МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭКОНОМИКЕ И ПЛАНИРОВАНИЯ

# Микроэкономика — третий уровень

В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков

Новосибирск

2003

Учебник подготовлено при содействии НФПК – национального фонда подготовки кадров в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования.

# Оглавление

## 3. КЛАССИЧЕСКИЕ (СОВЕРШЕННЫЕ) РЫНКИ. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ ...154

## 4. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ЭКОНОМИКА И ЧАСТНОЕ РАВНОВЕСИЕ ....212

## 5. РИСК И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ....233

## 9. ОБЩЕСТВЕННЫЕ БЛАГА ..........................................................................397

## 10. РЫНКИ С АСИММЕТРИЧНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ ............................................449

## 11. МОНОПОЛИЯ ....475

## 12. ОЛИГОПОЛИЯ ....518

## 13. МОДЕЛИ НАЙМА ....572

## ПРИЛОЖЕНИЕ: ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕКООПЕРАТИВНЫХ ИГР ....626

# Введение

В настоящее время многие российские вузы перешли на двухступенчатую систему образования и предлагают программы подготовки магистров по специальности «Экономическая теория». Заметим, что курс микроэкономики входит в учебные программы любой экономической специальности, поскольку является базовым и включен в образовательный стандарт в качестве обязательного. Представляется важным, чтобы преподавание продвинутых курсов микроэкономики поддерживалось учебниками *соответствующего* уровня. На российском книжном рынке мы видим изобилие пособий на русском языке, в которых можно найти содержательные экономические интерпретации микроэкономических понятий. Недостатком всех этих учебников является то, что рассуждения проводятся в основном с помощью графиков или простых арифметических примеров. При этом остается неясным, на какой модели обсуждаемого феномена базируется проводимый анализ, какие предположения следует сделать, чтобы получаемые относительно этой модели выводы были корректными. Данное пособие ставит своей задачей заполнение этой бреши, которая мешает движению в сторону модернизации экономического образования в России.

Все три автора предлагаемого пособия в течение многих лет читают лекции и ведут семинары по разным дисциплинам микроэкономической направленности на экономическом факультете Новосибирского государственного университета («Микроэкономика-3», «Методы микроэкономического анализа» и «Теория отраслевых рынков»). На основе этой практики и создавалось пособие. Содержащийся в этом учебном пособии материал в течение многих лет «обкатывался» в учебном процессе, причем существенная часть этого материала преподавалась студентам с начала 1990-х годов.

Теперь о том, как мы видим **использование пособия** в учебном процессе:

Несомненно, что весь материал не может быть прочитан в каком-то одном курсе лекций. Как нам представляется, большой объем пособия — это достоинство, позволяющее строить разные курсы. Тем самым, можно использовать единую логику, подход и систему обозначений в рамках серии курсов третьего уровня, покрывающих значительную часть микроэкономической теории. На экономическом факультете НГУ курсы, которые соответствуют содержанию пособия, читаются в течение трех-четырех семестров, что вполне достаточно для изучения существенной части пособия. Кроме того, мы вовсе не рассчитываем на то, что весь материал внутри каждой главы будет подробно изучен студентами. Такое использование пособия принципиально невозможно. Перед преподавателем стоит задача выбрать тот материал, который требуется с точки зрения логики преподаваемого курса и уровня подготовки студентов. При этом существует много различных вариантов использования содержащегося в главах материала.

В первую очередь это касается теорем. Многие из них несколько сложны для понимания либо их доказательства слишком техничны. Во-первых, есть вариант изучать доказательства только отдельных, особо значимых теорем, либо таких, которые доказываются сравнительно просто. Во-вторых, доказательство можно давать не целиком, а только давать представление о его идее, или, по крайней мере, опускать малоинтересные технические детали. В третьих, формулировки теорем тоже можно давать не очень строгие, ограничиваясь содержательно важными условиями. В четвертых, в изучении теории можно ограничится конкретными сравнительно простыми примерами, только ссылаясь на общие теоретические результаты, которые эти примеры иллюстрируют. Последний вариант особенно уместен в преподавании микроэкономических курсов, которые посвящены более конкретным экономическим проблемам, таких как «Теория отраслевых рынков» и «Экономика общественного сектора».

До некоторой степени подобный отбор материала уже осуществлен в нашем учебном пособии. Так, некоторые доказательства вынесены в приложения либо в отдельные параграфы, содержание которых не влияет на понимание остального материала. К примеру, вывод функции Неймана—Моргенштерна на основе аксиом может быть безболезненно пропущен, и его имеет смысл давать только в курсе, который специально посвящен этим вопросам.

Теперь о **принципах**, которых мы придерживались при написании учебника.

Материал учебника довольно типичен для преподавания микроэкономической теории в западных университетах. Мы ориентировались, прежде всего, на основную тенденцию развития экономической теории. Так, мы последовательно следуем *неоклассической парадигме*. Эта парадигма включает в себя методологический индивидуализм, принципиальную несравнимость предпочтений (с чем связана необходимость использования концепции оптимальности Парето), моделирование поведения экономических субъектов как целеполагающего и рационального, а также равновесный подход. Стараясь быть последовательными, мы оставили за кадром многие интересные альтернативные подходы (неравновесный анализ, кооперативные игры, модели частично рационального поведения, альтруизм, эволюционный подход и т.п.). Авторы основываются на том, что нет никаких других предпочтений, кроме индивидуальных. Соответственно нормативный аспект анализа ограничивается использованием концепции Парето (т.е. практически не рассматриваются вопросы справедливости, не рассматривается проблематика теории социального выбора, различные аксиоматические подходы к анализу благосостояния).

Далее, нашим приоритетом была логическая связность и последовательность изложения. Прежде, чем анализировать модель, следует ее по возможности четко изложить и оговорить все те предположения, которые используются в анализе. Предпочтение отдавалось тем моделям, которые опираются на общую логику. Основной концепцией в пособии является *концепция общего равновесия*. Другие модели должны конкретизировать и переинтерпретировать классическую модель общего равновесия, либо же являться ее естественными модификациями. Там, где этот основной принцип не может быть использован, следует применять формальную *теорию некооперативных игр*, т.е. представить модель в виде игры и анализировать равновесие этой игры (причем в качестве основной равновесной концепции выступает равновесие по Нэшу и его классические обобщения).

Базовый инструментарий дают первые четыре главы, посвященные поведению потребителя, поведению производителя, общему равновесию и квазилинейной экономике соответственно. Кроме того, в приложении к пособию излагаются сведения из теории игр, которые необходимы для понимания основного материала. (Это приложение целиком автономно и может быть использовано для обучения основным концепциям теории некооперативных игр).

В первой и второй главах, «Теория потребительского выбора» и «Теория производителя», рассматриваются классические задачи потребителя и производителя. Свойства и методы анализа этих задач являются обязательным багажом экономиста-теоретика. В силу этого данные разделы изложены довольно детально и последовательно.

В третьей главе, «Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие», особый акцент сделан на связи между оптимумом Парето и равновесием (двух так называемых теоремах благосостояния). Это одна из наиболее методологически отточенных частей пособия.

Четвертая глава «Квазилинейная экономика и частное равновесие» представляет собой «ноу-хау» авторов. Она систематизирует все те несвязные представления о частном равновесии, источником которых является Альфред Маршал, а также отдельные результаты по теории общего равновесия при квазилинейности функций полезности, содержащиеся в литературе. Введение понятия квазилинейной экономики позволило внести единообразие в изложение ряда классических микроэкономических моделей в других главах (моделей общественных благ с квазилинейными предпочтениями, модели оптимального налогообложения Рамсея, моделей рынков с несовершенной конкуренцией).

Пятая и шестая глава вводят риск в те модели, которые изложены в первой и третьей главах.

Перечисленные главы составляют первую часть пособия, «Классические рынки».

Вторая часть пособия, «Фиаско рынка», объединяет главы, основной тематикой которых являются несовершенства в работе рыночного механизма. Эта тематика обычно относится к разделу микроэкономической теории известному под названием *Public Economics* («Экономика общественного сектора»).

Седьмая глава, «Налоги», анализирует искажения, связанные с налогами, и проблему минимизации этих искажений (теорию оптимального налогообложения). В ней вводится ряд понятий, используемых в последующих главах второй части.

Восьмая и девятая глава посвящены экстерналиям и общественным благам. В них анализируются причины плохой работы некоординируемого рыночного механизма, а также различные механизмы координации.

Особенностью этих трех глав является то, что анализ практически нигде не выходит за рамки общего равновесия, что, как нам кажется, выгодно отличает наш подход от подходов других авторов учебников по микроэкономике. Благодаря этому, например, вопросы налогообложения излагаются существенно более аккуратно и логично, чем принято в курсах *Public Economics*.

Десятая глава, «Рынки с асимметричной информацией», рассматривает как случай двусторонней монополии (торга), так и конкурентного рынка (модель Акерлова).

Третья часть посвящена методам анализа несовершенной конкуренции — ситуации, когда участники обмена обладают рыночной властью, то есть способностью влиять на условия сделок, в которых они участвуют. При этом в центре внимания оказывается стратегическое поведение экономических субъектов, обладающих рыночной властью, поэтому широко используются инструментарий теории некооперативных игр.

В одиннадцатой и двенадцатой главе приводятся собственно методы анализа рыночных структур с несовершенной конкуренцией — монополии и олигополии. Мы обращаем внимание, прежде всего, на методы анализа последствий той или иной организации рынка в терминах уровней благосостояния. Рассуждения целиком проводятся в рамках моделей квазилинейной экономики, что обеспечивает корректность использования понятия излишка и анализа отдельного рынка вне связи с остальной экономикой.

Тринадцатая глава посвящена моделям найма и затрагивает темы асимметричной информации и теории контрактов.

Практически в каждом параграфе пособия читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения. В частности, это задачи на доказательство вариантов утверждений из основного текста, которые, как представляется, важны для успешного овладения методами микроэкономического анализа. В конце каждой главы приведены общие задачи к главе, опирающиеся на материал более чем одного параграфа.

Ссылки на литературу в пособии делятся на две категории. Внутри глав в сносках приведены исторические ссылки и ссылки на отдельные источники теоретических результатов. В конце пособия приводится список монографий и учебников, которыми мы пользовались при написании пособия.

Пособие также содержит «Математическое приложение» — сводку основных сведений из математики, которые используются нами в анализе, а также упоминавшееся выше приложение по теории некооперативных игр.

В заключение мы хотим поблагодарить всех тех, благодаря кому стало возможным появление этого учебного пособия.

Мы особо признательны *Сергею Гелиевичу Коковину*, вместе с которым мы работаем уже много лет, и которого вполне можно назвать одним из авторов. Так, он является соавтором учебного пособия «Методы микроэкономического анализа», легшего в основу нескольких глав данного пособия. Кроме того, ему принадлежит авторство большого количества использованных нами задач. Коковин оказывал нам активную поддержку на протяжении всего срока работы над пособием. В то же время, мы целиком берем на себя ответственность за возможные огрехи в изложении тех разделов, которые разрабатывали в сотрудничестве с С. Г. Коковиным, и отдаем себе отчет в том, что не со всеми изложенными взглядами он может согласиться. Также мы благодарны *Сергею Юрьевичу Ковалеву*, который вместе с нами преподавал и преподает те курсы, которые легли в основу пособия. Ему тоже принадлежит авторство ряда задач.

Благодарим также авторов тех учебников и научных работ по микроэкономике, которые оказали на нас большое влияние. Особо хотелось бы отметить «французскую школу», идущую от Мориса Аллэ (Жан Тироль, Жан-Жак Лаффон, Бернар Саланьи). В этом ряду особое место занимает *Эдмон Маленво*, учебник которого (Э. Маленво, «Лекции по микроэкономическому анализу», Наука, 1985) был одним из первых серьезных пособий по микроэкономике, переведенных на русский язык. В его переводе активно участвовал один из авторов, В. П. Бусыгин. Данный учебник особенно сильно повлиял на наше изложение теории экстерналий и общественных благ.

Кроме того, нам, конечно, не удалось избежать сильного влияния трех известных англоязычных учебников для магистратуры:

- Hal Varian, Microeconomic Analysis;
- Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston , Jerry R. Green, Microeconomic theory;
- David M. Kreps, A Course in Microeconomic Theory.

При работе над теорией монополии и олигополии большое впечатление на нас произвел учебник *Элмара Вольфштеттера*, который в то время еще не был издан и был доступен в виде отдельных электронных документов.

Всем им мы очень признательны.

Авторы будут благодарны читателям за любые замечания по структуре и содержанию курса.

# 1. Теория потребительского выбора

Микроэкономическая теория тесно связана с понятием выбора, его структурой и последствиями. Так потребители, основной объект изучения данного раздела, рассматриваются как агенты, выбирающие, что и в каких количествах потреблять и как распределять свое время. В основе модели потребителя лежит гипотеза о рациональном поведении, которая в общем случае сводится к выполнению двух основных принципов:

- Потребитель упорядочивает альтернативы/потребительские наборы (среди которых он осуществляет выбор) на основе предпочтений.
- Потребитель выбирает наилучший набор (в соответствие с этим упорядочением) среди доступных ему потребительских наборов.

Таким образом, чтобы можно было анализировать и предсказывать поведение потребителя, необходимо для каждой ситуации выбора описать способ упорядочивания потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы.

Так специфицированная модель позволяет изучать вопросы о том:

- каким соотношениям удовлетворяет оптимальный выбор потребителя;
- как изменяется выбор потребителя при изменении множества доступных ему потребительских наборов (так называемая сравнительная статика).

## *Блага, множество допустимых альтернатив*

Одним из базовых понятий экономической теории является понятие **блага**[1]. Вслед за Жераром Дебре[2] понятие блага в микроэкономике, в отличие от обыденного понимания, имеет достаточно широкое толкование. Предполагается, что блага различаются по

- *физическим характеристикам/видам благ*, (например хлеб и молоко, или бумага разного качества),
- *времени*, когда они становятся доступными (помидоры сегодня и завтра рассматриваются как разные блага),
- *местам их расположения* (сервелат, продаваемый в Москве и в Новосибирске, рассматриваются как разные блага),
- *состояниям природы* (зонтик завтра, в случае если завтра пойдет дождь отличается от зонтика завтра, если будет солнечная погода) и т.д.

Кроме того, при моделировании важно четко представлять информацию, которой обладают экономические агенты о свойствах благ. Классическая микроэкономика основывается на предположении, что потребители обладают *полной* информацией о свойствах благ еще *до момента* покупки[3]. Данное предположение значительно облегчает изучение процесса

---

[1] Может это и излишне, но, тем не менее, отметим, что понятие благо не несет оценочных суждений, типа хорошо-плохо, благо-вред и т.п., оно просто отсылает к способности удовлетворять некоторые потребности, или, наоборот, вызывать неудовлетворённость (как, скажем, наличие на полу сигаретных окурков и т.п.). Естественно, здесь и далее мы говорим только об экономических благах, т.е. о торгуемых на рынках.

[2] Debreu, Gerard, *Theory of Value*, NY:Wiley, 1959

[3] Иногда товары, о свойствах которых потребитель знает до момента выбора называют search goods. Подробное обсуждение данной классификации товаров смотри в работах: Nelson, P., *Information and Consumer*

выбора. В случае же когда информация о свойствах блага получается потребителем лишь *в процессе потребления, но не в момент покупки* (например, покупка подержанной техники с рук), описание процесса рационального выбора должно включать стратегический момент, обусловленный неопределенностью свойств/качества блага в момент выбора[4]. Ситуация еще больше усложняется если свойства/качество блага *ненаблюдаемы* как *в момент выбора*, так и *невыявляемы в процессе потребления* (например, с некоторой долей условности примером блага с таким свойством, являются медицинские услуги)[5].

Для того чтобы описать процесс выбора нам в первую очередь необходимо определиться с тем, что является непосредственным объектом предпочтения, выбора. Классический подход в качестве такового объекта рассматривает потребительские наборы (корзины). Этому подходу мы и будем следовать в дальнейшем[6]. Будем предполагать, что потребителю доступны $K$ благ. Через $x_k$ обозначим количество блага с номером $k$. Сделаем упрощающее предположение, что все рассматриваемые нами блага бесконечно делимы. С учетом этого предположения, под **потребительским набором** будем подразумевать вектор

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K,$$

где $k$-ая компонента означает количество потребляемого блага с номером $k$. Отметим, что, вообще говоря, $x_k$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В частности, если в качестве одного из товаров рассматривается количество часов труда предлагаемое индивидуумом на рынок, то предположение что $x_k<0$, отражает тот факт, что в данном случае относительного этого товара индивидуум является продавцом, а не покупателем. Под **множеством допустимых альтернатив** $X \subset \mathbb{R}^K$ будем понимать множество всех физически и/или институционально возможных наборов благ. Обычно предполагается, что множество $X$ замкнуто и ограниченно снизу, т.е. существует вектор $\hat{\boldsymbol{x}}$ такой, что для каждого $\boldsymbol{x}$ принадлежащего $X$ выполнено $\boldsymbol{x} \geqslant \hat{\boldsymbol{x}}$. Пусть, также, множество $X$ таково, что вместе с любым вектором $\tilde{\boldsymbol{x}}$ содержит все вектора большие чем $\tilde{\boldsymbol{x}}$, т.е. те $\boldsymbol{x}$ для которых выполнено $\boldsymbol{x} \geqslant \tilde{\boldsymbol{x}}$. Кроме того, будем предполагать, если не оговорено противное, что множество $X$ – выпукло и $0 \in X$. Замкнутость множества $X$ требование скорее техническое, и, при этом, не вызывает особых содержательных нареканий. Ограниченность снизу можно понимать следующим образом. Помимо «обычных» благ, потребляемых в неотрицательных количествах, в экономике присутствуют блага, для которых потребление может быть отрицательной величиной, например, труд, но его потребление потребителем не может превосходить естественно определенной величины – 24 часа. Свойство «продолжаемости вверх» означает, что, потенциально, потребителю доступно неограниченное количество блага. Конечно, этого свойства хотелось бы избежать, и во многих современных работах, например, по общему равновесию, оно отсутствует, но ряд основных классических результатов теории потребителя значительно проще формулируется и получается в случае его выполнения. Действительно, например, при отсутствии этого свойства мы уже не можем говорить о том, что выбор потребителя принадлежит бюджетной линии и

---

*Behavior*, Journal of Political Economy, Vol. 78, 1970 и Darby, M., and E. Karni, *Free Competition and the Optimal Amount of Fraud*, Journal of Law and Economics, Vol. 16, 1973.

[4] Товары с такой структурой информированности называют experience goods.

[5] Товары с такой структурой информированности называют credence goods.

[6] Вообще говоря, это не единственный подход к определению объекта (области определения) предпочтений. Так, например, Кельвин Джон Ланкастер («A New Approach to Consumer Theory», Journal of Political Economy, Apr. 1966) в качестве такой области определения предлагал рассматривать характеристики благ, а не сами блага.

др. Наконец, поясним значение свойства выпуклости. Выпуклость множества $X$ не такое безобидное и естественное предположение, как может показаться на первый взгляд. Существует достаточное число содержательных экономических вопросов, при изучении которых данное предположение неприемлемо. Например, некоторые из рассматриваемых благ могут потребляться в дискретных количествах. Подобная ситуация значительно усложняет дело и требует более тонких рассмотрений, на которых мы не останавливаемся. Свойство $0 \in X$ имеет достаточно прозрачный смысл, оно фактически означает, что потребитель *потенциально* может бездействовать, ни чего не потребляя. Такая ситуация не означает что это будет его выбором, но мы признаем за ним такую возможность. Иногда бывает удобно предполагать, что множество допустимых альтернатив представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}_+^K$ , т.е. $X = \mathbb{R}_+^K$ . В дальнейшем, в каждом конкретном случае, будет либо указано, либо ясно из контекста какой из вышеприведенных случаев предполагается.[7]

Как мы уже говорили выше, в основе действий потребителя лежат его предпочтения, в соответствии с которыми он осуществляет выбор между доступными ему наборами из множества допустимых альтернатив. Удобным языком для обсуждения концепции предпочтений является язык бинарных отношений, краткое описание которого дается в следующем параграфе.

## Бинарное отношение и его свойства

Чтобы мотивировать и пояснить понятие бинарного отношения рассмотрим известную детскую игру «камень-ножницы-бумага». Предполагается, что: камень побеждает ножницы (тупит), ножницы побеждают бумагу (режут), бумага побеждает камень (оборачивает), в остальных случаях, например, камень – камень боевая ничья. Будем говорить, что $x$ находится в отношении $\Re$ к $y$ и писать $x \,\Re\, y$, в случае если $x$ побеждает $y$, где $x$ и $y$ принадлежат множеству $\{$камень, ножницы, бумага$\}$. Естественно возникает мысль отождествить отношение $\Re$ с множеством, элементами которого являются упорядоченные пары[8] – (камень, ножницы), (ножницы, бумага), (бумага, камень) и только они. Отметим, что так определенное отношение (множество) $\Re$, очевидно, является подмножеством множества состоящего из всевозможных упорядоченных пар, где каждый элемент пробегает множество $\{$камень, ножницы, бумага$\}$.

Этот простой пример приводит нас к следующему определению бинарного отношения.

**Определение 1.**

Пусть $X$ – произвольное непустое множество. **Декартовым квадратом** множества $X$ назовем множество, обозначаемое $X \times X$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $(x, y)$, где $x, y$ пробегают все множество $X$. Под **бинарным отношением** $\Re$, заданным на множестве $X$, будем понимать, некоторое подмножество декартова квадрата $X \times X$, т.е. формально $\Re \subseteq X \times X$.

Другими словами $\Re$ — это некоторое множество упорядоченных пар $(x, y)$, где $x$ и $y$ — элементы множества $X$. Понятие бинарного отношения имеет достаточно простую графическую иллюстрацию (см. Рисунок 1.)

---

[7] Более подробное обсуждение понятия блага и множества допустимых альтернатив смотри в Маленво, Э., *Лекции по микроэкономическому анализу*, Москва, Наука, 1985, Гл. 1., §3 и Гл. 2., §4 .

[8] Выражение «упорядоченная пара» означает, что пары $(a, b)$ и $(b, a)$ считаются различными.

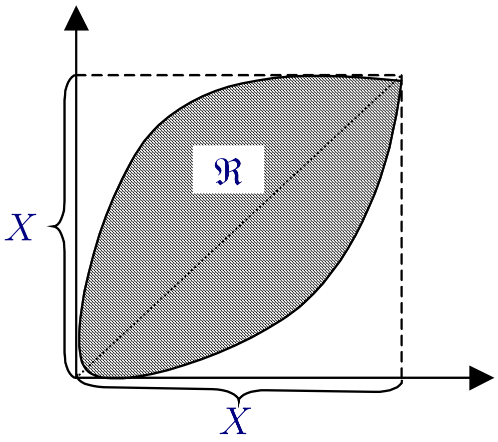


Рисунок 1. Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве $X$

Довольно часто в случае, когда пара $(x, y)$ принадлежит множеству $\Re$ вместо $(x, y)\in\Re$, пишут $x\Re y$ и говорят, что $x$ находится в отношении $\Re$ к $y$.

Определим теперь некоторые свойства бинарных отношений, которые мы в дальнейшем будем использовать при рассмотрении отношений предпочтения.

**Определение 2**[9].

Бинарное отношение $\Re$ называется

- **рефлексивным**, если $\forall\ x\in X\ x\Re x$
- **иррефлексивным**[10], если $\forall\ x\in X\ \urcorner(x\Re x)$
- **симметричным**, если $\forall\ x, y\in X\ x\Re y\Rightarrow y\Re x$
- **асимметричным**, если $\forall\ x, y\in X\ x\Re y\Rightarrow \urcorner(y\Re x)$
- **транзитивным**, если $\forall\ x, y, z\in X$
$$(x\Re y) \text{ и } (y\Re z)\Rightarrow (x\Re z)$$
- **отрицательно транзитивным**, если $\forall\ x, y, z\in X$
$$\urcorner(x\Re y) \text{ и } \urcorner(y\Re z)\Rightarrow \urcorner(x\Re z)$$
- **полным**, если $\forall\ x, y\in X$ выполнено либо $x\Re y$, либо $y\Re x$, либо и то и другое.

Проиллюстрируем введенные свойства бинарного отношения на примерах.

**Пример 1.**

Пусть $X$– множество студентов учащихся в этом учебном году в Новосибирском Государственном Университете, $\Re$ – отношение «выше ростом, чем» заданное на $X$. Посмотрим, каким указанным выше свойствам удовлетворяет данное бинарное отношение. Очевидно, что какого бы мы студента не взяли, его рост не может быть больше его же роста, т.е., например, 175 не может быть больше 175. Таким образом, это отношение является иррефлексивным и не удовлетворяет свойству рефлексивности. Это отношение также является

---

[9] Здесь и далее, под $\urcorner A$ мы подразумеваем отрицание $A$.

[10] Часто это свойство также называют нерефлексивностью, но при такой терминологии возникают довольно странные выражения типа – «бинарное отношение не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным». Что бы избежать этой игры слов, мы и используем выбранный вариант.

асимметричным и не является симметричным. Действительно, пусть $a$ рост некоторого студента $x$, а $b$ рост некоторого студента $y$ и $x\Re y$, т.е. студент $x$ имеет больший рост, чем $y$ ($a > b$). Тогда вполне понятно, что не верно ($b > a$), что и означает, что не верно $y\Re x$. Таким образом, с учетом произвольности выбора $x$ и $y$ получили желаемое. Проверим теперь, что данное отношение является транзитивным, из множества $X$ возьмем трех произвольных студентов $x, y, z$, чей рост составляет $a$, $b$ и $c$ соответственно, причем выполнено следующее: $a > b$ и $b > c$. Очевидно, что по свойству сравнения действительных чисел[11] мы имеем, что $a > c$. Это в точности означает, что $x\Re z$ и мы, таким образом, показали транзитивность $\Re$. Выполнение свойства отрицательной транзитивности мы проверим чуть позже, а сейчас перейдем к проверке свойства полноты. Как несложно понять, данное отношение не является полным, если среди студентов есть хотя бы два с одинаковым ростом. В этом случае ни один из этих двух студентов не будет выше другого и, таким образом, мы имеем нарушение полноты. Если же среди нашего множества $X$ нет ни одной пары студентов с одинаковым ростом, то введенное на $X$ отношение «выше ростом, чем» обладает свойством полноты.

⇐

**Пример 2.**

Пусть $X=\mathbb{R}^2_+$, на этом множестве задано отношение $\Re$ по правилу $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1,\, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 \geqslant\ y_1 + x_2$. Перед тем как отвечать на вопрос о том, каким свойствам удовлетворяет данное бинарное отношение, заметим, что $x_1 + y_2 \geqslant\ y_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant\ y_1 - y_2$, т.е. $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1,\, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant\ y_1 - y_2$. Как не сложно догадаться, данное бинарное отношение удовлетворяет тем же свойствам, что и отношение $\geqslant$ на действительной прямой, т.е. полнота, транзитивность, рефлексивность. Проверьте самостоятельно выполнение/невыполнение условий симметричности/асимметричности и отрицательной транзитивности.

⇐

**Замечание.** При проверке указанных выше свойств предпочтений следует быть осторожным и не делать поспешных выводов. Так если Вы установили, что отношение не является рефлексивным, то из этого, вообще говоря, не следует, что отношение является иррефлексивным. Та же ситуация возникает при рассмотрении связки свойств симметричность и асимметричность.

Эти определения также легко проиллюстрировать графически в духе Рисунка 1. Так, например, рефлексивность означает, что *вся* диагональ декартового квадрата $X{\times}X$ принадлежит $\Re$. Свойство симметричности означает, что множество $\Re$ симметрично относительно диагонали декартового квадрата. Полнота означает, что если мы «согнем» декартов квадрат по диагонали, то в итоге получим треугольник без выколотых точек.

Выше мы ввели и обсудили ряд часто используемых свойств бинарных отношение. Сейчас рассмотрим взаимосвязь между этими свойствами.

**Теорема 1.**

- Каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.
- Каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.
- Каждое иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение является асимметричным.

---

[11] Кстати, а каким свойствам удовлетворяет это бинарное отношение?

- Отношение $\Re$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда $\forall\ x, y, z \in X\ x\Re y \Rightarrow (x\Re z)$ или $(z\Re y)$.

***Доказательство***:

Доказательство свойств тривиально. С целью демонстрации техники доказательства мы докажем только третий пункт теоремы.

Предположим, противное, т.е. пусть отношение $\Re$ иррефлексивно, транзитивно, но не является асимметричным. Тогда найдется пара $x, y \in X$ такая, что $x\Re y$ и $y\Re x$. Так как отношение $\Re$ транзитивно, то из $x\Re y$ и $y\Re x$ следует $x\Re x$. Противоречие с иррефлексивностью.

■

**Пример 1. (**Продолжение**)**

Нам осталось проверить свойство отрицательной транзитивности. Для его проверки воспользуемся представлением этого свойства из только что доказанного утверждения. Для этого из множества $X$ возьмем трех произвольных студентов $x, y, z$, чей рост составляет $a$, $b$ и $c$ соответственно, причем выполнено $a > b$. В принципе, очевидно, что какой бы мы $c$ ни взяли справедливо, что либо $a > c$, либо $c > b$. Таким образом, мы имеем, что для данного отношения $\Re$ выполнено свойство отрицательной транзитивности.

⇐

Теперь, вооружившись понятием бинарного отношения, мы можем перейти к обсуждению концепции отношения предпочтения.

### Задачи

1. Предположим, условно, что существует всего два города, в каждом из которых продаются по три товара. Какова размерность пространства благ, исходя из определения блага по Дебре?

2. Пусть $X$ — множество всех ныне живущих людей на планете Земля. Проверьте выполнение следующих свойств

— полнота,

— рефлексивность,

— симметричность,

— транзитивность,

— отрицательная транзитивность

для следующих бинарных отношений, заданных на $X$:

a) "является потомком";

b) "является внуком";

c) "является родителем такого же числа детей, что и";

d) "состоит в браке с" (допуская полигамию);

e) "состоит в браке с" (предполагая моногамные отношения);

f) "состоит в родстве с";

g) "хотя бы раз в жизни думал о".

Пусть $X$ — множество населенных пунктов на планете Земля. Какими свойствами обладают следующие отношения:

a) "расположен восточнее" (в случае, если Земля круглая);

b) "расположен восточнее" (в случае если, Земля плоская и стоит на черепахах);

c) "имеет ту же численность, что и";

d) "имеет то же число безработных, что и".

3. Какими из свойств (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) обладает отношения $\mathcal{R}$, заданное на $\mathbb{R}^2_{++}$ (в случае, если отношение обладает свойством, предоставьте формальное доказательство, если же не обладает, то приведите пример показывающий это):

a) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$;

b) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geqslant \frac{x_2}{y_2}$;

c) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$;

d) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;

e) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;

f) $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} > \min\{ y_1, y_2\}$.

4. Определим отношение лексикографического упорядочения заданного на $\mathbb{R}^2_{++}$ следующим образом:

$$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2_{++} \quad (\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\ (x_1 > y_1) \text{ или } (\ x_1 = y_1,\ x_2 > y_2)\ ).$$

Каким свойствам (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) удовлетворяет данное отношение лексикографического упорядочения?

5. Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству рефлексивности, ни свойству иррефлексивности.

6. Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству симметричности, ни свойству асимметричности.

7. Покажите, что каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.

8. Приведите пример симметричного, но не рефлексивного бинарного отношения.

9. Покажите, что каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.

10. Несложно понять, что для любых высказываний $A$ и $B$ имеет место эквивалентность $(\urcorner A \Rightarrow \urcorner B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$. Используя этот факт, докажите, что отношение $\Re$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда $\forall\ x,\ y,\ z \in X\ x\Re y \Rightarrow (x\Re z)$ или $(z\Re y)$.

11. Не прибегая к исчислению высказываний (т.е. рассуждениям вида $(\urcorner A \Rightarrow \urcorner B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$), докажите, что для любого бинарного отношения $\mathcal{R}$свойство

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X\colon \boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y} \Rightarrow (\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{z} \text{ или } \boldsymbol{z}\mathcal{R}\boldsymbol{y})$$

эквивалентно свойству отрицательной транзитивности.

## *Неоклассические отношения предпочтения*

Отношение предпочтения является примером бинарного отношения заданного на множестве допустимых альтернатив $X$. В экономической теории предпочтение потребителя — единственная его характеристика, которая принимается во внимание при объяснении его поведения. Поэтому в дальнейшем в теории потребления мы отождествляем потребителя с его предпочтениями[12].

Будем строить теорию потребительского поведения на основе **строгого отношения предпочтения** $\succ$ — бинарного отношения, заданного на множестве допустимых альтернатив. Тот факт, что в случае двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $X$ для некоторого потребителя альтернатива $\boldsymbol{x}$ *лучше,* чем альтернатива $\boldsymbol{y}$ будет обозначаться как $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$. Традиционным для экономической теории является предположение о том, что строгое отношение предпочтения, на основе которого потребители упорядочивают альтернативы, *асимметрично* и *отрицательно транзитивно*. Эти предположения о свойствах отношения $\succ$ тесно связаны с понятиями *рациональности* потребителя, *непротиворечивости вкусов,* их *внутренней состоятельности*. В данном контексте свойство асимметричности предпочтения позволяет говорить о непротиворечивости вкусов потребителя. Свойство отрицательной транзитивности, в свою очередь, означает, что если некоторые две альтернативы сравнимы по отношению $\succ$, то любая третья альтернатива сравнима, по крайней мере, с одной из них по этому отношению. Как мы увидим далее, это свойство тоже тесно связано с непротиворечивостью выбора и полнотой предпочтений. Пока же на основе строгого отношения определим нестрогое отношение предпочтения и отношение эквивалентности.

**Нестрогое отношение предпочтения** $\succeq$ заданное на $X$ определяется следующим образом:

$$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X\ \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \urcorner\,(\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}).$$

Выражение $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, с учетом интерпретации отношения $\succ$ как отношения «лучше» на множестве допустимых альтернатив, может быть проинтерпретировано как отношение «не хуже».

**Отношение эквивалентности (безразличия)** $\sim$ заданное на $X$ определяется следующим образом:

$$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X\ \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \urcorner\,(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \text{ и } \urcorner\,(\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}).$$

---

[12] Судя по всему, строгое аксиоматическое описание концепции отношения предпочтения впервые появилось в работе Frish, R., *Sur un probleme d`economie pure*, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie 1, 16, 1926.

Естественно его интерпретировать, как следует из названия, как эквивалентность двух альтернатив, или, другими словами, безразличие потребителя между выборами любой из двух альтернатив при условии, что $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$.

**Множеством безразличия** $I(\boldsymbol{x})$, соответствующим точке $\boldsymbol{x} \in X$, называется множество точек эквивалентных $\boldsymbol{x}$: $I(x) = \{\boldsymbol{y} \in X \mid \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}\}$. Надеемся, что читатель узнал в этом математическом объекте **кривую безразличия**, известную ему из вводного курса микроэкономики.

Рассмотрим теперь, каким свойствам удовлетворяют введенные выше бинарные отношения.

**Теорема 2.**

Пусть $\succ$ – строгое (асимметричное и отрицательно транзитивное) отношение предпочтения заданное на $X$, тогда

(1) $\succ$ – транзитивно и иррефлексивно.

(2) $\succeq$ – полно, рефлексивно и транзитивно.

(3) $\sim$ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(4) Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ выполняется ровно одно из следующих соотношений:

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \text{ или } \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x} \text{ или } \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}.$$

(5) Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z \in X$

$$(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \sim z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succ z \text{ и } (\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \succ z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succ z.$$

(6) Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z \in X$

$$(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \sim z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succeq z \text{ и } (\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \succeq z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succeq z.$$

(7) Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z \in X$

$$(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \succ z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succ z \text{ и } (\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \succeq z) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succ z.$$

(8) Любые два множества безразличия либо не имеют общих точек, либо совпадают.

***Доказательство***:

Докажем свойства (1), (3) и (5). Остальные свойства доказываются подобно и оставляются читателю в качестве упражнения.

(1) Покажем транзитивность $\succ$. Предположим противное. Пусть существуют $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ такие, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \succ z$, но при этом $\urcorner(\boldsymbol{x} \succ z)$. Из асимметричности отношения $\succ$ из $\boldsymbol{y} \succ z$ следует $\urcorner(z \succ \boldsymbol{y})$. Из $\urcorner(\boldsymbol{x} \succ z)$ и $\urcorner(z \succ \boldsymbol{y})$ по свойству отрицательной транзитивности следует, что $\urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y})$. Противоречие.

Иррефлексивность следует из асимметричности.

(3A) Покажем, что отношение $\sim$ симметрично. Это следует непосредственно из определения $\sim$: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \text{ и } \urcorner(\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \urcorner(\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}) \text{ и } \urcorner(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}.$$

(3B) Покажем, что отношение $\sim$ рефлексивно. Пусть это не так, то есть существует $\forall\ \boldsymbol{x} \in X$, такой, что $\urcorner(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x})$. Из определения $\sim$ имеем $\urcorner(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x})$ или $(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x})$. Но это противоречит иррефлексивности отношения $\succ$.

(3С) Покажем, что отношение $\sim$ транзитивно. Рассмотрим такие $x, y, z \in X$, что $x \sim y$ и $y \sim z$. По определения $\sim$ имеем:

$$x \sim y \Leftrightarrow \urcorner(x \succ y) \text{ и } \urcorner(y \succ x),$$

$$y \sim z \Leftrightarrow \urcorner(y \succ z) \text{ и } \urcorner(z \succ y).$$

По свойству отрицательной транзитивности из $\urcorner(x \succ y)$ и $\urcorner(y \succ z)$ следует, что $\urcorner(x \succ z)$, а из $\urcorner(z \succ y)$ и $\urcorner(y \succ x)$ следует $\urcorner(z \succ x)$. Итак, мы имеем, что $\urcorner(x \succ z)$ и $\urcorner(z \succ x)$, что и означает, что $x \sim z$.

(5) Так как техника доказательства свойств $(x \succ y,\ y \sim z) \Rightarrow x \succ z$ и $(x \sim y,\ y \succ z) \Rightarrow x \succ z$ одинакова, докажем только первое. Итак, пусть $x \succ y,\ y \sim z$. По определению отношения $\sim$ из этого следует: $x \succ y$ и $\urcorner(y \succ z)$ и $\urcorner(z \succ y)$. Предположим противное, т.е. что $\urcorner(x \succ z)$. Тогда из $\urcorner(x \succ z)$ и $\urcorner(z \succ y)$ по свойству отрицательной транзитивности имеем: $\urcorner(x \succ y)$. Пришли к противоречию.

■

Из приведенной Теоремы видно, что система предпочтений $\{\succ, \succeq, \sim\}$ удовлетворяет всем свойствам, которым, исходя из экономической и житейской интуиции, должны удовлетворять предпочтения потребителя. В связи с особым местом, занимаемым этой системой отношений в микроэкономической теории, введем следующее определение.

**Определение 3.**

Систему предпочтений $\{\succ, \succeq, \sim\}$ заданную на $X$ назовем **неоклассической** если:

(1) отношение $\succ$ – асимметрично и отрицательно транзитивно;

(2) отношение $\succeq$ – полно и транзитивно;

(3) отношение $\sim$ – рефлексивно, симметрично, транзитивно

(4) $\forall\ x, y \in X\ \ x \succeq y \Leftrightarrow \urcorner(y \succ x)$

(5) $\forall\ x, y \in X\ \ x \sim y \Leftrightarrow \urcorner(x \succ y)$ и $\urcorner(y \succ x)$.

Существует две традиции построения теории поведения потребителя, различающиеся способом построения предпочтений индивидуума. Первая, которой мы и придерживаемся, берет за первичное – строгое отношение предпочтения (асимметричное и отрицательно транзитивное). Вторая же традиция исходит из нестрогого отношения предпочтения, которое по исходным предположениям удовлетворяет свойствам полноты и транзитивности. Обе эти традиции приводят к одной и той же неоклассической системе предпочтений, если строгое и нестрогое отношения предпочтения строятся на основе друг друга вышеуказанным способом ($x \succeq y \Leftrightarrow \urcorner(y \succ x)$). Это непосредственно следует из следующей теоремы:

**Теорема 3.**

(1) Пусть даны два отношения $\succeq$ и $\succ$ заданные на $X$, связанные соотношением: $x \succeq y \Leftrightarrow \urcorner(y \succ x)$. Определим отношения $\succeq^{\succ}$, $\succ^{\succeq}$, $\sim^{\succ}$ и $\sim^{\succeq}$ как,

$$x \succeq^{\succ} y \Leftrightarrow \urcorner(y \succ x),$$

$$(x \succ^{\succeq} y) \Leftrightarrow \urcorner(y \succeq x),$$

$$x \sim^{\succ} y \Leftrightarrow \neg(x \succ y) \text{ и } \neg(y \succ x)$$

$$x \sim^{\succeq} y \Leftrightarrow \neg(x \succ^{\succeq} y) \text{ и } \neg(y \succ^{\succeq} x).$$

Тогда, $\succeq^{\succ} = \succeq, \succ^{\succeq} = \succ$ и $\sim^{\succ} = \sim^{\succeq}$.

(2) Строгое отношение предпочтения $\succ$ является асимметричным тогда и только тогда, когда нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ полно.

(3) Отрицательная транзитивность строгого отношения предпочтения эквивалентна транзитивности нестрогого отношения предпочтения.

***Доказательство***:

(1) В принципе данное утверждение тривиально.

$x \succeq^{\succ} y \Leftrightarrow \neg(y \succ x) \Leftrightarrow x \succeq y$. Получили $\succeq^{\succ} = \succeq$.

$(x \succ^{\succeq} y) \Leftrightarrow \neg(y \succeq x) \Leftrightarrow (x \succ y)$. Получили $\succ^{\succeq} = \succ$.

$x \sim^{\succeq} y \Leftrightarrow \neg(x \succ^{\succeq} y)$ и $\neg(y \succ^{\succeq} x) \Leftrightarrow \neg(y \succ x)$ и $\neg(x \succ y) \Leftrightarrow x \sim^{\succ} y$. Получили $\sim^{\succeq} = \sim^{\succ}$.

(2$\Rightarrow$) Асимметричность строгого отношения предпочтения означает, что для любой пары $x, y \in X$ из $x \succ y$ следует, что $y \succ x$ неверно. Значит, для любой пары $x, y \in X$ либо $x \succ y$ неверно, либо $y \succ x$ неверно. Отсюда, пользуясь определением строгого отношения предпочтения, либо $x \preceq y$, либо $y \preceq x$. А это и есть полнота нестрогого отношение предпочтения.

(2$\Leftarrow$) Пусть теперь нестрогое отношение предпочтения полно, т.е. для любой пары $x, y \in X$ либо $x \preceq y$, либо $y \preceq x$. По определению строгого отношения это то же самое, что, либо $x \succ y$ неверно, либо $y \succ x$ неверно. Значит, из $x \succ y$ следует, что $y \succ x$ неверно. А это и означает асимметричность строгого отношения предпочтения.

(3) Очевидно, что отрицательная транзитивность строгого отношения предпочтения

$$\neg(x \succ z) \text{ и } \neg(z \succ y) \Rightarrow \neg(x \succ y)$$

эквивалентна транзитивности нестрогого отношения предпочтения:

$$(z \succeq x) \text{ и } (y \succeq z) \Rightarrow (y \succeq x).$$

■

**Замечание.** Поясним содержание данной теоремы. Смысл пункта (1) состоит в том, что система предпочтений, полученная на основе строгого отношения предпочтения, совпадает с системой предпочтений полученных на основе нестрогого отношения предпочтения, в случае если $x \succeq y \Leftrightarrow \neg(y \succ x)$. Общий смысл Теоремы состоит в том, что как выполнение свойств асимметричности и отрицательной транзитивности отношения $\succ$, так и выполнение свойств полноты и транзитивности отношения $\succeq$ приводит к одной и той же системе неоклассических предпочтений.

С первого взгляда все сделанные выше предположения и выводы из них кажутся естественными и соответствующими интуиции. Однако в действительности есть ряд примеров заставляющих относиться к ним достаточно осторожно. Укажем лишь некоторые из них:

- *Проблемы с определением эквивалентности*

Отметим, что отношение безразличия достаточно неоднородный объект. Фактически, наше отношение безразличия говорит об эквивалентности двух альтернатив, если:

- потребитель считает, что эти две альтернативы для него на самом деле *эквивалентны*. (Ну не гурман я, мне все равно, что съесть, что судак по-гасконски, что лапша по-китайски, все едино.)
- потребитель *ничего не знает* ни об одной из предложенных альтернатив, и, тем самым, не может их сравнивать. (А что вы предпочитаете: дурианы или рамбутаны?)
- предлагаемые альтернативы в принципе *не сравнимы* с точки зрения потребителя. В ситуации, когда он сталкивается с выбором из этих двух альтернатив, он предпочитает уклониться от выбора. (А ты кого больше любишь: папу или маму?)

В связи с этим возникает ряд вопросов, а что мы подразумеваем в действительности, когда говорим о безразличии между несколькими альтернативами? Должны ли мы при моделировании различать эквивалентность в зависимости от причин ее породивших? Ответы на эти вопросы однозначно не определены и далеко выходят за пределы данного курса. В данном пособии в дальнейшем мы будем придерживаться введенного выше определения. Также отметим, что содержательная сложность понятия эквивалентности также наследуется отношением $\succeq$, в силу того, что $\succeq = \succ \cup \sim$.

