\omega(z)}{1 + |\omega(z)|^2} \\ \psi_3 &= \frac{|\omega(z)|^2 - 1}{1 + |\omega(z)|^2} \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь  $\lambda$ -любое действительное число,  $z_0$  - любое комплексное число. Полученные решения представляют собой пример «непотенциальных» структурно устойчивых полей  $b_1(q_1, q_2), b_2(q_1, q_2)$  (явное выражение для этих полей легко получается из соотношений (86), (88), (93), (102)):

$$b_i(q_1, q_2) = \vec{\sigma}_{ik} \partial_k \vec{\psi} \quad (102^1)$$

Для получения «потенциальных» структурно-устойчивых полей рассмотрим калибровку  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . В этом случае, для определения полей  $\psi_0 = \Psi$  и  $\psi_3 \equiv A$  из (90), получим

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 0; \\ \Delta A &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

Решением уравнений (103), в частности, является чисто «потенциальное» поле

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2) &= Bq_1 + Cq_2 + Hq_1q_2 \\ A(q_1, q_2) &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

где  $B, C, H$ - произвольные постоянные.

Из (104) непосредственно следует вывод структурной устойчивости простейшей модели войны или сражения, записанной в безразмерных переменных. Действительно, уравнения этой модели (52), введением новых переменных

$$\begin{aligned}x &= \alpha q_1 \\y &= \beta q_2 \\ \alpha &= \sqrt{\frac{a}{b}} \beta\end{aligned}\tag{105}$$

могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -\sqrt{ab} q_2 \\ \dot{q}_2 &= -\sqrt{ab} q_1\end{aligned}\tag{106}$$

С другой стороны из (88) имеем

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} = Hq_2 + C \\ b_2 &= \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} = Hq_1 + B\end{aligned}\tag{107}$$

Тогда уравнения, описывающие структурно-устойчивую систему принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -Hq_2 - C + \zeta_1(t) \\ \dot{q}_2 &= -Hq_1 - B + \zeta_2(t)\end{aligned}\tag{108}$$

$$\begin{aligned}\langle \zeta_1(t) \rangle &= \langle \zeta_2(t) \rangle = 0 \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_1(t') \rangle &= A_{11} \delta(t - t'); \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t') \rangle = 0 \\ \langle \zeta_2(t) \zeta_1(t') \rangle &= 0; \langle \zeta_2(t) \zeta_2(t') \rangle = A_{22} \delta(t - t'); \\ A_{11} &> 0; A_{22} > 0\end{aligned}\tag{109}$$

Сравнение (108) и (106) показывает, что при  $H = \sqrt{ab}; C = B = 0$ , в отсутствии флуктуаций  $\zeta_1(t) = \zeta_2(t) = 0$ , уравнения, описывающие модель сражения(52) совпадает со структурно-устойчивыми уравнениями(108).

Таким образом, модель войны рассмотренная выше, структурно устойчива даже в случае внешних флуктуаций типа белого шума произвольной амплитуды, не зависящих от состояния системы.

## Диссипативные системы с внешним белым шумом при $N > 2$ .

Разработанный в предыдущем разделе метод можно применить, при некоторых предположениях, для описания диссипативных систем с внешним белым шумом при  $N > 2$ . Для того, чтобы показать это рассмотрим систему, описываемую уравнениями общего вида (3). Отвечающей такой системе нулевой коэффициент Сили, определяющий вероятность ее нахождения в данном



состоянии имеет вид (33). Предположим, что оператор  $\hat{\Omega}_i(\delta^\nu_\mu b_k + \Gamma^\nu_{\mu k})$ , входящий в соотношение (33) целиком определяется своими диагональными компонентами:

$$\hat{\Omega}_i(\delta^\nu_\mu b_k + \Gamma^\nu_{\mu k}) \approx \frac{1}{N^2} \delta^\nu_\mu \delta_{ik} \hat{\Omega}_r(b_r + \Gamma^q_{qr}) \quad (110)$$

Такое приближение, физически соответствует случаю «почти изотропного» риманова многообразия, задаваемого метрическим тензором  $a^{ik}$ . В частности приближенное равенство (110) может быть выполнено для конформно-плоских метрик [13].

$$a_{ik}(X) = S(X) \delta_{ik} \quad (110^1)$$

В приближении (110) оператор  $\hat{\Omega}_i(\delta^\nu_\mu b_k + \Gamma^\nu_{\mu k})$  может быть вычислен до конца. Действительно, используя соотношения