- *Проблемы с транзитивностью*

Рассмотрим следующий пример. Если мы попросим индивидуума сравнить стакан чая, куда положили один кристалл сахара, и стакан чая с двумя кристаллами, то практически всегда получим ответ о безразличии в выборе. Такой же ответ получим при сравнении стаканов с двумя и тремя кристаллами. Продолжим наш опрос достаточно долго, и, если будем настаивать на транзитивности, то придем к выводу: Для индивидуума совершенно безразлично, что пить, что стакан с одним кристаллом, что стакан с пятью ложками сахара. Очевидно, получили абсурдный вывод, причина которого кроется в принципиальной невозможности объективного сравнения малых величин блага. Этот пример заставляет задуматься о необходимости и месте предположения отрицательной транзитивности строгого отношения предпочтения, или что эквивалентно, транзитивности нестрогого отношения предпочтения.

Помимо указанных проблем существует также ряд моментов, которые необходимо учитывать при анализе предпочтений и/или выбора экономического агента, их пропуск или игнорирование также может привести к нарушению приведенных нами предположений.

- *Зависимость предпочтений от контекста*

Довольно часто отсутствие транзитивности в реальности вызвана тем, что исследователь не учитывает в своих рассмотрениях контекст ситуации. Под контекстом понимаются все внешние, явным образом не входящие в допустимое множество альтернатив, обстоятельства. Укажем несколько примеров, в которых небанальным образом сказывается влияние контекста на предпочтения индивидуума: цена в случае демонстративного потребления,[13] количество экономических агентов потребляющих данное благо (рынок мобильных телефонов) и т.д. Все указанные факторы явным образом должны быть учтены при рассмотрении соответствующих ситуаций. Если же рассматривать предпочтения, игнорируя важные дополнительные переменные, то, естественно, возможно пронаблюдать нарушение, как

---

[13] Вспомним бородатый анекдот:

– Ты почем галстук брал?

– Да не дорого, 2500 баксов отслюнил.

– Ну, ты и лох, за соседним углом, его же за 5000 зеленых толкают.

В этом случае полезность/желательность галстука напрямую зависит от его цены.

свойства отрицательной транзитивности, так и свойства асимметричности предпочтений на альтернативах с разными значениями переменных входящих в контекст ситуации.

- *Зависимость от постановки вопроса (framing)*

Зависимость предпочтений от контекста, идеологически тесно связана с феноменом известным, как зависимость предпочтений/выбора от постановки вопроса. Рассмотрим классический эксперимент, проведенный Дениэлом Кахнеманом и Амошом Тверским[14]. Группе интервьюируемых было предложено ответить на следующий вопрос:

*Предположим, что в некоторой стране ожидается вспышка гепатита. Ожидается, что в результате данного заболевания погибнет 600 человек. Для борьбы с этим заболеванием предлагаются две альтернативные программы, со следующими результатами реализации:*

*Программа A: в случае реализации программы будет сохранена жизнь 200 человек.*

*Программа B: в случае реализации программы с вероятностью 1/3 будет сохранена жизнь 600 человек, с вероятностью 2/3 в результате реализации программы не будет спасена ни одна жизнь.*

*Какую из двух программ вы выберете?*

Большинство интервьюируемых (72%) в данной ситуации предпочло первую альтернативу второй.  Далее был проведен опрос о той же ситуации, но с другими вариантами ответов:

*Программа C: в случае реализации погибнут 400 человек.*

*Программа D: в случае реализации с вероятностью 1/3 никто не погибнет, с вероятностью 2/3 программа не будет иметь успеха и погибнут 600 человек.*

В результате этого опроса 78% интервьюируемых выбрало альтернативу D. Легко проверить, что программы A и C, и, B и D, попарно эквивалентны и отличаются только формой выражения. Варианты A и B сформулированы в позитивном духе (количество спасенных жизней), в то же время варианты C и D сформулированы в негативном ключе (число умерших). Одно из возможных объяснений расхождения в результатах, казалось бы, одинаковых опросов состоит в неэквивалентности оценок выгод и потерь относительно *status quo*.[15] Очевидно, что наличие данного феномена также может нарушать наши предположения. (Кстати, возможность нарушения какого свойства демонстрирует данный пример?)

- *Изменение предпочтений во времени*

При рассмотрении предпочтений важно помнить, что, вообще говоря, предпочтения изменяются во времени. Если вы сегодня предпочитаете яблоки грушам, то далеко не факт, что ваши предпочтения останутся неизменным на протяжении всей вашей жизни. Естественно, этот факт также демонстрирует нарушение наших аксиом при рассмотрении реального выбора/предпочтений.

Этот список далеко не исчерпывающ, его можно продолжать и продолжать. Так, например, в литературе много внимания при обсуждении  предпочтений и выбора уделяются вопросам *инверсии предпочтений*, *несостоятельности предпочтений во времени* и др. Но мы более не занимаемся обсуждением этого вопроса и отсылаем заинтересованного читателя к соответствующей литературе.

---

[14] Kahneman, D., Tversky, A., *Choices, Values, and Frames*, American Psychologist, 1984, 39(4).

[15] Несмотря на то, что данный пример затрагивает вопросы выбора в условиях неопределенности, предмет рассмотрения другой главы, он ясно указывает на важную черту присущую реальным ситуациям выбора и поэтому приведен в данной главе.

## Задачи

12.Сколько вопросов надо задать индивидууму, чтобы выявить его предпочтения над потребительскими наборами, состоящими из 5 благ, каждое из которых принимает в качестве значений 0 и 1?

13. Пусть $X=\mathbb{R}^n_+$, а $\mathcal{R}$задано следующим образом:

$$\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i\ \forall i.$$

Охарактеризуйте следующие бинарные отношения, построенные на его основе:

$$\boldsymbol{x}\overset{*}{\mathcal{R}}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{y}\mathcal{R}\boldsymbol{x}) \text{ и } (\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y}),$$

$$\boldsymbol{x}\mathcal{R}^{**}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y}) \text{ и } \neg(\boldsymbol{y}\mathcal{R}\boldsymbol{x}).$$

Рассмотрите отношение $\mathcal{R}^{***}$, заданное по правилу $\boldsymbol{x}\overset{*}{\mathcal{R}}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{y}\mathcal{R}\boldsymbol{x})$. Как оно связано с отношением $\overset{*}{\mathcal{R}}$? Что можно сказать об отношении, задаваемом по правилу $\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y})$ и $(\boldsymbol{y}\mathcal{R}\boldsymbol{x})$.

14. Пусть отношение $\mathcal{R}$рефлексивно и транзитивно. Рассмотрим задаваемые на основании него отношения $\overset{*}{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{R}^{**}$, определяемые следующим образом:

$$\boldsymbol{x}\overset{*}{\mathcal{R}}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{y}\mathcal{R}\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{x}\mathcal{R}^{**}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y}) \text{ и } (\boldsymbol{y}\mathcal{R}x).$$

Покажите, что $\overset{*}{\mathcal{R}}$ иррефлексивно, отрицательно транзитивно, а $\mathcal{R}^{**}$ рефлексивно, транзитивно и симметрично.

15. Пусть некто предложил в качестве аксиом строгого отношения предпочтения постулировать асимметричность и транзитивность. Какие проблемы на этом пути Вы видите?

16. Пусть $\succeq$ — нестрогое отношение предпочтения (полное и транзитивное бинарное отношение), заданное на $X$, а $\succ$ $(\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y})$ и $\neg(\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x})$ ) и $\sim$ $(\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y})$ и $(y\succeq\boldsymbol{x}))$ — строгое отношение предпочтения и отношение эквивалентности, построенные на его основе. Каким свойствам будут удовлетворять отношения $\succ$ и $\sim$?

17. (Продолжение) Покажите, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ выполняется ровно *одно* из трех соотношений: $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$.

18. (Продолжение) Докажите, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ таких, что $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{z}$, выполнено $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{z}$. Какие еще свойства, аналогичные этому, выполнены для данной системы предпочтений?

19. (Продолжение) Докажите что при полноте отношения $\succeq$ определение строгого отношения предпочтения эквивалентно $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x})$.

20. Докажите недоказанные в основном тексте пункты Теоремы **2**.

21. Пусть $\succeq$ — нестрогое отношение предпочтения (полное и транзитивное бинарное отношение) заданное на $X$, а $\sim$ $(\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y})$ и $(y\succeq\boldsymbol{x}))$ — отношение эквивалентности. Рассмотрим семейство множеств (кривых) безразличия, построенных на основании $\sim$. Как на основании порядка, задаваемого отношением $\succeq$, корректно и непротиворечиво ввести порядок на этом семействе? Какими свойствами он обладает?

## *Представление предпочтений функцией полезности*

В этом и в следующем параграфах мы рассмотрим условия, при выполнении которых можно получить числовой **индикатор полезности** (**функцию полезности**[16]) с некоторыми наперед заданными свойствами. Функция полезности является удобным инструментом анализа (особенно в приложениях теории) как выбора потребителя, так и вопросов сравнительной статики (Как изменяется потребительский выбор при изменении параметров модели?). Под функцией полезности некоторого потребителя традиционно понимается некоторая вещественнозначная функция ранжирующая (упорядочивающая) альтернативы из множества допустимых альтернатив $X$ тем же образом что и предпочтения.[17]

**Определение 4.**

Будем называть $u(.)\colon X\to\mathbb{R}$ **функцией полезности** потребителя, соответствующей системе неоклассических предпочтения $\{\succeq, \succ, \sim\}$, если для всякой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, т.е. $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y} \Leftrightarrow u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$.

В связи с этим определением естественно возникает вопрос: Какие свойства предпочтений (и множества альтернатив, на которых заданы предпочтения) гарантируют существование функции полезности? Заметим, что в случае если некоторая система предпочтений представима функцией полезности $u(\boldsymbol{x})$, то функция $f(u(\boldsymbol{x}))$, где $f(.)$ – некоторая строго возрастающая функция, также является функцией полезности представляющей данную систему предпочтения (Проверьте это!). В свете этого факта, понятно, что при наличии хотя бы одной функции представляющей предпочтения потребителя мы автоматически имеем

---

[16] Понятие полезности (пользы) появилось впервые в работах английского философа Иеремии Бентама (1748-1832): «… стремиться к удовольствию и избегать страдания составляет его (человека) единственную задачу… Польза есть понятие отвлеченное. Оно выражает свойство или способность какого-нибудь предмета предохранить от какого-нибудь зла или доставить какое-нибудь благо.» (Цитируется по Юм Д. Опыты. Бентам И. Принципы законодательства. – О влиянии условий, времени и места на законодательство. – Руководство по политической экономии. Вып. 5.-М.1896)

[17] Понятие функции полезности эволюционировало вместе с экономической теорией. Так Герман Генрих Гёссен (*Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, und der daraus fliessenden Regeln fur menschliches Handeln*, Berlin, Prager, 1854), впервые систематическим образом рассмотревший понятие функции полезности, предполагал, что она представляет собой сумму полиномов второй степени, причем все перекрестные произведения отсутствуют. Дальнейшее обобщение понятия полезности принадлежит Уильяму Стенли Джевонсу (*The Theory of Political Economy*, London and New York, McMillan and Co., 1871) предложившего в качестве функции полезности сумму произвольных вогнутых функций одного аргумента. Франсис Исидро Эджворт (*Mathematical Psychics*, London, Kegan Paul, 1881) пошел дальше всех предыдущих авторов и в качестве функции полезности рассмотрел произвольную функцию многих переменных, без ограничения на смешанные производные. Следует отметить, что все эти авторы мыслили о функции полезности в рамках *кардиналистского* подхода. В дальнейшем развитие концепции полезности происходит в рамках *ординалистского* подхода, начала которого заложены в работах Вильфредо Парето (*Manuel d`economie politique*, Paris, 1909). Подробнее об истории развития понятия полезности и теории потребителя смотри Houthakker, H.S., *The Present State of Consumer Theory*, Econometrica, V. 29(4), 1961 и Stigler, G.J., The Development of Utility Theory, Journal of Political Economy, V. 59, 1950.

бесконечное множество функций полезности эквивалентным образом упорядочивающих потребительские наборы и, соответственно, эквивалентных с точки зрения описания потребительских предпочтений.

Перейдем теперь к рассмотрению условий гарантирующих существование функции полезности представляющей систему неоклассических предпочтений. В начале приведем утверждение, которое дает нам **необходимое условие существования функции полезности**.

**Теорема 4.**

Если существует функция полезности представляющая некоторую систему предпочтений $\{\succeq, \succ, \sim\}$ заданную на $X$, то эта система является неоклассической, т.е. отношение $\succeq$ – полно и транзитивно, $\succ$ – асимметрично и отрицательно транзитивно, $\sim$ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

***Доказательство***:

Покажем, например, что отношение $\succeq$ – полно и транзитивно. Доказательство остальных свойств оставляется читателю в качестве упражнения.

(1) Докажем свойство полноты. Для любой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $u(x) \geqslant u(\boldsymbol{y})$ и/или $u(\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{x})$. Поэтому по определению функции, либо $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$.

(2) Докажем свойство транзитивности. Пусть для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ выполняются соотношения $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{z}$. По определению функции полезности это означает, что $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{z})$. Из $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{z})$ следует, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}$.

■

Отметим, что когда множества альтернатив не более чем счетное, условия полноты и транзитивности являются также и **достаточными** для существования функции полезности. Множество альтернатив будет счетным, например, когда все блага потребляются только в целых количествах.

**Теорема 5.**

Пусть множество альтернатив $X$ не более чем счетно. Для любой неоклассической системы предпочтений существует представляющая ее функция полезности.

***Доказательство***:

Пусть множество альтернатив $X$ – не более чем счетно. Тогда его можно представить в виде последовательности альтернатив $\boldsymbol{x}^i$, $i=1, 2, \dots$ . Доказательство утверждения строится в виде алгоритма.

Пусть мы уже присвоили величину полезности первым $N$ альтернативам из данной последовательности. Требуется присвоить величину полезности альтернативе $\boldsymbol{x}^{N+1}$. Рассмотрим два подмножества множества $A^N = \{\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^N\}$:

$$A_+^N = \{\boldsymbol{x} \in A^N \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}^{N+1}\} \quad \text{и} \quad A_-^N = \{\boldsymbol{x} \in A^N \mid \boldsymbol{x}^{N+1} \succeq \boldsymbol{x}\}.$$

Обозначим $\bar{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества $A_+^N$, что $\boldsymbol{x} \succeq \bar{\boldsymbol{x}}\ \forall \boldsymbol{x} \in A_+^N$. В случае неединственности такого элемента берем любой из них. Так же точно обозначим $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества

$A^N_-$, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \succeq \boldsymbol{x}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in A^N_-$. Существование $\bar{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве $A^N_+$) и $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве $A^N_-$) следует из полноты и транзитивности отношения $\succeq$. Доказательство этого оставляется в качестве упражнения.

Возможны 4 случая:

- $A^N_+ = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\tilde{\boldsymbol{x}}) + 1$.
- $A^N_- = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\bar{\boldsymbol{x}}) - 1$.
- $A^N_+ \neq \varnothing$, $A^N_- \neq \varnothing$, $A^N_+ \cap\ A^N_- = \varnothing$.

Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = (u(\bar{\boldsymbol{x}}) + u(\tilde{\boldsymbol{x}}))/2$.

- $A^N_+ \neq \varnothing$, $A^N_- \neq \varnothing$, $A^N_+ \cap\ A^N_- \neq \varnothing$. В этом случае берем $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) =\ u(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}$ — произвольный элемент множества $A^N_+ \cap\ A^N_-$ (по построению все элементы множества $A^N_+ \cap\ A^N_-$ имеют одну и ту же полезность).

Чтобы закончить алгоритм, положим $A^1 = \{\boldsymbol{x}^1\}$ и $u(\boldsymbol{x}^1) = 0$. Заметим, что при таком построении функции полезности свойство

$$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}\ \Leftrightarrow\ u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$$

выполнено $\forall\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in A^N$ при любом $N$. Поэтому построенная таким образом функция $u(.)$ действительно является функцией полезности.

■

Если же множество альтернатив не является счетным, то утверждение в общем случае неверно. Это показывает, например, предпочтения на основе лексикографического упорядочения потребительских наборов из $\mathbb{R}^2_+$ .

**Пример 3.**

Лексикографическое упорядочение называется так, поскольку оно ранжирует наборы подобно правилу расположения слов в словаре. Итак, на множестве $X = \mathbb{R}^2_+$ зададим бинарное отношение $\succ^{\mathrm{L}}$ , определяемое по правилу

$$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2_+ \quad (\boldsymbol{x} \succ^{\mathrm{L}} \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\ (x_1 > y_1) \text{ или } (\ x_1 = y_1,\ \ x_2 > y_2)\ ).$$

Отметим, что таким образом заданное упорядочение удовлетворяет свойствам асимметричности и отрицательной транзитивности. Однако оно не представляется никаким численным индикатором полезности. Докажем последнее.

Предположим противное. Пусть существует некоторая функция полезности (принимающая действительные значения) такая, что

$$\boldsymbol{x} \succ^{\mathrm{L}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow\ u_L(x_1, x_2) > u_L(y_1, y_2).$$

Сопоставим каждому *действительному* числу $x_1$ некоторое *рациональное* число $r(x_1)$ такое, что $u_L(x_1, 2)\ > r(x_1) > u_L(x_1,1)$. Заметим, что если $x_1 > x_1'$, то по определению лексикографического упорядочения имеем $u_L(x_1,1)\ >\ u_L(x_1',\ 2)$. Кроме того, $u_L(x_1,\ 2)\ >\ r(x_1)\ > u_L(x_1,1)$ и $u_L(x_1', 2) > r(x_1') > u_L(x_1',1)$.

В силу этих соотношений имеем

$$r(x_1) > u_L(x_1,1) > u_L(x_1',\ 2)\ > r(x_1')$$

и, тем самым, из того, что $x_1 > x_1'$ имеем, что $r(x_1) > r(x_1')$. В силу этого $r(.)$ является *взаимнооднозначной* функцией. Область определения этой функции — *вещественные* числа, а область значения — некоторое подмножество множества *рациональных* чисел. Подобное невозможно, так как невозможно построить *взаимнооднозначное* соответствие между *счетным* и *несчетным* множествами. Таким образом, мы пришли к противоречию, и, тем самым доказали, что не существует функции полезности, соответствующей лексикографическому упорядочению.

$\Leftarrow$

Отметим, что, однако, существует ряд случаев, для которых можно гарантировать существование функции полезности даже в случае несчетного множества альтернатив. Так, например, Жерар Дебре[18] доказал, что функция полезности существует, если предпочтения непрерывны.

### Определение 5.

Отношение $\Re$, заданное на $X$ называется **непрерывным в** $X$, если для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ , $\{y_n\}$, таких что $x_n, y_n \in X\ \forall n$ и $x_n \Re y_n$, выполнено $x \Re y$, где $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и где $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Перед тем как перейти к обсуждению существования функции полезности для непрерывного отношения предпочтения докажем важную вспомогательную лемму.

### Теорема 6.

Пусть на $X \subset \mathbb{R}^K$ задана система неоклассических предпочтений. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(1) предпочтение $\succeq$ – непрерывно;

(2) для любого $x \in X$ множества $\{y \in X \mid x \succeq y\}$ и $\{z \in X \mid z \succeq x\}$ замкнуты в $X$.

(3) для любого $x \in X$ множества $\{y \in X \mid x \succ y\}$ и $\{z \in X \mid z \succ x\}$ открыты в $X$.

(4) если $x \succ y$, то существуют непересекающиеся окрестности $V_x$ и $V_y$ точек $x$ и $y$ соответственно, такие, что для любых $a \in V_x$ и $b \in V_y$ выполнено $a \succ b$.

***Доказательство***:

Доказательство проведем по схеме 1⇒2⇒3⇒4⇒1.

(1)⇒(2) Возьмем любую сходящуюся последовательность $\{y_n\}$, такую, что $y_n \in \{y \in X \mid x \succeq y\}$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Для нее имеем, что для любого $n$ выполнено $x \succeq y_n$. По свойству непрерывности имеем, что $x \succeq y$, т.е. $y \in \{y \in X \mid x \succeq y\}$, что и означает замкнутость множества $\{y \in X \mid x \succeq y\}$. Замкнутость второго множества доказывается аналогично.

(2) ⇔ (3) Так как дополнениями множеств $\{y \in X \mid x \succeq y\}$ и $\{z \in X \mid z \succeq x\}$ в пределах $X$ являются множества $\{y \in X \mid x \succ y\}$ и $\{z \in X \mid z \succ x\}$, то отсюда следует, что первые два множества замкнуты тогда, и только тогда, когда вторые два открыты.

(3)⇒(4) Пусть $x \succ y$. Возможны два случая.

1) Существует элемент $z \in X$, такой, что $x \succ z \succ y$. Тогда открытые множества $V_x = \{a \in X \mid a \succ z\}$ и $V_y = \{b \in X \mid z \succ b\}$, удовлетворяют требуемым свойствам. Так, $x \in V_x$, $y \in V_y$. Покажем, что $V_x \cap V_y = \varnothing$. Пусть это не так, т.е. существует некоторый элемент $x' \in X$, такой, что $x' \in V_x \cap V_y$. Тогда $x' \succ z$ и $z \succ x'$ по транзитивности имеем $x' \succ x'$. Противоречие с ир-

---

[18] Debreu, Gerard, *Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function*, in Decision Theory, Thrall, Coombs, Davis, eds. Wiley, New York, 1954

рефлексифностью отношения $\succ$ , значит $V_x \cap V_y = \varnothing$. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что для любых $a\in V_x$ и $b\in V_y$ выполнено $a \succ b$.

2) Не существует элемента $\boldsymbol{z} \in X$ такого, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$. В этом случае составим множества $V_x=\{a\in X|\ a \succ \boldsymbol{y}\}$ и $V_y=\{b\in X|\ \boldsymbol{x} \succ b\}$. Эти множества открыты, и, кроме того, $\boldsymbol{x}\in V_x$, $\boldsymbol{y}\in V_y$. Покажем, что они не пересекаются. Пусть это не так, т.е. существует некоторый элемент $\boldsymbol{x}'\in X$такой, что $\boldsymbol{x}'\in V_x\cap V_y$. Тогда $\boldsymbol{x}' \succ \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}'$, что противоречит с исходной посылкой, о том, что не существует элемента $\boldsymbol{z} \in X$ такого, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что для любых $a\in V_x$ и $b\in V_y$ выполнено $a \succ b$.

(4)⇒(1) Возьмем некоторые сходящиеся последовательности $\{\boldsymbol{x}_n\}$ , $\{\boldsymbol{y}_n\}$, такие что $\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{y}_n \in X\ \forall \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ , $\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n$ и $\boldsymbol{x}_n\succeq\boldsymbol{y}_n$. Предположим, что $\boldsymbol{y} \succ x$, тогда для точек $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ найдутся окрестности $V_x$ и $V_y$, такие, что для любых $a\in V_x$ и $b\in V_y$ выполнено $b \succ a$. Это означает, что при достаточно больших значениях $\boldsymbol{n}$ имеем $\boldsymbol{y}_n \succ \boldsymbol{x}_n$. Что противоречит $\boldsymbol{x}_n\succeq\boldsymbol{y}_n$. Таким образом, получили, что $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$.

■

Приведенные эквивалентные определения непрерывности позволяют выявить содержательный смысл понятия непрерывности: если мы явно предпочитаем один из наборов другому, то, в «малом», т.е. при рассмотрении достаточно близких наборов наша ранжировка сохранится.

В формулировке данной теоремы появились два важных множества, которые мы будем использовать в дальнейшем. Назовем, множества $\{z\in X \mid z \succeq \boldsymbol{x}\}$ и $\{\boldsymbol{y}\in X \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}\}$ **верхним и нижним лебеговским множеством**, соответственно, и введем для них следующие обозначения:

$$L^+(\boldsymbol{x}) = \{z\in X \mid z \succeq \boldsymbol{x}\} \text{ и } L^-(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y}\in X \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}\}.$$

Соответственно, непрерывность предпочтений с учетом этих терминов можно переформулировать как требование замкнутости верхнего и нижнего лебеговских множеств в $X$[19].

**Пример 3. (Продолжение)**

Покажем, что в случае лексикографического отношения предпочтения для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+$ множества $\{\boldsymbol{y}\in \mathbb{R}^2_+ \mid \boldsymbol{x} \succeq^L \boldsymbol{y}\}$ и $\{z\in\mathbb{R}^2_+ \mid z \succeq^L \boldsymbol{x}\}$ не являются ни замкнутыми, ни открытыми в $\mathbb{R}^2_+$ . Под отношением $\succeq^L$ мы, как и ранее, подразумеваем отношение, построенное на основе $\succ^{\mathrm{L}}$ по правилу $\boldsymbol{x} \succeq^L \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{y} \succ^{\mathrm{L}} \boldsymbol{x})$, или

$$\boldsymbol{x} \succeq^L \boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\ (x_1 > y_1) \text{ или } (\ x_1 = y_1,\ x_2 \geqslant y_2)).$$

Изобразим теперь верхнее лебеговское множество для данного отношения $\succeq^L$ (Рисунок 2).

---

[19] Иногда, свойство замкнутости верхнего (нижнего) лебеговского множества называют полунепрерывностью предпочтений сверху (снизу).

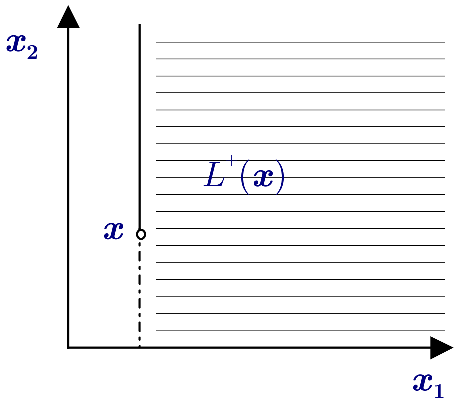


Рисунок 2. Верхнее лебеговское множество для лексикографического упорядочения.

Очевидно, что изображенное на рисунке множество не является ни замкнутым, ни открытым. И, таким образом, отношение $\succeq^{L}$ не является непрерывным

$\Leftarrow$

Теперь сформулируем и частично докажем анонсированную выше теорему Ж. Дебре о существовании функции полезности представляющей систему неоклассических предпочтений.

### Теорема 7.

Пусть на $X\subset \mathbb{R}^K$ задана непрерывная система неоклассических предпочтений, тогда существует непрерывная функция полезности, представляющая эти предпочтения.

***Доказательство***:

Как уже говорилось, мы не будем полностью доказывать этот результат. А докажем только часть его, а именно, существование функции полезности. За доказательством непрерывности заинтересованный читатель отсылается к оригинальной работе Троута Радера[20], чей вариант доказательства теоремы Дебре мы и приводим.

Рассмотрим систему открытых шаров в $\mathbb{R}^K$с *рациональными* центрами и радиусами. Очевидно, что таких шаров счетное число. На основании этих шаров, построим систему открытых множеств $\{O_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по следующему принципу: в эту систему попадают непустые пересечения исходной системы открытых шаров с множеством $X$. Обозначим через $L^{--}(\boldsymbol{x})$ множество потребительских наборов из $X$, которые строго хуже $\boldsymbol{x}$, т.е. $L^{--}(\boldsymbol{x})= \{\boldsymbol{y}\in X|\ \boldsymbol{x}\succ \boldsymbol{y}\}$. Введем в рассмотрение, множество $N(\boldsymbol{x})= \{\boldsymbol{n}|\ O_n \subset L^{--}(\boldsymbol{x})\}$.

Покажем, что $\bigcup_{n\in N(\boldsymbol{x})}O_n= L^{--}(\boldsymbol{x})$. Так как для каждого $\boldsymbol{n}\in N(\boldsymbol{x})$ выполнено $O_n\subset L^{--}(\boldsymbol{x})$, то имеем, что $\bigcup_{n\in N(\boldsymbol{x})}O_n\subset L^{--}(\boldsymbol{x})$.

Докажем обратное включение: $L^{--}(\boldsymbol{x})\subset\bigcup_{n\in N(\boldsymbol{x})}O_n$. Возьмем некоторую точку $\boldsymbol{y}\in L^{--}(\boldsymbol{x})$, в силу открытости $L^{--}(\boldsymbol{x})$ она входит в $L^{--}(\boldsymbol{x})$ с некоторой своей окрестностью, в которую можно вписать пересечение открытого шара в $\mathbb{R}^K$с *рациональными* центрами и радиусами с множеством $X$, причем так, что это пересечение содержит точку $\boldsymbol{y}$. Другими словами, существует множество $O_n$, которое принадлежит этой окрестности и содержит $\boldsymbol{y}$. Следовательно, $\boldsymbol{y}\in\bigcup_{n\in N(\boldsymbol{x})}O_n$.

---

[20] Rader, Trout, *The Existence of a Utility Function to Represent Preferences*, Review of Economic Studies, 30(3), 1963

Далее, каждой точке $\boldsymbol{x} \in X$ сопоставим величину

$$u(\boldsymbol{x})=\sum_{n\in N(\boldsymbol{x})}(\frac{1}{2})^n ,$$

в случае если $N(\boldsymbol{x})=\varnothing$, то положим $u(\boldsymbol{x})=0$.

Покажем, что определенная таким образом функция $u(.)$ представляет нашу систему предпочтений.

Пусть $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$. Тогда по транзитивности нестрогого отношения имеем, что $L^{--}(\boldsymbol{y}) \subseteq L^{--}(\boldsymbol{x})$. Откуда $N(\boldsymbol{y}) \subseteq N(\boldsymbol{x})$ и соответственно $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$.

Пусть теперь $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$. В силу полноты отношения $\succeq$ заключаем, что, либо $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$. Предположим, что выполнено $\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$. В этом случае $L^{--}(\boldsymbol{x})\subset L^{--}(\boldsymbol{y})$, и при этом $L^{--}(\boldsymbol{x})\neq L^{--}(\boldsymbol{y})$. Отсюда заключаем, что $N(\boldsymbol{x})\subset N(\boldsymbol{y})$ и $N(\boldsymbol{x})\neq N(\boldsymbol{y})$, а значит, по определению $u(.)$, имеем $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{y})$. Получили противоречие с $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$. Таким образом, доказано, что $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$ влечет $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$. Тем самым, построенная функция $u(.)$, является функцией полезности для исходной системы неоклассических предпочтений. ■

Данный вариант доказательства имеет достаточно ясную графическую интерпретацию (см. Рис 3). Мы заполняем нижнее лебеговское множество открытыми «шариками» с рациональными радиусами и центрами, и, фактически, в качестве функции полезности берем нечто сходное по духу с площадь нижнего лебеговского множества.

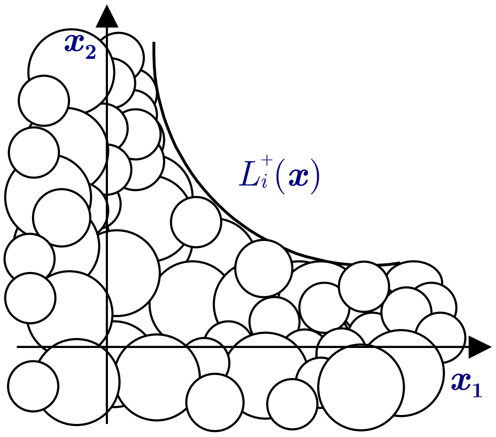


Рисунок 3. Построение функции полезности по схеме Радера.

Еще одно элегантное доказательство теоремы Дебре с выразительной графической интерпретацией можно построить при довольно естественном предположении о **монотонности предпочтений**.

Достаточно разумно потребовать, чтобы полезность индивидуума возрастала при росте количества потребляемых благ, т.е. потребитель предпочитал большее количество блага меньшему.

**Определение 6.**

(1) Отношение предпочтения $\succeq$ на $X$ называется **монотонным**, если $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in X$ из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$.

(2) Отношение предпочтения называется **строго монотонным**, если из $\boldsymbol{x} \geqslant\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

При этом дополнительном предположении докажем следующий ослабленный вариант теоремы Дебре.

**Теорема 8.**

Пусть на $X=\mathbb{R}_+^K$ заданы непрерывные, строго монотонные предпочтения. Тогда существует непрерывная, строго монотонная функция полезности представляющая эти предпочтения.

***Доказательство***:

В качестве функции полезности можно взять соответствие, которое сопоставляет каждому $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^K$ такое число $u(\boldsymbol{x})$, что $\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — $K$-мерный вектор, состоящий из единиц. Покажем, что такое число $u(\boldsymbol{x})$ всегда существует и единственно. (См. Рисунок 4 для иллюстрации идеи доказательства)

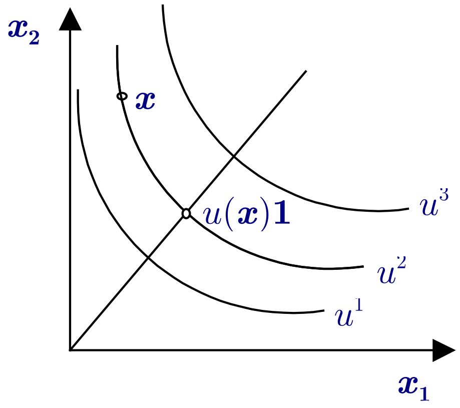


Рисунок 4. Построение функции полезности при предположении монотонности предпочтений ($\boldsymbol{u}^1< \boldsymbol{u}^2< \boldsymbol{u}^3$).

Для этого мы должны найти для каждого набора $\boldsymbol{x}$ эквивалентный ему набор из множества $U = \{u\mathbf{1} \mid u\in\mathbb{R}_+\}$, которое является лучом, выходящим из начала координат. Сопоставим рассматриваемому набору $\boldsymbol{x}$ множество чисел $u$, соответствующих не худшим наборам из $U$

$$U^+(\boldsymbol{x}) = \{u \in\mathbb{R}_+ \mid u\mathbf{1}\succeq\boldsymbol{x}\}$$

и множество чисел $u$, соответствующих не лучшим наборам из $U$

$$U^-(\boldsymbol{x}) = \{u \in\mathbb{R}_+ \mid \boldsymbol{x} \succeq u\mathbf{1}\}.$$

Эти множества не пусты, так как из свойства строгой монотонности следует, что $0\in U^-(\boldsymbol{x})$ и $\max\{x_k\}+1\in U^+(\boldsymbol{x})$.

Множество $U^+(\boldsymbol{x})$ лежит выше $U^-(\boldsymbol{x})$ поскольку из строгой монотонности следует, что $\forall u_1\in U^-(\boldsymbol{x})$ и $\forall u_2\in U^+(\boldsymbol{x})$ выполнено $u_1\leqslant u_2$.

Обозначим $u^+ = \inf U^+(\boldsymbol{x})$ и $u^- = \sup U^-(\boldsymbol{x})$. Эти величины конечны, так как множества $U^-(\boldsymbol{x})$ и $U^+(\boldsymbol{x})$ ограничены сверху и снизу соответственно. По непрерывности предпочтений $u^+\in U^+(\boldsymbol{x})$ и $u^-\in U^-(\boldsymbol{x})$. При этом $u^+ \geqslant u^-$. Покажем, что $u^+=u^-$. Пусть это не так. Тогда существует число $u'$ такое, что $u^- < u' < u^+$, так что $u'\notin U^-(\boldsymbol{x})$ и $u'\notin U^+(\boldsymbol{x})$. Это противоречит полноте предпочтений, так как, по свойству полноты мы должны иметь либо $u'\,\mathbf{1} \succeq \boldsymbol{x}$, либо $u'\mathbf{1} \preceq \boldsymbol{x}$.

Полученная точка $u = u^{+} = u^{-}$ удовлетворяет требуемому условию $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{u}1$ и единственна.

Заданная таким образом функция $u(\boldsymbol{x})$ является функцией полезности. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$. По построению $\boldsymbol{x}_1 \sim u(\boldsymbol{x}_1)\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{x}_2 \sim u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$. Значит, $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1)\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$. Но из строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_1)\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1) \geqslant u(\boldsymbol{x}_2)$.

Функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ является строго монотонной. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. Тогда из строгой монотонности предпочтений $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$. Отсюда следует, что $u(\boldsymbol{x}_1)\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$. Поэтому $u(\boldsymbol{x}_1) > u(\boldsymbol{x}_2)$.

Докажем теперь непрерывность функции полезности $u(\boldsymbol{x})$. Для доказательства непрерывности функции полезности рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Нам надо показать, что $\lim_{n\to\infty} u(\boldsymbol{x}_n) = u(\boldsymbol{x})$. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Заметим, что можно выбрать $\underline{u}$ и $\overline{u}$ такие, что для любого вектора $\boldsymbol{y}$ из ε-окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (т.е. $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \| \leqslant \varepsilon$) выполнено

$$\underline{u}\mathbf{1} \Im \boldsymbol{y} \Im \overline{u}\,\mathbf{1}.$$

Например, можно взять $\underline{u} = \min_{\mathrm{k}}\{\boldsymbol{x}_k\} - 2\varepsilon$ и $\overline{u} = \max_{\mathrm{k}}\{\boldsymbol{x}_k\} + 2\varepsilon$. Как нетрудно заметить, по строгой монотонности мы имеем $\underline{u} < u(\boldsymbol{y}) < \overline{u}$. Для любой сходящейся подпоследовательности из $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется достаточно большое число $N$, такое, что при $n > N$ имеем $\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$, т.е. последовательность, начиная с номера $N+1$, попадает в ε-окрестность точки $\boldsymbol{x}$. Тогда, как мы показали выше, $u(\boldsymbol{x}_n)$ попадает в интервал $[\underline{u}\ ,\overline{u}]$.

Покажем теперь, что любая сходящаяся подпоследовательность из последовательности $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится к одному и тому же числу $u(\boldsymbol{x})$. (Отметим, что, так как бесконечная последовательность $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ задана на компакте $[\underline{u}\ ,\overline{u}]$, то она должна иметь точки сгущения. Мы хотим показать, что существует всего одна точка сгущения и это $u(\boldsymbol{x})$.)

Рассмотрим теперь некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ из $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$. Пусть эта последовательность сходится к $\tilde{u}$ и при этом $\tilde{u} \neq u(\boldsymbol{x})$. Предположим что $\tilde{u} > \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Возьмем некоторое число $\hat{u}$, такое что $\tilde{u} > \hat{u} > \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. По свойству строгой монотонности имеем, что $\hat{u}\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$. Поскольку $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ сходится к $\tilde{u}$, то существует $M$ такое, что при $k > M$ выполнено $u(\boldsymbol{x}_{n_k}) > \hat{u}$. По определению функции полезности $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1}$ и, кроме того, по строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1} \succ \hat{u}\mathbf{1}$ $(\forall\ k > M)$, т.е. $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1} \succ \hat{u}\mathbf{1}$. Так как предпочтения непрерывны, то $\boldsymbol{x} \succeq \hat{u}\mathbf{1}$, но $\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$, поэтому $u(\boldsymbol{x})\mathbf{1} \succeq \hat{u}\mathbf{1}$. Однако выше было показано, что $\hat{u}\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$. Получили противоречие и тем самым доказали непрерывность построенной функции полезности.

■

Как видно из приведенных выше вариантов теоремы существования функции полезности, требование непрерывности достаточно сильно, так как помимо существования функции полезности мы получаем еще и дополнительное свойство ее непрерывность. Но, с другой стороны, непрерывность функции полезности свойство, значение которого трудно переоценить. Его наличие автоматически[21] дает нам существование функции спроса потребителя в большинстве задач, которые будут нас интересовать.

В заключение данного раздела остановимся на вопросе о нетранзитивных предпочтениях. Как обсуждалось выше, условие транзитивности является ограничительным при моделировании поведения потребителя. Поэтому, вполне естественным задаваться вопросом о свойствах предпочтений и о существовании функции полезности в случае, если строгое отношение предпочтения $\succ$ не обладает свойством отрицательной транзитивности, или, что эквивалентно, что отношение нестрогого отношения предпочтения $\succeq$ не обладает свойством транзитивности. Естественно, как показывает приведенная выше Теорема 4, при отсутствии предположения транзитивности функции полезности в смысле Определения 4 не существует, но, тем не менее, даже в этом случае, можно построить некоторый индикатор полезности заданный на парах альтернатив упорядочивающий потребительские наборы тем же образом, что и отношение предпочтения.

### Теорема 9.

Пусть на $X \subseteq \mathbb{R}^K$ задано полное отношение предпочтения $\succeq$ и, кроме того, $\succeq$ замкнуто в $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$. Тогда существует непрерывная функция $k$: $X \times X \to \mathbb{R}$ такая, что

(1) $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$;

(2) $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$;

(3) $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$;

(4) $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

***<u>Доказательство</u>***:

Пусть $\succeq^{-1}$ – множество, задаваемое по правилу

$$\succeq^{-1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X \mid (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \succeq\}.$$

Определим множество безразличия $\mathcal{I} = \succeq \cap \succeq^{-1}$ на $X$. Отметим, что в силу полноты отношения $\succeq$ это множество непусто (Почему?). Далее, для любой пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X$ определим функцию

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf_{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in \mathcal{I}} d((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')),$$

где $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – евклидово расстояние на $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$. Теперь покажем, что так определенная функция является непрерывной. Для любой пары $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in X \times X$ и $\tilde{\boldsymbol{z}} \in \mathcal{I}$ в силу неравенства треугольника имеем $d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leqslant d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) + d(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}})$. Следовательно,

$$\inf_{\tilde{z} \in \mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leqslant d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) + d(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}}).$$

Так как сейчас левая часть выражения не зависит от $\tilde{\boldsymbol{z}}$, то

$$\inf_{\tilde{z} \in \mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leqslant d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) + \inf_{\tilde{z} \in \mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}}).$$

Аналогично получаем

$$\inf_{\tilde{z} \in \mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leqslant d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) + \inf_{\tilde{z} \in \mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{z}}).$$

Комбинируя два последних неравенства, находим

---

[21] Вспомните о теореме Вейерштрасса.

$$|\inf_{\tilde{z}\in\mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{y}},\tilde{\boldsymbol{z}}) - \inf_{\tilde{z}\in\mathcal{I}} d(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{z}})| \leqslant d(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}),$$

что и означает непрерывность функции $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Далее положим $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = - d'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$. Теперь покажем, что так определенная функция удовлетворяет условиям теоремы.

(1⇒) Пусть $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$. Тогда в силу $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\geqslant 0$ и определения величины $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ имеем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Очевидно, что $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ (т.е. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{I}$) быть не может, так как в этом случае $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$, а значит и $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

(1⇐) Пусть нашлись $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in X$ такие, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$. В силу замкнутости отношения $\succeq$ в $\mathbb{R}^K\times \mathbb{R}^K$, имеем, что $\mathcal{I}$ замкнутое множество в $\mathbb{R}^K\times \mathbb{R}^K$. Следовательно, дополнение к $\mathcal{I}$ множество открытое, и, значит, найдется ε–окрестность точки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, содержащаяся в этом дополнении. По определению $k(.,.)$ это означает, что $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > \varepsilon > 0$.

(2) Доказательство пункта 2 аналогично приведенному выше.

(3) Доказательство данного пункта оставляется читателю в качестве упражнения.

(4) Свойство $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = - k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ выполнено по построению функции $k(. , .)$.

■

Так построенная функция может считаться **обобщенной функцией полезности** представляющей отношение предпочтения $\succeq$. В отличие от ранее определенной функции полезности $u(\cdot)$, функция $k(.,.)$ не сопоставляет числовое значение альтернативе из $X$, а лишь указывает для каждой *пары* альтернатив из $X$ наиболее предпочтительную. Отметим, однако, что если предпочтения представимы функцией полезности $u(\cdot)$, то в качестве $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ можно взять функцию $u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})$. Очевидно, что если в качестве базового индикатора полезности взять функцию $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то возможно систематическое построение микроэкономической теории на основе нетранзитивных предпочтений.[22]

В дальнейших параграфах мы больше не будем касаться случая нетранзитивных предпочтений и рассмотрим вариант теории, где за основу взята система неоклассических предпочтений, т.е. тех, где строгое отношение удовлетворяет свойствам асимметричности и отрицательной транзитивности, а нестрогое отношение предпочтения свойствам полноты и транзитивности.

## Задачи

22. Алина Александровна Алексашенко предложила следующее определение функции полезности: Будем называть $u(.)$: $X\to\mathbb{R}$ **функцией полезности** потребителя, соответствующей системе неоклассических предпочтения $\{\succeq, \succ, \sim\}$, если для всякой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ отношение $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x})>u(\boldsymbol{y})$. Будет ли оно эквивалентно определению, приведенному в тексте? Ответ аргументируйте.

23. Покажите, что суперпозиция строго возрастающей функции и функции полезности, представляющей некоторое отношение предпочтения $\succeq$, также является функцией полезности, представляющей это отношение предпочтения. Какие из нижеприведенных функций могут выступать в качестве такого преобразования?

a) $f(x)=x^2$; b) $f(x) = x^3+x$; c) $f(x)=\sqrt{x}$; d) $f(x)= e^x$.

---

[22] Смотри, например, Wayne J. Shafer, *The Nontransitive Consumer*, Econometrica, 42(5), 1974

Приведите пример, показывающий, что требование строгого возрастания не может быть ослаблено до возрастания.

24. Пусть $\succeq$ — полное и транзитивное бинарное отношение, заданное на множестве $X$. Для каких из нижеприведенных множеств $X$ это отношение может быть представлено некоторой функцией полезности?

a) $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n |\ x_i$ — целые числа$\}$;

b) $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n |\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$;

c) $X=\mathbb{R}^n$;

d) $X=\mathbb{R}^n_+$ ;

e) $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n |\ x_i$ — иррациональные числа$\}$;

f) $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n |\ x_i = a\sqrt{2} + b\sqrt{3},$ где $a$ и $b$ любые рациональные числа$\}$.

25. Покажите, что если система неоклассических предпочтений задана на конечном множестве альтернатив, то в этом множестве существует, как наименьший, так и наибольший элемент.

26. В теореме 5 докажите, что построенная функция является функцией полезности.

27. Пусть допустимое множество альтернатив состоит из 4 альтернатив $X=\{a, b, c, d\}$. На этом множестве задано следующее отношение предпочтения: $\succeq=\{( a, d), (b, d), (d, c), (b, a), (a, c), (b, c)\}$. Можете ли вы построить функцию полезности представляющую данные предпочтения? Если нет, то почему? Если да, то постройте.

28. Борис Бенедиктович Бахвалин на основании полного, транзитивного и непрерывного отношения предпочтения построил следующую функцию полезности:

$$u(x_1, x_2)=\begin{cases} x_1^2 x_2, & \text{если } x_1+x_2 \leqslant 1 \\ x_1^2 x_2+15, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Покажите, что эта функция не является непрерывной. Нет ли здесь противоречия с непрерывностью предпочтений? Возможно ли на основании этих же предпочтений построить непрерывную функцию? Если да, то постройте ее, если нет, то поясните, почему построение невозможно.

29. Пусть $X$– множество альтернатив, на котором задано полное и транзитивное бинарное отношение $\succeq$. Докажите, что если множество кривых безразличия счетно, то существует функция полезности представляющая $\succeq$.

30. Покажите, что если функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна, то нестрогое отношение предпочтения $\succeq$, породившее эту функцию, также является непрерывным.

31. Закончите доказательство теоремы 6, показав, что для построенных окрестностей $V_x$ и $V_y$, справедливо, что для любых $a \in V_x$ и $b \in V_y$ выполнено $a \succ b$.

32. Пусть $\boldsymbol{X} = X_1 \times X_2$, где $X_1 = \{1, 2, \ldots\}$, а $X_2$ — множество всех рациональных чисел между $0$ и $1$. Пусть на парах из $\boldsymbol{X}$ введено лексикографическое упорядочение. Докажите, что существует функция полезности, отвечающая этому упорядочению. Запишите ее *явную* формулу.

33. Рассмотрите следующие отношения $\mathcal{R}$, заданные на $\mathbb{R}^2_{++}$:

a) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$;

b) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{y_1} \geqslant \dfrac{x_2}{y_2}$;

c) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;

d) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;

e) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} - \min\{y_1, y_2\} \geqslant 0$;

f) $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant \min\{y_1, y_2\}$.

Какие из них представимы функцией полезности? Попытайтесь записать явную форму этой функции полезности.

34. Пусть $X$ состоит из $n$-мерных векторов с неотрицательными компонентами, а отношение задано следующим образом: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, если все компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ не меньше соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Существует ли функция полезности, представляющая это предпочтение?

35. Покажите, что функция полезности монотонна тогда и только тогда, когда монотонно представляемое ею отношение предпочтения.

36. Дайте графическую иллюстрацию идеи доказательства Теоремы 9.

37. Докажите пункт 3 Теоремы 9.

## *Свойства предпочтений и функции полезности*

При анализе конкретных микроэкономических задач часто возникает необходимость делать дополнительные предположения о предпочтениях или о функциях полезности. В данном параграфе мы обсудим наиболее часто используемые предположения о свойствах предпочтений и покажем их связь с соответствующими свойствами функции полезности, которую эти предпочтения порождают.

В предыдущем параграфе мы уже дали определение ряда важных свойств предпочтений, а именно, монотонности и строгой монотонности. Иногда, в ситуациях, когда выполнение этих свойств выглядит ограничительным, предполагается выполнение более слабого свойства – локальной ненасыщаемости. Выполнение этого свойства часто оказывается достаточным для доказательства тех свойств выбора, которые следуют из строгой монотонности предпочтений.

### Определение 7.

Предпочтения называются **локально ненасыщаемыми**, если для любого допустимого набора $\boldsymbol{x} \in X$ в любой его окрестности найдется другой допустимый набор $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$, такой что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}$.

Отметим, что выполнение свойства локальной ненасыщаемости запрещает два типа предпочтений:

- предпочтений с точкой насыщения, т.е. с точкой, для которой потребительский набор ей отвечающий является *наилучшим* выбором потребителя среди всех ближайших наборов;
- предпочтений с «толстой» кривой безразличия, т.е. ситуации в которой существует окрестность некоторой точки, в которой все наборы одинаково желаемы для потребителя (смотри рисунок 5).

Связь между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости, в принципе, очевидна. Если предпочтение является строго монотонным, то оно локально ненасыщаемо. Обратное, вообще говоря, неверно.

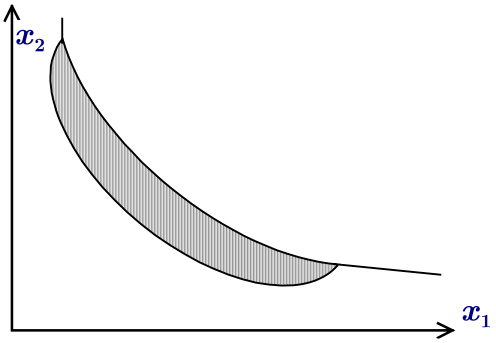
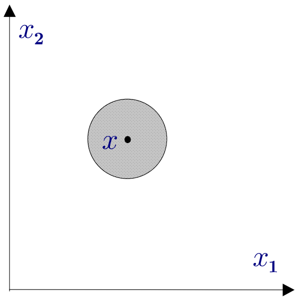
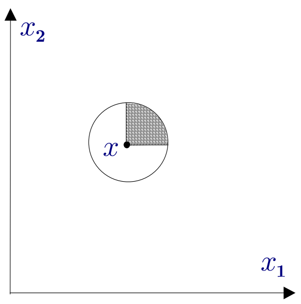


Рисунок 5. «Толстая» кривая безразличия

Рисунок 6 показывает разницу между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости. Заштрихованная область на первой части рисунка показывает ту зону, в которой могут находиться лучшие наборы при выполнении свойства локальной ненасыщаемости. Аналогично, заштрихованная область на второй части рисунка показывает зону, где находятся лучшие наборы для предпочтений, обладающих свойством строгой монотонности.



Для локальной ненасыщаемости



Для строгой монотонности

Рисунок 6 Строгая монотонность и локальная ненасыщаемость

Следующая группа свойств предпочтений, которую мы рассмотрим, важна для демонстрации «хороших» свойств функции выбора/спроса и доказательства существования равновесия.

Здесь и далее мы будем предполагать, что множество $X$ выпукло.

**Определение 8.**

Предпочтения называются **выпуклыми** в $X$, если $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$: $\boldsymbol{x}\succsim\boldsymbol{y}$ и $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ выполнено $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\succsim\boldsymbol{y}$.

Предпочтения называются **строго выпуклыми** в $X$, если $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$: $\boldsymbol{x}\succsim\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ и $0<\alpha<1$ выполнено $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}$.

Как не сложно понять определение выпуклости (строгой выпуклости) означает выпуклость верхнего лебеговского множества введенного нами в предыдущем параграфе. Остановимся теперь на различии понятия строгой выпуклости от «просто» выпуклости. Грубо говоря, различие между этими понятиями состоит в том, что при выполнении свойства строгой выпуклости запрещена ситуация, когда граница верхнего лебеговского множества (или, что тоже самое, кривая безразличия) имеет «линейные» части. На Рисунке 7 изображен пример выпуклого, но не строго выпуклого отношения предпочтения.

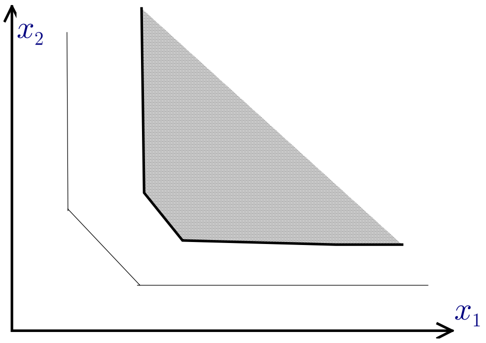


Рисунок 7. Пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений

С понятием выпуклости предпочтений, в случае их представимости функцией полезности, тесно связаны свойства **вогнутости**[23] и **квазивогнутости** функции полезности. Оказывается, что для вогнутой функции полезности справедлив следующий результат:

**Теорема 10.**

Если функция полезности вогнута, то представляемые ею предпочтения выпуклы.

***Доказательство***:

По определению вогнутости $u(.)$ имеем, что $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$

$$u(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})\geqslant\alpha u(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

---

[23] Напомним, что функция $u(.)$ — вогнута, если $u(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})\geqslant\alpha u(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)\,u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Классический результат математического анализа говорит, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(.)$ вогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (матрица Гессе) $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена на внутренности ее области определения, т.е. $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}\leqslant 0\ \forall\boldsymbol{z}$. (См. например, Рокафеллар, Р., *Выпуклый Анализ*, Москва, Мир, 1973, Гл. 1, §4)

Без потери общности считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда в силу определения функции полезности имеем: $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, откуда

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}),$$

или

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y} \quad \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Что и означает выпуклость предпочтений.

■

Обратное, вообще говоря, не всегда верно. Выпуклость предпочтений эквивалентна **квазивогнутости** функции полезности.

**Определение 9.**

Функция $u : X \to \mathbb{R}$ называется **квазивогнутой**, если

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Функция $u : X \to \mathbb{R}$ называется **строго квазивогнутой**, если

$$u(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) > \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Отметим также, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u : X \to \mathbb{R}$ квазивогнута тогда и только тогда, когда ее матрица $\boldsymbol{H}$ вторых производных отрицательно полуопределена на $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} = 0$, где $\boldsymbol{x}$ принадлежит *внутренности* области определения $X$. Другими словами, для каждого $\boldsymbol{z}$, такого что $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} = 0$ выполнено $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} \leqslant 0$, где $\boldsymbol{x}$ принадлежит внутренности $X$[24].

**Теорема 11.**

Функция полезности квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения выпуклы.

***Доказательство***:

Доказательство этого факта несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Из двух предыдущих теорем ясно видно, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой. Следующий пример показывает, что обратное не верно и класс квазивогнутых функций шире класса вогнутых функций, а заодно и проиллюстрирует технику проверки квазивогнутости.

**Пример 4.**

Рассмотрим функцию $u(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2$, заданную на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^2_+$. Покажем, что эта функция квазивогнута, но не является вогнутой.

Способ 1 (По определению)

Возьмем два произвольных вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2_+$. Тогда для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ имеем

---

[24] Более подробно о дифференциальных свойствах квазивогнутой функции полезности смотри: Barten, A.P., Bohm, V., *Consumer Theory*, in Handbook of Mathematical Economics, V.2, K.J. Arrow, M.D. Intriligator, eds., North-Holland, 1982 (pp. 403-09), и содержащиеся там ссылки.

$$(\alpha x_1+(1-\alpha)y_1)(\ \alpha x_2+(1-\alpha)y_2)=$$

$$\alpha^2 x_1 x_2+(1-\alpha)^2 y_1 y_2+\alpha(1-\alpha)x_1 y_2+\alpha\ (1-\alpha)x_2 y_1$$

Без потери общности будем считать, что $y_1 y_{\,2}\geqslant x_1 x_2$. Если компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ не равны $0$, то $\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{y_1\,y_2}{x_1\,x_2}}\geqslant 2$, или $x_1 y_2+x_2 y_1\geqslant 2x_1 x_2$. Справедливость этого неравенства, если хотя бы одна из компонент вектора $\boldsymbol{x}$ равна $0$, очевидна. Таким образом, для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2_+$ таких, что $y_1 y_{\,2}\geqslant x_1 x_2$, имеем $x_1 y_2+x_2 y_1\geqslant 2x_1 x_2$. С учетом изложенного, получаем

$$\alpha^2 x_1 x_2+(1-\alpha)^2 y_1 y_2+\alpha(1-\alpha)x_1 y_2+\alpha\ (1-\alpha)x_2 y_1\geqslant$$

$$(\alpha^2+(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha))\ x_1 x_2=x_1 x_2=\min\{x_1 x_2,\ y_1 y_{\,2}\}$$

Таким образом, квазивогнутость функции $x_1 x_2$ доказана.

Покажем теперь, что эта функция не является вогнутой. Возьмем два вектора $\boldsymbol{x}=(1,\ 1)$, $\boldsymbol{y}=(2,\ 2)$ и $\alpha=\frac{1}{2}$. Но тогда $u(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})=\frac{9}{4}$ и $\alpha u(\boldsymbol{x})+\ (1-\alpha)u(\boldsymbol{y})=\frac{5}{2}$. Поскольку $\frac{5}{2}>\frac{9}{4}$, то функция не является вогнутой.

<u>Способ 2</u> (С использованием матрицы Гессе)

Несложно проверить, что матрица $\boldsymbol{H}$ вторых частных производных функции $u(\boldsymbol{x})=x_1 x_2$ имеет вид

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Однако данная матрица не является отрицательно полуопределенной. Действительно, для вектора $\boldsymbol{z}'=(1,\ 1)$ имеем $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{Hz}=\ \mathbf{2}\ >\ \mathbf{0}$. Таким образом, функция не является вогнутой. Покажем, что она квазивогнута. Несложно увидеть, что $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{Hz}=2z_1 z_2$. Рассмотрим знак этой квадратичной формы при всех $\boldsymbol{z}$ таких, что $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}=0$, т.е. при всех $\boldsymbol{z}$ таких, что $x_2 z_1+x_1 z_2=0$. Умножив это равенство на $z_1$, получим $x_2(z_1)^2+x_1 z_1 z_2=0$. На внутренности положительного ортанта имеем $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{Hz}=2z_1 z_2=-2\frac{x_2}{x_1}\ (z_1)^2\leqslant 0$. Таким образом, получили квазивогнутость функции $u(\boldsymbol{x})=x_1 x_2$.

Как не сложно заметить, монотонно возрастающее преобразование $\ln(.)$ данной квазивогнутой функции переводит ее в вогнутую. Действительно матрица Гессе, для таким образом преобразованной функции, будет равна

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{x^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{x^2}\end{bmatrix}.$$

Подобная ситуация достаточно типична и прорешав достаточно много типовых задач может сложиться мнение, что каждая квазивогнутая функция переводится монотонно возрастающим преобразованием в вогнутую функцию и, в этом смысле, два эти класса функций эквивалентны. Отметим, однако, что это не так. Например, функция $f(x_1,\ x_2)=(x_1-1)+\sqrt{(1-x_1)^2+4(x_1+x_2)}$ квазивогнутая. Её линии уровня – непараллельные, прямые линии. Можно показать, что эта функция не может быть трансформирована в вогнутую функцию монотонным возрастающим преобразованием. Следует оговориться, что большинство подобных примеров достаточно причудливы и их построение требует достаточной изобретательности.

$\Leftarrow$

Как мы выяснили в предыдущем параграфе, функции переводящиеся друг в друга монотонно возрастающим преобразованием эквивалентны с точки зрения упорядочивания потребительских наборов. В связи с этим, естественно возникает вопрос о том, какие свойства функции полезности, помимо ранжировки потребительских наборов, сохраняются при трансформации функции полезности. Естественно ожидать, в силу того, что мы действуем на функцию полезности монотонно возрастающим преобразованием, сохранения свойств монотонности, строгой монотонности и локальной ненасыщаемости. Вопрос же о сохранении свойств вогнутости и квазивогнутости функции полезности не так очевиден.

**Теорема 12.**

Пусть $f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – монотонно возрастающая функция, а $u{:}X\to\mathbb{R}$ – некоторая квазивогнутая функция, заданная на выпуклом множестве $X$, тогда их суперпозиция также будет квазивогнутой функцией.

***Доказательство***:

Доказательство этого факта несложно, следует напрямую из определений квазивогнутости и монотонности и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Стоит отметить, что, вообще говоря, в отличие от свойства квазивогнутости, свойство вогнутости не сохраняется при монотонно возрастающем преобразовании, что показывает следующий пример.

**Пример 5.**

Рассмотрим функцию $u(x)=\ln(x)$, заданную на положительной полуоси $\mathbb{R}_{++}$. Непосредственной проверкой легко установить, что она является вогнутой на своей области определения. Действительно, вторая производная этой функции $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$ отрицательна на $\mathbb{R}_{++}$. Подвергнем $u(.)$ монотонно возрастающему преобразованию $f(y)= y^3$ и покажем, что функция $\hat{u}(x)=f(u(x))= (\ln(x))^3$ не является вогнутой. Найдем вторую производную данной функции

$$\frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x} = \frac{3(\ln(x))^2}{x};$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x)}{\partial x^2} = \frac{6\ln(x) - 3(\ln(x))^2}{x^2}.$$

Нетрудно заметить, что вторая производная функции $\hat{u}(.)$ может быть как положительной, так и отрицательной и, таким образом, функция $\hat{u}(.)$ не является вогнутой. Отметим, что, тем не менее, данная функция является квазивогнутой. (Проверьте это!) Этот результат, вообще говоря, не удивителен, так как выше мы установили два факта: 1) каждая вогнутая функция является квазивогнутой; 2) монотонно возрастающее преобразование переводит квазивогнутую функцию в квазивогнутую.

⇐

Рассмотренные выше свойства выпуклости и строгой выпуклости предпочтений тесно связаны с понятием предельной нормы замены[25]. Покажем теперь, что из выпуклости предпочтений следует закон неубывания предельной нормы замены.

Предположим, что предпочтения потребителя представимы дважды непрерывно дифференцируемой квазивогнутой функцией полезности $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Содержательно, норма замены указывает на то количество блага $j$, на которое необходимо сократить потребление этого товара в обмен на увеличение потребления блага $i$ с тем, чтобы уровень полезности потребителя и количество всех остальных товаров оставались неизменными. Таким образом, в случае если количество блага $i$ изменяется на дифференциально малую величину $dx_i$, то для того, чтобы потребитель остался на той же самой кривой безразличия $u(\boldsymbol{x}) = \bar{u}$ количество блага $j$ при условии что количество остальных благ остается неизменным должно измениться на величину $dx_j$ такую что

$$u_i'(\boldsymbol{x})\, dx_i + u_j'(\boldsymbol{x})\, dx_j = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{u_i'(\boldsymbol{x})}{u_j'(\boldsymbol{x})}.$$

Под **предельной нормой замены** $i$-ым благом $j$-ого обычно понимается величина

$$MRS_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\frac{u_i'(\boldsymbol{x})}{u_j'(\boldsymbol{x})}.$$

Найдем производную предельной нормы замены по $x_i$, помня о том, что количества благ, кроме $i$-го и $j$-го, не изменяются, и, мы находимся на одной и той же кривой безразличия (т.е. фактически предполагая зависимость $x_j$ от $x_i$). В этом случае

$$\frac{dMRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{dx_i} = \frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j(x_i)}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \cdot MRS_{ij}(\boldsymbol{x}).$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{u_{ii}''(\boldsymbol{x})\, u_j'(\boldsymbol{x}) - u_i'(\boldsymbol{x})\, u_{ij}''(\boldsymbol{x})}{(u_j'(\boldsymbol{x}))^2},$$

$$\frac{\partial MRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = -\frac{u_{ij}''(\boldsymbol{x})\, u_j'(\boldsymbol{x}) - u_i'(\boldsymbol{x})\, u_{jj}''(\boldsymbol{x})}{(u_j'(\boldsymbol{x}))^2}$$

получаем что

$$\frac{dMRS_{ij}(\boldsymbol{x})}{dx_i} = -\frac{u_{ii}''(\boldsymbol{x})\, u_j'(\boldsymbol{x}) - u_i'(\boldsymbol{x})\, u_{ij}''(\boldsymbol{x})}{(u_j'(\boldsymbol{x}))^2} + \frac{u_{ij}''(\boldsymbol{x})\, u_j'(\boldsymbol{x}) - u_i'(\boldsymbol{x})\, u_{ij}''(\boldsymbol{x})}{(u_j'(\boldsymbol{x}))^2} \cdot \frac{u_i'(\boldsymbol{x})}{u_j'(\boldsymbol{x})} = =$$

$$\frac{2u_{ij}''(\boldsymbol{x})u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}) - (u_i'(\boldsymbol{x}))^2 u_{jj}''(\boldsymbol{x}) - (u_j'(\boldsymbol{x}))^2 u_{ii}''(\boldsymbol{x})}{(u_j'(\boldsymbol{x}))^3}.$$

---

[25] Возможно, что впервые связь между поведением предельной нормы замены и выпуклостью предпочтений было отмечена Джоном Хиксом и Роем Алленом: «Принцип убывающей предельной полезности должен уступить место возрастающей предельной нормой замены…. Это условие выражается на диаграмме безразличия с помощью кривых безразличия, выгнутых по направлению к осям.» (Hicks, J.R., Allen R.G.D., *A Reconsideration of the Theory of Value*, Economica, 1934 (Цитировано по: *Теория потребительского поведения и спроса*, под ред. В.М. Гальперина, Спб.: Экономическая Школа, 1993 )).

Проверим, что закон неубывания предельной нормы замены выполняется, если функция полезности квазивогнута, или, что тоже самое, предпочтения выпуклы. В случае непрерывной дифференцируемости функции полезности квазивогнутость эквивалентна отрицательной полуопределенности матрицы Гессе на гиперплоскости $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} = 0$. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{z}$ равный $0$ для всех индексов не равных $i$, $j$ и $z_i = -u_j'(\boldsymbol{x})$, $z_j = u_i'(\boldsymbol{x})$. Очевидно, что $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} = 0$. Проведя непосредственные вычисления, получаем что

$$\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{z} = (u_i'(\boldsymbol{x}))^2 u_{jj}''(\boldsymbol{x}) - 2u_{ij}''(\boldsymbol{x})u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}) + (u_j'(\boldsymbol{x}))^2 u_{ii}''(\boldsymbol{x}) \leqslant 0.$$

Таким образом, в случае выпуклости предпочтений при $u_j'(\boldsymbol{x}) > 0$ мы имеем выполнение закона неубывания предельной полезности. Отметим, что в некотором смысле верно и обратное, т.е. выпуклость предпочтений эквивалентна неубыванию нормы предельной замены[26].

В приложениях экономической теории очень часто рассматриваются также дополнительные свойства предпочтений, которые налагают более сильные требования на функцию полезности. Так, например, в макроэкономике при рассмотрении поведения агрегированного потребителя часто предполагается выполнение свойства гомотетичности.

### Определение 10.

Отношение предпочтения называется **гомотетичным** , если

(1) для каждого положительного $t$ $t\boldsymbol{x} \in X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \in X$.

(2) для каждого положительного $t$ соотношение $t\boldsymbol{x} \sim t\boldsymbol{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$.

Опираясь, на приведенную в прошлом параграфе схему доказательства существования функции полезности представляющей строго монотонные предпочтения легко показать, что для строго монотонных и гомотетичных предпочтений существует положительно однородная функция полезности, представляющая эти предпочтения. Особенностью положительно однородной функции полезности является то, что предельная норма замены для любой пары товаров остается неизменной на луче $t\boldsymbol{x}$. Это полезное свойство эквивалентно тому, что кривые Энгеля[27] являются лучами, выходящими из начала координат. Кроме того, при выполнении этого свойства, свойств локальной ненасыщаемости, непрерывности и выпуклости, система неоклассических предпочтений допускает представление *вогнутой* функцией полезности[28].

В теории отраслевых рынков важную роль играют предпочтения, обладающие свойством квазилинейности.

### Определение 11.

Отношение предпочтения называется **квазилинейным на** $X$ по $K$-му благу, если

- для каждого положительного $t$ из $\boldsymbol{x} \in X$ следует $\boldsymbol{x} + te_K \in X$;
- для каждого положительного $t$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ из $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} + te_K \sim \boldsymbol{y} + te_K$.

---

[26] Доказательство этого факта смотри в Arrow K.J., Enthoven A.C., *Quasi-Concave Programming*, Econometrica, V. 29(4), 1961

[27] Кривыми Энгеля при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ в микроэкономике называется функция $\phi(R) = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, R)$, где $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R}_+^{K+1} \to \mathbb{R}_+$ – функция спроса, $\bar{\boldsymbol{p}}$ – некоторый фиксированный вектор цен, $R$ – доход потребителя.

[28] Подробнее смотри Rader, T., *Theory of Microeconomics*, NY, Academic Press,1972, pp. 166-67.

Отношения предпочтения, обладающие данным свойством, допускают представление функцией полезности вида $\tilde{u}(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x}_{-K})+ax_K$. Эта функциональная форма задает такую систему функций спроса, что спрос на первые $K–1$ благо не зависит от дохода и, тем самым, для этих благ полностью отсутствует эффект дохода. Данное свойство оказывается полезно при обсуждении агрегирования предпочтений и выяснении влияния изменения параметров модели (например, цен и доходов) на благосостояние потребителя.

Наконец в макроэкономике, обычно рассматриваются функции полезности потребителя вида $u(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i)$. Такие функции полезности получаются в случае так называемых сепарабельных предпочтений. Пусть $\{N_i\}_{i=1}^{s}$ – разбиение множества $\{1, ..., K\}$, т.е. $\cup_{i=1}^{s}N_i = \{1, ..., K\}$, $N_i \cap N_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и, кроме того, $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_s$. Такое разбиение допустимого потребительского множества довольно естественно, если мы рассматриваем предпочтения индивидуума во времени, и $X_i$ рассматривается как «сужение» допустимого потребительского множества на $i$–ый период (год). Отметим, что неявно предполагается такая нумерация благ, где номера благ из $N_{i+1}$ идут сразу за номерами благ из $N_i$. Если исходно это не так, то данного свойства можно достичь простой перенумерацией.

**Определение 12.**

Отношение предпочтения называется **слабо сепарабельным**, если для разбиения $\{N_j\}_{j=1}^{s}$ множества $\{1, ..., K\}$ из того, что $(\boldsymbol{x}_j,\hat{\boldsymbol{x}}_{-j})\succeq(\boldsymbol{y}_j,\hat{\boldsymbol{y}}_{-j})$, для $\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j\in X_j$ и *некоторых* $\hat{\boldsymbol{x}}_{-j},\hat{\boldsymbol{y}}_{-j}\in\Pi_{i\neq j}X_i$ следует что $(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_{-j})\succeq(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{y}_{-j})$ для *всех* $\boldsymbol{x}_{-j},\boldsymbol{y}_{-j}\in\Pi_{i\neq j}X_i$.

Очевидно, что в случае, если предпочтения представимы аддитивно–сепарабельной функцией полезности, то это свойство выполнено, и, ранжировка потребительских наборов $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_{-I},\ \boldsymbol{x}_I)$ и $\boldsymbol{x}'=(\boldsymbol{x}'_{-I},\ \boldsymbol{x}_I)$ не зависит от значений $\boldsymbol{x}_I$. Очевидно, также, что данное свойство должно быть выполнено при *любом* выборе подмножества $I$. Данное соображение мотивирует следующее определение:

**Определение 13.**

Слабо сепарабельные отношения предпочтения называются **строго сепарабельными**, если свойство слабой сепарабельности выполняется при любом разбиении множества $\{1, ..., K\}$.

Относительно предпочтений удовлетворяющих свойству строгой сепарабельности справедливо, что непрерывные предпочтения строго сепарабельны, тогда и только тогда, когда каждое их непрерывное представление функцией полезности аддитивно–сепарабельно[29]. Данный тип предпочтений позволяет нам гарантировать отсутствие товаров Гиффена и многие другие полезные свойства функции спроса.

Итак, к данному моменту отталкиваясь от нескольких достаточно разумных аксиом о свойствах индивидуальных предпочтений, были получены достаточные условия существования функции полезности и рассмотрены условия на предпочтения, гарантирующие такие ее естественные свойства как монотонность, квазивогнутость и т.д. Тем самым, был описан способ, которым потребитель упорядочивает потребительские наборы из множества допустимых альтернатив. Для того чтобы перейти к анализу выбора потребителя осталось рассмотреть дополнительные ограничения на альтернативы, которые совместно с

---

[29] Подробнее о сепарабельности предпочтений смотри Barten, A.P., Bohm, V., *Consumer Theory*, in Handbook of Mathematical Economics, V.2, K.J. Arrow, M.D. Intriligator, eds., North-Holland, 1982 (pp. 392-94), и содержащиеся там ссылки.

ограничениями налагаемыми множеством допустимых альтернатив и формируют ту ситуацию выбора, с которой сталкивается потребитель.

## Задачи

38.

А) "…suppose we choose $\boldsymbol{x}^1 \sim \boldsymbol{x}^2$. Point $\boldsymbol{x}^1$ represents a bundle containing a proportion of the good $x_1$ which is relatively "extreme," compared to the proportion of $x_1$ in the other bundle $\boldsymbol{x}^2$. The bundle $\boldsymbol{x}^2$, by contrast, contains a proportion of the other good, $x_2$, which is relatively extreme compared to that contained in $\boldsymbol{x}^1$. Though each contains a relatively high proportion of one good compared to the other, the consumer is indifferent between the two bundles. Now, any convex combination of $\boldsymbol{x}^1$ and $\boldsymbol{x}^2$, such as $\boldsymbol{x}^t$, will be a bundle containing a more "balanced" combination of $x_1$ and $x_2$ than does either "extreme" bundle $\boldsymbol{x}^1$ or $\boldsymbol{x}^2$ "[30]

Б) "Условие выпуклости … чрезвычайно важно и более ограничительно. Оно означает, что если каждый из двух векторов $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ предпочитается третьему вектору $\boldsymbol{x}$, то любая их "смесь" $\alpha\boldsymbol{x}'+(1-\alpha)\,\boldsymbol{x}''$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ также считается лучше $\boldsymbol{x}$. Вполне вероятно, что вы любите виноградный и томатный соки больше яблочного, но это вовсе не означает, что вы предпочтете выпить вместо стакана яблочного стакан смеси из виноградного и томатного соков. Однако в теоретических рассуждениях обычно рассматривают потребление за более длительный промежуток времени, например за год. Тогда выпуклость предпочтений в приведенном выше примере означает, что если вы предпочитаете виноградный и томатный соки яблочному, то вы готовы также пить часть года первый из них, а оставшуюся часть – второй вместо яблочного круглый год. Такое допущение вполне правдоподобно, хотя возможны и возражения. Одно из них состоит в том, что предпочтение зависит от способа чередования напитков в течении года. Другое, быть может, более существенное, относится к самому методу описания поведения: мои предпочтения могут меняться в зависимости от многих причин, например от самочувствия, так что говорить о предпочтении одного потребительского набора другому не имеет смысла."[31]

Прокомментируйте эти цитаты. Согласны ли Вы с ними? Если нет, то почему?

39. Покажите, что функция полезности монотонна (не убывает) тогда и только тогда, когда монотонно представляемое ею отношение предпочтения.

40. Покажите, что строго монотонные предпочтения локально ненасыщаемы. Приведите пример монотонных предпочтений, не обладающих свойством локальной ненасыщаемости.

41. Приведите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые не обладают свойством монотонности.

42. Покажите, что строго выпуклые монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

---

[30] Jehle, G.A. and Reny P.J., *Advanced Microeconomic Theory*, Addison-Wesley, 1998, p. 118

[31] Полтерович, В.М., *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М.: Наука, 1990, стр. 10.

43. Покажите, что если полные транзитивные и непрерывные предпочтения заданы на компактном множестве $X$, то эти предпочтения не могут обладать свойством локальной ненасыщаемости.

44. Будем говорить, что предпочтения обладают свойством сильной монотонности, если существует, по крайней мере, одно благо, большее количество которого строго предпочитается меньшему. Запишите формально это определение. Как это свойство соотносится со свойствами монотонности и строгой монотонности? Покажите, что из свойства сильной монотонности следует свойство локальной ненасыщаемости.

45. Пусть предпочтения потребителя заданы посредством полного и транзитивного бинарного отношения. Покажите, что предпочтения потребителя выпуклы тогда, и только тогда, когда выпукло множество нехудших элементов, т.е. множество $L^{+}(\boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}\in X|\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}\}$.

46. Приведите пример непрерывной квазивогнутой функции полезности, не являющейся монотонной.

47. Покажите, что если функция полезности строго вогнута, то представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

48. Покажите, что функция полезности строго квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

49. Покажите, что если дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности строго вогнута, то для этой функции выполняется закон Госсена об убывании предельной полезности. Верно ли утверждение о том, что из закона Госсена не следует выпуклость предпочтений?

50. Докажите теорему 11.

51. Докажите теорему 12.

52. Покажите, что отношение предпочтения, задаваемое положительно однородной (первой степени) функцией полезности обладает свойством гомотетичности.

53. Покажите, что полное, транзитивное, гомотетичное и непрерывное отношение предпочтения представимо однородной функцией полезности.

54. Пусть предпочтения обладают свойствами полноты, транзитивности, непрерывности и гомотетичности и задаются на $\mathbb{R}^{n}_{+}$. Известно, также, что они представимы аддитивно-сепарабельной функцией полезности, т.е. в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum u_i(x_i).$$

Покажите, что

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum a_i x_i^{\rho}$$

единственная (с точностью до монотонно возрастающего преобразования) функция, удовлетворяющая этим требованиям. Каковы ограничения на параметры $a_i$ и $\rho$ в случае если предпочтения ко всему прочему обладают свойством строгой монотонности? Докажите, что функция

$$u'(\boldsymbol{x}) = (\sum \alpha_i x_i^{\rho})^{1/\rho},$$

где $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$ порождается теми же предпочтениями, что и $u(\boldsymbol{x}) = \sum a_i x_i^{\rho}$.[32]

55. (Продолжение) Покажите, что функция полезности

$$u'(\boldsymbol{x}) = (\sum \alpha_i x_i^{\rho})^{1/\rho}$$

представляет те же предпочтения, что и функция Кобба-Дугласа.

56. (Продолжение) Покажите, что функция полезности

$$u'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\rho \to -\infty} (\sum \alpha_i x_i^{\rho})^{1/\rho}$$

представляет те же предпочтения, что и функция $u''(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

57. (Продолжение) Используя полученные ранее результаты, найдите функции, представляющие те же предпочтения, что и функции

$$u'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\rho \to 0} (\sum (\alpha_i x_i)^{\rho})^{1/\rho},$$

$$u''(\boldsymbol{x}) = \lim_{\rho \to -\infty} (\sum (\alpha_i x_i)^{\rho})^{1/\rho}.$$

58. Пусть предпочтения представимы дифференцируемой функцией $u(\boldsymbol{x})$. Покажите, что предельная норма замены инвариантна относительно строго возрастающего преобразования функции полезности. Как связаны $MRS_{ij}(\boldsymbol{x})$ и $MRS_{ji}(\boldsymbol{x})$?

59. В случае двух товаров покажите, что дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности аддитивно-сепарабельна (имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$) тогда и только тогда, когда

$$MRS_{12}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^2 MRS_{12}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial MRS_{12}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial MRS_{12}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}.$$

---

[32] Рассмотренная в данном упражнении функция имеет специальное название – функция с постоянной эластичностью замены, или, CES-функция (constant elasticity of substitution). Впервые в контексте микроэкономической теории она была рассмотрена в работе: Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., Solow, R.M., *Capital–Labor Substitution and Economic Efficiency*, Review of Economics and Statistics, V. 43, 1961.

60. Пусть некоторая система выпуклых неоклассических предпочтений, заданных на $\mathbb{R}^2_+$, представляется непрерывной, аддитивно–сепарабельной функцией $\tilde{u}(\boldsymbol{x})= u(x_1) + u(x_2)$. Покажите, что функция $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$ вогнута. (Подсказка: покажите, что для любых $m$ и $n$ справедливо $u(\frac{m}{2^n}x + (1-\frac{m}{2^n})y) \geqslant \frac{m}{2^n}u(x) + (1-\frac{m}{2^n})\, u(y)$ и воспользуйтесь непрерывностью)

61. Какими свойствами (монотонность, строгая монотонность, локальная ненасыщаемость, выпуклость, строгая выпуклость, гомотетичность, квазилинейность, сепарабельность) обладают предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$, представимые следующими функциями полезности?

a) $u(\boldsymbol{x})=x_1+ x_2$;

b) $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1} +\sqrt{x_2}$;

c) $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1} + x_2$;

d) $u(\boldsymbol{x})=x_1x_2$;

e) $u(\boldsymbol{x})= \ln(x_1)+\frac{x_2^2}{2}$ ;

f) $u(\boldsymbol{x})=\frac{x_1x_2}{x_1+ x_2}$;

g) $u(\boldsymbol{x})= x_1^2+x_2^2$;

h) $u(\boldsymbol{x})=\min\{x_1, x_2\}$;

i) $u(\boldsymbol{x})=\max\{x_1, x_2\}$;

j) $u(\boldsymbol{x})=\min\{2x_1- x_2, 2x_2- x_1\}$;

k) $u(\boldsymbol{x})=28x_1+28x_2-2x_1^2-3x_1x_2-2x_2^2$;

l) $u(\boldsymbol{x})=\ln(x_1- 1) - 2\ln(2 - x_2)$.

Какие из этих функций являются вогнутыми? Какие квазивогнутыми? Для каждой из этих функций постройте эскизы кривых безразличия.

## *Бюджетное множество*

Выше было введено понятие множества допустимых альтернатив $X$, которое отражает весь набор *физических*, *институциональных* ограничений налагаемых на выбор потребителя. Например, индивидуум физически не может работать более 24 часов в сутки или потреблять какое-то благо в отрицательных количествах. Ограничения этого типа задают первичные границы, которые очерчивают область, в которой осуществляется потребительский выбор. Помимо ограничений на область определения выражаемых через множество $X$ действия потребителя подчинены разного рода *экономическим* ограничениям. Наиболее распространенный тип ограничений этого типа — это так называемое **бюджетное ограничение** — естественное требование, ограничивающее *расходы* потребителя его *доходами*. Множество потребительских наборов из $X$, удовлетворяющих этому ограничению, называют **бюджетным множеством**. В наиболее простом случае, когда доходы потребителей фиксированы, а расходы представлены затратами на покупку потребительского набора бюджетное множество имеет вид:

$$B(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x}\in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\},$$

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_+^K$ — вектор цен рассматриваемых благ, а $R$ — доход потребителя. Альтернативно, можно предполагать, что изначально потребитель владеет некоторым **начальным запасом** благ – набором (вектором) благ $\omega^{\mathrm{T}}=(\omega_1,.., \omega_K)$. Если предположить, что у потребителя нет иных форм дохода кроме начального запаса, то в этом случае его бюджетное множество представляется в виде: $B'(\boldsymbol{p}, \omega) = \{\boldsymbol{x}\in X \mid \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \omega)\leqslant \mathbf{0}\}= \{\boldsymbol{x}\in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant \boldsymbol{p}\omega\}$, то есть стоимость покупок не может превышать стоимости продаж. Возможна двоякая интерпретация данного бюджетного множества. С одной стороны, его можно понимать как продажу *всего* вектора $\omega$ с последующей покупкой набора $\boldsymbol{x}$. С другой стороны, возможно интерпретировать данное ограничение как покупку/продажу только некоторого недостающего/избыточного количества относительно $\omega$. Последней интерпретации мы и будем придерживаться. Аналогичные, по сути, бюджетные множества возникают в ситуации, если предполагается, что потребитель помимо фиксированного дохода (или начальных запасов) получает некоторый доход, например, от принадлежащих акций промышленных предприятий или из других источников. Естественно, что в конкретных экономических моделях бюджетное множество может принимать довольно причудливый вид. Оно может сильно отличаться (формально, но не идеологически) от приведенных выше вариантов, но многие результаты и методы рассуждения, которые мы проиллюстрируем в дальнейшем, с некоторыми изменениями могут быть перенесены и на эти более сложные модели.

В заключение данного параграфа сформулируем ряд свойств бюджетных множеств, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Теорема 13.**

Пусть множество $X$ – множество допустимых альтернатив и $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_+^K$. Тогда

(1) Бюджетное множество $B(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x}\in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}$ не пусто, если $R > \inf_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{px}$.

(2) Бюджетное множество $B'(\boldsymbol{p}, \omega) = \{\boldsymbol{x}\in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant \boldsymbol{p}\omega\}$ не пусто, если $\omega\in X$.

(3) Бюджетные множества $B(\boldsymbol{p}, R)$ и $B'(\boldsymbol{p}, \omega)$ замкнуты и выпуклы в $\mathbb{R}^K$.

(4) Бюджетные множества $B(\boldsymbol{p}, R)$ и $B'(\boldsymbol{p}, \omega)$ ограничены тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^K$.

(5) $B(\boldsymbol{p}, R) = B(\lambda\boldsymbol{p}, \lambda R)$ и $B'(\boldsymbol{p}, \omega)= B'(\lambda\boldsymbol{p}, \omega)$ для любого $\lambda\in\mathbb{R}$.

(6) Если $R^* \geqslant R$, тогда $B(\boldsymbol{p}, R)\subseteq B(\boldsymbol{p}, R^*)$.

(7) Если $\boldsymbol{p}^*\geqslant \boldsymbol{p}$, тогда $B(\boldsymbol{p}^*, R)\subseteq B(\boldsymbol{p}, R)$.

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство этих фактов несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Введенное понятие бюджетного множество позволяет описывать достаточно много ситуаций, с которыми сталкиваются индивидуумы в процессе принятия экономических решений. Как уже говорилось во вводном параграфе, для того чтобы было возможно анализировать и предсказывать поведение индивидуума необходимо описать способ упорядочивания потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы. К данному моменту мы выполнили данную программу и теперь можем приступить к описанию потребительского выбора и его свойств.

## Задачи

62. Пусть допустимое потребительское множество $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_{+}^{K}|\ x_1x_2+x_1\geqslant 1\}$, потребитель имеет фиксированный доход $R>0$, цены на товары задаются вектором $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^{K}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $(\boldsymbol{p},R)$. Является ли оно выпуклым? Замкнутым? Ограниченным? При каких значениях $(\boldsymbol{p},R)$ бюджетное множество пусто?

63. Пусть допустимое потребительское множество $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_{+}^{K}|\ x_1x_2\geqslant 2\}$, потребитель имеет начальный запас $\omega=(1,1)$, цены на товары задаются вектором $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^{K}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $\boldsymbol{p}$. Является ли оно выпуклым? Замкнутым? Ограниченным? При каких значениях $\boldsymbol{p}$ бюджетное множество непусто?

64. Пусть допустимое потребительское множество $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_{+}^{K}|\ x_1,x_2 -$ целые$\}$, потребитель имеет фиксированный доход $R>0$, цены на товары задаются вектором $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^{K}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя.

65. Пусть допустимое потребительское множество $X=\mathbb{R}_{+}^{K}$, потребитель имеет начальный запас $\omega=(1,1)$, цены на товары задаются вектором $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^{K}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя, в случае если в экономике ввели налог с продаж, взимаемый как процент от цены. Является ли бюджетное множество выпуклым?

66. Пусть в экономике присутствует один потребительский товар, продаваемый по цене $p$ . Доход потребителя складывается из фиксированной части $R>0$ и заработной платы $wh$, где $h$ – время, которое потребитель посвящает работе, а $w$ – почасовая ставка оплаты труда. Потребитель не может работать больше 24 часов в сутки. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Постройте его эскиз. Является ли оно выпуклым? Что произойдет, если в модель ввести налог с заработной платы? Дохода? Предложите схему налогообложения, когда бюджетное множество невыпукло.

67. Предположим, что потребитель живет бесконечное число периодов времени (время дискретно). В каждый период $t$ он, используя имеющийся у него капитал $k_t$, исходя из вогнутой производственной функцией $f(k_t)$ производит некоторый товар, который может либо потребить $c_t$, либо направить на увеличение своего капитала (инвестировать)–$i_t$. Капитал предполагается убывающим от периода к периоду, с постоянной нормой выбытия $1>\delta>0$. Начальный запас капитала в нулевой момент времени равен $k_0$. Предположим также, что значения $c_t$, $i_t$, $k_t$ могут принимать только неотрицательные значения. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Покажите, что оно выпукло.

68. Для случая двух товаров изобразите эскиз бюджетного множества, если цена первого товара зависит от объема, а цена второго постоянна, причем цена первого товара убывает при росте объема. Доход потребителя предполагаем фиксированным. Является ли данное бюджетное множество выпуклым?

69. Докажите теорему **13**.

70. При каких условиях в пунктах (7), (8) теоремы **13** нестрогие знаки могут быть заменены строгими? Покажите, что без дополнительных предположений этот факт, вообще говоря, не верен.

## *Задача потребителя. Основные понятия и свойства*

Как уже отмечалось, гипотеза рациональности предполагает, что экономический агент, ориентируясь на свои вкусы, предпочтения выбирает наилучший вариант из числа доступных ему альтернатив. Это предположение фактически однозначно задает определение функции спроса и постановку задачи потребителя, в случае, когда известны отношение предпочтения и бюджетное множество.