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_i &\equiv \hat{D}_i + B_i, \\ B_k &= -\frac{1}{2}(a^{-1})_{ik}(b_k + \partial_\mu a_{\mu k}), \\ \hat{D}_i B^k &= \partial_i B^k + \Gamma^k_{\mu i} B^\mu \end{aligned}$$

из (110) получим

$$\hat{\Omega}_i(\delta^\nu_\mu b_k + \Gamma^\nu_{\mu k}) \approx \frac{1}{N^2} \delta^\nu_\mu \delta_{ik} (E + \frac{1}{6} R) \quad (111)$$

Здесь  $R$ - скалярная кривизна риманова пространства с метрикой  $a^{ik}$ , а величина  $E$  определена соотношением (20)

$$E = \frac{1}{2}(\hat{D}_i b_i + a^{ik} b_i b_k) \quad (112)$$

При получении соотношения (112) отброшены не дающие вклада в нулевой коэффициент Сили слагаемые вида  $\partial_i \partial_k a_{ik}$ . Используя (111) для нулевого коэффициента Сили найдем :

$$\begin{aligned} \Psi_0^L(X) &= W(N) \text{Sp}\{\hat{\Omega}_i(\delta^\nu_\mu b_k + \Gamma^\nu_{\mu k})\}^{\frac{N}{2}} = \\ &= W(N) (E + \frac{1}{6} R)^{\frac{N}{2}} \text{Sp} \frac{1}{N^N} \delta^\nu_\mu \delta_{ik} = \\ &= \frac{W(N)}{N^{N-1}} (E + \frac{1}{6} R)^{\frac{N}{2}} \approx \\ &\approx \frac{W(N)}{N^{N-1}} \aleph^{\frac{N}{2}} + \frac{W(N)}{N^{N-2}} \aleph^{\frac{N}{2}-1} (a^{ik} b_i b_k + \frac{1}{6} R) \end{aligned} \quad (113)$$

Здесь  $\aleph \equiv \hat{D}_i b_i$ .

Описанные преобразования справедливы для произвольных систем. Для рассматриваемых ниже диссипативных систем предположим, что

$$\mathfrak{K} = \text{div} \vec{b} \equiv \hat{D}_i b_i = \mathfrak{K}_0 > 0 \quad (114)$$

где  $\mathfrak{K}_0 > 0$  - число, не зависящее от состояния системы. Тогда вероятность нахождения системы в данном состоянии с точностью до не зависящей от  $X$  постоянной имеет вид:

$$\Psi_0^L(X) \propto \frac{W(N)}{N^{N-2}} \mathfrak{K}_0^{\frac{N}{2}-1} (a^{ik}(X)b_i(X)b_k(X) + \frac{1}{6}R(X)) ; \quad (115)$$

$$N > 2$$

Соотношение (115) справедливо для «сильно диссипативных» систем :

$$\frac{N \max \left| a^{ik}(X)b_i(X)b_k(X) + \frac{1}{6}R(X) \right|}{\mathfrak{K}_0} \ll 1 \quad (116)$$

Аналогичное соотношение может быть получено для сильно флуктуирующих систем. Действительно, если

$$R(X) = R_0 = \text{const}$$

$$\frac{N \max |a^{ik}(X)b_i(X)b_k(X)|}{|R_0|} \ll 1 \quad (117)$$

то из (113) получим

$$\Psi_0^L(X) \propto \frac{W(N)}{N^{N-2}} R_0^{\frac{N}{2}-1} (a^{ik}(X)b_i(X)b_k(X)) ; \text{ для } N > 2 \quad (118)$$

Соотношение (117) служит определением систем с большими флуктуациями: под большими будем понимать такие флуктуации, для которых скалярная кривизна соответствующего риманова пространства велика в смысле определения (117). Дальнейшее преобразование соотношений (115), (118) эквивалентно по существу переходу от соотношения (86) к уравнениям(90) для двумерного  $N=2$  случая. Именно, представим поля  $b_i(X)$  в виде

$$b_i(X) = \hat{D}_\mu A_{i\mu} \quad (119)$$

В общем случае тензор  $A_{\mu\nu}$  можно представить в виде:

$$A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \Psi(X) + \varepsilon_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X) \quad (120)$$