**Определение 14.**

Пусть на $X$ задана система неоклассических предпочтений $\{\succ, \succeq, \sim\}$, $\mathcal{B}$ – совокупность бюджетных множеств $B \subset X$. Тогда отображение $\boldsymbol{x}$: $\mathcal{B} \to 2^X$, определяемое как $\boldsymbol{x}(B) = \{\boldsymbol{x} \in B \mid \forall\ \boldsymbol{y} \in B\ \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}\}$, называется **спросом Маршалла**. В случае если $\boldsymbol{x}(B)$ – одноэлементное множество $\forall\ B \in \mathcal{B}$, то $\boldsymbol{x}(B)$ называется **функцией спроса Маршалла**.[33]

В случае если предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u{:}X \to R$, значение спроса в точке может быть альтернативным образом определено как $\boldsymbol{x}(B) = \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{y} \in B} u(y)$. Если потребитель, имеет фиксированный доход и осуществляет выбор среди наборов из $B(\boldsymbol{p}, R)$, отображение (функция) спроса представляет собой решение следующего (параметризованного) семейства задач математического программирования, каждая из которых называется **(прямой или маршаллианской) задачей потребителя** при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$

$$u(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}, R)$$

или, что эквивалентно, семейства задач

$$u(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R,\ \ \boldsymbol{x} \in X.$$

Для удобства обозначений, в случае, когда семейство бюджетных множеств явным образом параметризуется, вместо общего обозначения $\boldsymbol{x}(B)$ будем писать $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – вектор параметров параметризующих семейство бюджетных множеств. Так в случае задачи потребителя с фиксированными доходами вместо $\boldsymbol{x}(B(\boldsymbol{p}, R))$ будем писать $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$.

Сейчас, на примере лексикографического предпочтения (его свойства обсуждались в примере **3**) мы продемонстрируем способ нахождения функции спроса.

**Пример 6.**

Пусть допустимое потребительское множество $X = \mathbb{R}^2_+$, $R > 0$ и $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2_{++}$. Рассмотрим потребительский набор $(\dfrac{R}{p_1}, 0)$ и покажем, что он предпочтительнее любого отличного потребительского набора принадлежащего бюджетному множеству $B(\boldsymbol{p}, R)$. Для любого потреби-

---

[33] Впервые понятие спроса было введено Франсуа Огюстеном Курно в работе Cournot, A, *Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des riches*, 1838.

тельского набора $\tilde{\boldsymbol{x}}$ из бюджетного множества, в который второе благо входит в положительном количестве справедливо, что первая компонента вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}$ строго меньше чем $\frac{R}{p_1}$. Таким образом, по определению лексикографического предпочтения имеем, что потребительский набор $(\frac{R}{p_1}, 0)$ представляет собой спрос потребителей при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$.

$\Leftarrow$

Как известно из вводного курса микроэкономики и как, впрочем, несложно догадаться самостоятельно, задача поиска спроса потребителя имеет достаточно прозрачную геометрическую интерпретацию. Геометрически, в случае локально ненасыщаемых предпочтений (причина появления этого уточнения станет ясной при рассмотрении свойств функции спроса), спрос представляет собой точку касания кривой безразличия и бюджетной линии, как это изображено на Рисунке 8. Таким образом, для того чтобы найти спрос агента, необходимо нарисовать бюджетный треугольник, одну из кривых безразличия и двигая ее (на самом деле переходя от одной кривой безразличия к другой) найти точку касания с бюджетной линией.

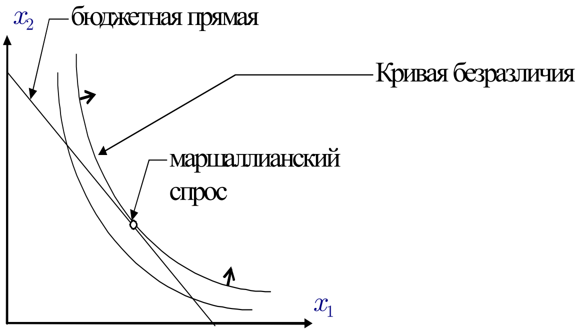


Рисунок 8 Маршаллианский спрос.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств функции спроса и задачи потребителя в целом. Для определенности будем рассматривать случай потребителя с фиксированным доходом. Отметим, что многие, из получаемых в дальнейшем результатов, без труда могут быть перенесены и на бюджетные множества общего вида.

### Теорема 14. (Свойства маршаллианского спроса)

Пусть $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^K_{++}$, $R > \inf_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}$ и потребитель описывается системой непрерывных неоклассических предпочтений. Тогда

(1) решение задачи потребителя существует, т.е. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \neq \varnothing$;

(2) если предпочтения потребителя выпуклы, тогда $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — выпуклое множество;

(3) если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — непрерывная функция;

(4) отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ положительно однородно нулевой степени[34], т. е. $\boldsymbol{x}(\lambda\boldsymbol{p}, \lambda R) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$;

(5) если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса, т.е. если $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} = R$;

---

[34] В дальнейшем, говоря об однородности, мы будем автоматически предполагать положительную однородность, не уточняя этого специально.

(6) если $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ – отображение спроса при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, а $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$ – отображение спроса при ценах $\boldsymbol{p}'$ и доходе $R'$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$, $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{p}, R)$, $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}', R')$, то $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$.

***<u>Доказательство</u>***:

(1) Используя теорему 13, получаем что $B(\boldsymbol{p}, R)$– компакт. В силу того, что непрерывные неоклассические предпочтения, представимы непрерывной функцией полезности, то по теореме Вейерштрасса имеем, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \neq \varnothing$.

(2) Пусть предпочтения индивидуума выпуклы, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ не пусто и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два элемента из множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\boldsymbol{x}^{\alpha} = \alpha\, \boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\boldsymbol{x}''$, где $0<\alpha<1$. В силу сделанных предположений множество $B(\boldsymbol{p}, R)$– выпукло, из этого с учетом того, что $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{p}, R)$ получаем $\boldsymbol{x}^{\alpha} \in B(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. набор $\boldsymbol{x}^{\alpha}$ является допустимым в задаче потребителя. Так как $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то по определению отображения спроса имеем $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$, что эквивалентно одновременному выполнению $\boldsymbol{x}' \succeq \boldsymbol{x}''$ и $\boldsymbol{x}' \preceq \boldsymbol{x}''$. Из $\boldsymbol{x}' \succeq \boldsymbol{x}''$ по свойству выпуклости предпочтений имеем $\boldsymbol{x}^{\alpha} \succeq \boldsymbol{x}''$, а так как $\boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ то $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{p}, R)$ $\boldsymbol{x}'' \succeq \boldsymbol{y}$ а значит, имеем $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{p}, R)$ $\boldsymbol{x}^{\alpha} \succeq \boldsymbol{y}$. Это вместе с $\boldsymbol{x}^{\alpha} \in B(\boldsymbol{p}, R)$ и означает выпуклость множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$.

(3) Доказательство того, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ – одноэлементное множество несложно, в общих чертах повторяет доказательство предыдущего и оставляется читателю в качестве упражнения. Здесь же докажем ее непрерывность. Рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{p}^n, R^n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}\}$, где $R^n > \inf_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{p}^n \boldsymbol{x}$ для каждого $n$ и $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}) > (\boldsymbol{0}, \inf_{\boldsymbol{x}\in X} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x})$, такую, что порождаемая последовательность $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ решений задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}^n$ и доходах $R^n$ (т.е. $\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^n, R^n)$) сходится, т.е. $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{\boldsymbol{x}}$. Поскольку $\boldsymbol{p}^n\, \boldsymbol{x}^n \leqslant R^n$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}$. Для доказательства непрерывности функции спроса необходимо показать, что $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$, т.е. что $\bar{\boldsymbol{x}}$ является оптимальным выбором потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$. Предположим противное, т.е. существует набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, такой что $u(\hat{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\, \hat{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}$.

В силу замкнутости множества допустимых альтернатив $X$ справедливо, что $\inf_{\boldsymbol{x}\in X} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x} = \min_{\boldsymbol{x}\in X} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}$, то $\bar{R} > \min_{\boldsymbol{x}\in X} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}$. Таким образом, существует потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой, что $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\, \tilde{\boldsymbol{x}} < \bar{R}$. Действительно, возьмем $\boldsymbol{x}^{\alpha} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}} + (1-\alpha)\boldsymbol{z}$ $(\boldsymbol{0}<\alpha<1)$, где $\boldsymbol{z} \in \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x}\in X} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}$. При достаточно больших значениях $\alpha$ в силу непрерывности имеем, что $u(\boldsymbol{x}^{\alpha}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{x}^{\alpha} < \bar{R}$ и в качестве $\tilde{\boldsymbol{x}}$ возьмем $\boldsymbol{x}^{\alpha}$.

Далее, найдется достаточно большое $N$ такое, что при $n>N$ выполнено $\boldsymbol{p}^n\, \tilde{\boldsymbol{x}} < R^n$. Пусть это не так, т.е. существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $\boldsymbol{p}^{n_k} \tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant R^{n_k}$ $\forall k$. Тогда, перейдя к пределу, мы получили бы $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \bar{R}$, что противоречит выбору $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Для каждого $n$ такого, что $\boldsymbol{p}^n\, \tilde{\boldsymbol{x}} < R^n$ в силу оптимальности $\boldsymbol{x}^n$ мы должны иметь $u(\boldsymbol{x}^n) > u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Так как функция полезности непрерывна, то, переходя к пределу, получаем $u(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Тем самым мы пришли к противоречию. Это означает, что набор $\bar{\boldsymbol{x}}$ оптимален при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$. Таким образом, доказана непрерывность функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ по ценам и доходу.

Замечание. В общем случае можно показать, что отображение спроса имеет замкнутый график, используя, с незначительными изменениями предложенную схему доказательства.[35]

(4) Доказательство не сложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

(5) Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ – отображение спроса, и закон Вальраса не выполнен, т.е. $\exists\ \hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ такой, что $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}<R$. Тогда по свойству локальной ненасыщаемости в любой окрестности точки $\hat{\boldsymbol{x}}$ должен существовать набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$, такой, что $\tilde{\boldsymbol{x}}\succ\hat{\boldsymbol{x}}$. Если выбрать достаточно малую окрестность, то $\tilde{\boldsymbol{x}}$ будет удовлетворять бюджетному ограничению ($\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} \leqslant R$), что противоречит оптимальности набора $\hat{\boldsymbol{x}}$.

(6) Так как $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ и $\boldsymbol{x}'\in B(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}'$, аналогично из того, что $\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$ и $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}', R')$ следует $\boldsymbol{x}' \succeq \boldsymbol{x}$. В силу транзитивности отношения $\succeq$ имеем, что $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}'$. Откуда по определению функции спроса имеем $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$.

■

Поясним содержание данного утверждения. Первые пять пунктов данного утверждения достаточно прозрачны, и являются стандартными свойствами задач математического программирования. В них показано существование решения задачи потребителя и базовые свойства, которым удовлетворяет отображение спроса: однородность, выпуклость, выполнение закона Вальраса (в точке оптимума бюджетное ограничение выходит на равенство). Наибольший интерес вызывает свойство под номером 6. Его удобно пояснять в терминах теории выбора, которая подробно будет рассмотрена в дальнейшем. Если в некоторой ситуации потребителю были доступны потребительские наборы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ и был выбран (однозначно[36]) потребительский набор $\boldsymbol{x}$, то тем самым, выбор явно указывает, что набор $\boldsymbol{x}$ лучше набора $\boldsymbol{x}'$. Таким образом, если в какой либо другой ситуации *рациональный* потребитель выбирает набор $\boldsymbol{x}'$, то, следовательно, набор $\boldsymbol{x}$ ему не доступен, не удовлетворяет бюджетному ограничению. Данное свойство запрещает ситуацию, когда в двух ситуациях выбора в первой ситуации потребитель своим выбором сигнализирует, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}'$, и в то же время выбирает $\boldsymbol{x}'$, когда в другой ситуации ему доступны и $\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{x}'$.

Следующий пример иллюстрирует дополнительные свойства, которым удовлетворяет спрос, порожденный однородной функцией полезности.

**Пример 7.**

Пусть множество допустимых альтернатив $X=\mathbb{R}_{+}^{K}$ и предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u$: $\mathbb{R}_{+}^{K}\to\mathbb{R}$ положительно однородной первой степени. Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1)$ – отображения спроса при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходах $R$ и $1$ соответственно. Покажем, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)=R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1)$, то есть спрос однороден первой степени по доходу. Пусть $\hat{\boldsymbol{x}} \in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ а $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1)$. Для данных потребительских наборов справедливо, что $R\bar{\boldsymbol{x}}\in B(\boldsymbol{p}, R)$ и $\dfrac{\hat{\boldsymbol{x}}}{R}\in B(\boldsymbol{p}, 1)$. В силу того, что $\hat{\boldsymbol{x}}$ – спрос при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$ имеем, что $u(\hat{\boldsymbol{x}})\geqslant u(R\bar{\boldsymbol{x}})=Ru(\bar{\boldsymbol{x}})$. Аналогично, так как $\bar{\boldsymbol{x}}$ – спрос при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $1$ имеем, что $u(\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant u(\dfrac{\hat{\boldsymbol{x}}}{R})=\dfrac{1}{R}u(\hat{\boldsymbol{x}})$. Объединяя эти неравенства, получаем:

---

[35] Подробнее о непрерывности в задачах оптимизации смотри В. Гильденбранд, *Ядро и равновесие в большой экономике*, М.: Наука, 1986 (стр. 23-35).

[36] Иными словами, мы имеем функцию спроса, а не отображение.

$$u(\hat{\boldsymbol{x}}) \geqslant Ru(\overline{\boldsymbol{x}}) \geqslant R(\frac{1}{R}u(\hat{\boldsymbol{x}}))=u(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

Таким образом, $u(\hat{\boldsymbol{x}})=Ru(\overline{\boldsymbol{x}})$. Набор $R\overline{\boldsymbol{x}}$ допустим при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, но $u(R\overline{\boldsymbol{x}}) = Ru(\overline{\boldsymbol{x}})=u(\hat{\boldsymbol{x}})$, где $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Таким образом, получили $R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1) \subseteq \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Обратное включение показывается аналогично. Тем самым показано, что для случая положительно однородной функции полезности кривые Энгеля представляют собой конусы выходящие из начала координат. В случае же функции спроса кривые Энгеля являются лучами.

$\Leftarrow$

Помимо вышеперечисленных, одним из наиболее важных свойств функции спроса, используемых при изучении влияния изменения цен на потребительский выбор является свойство называемое **законом спроса**[37] **при компенсированном изменении дохода по Слуцкому**.

**Теорема 15. (Закон спроса при компенсированном изменении дохода по Слуцкому)**

Пусть выполнены все условия теоремы 14 и, кроме того, система предпочтений обладает свойством локальной ненасыщаемости. Тогда для любых $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ и $\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R')$, где $R' = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ справедливо свойство

$$(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \leqslant 0,$$

причем это неравенство строгое, если $\boldsymbol{x}'\notin B(\boldsymbol{p}, R)$.

***<u>Доказательство</u>***:

Рассмотрим выражение $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})$. Раскрыв скобки, и воспользовавшись тем фактом, что при выполнении свойства локальной ненасыщаемости бюджетное ограничение выходит на равенство и определением $R'$, получим:

$$(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' = R - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'.$$

В силу того, что $R' = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ имеем, что $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}', R')$. Пусть $\boldsymbol{x}'\in B(\boldsymbol{p}, R)$, тогда по свойству 6 теоремы 14 имеем, что $\boldsymbol{x}'\in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Откуда в силу свойства локальной ненасыщаемости предпочтений получаем: $R = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$, а значит $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) = 0$. Пусть $\boldsymbol{x}'\notin B(\boldsymbol{p}, R)$, тогда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' > R$, что означает $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) < 0$.

■

Данное свойство тесно связано с желаемым свойством спроса – спрос на $i$-ый товар убывает при росте своей цены. Действительно, пусть цена $i$-ого товара выросла, тогда приведенное выше неравенство означает, что спрос на $i$-ый товар не может вырасти. Но, данное свойство выполняется только при условии компенсированного изменения дохода, т.е. при условии, что доход изменился таким образом, чтобы компенсировать рост цены и позволить потребителю покупать прежний потребительский набор. Тем не менее, оно достаточно информативно и может служить полезным инструментом анализа, как показывает, например, следующий пример.

**Пример 8.**

Рассмотрим экономику с двумя благами. В первый момент времени вектор цен был равен $\boldsymbol{p}^0=(1, 1)$, а доход потребителя $R^0=8$. Во второй момент времени цены изменились и стали равны $\boldsymbol{p}^1= (1, 2)$, а доход стал равен $R^1=12$. Спрос потребителя в первый момент времени

---

[37] В русской традиции закон спроса иногда называют свойством монотонности спроса.

был равен $\boldsymbol{x}^0=(6,\ 2)$. Известно, что данный спрос порожден монотонной положительно однородной первой степени функцией полезности. Попробуем найти все возможные значения, которые может принимать спрос во второй период. В данном примере у нас изменились сразу два параметра: цена второго блага и доход потребителя. Разложим это изменение на два последовательных: 1) изменение цены при компенсированном доходе; 2) изменение дохода. Компенсированный доход, отвечающий изменению цен от $(1,\ 1)$ до $(1,\ 2)$ равен $10$ ($1\cdot 6+2\cdot 2$). В силу закона спроса при компенсированном изменении дохода и в силу локальной ненасыщаемости предпочтений спрос $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2)$ потребителя при таком изменении должен удовлетворять двум условиям:

$$1)\ \tilde{x}_1+2\tilde{x}_2=10;\ \ 2)\ (1-1)(\tilde{x}_1-6)+(2-1)(\tilde{x}_2-2)=\tilde{x}_2-2\leqslant 0,$$

или 1) $\tilde{x}_1+2\tilde{x}_2=10$; 2) $\tilde{x}_2\leqslant 2$.

Теперь можно воспользоваться свойством отображения спроса для однородной функции полезности установленным нами в Примере **7**. Точнее, мы установили, что в случае если доход потребителя увеличивается в $\alpha$ раз, то и спрос в этом случае также увеличится в $\alpha$ раз. С учетом этого свойства получаем, что спрос во второй период подчинен следующим ограничениям: 1) $\tilde{x}_1+2\tilde{x}_2=12$; 2) $\tilde{x}_2\leqslant 2{,}4$.

Приведенные рассуждения проиллюстрированы на Рисунке 9.

Рисунок 9 Оценка спроса при изменении цен и дохода в случае однородной функции полезности.

⇐

Выше мы разобрали основные свойства маршаллианского спроса. Теперь остановимся на вопросе непосредственного нахождения этой характеристики поведения потребителя при заданных предпочтениях (функции полезности). Техника нахождения спроса потребителя в значительной степени опирается на теорему Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования.

Рассмотрим следующую задачу:

$$f(\boldsymbol{x})\rightarrow\max_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant 0;\ \boldsymbol{x}\in X\subset\mathbb{R}^n,$$

где $f$, $g_i$ – скалярные функции, заданные на непустом множестве $X$ в $\mathbb{R}^n$. Введя множители Лагранжа $\lambda_i$ ($i=1,\dots,m$), построим функцию

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\boldsymbol{x}),$$

называемую лагранжианом данной задачи максимизации. Для этой задачи справедливо следующее утверждение:

### Теорема Куна-Таккера для вогнутых функций (Достаточное условие оптимальности)

Пусть $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируемая вогнутая функция от $n$-мерного вектора $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ дифференцируемая вогнутая вектор-функция, обе определенные при $\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$. Пусть нашлись такие вектора $\hat{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, что выполнены следующие условия Куна-Таккера:

1) $\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\lambda} \nabla \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0$;

2) $\hat{\boldsymbol{x}} \, (\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\lambda} \nabla \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})) = 0$;

3) $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$;

4) $\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$.

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ – оптимальное решение рассматриваемой задачи.

Приведенный вариант теоремы Куна-Таккера является широко распространенным и включен в стандартные курсы по оптимизации. К сожалению, предположения сделанные нами ранее не позволяют в полной мере опираться на эти результаты. Во-первых, данный вариант теоремы опирается на дифференцируемость целевой функции. Допуская некоторую нестрогость, мы часто будем предполагать выполнение этого свойства, никак это не обсуждая и обосновывая. Заинтересованный читатель сможет найти его вывод из исходных свойств предпочтений в работе Жерара Дебре – G. Debreu, *Smooth preferences*, Econometrica, 1972, Vol. 40 и *Smooth preferences. A corrigendum*, Econometrica, 1976, Vol. 44.[38] Во-вторых, мы можем говорить лишь о *квазивогнутости* функции полезности, но никак не о вогнутости. Конечно, в случае, когда существует монотонно возрастающее преобразование исходной квазивогнутой функции полезности, переводящее ее в эквивалентную (с точки зрения предпочтений) вогнутую, мы можем воспользоваться приведенным вариантом теоремы. Однако, как было отмечено при обсуждении квазивогнутости, существуют квазивогнутые функции, которые не могут быть преобразованы в вогнутые, и применение изложенного варианта кажется недопустимым. Действительно, механическая замена условий вогнутости на более слабые условия квазивогнутости делают утверждение теоремы неверным. Для того, чтобы понять это, достаточно рассмотреть простой пример $f(\boldsymbol{x}) = x^2$, $g_1(\boldsymbol{x}) = 1 - x$, $g_2(\boldsymbol{x}) = x$, $X = \mathbb{R}$. Тем не менее, некоторый вариант теоремы Куна-Таккера справедлив и в случае квазивогнутых функций. Приведем его для случая $X = R_+^K$. Более общая версия теоремы для случая, когда $X$ некоторое подмножество $R^K$, можно найти в цитированной выше статье Кеннета Эрроу и Алена Энтховена “Квазивогнутое программирование” (Econometrica, V. 29(4), 779-800).

### Теорема Куна-Таккера для квазивогнутых функций (Достаточное условие оптимальности)

Пусть $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируемая квазивогнутая функция от $n$-мерного вектора $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ дифференцируемая квазивогнутая вектор-функция, обе определенные при $\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$. Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ и $\lambda$ удовлетворяют условиям Куна-Таккера

---

[38] Идейно, данное свойство функции полезности получается в предположениях достаточной гладкости поверхности безразличия, получаемой на основании наших предпочтений.

1) $\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{\lambda}\nabla \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0$;

2) $\hat{\boldsymbol{x}}\ (\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{\lambda}\nabla \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})) = 0$;

3) $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$;

4) $\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$

и выполнено одно из следующих условий:

1) $\nabla f_i(\hat{\boldsymbol{x}})< 0$, по крайней мере, для одной переменной $x_i$;

2) $\nabla f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$, для некоторой переменной $x_i$, такой, что в допустимом множестве, задаваемом ограничениями задачи, существует точка $\boldsymbol{x}^*$, в которой $\boldsymbol{x}^*_i > 0$;

3) $\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) \neq 0$ и $f(\boldsymbol{x})$ – дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\hat{\boldsymbol{x}}$;

4) $f(\boldsymbol{x})$ – вогнутая функция.

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ максимизирует $f(\boldsymbol{x})$ при ограничениях $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, $\boldsymbol{x} \geqslant 0$.

Если, кроме того, при некотором $\boldsymbol{x}^* \geqslant \mathbf{0}$ справедливо $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) > \mathbf{0}$, и для каждого $j$ выполнено одно из условий: либо 1) $\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})$ вогнута; либо 2) для каждого $\boldsymbol{x} \geqslant 0$ верно $\nabla \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, то условия Куна-Таккера являются **необходимыми и достаточными**.

Применим теперь эту теорему к рассматриваемой нами задаче потребителя в случае, когда $X = \mathbb{R}^K_+$. Рассмотрим вначале несколько вариантов условий на предпочтения, гарантирующих то, что условия Куна-Таккера определяют решение задачи потребителя. Одним из наиболее простых вариантов состоит в том, чтобы предположить условие 3, то есть неравенство градиента нулю и дважды непрерывную дифференцируемость функции полезности. Но мы рассмотрим также другой комплекс условий, который будет востребован нами в дальнейших рассуждениях.

### Определение 15.

Квазивогнутая функция $u(\boldsymbol{x})$ называется **сильно квазивогнутой**, если для каждого $\boldsymbol{x}$ из области определения $\boldsymbol{z}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}} < 0$ для каждого $\boldsymbol{z}$ такого, что $\boldsymbol{z}\nabla u(\boldsymbol{x}) = 0$ и $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$, где $\boldsymbol{H}(.)$– матрица вторых частных производных.

Предположим, что предпочтения агента представимы дважды непрерывно дифференцируемой сильно квазивогнутой, локально ненасыщаемой функцией полезности.

Пусть нашлись некоторые $\hat{\boldsymbol{x}}$ и $\lambda$, которые удовлетворяют условиям Куна-Таккера:

1) $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}}) - \lambda \boldsymbol{p} \leqslant 0$;

2) $(\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}}) - \lambda \boldsymbol{p})\hat{\boldsymbol{x}} = 0$;

3) $\lambda(R - \sum p_k \hat{x}_k) = 0$;

4) $\lambda \geqslant 0$.

Покажем, что при сделанных предположениях найдется такое благо $i$ что $\nabla\ u_i(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда найденное значение $\lambda > 0$. Тогда в силу 3) имеем $\sum p_k \hat{x}_k = R$. Откуда, используя 2), и тот факт, что $R > 0$ имеем $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} > 0$. Последнее влечет $\nabla u_i(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$ для некоторой переменной $x_i$, такой, что в допустимом множестве существует точка $\boldsymbol{x}^*$, в которой $\boldsymbol{x}^*_i > 0$ (существование такой точки очевидно в силу положительности цен и дохода).

Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} = 0$. В силу квазивогнутости для любого числа $0<\alpha<1$ и любого потребительского набора $\boldsymbol{x}^{**}$, такого, что $u(\boldsymbol{x}^{**}) > u(\hat{\boldsymbol{x}})$, справедливо: $u(\hat{\boldsymbol{x}} + \alpha(\boldsymbol{x}^{**} - \hat{\boldsymbol{x}})) \geqslant \min\{ u(\hat{\boldsymbol{x}}), u(\boldsymbol{x}^{**})\} = u(\hat{\boldsymbol{x}})$. Или

$$\frac{u(\hat{\boldsymbol{x}} + \alpha(\boldsymbol{x}^{**} - \hat{\boldsymbol{x}})) - u(\hat{\boldsymbol{x}})}{\alpha} \geqslant 0.$$

Устремляя $\alpha$ к $0$ имеем: $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}^{**} - \hat{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0$. Так как $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} = 0$, то $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}^{**} \geqslant 0$ для каждого потребительского набора, строго предпочитаемого набору $\hat{\boldsymbol{x}}$. Очевидно, что такие потребительские наборы найдутся в силу свойства локальной ненасыщаемости. С другой стороны из условия 1) имеем, что $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}^{**} \leqslant 0$. Таким образом, $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}^{**} = 0$. Рассмотрим разложение функции $u(.)$ в окрестности точки $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$u(\hat{\boldsymbol{x}} + z) = u(\hat{\boldsymbol{x}}) + \nabla u(\hat{\boldsymbol{x}}) z^{\mathsf{T}} + z\mathbf{H}z^{\mathsf{T}} + \|z\|^2 \boldsymbol{o}(\|z\|^2),$$

где $\mathbf{H}$ – матрица вторых частных производных функции $u(.)$, а $\boldsymbol{o}$ – бесконечно малая величина при $z$ стремящемся к нулю. Для любого $z = \boldsymbol{x}^{**} - \hat{\boldsymbol{x}}$, где $u(\boldsymbol{x}^{**}) > u(\hat{\boldsymbol{x}})$, имеем

$$u(\boldsymbol{x}^{**}) = u(\hat{\boldsymbol{x}}) + z\mathbf{H}z^{\mathsf{T}} + \|z\|^2 \boldsymbol{o}(\|z\|^2) = u(\hat{\boldsymbol{x}}) + \|z\|^2 \Big(\frac{z}{\|z\|}\mathbf{H}\Big(\frac{z}{\|z\|}\Big)^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{o}(\|z\|^2)\Big).$$

Непрерывная функция $\boldsymbol{y}\mathbf{H}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ достигает своего максимума ($M$) и минимума ($m$) на сфере $\|\boldsymbol{y}\|^2 = 1$. В случае отрицательной определенности матрицы $\mathbf{H}$ справедливо, что $m \leqslant M < 0$. В силу этого, найдется такая величина $\delta>0$, что при $\|\boldsymbol{y}\| < \delta$ будет $|\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{y}\|^2)| < |\ M\ |$ и, тем самым, $\boldsymbol{y}\mathbf{H}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{o} < 0$. В силу локальной ненасыщаемости функции $u(.)$ в любой $\delta$-окрестности точки $\hat{\boldsymbol{x}}$ найдется строго лучшая точка $\boldsymbol{x}^{**}$, и, кроме того, в силу квазивогнутости матрица Гессе будет отрицательно полуопределена на векторах таких, что $\nabla u(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = 0$. В качестве $\boldsymbol{y}$ возьмем вектор $(\boldsymbol{x}^{**} - \hat{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, имеем $u(\boldsymbol{x}^{**}) < u(\hat{\boldsymbol{x}})$, что противоречит выбору точки $\boldsymbol{x}^{**}$.

Таким образом, вышеприведенные гипотезы гарантируют нам положительность множителя Лагранжа $\lambda$, и существование такого товара для которого $u_i'(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$ и, значит, выполнено условие 2 сформулированной выше теоремы.

Рассмотрим теперь необходимые условия оптимальности в задаче потребителя. По теореме Куна-Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что не все цены равны нулю и доход строго положителен) существует множитель Лагранжа $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$ такой, что в оптимуме

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \lambda)}{\partial x_k} \leqslant 0 \text{ и } \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \lambda)}{\partial x_k} = 0, \text{ если } x_k > 0$$

или

$$\frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial x_k} \leqslant \lambda p_k \text{ и } \frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial x_k} = \lambda p_k, \text{ если } x_k > 0.$$

Как показано выше, при сделанных нами предположениях множитель Лагранжа строго положителен. Кроме того, мы получили существование хотя бы одного блага с положительным объемом потребления. Для этого блага $k$ и любого блага $s$ исключая множитель Лагранжа из условий Куна-Таккера имеем:

$$\frac{p_s}{p_k} \geqslant \frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})/\partial x_s}{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})/\partial x_k}.$$

В случае если благо $s$ таково, что $x_s > 0$ то это неравенство выполняется как равенство

$$\frac{p_s}{p_k}=\frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})/\partial x_s}{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})/\partial x_k}.$$

Это свойство известно читателю из вводного курса микроэкономики и означает, что решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замещения любых двух благ отношению цен этих благ. Так как $\lambda > 0$, то по условию дополняющей нежесткости теоремы Куна-Таккера получаем, что бюджетное ограничение должно выходить на равенство: $\boldsymbol{px}=R$. Это второе условие первого порядка, которому должен удовлетворять оптимум рассматриваемой задачи.

Проиллюстрируем теперь применение достаточных условий оптимальности для нахождения функции спроса на примере.

**Пример 9.**

Пусть множество допустимых альтернатив $X=\mathbb{R}^K_+$ и предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2}$, где $a>0$. Непосредственными вычислениями проверяем, что матрица Гессе для данной функции полезности равна:

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a}{4x_2^{3/2}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $\boldsymbol{H}$ отрицательно определена. Таким образом, функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ является вогнутой. Также отметим, что $u(\boldsymbol{x})$ – монотонна. Тем самым, мы подпадаем под условия теоремы Куна-Таккера и условия дополняющей нежесткости являются достаточными условиями оптимальности.

Функция Лагранжа для задачи потребителя с функцией полезности $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2}$ имеет вид:

$$\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)=\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2}+\lambda(R-p_1x_1-p_2x_2).$$

Условия Куна-Таккера (условия дополняющей нежесткости)

$$1)\ \frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\lambda p_1\leqslant 0\ ; \qquad 2)\ \frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_1}x_1=\frac{\sqrt{x_1}}{2}-\lambda p_1x_1=0;$$

$$3)\ \frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_2}=\frac{a}{2\sqrt{x_2}}-\lambda p_2\leqslant 0; \qquad 4)\frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_2}x_2=\frac{a\sqrt{x_2}}{2}-\lambda p_2x_2=0;$$

$$5)\ \frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial\lambda}=R-p_1x_1-p_2x_2\geqslant 0; \qquad 6)\frac{\partial\mathcal{L}\,(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial\lambda}\lambda=(R-p_1x_1-p_2x_2)\lambda=0.$$

Данные условия выполнены только если $x_1>0$, $x_2>0$. Таким образом

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\lambda p_1=0; \qquad \frac{a}{2\sqrt{x_2}}-\lambda p_2=0; \qquad p_1x_1+p_2x_2=R.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{\sqrt{x_2}}{a\sqrt{x_1}}=\frac{p_1}{p_2},\ \text{или}\ x_2=(a\frac{p_1}{p_2})^2x_1.$$

Подставляя полученное выражение для $x_2$ в бюджетное ограничение, получим

$$p_1x_1+p_2(a\frac{p_1}{p_2})^2x_1=R\ \Leftrightarrow (p_1+a^2\frac{(p_1)^2}{p_2})x_1=R\ \Leftrightarrow x_1=\frac{Rp_2}{p_1p_2+a^2(p_1)^2}.$$

Отсюда $x_2=\dfrac{a^2Rp_1}{(p_2)^2+a^2p_1p_2}$.

Таким образом, мы нашли функцию маршаллианского спроса: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ R)=(\frac{Rp_2}{p_1p_2+a^2(p_1)^2};\ \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2+a^2p_1p_2})$.

Легко видеть, что полученная нами функция спроса удовлетворяет всем свойствам функции спроса установленными в теореме **14**. (Проверьте это самостоятельно!)

$\Leftarrow$

Перейдем теперь к рассмотрению другого важного понятия в теории потребительского выбора, а именно понятия непрямой функции полезности.

### Определение 16.

Функция $\nu(\boldsymbol{p}, R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$, где $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ –решение задачи потребителя (отображение спроса) при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, называется **непрямой функцией полезности**.[39]

Естественно, область определения непрямой функции полезности это такие пары цен и доходов $(\boldsymbol{p}, R)$ при которых существует решение задачи потребителя. В нашем случае это такие пары $(\boldsymbol{p}, R)$, что выполнено $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^K_{++}$ и $R>\inf_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{px}$.

Следующая теорема устанавливает основные свойства задачи потребителя в модели потребителя с фиксированным доходом.

### Теорема 16. (Свойства непрямой функции полезности)

Пусть выполнены предположения Теоремы **14**. Тогда

(1) функция $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени по $(\boldsymbol{p}, R)$: $\nu(\lambda\,\boldsymbol{p}, \lambda R) = \nu(\boldsymbol{p}, R)$;

(2) функция $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ не убывает по доходу ($\nu(\boldsymbol{p},R\,') \geqslant \nu(\boldsymbol{p},R)$ при $R\,'>R$), причем строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;

(3) функция $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ не возрастает по ценам ($\nu(\boldsymbol{p}, R) \leqslant \nu(\boldsymbol{p}', R)$ при $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{p}'$), причем строго убывает по ценам, если предпочтения локально ненасыщаемы;

(4) функция $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ квазивыпукла по $(\boldsymbol{p}, R)$;

(5) если предпочтения потребителя выпуклы, то функция $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ непрерывна на множестве определения.

***<u>Доказательство</u>***:

(1) Однородность нулевой степени следует из определения непрямой функции полезности и однородности нулевой степени функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ (см. Теорему **14**).

(2) Покажем, что $\nu(\boldsymbol{p}, R)$ не убывает по $R$. Рассмотрим непрямую функцию полезности при двух разных уровнях дохода $R'$ и $R$, таких, что $R'>R$. Поскольку при $R'> R$ бюджетное множество $B(\boldsymbol{p}, R')$ содержит бюджетное множество $B(\boldsymbol{p}, R)$ (отметим, что случай $B(\boldsymbol{p}, R')=B(\boldsymbol{p}, R)$ не исключен), то по определению непрямой функции полезности имеем $\nu(\boldsymbol{p}, R')\geqslant\nu(\boldsymbol{p}, R)$.(Почему?) Предположим теперь, что предпочтения локально ненасыщаемы. Если бы при $R'>R$ мы имели $\nu(\boldsymbol{p}, R')=\nu(\boldsymbol{p}, R)$, то наборы из $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ принадлежали бы $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R')$, но для них не выполнялся бы закон Вальраса, чего быть не может, значит должно выполняться строгое неравенство $\nu(\boldsymbol{p}, R')>\nu(\boldsymbol{p}, R)$.

---

[39] Непрямая функция полезности впервые рассматривалась в работе Antonelli, G.B., *Sulla Teoria Matematica della Economia Politica*, Pisa, 1886.

(3) Доказательство данного пункта в целом повторяет доказательство предыдущего и оставляется читателю в качестве упражнения.

(4) Напомним, что функция $f(\boldsymbol{x})$ называется квазивыпуклой, если функция $-f(\boldsymbol{x})$ является квазивогнутой. Мы хотим показать квазивогнутость функции $\nu(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. что для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполнено

$$\nu(\alpha \boldsymbol{p}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}^2, \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2) \leqslant \max\, \{\nu(\boldsymbol{p}^1, R^1), \nu(\,\boldsymbol{p}^2, R^2)\}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — решение задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}^\alpha = \alpha \boldsymbol{p}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}^2$ и доходе $R^\alpha = \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2$, т.е. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^\alpha, R^\alpha)$. Очевидно, что $\boldsymbol{x}$ является допустимым либо при ценах $\boldsymbol{p}^1$ доходе $R^1$, либо при ценах $\boldsymbol{p}^2$ и доходе $R^2$. Действительно, если бы это было не верно, тогда выполнялось бы $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x} > R^1$ и $\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{x} > R^2$. Взяв первое неравенство с весом $\alpha$, а второе неравенство с весом $(1-\alpha)$ и сложив, получаем $\boldsymbol{p}^\alpha\boldsymbol{x} > R^\alpha$. Противоречие с тем, что $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^\alpha, R^\alpha)$. Таким образом, выполнено либо $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x} \leqslant R^1$, либо $\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{x} \leqslant R^2$. Без потери общности предположим, что $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x} \leqslant R^1$. Из того, что $\nu(\boldsymbol{p}^1, R^1)$ есть по определению значение целевой функции на оптимальном решении задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}^1$ и доходе $R^1$, следует что $\nu(\boldsymbol{p}^1, R^1) \geqslant u(\boldsymbol{x})$, так как $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение этой задачи. Тем более, должно выполняться и требуемое соотношение

$$u(\boldsymbol{x}) = \nu(\boldsymbol{p}^\alpha, R^\alpha) \leqslant \max\{\nu(\boldsymbol{p}^1, R^1), \nu(\,\boldsymbol{p}^2, R^2)\}.$$

(5) В предположении строгой выпуклости предпочтений непрерывность непрямой функции полезности следует из определения и непрерывности функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, которую мы доказали в Теореме 14. Доказательство в общем случае читатель может найти в книге В. Гильденбранд, *Ядро и равновесие в большой экономике*, М.: Наука, 1986, стр. 31.

■

Проиллюстрируем понятие непрямой функции полезности на примере гомотетичных предпочтений.

**Пример 7. (Продолжение)**

Выше мы показали, что функция маршаллианского спроса однородна первой степени по доходу, т.е. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1)$. Таким образом, $\nu(\boldsymbol{p}, R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = u(R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1)) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1))R = a(\boldsymbol{p})R$, где в качестве $a(\boldsymbol{p})$ выступает $u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, 1))$.

⇐

**Пример 9. (Продолжение)**

Непрямая функция полезности будет иметь вид:

$$\nu(\boldsymbol{p},\ R) = \sqrt{\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}} + a\sqrt{\frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}} = \sqrt{\frac{Rp_2}{p_1(p_2 + a^2p_1)}} + a\sqrt{\frac{a^2Rp_1}{p_2(p_2 + a^2p_1)}} =$$
$$\sqrt{\frac{R}{p_2 + a^2p_1}}\left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + a^2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right) = \sqrt{\frac{R}{p_2 + a^2p_1}}\left(\frac{p_2 + a^2p_1}{\sqrt{p_1p_2}}\right) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_2p_1}}.$$

Проверим теперь выполнение свойств непрямой функции полезности полученных нами в теореме 16.

Возрастание непрямой функции полезности по доходу очевидно в силу возрастания функции $\sqrt{x}$.

Убывание непрямой функции полезности по ценам следует из того факта, что функции $\dfrac{1}{p_1}$ и $\dfrac{a^2}{p_2}$ убывают по ценам и $\nu(\boldsymbol{p}, R) = \sqrt{R(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{a^2}{p_2})}$.

Проверка квазивогнутости непрямой функции полезности достаточно громоздка, и мы ее проводить не будем. Желающие могут проделать ее самостоятельно.

$\Leftarrow$

Помимо введенных выше понятий отображения спроса и непрямой функции полезности важное место в микроэкономической теории занимает понятие хиксианского спроса.

**Определение 17.**

Пусть на $X$ задана система неоклассических предпочтений, $L^+(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in X|\ \boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}\}$– верхнее лебеговское множество, отвечающее набору $\boldsymbol{x}$. Тогда отображение $\boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}^K_+\times X\to 2^X$, определяемое формулой $\boldsymbol{h}(p,\ \boldsymbol{x})=\{\ \boldsymbol{y}\in L^+(\boldsymbol{x})|\ \boldsymbol{py}\leqslant\boldsymbol{pz}\ \forall\boldsymbol{z}\in L^+(\boldsymbol{x})\}$, называется **спросом по Хиксу (хиксианским спросом)**[40]. В случае если $\boldsymbol{h}(p,\ \boldsymbol{x})$ – одноэлементное множество, то $\boldsymbol{h}(p,\ \boldsymbol{x})$ называется **функцией спроса по Хиксу**.[41]

В случае если предпочтения представимы функцией полезности $u{:}X\to\mathbb{R}$, то отображение хиксианского спроса может быть найдено как решение параметрического семейства задач:

$$\boldsymbol{ph}\to\min\nolimits_h$$

$$u(\boldsymbol{h})\geqslant u(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{h}\in X,$$

каждая из которых обычно называется **двойственной (взаимной)** к соответствующей задаче потребителя (задаче поиска маршаллианского спроса).

С содержательной точки зрения хиксианский спрос при заданных $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$ это *самый дешевый* потребительский набор при заданных ценах $\boldsymbol{p}$, среди всех наборов которые *не хуже* чем $\boldsymbol{x}$. В то же время, маршаллианский спрос — это *наилучший* с точки зрения предпочтений индивидуума набор в *бюджетном* множестве. На Рисунке 10 в случае двух благ иллюстрируется разница в понятиях маршаллианского и хиксианского спросов.

---

[40] Приведенное здесь определение хиксианского спроса не является классическим. В большинстве учебников задача поиска хиксианского спроса формулируется в терминах поиска набора, который дает заданный уровень *полезности*, а приведенный вариант определения зарезервирован для задачи определения монетарной функции полезности. Преимуществом введенного в тексте понятия является то, что оно последовательно ложится в программу описания потребителя исходя только из свойств предпочтений, не используя понятия и термины которые могут быть сассоциированны с кардиналистским подходом.

[41] Понятие хиксианского спроса появилось, и получила свое развитие, в работах Джона Хикса (Hicks, J. R., *Value and Capital*, Oxford: Claredon Press, русс. перевод Дж. Р. Хикс, *Стоимость и Капитал*, М.: Прогресс, 1993), Пола Самуэльсона (Samuelson, P., *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948) и Лайонеля Мак-Кензи (McKenzie, L., *Demand Functions without a Utility Index*, Review of Economic Studies, Vol. 25, 1957).

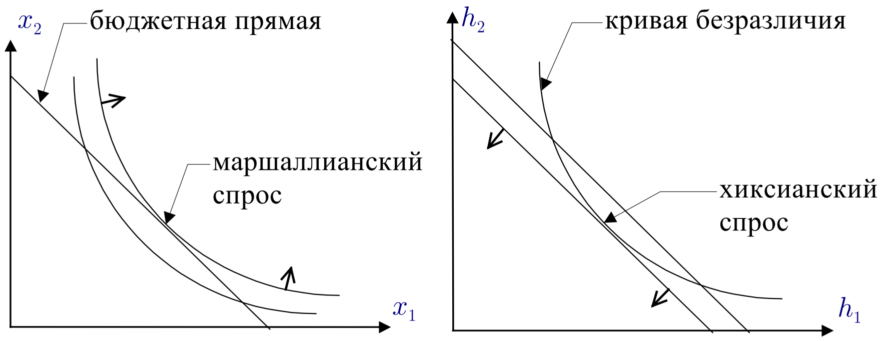


Рисунок 10 Маршаллианский и хиксианский спрос.

Следующая Теорема устанавливает основные свойства отображения (функции) хиксианского спроса.

### Теорема 17. (Свойства хиксианского спроса)

Пусть $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^K_{++}$, а потребитель описывается системой непрерывных неоклассических предпочтений. Тогда

(1) решение двойственной задачи потребителя существует, т.е. $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \neq \varnothing \ \forall \boldsymbol{x} \in X$;

(2) если предпочтения потребителя выпуклы, тогда $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ — выпуклое множество;

(3) если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ — непрерывная функция;

(4) отображение $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ однородно нулевой степени по $\boldsymbol{p}$, т. е. $\boldsymbol{h}(\lambda \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$;

(5) для каждого $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ справедливо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$;

(6) для любых $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}' \in \mathbb{R}^K_{++}$, $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{h}(p, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h}' \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{x})$ справедливо $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{h}' - \boldsymbol{h}) \leqslant 0$.