Здесь  $\varepsilon_{\mu\nu}(X) = \varepsilon_{\nu\mu}(X)$ ;  $\varepsilon_{ii} = 0$  - симметричный тензор с равным нулю шпуром,  $B_{\mu\nu}(X) = -B_{\nu\mu}(X)$  - антисимметричный тензор. Тензор  $A_{\mu\nu}$  удобно разложить

по матрицам  $\Pi_{\mu\nu}^{(a)}$ , которые реализуют базис в пространстве действительных  $N \times N$  матриц:

$$A_{\mu\nu}(X) = \Pi_{\mu\nu}^a \psi_a(X) \quad (121)$$

Здесь  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, N, a = 1, 2, \dots, K; K \geq N$ ,  $K$ - число  $N \times N$  матриц базиса. Тогда из (115), (117) получим:

$$\Phi_0[\psi_a; a_{ik}] \propto \frac{W(N)}{N^{N-2}} \mathfrak{X}_0^{\frac{N}{2}-1} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a + \frac{1}{6} R \} \quad (122)$$

$$\nabla_i^a \equiv \Pi_{ik}^a \partial_k - C_i^a; \quad C_i^a \equiv \Gamma_{ik}^l \Pi_{lk}^a + \Gamma_{kk}^l \Pi_{il}^a$$

Это соотношение справедливо для «сильно диссипативных» (см. (116)) многомерных  $N > 2$  систем. Для сильно флуктуирующих систем (см. (117)) найдем:

$$\Phi_0[\psi_a; a_{ik}] \propto \frac{W(N)}{N^{N-2}} R_0^{\frac{N}{2}-1} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \} \quad (123)$$

$$\nabla_i^a \equiv \Pi_{ik}^a \partial_k - C_i^a; \quad C_i^a \equiv \Gamma_{ik}^l \Pi_{lk}^a + \Gamma_{kk}^l \Pi_{il}^a$$

где  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{lj} + \partial_j a_{il} - \partial_l a_{ij})$  - символы Кристоффеля,  $a^{ik}$  - матрица, обратная к  $a_{ik}$ . Из (122), (123) следует, что уравнения, определяющие структурно устойчивые поля  $\psi_a$ , имеют вид:

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a + \frac{1}{6} R \} = 0 \quad (124)$$

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a + \frac{1}{6} R \} = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \} = 0 \quad (125)$$

$$\frac{\delta}{\delta a_{ik}(q_1, q_2)} \int \sqrt{g} dq_1 dq_2 \{ a^{ik} \nabla_k^b \psi_b \nabla_i^a \psi_a \} = 0$$

для сильно диссипативных и сильно флуктуирующих систем соответственно. Таким образом задача о поведении и структурной устойчивости автономной системы с внешним белым шумом при  $N > 2$  сводится, как и в случае  $N = 2$ , к вычислению из уравнений (124), (125) тензорного поля  $A_{\mu\nu}$  (или, что эквивалентно, поля  $\psi_a$ ) на  $N$ -мерном многообразии с метрикой  $a_{ik}$ . В рассматриваемом здесь общем случае  $N > 2$ , построение базисных матриц  $\Pi_{\mu\nu}^{(a)}$  представляет собой отдельную, далеко нетривиальную задачу [15]. Однако, если предположить, что  $\Pi_{\mu\nu}^{(a)}$  образуют алгебру Клиффорда

$$\Pi^{(b)} \Pi^{(a)} + \Pi^{(a)} \Pi^{(b)} = I \delta^{ab}$$

где,  $I$ - единичная  $N \times N$  матрица, то из (124) получим для «сильно диссипативных» систем

$$\begin{aligned} a^{ik} \nabla_k^f \nabla_i^f \psi_a &= 0; \\ R_{ik} - \frac{1}{2} a_{ik} R &= -T_{ik}; \\ T_{ik} &= \nabla_i^f \psi_a \nabla_k^f \psi_a - \frac{1}{2} a_{ik} \nabla_r^f \psi_a \nabla_r^f \psi_a \end{aligned} \quad (126)$$

Уравнения , определяющие структурно-устойчивые поля  $b_i(X); a_{ik}(X)$  (125), для сильно флуктуирующих систем имеют вид

$$\begin{aligned} a^{ik} \nabla_k^f \nabla_i^f \psi_a &= 0; \\ T_{ik} &= \nabla_i^f \psi_a \nabla_k^f \psi_a - \frac{1}{2} a_{ik} \nabla_r^f \psi_a \nabla_r^f \psi_a = 0 \end{aligned} \quad (127)$$

Уравнения (126) представляют собой уравнения Эйнштейна и «полей материи»  $\psi_a$  для определения метрического тензора  $a_{ik}$  и полей  $\psi_a$  на  $N$ -мерном многообразии.