***Доказательство***:

Доказательство в общих чертах идет по схеме доказательства Теоремы **14** и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Обсудим свойство 6 данной теоремы. Пусть в некоторый момент времени в экономике были цены $\boldsymbol{p}$, а в следующий момент времени изменилась цена одного из благ, для определенности первого, а цены всех остальных благ остались неизменными. В этом случае свойство 6 говорит, что должно выполняться неравенство $\Delta p_1 \Delta h_1 \leqslant 0$, т.е. если цена первого блага упала, то хиксианский спрос на первое благо не может упасть, он либо остается неизменным, либо возрастает. Оговоримся, что полученное неравенство $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{h}' - \boldsymbol{h}) \leqslant 0$ более сильное условие, чем простое требование убывания спроса на $k$-ое благо по своей цене. Это свойство мы будем называть **законом спроса при компенсированном изменении дохода по Хиксу**. Оно в чем-то аналогично рассмотренному ранее закону спроса при компенсированном изменении дохода по Слуцкому. В дальнейшем мы вернемся к обоим этим свойствам потребительского спроса и достаточно подробно обсудим их взаимосвязь.

Обсудим теперь, как и в случае с маршаллианским спросом, необходимые и достаточные условия максимума задачи поиска хиксианского спроса. Предположим, как и ранее, что функция полезности дважды непрерывно дифференцируема, предпочтения удовлетворяют свойству локальной ненасыщаемости, выпуклы и, кроме того, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^K_{++}$. Несложно заметить, что при выполнении этих предположений целевая функция задачи поиска хиксианского спроса вогнута (выполнено условие 4) и, даже больше, целевая функция дважды непрерывно дифференцируема и не равна $0$ (выполнено условие 3). В силу этого, условия Куна-

Таккера являются достаточными условиями оптимальности для потребительского набора $\hat{\boldsymbol{h}}$ такого что

1) $-\boldsymbol{p} + \mu\nabla u(\hat{\boldsymbol{h}})\leqslant 0$;

2) $(-\boldsymbol{p} + \mu\nabla u(\hat{\boldsymbol{h}}))\hat{\boldsymbol{h}} = 0$;

3) $\mu(u(\hat{\boldsymbol{h}}) - u(\boldsymbol{x})) = 0$;

4) $\mu \geqslant 0$.

Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\ \boldsymbol{p}, R)$ – решение задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^K_{++}$ и доходе $R>0$. Пусть также $\lambda$ – множитель Лагранжа, отвечающий этому решению. Тогда, как несложно заметить, в случае если $\lambda>0$, множитель Лагранжа в задаче поиска хиксианского спроса $\mu$ равен $\frac{1}{\lambda}$.

Сформулированные условия являются также и необходимыми условиями оптимальности для этой задачи, если найдется такой потребительский набор $\boldsymbol{h}^*$, что $u(\boldsymbol{h}^*)>u(\boldsymbol{x})$ (выполнение данного условия гарантировано свойством локальной ненасыщаемости) и градиент функции $u(.)$ не равен $\mathbf{0}$.

Используя условия Куна-Таккера, найдем теперь функцию хиксианского спроса для случая рассматривавшегося нами в примере **9**.

**Пример 9. (Продолжение)**

Хиксианский спрос является решением следующей задачи

$$p_1h_1 + p_2h_2 \to \min\nolimits_h$$
$$\sqrt{h_1}+a\sqrt{h_2} \geqslant u(\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{h}\geqslant 0.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}\,(\boldsymbol{h}, \mu) = -p_1h_1 - p_2h_2 + \mu(\sqrt{h_1}+a\sqrt{h_2} - u(\boldsymbol{x})).$$

Условия Куна-Таккера могут быть выполнены только в случае, если $h_1>0$, $h_2>0$. Поэтому

$$-p_1 + \mu\frac{1}{2\sqrt{h_1}}=0; \qquad\qquad -p_2 + \mu\, a\frac{1}{2\sqrt{h_2}}=0.$$

Несложно заметить, что из этих двух равенств следует – $\mu>0$, а значит $\sqrt{h_1}+a\sqrt{h_2} = u(\boldsymbol{x})$.

Отсюда имеем $\frac{\sqrt{h_2}}{a\sqrt{h_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ или $h_2=(a\frac{p_1}{p_2})^2h_1$. Так как $\sqrt{h_1}+a\sqrt{h_2} =u(\boldsymbol{x})$, то $\sqrt{h_1}+a^2\frac{p_1}{p_2}\sqrt{h_1} =u(\boldsymbol{x})$ или $h_1=(\frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2$. Также $h_2=(\frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2$. Таким образом, хиксианский спрос равен $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})=((\frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2, (\frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2)$.

Проиллюстрируем теперь свойства функции хиксианского спроса доказанные в теореме 17. То, что хиксианский спрос однороден нулевой степени по ценам очевидно, действительно: $\boldsymbol{h}(t\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})=((\frac{tp_2u(\boldsymbol{x})}{tp_2+a^2tp_1})^2, (\frac{atp_1u(\boldsymbol{x})}{tp_2+a^2tp_1})^2) = ((\frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2, (\frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2) = t^0\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$.

Покажем, что $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Подставив хиксианский спрос в функцию полезности, мы получим:

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}))= \sqrt{h_1(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})}+a\sqrt{h_2(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})} = \sqrt{(\frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2}+a\sqrt{(\frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2} = \frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1} + a\ \frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1} =$ $u(\boldsymbol{x})$.

$\Leftarrow$

Аналогом непрямой функции полезности в двойственной задаче потребителя является функция расходов.

### Определение 18.

Функция $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ph}$, где $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{h}(p,\, \boldsymbol{x})$ – хиксианский спрос при данных $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$, называется **функцией расходов (затрат)**.

Другими словами, функция расходов $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ – значение целевой функции двойственной задачи в точке оптимума при данных $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$. Согласно определению, для каждого достижимого уровня полезности функция расходов указывает минимальный уровень расходов (дохода), обеспечивающий такой уровень полезности.

### Теорема 18. (Свойства функции расходов)

Пусть выполнены предположения Теоремы 17. Тогда

(1) функция $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ однородна первой степени по $\boldsymbol{p}$: $e(\lambda\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) = \lambda e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$;

(2) функция $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ не убывает по ценам $e(\boldsymbol{p}',\, \boldsymbol{x})\leqslant e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{p}'$);

(3) функция $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ — вогнутая функция цен $\boldsymbol{p}$;

(4) функция $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ непрерывна;

(5) $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})\geqslant e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{y})$;

***Доказательство***:

(1) Первый пункт утверждения следует из того, что решения двойственной задачи при векторе цен $\boldsymbol{p}$ и векторе цен $\lambda\boldsymbol{p}$ совпадают.

(2) Пусть $\boldsymbol{p}'\geqslant\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'\neq\boldsymbol{p}$. Тогда $\boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x})\geqslant \boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$. Но $e(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x})$. Заметим, что если $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x})\gg 0$, то $e(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{x}) > e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$.

(3) Мы должны показать, что для двух произвольных векторов $\boldsymbol{p}^1$ и $\boldsymbol{p}^2$ при $0\leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется $e(\alpha\boldsymbol{p}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}^2,\, \boldsymbol{x}) \geqslant \alpha e(\boldsymbol{p}^1,\, \boldsymbol{x}) + (1-\alpha)e(\boldsymbol{p}^2,\, \boldsymbol{x})$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{h}}$– решение двойственной задачи при ценах $\boldsymbol{p}^\alpha=\alpha\boldsymbol{p}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}^2$, т.е. $\tilde{\boldsymbol{h}}\in\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}^\alpha,\, \boldsymbol{x})$. Отметим, $\boldsymbol{p}^\alpha\tilde{\boldsymbol{h}} = e(\boldsymbol{p}^\alpha,\, \boldsymbol{x})$. Допустимое множество $\{\boldsymbol{h}\in X|\ \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}\}$ не зависит от $\boldsymbol{p}$, поэтому потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{h}}$ допустим в двойственной задаче как при ценах $\boldsymbol{p}^1$, так и при ценах $\boldsymbol{p}^2$. Из определения функции расходов и допустимости $\tilde{\boldsymbol{h}}$ имеем $e(\boldsymbol{p}^1,\, \boldsymbol{x})\leqslant \boldsymbol{p}^1\tilde{\boldsymbol{h}}$ и $e(\boldsymbol{p}^2,\, \boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{p}^2\tilde{\boldsymbol{h}}$. Отсюда

$$\alpha e(\boldsymbol{p}^1,\, \boldsymbol{x}) + (1-\alpha)e(\boldsymbol{p}^2,\, \boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{p}^\alpha\tilde{\boldsymbol{h}} = e(\boldsymbol{p}^\alpha,\, \boldsymbol{x}).$$

(4) Доказательство непрерывности оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что непрерывность следует из того, что (а) функция расходов вогнута как функция цен и (б) любая вогнутая функция непрерывна во внутренности своей области определения.

(5$\Rightarrow$) Докажем, что из $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ следует $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})\geqslant e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{y})$. Так как $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, то все потребительские наборы допустимые в двойственной задаче при наборе параметров $(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$ являются допустимыми в задаче при наборе параметров $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y})$. В том числе, допустимыми являются и наборы, принадлежащие $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$, а это и означает что $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y})$.

(5$\Leftarrow$) Докажем, что из $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y})$ следует $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Предположим противное, то есть $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$. Значит $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y}) = e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$ (Почему?). Значит $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y}) \subset \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$. Возьмем $\tilde{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y})$. В силу непрерывности предпочтений и того, что $X$– выпуклое множество и $\boldsymbol{0} \in X$ получаем существование такого числа $\alpha < 1$, что $\alpha\tilde{\boldsymbol{h}} \succeq \boldsymbol{x}$. В этом случае $\boldsymbol{p}(\alpha\tilde{\boldsymbol{h}}) = \alpha e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{y}) < e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$, что противоречит определению $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$.

■

На основании пункта (5) можно говорить о функции $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$, как о функции полезности, которая представляет исходную систему неоклассических предпочтений. Это свойство одно из самых важных свойств функции расходов и будет поставлено во главу угла при обсуждении вопроса о восстановлении предпочтений по наблюдаемой функции спроса.

Проиллюстрируем теперь нахождение функции расходов.

**Пример 9. (Продолжение)**

Найдем функцию расходов $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$ для данного потребителя. Как было показано выше, функция хиксианского спроса для рассматриваемого потребителя равна $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = ((\frac{p_2 u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2,\ (\frac{a p_1 u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2)$. Из определения функции расходов имеем:

$$e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = p_1 h_1(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) + p_2 h_2(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = p_1(\frac{p_2 u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2 + p_2(\frac{a p_1 u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2 = (\frac{u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2 (p_1 (p_2)^2 + a^2 p_2 (p_1)^2) = (\frac{u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2 (p_1 p_2 + a^2 p_1) p_1 p_2 = (\frac{u(\boldsymbol{x})}{p_2 + a^2 p_1})^2 (p_1 p_2 + a^2 p_1) p_1 p_2 = \frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}.$$

На примере данной функции проиллюстрируем выполнение свойств, доказанных в теореме 18.

Покажем, что полученная функция однородна первой степени по ценам.

$$e(t\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = \frac{t p_1 t p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{t p_2 + a^2 t p_1} = t\frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = t\, e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}).$$

Покажем свойство неубывания по ценам. Отметим, что

$$e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = \frac{(u(\boldsymbol{x}))^2}{\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{a^2}{p_2}}.$$

Действительно при росте при росте $p_1$ величина $\frac{1}{p_1}$ убывает, что в свою очередь влечет рост значения дроби $\frac{(u(\boldsymbol{x}))^2}{\frac{1}{p_1} + \frac{a^2}{p_2}}$, и, тем самым, рост функции расходов.

Покажем теперь вогнутость функции расходов по ценам. Матрица вторых частных производных для функции расходов $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}$ равна

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2a^2 p_2^2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} & \dfrac{2a^2 p_1 p_2\ (u(\boldsymbol{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} \\ \dfrac{2a^2 p_1 p_2\ (u(\boldsymbol{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} & -\dfrac{2a^2 p_1^2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} \end{bmatrix}.$$

Несложно заметить, что первый главный последовательный минор отрицателен, а второй равен 0. То есть, главные последовательные миноры чередуют свой знак, начиная с первого, который отрицателен. Отсюда непосредственно следует, что матрица $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена и, соответственно, вогнутость функции $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$.

Наконец проверим, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})$. Действительно, в силу положительности цен имеем: $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} \geqslant \frac{p_1 p_2 (u(\boldsymbol{y}))^2}{p_2 + a^2 p_1} \Leftrightarrow (u(\boldsymbol{x}))^2 \geqslant (u(\boldsymbol{y}))^2$. Так как $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ и, тем самым, неотрицательна, то условие $(u(\boldsymbol{x}))^2 \geqslant (u(\boldsymbol{y}))^2$ эквивалентно условию $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$. То есть, $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$. Откуда по определению функции полезности имеем, что $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \geqslant e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$.

$\Leftarrow$

Рассмотрим теперь вопрос о взаимосвязи прямой и двойственной задач потребителя. Следующая теорема, называемая теоремой взаимности (двойственности), устанавливает условия совпадения решений прямой и двойственной задач потребителя.

### Теорема 19. (Теорема взаимности (двойственности))

Пусть множество допустимых альтернатив $X$ непусто, замкнуто, ограничено снизу, выпукло, $\mathbf{0} \in X$ и $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^K_{++}$, а потребитель описывается системой непрерывных неоклассических предпочтений. Тогда

1) если предпочтения локально ненасыщаемы, то $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ влечёт $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$.

2) для любого $\bar{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$, выполнено $\bar{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$.

***Доказательство***:

(1) Предположим противное: пусть $\bar{\boldsymbol{x}} \notin \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$, т.е. в двойственной задаче существует потребительский набор $\boldsymbol{h}' \succeq \bar{\boldsymbol{x}}$ такой, что $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{p}\boldsymbol{h}'$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что существует $\boldsymbol{h}''$, такой, что $\boldsymbol{h}'' \succ \boldsymbol{h}' \succeq \bar{\boldsymbol{x}}$ и при этом $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{p}\boldsymbol{h}''$. А это противоречит оптимальности $\bar{\boldsymbol{x}}$ в прямой задаче потребителя.

(2). Предположим, что $\bar{\boldsymbol{h}}$ не является решением прямой задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$. Тогда существует потребительский набор $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$ такой, что $u(\boldsymbol{x}') > u(\bar{\boldsymbol{h}})$. В силу непрерывности отношения предпочтения найдется $0 < \alpha < 1$ такое, что $\alpha \boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$ и $u(\alpha \boldsymbol{x}') \geqslant u(\bar{\boldsymbol{h}})$. Это противоречит оптимальности $\bar{\boldsymbol{h}}$ в двойственной задаче потребителя.

■

Мы показали, что при выполнении условий данной теоремы, справедливо, что для любого $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ выполнено $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$. В силу этого, из определения функции расходов имеем $e(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}$, в силу локальной ненасыщаемости предпочтений справедливо, что $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}} = R$. То есть для любого $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ справедливо тождество $e(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}) = R$. Аналогично, пусть $\bar{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ при некотором $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$, тогда по доказанной теореме двойственности получаем, что $\bar{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$. В силу оптимальности $\bar{\boldsymbol{h}}$ при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ имеем, что $\nu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) = u(\bar{\boldsymbol{h}})$. Также заметим, что в силу непрерывности предпочтений $u(\bar{\boldsymbol{h}}) = u(\bar{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, получаем что $\nu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) = u(\bar{\boldsymbol{x}})$. Покажем теперь, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$. Включение $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}) \subset \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$ доказано в теореме двойственности. Пусть теперь $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))$, тогда в силу локальной ненасыщаемости $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{x}})$. Так как потребительский набор $\boldsymbol{x}$ допустим при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ то $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\bar{\boldsymbol{x}})$.

тельский набор $\boldsymbol{x}$ допустим при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$ то $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\bar{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, несложно увидеть, что $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})\subset\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$, откуда непосредственно вытекает $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}}))=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$. Из приведенных рассуждений непосредственно следует, что для любого $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ выполнено $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ R)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$. Этими рассуждениями мы доказали следующее

**Следствие. (Соотношения двойственности)**

Пусть выполнены все предположения Теоремы 19. Тогда:

- для любого $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ выполнено $e(\boldsymbol{p},\ \bar{\boldsymbol{x}})=R$;
- для любого $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ выполнено $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ R)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$;
- $\nu(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \bar{\boldsymbol{x}}))=u(\bar{\boldsymbol{x}})$;
- $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \bar{\boldsymbol{x}}))=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$.

Проиллюстрируем важность установленных соотношений двойственности.

**Пример 10.**

Пусть мы, решив задачу потребителя, нашли функцию спроса и непрямую функцию полезности. Этой информации достаточно для того, чтобы найти функцию хиксианского спроса и функцию расходов, не решая, соответственно, двойственную задачу. Действительно, пусть $\nu(\boldsymbol{p},\ R)=\sqrt{\frac{R(p_2+a^2p_1)}{p_2p_1}}$. Тогда, воспользовавшись соотношением $\nu(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}))=u(\boldsymbol{x})$, имеем $\sqrt{\frac{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})(p_2+a^2p_1)}{p_2p_1}}=u(\boldsymbol{x})$. Отсюда несложно получить, что $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})=\frac{p_1p_2(u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2+a^2p_1}$. С учетом этого из соотношения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \bar{\boldsymbol{x}}))=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$, легко найти хиксианский спрос: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ \frac{p_1p_2(u(\boldsymbol{x}))^2}{p_2+a^2p_1})=((\frac{p_2u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2,\ (\frac{ap_1u(\boldsymbol{x})}{p_2+a^2p_1})^2)$.

⇐

**Пример 11.**

Пусть непрямая функция полезности потребителя имеет вид $\nu(\boldsymbol{p},\ R)=a(\boldsymbol{p})R$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ R)=R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ 1)$. Тогда используя соотношения двойственности несложно видеть, что $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})=\frac{u(\boldsymbol{x})}{a(\boldsymbol{p})}$, а функция хиксианского спроса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}))=\frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ 1)}{a(\boldsymbol{p})}u(\boldsymbol{x})$.

⇐

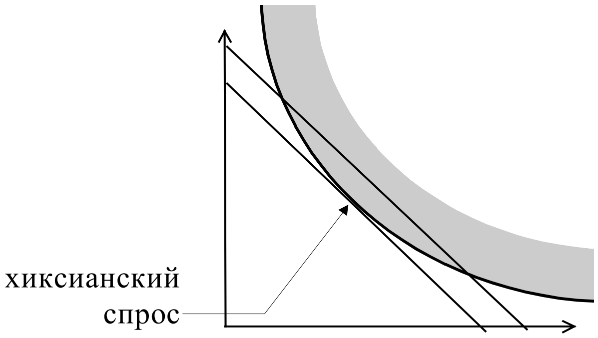


Рисунок 11. «Толстая» кривая безразличия

Рассмотрим теперь пример когда хиксианский и маршаллианский спрос не совпадают. Для построения этого примера достаточно рассмотреть предпочтения, не обладающие свойством локальной ненасыщаемости. В качестве таковых, рассмотрим предпочтения порождающие “толстую” кривую безразличия (такие кривые безразличия появятся, например, если взять в качестве функции полезности целую часть какой-нибудь “нормальной” функции полезности). Хиксианский спрос всегда будет лежать (случай двух благ) на левой границе “толстой” кривой безразличия. На Рисунке 11 эта граница изображена темной линией. Маршаллианский же спрос может лежать внутри “толстой” кривой безразличия (Найдите его на приведенном Рисунке!).

Вернемся теперь, как и обещали, к обсуждению закона спроса. Используя полученные соотношения двойственности, закон спроса при компенсированном изменении дохода по Хиксу $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) \leqslant 0$ можно переформулировать в виде:

$$(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) = (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}})) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})))\leqslant 0.$$

Пусть $\bar{\boldsymbol{x}}$ оптимальное решение задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, тогда данное свойство означает, что $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}})) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))\leqslant 0$. Сравним теперь два полученных нами варианта закона спроса при компенсированном изменении дохода по Слуцкому и по Хиксу:

1) $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'\bar{\boldsymbol{x}})) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \leqslant 0$;

2) $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}})) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \leqslant 0$.

Единственное отличие этих свойств состоит в величине компенсации. В первом случае компенсированное изменение дохода равно $\Delta_1 = \boldsymbol{p}'\bar{\boldsymbol{x}} - R$, а во втором случае величина компенсации равна $\Delta_2 = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}}) - R$. Несложно понять, что $\Delta_1 \geqslant \Delta_2$, действительно $\Delta_1 \geqslant \Delta_2$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{p}'\bar{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{p}'\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}})$. Последнее неравенство справедливо, так как потребительский набор $\bar{\boldsymbol{x}}$ допустим в двойственной задаче, но он не может стоить меньше чем оптимальный набор $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', \bar{\boldsymbol{x}})$.

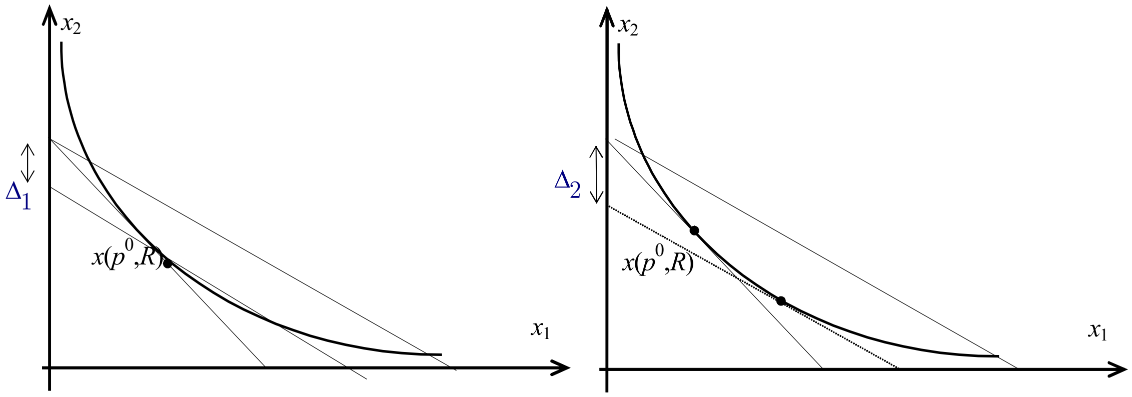


Рисунок 12. Компенсирующие изменения дохода по Слуцкому и Хиксу при $p_1^0 > p_1^1,\ p_2^0 = p_2^1 = 1$

Обе указанные формы компенсированного изменения дохода имеют достаточно ясную графическую интерпретацию. Предположим, что в момент времени 0 цены были $p^0=(p_1^0, 1)$, а доход в нулевой момент времени был равен $R$. В момент времени 1 упала цена первого блага, а цена второго блага и доход остались неизменными, т.е. $p^1=(p_1^1, 1)$, $p_1^0 > p_1^1$. На рисунке 12 показана разница в определениях компенсирующего изменения дохода по Слуцкому и Хиксу. На левом рисунке показан способ нахождения компенсирующего изменения дохода по Слуцкому. Строим обе бюджетные линии. Находим спрос в начальный момент времени. После чего начинаем двигать новую бюджетную линию до тех пор, пока она не *пройдет через точку спроса в начальный момент времени*. Разница между доходом, отвечающим этому положению и исходным доходом, и будет компенсированным изменением по Слуцкому. На втором рисунке показан способ нахождения компенсированного изменения по Хиксу. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что в этот раз мы двигаем бюджетную линию до *точки касания с исходной кривой безразличия, определяющей спрос потребителя*.

Рассмотренные варианты закона спроса при компенсированном изменении дохода позволяют делать некоторые выводы о поведении потребителя при изменении параметров модели. Неоспоримое достоинство этих свойств в том, что они выполняются при очень слабых предположениях на предпочтения индивидуума, но в то же время, это достоинство уравновешивается ограниченностью этих выводов. Мы можем говорить о направлении изменения спроса только при компенсированном изменении дохода. Фактически мы не получаем точной информации в ситуации когда цены изменились, а доход остался неизменным. То есть наша информация дает лишь приблизительный, возможно, достаточно грубый ответ на вопрос о поведении спроса. Этот недостаток не возможно устранить легкой ценой, требуется сделать некоторые дополнительные предположения на свойства функции полезности.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

**Определение 19.**

Будем говорить, что функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ удовлетворяет **закону спроса**, если выполнено соотношение

$$(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \leqslant 0.$$

Отметим очевидное отличие формулировки этого свойства от рассмотренных нами выше. Данное свойство должно выполняться при фиксированном доходе, в отличие от рассмотренных выше свойств, выполнявшихся при компенсированном изменении дохода.

В случае выполнения закона спроса мы получаем чистую информацию об изменении спроса не обусловленную изменением дохода, что, в частности, позволяет делать выводы об отсутствии товаров Гиффена в экономике, то есть об отсутствии товаров, спрос на которые растет при росте цены. Естественно задаться вопросом об условиях, которые гарантирует выполнение закона спроса. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

### Теорема 20. (Закон спроса)

Пусть $X=\mathbb{R}_+^K$, $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_{++}^K$, $R > 0$

1) функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ определена на $\mathbb{R}_+^K$, вогнута и дважды непрерывно дифференцируема;
2) градиент $\nabla u(\boldsymbol{x})$ неотрицателен и удовлетворяет неравенству $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} > 0$;
3) матрица вторых частных производных $\boldsymbol{H}$ функции $u(\boldsymbol{x})$ отрицательно определена.

Тогда, функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ удовлетворяет закону спроса тогда и только тогда, когда для любого $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^K$ выполнено неравенство:

$$\frac{\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{H}^{-1}\nabla u(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}} - \frac{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}} \leqslant 4.$$

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство данного утверждения достаточно длинно и технично, заинтересованный читатель сможет его найти в работах: Митюшин Л.Г., Полтерович В.М., *Критерий монотонности функций спроса*, Экономика и математические методы, Т. 14(1), 1978 и Полтерович В.М., *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М., Наука, 1990, стр. 69-77. Некоторый вариант этой теоремы в терминах непрямой функции полезности можно найти в Quah, J. K.-H., *The weak axiom and comparative statics*, Oxford University, Discussion paper, 1999.

■

Отметим, что, несмотря на силу заключения данной теоремы, она мало применима, так как прямая проверка выполнения сформулированного неравенства даже в случае двух товаров достаточно утомительна, а в пространствах большей размерности вряд ли представляется возможной. Но она служит полезным источником для получения *достаточных* условий выполнения закона спроса. В рамках сделанных предположений, первое слагаемое отрицательно, поэтому закон спроса будет заведомо выполнен в случае справедливости неравенства:

$$-\frac{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}} \leqslant 4.$$

В этом параграфе мы рассмотрели прямую и двойственную задачи потребителя, изучили их свойства и рассмотрели некоторые основные соотношения связывающие эти задачи. В следующем параграфе мы продолжим рассмотрение основных свойств данных задач, используя аппарат дифференциального исчисления.

### Задачи

71. Для каждой из нижеприведенных функций найти маршаллианскую функцию спроса, непрямую функцию полезности, хиксианскую функцию спроса, функцию расходов. Проиллюстрируйте соотношения двойственности между маршаллианской и хиксианской функциями спроса, а также между непрямой функцией полезности и функцией расходов.

а) $u(\boldsymbol{x})=x_1+ x_2$;

b) $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$;
c) $u(\boldsymbol{x})=\sqrt{x_1}+x_2$;
d) $u(\boldsymbol{x})=x_1x_2$;
e) $u(\boldsymbol{x})=\ln(x_1)+\dfrac{x_2^2}{2}$;
f) $u(\boldsymbol{x})=\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$;
g) $u(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$;
h) $u(\boldsymbol{x})=\min\{x_1, x_2\}$;
i) $u(\boldsymbol{x})=\max\{x_1, x_2\}$;
j) $u(\boldsymbol{x})=\min\{2x_1-x_2, 2x_2-x_1\}$;
k) $u(\boldsymbol{x})=28x_1+28x_2-2x_1^2-3x_1x_2-2x_2^2$
l) $u(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+4x_1+4x_2+2x_1x_2+6$.

Основываясь на полученных результатах, проверьте теоретические свойства маршаллианской функции спроса, непрямой функции полезности, хиксианской функции спроса, функции расходов.

72. Приведите пример функции полезности, для которой:

- Доля средств, расходуемых потребителем на приобретение каждого блага — постоянная (и положительная) доля совокупных расходов потребителя.
- Спрос потребителя на любое благо зависит лишь от относительной цены данного блага и совокупных потребительских расходов.
- Спрос потребителя на первые $l-1$ благ зависит лишь от относительной цены этих благ.
- Спрос потребителя на первые $l-1$ благо зависит лишь от цены данного блага.
- Структура спроса потребителя постоянна (отношение величины покупок $j$ блага к величине $1$ блага, $j=1,\dots, l$).
- Отображение спроса не является выпуклым множеством.

73. Покажите, что если функция полезности является квазилинейной, то непрямая функция полезности $v(p,R)$ имеет вид $v(p,R) = a(p) + b(p)R$ для тех значений $p$ и $R$, при которых оптимальный потребительский набор содержит все блага (в положительных количествах).

74. Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то отношение функций спроса на любые два товара не зависит от уровня дохода.

75. Пусть полезность потребителя зависит от двух благ, и первое благо является дискретным (доступные уровни его потребления — целые числа), а потребитель имеет квазилинейные предпочтения. При каких ценах на благо 1 потребитель предъявляет спрос на него на уровне 1, 2, …?

76. Покажите, что если функция полезности квазилинейна, то непрямая функция полезности — выпуклая функция цен.

77. Покажите, что если функция полезности квазилинейна, причем $l$-ое благо входит линейно, то хиксианский спрос на первые $l$–1 благо не зависит от $U$. Каков вид функции расходов в этом случае? При каких предположениях справедливы вышеприведенные утверждения?

78. Докажите теорему **17**.

79. Пусть все исходные данные те же что и в примере **8**. Укажите геометрическое место точек, среди которых может находиться спрос потребителя, обладающего квазилинейными предпочтениями.

80. (Алипрантис, Браун, Беркеншо) Рассмотрите функцию полезности вида $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + y + z/(1+z)$.

(а) Покажите, что функция полезности строго монотонна, строго вогнута и непрерывна.

(б) Покажите, что если $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ и $z>0$, то $(x, y+z, 0) \succ (x, y, z)$. (в) Пусть $\boldsymbol{p}>>0$ и $p_2 = p_3$. Покажите, что для вектора спроса выполнено равенство $z(\boldsymbol{p}, R)=0$.

(г) Рассмотрите последовательность цен $\boldsymbol{p}_n=(1, 1/n, 1/n)$ чему равны пределы $z(\boldsymbol{p}_n, R)$ и $y(\boldsymbol{p}_n, R)$.

81. В случае, когда в экономике наличествуют всего 2 товара, найдите, если это возможно, маршаллианский, хиксианский спросы, непрямую функцию полезности и функцию расходов для потребителя, описываемого лексикографическими предпочтениями.

82. Сформулируйте и докажите аналоги теорем **14** – **19** для случая когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{w}$.

83. Сформулируйте и докажите аналоги теорем **14** – **19** для случая когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна $w$, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

84. (МасКолелл, Винстон, Грин) Рассмотрите следующую функцию расходов

$$e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \exp\{\Sigma\alpha_l \ln(p_l) + (\Pi p_1^{\beta_l}) u(\boldsymbol{x})\}.$$

При каких ограничениях на параметры $\alpha_l$, $\beta_l$ данная функция является функцией расходов? С учетом ответа на первый вопрос найдите отвечающую ей непрямую функцию полезности.

85. Пусть непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R$. Какими свойствами должны обладать функции $a(\boldsymbol{p})$ и $b(\boldsymbol{p})$ для того чтобы данная функция была непрямой функцией полезности рационального потребителя.

86. В экономике присутствует два товара. Потребитель имеет локально ненасыщаемые предпочтения и функция спроса на первый товар имеет вид $x_1(\boldsymbol{p}, R) = \frac{3R}{3p_1+4\sqrt{p_1 p_2}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Слуцкому при $\boldsymbol{p}=(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, $\boldsymbol{p}'=(\mathbf{1}, \mathbf{4})$ и $\boldsymbol{R}=\mathbf{121}$.

87. Пусть непрямая функция полезности некоторого потребителя имеет вид: $\nu(\boldsymbol{p}, R) = \dfrac{R}{\min\{p_1, p_2\}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Хиксу при $\boldsymbol{p}=(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, $\boldsymbol{p}'=(\mathbf{1}, \mathbf{4})$ и $\boldsymbol{R}=\mathbf{121}$.

88. Функция полезности называется псевдовогнутой, если из условия $\nabla u(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \leqslant 0$, следует, что $u(\boldsymbol{y}) \leqslant u(\boldsymbol{x})$. Покажите, что если функция полезности является псевдовогнутой, то условия Куна-Таккера являются достаточными условиями для нахождения решения задачи потребителя. Покажите, что любая вогнутая функция является псевдовогнутой, а любая псевдовогнутая функция является квазивогнутой.

89. Пусть функция полезности равна $u(\boldsymbol{x}) = (x_1+x_2-2)^3$. Цена на первый товар равна $1$, а на второй равен $2$. Доход потребителя равен 3. Проверьте, что целевая функция квазивогнута и локально ненасыщаема. Покажите, что точка $(1, 1)$ удовлетворяет условиям Куна-Таккера, но не является оптимальной.

90. Пусть функция спроса некоторого потребителя равна $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = (\frac{\alpha R}{p_1}, \frac{(1-\alpha)R}{p_2})$, а непрямая функция полезности равна $\nu(\boldsymbol{p}, R) = \dfrac{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}R}{{p_1}^{\alpha}{p_2}^{(1-\alpha)}}$. Найдите функцию расходов и хиксианский спрос.

91. Покажите что функция $\nu(\boldsymbol{p},R) = \dfrac{R}{p_1} + \dfrac{R}{p_2}$ удовлетворяет всем свойствам непрямой функции полезности и вычислите на ее основе функцию затрат и функции спроса (маршаллианского и хиксианского).

92. Проверьте выполнение соотношений двойственности (взаимности) в случае если поведение потребителя описывается функцией полезности: $u(\boldsymbol{x}) = [x_1 x_2]$, где $[.]$ – оператор взятия целой части.

93. Пусть потребитель имеет однородную первой степени функцию полезности при ценах $\boldsymbol{p}=(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ и доходе $\boldsymbol{R}=\mathbf{5}$ его функция спроса была равна $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = (2, 3)$. Определите геометрическое место точек, которые могут представлять спрос потребителя, если на покупку первого товара ввели налог в размере 20% от цены, а доход потребителя остался неизменным. Ответьте на этот вопрос, в случае если налог на доход потребителя изменился с 20 до 40 процентов.

94. Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, то есть имеет вид: $u(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{K} u_i(x_i)$. Запишите достаточные условия оптимальности для задачи потребителя в предположении, что потребитель имеет выпуклые, локально ненасыщаемы предпочтения. Покажите, что если $u'_i(0) = +\infty$, то потребитель покупает все блага в положительных количествах.

95. Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, то есть имеет вид: $u(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{K} u_i(x_i)$. Кроме того, предположим, что выполнены все условия теоремы **20** и каждое слагаемое $u_i(x_i)$ положительно однородно степени $\alpha_i \geqslant 0$. Покажите, что спрос данного потребителя удовлетворяет закону спроса.

96. Пусть функция полезности, представляющая некоторое нетранзитивное отношение, имеет вид $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = y_1^{-1/2}x_2^{1/2} + \ln(x_3) - x_1^{-1/2}y_2^{1/2} - \ln(y_3)$. Найдите маршаллианский спрос данного потребителя. (Для пояснения обозначений смотри теорему **9**.)

## *Дифференциальные свойства задачи потребителя*

Перед тем как перейти к рассмотрению дополнительных содержательных свойств решения задачи потребителя, проведем предварительную подготовку и приведем условия гарантирующие дифференцируемость функций спроса, непрямой функции полезности и функции расходов. Эти технические вопросы послужат некоторым обоснованием законности применяемых далее рассуждений.

**Теорема 21.**

Пусть $X=\mathbb{R}^K_+$, $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^K_{++}$, $R > 0$, функция полезности обладает свойствами локальной ненасыщаемости, сильной квазивогнутости, непрерывности и дважды непрерывно дифференцируема. Предположим, что оптимальный потребительский набор строго положителен, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)>>\boldsymbol{0}$. Тогда,

1) функция маршаллианского спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ и непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p}, R)$ непрерывно дифференцируемы по ценам и доходу;

2) функция хиксианского спроса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ и функция расходов $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируемы по ценам.

***Доказательство***:

Как было показано в предыдущем параграфе, приведенные предположения гарантируют, что условия Куна-Таккера являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности для задачи потребителя. Также было показано, что при выполнении этих условий множитель Лагранжа строго положителен. С учетом этого факта и того, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)>>\boldsymbol{0}$ условия Куна-Таккера (условия первого порядка) которые определяют потребительский спрос как функцию от параметров $(\boldsymbol{p}, R)$ задачи, запишутся следующим образом.

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) - \lambda \boldsymbol{p}^{\mathsf{T}} = 0;$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - R = \boldsymbol{0}.$$

По теореме о неявной функции[42] функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ и множитель Лагранжа λ будут непрерывно дифференцируемыми если матрица

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) & \boldsymbol{p}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{p} & 0 \end{bmatrix},$$

является невырожденной, где матрица $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))$ – матрица вторых частных производных функции полезности, вычисленная в точке спроса. Невырожденность этой матрицы эквивалентна невырожденности матрицы (Почему?)

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) & \nabla u(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \\ \nabla u(\boldsymbol{x}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что при сделанных нами предположениях матрица $\tilde{\boldsymbol{H}}$ не вырожденная. Предположим противное. Тогда существует такой вектор $\boldsymbol{y}$ и число $\boldsymbol{z}$, такие, что $\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \nabla u(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$ $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ и $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=0$, где $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\neq\boldsymbol{0}$. Пусть $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, а $\boldsymbol{z}\neq 0$, то $\nabla u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Это противоречит доказанному ранее свойству существования такого блага $i$, что $u_i'(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) > 0$. Пусть теперь $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, тогда $\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\nabla u(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} = 0$ и $\nabla u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=0$, что противоречит свойству сильной квазивогнутости. Таким образом, мы доказали, что матрица $\tilde{\boldsymbol{H}}$ не вырождена. И, тем самым, функция маршаллианского спроса и множитель Лагранжа λ являются непрерывно дифференцируемыми по ценам и доходу. В силу определения непрямой функции полезности $v(\boldsymbol{p}, R)= u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$ и непрерывной дифференцируемости функции полезности и функции спроса имеем непрерывную дифференцируемость непрямой функции полезности по ценам и доходу. В силу свойств взаимности $v(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})) = u(\boldsymbol{x})$. С учетом монотонности непрямой функции полезности по доходу и непрерывной дифференцируемости непрямой функции полезности имеем непрерывную дифференцируемость функции расходов по ценам. Наконец, в силу соотношения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$, непрерывной дифференцируемости функции спроса по доходу и непрерывной дифференцируемости функции расходов по ценам имеем непрерывную дифференцируемость хиксианского спроса по ценам.

■

В задачах к этому параграфу читателю предложат доказать непрерывную дифференцируемость функции расходов и хиксианского спроса по $\boldsymbol{x}$.

При выполнении условия дифференцируемости непрямой функции полезности, функции расходов и функций маршаллианского и хиксианского спросов выполняются три важных свойства теории потребителя: лемма Шепарда, тождество Роя и уравнение Слуцкого.

Связь между функциями расходов и (хиксианского) спроса описывается леммой Шепарда.

### Теорема 22. (Лемма Шепарда[43])

Пусть решение взаимной (двойственной) задачи внутреннее и выполнены условия теоремы 21, тогда[44]

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$$

---

[42] Смотри, например, Зорич, В.А., *Математический анализ* I, М., МЦНМО, 2001, стр. 568-69.

[43] Shephard, R. W., *Cost and production function*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1953

[44] На самом деле для справедливости данного утверждения достаточно дифференцируемости функции расходов и непрерывности системы неоклассических предпочтений.

***Доказательство***:

Учитывая значение этого результата для теории потребления, укажем несколько его обоснований.

A) По определению функции расходов $e(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) = ph(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}$. Продифференцировав это тождество по $p_i$, получим соотношение:

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{K} p_j \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i}.$$

Остается показать, что второе слагаемое равно нулю.

Последнее утверждение стоит проинтерпретировать. Хотя при изменении цен рассматриваемых благ потребитель меняет свое поведение, предпочитая, вообще говоря, другой потребительский набор, при расчете изменения расходов на приобретение нового набора в первом приближении можно не учитывать этого изменение спроса потребителя. Другими словами, новые расходы в первом приближении рассчитываются, как если бы оптимальный выбор остался неизменным, т.е. эти новые расходы равны стоимости старого набора в новых ценах. Изменение спроса проявляется лишь во втором приближении.

Докажем это утверждение.

Так как $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$ — решение задачи взаимности, то по теореме Куна-Таккера существует множитель Лагранжа $\lambda$ ограничения задачи такой, что

$$p_j = \lambda \frac{\partial u}{\partial h_j}(\boldsymbol{h})\ \ \forall j.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{K} p_j \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = \lambda \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial u}{\partial h_j} \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i}.$$

По доказанному свойству функции хиксианского спроса имеем $u(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})) \equiv u(\boldsymbol{x})$. Продифференцировав это тождество по $p_i$, получаем требуемое соотношение

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{\partial u}{\partial h_j} \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = 0.$$

Другое доказательство этого факта состоит в построении касательной для графика функции расходов.

B) Обозначим $\boldsymbol{p}_{-i} = (p_1,\ldots,\ p_{i-1},\ p_{i+1},\ldots,p_{\mathrm{K}})$, и $\boldsymbol{p} = (p_i,\ \boldsymbol{p}_{-i})$. Пусть $p^*$ — некоторая точка. Зафиксируем все цены, кроме цены $i$-го блага $\boldsymbol{p}_{-i} = \boldsymbol{p}^*_{-i}$ . Покажем, что прямая $p_i h_i(p_i,\ p^*_{-i},\ \boldsymbol{x}) + \sum_{j\neq i} p_j^* h_j(p_i,\ p^*_{-i},\ \boldsymbol{x})$ касается графика функции $e(p_i,\ p^*_{-i},\ \boldsymbol{x})$ в точке $p^*_i$. Действительно, набор $\boldsymbol{h}(p^*,\ \boldsymbol{x})$ при ценах $p^*$ требует минимальных расходов на приобретение из наборов, обеспечивающих тот же уровень благосостояния, что и потребительский набор $\boldsymbol{x}$. При любых других ценах он допустим, но, вообще говоря, не минимизирует расходы. При ценах $(p_i,\ p^*_{-i})$ минимум расходов достигается на потребительской корзине $\boldsymbol{h}(p_i,\ p^*_{-i},\ \boldsymbol{x})$. Другими словами, справедливо соотношение, которое и устанавливает требуемый результат о касании:

$$e(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x}) = p_i h_i(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x}) + \sum_{j\neq i} p_j^* h_j(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x}) \leqslant p^*_i h_i(p^*, \boldsymbol{x}) + \sum_{j\neq i} p_j^* h_j(p^*, \boldsymbol{x}).$$

Сказанное иллюстрирует нижеприведенный график.

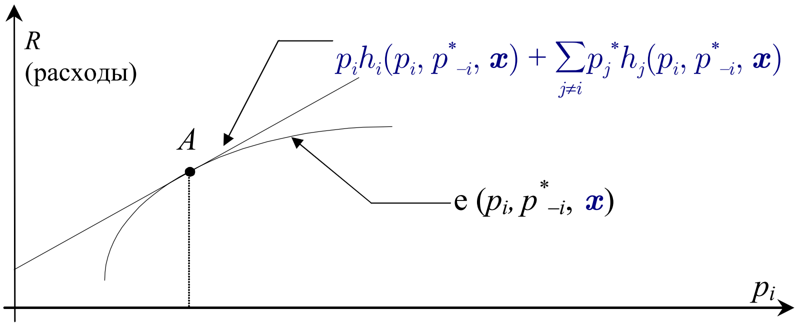


Рисунок 13 Иллюстрация доказательства леммы Шепарда

Согласно неравенству, кривая $e(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x})$ лежит под прямой

$$p_i h_i(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x}) + \sum_{j \neq i} p_j^* h_j(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x})$$

и имеет с ней общую точку $(p^*_i, e(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}))$ (точка A на рисунке). Значит, эта прямая является касательной к кривой $e(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x})$. Наклон прямой в точке касания равен $h_i(p^*, \boldsymbol{x})$. Таким образом, производная функции $e(p_i, p^*_{-i}, \boldsymbol{x})$ в точке $p^*_i$ равна $h_i(p^*, \boldsymbol{x})$. Тем самым мы и доказали

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}).$$

■

Из леммы Шепарда следует, что по функции расходов всегда можно построить функцию (хиксианского) спроса. Отметим также, что из нее следует, *дважды* непрерывно дифференцируемость функции расходов, так как непрерывно дифференцируемым является хиксианский спрос.

**Пример 12.**

Выше мы нашли, что для потребителя с функцией полезности $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ функция расходов равна $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \dfrac{p_1 p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{p_2 + a^2 p_1}$. Проиллюстрируем для данной функции расходов лемму Шепарда для первого товара. Продифференцируем функцию расходов $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ по $p_1$:

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{\partial p_1} = \frac{p_2\,(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2(p_2 + a^2 p_1) - a^2 p_1 p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = \frac{p_2^2\,(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = h_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}).$$

Вполне естественно, что в качестве результата дифференцирования мы получили найденный нами ранее хиксианский спрос.