Таким образом задача об определении структурно -устойчивых полей  $b_i(X); a_{ik}(X)$  в многомерном  $N > 2$  случае сводится к решению уравнений Эйнштейна (126) в случае систем с сильной диссипацией (в определенном выше смысле) и к определению свободного (на многообразии с метрикой , определяемой условием  $T_{ik} = \nabla_i^f \psi_a \nabla_k^f \psi_a - \frac{1}{2} a_{ik} \nabla_r^f \psi_a \nabla_r^f \psi_a = 0$  ) векторного поля  $\psi_a$  .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1.Р.Балеску .Равновесная и неравновесная статистическая механика.,Ч1,2-М. Мир , 1978.
- 2.Г.Хакен Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах-М.,Мир,1985.
3. Г.Хакен Синергетика.,-М.,Мир,1979.
4. В.Хорстхемке , Р.Лефевр. Индуцированные шумом переходы. М.,Мир .1987.
- 5.W. Ebeling.,A.Engel.,Models of Evolutionary Systems and their Application to Optimization Problems. Syst.Anal.Model.Simul. 1986.V.3.P.377.
6. Ю.Л.Климонтович,Турбулентное движение и структура хаоса,М Наука, 1990
- 7.В.Н.Тронин ,Заметки об эволюции.Применение методов неравновесной статистической механики для анализ физических, экономических и социальных проблем. М..МИФИ. 199?.
- 8.В.И.Арнольд «Жесткие» и «мягкие» математические модели .Доклад на Научно-практическом семинаре «Аналитика в государственных учреждениях».Москва ,1997 г.
8. В.И.Арнольд «Жесткие» и «мягкие» математические модели .Доклад на Научно-практическом семинаре «Аналитика в государственных учреждениях».Москва ,1997 г.
- 9.Б.А.Дубровин,С.П.Новиков,А.Т.Фоменко.Современная.геометрия. ,Наука,1979

10. А.С.Шварц Квантовая теория поля и топология. М., Наука, 1989.
11. Б.С.де Витт. Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. В сб. Черные дыры, М., Мир, 1979.
12. В.Феллер., Введение в теорию вероятностей и ее приложения., М., Мир. 1984
13. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения., М., Эдиториал УРСС, 1998.
14. Р.Раджараман. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М., Мир 1985.
15. Е.Креммер. Размерная редукция в теории поля и скрытые симметрии в расширенной супергравитации. В сб. Введение в супергравитацию., М., Мир 1985.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Глава 1: Физика

Глава 2: Гидродинамический этап эволюции макроскопических систем

Введение

Типичные примеры систем на мезоскопическом этапе эволюции.

Задача о торговце.

Одномодовый лазер.

Динамика популяции.

Модель формирования общественного мнения.

Модель фазового перехода ферромагнетик - парамагнетик.

Модель формирования организованной преступности.

Качественный анализ поведения решений приведенных моделей.

Поляризация общественного мнения. Фазовый переход 2-го рода.

Формирование организованной преступности. Фазовый переход 1-го рода. Поляризация общественного мнения при наличии внешнего поля. Фазовый переход 1-го рода, индуцированный внешним полем.

Глава 3. Флуктуации

Общие положения. Белый шум.

Броуновское движение. Случайные процессы. Уравнение Фоккера-Планка.

Стационарные решения уравнения Фоккера-Планка. Явления перехода в флуктуирующей среде.

Система Ферхюльста в среде с белым шумом.

Глава 4. Эволюция. Эволюция эволюции.

Конкуренция и сосуществование.

Симбиоз.

Отношения хищник - жертва.

О возникновении сознания.

Модель возникновения сознания.Фазовый переход первого рода , индуцированный шумом.

Об эволюции сознания.

Глава 5.Другие проблемы, поддающиеся анализу.

Задачи адаптации

Теория страхования.

Конкуренция страховых компаний.

Теория защиты информации.

Глава 6.О топологически нетривиальных дефектах.

Заключение.

Приложение

Литература

Содержание