⇐

**Теорема 23. (Тождество Роя)**

Пусть выполнены условия теоремы 22, тогда

$$-\frac{\partial v(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} = x_i(\boldsymbol{p}, R)$$

***Доказательство***:

Для доказательства этого тождества воспользуемся одним из тождеств взаимности:

$$\nu(\boldsymbol{p},\, e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})) = u(\boldsymbol{x}).$$

Продифференцируем это тождество по $p_i$:

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},\, e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})) + \frac{\partial \nu}{\partial R}\,(\boldsymbol{p},\, e\,(\boldsymbol{p}, U))\,\frac{\partial e}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) = 0.$$

По лемме Шепарда $\frac{\partial e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})$, следовательно

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},\, e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x})) + \frac{\partial \nu}{\partial R}\,(\boldsymbol{p},\, e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}))\; h_i(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) = 0.$$

В качестве $\boldsymbol{x}$ возьмем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)$.

Воспользуемся тождествами $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)$ и $e(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)) \equiv R$. Из них следует, что верно соотношение

$$-\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial R} = x_i(\boldsymbol{p},\, R).$$

.■

**Пример 13.**

Как показано ранее для потребителя с функцией полезности $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ непрямая функция полезности равна $\nu(\boldsymbol{p},\, R) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1}}$. Проиллюстрируем тождество Роя для первого товара. Для этого найдем $\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial R}$ и $\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial p_1}$:

$$\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p_2 + a^2 p_1)}{R p_2 p_1}} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2 p_1}{R(p_2 + a^2 p_1)}}\;\frac{a^2 p_1\, p_2 R - p_2 R(p_2 + a^2 p_1)}{(p_2 p_1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2 p_1}{R(p_2 + a^2 p_1)}}\;\frac{-R}{(p_1)^2}\,.$$

С учетом этого $-\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \nu(\boldsymbol{p},\, R)}{\partial R} = \sqrt{\frac{p_2 p_1}{R(p_2 + a^2 p_1)}}\;\frac{R}{(p_1)^2} \Big/ \sqrt{\frac{(p_2 + a^2 p_1)}{R p_2 p_1}} = \frac{R p_2}{p_1(p_2 + a^2 p_1)}.$

Несложно, заметить, что найденная функция является спросом на первый товар для функции полезности $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$.

⇐

### Теорема 24. (Уравнение Слуцкого[45])

Пусть выполнены условия теоремы 22, тогда

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\,(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)) = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\,(\boldsymbol{p},\, R) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p},\, R)\; x_j(\boldsymbol{p},\, R).$$

---

[45] Slutsky,E., Sulla Teoria Del Bilancio Del Consumatore, Giornale Degli Economisti, Vol. 51, 1915, русский перевод Слуцкий, Е. Е., К теории сбалансированного бюджета потребителя, в Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления, М., Изд-во АН СССР, 1963.

$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$ — эффект замены, $\frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)x_j(\boldsymbol{p}, R)$— эффект дохода.

***<u>Доказательство</u>***:

Для доказательства воспользуемся следующим тождеством взаимности: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{x}})$. Продифференцируем это тождество по $p_j$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\ \boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}))\ \frac{\partial e}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}).$$

Воспользуемся леммой Шепарда $\frac{\partial e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$. В качестве потребительского набора $\boldsymbol{x}$ возьмем $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, тогда в силу соотношений взаимности имеем $h_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = x_j(\boldsymbol{p}, R)$ и $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = R$.

Следовательно,

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\ x_j(\boldsymbol{p}, R).$$

■

**Пример 14.**

Проиллюстрируем уравнение Слуцкого по первому товару и второй цене для рассмотренной функции полезности $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. Функция спроса для этой функции полезности равна $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = (\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2})$. Функция хиксианского спроса равна $h_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{p_2^2\,(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}\,)^2}{(p_2+a^2p_1)^2}$. Найдем $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, R)$, $\frac{\partial x_1}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\ x_2(\boldsymbol{p}, R)$ и $\frac{\partial h_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, R) = \frac{R(p_1p_2 + a^2(p_1)^2) - Rp_1p_2}{(p_1p_2 + a^2(p_1)^2)^2} = \frac{a^2R(p_1)^2}{(p_1)^2(p_2 + a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2};$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\ x_2(\boldsymbol{p}, R) = \frac{p_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \cdot \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2} = \frac{a^2Rp_1p_2}{p_2p_1(p_2 + a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2}.$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{2p_2(p_2+a^2p_1)^2 - 2(p_2)^2(p_2+a^2p_1)}{(p_2+a^2p_1)^4}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}\,)^2 = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}\,)^2$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3}(\nu(\boldsymbol{p}, R))^2 = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3} \cdot \frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_2p_1} = \frac{2a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2}.$$

Проверка уравнения Слуцкого для первого товара и второй цены состоит в проверке равенства:

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}, R) + \frac{\partial x_1}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\ x_2(\boldsymbol{p}, R).$$

Выполнение этого равенства очевидно, действительно:

$$\frac{2a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2} + \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2}.$$

⇐

### Теорема 25. (Свойства матрицы замены)

Пусть выполнены условия теоремы 22, тогда матрица $A=\{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\}$ эффектов замены является симметричной, отрицательно полуопределенной и вырождена.

*Доказательство*:

Как было отмечено, выше при обсуждении леммы Шепарда при сделанных нами предположениях, функция расходов является дважды непрерывно дифференцируемой. Тогда в силу теоремы Юнга[46] ее смешанные вторые производные совпадают, т.е.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}).$$

Дифференцируя тождество Шепарда, получаем

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}).$$

Таким образом, матрица коэффициентов замены функции расходов потребителя, выборы которого описываются моделью рационального поведения, симметрична. Кроме того, поскольку функция расходов $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ — вогнутая функция цен, то матрица коэффициентов замены является отрицательно полуопределенной. Вырожденность матрицы $A$ читателя попросят доказать в упражнениях.

■

Обсудим теперь связь матрицы замены с полученными ранее вариантами закона спроса. Рассмотрим, вначале, закон спроса при компенсированном изменении дохода по Слуцкому: $(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'\overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \leqslant 0$. Пусть $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}$. Разложим функцию $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'\overline{\boldsymbol{x}})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{p}$: $x_i(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'\overline{\boldsymbol{x}}) = x_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R) + \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R)\ (\Delta p_j)^{\mathsf{T}} + \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\ x_j(\boldsymbol{p}, R)(\Delta p_j) + \boldsymbol{o}(\|\Delta\boldsymbol{p}\|)$. Используя это разложение, получаем, что из закона спроса следует, что $\Delta\boldsymbol{p}A(\Delta\boldsymbol{p})^{\mathsf{T}} + \Delta\boldsymbol{p}\boldsymbol{o}(\|\Delta\boldsymbol{p}\|) \leqslant 0$. Отсюда видно, что если закон спроса при компенсированном изменении дохода выполняется со строгим знаком, то матрица коэффициентов замены отрицательно полуопределена. Этот же результат получится при использовании закона спроса при компенсированном изменении дохода по Хиксу. Действительно, несложно понять, что компенсированные изменения дохода по Слуцкому и по Хиксу будут сближаться при $\Delta\boldsymbol{p}$, стремящемся к $\boldsymbol{0}$. Таким образом, получается эквивалентность этих законов при дифференциально малом изменении цен. В упражнениях вам будет предложено показать, что следствием закона спроса является отрицательная полуопределенность матрицы составленной из производных спроса по ценам: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R)$.[47]

Теперь получим основные соотношения, которые связывают производные спроса по ценам и доходу.

### Теорема 26.

---

[46] Смотри, например, Зорич, В.А., *Математический анализ* I, М., ЦНМО, 2001, стр.532-34.

[47] Собственно говоря, отрицательная определенность, матрицы вторых частных производных хиксианского спроса эквивалентна выполнению закона спроса. Смотри, цитировавшиеся работы В.М. Полтеровича.

Пусть $x(\boldsymbol{p}, R)$ – решение задачи потребителя. Предположим, также что $x(\boldsymbol{p}, R)$ – непрерывно дифференцируемая функция по ценам и доходу, тогда выполнены следующие свойства:

1) для любого $i$ справедливо $\sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R) + x_j(\boldsymbol{p}, R) = 0$,

2) для любого $k$ справедливо $\sum_i p_i \frac{\partial x_k}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, R) + R\frac{\partial x_k}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R) = 0$,

3) $\sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R) = 1$.

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

■

Данные соотношения знакомы читателю по курсам микроэкономики промежуточного курса. Обычно они переформулируются в терминах эластичностей спроса по доходу и ценам.

**Определение 20.**

**Эластичностью спроса на $i$-ое благо по доходу** называется выражение –

$$E_i^R = \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\frac{R}{x_i(\boldsymbol{p}, R)}.$$

**Эластичностью спроса на $i$-ое благо по цене $i$-ого** называется выражение –

$$E_{ij}^{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R)\frac{p_j}{x_i(\boldsymbol{p}, R)}.$$

**Долей дохода, затрачиваемой на покупку $i$-ого благо,** называется выражение –

$$\mu_i(\boldsymbol{p}, R) = \frac{p_i x_i(\boldsymbol{p}, R)}{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)} = \frac{p_i x_i(\boldsymbol{p}, R)}{R}.$$

С учетом этого определения теорема **26** может быть переформулирована в виде:

**Теорема 27.**

Пусть $x(\boldsymbol{p}, R)$ – решение задачи потребителя. Предположим, также что $x(\boldsymbol{p}, R)$ – непрерывно дифференцируемая функция по ценам и доходу, тогда выполнены следующие свойства:

1) $\mu(\boldsymbol{p}, R)\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}} = -\mu(\boldsymbol{p}, R)$,

2) для любого $k$ справедливо $E_k^R = -\sum_k E_{kj}^{\boldsymbol{p}}$,

3) $\mu(\boldsymbol{p}, R)\boldsymbol{E}^R = 1$.

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

■

Перечисленные в данном параграфе соотношения важны для характеризации спроса, порожденного моделью рационального поведения. Они являются не только необходимыми (как мы только что установили), но и достаточными (как покажем далее) условиями того, что некоторая функция цен и уровней полезности является функцией расходов рационального потребителя. Согласно уравнению Слуцкого эти характеристики могут быть выражены в терминах первых частных производных маршаллианского спроса, которые, как предполагается, являются непосредственно наблюдаемыми, что дает возможность проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью рационального поведения и восстанавливать предпочтения потребителя на основе его рыночного поведения (выборов).

## Задачи

97. Покажите, что невырожденность матрицы $\tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) & \nabla u(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \\ \nabla u(\boldsymbol{x}) & 0 \end{bmatrix}$ является необходимым условием дифференцируемости функции спроса.

98. Докажите, что при приведенных в тексте предположениях функция расходов и функция хиксианского спроса являются непрерывно дифференцируемыми по $\boldsymbol{x}$.

99. Является ли дифференцируемым на положительном ортанте, функция спроса потребителя, у которого $u(\boldsymbol{x})= x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$. (Данный пример показывает, что для дифференцируемости недостаточно строгой квазивогнутости, дважды непрерывной дифференцируемости и локальной ненасыщаемости)

100. Докажите аналог уравнения Слуцкого для случая, когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{w}$.

101. Сформулируйте и докажите аналог уравнения Слуцкого для случая когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна $w$, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

102. Проверьте выполнение леммы Шепарда, тождества Роя и уравнения Слуцкого для следующих функций полезности:

- Кобба-Дугласа,
- линейной,
- аддитивной.
- CES,
- квазилинейной,
-Леонтьева,

103. Пусть выполнен закон Вальраса и функция спроса однородна нулевой степени. Пусть, кроме того, в экономике обращается только два товара. Докажите симметричность матрицы Слуцкого, не делая предположения о максимизации полезности потребителем.

104. Пусть $A$ — матрица коэффициентов замены. Докажите, что $\boldsymbol{p}A = 0$.

105. В экономике 2 товара. Известно, что в матрице замены $a_{11} = -2$ и $a_{22} = -1$. В этом случае элемент $a_{21}$ равен

106. Матрица замены при ценах $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 6$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Найдите пропущенные элементы. Может ли эта матрица быть матрицей замены рационального потребителя?

107. Пусть в экономике представлено 3 блага. Спрос на первое блага имеет вид $x_1(\boldsymbol{p}, R) = \dfrac{R}{2p_1(1 + (p_2/p_1)^{1/2})}$. Спрос на второе благо имеет вид $x_2(\boldsymbol{p}, R) = \dfrac{R}{2p_2(1 + (p_2/p_1)^{1/2})}$. Проверьте выполнение уравнения Слуцкого.

108. (МасКолелл, Винстон, Грин) В экономике с тремя благами потребитель имеет положительный доход $R > 0$ и его функции спроса на первое и второе благо равны

$$x_1 = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3},$$

$$x_2 = \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$.

(а) Объясните, как можно рассчитать спрос не третье благо (вычисления делать не надо).

(б) Являются ли функции спроса для $x_1$ и $x_2$ однородными требуемой степени?

(в) Какие ограничения на параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ должны выполняться, чтобы данные функции спроса могли быть порождены задачей максимизации полезности.

(г) Используя результаты пункта (в) для фиксированного значения спроса на 3-й товар изобразите кривые безразличия в пространстве $(x_1, x_2)$.

(д) Что можно сказать о свойствах функции полезности этого потребителя? (Используйте результаты пункта (г).)

109. Докажите утверждения теорем 26 и 27.

110. Покажите, что если блага комплементарны, то эффект замены отсутствует, а если предпочтения квазилинейны (для спроса на благо, уровень полезности которого нелинейно зависит от потребления этого блага) то отсутствует эффект дохода.

111. Покажите, что если функция полезности аддитивно–сепарабельна и строго монотонна, то в экономике не будет взаимодополняемых товаров

112. Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то функции спроса удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i}.$$

113. Во вводных курсах микроэкономики обычно вводят следующее определение благ-заменителей и комплементарных благ (в терминах функций спроса Маршалла):

«Благо 1 называется субститутом блага 2, если $\dfrac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$».

«Благо 1 называется комплементарным для блага 2, если $\dfrac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$».

Покажите, что такое определение ведет к парадоксам. Например, возможна ситуация, когда благо 1 является субститутом блага 2, а обратное неверно.

Покажите также, что, аналогичные определения в терминах функции спроса Хикса (приведите их) свободны от парадоксов такого типа.

114. Покажите, что любой товар Гиффена является малоценным. Справедливо ли обратное?

115. Могут ли все блага быть малоценнными, если предпочтения локально ненасыщаемы?

116. Пусть для некоторого потребителя значения эластичности спроса по доходу равны по всем товарам. Найдите чему равно это значение.

117. Пусть функция полезности однородна первой степени. Чему равны эластичности спроса по доходу?

118. Используя теорему об огибающей, докажите, что $h_i(\boldsymbol{p}, u) = \dfrac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i}$.

119. Используя теорему об огибающей, докажите, что $\dfrac{\partial v(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}$ — значение множителя Лагранжа задачи потребителя.

## *Интегрируемость функций спроса: восстановление предпочтений*

На основе модели рационального поведения, ключевым элементом которой являются предпочтения потребителя, можно построить функции спроса. Однако сами по себе предпочтения ненаблюдаемы, и чтобы иметь возможность прогнозировать будущий спрос при изменениях цен и дохода, нам необходимо решить *обратную задачу*: восстановить предпочтения по наблюдаемому спросу. Есть несколько подходов к ее решению.

### Восстановление предпочтений через непрямую функцию полезности

Предположим, что нам известна система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p}, R)$. Для восстановления непрямой функции полезности можно прямо воспользоваться тождеством Роя

$$-\frac{\partial v(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} = x_i(\boldsymbol{p}, R)$$

рассматривая это тождество как систему дифференциальных уравнений. Если бы мы смогли решить данную систему дифференциальных уравнений, то получили бы непрямую функцию полезности. Знание непрямой функции полезности и системы функций спроса позволяет нам сопоставить каждому потребительскому набору, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, значение полезности по следующему правилу: $u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \nu(\boldsymbol{p}, R)$.

Однако данное правило задает полезность не всех наборов. Так функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$ соответствует функция спроса, для которой $x_1(\boldsymbol{p}, R) = x_2(\boldsymbol{p}, R)$. Как не сложно понять, предложенное правило не позволяет задать полезность для наборов $(x_1, x_2)$ таких, что $x_1 \neq x_2$.

Восстановить функцию полезности на множестве потребительских наборов, которые являются оптимальными выборами потребителя при некоторых ценах и доходах, по построенной непрямой функции полезности можно также на основе решения следующей задачи:

$$\nu(\boldsymbol{p}, R) \to \inf_{p \in \mathbb{R}^{l}_{++}}$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R. \qquad ♥$$

При этом в качестве полезности набора $\boldsymbol{x}$ выбираем значение этой задачи — $u^*(x) = \inf\{\nu(\boldsymbol{p}, R) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{l}_{++}, \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R\}$. В качестве дохода можно взять любое положительное число, например, $R = 1$. Отметим, что данная задача ориентированна на поиск инфимума, а не минимума. Это объясняется тем, что оптимизация ведется на множестве, которое не является замкнутым. Отметим, что оно не является также и открытым. Кроме того, оптимизируемая непрямая функция полезности, не определена в случае, когда хотя бы одна цена обращается в 0. В силу этого замена инфимума на минимум невозможно, так как последний может, вообще говоря, не существовать. В то же время инфимум существует, хотя при некотором значении параметров и может быть равен $-\infty$.

**Пример 15.**

Пусть непрямая функция полезности равна $\nu(\boldsymbol{p}, R) = \dfrac{R}{\max\{p_1, p_2\}}$. Решим задачу

$$\frac{R}{\max\{p_1, p_2\}} \to \inf_{p \in \mathbb{R}^{l}_{++}}$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R,$$

в случае, когда вектор параметров $\boldsymbol{x}$ состоит из строго положительных компонент. Пусть, также, $x_1 > x_2$. В этом случае инфимум достигается при $p_1 = 0$, а $p_2 = \dfrac{R}{x_2}$. В то же время эта же задача на минимум решения не имеет. Значение задачи в точке оптимума, в этом случае равно $x_2$ Аналогично, рассматривая случай, когда $x_2 \geqslant x_1$, имеем что значение целевой функции равно $x_1$. В случае если, например, $x_1 > 0$, а $x_2 = 0$, то значение целевой функции будет равно 0, а инфимум достигается при $p_2 = +\infty$. Несложно догадаться, что в общем случае, значение целевой функции этой задачи в точке к инфимума равно $\min\{x_1, x_2\}$.

⇐

Покажем, что такая процедура корректна, т.е. на ее основе мы получаем (правда, не для всех точек $\boldsymbol{x}$) прямую функцию полезности, соответствующую данной $\nu(\boldsymbol{p}, R)$.

**Теорема 28.**

Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $\nu(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ — оптимальный потребительский набор при ценах $\boldsymbol{p}'$ и доходе $R$, т.е. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$. Тогда вектор $\boldsymbol{p}'$ является решением задачи ♥ и $\nu(\boldsymbol{p}', R) = u^*(\boldsymbol{x})$.

***Доказательство***:

Пусть $\boldsymbol{p}$ — произвольный вектор, являющийся допустимый в задаче (♥) при $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$, т.е. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R$. Это неравенство, с другой стороны, означает, $\boldsymbol{x}$ допустим в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$. Этот набор не может иметь большую полезность, чем набор $\hat{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, являющийся оптимальным в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$, т.е. $u(\boldsymbol{x}) \leqslant u(\hat{\boldsymbol{x}})$, или $\nu(\boldsymbol{p}', R) \leqslant \nu(\boldsymbol{p}, R)$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{p}'$ оптимален в задаче ♥ при $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$. Таким образом, мы получили, что $\nu(\boldsymbol{p}', R) = u^*(\boldsymbol{x})$.

■

Заметим, что в принципе данная процедура позволяет построить «функцию полезности» $u^*(\boldsymbol{x})$ на множестве всех наборов благ. Однако она может не везде совпадать с исходной функцией полезности. Так, если $\boldsymbol{x}$ — вектор, для которого задача (♥) имеет решение, но который не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$ (при которых $\boldsymbol{x}$ является допустимым в задаче потребителя), то $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \nu(\boldsymbol{p}, R)$ для каждого $\boldsymbol{p}$ такого, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \leqslant R$. В том числе неравенство $u(\boldsymbol{x}) < \nu(\boldsymbol{p}, R)$ верно и для вектора $\boldsymbol{p}$, являющегося решением задачи (♥), т.е. $u(\boldsymbol{x}) < u^*(\boldsymbol{x})$. Таким образом, описанная процедура не всегда позволяет получить исходные значения полезности в точках, которые не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$. Хотя мы не всегда можем восстановить функцию полезности правильно, однако полученная функция полезности порождает тот же спрос, что и исходная.

**Теорема 29.**

Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $\nu(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности. Кроме того, пусть $u^*(.)$ — построена на основе задачи (♥) указанным выше способом. Тогда набор $\bar{\boldsymbol{x}}$, являющийся решением задачи потребителя с функцией полезности $u(.)$ при ценах $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$ и доходе $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

***Доказательство***:

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ — произвольный потребительский набор, удовлетворяющий бюджетному ограничению при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$: $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant R$. Рассмотрим задачу (♥) с $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$. Цены $\boldsymbol{p}$ являются допустимыми в этой задаче, а $u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$ — значение этой задачи. Поэтому $\nu(\boldsymbol{p}, R) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$. Поскольку $u^*(\bar{\boldsymbol{x}}) = \nu(\boldsymbol{p}, R)$, то $u^*(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$.

■

Поскольку существует бесконечно много функций полезности, описывающих одни и те же предпочтения, то дифференциальные уравнения, порождаемые тождеством Роя, не позволяют однозначно восстановить непрямую функцию полезности: если эти уравнения имеют хотя бы одно решение, то решений бесконечно много. Чтобы решение было единственным, необходимо наложить дополнительные ограничения на функциональную форму непрямой функции полезности. В простом случае, когда известно, что восстанавливаемые предпочтения могут быть представлены квазилинейной функцией полезности, — $u(x_1, \ldots, x_K) = s(x_1, \ldots, x_{K-1}) + x_K$, — такая нормировка определяется самим видом функции.

Приведем сначала характеристики функции спроса. Предположим, что $s(x_1, \ldots, x_{K-1})$ — строго вогнутая дифференцируемая функция, и выбор потребителя при некоторых ценах и доходе содержит все продукты в положительном количестве, т.е. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) >> 0$. Тогда по теореме Куна-Таккера при некотором положительном $\lambda$, верны соотношения $\frac{\partial s}{\partial x_i} = \lambda p_i$ $(i \neq K)$ и $p_l \lambda = 1$. Будем предполагать без потери общности, что $p_K = 1$. Тогда $\lambda = 1$, и $\frac{\partial s}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{K-1}) = \lambda p_i$, $i \neq K$. Эти соотношения определяют функцию спроса на все блага кроме последнего. Отсюда следует, что спрос на эти блага не зависит от дохода:

$$x_i = x_i(p_1, \ldots, p_{K-1}) = x_i(p_{-i}),\ i \neq K.$$

Пользуясь видом функции спроса, получаем, что непрямая функция полезности имеет вид $\nu(\boldsymbol{p}_{-K}, 1, R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-k}), \ldots, x_{K-1}(\boldsymbol{p}_{-K})) + R - \sum_{i=1}^{K-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l})$. При этом $\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} = 1$, и $\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_i}$ не зависит от $R$. Поэтому, интегрируя $K-1$ уравнений тождества Роя, по $p_1, \ldots, p_{K-1}$ соответственно, мы можем получить (с точностью до константы интегрирования) искомую функцию $\nu(.,.)$ в любой данной точке. Отметим также, что соответствующие интегралы будут равны изменению так называемого потребительского излишка, который будет рассмотрен нами далее.

Особенно простой задача восстановления предпочтений оказывается, если известно (дополнительно к квазилинейности), что функция полезности сепарабельна, т.е.

$$u(x_1, \ldots, x_K) = \sum_{i=1}^{K-1} s_i(x_i) + x_K.$$

Условия первого порядка для задачи потребителя в предположении, что потребитель при рассматриваемых ценах и доходах предъявляет спрос на все блага ($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) >> \mathbf{0}$), а цена последнего блага равна единице, имеют вид,

$$\frac{\partial s_i(x_i(\boldsymbol{p}))}{\partial x_i} = p_i.$$

Эти уравнения фактически задают обратную функцию спроса $p_i(x_i)$. При этом спрос на каждое благо зависит только от его цены, т.е. $x_i(\boldsymbol{p}) = x_i(p_i)$. С учетом этого непрямая функция полезности имеет вид

$$\nu(\boldsymbol{p}, R) = \sum_{i=1}^{K-1} s_i(x_i(p_i)) + R - \sum_{i=1}^{K-1} p_i x_i(p_i).$$

Из тождества Роя получаем соотношение:

$$x_i(p_i) = -\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \nu(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} = -\frac{\partial \nu(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_i} = -\frac{\partial \nu_i}{\partial p_i}(p_i),$$

где $\nu_i(p_i) = s_i(x_i(p_i)) - p_i x_i(p_i)$, и, следовательно,

$$-\int_{p_i}^{+\infty} \frac{\partial \nu_i}{\partial p_i}(t)dt = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

Откуда

$$\nu_i(p_i) - lim_{p_i \to +\infty} \nu_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

или

$$\nu_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt \; + \; const.$$

Интеграл в последнем соотношении есть по определению потребительский излишек:

$$CS_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt.$$

Отсюда

$$\nu(p, R) = \sum_{i=1}^{K-1} \nu_i(p_i) + R = \sum_{i=1}^{K-1} CS_i(p_i) + R + const.$$

Можно восстановить также непосредственно прямую функцию полезности, проинтегрировав уравнения условий первого порядка задачи потребителя. Действительно,

$$s_i(x_i) = \int_0^{x_i} p_i(t)dt + s_i(0).$$

Интеграл в этом соотношении является альтернативной формой определения потребительского излишка, поэтому

$$s_i(x_i) = CS_i(x_i) + s_i(0)$$

и

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{K-1} CS_i(x_i) + x_K + const.$$

## Денежная непрямая полезность и восстановление предпочтений

В общем случае на основе системы функций спроса естественно восстанавливается функция расходов $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее определение.

**Определение 21.**

**Денежная непрямая полезность** $\mu\,(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\boldsymbol{q}$ потребитель мог бы иметь тот же уровень полезности, что и при ценах $\boldsymbol{p}$, располагая доходом $R$, т.е. $\mu\,(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, \nu\,(\boldsymbol{p}, R))$.

**Теорема 30.**

Денежная непрямая полезность $\mu\,(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ является непрямой функцией полезности для функции расходов $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$.

***Доказательство***:

Данное свойство очевидно.

■

Поскольку $\mu\,(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{p},\,R) = e(\boldsymbol{q},\,\nu(\boldsymbol{p},\,R))$, то верно соотношение

$$\frac{\partial\mu\,(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{p},\,R)}{\partial q_i} = \frac{\partial e(\boldsymbol{q},\,\nu(\boldsymbol{p},\,R))}{\partial q_i} = h_i(\boldsymbol{q},\,\nu(\boldsymbol{p},\,R)) = x_i(\boldsymbol{q},\,e(\boldsymbol{q},\,\nu(\boldsymbol{p},\,R))) = x_i(\boldsymbol{q},\,\mu\,(\boldsymbol{q};\;\boldsymbol{p},\,R)).$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{x})}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{x}) \text{ и } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{x})).$$

Тем самым мы получили систему дифференциальных уравнений относительно непрямой функции полезности $\mu\,(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{p},\,R)$:

$$\frac{\partial\mu\,(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{p},\,R)}{\partial q_i} = x_i(\boldsymbol{q},\,\mu\,(\boldsymbol{q};\;\boldsymbol{p},\,R)).$$

К ней следует добавить граничные условия $\mu\,(\boldsymbol{p};\,\boldsymbol{p},\,R) = R$. Предположим дополнительно, что функция спроса имеет непрерывные частные производные по ценам и доходу и некоторое техническое условие, состоящее в том, что существует конечное число $K$ такое, что для каждого номера $i$ справедливо неравенство $|\frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p},\,R)| \leqslant K$, для всех комбинаций цен и доходов.

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных[48] известно, что в этом случае система имеет единственное (локальное) решение тогда и только тогда, когда система функций спроса такова, что матрица

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{i,\,j}$$

симметрична.[49] Это условие, как несложно показать, эквивалентно условию симметричности матрицы коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R}x_j\right)_{i,\,j}.$$

---

[48] Смотри, например, приложение к Hurwicz, L., Uzawa H., *On the Integrability of Demand Functions*, in Chipman, J.S., Hurwicz, L., Richter M.K., Sonnenschein, H.F., Preferences, utility and demand, N.Y., Harcourt Brace Jovanovich

[49] Пусть функция $f_i(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})$ определена на множестве $\Omega=\Pi \times \Theta$, где $\Pi=\{\boldsymbol{x}|\ a' \leqslant x_i \leqslant a''\}$и $\Theta =\{z|\ 0\leqslant \mathbf{z}<+\infty\}$. Если при этом а) функция непрерывно дифференцируема на $\Omega$, б) для каждого номера $i$ частная производная $\frac{\partial f_i}{\partial z}$ равномерно ограничена на $\Omega$, т.е. существует конечное число $K$ такое, что $|\frac{\partial f_i}{\partial z}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})| \leqslant K$, для всех $(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z}) \in \Omega$, в) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})$ для всех $(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z}) \in \Omega$, г) $f_i(\boldsymbol{x},\,0) = 0$, для всех $i$ и для всех $\boldsymbol{x} \in \Pi$. Тогда при любых начальных условиях $(\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{z}^0) \in \Omega$, существует единственное, непрерывное решение дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})$ на $\Pi$. Кроме того, решение будет непрерывно изменяться при изменении граничных условий.

Если у нас есть некоторая система функций спроса, удовлетворяющая этим условиям, то мы можем получить решение данных уравнений. Однако, можем ли мы быть уверены в том, что система функций спроса совместима с моделью рационального поведения потребителя, т.е., что существует функция полезности, максимизация которой порождает данную систему функций?

Необходимые условия того, что данная система функций спроса порождена моделью рационального поведения – нам известны:

- Система функций спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу.
- Система функций спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = R$ (если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы).
- Матрица коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,\,j} .$$

является симметричной и отрицательно полуопределенной.

Оказывается, что эти условия являются и достаточными, т.е. любая система функций, удовлетворяющая этим условиям, может быть порождена некоторой моделью рационального поведения.

Перед тем как проиллюстрировать нахождение функции $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ при известной функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Покажем, что приведенные условия избыточны, а именно:

**Теорема 31.**

Пусть функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ – дифференцируема по ценам и доходу, удовлетворяет закону Вальраса $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = R$, а матрица коэффициентов замены $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,\,j}$, является симметричной, тогда функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу.

***Доказательство***:

Рассмотрим вектор-функцию $f(t) = \boldsymbol{x}(t\boldsymbol{p}, tR)$, в силу дифференцируемости функции спроса по ценам и доходу для любого $t>0$ имеем, что:

$f_i{}'(t) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(t\boldsymbol{p}, tR)p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR)R = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(t\boldsymbol{p}, tR)p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR)\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = \sum_j (\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(t\boldsymbol{p}, tR)p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR)\ \boldsymbol{p}_j\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}, R)) = \sum_j \boldsymbol{p}_j\,(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(t\boldsymbol{p}, tR) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}, R)) = \sum_j \boldsymbol{p}_j\,(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}(t\boldsymbol{p}, tR) + \frac{\partial x_j}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R)) = \sum_j \boldsymbol{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(t\boldsymbol{p}, tR) + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R)\sum_j \boldsymbol{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR) = -\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R) + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R) = 0.$

При проведении этих преобразований мы воспользовались тождествами $\sum_j \boldsymbol{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(t\boldsymbol{p}, tR) + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, R) = 0$ и $\sum_j \boldsymbol{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial R}(t\boldsymbol{p}, tR) = 1$, доказанными нами выше, которые получаются путем дифференцирования закона Вальраса. Таким образом, $f(t)$ – константа и, тем самым, для любого $t$ верно, что $f(t) = f(1)$ или $\boldsymbol{x}(t\boldsymbol{p}, tR) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) = t^0\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Последнее и означает, что функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу.

■

**Пример 16.**

Продемонстрируем получение непрямой денежной функции полезности $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\ R)$ из функции спроса вида $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\ R)=(\frac{Rp_2}{p_1p_2+a^2(p_1)^2};\ \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2+a^2p_1p_2})$. Мы не проверяем выполнение требуемых условий, так как, фактически они все проверены и продемонстрированы в предыдущих параграфах. Нам требуется решить следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial\mu\,(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)}{\partial q_1}=\frac{\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)q_2}{q_1q_2+a^2(q_1)^2}$$

$$\frac{\partial\mu\,(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)}{\partial q_2}=\frac{a^2\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)q_1}{(q_2)^2+a^2q_1q_2}$$

при граничном условии: $\mu\,(\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{p},\ R) = R$. Рассмотрим первое уравнение. Для того чтобы получить решение требуемой системы рассмотрим разложение дроби $\frac{q_2}{q_1q_2+a^2(q_1)^2}$ на элементарные множители: $\frac{q_2}{q_1q_2+a^2(q_1)^2}=\frac{1}{q_1}-\frac{a^2}{q_2+a^2q_1}$. Используя это и то, что первое уравнение представляет собой уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя по частям, имеем:

$$\int\frac{d\mu\,(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)}{\mu\,(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)}=\int\frac{dq_1}{q_1}-\int\frac{a^2\,dq_1}{q_2+a^2q_1}+C'(q_2,\boldsymbol{p},R).$$

Так как, интегрируя первое уравнение по $q_1$, мы принимали $q_2$ за константу, то, в общем случае, константа интегрирования зависит от $q_2$. Упрощая, имеем:

$$\ln(\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R))=\ln(q_1)-\ln(q_2+a^2q_1)+C'(q_2,\boldsymbol{p},R),\ \text{или}$$

$$\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)=C\,(q_2,\boldsymbol{p},R)\,\frac{q_1}{q_2+a^2q_1},$$

где $C(q_2,\ \boldsymbol{p},\ R) = \exp\{C'(q_2,\ \boldsymbol{p},\ R)\}$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, подставим полученное выражение для $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\ R)$ во второе уравнение и получим дифференциальное уравнение для $C\,(q_2,\ \boldsymbol{p},\ R)$:

$$\frac{\partial C(q_2;\boldsymbol{p},R)}{\partial q_2}\cdot\frac{q_1}{q_2+a^2q_1}-C\,(q_2,\boldsymbol{p},R)\frac{q_1}{(q_2+a^2q_1)^2}=\frac{a^2\,C\,(q_2,\boldsymbol{p},R)q_1}{(q_2)^2+a^2q_1q_2}\cdot\frac{q_1}{q_2+a^2q_1}$$

или

$$\frac{\partial C(q_2;\boldsymbol{p},R)}{\partial q_2}=\frac{a^2\,C\,(q_2,\boldsymbol{p},R)q_1}{(q_2)^2+a^2q_1q_2}+C\,(q_2,\boldsymbol{p},R)\frac{1}{q_2+a^2q_1}=\frac{1}{q_2}C(q_2,\boldsymbol{p},R).$$

Несложно увидеть, что данное дифференциальное уравнение имеет решение: $C(q_2,\ \boldsymbol{p},\ R) = q_2\,\tilde{C}(\boldsymbol{p},\ R)$. Итак, с учетом того что $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\ R) = C\,(q_2,\ \boldsymbol{p},\ R)\,\frac{q_1}{q_2+a^2q_1}$ мы получили $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\ R)=\tilde{C}(\boldsymbol{p},\ R)\frac{q_1\,q_2}{q_2+a^2q_1}$. Константу интегрирования $\tilde{C}(\boldsymbol{p},\ R)$ ищем из граничного условия $\mu\,(\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{p},\ R) = R$:

$$R=\mu\,(\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{p},R)=\tilde{C}(\boldsymbol{p},R)\frac{p_1\,p_2}{p_2+a^2p_1}.$$

Откуда $\tilde{C}(\boldsymbol{p},\ R)=\dfrac{(p_2+a^2p_1)R}{p_1\,p_2}$. В итоге всех этих манипуляций мы получили функцию $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$ равную:

$$\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)=\frac{q_1\,q_2}{q_2+a^2q_1}\cdot\frac{(p_2+a^2p_1)R}{p_1\,p_2}.$$

$\Leftarrow$

Предполагая, что система функций спроса удовлетворяет указанным выше условиям, рассмотрим, какие свойства функции $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$, являющейся решением системы дифференциальных уравнений,

$$\frac{\partial\mu\,(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)}{\partial q_i}=x_i(\boldsymbol{q},\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R))$$

с граничными условиями

$$\mu\,(\boldsymbol{p};\boldsymbol{p},R)=R.$$

следуют из этих свойств $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$.

Совершенно очевидно выполнение следующих свойств:

- Функция $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$ дифференцируема по $\boldsymbol{q}$.
- Функция $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$.
- Функция $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$ не убывает по $\boldsymbol{q}$, так как функция спроса неотрицательна.
- Функция $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$, в силу отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого.
- Если для некоторого $\boldsymbol{q}$ верно соотношение $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)=\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R)$, то оно также верно и для любого $\boldsymbol{q}'$, т.е. $\mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p},R)=\mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}',R)$. (Данное свойство ничто иное, как следствие единственности решения предложенного дифференциального уравнения.)

Рассмотрим теперь остальные менее очевидные свойства.

### Теорема 32.

Если для некоторого $\boldsymbol{q}$ справедливо соотношение $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)\geqslant\ \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R)$, то для любого $\boldsymbol{q}'$ также выполнено $\mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p},R)\geqslant\ \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}',R)$.

***Доказательство***:

Случай, когда для некоторого $\boldsymbol{q}$ справедливо соотношение $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)=\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R)$, очевиден, как уже упоминалось, в силу единственности решения. Поэтому разберем случай, когда для некоторого значения $\boldsymbol{q}$ выполнено $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)>\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R)$. Предположим противное, то есть нашлось такое значение $\boldsymbol{q}'$, что $\mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p},R)<\mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}',R)$. Рассмотрим функцию $f(t)=\mu(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{p},R)-\mu(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{p}',R)$. Эта функция непрерывна в силу непрерывности по $\boldsymbol{q}$ функции $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)$. Кроме того, $f(0)>0>f(1)$, откуда в силу непрерывности следует существование такого $\bar{t}$, что $f(\bar{t})=0$. Другими словами найдется такой вектор $\boldsymbol{q}''$, что для него справедливо равенство $\mu\,(\boldsymbol{q}'';\ \boldsymbol{p},R)=\mu\,(\boldsymbol{q}'';\ \boldsymbol{p}',R)$. Но это же означает, что равенство $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)=\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R)$ должно выполняться для любого $\boldsymbol{q}$. Противоречие.

■

### Теорема 33.

$\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R) = \min_{x\in V(p,R)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$ где $V(\boldsymbol{p},\, R) = \{x\geqslant 0 \mid\ \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}\geqslant \mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\ \forall \boldsymbol{q}\geqslant 0\}$ и при этом для произвольных векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'>>\mathbf{0}$ выполнено либо $V(\boldsymbol{p},\, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}',\, R)$, либо $V(\boldsymbol{p}',\, R) \subseteq V(\boldsymbol{p},\, R)$.

***Доказательство***:

(1) Из свойств функции $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R)$ и определения множества $V(\boldsymbol{p},\, R)$ следует, что $V(\boldsymbol{p},\, R)$ непусто, замкнуто и ограничено снизу. Покажем непустоту этого множества. Вогнутость функции $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R)$ по $\boldsymbol{q}$ влечет, что для любых $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{q}'$ выполнено неравенство: $\mu(\boldsymbol{q}';\, \boldsymbol{p},\, R)\leqslant\ \mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R) + \nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)(\boldsymbol{q}'-\, \boldsymbol{q})$. Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$**,** то по формуле Эйлера $\nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\boldsymbol{q}{=}\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)$. Поэтому, для любого $\boldsymbol{q}'$ выполнено $\mu(\boldsymbol{q}';\, \boldsymbol{p},\, R)\leqslant\ \nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\boldsymbol{q}'$. В силу того, что $\nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\geqslant\ 0$, имеем $\nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\in V(\boldsymbol{p},\, R)$. Замкнутость и ограниченность снизу очевидна. Если $\boldsymbol{q}>>0$ то эти условия гарантируют существование решения задачи $\min_{x\in V(p,R)}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Из определения $V(\boldsymbol{p},\, R)$ следует, что $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R)\ \leqslant\ \min_{x\in V(p,R)}\ \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Нам требуется показать, что это соотношение выполняется как равенство. Для этого достаточно показать, что $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R)\geqslant \min_{x\in V(p,R)}\ \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Как было показано при демонстрации непустоты множества $V(\boldsymbol{p},\, R)$ верно $\nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\in V(\boldsymbol{p},\, R)$. Отсюда следует, что $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R){=}\ \nabla_q\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\boldsymbol{q}\geqslant \min_{x\in V(p,R)}\ \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$. Таким образом, получили требуемое равенство $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},\, R) = \min_{x\in V(p,R)}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}$.

(2) Из определения множеств $V(.)$ следует, что если $\mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p}',\, R)\geqslant \mu(\boldsymbol{q};\, \boldsymbol{p},\, R)\ \forall\boldsymbol{q}\geqslant 0$, то $V(\boldsymbol{p},\, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}',\, R)$.

■

Приведенные утверждения наводят на мысль о том, чтобы в качестве отношения предпочтения взять отношение, для которого верхними лебеговскими множествами будут построенные множества $V(\boldsymbol{.},.)$. В связи с этим, естественно определить предпочтения на области значений функции спроса, породившей данный спрос, как $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R) \succeq \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}',\, R) \Leftrightarrow V(\boldsymbol{p},\, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}',\, R)$. В частности, в качестве функции полезности можно взять $u_q(\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)) = \mu\,(q;\, \boldsymbol{p},\, R)$.

**Теорема 34.**[50]

1) Пусть $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0,\, R^0)$ и $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1,\, R^1)$, $\boldsymbol{x}^0 \neq \boldsymbol{x}^1$ и $R^1{\geqslant}\mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$. Тогда $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1{>}\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$.

2) Пусть $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0,\, R^0)$ и $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1,\, R^1)$. Если $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0\geqslant\ \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$, тогда $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^0\geqslant\ \boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^1$.

3) Множество $\{(\boldsymbol{p},\, R)|\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R) = \bar{\boldsymbol{x}}\}$ – выпукло.

4) Если $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0,\, R^0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1,\, R^1)$, то $\mu\,(\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0) = \mu\,(\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1)$ для всех $\boldsymbol{p}$.

5) Пусть $u_q(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)) = \mu\,(q;\, \boldsymbol{p},\, R)$, тогда $u_q(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)){>}\ u_q(\boldsymbol{x})$ для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ реализуемого как спрос при некоторой комбинации цен и доходов и допустимого при цене $\boldsymbol{p}$ и доходе $R$.

***Доказательство***:

---

[50] Доказательство данной теоремы следует работе Гурвица, Узавы.

1) Разобьем доказательство на два этапа. Вначале рассмотрим случай, когда $R^1 = \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$. Определим $\boldsymbol{p}^t = \boldsymbol{p}^0 + t(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)$, $R^t = \mu\,(\boldsymbol{p}^t;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})$, $f(t) = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$. Продифференцируем $f(t)$ по $t$:

$$f'(t) = \boldsymbol{p}^0\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial R}.\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}}{\partial t} = \boldsymbol{p}^0 A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0),$$

где $A$ – матрица Слуцкого. Продифференцируем бюджетное ограничение $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = R^{\mathrm{t}}$ по $t$, получаем $\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}A(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0) = 0$. С учетом этого $f'(t) = -t(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)$. В силу отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого имеем $f'(t) \geqslant 0$. Таким образом, $f(1) \geqslant f(0)$, или $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 \geqslant \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$. Покажем, что знак этого неравенства строгий. Предположим, что $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$. В этом случае $f'(t)=0\ \forall t$, или, что тоже самое $(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)^{\mathrm{T}} = 0$. Матрица $-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})$ симметричная и положительно полуопределена. Из курса линейной алгебры известно, что симметричная матрица имеет $n$ различных собственных чисел и представима в виде $(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})) = \mathrm{D}\Lambda\mathrm{D}^{\mathrm{T}}$, где матрица $\mathrm{D}$ – составлена из собственных векторов матрицы $(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}}))$, а $\Lambda$ – диагональная матрица, где по диагонали стоят собственные числа этой матрицы. Тогда, в силу положительной полуопределенности матрицы $(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}}))$ имеем, что $(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})) = (\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})(\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{x}(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}}))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}(\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})(\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{x}\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})(\boldsymbol{x}\mathrm{D}\sqrt{\Lambda})^{\mathrm{T}}$, то $\boldsymbol{x}(-A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}}))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = 0$, если $\boldsymbol{x}\mathrm{D}\sqrt{\Lambda} = 0$. Откуда $\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}}) = A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = 0$. Таким образом, имеем, что $A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)^{\mathrm{T}} = 0$. Несложно проверить, что $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}}{\partial t} = A(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$ – константа, т.е. получаем, что $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^1$.

Получили противоречие. А значит, доказали, что если $R^1 = \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$, то $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 > \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $R^1 > \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$. С учетом того, что $R^1 = \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1)$ имеем, что $\mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) > \mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0) = R^0$. Используя рассуждения аналогичные рассуждениям, использующимся при доказательстве предыдущего пункта (в упражнениях Вам предложат доказать это самостоятельно) получаем: $\mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) \leqslant \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$. Отсюда, $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 \geqslant \mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) > \mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0) = R^0 = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$.

2) В силу $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0 \geqslant \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$ и доказанного в предыдущем пункте утверждения, имеем, что $\mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) < \mu\,(\boldsymbol{p}^0;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0) = R^0$. Отсюда, в силу предыдущего пункта, имеем требуемое.

3) Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0,\, R^0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1,\, R^1) = \bar{\boldsymbol{x}}$. В силу закона Вальраса имеем, что $\boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} = R^0$, $\boldsymbol{p}^1\bar{\boldsymbol{x}} = R^1$. Пусть $\boldsymbol{p}^t = \boldsymbol{p}^0 + t(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0)$, $R^t = R^0 + t(R^1 - R^0)$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}},\, R^{\mathrm{t}})$. Тогда, $\boldsymbol{p}^t\bar{\boldsymbol{x}} = R^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$. Покажем, что $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \bar{\boldsymbol{x}}$. Пусть это не так, тогда $\boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$ и $\boldsymbol{p}^1\bar{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$. Откуда $\boldsymbol{p}^t\bar{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}$. Противоречие.

4) Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

5) Пусть $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0,\, R^0)$ и $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1,\, R^1)$. Имеем, что $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0 = R^0$, $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^1 = R^1$ и $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 \leqslant R^0$. Отсюда, по доказанному в пункте 1, имеем что выполнено либо $R^1 < \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$ либо $\mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) < \mu\,(\boldsymbol{p}^1;\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$. Откуда имеем, что для любого $\boldsymbol{p}$ справедливо $\mu\,(\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}^1,\, R^1) < \mu\,(\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}^0,\, R^0)$. Что и означает требуемое.

■

Эта теорема, а точнее последний ее пункт, доказывает, что построенная на основании денежной непрямой функции полезности функция $u_q(.)$, определенная на множестве значений функции спроса, представляет собой функции, рационализующие исходную функцию спроса. В задачах вам предложат показать, что ранжировка потребительских наборов, задаваемая функцией $u_q(.)$ не будет зависеть от $q$. Тем самым мы смогли корректно восстановить функцию полезности, обладающую функцией спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\, R)$.

## Альтернативный подход к восстановлению предпочтений при известной функции $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$

Альтернативно, для произвольной точки $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{l}_{+}$, зная функцию спроса можно получить значение полезности следующим образом: 1) отталкиваясь от функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ найти $\mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ 2) решить задачу ♥ и найти функцию $u^*(.)$. Построенная функция $u^*(.) = \inf\{\mu\,(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)|\ \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{l}_{++}, \boldsymbol{px} \leqslant R\}$, будет соответствовать наблюдаемому спросу, на основе которого она получена, что следует из следующего утверждения.

**Теорема 35.**

Пусть функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ дифференцируема, однородна нулевой степени, удовлетворяет закону Вальраса, матрица коэффициентов замены является симметричной и отрицательно полуопределенной, а $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = \mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) = \mu\,(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R)$, $\forall\ \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' >> \boldsymbol{0}$. Тогда если функция $u^*(.)$ построена на основе задачи ♥, при некотором векторе $\boldsymbol{q} >> \boldsymbol{0}$, то спрос $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ $\forall \boldsymbol{p} >> \boldsymbol{0}$, $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

***<u>Доказательство</u>***:

Докажем сначала, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$. Вектор $\boldsymbol{p}$ является допустимым в задаче ♥ при $x\in x(\boldsymbol{p}, R)$. Нам нужно показать, что для любого вектора $\boldsymbol{p}'\geqslant\boldsymbol{0}$ такого, что $\boldsymbol{p}'x\leqslant R$, выполнено $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$. Поскольку функция $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$, то $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant\mu(\boldsymbol{q}'; \boldsymbol{p}, R) + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R))$. При $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, используя закон Вальраса, имеем, что $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}'; \boldsymbol{p}, R)\ \forall\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'$. Поскольку $R = \mu(p'; p', R)$, то неравенство $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)\leqslant R$ можно переписать в виде $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)\leqslant \mu(p'; p', R)$. С другой стороны, по только что доказанному $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)\geqslant \mu(p'; p', R)$. Поэтому при $\boldsymbol{p}'x(\boldsymbol{p}, R)\leqslant R$ имеем $\mu(p'; p, R) \leqslant \mu(p'; p', R)$. В силу единственности и непрерывности решения рассмотренной системы дифференциальных уравнений имеем, что $\mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant\ \mu\,(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R)$. Используя $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu\,(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ несложно показать, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \geqslant\ u^*(\boldsymbol{x})$ для любого набора $x$ такого, что $\boldsymbol{px} \leqslant R$.

■

Приведенные выше необходимые и достаточные условия интегрируемости позволяют для заданной явно системы функций спроса определить, совместима ли она с моделью рационального поведения потребителя. В ситуации, когда нам доступно лишь конечное число значений функции спроса, полученных на основе наблюдений за фактическим поведением потребителя, проверить совместимость этих наблюдений с моделью рационального поведения позволяет так называемая концепция выявленных предпочтений. Основные ее положения будут изложены чуть позже.

### Задачи

120. Пусть функция $u(.)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, $v(.)$ — соответствующая непрямая функция полезности. Покажите, что если функция $u^*(.)$ построена на основе задачи ♥, то

$$u^*(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) \quad \forall\ x\in\ \mathbb{R}^{l}_{++}.$$

**Указание:** Используйте теорему отделимости (см. доказательство утверждения о восстановлении технологического множества по функции прибыли). Множество $L^{++}(\boldsymbol{x}) = \{y \mid y \succ x\}$ можно отделить от точки $\boldsymbol{x}$. Поскольку предпочтения строго монотонны, то нормаль $\boldsymbol{p}$ к отделяющей гиперплоскости — вектор с положительными коэффициентами. Тогда $\boldsymbol{p}$ — решение задачи ♥.

121. Пусть функция $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{p}$. Тогда $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \min_{x\in V(\bar{\boldsymbol{x}})} px$, где $V(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{x \geqslant 0 \mid px \geqslant e(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})\ \forall\ p \geqslant \mathbf{0}\}$.

122. Пусть $u(x)$ — функция полезности. Вычислите для нее непрямую функцию полезности, решите задачу ♥ и вычислите "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли она с исходной функцией полезности? Решите задачу для следующих функций полезности:

а) $u(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \ln(x_k)$;

б) $u(\boldsymbol{x}) = \min_k\{\alpha_k x_k\}$;

в) $u(\boldsymbol{x}) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1)$;

г) $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{x_1 x_2} + x_3$.

123. Для функций полезности предыдущей задачи найдите денежную функцию полезности и непрямую денежную функцию полезности.

124. Для функций полезности предыдущей задачи найдите спрос, восстановите непрямую денежную функцию полезности, постройте "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Правильно ли восстановлены исходные предпочтения? Найдите спрос, соответствующий функции полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли он с исходным спросом?

125. Найдите функцию полезности, которая рационализует спрос, полученный на основе лексикографического отношения предпочтения.

126. Докажите пропущенные части в теореме 34.

## Оценка изменения благосостояния.

Перед экономистами часто стоит задача оценить изменения в благосостоянии потребителей при проведении мероприятий экономической политики. Рассмотрим две ситуации (до проведения мероприятий экономической политики и после). В первой их них потребитель сталкивается с ценами $\boldsymbol{p}^0$ и доходом $R^0$, во второй — с ценами $\boldsymbol{p}^1$ и доходом $R^1$. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе $R^0$ непрямая функция полезности потребителя равна $\nu(p^0, R^0)$, а при $(\boldsymbol{p}^1, R^1)$ — $\nu(\boldsymbol{p}^1, R^1)$. Если $\nu(p^0, R^0) < \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1)$, то вторая ситуация более благоприятна для потребителя, а если $\nu(p^0, R^0) > \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1)$, то менее благоприятна.

Вообще говоря, мы можем говорить лишь о направлении изменения благосостояния, а не оценивать его величину. И, тем не менее, при расчетах издержек и выгод мероприятий экономической политики пытаются получить количественные оценки таких изменений.

При этом используются введенная выше непрямая денежная функция полезности. Опишем процедуры ее использования и возникающие здесь проблемы.

Непрямую денежную функцию полезности можно определить на основе любого «базового» вектора цен $\boldsymbol{q}>>0$. Оценка изменения благосостояния при этом будет равна

$$\Delta\mu(\boldsymbol{q}) = \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$, вообще говоря, может быть различным для разных векторов $\boldsymbol{q}$ и поэтому, соответствующие оценки изменения благосостояния содержат элемент субъективизма. Исключением являются квазилинейные предпочтения (предпочтения, которые описываются квазилинейной функцией полезности). В этом случае все меры благосостояния эквивалентны с точностью до постоянного множителя, а в случае, когда цена последнего блага равна единице (последнее благо является *numeraire*), они совпадают.

Покажем это, вычислив $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ для квазилинейной функции полезности $u(x_1, ..., x_l)$ $=s(x_1, ..., x_{l\text{-}1}) + x_l$, со строго вогнутой дифференцируемой функцией $s(.)$ в предположении, что $p_l = 1$. Вспомним, что в этом случае непрямая функция полезности имеет вид

$$\nu(\boldsymbol{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-l}), ..., x_{l-1}(\boldsymbol{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

Пользуясь соотношениями двойственности, получаем, что функция расходов в случае квазилинейных предпочтений имеет вид $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l})) + \boldsymbol{p}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l})$. По определению непрямой денежной функции полезности $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$, поэтому $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = \nu(\boldsymbol{p}, R) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) + \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})$. По определению $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ имеем, что

$$\Delta\mu(\boldsymbol{q}) = \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0, R^0) = \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1\ ) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) +$$

$$+ \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) - \nu(\boldsymbol{p}^0, R^0) + s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) - \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) =$$

$$= \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1\ ) - \nu(\boldsymbol{p}^0, R^0).$$

В общем случае, когда значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ зависит от выбора $\boldsymbol{q}$, естественными кандидатами на выбор вектора $\boldsymbol{q}$ представляются следующие системы цен — цены в первой ситуации (до изменений) — $\boldsymbol{p}^0$ и цены после изменений — $\boldsymbol{p}^1$. В первом случае получим меру изменения благосостояния, называемую эквивалентным изменением дохода ($EV$), а во втором — меру изменения благосостояния, называемую компенсирующим изменением дохода ($CV$).

**Определение 22.**

**Эквивалентное изменение дохода (эквивалентная вариация)** — это такое изменение дохода, которое позволяет в базовых ценах получить ту же полезность, что и после изменений:

$$\nu(\boldsymbol{p}^0, R^0 + EV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)) = \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1).$$

Заметим, что $\mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(p^0, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R^1))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^0$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации после изменений (т.е. при ценах $\boldsymbol{p}^1$ и доходе $R^1$). Поэтому, если воспользоваться тождеством $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \equiv R$ можно дать эквивалентному изменению дохода другое определение:

$$EV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R^1)) - R^0.$$

Таким образом, можно определить эквивалентную вариацию в терминах непрямой денежной функции полезности, измеренной в деньгах при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0$:

$$EV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - R^0 = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

**Пример 17.**

Пусть функция спроса и функция расходов для некоторого потребителя равны $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)=(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2})$ и $e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{p_1p_2(\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2})^2}{p_2+a^2p_1}$, соответственно. Найдем эквивалентную вариацию, отвечающую изменению цен от $\boldsymbol{p}^0 = (2, 1)$ до $\boldsymbol{p}^1 = (1, 2)$ при условии, что доход оставался неизменным и был равен $R$. Непрямая денежная функция полезности для данного потребителя будет равна

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = \frac{Rq_1q_2(p_2 + a^2p_1)}{p_2p_1(q_2+a^2q_1)}.$$

Найдем теперь значение непрямой денежной функции полезности при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^1$: $\mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R) = \frac{R(2 + a^2)}{(1+2a^2)}$. Таким образом, эквивалентная вариация будет равна

$$EV(\boldsymbol{p}^0, R, \boldsymbol{p}^1, R) = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R) - R = \frac{R(2 + a^2)}{(1+2a^2)} - R = \frac{R(1 - a^2)}{(1+2a^2)}.$$

⇐

**Определение 23.**

**Компенсирующее изменение дохода (компенсирующая вариация)** — это такое изменение дохода, которое позволяет в новых ценах достигнуть уровень полезности старой ситуации:

$$\nu(\boldsymbol{p}^0, R^0) = \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1 - CV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)).$$

По определению денежной непрямой функции полезности $\mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) = e(\boldsymbol{p}^1, \nu(\boldsymbol{p}^0, R^0))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^1$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации до изменений (т.е. при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе $R^0$). Поэтому компенсирующую вариацию можно выразить в терминах денежной непрямой функции полезности при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^1$:

$$CV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = R^1 - e(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R^0)) = R^1 - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) =$$
$$= \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0)$$

Отметим также, что введенное понятие компенсирующей вариации это то же самое изменение дохода, с которым мы сталкивались при рассмотрении закона спроса.

**Пример 17. (Продолжение)**

Найдем теперь значение непрямой денежной функции полезности при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^1$ и $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^0$: $\mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R) = \frac{R(1 + 2a^2)}{(2+a^2)}$. Таким образом, эквивалентная вариация будет равна

$$CV(\boldsymbol{p}^0, R, \boldsymbol{p}^1, R) = R - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) = R - \frac{R(1 + 2a^2)}{(2+a^2)} = \frac{R(1 - a^2)}{(2+a^2)}.$$

⇐

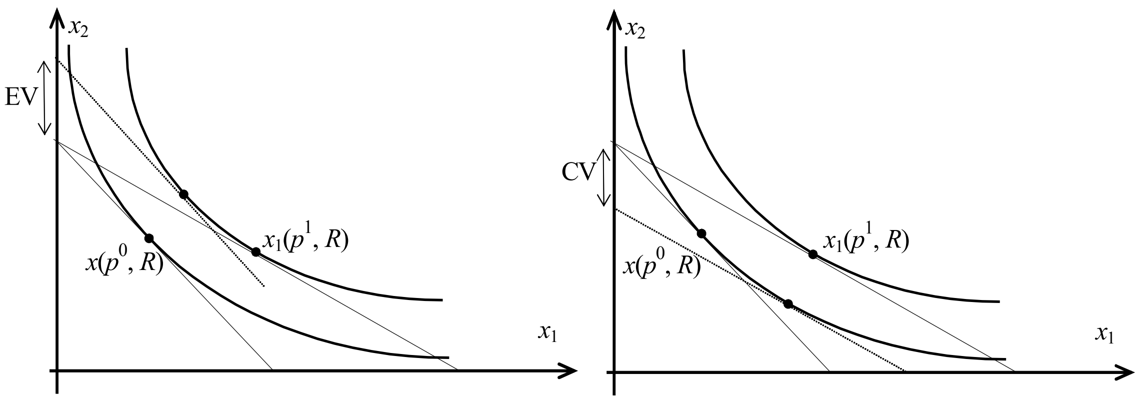


Рисунок 14. Эквивалентная и компенсирующая вариация при $R^0$=$R^1$=R, $p_1^0$>$p_1^1$, $p_2^0$=$p_2^1$=1

Рассмотрим соотношение между этими мерами изменения благосостояния в простом случае, когда изменяется только цена одного блага (случай, который интересует нас при анализе последствий налогообложения): $R^0 = R^1 = R,\ p_1^0 > p_1^1,\ p_2^0 = p_2^1, \ldots\ p_n^0 = p_n^1$. Очевидно, что $\nu(\boldsymbol{p}^0, R^0) \leqslant \nu(\boldsymbol{p}^1, R^1)$. Поскольку в данном случае меняется только цена первого блага, не будем в дальнейшем указывать остальные цены и доход в качестве аргументов соответствующих функций, т.е. $EV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = EV(p_1^0, p_1^1)$ и $CV(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = CV(p_1^0, p_1^1)$.

Следующий рисунок предлагает графическую иллюстрацию для эквивалентной и компенсирующей вариаций в случае двух благ, когда цена второго блага равна единице $(p_2^0 = p_2^1 = 1)$.

Поскольку $\dfrac{\partial e}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R^1)) = h_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R))$ (лемма Шепарда для теории потребления), мы можем записать:

$$\frac{\partial EV}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}^1) = h_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R)), \qquad \frac{\partial CV}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}) = -\,h_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R)).$$

Проинтегрируем эти равенства от $p_1^0$ до $p_1^1$:

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R))dt = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial EV}{\partial p_1^0}(t, 1, p_1^1, 1)dt = EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) - EV(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1) = EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1),$$

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))dt = -\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial CV}{\partial p_1^1}(p_1^0, 1, t, 1)dt = CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) - CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^0) = CV\ (\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1).$$

Таким образом,

$$EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R))dt, \qquad CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))dt.$$

Как известно из курсов микроэкономики начального и промежуточного уровня, изменение потребительского излишка вычисляется по формуле

$$\Delta CS(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, 1, R)dt.$$

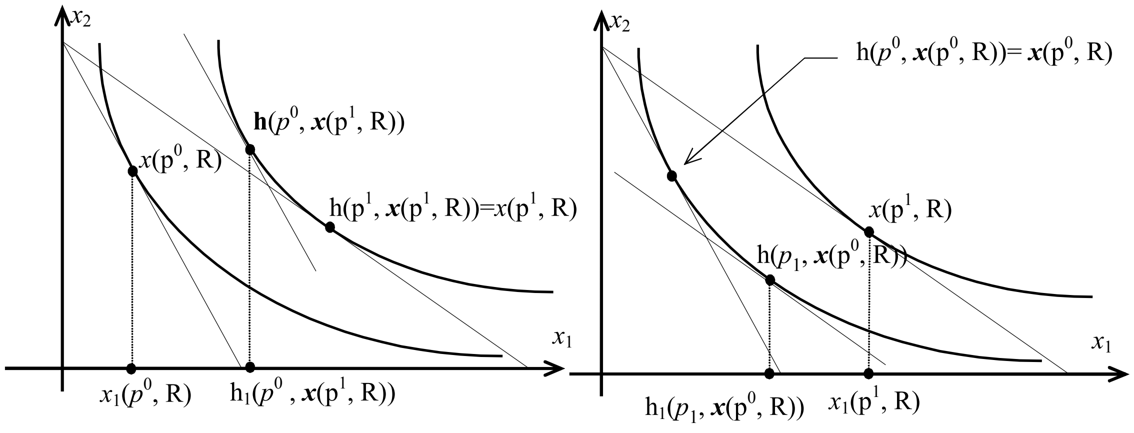


Рисунок 15 Соотношения между хиксианским и маршаллианским спросом используемое при доказательстве взаимосвязи эквивалентного, компенсирующего изменений дохода и потребительского излишка.

Из того, что $p_1^0 > p_1^1$ следует, что в данном случае все три величины неотрицательны (они будут положительны, если спрос строго положителен):

$$EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1)\geqslant 0, \qquad CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) \geqslant 0, \qquad \Delta CS(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) \geqslant 0.$$

Если эффект дохода неотрицателен (рассматриваемое благо — нормальное), то

$$h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R)) \leqslant x_1(t, 1, R) \leqslant h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R)) \text{ при } p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0.$$

Эти неравенства (в случае двух благ) иллюстрируется рисунком выше.

Докажем эти неравенства формально. Пусть спрос потребителя на первое благо при ценах $(t, 1)$ (где $p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0$) и доходе $R$ равен $x_1(t, 1, R)$. Пусть теперь доход потребителя стал равен $e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))$. Несложно заметить, что доход потребителя уменьшился на положительную величину $CV(\boldsymbol{p}^0, t, 1) = R - e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))$. В силу нормальности блага имеем, что $x_1(t, 1, e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R)))\leqslant x_1(t, 1, R)$.

Из соотношений взаимности имеем, что $x_1(t, 1, e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))) = h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R))$. Таким образом, мы доказали левое из требуемых неравенств. Для того чтобы доказать правое неравенство предположим, что доход потребителя увеличился до величины $e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R))$. В этом случае доход потребителя увеличился на положительную величину $\mathrm{E}V(\boldsymbol{p}^0, t, 1) = e(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R)) - R$. Отсюда в силу соотношений двойственности имеем, что $x_1(t, 1, R) \leqslant h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R))$. Таким образом, доказано

$$h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0, R)) \leqslant x_1(t, 1, R) \leqslant h_1(t, 1, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, R)) \text{ при } p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0.$$

Интегрируя это неравенство от $p_1^1$ до $p_1^0$, получаем, что имеет место соотношение

$$EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) \leqslant \Delta CS(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) \leqslant CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1).$$

Следующий рисунок иллюстрирует это соотношение.

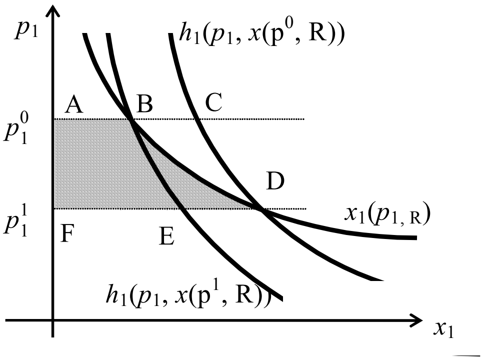


Рисунок 16. Связь между потребительским излишком, эквивалентной и компенсирующей вариациями

Здесь $CV = S(ACDF)$, $\Delta CS = S(ABDF)$ (заштрихованная область), $EV = S(ABEF)$.

В случае квазилинейных предпочтений (при достаточно большом доходе) отсутствует эффект дохода для товара, который входит нелинейно. В этом случае записанные выше неравенства, связывающие маршаллианский и хиксианский спрос, выполняются как равенства и, следовательно,

$$EV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = \Delta CS(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = CV(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1).$$

Геометрически эта ситуация означает что все три кривые спроса, изображенные на диаграмме, совпадают; следовательно, совпадают и три рассмотренные меры благосостояния.

Вообще говоря, полезности разных потребителей не сравнимы друг с другом, и их бессмысленно складывать. Однако на основе денежных мер изменения благосостояния можно получать некоторые оценки мероприятий экономической политики.

Предположим, что существуют $n$ потребителей с функциями полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$ и доходами $R_i$. Пусть цены изменились с $\boldsymbol{p}^0$ до $\boldsymbol{p}^1$. Пусть, кроме того, в результате этого изменения цен суммарная величина компенсирующей вариации положительна, т.е.

$$\sum_i CV_i(\boldsymbol{p}^0, R_i, \boldsymbol{p}^1, R_i) > 0.$$

Покажем, что существует такое перераспределение доходов $\{R_i'\}$: $\sum_i R_i' \leqslant \sum_i R_i$), что $\nu_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > \nu_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)\ \forall i$, то есть, возможно компенсировать изменение цен каждому потребителю.

По определению компенсирующей вариации имеем, что

$$CV_A = \sum_i CV_i(\boldsymbol{p}^0, R_i, \boldsymbol{p}^1, R_i) = \sum_i (R_i - e_i(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) > 0$$

Мы можем выбрать $R_i'$ так, что $R_i' > e_i(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))$ (достаточно взять $R_i' = e_i(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)) + CV_A/n$). Покажем, что в этом случае $\nu_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > \nu_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)\ \forall i$.

Воспользовавшись возрастанием непрямой функции полезности по доходу и свойством двойственности между $\nu_i(.,.)$ и $e_i(.,.)$, получим

$$\nu_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > \nu_i(\boldsymbol{p}^1, e_i(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) = \nu_i(\boldsymbol{p}^0, R_i).$$

Это можно интерпретировать следующим образом: мероприятие экономической политики, характеризующееся положительной суммарной компенсирующей вариацией, может привести к росту полезности всех затронутых потребителей, если дополнить его соответствующим перераспределением дохода. Однако следует отметить, что данная интерпретация предполагает, что такое перераспределение доходов *не вызовет* изменения цен. В рамках концепции общего равновесия, последнее предположение оказываются некорректными.

## Задачи

127. Функция полезности Петрова $u(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, x_2\}$. Его доход – 250 д.е., цена первого и второго блага – 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с понятием компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но, он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

128. Функция полезности Сидорова $u(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2$. Его доход – 150 д.е., цена первого и второго блага – 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с понятием компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но, он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

129. Покажите, что чистые потери от количественного налога на благо измеряется величиной $-EV - T$, где $EV$ — эквивалентная вариация, связанная с соответствующим увеличением цены блага, а $T$ — поступление от налога.

130. Предположим, что цена на все блага, кроме первого, постоянна. Покажите, что если эластичность маршаллианского спроса по доходу на первое благо постоянна, то компенсирующая вариация является функций этой эластичности, дохода и потребительного излишка следующего вида:

$$CV = R^1[1 + \frac{1-\eta}{R^1}\Delta CS]^{\frac{1}{1-\eta}} - R^1$$

где $\Delta CS(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, 1, R)dt$ — изменение потребительского излишка.

131. Покажите, что если непрямая функция полезности имеет вид

$$\nu(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R,$$

то компенсирующая вариация вычисляется по формуле Сида:

$$CV = \int_{p_1}^{p_2} e^{-\int_{p_2}^{t}\frac{\partial x}{\partial R}(t,R^1)d\,t}\, x(p, R^1)\, dp.$$

Если к тому же эластичность по доходу η постоянна, то формула Сида имеет вид:

$$CV = \frac{R^1}{\eta}[e^{\frac{\eta}{R^1}\Delta CS} - 1].$$

С использованием этой формулы, докажите, что компенсирующая вариация и потребительский излишек равны в случае квазилинейных предпочтений.

132. Предположим, что первое благо доступно лишь в дискретных количествах, а второе благо — деньги (используемые на приобретение других благ), и функция полезности квазилинейна: $u(x) = v(x_1) + x_2$. Пусть, далее, $r^i$ – резервная цена приобретения $i$-ой единицы первого блага и определяется соотношением

$$u(i–1, x_2 – (i–1)r^i) = u(i, x_2 – ir^i).$$

(a) Покажите, что если потребитель приобретает $n$ единиц первого блага, то цена $p_1$ на него удовлетворяет соотношению: $r_n \geqslant p_1 \geqslant r_{n-1}$. При каких условиях верно и обратное утверждение?

(в) Покажите, что если $v(0) = 0$, то $v(n) = \sum_i r^i$, а потребительский излишек

$$CS = v(n) + R – p^1 n$$

совпадает с “чистой” выгодой от приобретения первого блага

(с) Покажите, что потребительский излишек совпадает с суммой компенсации, при которой потребитель готов полностью отказаться от потребления первого блага (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации).

133. Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на этой основе их величины при $K = 2,\ R^0 = R^1 = 100,\ \boldsymbol{p}^0 = (1{,}1),\ \boldsymbol{p}^1 = (2{,}1)$, когда...

(a) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;

(b) блага абсолютно заменимы;

(c) блага комплементарны;

(c) предпочтения описываются функцией Кобба-Дугласа.

134. Проделайте аналогичные вычисления для случая, когда цена на первое благо падает ($K = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $\boldsymbol{p}^0 = (2{,}1)$, $\boldsymbol{p}^1 = (1{,}1)$). Сравните результаты вычислений этого и предыдущего упражнения и объясните различия.

135. Проиллюстрируйте на графике при условиях $K = 2$, $R^0 = R^1 = const$, $p_2 = const$ поведение кривых спроса (на первое благо) Хикса и Маршалла, и укажите соответствующие фигуры, площади которых измеряют компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек когда

(a) предпочтения представимы функцией полезности Кобба-Дугласа;

(a) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;

(a) блага вполне заменимы;

(a) блага комплементарны

в случае (I) падения и (II) роста цены первого блага.

136. Пусть $K = 2$, $p_2 = const$. Для заданной на плоскости $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ системы кривых спроса Хикса на первое благо изобразите

(а) возможное положение кривых спроса Маршалла на это благо;

(в) соответствующие компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек при (I) падении и (II) росте цены первого блага.

(с) Каковы соотношения между величинами компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка в разных ситуациях (различающихся типом благ (нормальное-малоценное благо) и характером изменения цен (падение-рост)).

137. Пусть в экономике присутствует два товара. В результате некоторого мероприятия экономической политики изменилась цена первого блага. При этом цена второго блага и доход потребителя остались неизменны. Как соотносятся компенсирующая, эквивалентная вариации и потребительский излишек в случае если:

а) цена первого блага выросла и первый товар нормальный;

б) цена первого блага выросла и первый товар – товар Гиффена;

в) цена первого блага упала и первый товар малоценный;

г) цена первого блага упала и первый товар – товар Гиффена.

Докажите соответствующие неравенства.

138. Покажите, что при изменении одной цены $\Delta CS$ обладает свойством аддитивности.

## *Элементы теории выбора и выявленные предпочтения*

Обычно в микроэкономике описание предпочтений с помощью бинарных отношений используется в качестве отправной точки анализа рационального выбора потребителя. Но возможен и другой подход, отправной точкой которого непосредственно является выбор участника. Преимущество такого подхода состоит в следующем: мы можем наблюдать выбор участника, но не его предпочтения. Однако в некотором достаточно широком классе случаев подход, основанный на выборе, полностью эквивалентен подходу, основанному на предпочтениях, в том смысле, что возможно по известному выбору построить отношение предпочтения, которое порождает этот выбор. С другой стороны, подход, основанный на предпочтениях, позволяет построить более богатую теорию.

Для описания выбора участника в теории выбора вводятся понятия **ситуации выбора** и **правила выбора**, определенного на множестве ситуаций выбора. Ситуация выбора — это некоторое подмножество множества допустимых (физически) альтернатив $X$, с которым участник сталкивается и из которого он может выбирать.

**Определение 24.**

Пусть $\mathcal{A}$— множество ситуаций выбора ($\mathcal{A} \subseteq 2^X$). Правило выбора C(.) ставит в соответствие каждой ситуации выбора $A$ из $\mathcal{A}$непустое множество C($A$) выбранных альтернатив, каждая из которых является элементом $A$, т.е. C($A$) $\subseteq A$.

Рациональность потребителя в терминах функции выбора выражается в «аксиоме выбора Хаутеккера».

### Определение 25. Аксиома выбора Хаутеккера (Аксиома выявленных предпочтений)

Пусть $A$ и $A'$ — две ситуации выбора и альтернативы $x$, $y$ принадлежат как $A$, так и $A'$. Если $x \in C(A)$, а $y \in C(A')$, то $x \in C(A')$.

Смысл данного свойства прозрачен. Если подразумевать, что потребитель рационален в том смысле, что выбирает в любой ситуации выбора “лучшие” альтернативы, то данная аксиома устанавливает условие непротиворечивости его выбора.

### Определение 26.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ **нестрого выявленно предпочитается** альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора $A$, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in C(A)$.

В дальнейшем **нестрогое отношение выявленного предпочтения** будем обозначать $\succeq^{R}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно не хуже* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если была выбрана альтернатива $\boldsymbol{x}$ в ситуации выбора, когда была доступна также альтернатива $\boldsymbol{y}$, значит, $\boldsymbol{x}$ не может быть хуже $\boldsymbol{y}$.

### Определение 27.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ **строго выявленнно предпочитается** альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора $A$, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in C(A)$, но $\boldsymbol{y} \notin C(A)$.

**Строгое отношение выявленного предпочтения** будем обозначать $\succ^{R}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно лучше* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succ^{R} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если в какой-то ситуации выбора были доступны как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$, но альтернатива $\boldsymbol{x}$ была выбрана, а альтернатива $\boldsymbol{y}$ — нет, значит, $\boldsymbol{x}$ лучше $\boldsymbol{y}$.

Аксиому выбора Хаутеккера можно переформулировать в терминах выявленных предпочтений:

> Если $\boldsymbol{x}$ выявленно не хуже $\boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y}$ не может быть выявленно лучше $\boldsymbol{x}$, т.е.
> $(\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}) \Rightarrow \urcorner (\boldsymbol{y} \succ^{R} \boldsymbol{x})$.

Рациональность потребителя в терминах предпочтений тесно связана с рациональностью выбора потребителя, как она сформулирована в аксиоме выбора Хаутеккера.

### Теорема 36.

Пусть правило выбора $C(A)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

- выполнена аксиома выбора Хаутеккера;
- $\mathcal{A}$ содержит все одно-, двух- и трехэлементные подмножества $X$.

Тогда нестрогое отношение выявленного предпочтения $\succeq^{R}$, соответствующее правилу выбора $C(A)$

(1) полно,

(2) транзитивно.

***<u>Доказательство</u>***:

(1) Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — две альтернативы из $X$. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$ так как это двухэлементное подмножество $X$. Поскольку по определению $\mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$ не должно быть пустым, то либо $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$, либо $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$. То есть либо $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{x}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — три альтернативы из $X$, такие что $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{z}$. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$ так как это трехэлементное подмножество $X$.

Покажем, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Если $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, то из аксиомы выбора Хаутеккера следует, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, поскольку $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Аналогично, если $\boldsymbol{z} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$, то $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Поскольку $\mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$ непусто, то в любом случае $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})$. Это влечет за собой, что $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{z}$.

■

Данное утверждение показывает, что выбор на основе правила выбора, удовлетворяющего аксиоме Хаутеккера, можно «рационализировать» как выбор на основе некоторого отношения предпочтения. Заметим, что, как будет показано ниже, справедливо и обратное.

Если заданы предпочтения $\succeq$, то правило выбора потребителя, соответствующее этим предпочтениям естественно определить следующим образом:

$$\mathrm{C}_{\succeq}(A) \equiv \{\boldsymbol{x} \in A \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \ \forall\, \boldsymbol{y} \in A\}.$$

**Теорема 37.**

Пусть правило выбора $\mathrm{C}_{\succeq}(A)$ соответствует транзитивному нестрогому отношению предпочтения $\succeq$. Тогда это правило выбора удовлетворяет аксиоме выбора Хаутеккера.

***<u>Доказательство</u>***:

Пусть $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Это означает, что в некоторой ситуации выбора $A$ как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A)$). Поскольку правило $\mathrm{C}_{\succeq}(A)$ порождено нестрогим отношением предпочтения $\succeq$, то $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Пусть в некоторой другой ситуации выбора $A'$ как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A')$). Это означает, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{z}$ $\forall\, \boldsymbol{z} \in A'$. Из транзитивности следует, что то же самое должно быть верным для $\boldsymbol{x}$, т.е. $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}$ $\forall\, \boldsymbol{z} \in A'$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A')$, то есть аксиома Хаутеккера выполнена. ■

Покажем теперь, что если множество ситуаций выбора, на котором определено правило выбора, достаточно богато, то подход, берущий за основу правило выбора, эквивалентен подходу, берущему за основу предпочтения.

**Теорема 38.**

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда правило выбора $\mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$, порожденное нестрогим отношением выявленного предпочтения $\succeq^{\mathrm{R}}$, сопадает с исходным правилом выбора на $\mathcal{A}$ т.е.

$$\mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A) = \mathrm{C}(A) \ \forall\, A \in \mathcal{A}$$

***<u>Доказательство</u>***:

($\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$)

Пусть $x \in \mathrm{C}(A)$. Тогда по определению нестрогого выявленного предпочтения $x \succeq^{\mathrm{R}} y \ \forall \ y \in A$. Отсюда видно, что $x \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$.

$(\mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A) \subseteq \mathrm{C}(A))$

Пусть $x \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$. Поскольку множество $\mathrm{C}(A)$ непусто, то существует альтернатива $y \in \mathrm{C}(A)$. Условие $x \in \mathrm{C}^{\mathrm{R}}(A)$ означает, что для произвольной альтернативы $z \in A$, в том числе и для $y$, выполнено $x \succeq^{\mathrm{R}} z$, то есть существует такая ситуация выбора $A'$, что $x, y \in A'$ и $x \in \mathrm{C}(A')$.

Таким образом, мы имеем $x, y \in A'$, $x, y \in A$, $x \in \mathrm{C}(A')$ и $y \in \mathrm{C}(A)$. По аксиоме Хаутеккера это означает, что $x \in \mathrm{C}(A)$.

■

## Задачи

139. Нестрогое отношение выявленного предпочтения всегда обладает свойством

- полноты;
- транзитивности;
- рефлексивности.

140. Пусть множество альтернатив $X$ конечно. Тогда функция выбора C(.), определенная на всех подмножествах множества $X$, удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера, если

- правило (функция) выбора является вогнутым;
- выбор участника может быть описан полным и транзитивным отношением предпочтения;
- функция спроса участника может быть получена на основе сравнения потребительских излишков.

141. Множество альтернатив $X$ конечно и состоит из 3 элементов $X = \{x, y, z\}$.

Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{x, y\}$, $A_2=\{x, y, z\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.). Какие из нижеприведенных правил выбора не удовлетворяют аксиоме выявленных предпочтений?

- $\mathrm{C}_1(\{x, y\})=\{x\}$, $\mathrm{C}_1(\{x, y, z\})=\{x\}$;
- $\mathrm{C}_2(\{x, y\})=\{x\}$, $\mathrm{C}_2(\{x, y, z\})=\{y\}$;
- $\mathrm{C}_3(\{x, y\})=\{x, y\}$, $\mathrm{C}_3(\{x, y, z\})=\{x, y\}$.

142. Множество альтернатив $X$ конечно и состоит из 3-х элементов $X = \{x, y, z\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{x, y\}$, $A_2=\{y, z\}$,

$A_3=\{x, z\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.), при этом $\mathrm{C}(A_1) = \{x\}$, $\mathrm{C}(A_2) = \{y\}$, $\mathrm{C}(A_3) = \{z\}$. Какие из нижеприведенных высказываний справедливы?

1) Выбор удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

2) Выбор участника представим некоторым отношением предпочтения.

143. Какому из перечисленных утверждений эквивалентна аксиома выявленных предпочтений?

♦ Пусть $X$ — множество альтернатив. Пусть $A$, $A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$ и $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A')$ следует $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A)$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A')$, где С(.) — функция выбора.

♦ Пусть $X$ — множество альтернатив. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in A$ и $\boldsymbol{y} \in A'$ следует $\boldsymbol{x} \in A'$ и $\boldsymbol{y} \in A$, где $A$, $A' \subseteq X$ некоторые подмножества $X$.

♦ Пусть $X$ — множество альтернатив. Пусть $A$, $A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$ и $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A')$, где С(.) — функция выбора. Тогда $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$.

144. Отношение выявленного предпочтения обладает свойством полноты, если…

♦ правило выбора задано на множестве всех подмножеств множества альтернатив;

♦ отношение выявленного предпочтения отрицательно транзитивно;

♦ отношение выявленного отношения удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

145. Пусть множество альтернатив $X$ конечно и состоит из 3-х элементов $X=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$.

Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора С(.).

Отношение выявленного предпочтения заданное для данной ситуации

♦ не будет удовлетворять аксиоме выявленных предпочтений;

♦ не будет полным;

♦ будет обладать свойством транзитивности.

146. Одно из необходимых условий для того, чтобы отношение выявленного предпочтения было транзитивно состоит в том, что

♦ правило выбора непрерывно;

♦ отношение выявленного предпочтения рефлексивно;

♦ правило выбора задается на всех трехэлементных подмножествах множества альтернатив.

147. Пусть функция $C_{\succ}(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству $A$ множества $X$ совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid \text{не существует } \boldsymbol{y} \in A, \text{ такой, что } \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}).$$

Покажите, что если нестрогое и строгое отношения предпочтения связаны соотношением

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}, \text{ но не } \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x},$$

то построенные на их основе правила выбора совпадут, то есть область определения $\mathcal{A}$ у них будет одинаковой и

$$C_{\succ}(A) = C_{\succeq}(A) \ \forall\ A \in \mathcal{A}$$

148. Пусть множество альтернатив $X$ конечно, определенное на нем отношение предпочтения $\succ$ антисимметрично и отрицательно транзитивно, а функция $C(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству $A$ множества $X$ совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid$ не существует $\boldsymbol{y} \in A$, такой, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x})$.

Покажите, что

(1) для всякого $A$ множество $C_{\succ}(A)$ не пусто, а функция $C_{\succ}(A)$ удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера;

(2) если $C(A) \subseteq A$ — произвольная функция выбора, сопоставляющая каждому непустому подмножеству $A$ непустое подмножество его элементов и удовлетворяющая аксиоме выбора Хаутеккера, то существует антисимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения $\succ$, такое что $C(A) = C_{\succ}(A)$.

## Альтернативный подход к описанию предпочтений: стохастические предпочтения

До сих пор мы смотрели на предпочтения как на детерминированный объект. Условно говоря, наш потребитель всегда предпочитал что-то одно либо яблоки, либо груши. Но реальный выбор экономических агентов далеко не столь однозначно определен. Довольно правдоподобно, что, например, в половине случаев потребитель предпочитает яблоки, а во второй половине груши. Как корректно объяснить такое поведение агентов? Излагаемый далее пример иллюстрирует этот стохастический взгляд на предпочтения.

Пусть потребительское множество $X=\{x, y, z\}$. Множество ситуаций выбора $\mathcal{A}=\{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}\}$. $\mathsf{C}(A)$ – стохастическая функция выбора, которая представляет собой вероятностное распределение над элементами из $A$ и интерпретируется, как вероятность выбора соответствующей альтернативы. Будем говорить, что стохастическая функция выбора $\mathsf{C}(.)$ рационализируется предпочтениями, если найдется вероятностное распределение над строгими отношениями предпочтения на $X$ согласующееся со стохастической функцией выбора. Покажем, например, что стохастическая функция выбора $C(\{x, y\})= C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ может быть рационализованна предпочтениями, а функция выбора $C(\{x, y\})= C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ не может. Между тремя альтернативами содержащимися в множестве $X$, можно задать 6 разных рациональных отношений предпочтения.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $y \succ z \succ x$ | 2) $z \succ x \succ y$ | 3) $x \succ y \succ z$ |
| 4) $z \succ y \succ x$ | 5) $y \succ x \succ z$ | 6) $x \succ z \succ y$ |

Сопоставим с каждым из этих отношений предпочтения вероятность того, что выбор потребителя подчинен этому отношению предпочтения. С учетом этих вероятностей

$$C(\{x, y\})= (p_2+p_3+p_6,\ p_1+p_4+p_5),$$

$$C(\{y, z\})= (p_1+p_3+p_5,\ p_2+p_4+p_6),$$

$$C(\{z, x\})= (p_3+p_5+p_6,\ p_1+p_2+p_4).$$

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить найдутся ли такие вероятности $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$ которые согласуются с нашей функцией выбора

$$C(\{x, y\})= C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Фактически необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \\ \mathrm{p}_4 \\ \mathrm{p}_5 \\ \mathrm{p}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко заметить что решение данной системы уравнений существует, например, возьмем $p_1 = p_2, \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$, и не единственное, так как матрица вырождена. Приведем еще одно решение данной системы $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Аналогично непосредственной проверкой устанавливается, что для случая $C(\{x, y\})= C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ таких вероятностей подобрать не удается, так как не существует *неотрицательного* решения соответствующей системы. Наконец проинтепретируем полученные вероятности. Функция выбора $C(\{x, y\})= C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ могла наблюдатся в действительности если, например, в первом квартале потребитель имел предпочтения $y \succ z \succ x$, во втором квартале он имел предпочтения $z \succ x \succ y$, а в третьем и четвертом $y \succ x \succ z$ и $x \succ z \succ y$, соответственно. Тогда его опрос о предпочтениях в течении прошедшего года мог дать подобную функцию выбора.

## Агрегирование предпочтений

В этом параграфе мы рассмотрим условия, при которых функция рыночного спроса может быть порождена как решение задачи индивидуальной рациональности отдельного репрезентативного агента. Такого рода конструкции, когда рыночный спрос представляется порождаемым некоторым виртуальным агентом, является рабочим аппаратом современной макроэкономики и поэтому такая постановка вопроса интересна, осмысленна и является одним из базовых оправданий микрооснований макроэкономики.

Предположим, что в экономике присутствуют $n$ агентов, каждый из которых имеет функцию спроса $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)$. Как не сложно заметить, совокупный спрос этих агентов $\sum\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)$, вообще говоря, зависит от распределения доходов между ними. Пусть потребители в экономике имеют доходы $(R_1,\ldots, R_\mathrm{n})$ и предположим, что доходы каждого из потребителей изменились на дифференциально малую величину $dR_i$, причем $\sum dR_i$=0. Изменение суммарного спроса в экономике в результате этого изменения доходов составит: $\sum \frac{d\, \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)}{d\, R_i} dR_i$. В случае если суммарный спрос не зависит от распределения доходов, т.е. $\sum\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{p}, \sum R_i)$ это изменение совокупного спроса должно быть равно 0, т.е. $\sum$

$\frac{d\,\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)}{d\,R_i} dR_i = 0$ и быть справедливым для всех перераспределений удовлетворяющих условию $\sum dR_i$=0. Что возможно лишь в ситуации когда $\frac{d\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)}{d\,R_i} = \frac{d\boldsymbol{x}_j(\boldsymbol{p}, R_j)}{d\,R_j}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для выполнения этого условия ”всюду” и соответственно для глобального агрегирования предпочтений.

**Теорема 39.**

Рыночный спрос $\sum \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)$ не зависит от распределения доходов потребителей, т.е. $\sum \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \sum R_i)$ тогда и только тогда, когда индивидуальные функции спроса порождены одним и тем же гомотетичным отношением предпочтения $\succeq$.

***<u>Доказательство:</u>***

Предположим, что каждая индивидуальная функция спроса $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i)$ получена на основе некоторого (но одного и того же!) гомотетичного отношения предпочтения $\succeq$. Как было показано выше, в случае гомотетичных предпочтений индивидуальная функция спроса будет положительно однородна первой степени по доходу. Таким образом, $\sum \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, R_i)=\sum R_i \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, 1)=(\sum R_i)\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, 1)= \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, \sum R_i)$.

Предположим теперь, что существует некоторая функция спроса $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{.}, .)$, такая что $\sum \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \sum R_i)$ для всех $\boldsymbol{p}$, $R_1,\ldots, R_n$. Рассмотрим некоторого агента $i$ и распределение доходов $R_i = R$, и $R_j$ =0, при $j{\neq}i$. Тогда $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)= \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, R)$, откуда следует, что все агенты одинаковы и имеют одни и те же предпочтения. Для того, что бы показать, что спрос $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{.}, .)$, получен исходя из гомотетичных предпочтений, покажем, что функция $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{.}, .)$ линейна по $R$. Это, например, следует из того факта, что $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, R_1+R_2)= \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, R_1)+ \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, R_2)$.

■

Если отказаться от требования, что суммарный спрос всюду не зависит от распределения дохода, а требовать это свойство только локально, то класс предпочтений позволяющих локальное агрегирование расширится.

Одним из важных классов функций полезности позволяющих локальное агрегирование является класс квазилинейных функций полезности. Подробнее этот вопрос мы рассмотрим при рассмотрении квазилинейной экономики.

# 2. Поведение производителя

## *Технологическое множество и его свойства*

Рассмотрим экономику с $l$ благами. Для конкретной фирмы естественно рассматривать часть из этих товаров как факторы производства и часть — как выпускаемую продукцию. Следует оговориться, что такое деление довольно условно, так как фирма обладает достаточной свободой в выборе ассортимента производимой продукции и структуры затрат. При описании технологии будем различить выпуск и затраты, представляя последние как выпуск со знаком минус. Для удобства представления технологии продукцию, которая и не затрачивается и не выпускается фирмой, будем относить к ее выпуску, причем объем производства этой продукции считаем равным $0$. В принципе не исключена ситуация, в которой продукт, производимый фирмой, также потребляется ею в процессе производства. В этом случае мы будем рассматривать только чистый выпуск данного продукта, т.е. его выпуск минус затраты.

Пусть число факторов производства равно $n$, а число видов выпускаемой продукции равно $m$, так что $l=m+n$. Обозначим вектор затрат (по абсолютной величине) через $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^n$, а объемы выпусков через $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^m$. Вектор $(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}^o)$ будем называть **вектором чистых выпусков**. Совокупность всех технологически допустимых векторов чистых выпусков $\boldsymbol{y}=(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}^o)$ составляет **технологическое множество** $Y$. Таким образом, в рассматриваемом случае любое технологическое множество — это подмножество $\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Такое описание производства носит общий характер. При этом можно не придерживаться жесткого деления благ на продукты и факторы производства: одно и то же благо может при одной технологии затрачиваться, а при другой — производится. В этом случае $Y \subseteq \mathbb{R}^l$.

Опишем свойства технологических множеств, в терминах которых обычно дается описание конкретных классов технологий.

### 1. Непустота

Технологическое множество $Y$ непусто.

Это свойство означает принципиальную возможность осуществления производственной деятельности.

### 2. Замкнутость

Технологическое множество $Y$ замкнуто.

Это свойство скорее техническое; оно означает, что технологическое множество содержит свою границу, и предел любой последовательности технологически допустимых векторов чистого выпуска также является технологически допустимым вектором чистых выпусков.

### 3. Свобода расходования:

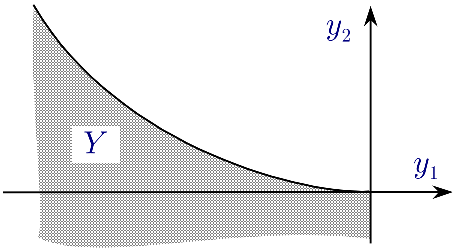
$$\text{если } \boldsymbol{y} \in Y \text{ и } \boldsymbol{y}' \leqslant \boldsymbol{y}, \text{ то } \boldsymbol{y}' \in Y.$$

Это свойство можно интерпретировать как наличие возможности производить тот же самый объем выпуска, но посредством больших затрат, или меньший выпуск при тех же затратах.

### 4. Отсутствие «рога изобилия» (“no free lunch”)

$$\boldsymbol{y} \in Y \text{ и } \boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

Это свойство означает что для производства продукции в положительном количестве необходимы затраты в ненулевом объеме.



5. Невозрастающая отдача от масштаба:

если $\boldsymbol{y} \in Y$ и $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{y}$, где $0 < \lambda < 1$, тогда $\boldsymbol{y}' \in Y$.

Рисунок 17. Технологическое множество с возрастающей отдачей от масштаба.

Иногда это свойство называют (не совсем точно) убывающей отдачей от масштаба. В случае двух благ, когда одно затрачивается, а другое производится, убывающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не возрастает. Если за час вы можете решить в лучшем случае 5 однотипных задач по микроэкономике, то за два часа в условиях убывающей отдачи вы не смогли бы решить более 10 таких задач.

5$'$. Неубывающая отдача от масштаба:

если $\boldsymbol{y} \in Y$ и $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{y}$, где $\lambda > 1$, тогда $\boldsymbol{y}' \in Y$.

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, возрастающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не убывает.

5$''$. Постоянная отдача от масштаба — ситуация, когда технологической множества удовлетворяет условиям 5 и 5$'$ одновременно, т.е.

если $\boldsymbol{y} \in Y$ и $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{y}'$, тогда $\boldsymbol{y}' \in Y \ \forall \lambda > 0$.

Геометрически постоянная отдача от масштаба означает, что $Y$ является конусом (возможно, не содержащим $0)$ .

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, постоянная отдача означает, что средняя производительность затрачиваемого фактора не меняется при изменении объема производства.

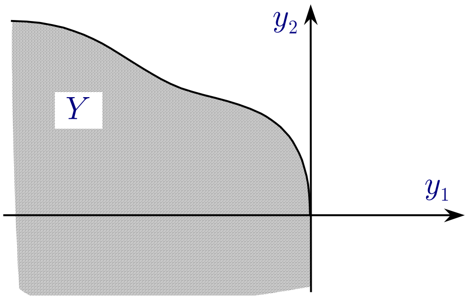


Рисунок 18. Выпуклое технологическое множество с убывающей отдачей от масштаба.

6. Выпуклость:

если $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'' \in Y$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, то $\alpha \boldsymbol{y}' + (1 - \alpha) \boldsymbol{y}'' \in Y$.

Свойство выпуклости означает возможность «смешивать» технологии в любой пропорции.

### 7. Необратимость

$$\boldsymbol{y} \in Y \text{ и } \boldsymbol{y} \neq 0 \ \Rightarrow \ (-\boldsymbol{y}) \notin Y.$$

Пусть из килограмма стали можно произвести 5 подшипников. Необратимость означает, что невозможно произвести из 5-ти подшипников килограмм стали.

### 8. Аддитивность

$$\boldsymbol{y} \in Y \ \text{ и } \ \boldsymbol{y}' \in Y \ \Rightarrow \ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in Y.$$

Свойство аддитивности означает возможность комбинировать технологии.

### 9. Допустимость бездеятельности:

$$\mathbf{0} \in Y.$$

**Теорема 1.**

1) Из невозрастающей отдачи от масштаба и аддитивности технологического множества следует его выпуклость.

2) Из выпуклости технологического множества и допустимости бездеятельности следует невозрастающая отдача от масштаба. (Обратное не всегда верно: при невозрастающей отдаче технология может быть невыпуклой, см. Рис. 19).

3) Технологическое множество обладает свойствами аддитивности и невозрастающей отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда оно — выпуклый конус.

***Доказательство***:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

Не все допустимые технологии в равной степени важны с экономической точки зрения.

■

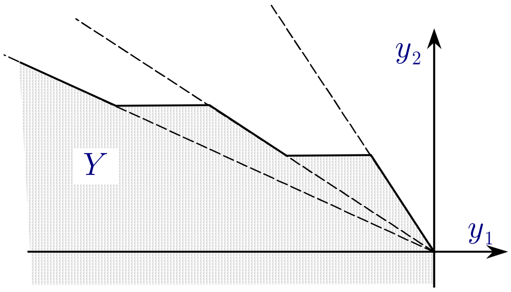


Рисунок 19. Невыпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба.

Среди допустимых особо выделяются **эффективные технологии**. Допустимую технологию $\boldsymbol{y}$ принято называть эффективной, если не существует другой (отличной от нее) допустимой технологии $\boldsymbol{y}'$, такой что $\boldsymbol{y}' \geqslant \boldsymbol{y}$. Очевидно, что такое определение эффективности неявно подразумевает, что все блага являются в определенном смысле желательными. Эффективные технологии составляют **эффективную границу** технологического множества. При определенных условиях оказывается возможным использовать в анализе эффективную границу вместо всего технологического множества. При этом важно, чтобы для любой допустимой технологии $\boldsymbol{y}$ нашлась эффективная технология $\boldsymbol{y}'$, такая что $\boldsymbol{y}' \geqslant \boldsymbol{y}$. Для того, чтобы это условие было выполнено, требуется, чтобы технологическое множество было замкнутым, и чтобы в пределах технологического множества невозможно было увеличивать до бесконечности выпуск одного блага, не уменьшая при этом выпуск других благ. Можно показать, что если технологическое множество обладает свойством свободы расходования, то эффективная граница однозначно задает соответствующее технологическое множество.

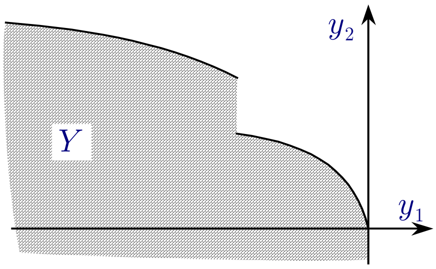


Рисунок 20. Эффективная граница технологического множества

Начальные курсы и курсы промежуточной сложности, при описании поведения производителя, опираются на представление его производственного множества посредством производственной функции. Уместен вопрос, при каких условиях на производственное множество такое представление возможно. Хотя можно дать более широкое определение производственной функции, однако здесь и далее мы будем говорить только об «однопродуктовых» технологиях, т.е. $m=1$.

Пусть $R$ — проекция технологического множества $Y$ на пространство векторов затрат, т.е.

$$R=\{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, y^o\in\mathbb{R}\colon (-\boldsymbol{r},y^o)\in Y\}.$$

**Определение 1.**

Функция $f(\cdot)\colon R\mapsto\mathbb{R}$ называется **производственной функцией**, представляющей технологию $Y$, если при каждом $\boldsymbol{r}\in R$ величина $f(\boldsymbol{r})$ является значением следующей задачи:

$$y^o\to\max\nolimits_{y^o}$$

$$(-\boldsymbol{r},y^o)\in Y.$$

Заметим, что любая точка эффективной границы технологического множества имеет вид $(-\boldsymbol{r},f(\boldsymbol{r}))$. Обратное верно, если $f(\boldsymbol{r})$ является возрастающей функцией. В этом случае $y^o=f(\boldsymbol{r})$ является уравнением эффективной границы.

Следующая теорема дает условия, при которых технологическое множество может быть представлено производственной функцией.

**Теорема 2.**

Пусть для технологического множества $Y\subseteq\mathbb{R}\times(-R)$ для любого $\boldsymbol{r}\in R$ множество

$$F(\boldsymbol{r})=\{y^o \mid (-\boldsymbol{r},y^o)\in Y\}$$

замкнуто и ограничено сверху. Тогда $Y$ может быть представлено производственной функцией.

***Доказательство***:

Замкнутость и ограниченность сверху множества $F(\boldsymbol{r})$ гарантируют, что существует $f(\boldsymbol{r}) \in F(\boldsymbol{r})$ такой, что $f(\boldsymbol{r}) \geqslant \boldsymbol{y}\ \forall \boldsymbol{y} \in F(\boldsymbol{r})$.

■

*Замечание*: Выполнение условий данного утверждения можно гарантировать, например, если множество $Y$ замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия.

**Теорема 3.**

Пусть множество $Y$ замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия. Тогда для любого $\boldsymbol{r} \in R$ множество

$$F(\boldsymbol{r}) = \{y_1 \,|\, (-\boldsymbol{r}, y^o) \in Y\}$$

замкнуто и ограничено сверху.

***Доказательство***:

Замкнутость множеств $F(\boldsymbol{r})$ непосредственно следует из замкнутости $Y$.

Покажем, что $F(\boldsymbol{r})$ ограничены сверху. Пусть это не так и при некотором $\boldsymbol{r} \in R$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{y_N\}$, такая что $y_N \in F(\boldsymbol{r})$. Тогда вследствие невозрастающей отдачи от масштаба $(-\boldsymbol{r}/y_N, 1) \in Y$. Поэтому (вследствие замкнутости), $(\boldsymbol{0}, 1) \in Y$, что противоречит отсутствию рога изобилия.

■

Отметим также, что если технологическое множество $Y$ удовлетворяет гипотезе свободного расходования, и существует представляющая его производственная функция $f(\cdot)$, то множество $Y$ описывается следующим соотношением:

$$Y = \{(-\boldsymbol{r}, y^o) \,|\, y^o \leqslant f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in R\}.$$

Установим теперь некоторые взаимосвязи между свойствами технологического множества и представляющей его производственной функции.

**Теорема 4.**

Пусть технологическое множество $Y$ таково, что для всех $\boldsymbol{r} \in R$ определена производственная функция $f(\cdot)$. Тогда верно следующее

1) Если множество $Y$ выпукло, то функция $f(\cdot)$ вогнута.

2) Если множество $Y$ удовлетворяет гипотезе свободного расходования, то верно и обратное, т.е. если функция $f(\cdot)$ вогнута, то множество $Y$ выпукло.

3) Если $Y$ выпукло, то $f(\cdot)$ непрерывна на внутренности множества $R$.

4) Если множество $Y$ обладает свойством свободы расходования, то функция $f(\cdot)$ не убывает.

5) Если $Y$ обладает свойством отсутствия рога изобилия, то $f(0) \leqslant 0$.

6) Если множество $Y$ обладает свойством допустимости бездеятельности, то $f(0) \geqslant 0$.

***Доказательство***:

(1) Пусть $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'' \in R$. Тогда $(-\boldsymbol{r}', f(\boldsymbol{r}')) \in Y$ и $(-\boldsymbol{r}'', f(\boldsymbol{r}'')) \in Y$, и

$$(-\alpha\boldsymbol{r}' - (1-\alpha)\boldsymbol{r}'', \alpha f(\boldsymbol{r}') + (1-\alpha) f(\boldsymbol{r}'')) \in Y \quad \forall \alpha \in [0;1],$$

поскольку множество $Y$ выпукло. Тогда по определению производственной функции

$$\alpha f(\boldsymbol{r}')+(1-\alpha)f(\boldsymbol{r}'')\leqslant f(\alpha\boldsymbol{r}'+(1-\alpha)\boldsymbol{r}''),$$

что означает вогнутость $f(\cdot)$.

(2) Поскольку множество $Y$ обладает свойством свободного расходования, то множество $Y$ (с точностью до знака вектора затрат) совпадает с ее подграфиком. А подграфик вогнутой функции — выпуклое множество.

(3) Доказываемый факт следует из того, что вогнутая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

(4) Пусть $\boldsymbol{r}''\geqslant\boldsymbol{r}'$ ($\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''\in R$). Поскольку $(-\boldsymbol{r}',f(\boldsymbol{r}'))\in Y$, то по свойству свободы расходования $(-\boldsymbol{r}'',f(\boldsymbol{r}'))\in Y$. Отсюда, по определению производственной функции, $f(\boldsymbol{r}'')\geqslant f(\boldsymbol{r}')$, то есть $f(\cdot)$ не убывает.

(5) Неравенство $f(0)>0$ противоречит предположению об отсутствии рога изобилия. Значит, $f(0)\leqslant 0$.

(6) По предположению о допустимости бездеятельности $(\boldsymbol{0},0)\in Y$. Значит, по определению производственной функции, $f(0)\geqslant 0$.

■

В предположении о существовании производственной функции свойства технологии можно описывать непосредственно в терминах этой функции. Покажем это на примере так называемой эластичности масштаба.

Пусть производственная функция дифференцируема. В точке $\boldsymbol{r}$, где $f(\boldsymbol{r})>0$, определим **локальную эластичность масштаба** $e(\boldsymbol{r})$ как:

$$e(\boldsymbol{r})=\frac{df(\lambda\boldsymbol{r})}{d\lambda}\frac{\lambda}{f(\boldsymbol{r})}\bigg|_{\lambda=1}.$$

Если в некоторой точке $e(\boldsymbol{r})$ равна $1$, то считают, что в этой точке «постоянная отдача масштаба», если больше $1$ — то «растущая отдача», меньше — «убывающая». Вышеприведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$e(\boldsymbol{r})=\frac{\sum\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial r_i}r_i}{f(\boldsymbol{r})}.$$

**Теорема 5.**

Пусть технологическое множество $Y$ описывается производственной функцией $f(\cdot)$ и в точке $\boldsymbol{r}$ выполнено $e(\boldsymbol{r})>0$. Тогда верно следующее:

1) Если технологическое множество $Y$ обладает свойством убывающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{r})\leqslant 1$.

2) Если технологическое множество $Y$ обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{r})\geqslant 1$.

3) Если $Y$ обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{r})=1$.

***Доказательство***:

(1) Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n<1)$, такую что $\lambda_n\to 1$. Тогда $(-\lambda_n\boldsymbol{r}, \lambda_n f(\boldsymbol{r}))\in Y$, откуда следует, что $f(\lambda_n\boldsymbol{r})\geqslant\lambda_n f(\boldsymbol{r})$. Перепишем это неравенство в виде:

$$\frac{f(\lambda_n \boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{r})}{\lambda_n-1} \leqslant f(\boldsymbol{r}).$$

Переходя к пределу, имеем

$$\left.\frac{df(\lambda \boldsymbol{r})}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \sum \frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} r_i \leqslant f(\boldsymbol{r}).$$

Таким образом, $e(\boldsymbol{r}) \leqslant 1$.

Свойства (2) и (3) доказываются аналогично.

■

Технологические множества $Y$ можно задавать в виде **неявных производственных функций** $g(\cdot)$. По определению, функция $g(\cdot)$ называется неявной производственной функцией, если технология $\boldsymbol{y}$ принадлежит технологическому множеству $Y$ тогда и только тогда, когда $g(\boldsymbol{y}) \geqslant 0$.

Заметим, что такую функцию можно найти всегда. Например, подходит функция такая, что $g(\boldsymbol{y})=1$ при $\boldsymbol{y} \in Y$ и $g(\boldsymbol{y})=-1$ при $\boldsymbol{y} \notin Y$. Заметим, однако, что данная функция не является дифференцируемой. Вообще говоря, не каждое технологическое множество можно описать *одной* дифференцируемой неявной производственной функцией, причем такие технологические множества не являются чем-то исключительным. В частности, технологические множества, рассматриваемые в начальных курсах микроэкономики, часто бывают такими, что для их описания нужно два (или больше) неравенства с дифференцируемыми функциями, поскольку требуется учитывать дополнительные ограничения неотрицательности факторов производства. Чтобы учитывать такие ограничения, можно использовать векторные неявные производственные функции, для которых условие технологической допустимости имеет вид $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \geqslant \boldsymbol{0}$. Тем не менее, целью упрощения изложения мы в дальнейшем для описания технологий будем использовать только одно ограничение и т.е. скалярную функцию.

Укажем здесь на связь неявной производственной функции и более привычной (явной) производственной функцией: в ситуации, когда технология такова, что ресурсные ограничения оказываются несущественными, значение неявной производственной функции можно определить как

$$g((-\boldsymbol{r}, y^o)) = f(\boldsymbol{r}) - y^o.$$

## Задачи

1. Пусть технологическое множество фирмы задается условием:

$$y_1 \leqslant \ln(1-y_2), \text{ где } y_2 < 1.$$

Какими свойствами обладает данная технология?

2. Докажите Теорему 1.

3. Технологические способы $(-5;4)$, $(-4;0)$ и $(-2;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству $Y$. Можно ли гарантировать, что технологический способ $(-3;2)$ принадлежит $Y$, если известно, что $Y$ выпукло? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $Y$.

4. Технологические способы $(-5;4)$, $(-4;0)$ и $(-2;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству $Y$. Можно ли гарантировать, что технологический способ $(-2;1)$ принадлежит $Y$, если известно, что $Y$ выпукло и характеризуется убывающей отдачей? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $Y$.

5. Технологические способы $(-8;10)$, $(-2;3)$ и $(-4;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству $Y$. Можно ли гарантировать, что технологический способ $(-5;5)$ принадлежит $Y$, если известно, что $Y$ характеризуется свободой расходования? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $Y$.

6. Пусть однопродуктовая технология может быть представлена производственной функцией. Показать, что производственное множество удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда соответствующая производственная функция однородна первой степени.

7. Покажите, что если технологическое множество $Y$ замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}_+^l \subseteq Y$, то оно обладает свойством свободы расходования.

8. Назовем вектор $\psi$ направлением рецессии технологического множества если существует $\boldsymbol{y} \in Y$ и неограниченная последовательность положительных чисел $\{\lambda_i\}$, такая что $\boldsymbol{y} + \lambda_i \psi \in Y$.

(a) Покажите, что если технологическое множество $Y$ замкнуто и выпукло, то множество рецессивных направлений $\Psi$ является замкнутым выпуклым конусом. В случае, если $Y$ удовлетворяет условию свободы расходования, то множество $\Psi$ содержит $-\mathbb{R}_+^l$.

(b) Предположим, что $Y$ замкнуто и выпукло, $\mathbf{0} \in Y$. Докажите, что тогда $\psi$ является рецессивным направлением технологического множества $Y$ тогда и только тогда, когда $\lambda\psi \in Y \ \forall \lambda \geqslant 0?$.

(c) Докажите, что если технологическое множество $Y$ замкнуто и выпукло, то $Y + \Psi = Y$.

## *Задача производителя и ее свойства*

Гипотеза, лежащая в основе модели поведения производителя заключается в том, что производитель выбирает технологически допустимый вектор чистых выпусков, максимизирующий прибыль. В терминах чистых выпусков **прибыль** есть скалярное произведение вектора чистых выпусков $\boldsymbol{y} \in Y$ на вектор цен: $\boldsymbol{py}$. Таким образом, если производитель, приобретая факторы производства и продавая производимые блага на рынках с совершенной конкуренцией блага, сталкивается с некоторым вектором цен $\boldsymbol{p}$, то его выбор оказывается решением следующей задачи на экстремум:

**Задача 3**.

$\boldsymbol{py} \to \max_{y \in Y}$.

Отметим, что если все цены положительны (все блага желательны), то решение задачи производителя должно лежать на эффективной границе технологического множества.

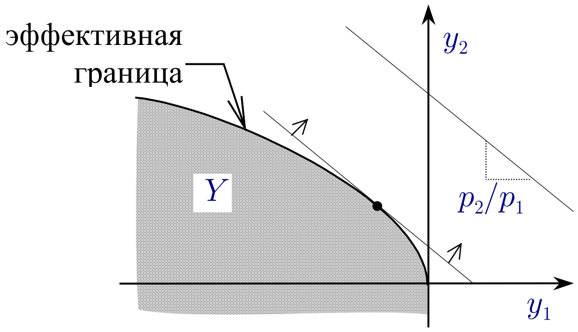


Рисунок 21. Иллюстрация решения задачи производителя

Обозначим множество цен, на котором существует решение Задачи 3, через $P$.

**Определение 2.**

**Отображением предложения** $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ будем называть отображение, которое ставит в соответствие каждому вектору цен $\boldsymbol{p}\in P$ множество решений этой задачи. Если решения единственны, то говорят о **функции предложения**.

**Определение 3.**

**Функция прибыли** — это функция, которая ставит в соответствие каждому вектору цен $\boldsymbol{p}\in P$ значение Задачи 3:

$$\pi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}).$$

Существенное отличие задачи производителя (Задача 3) от задачи потребителя (Задачи 1) состоит в том, что множество ее допустимых решений $Y$, как правило, не ограничено. Более того, для технологий с неубывающей отдачей существование допустимых технологий с положительной прибылью означает существование допустимых технологий, дающих сколь угодно большую прибыль.

**Пример 1.** (Отсутствие решения задачи производителя).

Пусть технологическое множество имеет вид $Y=\{(y_1,y_2)\,|\,y_1\leqslant 0,\ y_2+\alpha y_1\leqslant 0\}$, цены благ равны $p_1$, $p_2$. Если выбрать $y_2=-\alpha y_1$, то прибыль будет равна $-(\alpha p_2-p_1)y_1$. Поэтому если $\alpha p_2>p_1$, то прибыль не ограничена сверху, и решение отсутствует.

Если $\alpha p_2<p_1$, то решение единственно — $y_1=0$ и $y_2=0$. Если $\alpha p_2=p_1$, то решением этой задачи является любая технологически допустимая пара $(y_1,y_2)$, такая что $y_2+\alpha y_1=0$.

$\Leftarrow$

Таким образом, существование решений можно гарантировать лишь при дополнительных предположениях относительно вектора цен $\boldsymbol{p}$ и структуры множества $Y$. Ниже мы докажем существование решения для всех неотрицательных цен при следующем (сильном) предположении: существует компактное множество $Y'$, такое что

$$Y'\subseteq Y \text{ и } Y\subseteq Y'-\mathbb{R}^l_+. \qquad (\wp)$$

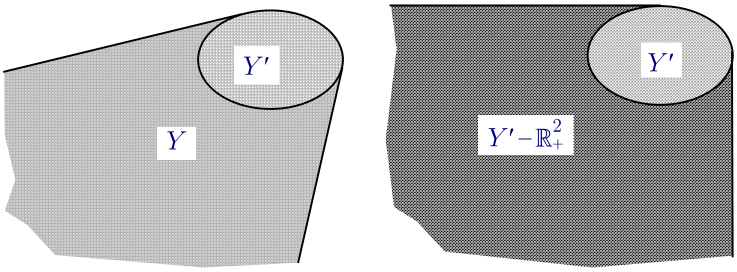


Рисунок 22. Иллюстрация предположения, гарантирующего существование решения задачи максимизации прибыли

Заметим (что легко увидеть из предлагаемых иллюстраций Рис. 5), что множество $Y'$, обладающее указанным свойством, если существует, то определяется множеством $Y$ не единственным образом.

### Теорема 6.

Пусть выполнено соотношение $(\wp)$. Тогда решение Задачи 3 существует при любом неотрицательном векторе цен благ.

***<u>Доказательство</u>***:

Докажем, что задача максимизации прибыли на $Y$ в определенном смысле сводится к задаче максимизации прибыли на $Y'$. Пусть $\boldsymbol{y} \in Y$ и $\boldsymbol{y} \notin Y'$. Тогда по условию $(\wp)$ найдется вектор $\boldsymbol{y}' \in Y'$ такой, что $\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} \geqslant\neq 0$. Тем самым мы нашли допустимое решение, для которого прибыль не меньше, чем для $\boldsymbol{y}$. Из этого следует, что нам достаточно рассматривать только $\boldsymbol{y} \in Y'$.

Поскольку $Y'$ — компактное множество, а прибыль $\boldsymbol{py}$ непрерывна по $\boldsymbol{y}$, то по теореме Вейерштрасса решение Задачи 3 на множестве $Y'$ всегда существует.

■

Ясно, что предположения этой теоремы слишком ограничительны, что не позволяет устанавливать существование решения задачи производителя для многих популярных технологических множеств. Так, для производственной функции Кобба—Дугласа с убывающей отдачей ($f(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}$, $\alpha + \beta < 1$) мы можем гарантировать существование решения при положительных ценах, а условию теоремы она не удовлетворяет.

Существование решение задачи потребителя в этом случае гарантируется тем фактом, что на всех «рецессивных направлениях» данного технологического множества прибыль принимает отрицательные значения. Поясним сказанное и приведем утверждения, обобщающие доказанную выше теорему.

Введем соответствующие понятия.

Пусть $Y$ удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Назовем вектор $\psi$ рецессивным направлением (направлением «удаления в бесконечность»), если $\lambda\psi \in Y$ $\forall \lambda \geqslant 0$. Обозначим через $\Psi$ множество всех рецессивных направлений. По построению $\Psi$ является конусом. Построим на основе $\Psi$ следующее множество (множество цен, которые на рецессивных направлениях дают отрицательную прибыль):

$$\mathscr{P} = \{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}\psi < 0 \ \forall \psi \in \Psi \colon \psi \neq \boldsymbol{0}\}.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.**

Пусть технологическое множество $Y$ непусто, замкнуто и удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Тогда при всех $\boldsymbol{p} \in \mathring{P}$ Задача 3 имеет решение.

***<u>Доказательство</u>***:

Рассмотрим $\boldsymbol{p} \in \mathring{\Pi}$ и предположим, что Задача 3 не имеет решения. Тогда существует неограниченная последовательность технологий $\{\boldsymbol{y}_i\}$, такая что

$$\|\boldsymbol{y}_{i+1}\| > \|\boldsymbol{y}_i\|$$

и

$$\lim \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_i = \sup{}_{\boldsymbol{y}\in Y} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{y}_i \neq \boldsymbol{0}$. Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{y}_i/\|\boldsymbol{y}_i\|$. Эта последовательность ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим эту подпоследовательность через $\{\tilde{\boldsymbol{y}}_i\}$, а ее предел через $\tilde{\boldsymbol{y}}$. Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \Psi$.

Пусть это не так, и найдется $\hat{\lambda}$, такое что $\hat{\lambda}\tilde{\boldsymbol{y}} \notin Y$. Рассмотрим последовательность $\hat{\lambda}\tilde{\boldsymbol{y}}_i$. Из свойства невозрастающей отдачи и того, что исходная последовательность $\boldsymbol{y}_i$ неограниченно возрастает, следует, что начиная с некоторого $i$ эта последовательность принадлежит $Y$. Пределом этой последовательности будет вектор $\hat{\lambda}\tilde{\boldsymbol{y}}$. Поскольку технологическое множество замкнуто, то $\hat{\lambda}\tilde{\boldsymbol{y}} \in Y$. Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \Psi$.

Поскольку $\boldsymbol{p} \in \mathring{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \Psi$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}} < 0$. Отсюда следует, что для достаточно больших $i$ $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_i < 0$, поэтому $\lim \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_i = -\infty$. С другой стороны, поскольку $Y$ непусто, то $\sup{}_{\boldsymbol{y}\in Y} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y} > -\infty$. Получили противоречие.

■

Из доказанной теоремы следует, что если множество рецессивных направлений $\Psi$ совпадает с $\mathbb{R}^l_-$, то (в предположениях теоремы) решение задачи производителя существует при любых положительных ценах. Примером служит технология, задаваемая производственной функцией Кобба—Дугласа с убывающей отдачей.

Докажем некоторые свойства функции прибыли и отображения (функции) предложения.

**Теорема 8.** (Свойства функции $\pi(\boldsymbol{p})$)

1) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ положительно однородна 1-й степени:

$$\pi(\lambda\boldsymbol{p}) = \lambda\pi(\boldsymbol{p}) \ \forall \boldsymbol{p} \in \operatorname{int}(P).$$

2) Если технологическое множество замкнуто, то функция прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$ выпукла на любом выпуклом подмножестве множества $P$ (множества цен, при которых Задача 3 имеет решение).

3) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ непрерывна на внутренности множества $P$, $\operatorname{int}(P)$.

4) Если множество $Y$ строго выпукло, то $\pi(\boldsymbol{p})$ непрерывно дифференцируема на $\boldsymbol{p} \in \operatorname{int}(P)$.

***<u>Доказательство</u>***:

1) Доказательство однородности оставляем в качестве упражнения.

2) Докажем выпуклость $\pi(\cdot)$. Пусть от некоторых двух цен $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ взята выпуклая комбинация — цена

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \alpha \boldsymbol{p} + (1-\alpha)\boldsymbol{p}' \quad (0<\alpha<1).$$

Учитывая условия максимизации прибыли, имеем для $\boldsymbol{y}_\alpha = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}_\alpha)$:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}').$$

Складывая эти неравенства с множителями $\alpha$ и $1-\alpha$ соответственно, получим требуемое неравенство:

$$\pi(\boldsymbol{p}_\alpha) \leqslant \alpha\pi(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)\pi(\boldsymbol{p}').$$

Выпуклость функции $\pi(\cdot)$ можно также доказать, используя тот факт, что поточечный максимум семейства выпуклых функций — выпуклая функция, заметив, что $\pi(\cdot)$ является поточечным максимумом выпуклых (линейных) функций $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \in Y$.

3) Непрерывность функции $\pi(\cdot)$ на множестве $\mathrm{int}(P)$ следует, например, из того факта, что выпуклая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

4) Дифференцируемость функции $\pi(\cdot)$ следует из того, что решение задачи производителя $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ единственно при любых при любых положительных ценах, градиент $\nabla\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$. Поскольку $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ непрерывна на $\mathrm{int}(P)$, $\pi(\boldsymbol{p})$ непрерывно дифференцируема на $\mathrm{int}(P)$.

■

Аналогом тождества Роя является следующая **лемма Хотелинга,** результат, который мы использовали при доказательстве предыдущей теоремы и который мы установим сейчас при более сильных, чем это необходимо, предположениях.

**Теорема 9.**

Пусть функция прибыли $\pi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в точке $\boldsymbol{p} \in \mathrm{int}(P)$.

Тогда

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = y_k(\boldsymbol{p}).$$

***Доказательство***:

Пусть $\tilde{\boldsymbol{p}} \in \mathrm{int}(P)$ — некоторый вектор цен. Для доказательства леммы определим две функции от цены $k$-го блага $p_k$. Первая из них представляет собой прибыль как функцию $p_k$ при условии, что остальные цены зафиксированы на уровне $\tilde{\boldsymbol{p}}_{-k}$, т.е.

$$\pi_k(p_k) = \pi(\tilde{\boldsymbol{p}}_{-k}, p_k) = \pi(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{k-1}, p_k, \tilde{p}_{k+1}, \ldots, p_l).$$

Обозначив $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{p}})$, определим вторую функцию как

$$\gamma(p_k) = p_k\tilde{y}_k + \sum_{s\neq k}\tilde{p}_s\tilde{y}_s.$$

Она является линейной функцией $p_k$.

По определению, $\pi(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{y}}$, а это означает, что $\pi_k(\tilde{p}_k) = \gamma(\tilde{p}_k)$. При других ценах, вообще говоря, $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{p}})$ может не давать максимум прибыли, т. е $\pi_k(p_k) \geqslant \gamma(p_k)$. Таким образом, прямая $\gamma(p_k)$ является касательной графика функции $\pi_k(p_k)$ в точке $\tilde{p}_k$ (точка $A$ на Рис. 23). В точке касания производные совпадают, поэтому

$$\frac{\partial \pi(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial p_k} = \pi_k'(\tilde{p}_k) = \gamma'(\tilde{p}_k) = \tilde{y}_k,$$

что и означает справедливость Леммы.

■

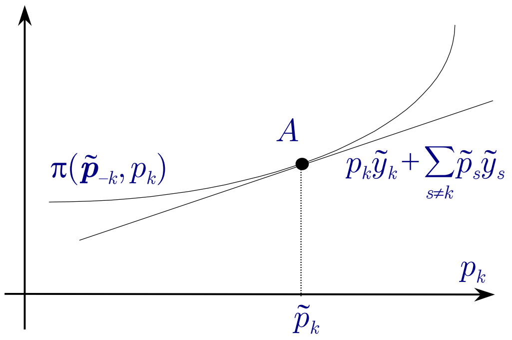


Рисунок 23. Иллюстрация доказательства Леммы Хотеллинга

**Теорема 10.** (Свойства отображения предложения)

- Отображение (функция) предложения $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ положительно однородно нулевой степени.
- Если множество $Y$ строго выпукло, то $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ — однозначная функция на $\boldsymbol{p} \in P$, причем $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ непрерывна на $\boldsymbol{p} \in \operatorname{int}(P)$.
- Если функция прибыли $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби $M = \{\partial \boldsymbol{y}_s / \partial p_k\}$ функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ симметрична и положительно полуопределена, $\boldsymbol{p} \in \operatorname{int}(P)$.

***Доказательство***:

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

■

Если технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, то задача производителя сводится к следующей задаче максимизации прибыли:

$$p^o f(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{r} \to \max_{\boldsymbol{r} \in R},$$

где $p^o$ — цена выпускаемой продукции, $\boldsymbol{r}$ — количество затрачиваемых факторов производства, $\boldsymbol{w}$ — вектор цен факторов. Прибыль здесь определяется как разность между выручкой $p^o y^o$ и издержками $\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}$.

Пусть $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o)$ — функция спроса на факторы производства при векторе цен $(\boldsymbol{w}, p^o)$, $y^o(\boldsymbol{w}, p^o)$ — функция предложения продукции при векторе цен $(\boldsymbol{w}, p^o)$. Заметим, что если $p^o > 0$, то $y^o(\boldsymbol{w}, p^o) = f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o))$. В данном контексте функция прибыли записывается в следующем виде:

$$\pi(\boldsymbol{w}, p^o) = p^o f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o)) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o).$$

Поясним связи переменных этой задачи с ранее рассмотренными. Как не трудно понять $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{w}, p^o)$ и $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) = (-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o), y^o(\boldsymbol{w}, p^o))$.

Как результаты доказанные в этом параграфе, так и те которые будут доказаны впоследствии могут быть доказаны и в случае когда первичный объект рассмотрения не технологическое множество, а производственная функция.

Если $\bar{\boldsymbol{r}}$ — внутреннее решение задачи максимизации прибыли ($\bar{\boldsymbol{r}} \in \operatorname{int}(R)$) и производственная функция дифференцируема, то $\bar{\boldsymbol{r}}$ удовлетворяет следующим условиям первого порядка:

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{r}})}{\partial r_k} = w_k \; \forall k \in K.$$

т.е. предельная производительность каждого фактора производства равна его цене. В векторной записи

$$p^o \nabla f(\bar{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{w}.$$

При $p^o > 0$ получим следующую дифференциальную характеристику задачи производителя:

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{r}})}{\partial r_k} = \frac{w_k}{p^o},$$

т.е. предельный продукт каждого фактора производства равен его относительной цене (пропорции обмена этого производственного фактора на продукт).

Предположим, что множество $R$ задается неравенствами $\boldsymbol{r} \geqslant 0$. Тогда любое решение удовлетворяет соотношению

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{r}})}{\partial r_k} \leqslant w_k,$$

причем (условия дополняющей нежесткости)

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{r}})}{\partial r_k} = w_k, \text{ если } r_k > 0,$$

и

$$r_k = 0, \text{ если } p^o \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{r}})}{\partial r_k} < w_k.$$

Указанные необходимые условия оптимальности оказываются достаточными в случае, если производственная функция вогнута.

Соотношения леммы Хотеллинга в этом случае приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial \pi(\boldsymbol{w}, p^o)}{\partial p^o} = f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, p^o)),$$

$$\frac{\partial \pi(\boldsymbol{w}, p^o)}{\partial w_k} = -r_k(\boldsymbol{w}, p^o).$$

Можно получить аналогичную дифференциальную характеристику решения задачи производителя и в случае, если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, которая является дифференцируемой.

Заметим, что если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y} \to \max\nolimits_{\boldsymbol{y}},.$$
$$g(\boldsymbol{y}) \geqslant 0.$$

При дифференцируемости функции $g(\cdot)$ решение этой задачи можно охарактеризовать при помощи теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$L = \sum_{k\in K} p_k y_k + \kappa\, g(\boldsymbol{y}),$$

где $\kappa$ — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что $\nabla g(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}$) существует множитель Лагранжа $\kappa \geqslant 0$, такой что решение задачи, $\bar{\boldsymbol{y}}$, удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{y}}, \kappa)}{\partial y_k} = 0,\ \forall k \in K,$$

или

$$\kappa \frac{\partial g(\bar{\boldsymbol{y}})}{\partial y_k} = p_k,\ \forall k \in K.$$

Другими словами,

$$\kappa \nabla g(\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{p},$$

то есть градиент неявной производственной функции коллинеарен вектору цен. Если не все цены равны нулю ($\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$), то $\kappa > 0$. Исключая множитель Лагранжа $\kappa$, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g(\bar{\boldsymbol{y}})/\partial y_s}{\partial g(\bar{\boldsymbol{y}})/\partial y_k}.$$

Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи потребителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g(\cdot)$ вогнута.

### Задачи

9. Объясните, почему при не равных нулю ценах решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества.

10. Докажите, что все точки эффективной границы выпуклого технологического множества являются решением задачи производителя при некоторых неотрицательных, не равных нулю ценах. Приведите пример, показывающий, что в этом утверждении нельзя заменить неотрицательные цены на положительные.

11. Для случая, когда технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, сформулируйте и докажите лемму Хотеллинга, пользуясь формулой вычисления прибыли и условиями первого порядка для внутреннего решения задачи производителя.

12. Для случая, когда $Y$ представлено дифференцируемой неявной производственной функцией, можно доказать лемму Хотеллинга используя теорему Куна—Таккера. Прове-

дите это доказательство. (*Подсказка*: см. первое доказательство леммы Шепарда для теории потребления.)

13. Докажите Теорему **10**.

14. Покажите, что если производственная функция $f(\cdot)$ строго вогнута, и кроме того, $f(0)=0$, то прибыль в точке оптимума неотрицательна.

15. Покажите, что если производственная функция в точке максимума прибыли обладает возрастающей отдачей от масштаба, то прибыль не может быть положительной. На основании этого выведите, что в случае возрастающей отдачи от масштаба задача производителя либо не имеет решения, либо в точке решения прибыль равна нулю.

16. Пусть $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w},p^o)$ — функция спроса на факторы, $y^o(\boldsymbol{w},p^o)=f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w},p^o))$ — функция предложения, а $H=\nabla^2 f(\boldsymbol{r})$ — матрица вторых производных производственной функции $f(\boldsymbol{r})$. Выведите следующие соотношения сравнительной статики для задачи производителя:

$$\frac{\partial y^o}{\partial p^o}=-\frac{1}{p^o}\nabla f\, H^{-1}\nabla f,\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial p^o}=-\frac{1}{p^o}H^{-1}\nabla f,$$

$$\frac{\partial y^o}{\partial \boldsymbol{w}}=\frac{1}{p^o}H^{-1}\nabla f,\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{w}}=\frac{1}{p^o}H^{-1}.$$

На основании этого сделайте заключение о поведении выпуска производителя и его спроса на факторы для вогнутых производственных функций. Проиллюстрируйте эти соотношения для производственной функции типа Кобба—Дугласа.

17. Пусть множество производственных возможностей фирмы задается условием:

$$y_1\leqslant \ln(1-y_2),\ \text{где}\ y_2<1.$$

Постройте функции спроса (предложения) на $y_1$, $y_2$. Постройте функцию прибыли для данной технологии.

18. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r)=r^{\alpha}$, вычислите:

- функцию прибыли,
- функцию спроса на производственный фактор,
- функцию предложения,

Покажите, что

- функция прибыли однородна и выпукла (по цене продукции, $p^o$, и цене производственного фактора, $w$),
- функция спроса удовлетворяет закону спроса,
- функция предложения удовлетворяет закону предложения

19. Найдите функцию прибыли, функцию предложения и функцию спроса на факторы для перечисленных производственных функций:

(а) $f(\boldsymbol{r})=\cap r_i^{\alpha_i}, \alpha_i>0$, (функция Кобба—Дугласа).

(б) $f(\boldsymbol{r})=\sum a_i r_i^{\rho}$,

(в) $f(\boldsymbol{r})=\sum f_i(r_i)+r_n$.

Какими свойствами обладают найденные функции? Покажите, что для данных функций выполнена лемма Хотеллинга.

20. Докажите, что валовой доход фирмы, не может вырасти, если цены на все факторы производства увеличатся пропорционально.

21. Покажите, что валовой доход фирмы не может вырасти, если упадет цена по крайней мере одного из выпускаемых ею продуктов.

22. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если вырастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства..

23. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере на один из выпускаемых ею продуктов.

24. Предположим, что производственная функция для некоторой технологии вогнута и сепарабельна, причем предельный продукт любого фактора производства как угодно мал при достаточно больших объемах затрат этого фактора производства. Покажите, что

- валовой доход фирмы упадет, если возрастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства;
- функция спроса (предложения) данной фирмы удовлетворяет условиям валовой заменимости;
- спрос данной фирмы на любой фактор производства неограниченно возрастает при падении цены этого фактора производства;
- предложение данной фирмы неограниченно возрастает при росте выпускаемой этой фирмой продукции.

25. Покажите, что в случае однородной производственной функции показатель отдачи от масштаба не зависит от цен факторов.

26. Покажите, что в случае однородной производственной функции отношение функций спроса на любые два фактора производства не зависит от цены продукции.

27. Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

## Восстановление технологического множества

Аналог концепции выявленных предпочтений для модели производителя имеет довольно простой вид. Пусть $(\boldsymbol{p}^i, \boldsymbol{y}^i)$, $i=1,...,n$ — последовательность наблюдений: при ценах $\boldsymbol{p}^i$ наблюдался вектор чистого выпуска $\boldsymbol{y}^i$. Если при каком-то векторе цен $\boldsymbol{p}^i$ выполнено $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{y}^j > \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{y}^i$, то $\boldsymbol{y}^i$ не максимизирует прибыль при ценах $\boldsymbol{p}^i$. А это противоречит рациональности производителя.

Если же $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{y}^j \leqslant \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{y}^i$ $\forall i,j$, то последовательность наблюдений $(\boldsymbol{p}^i, \boldsymbol{y}^i)$, $i=1,...,n$ не противоречит гипотезе максимизации прибыли. Технологическое множество, которое порождает такие выборы производителя, может быть построено разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

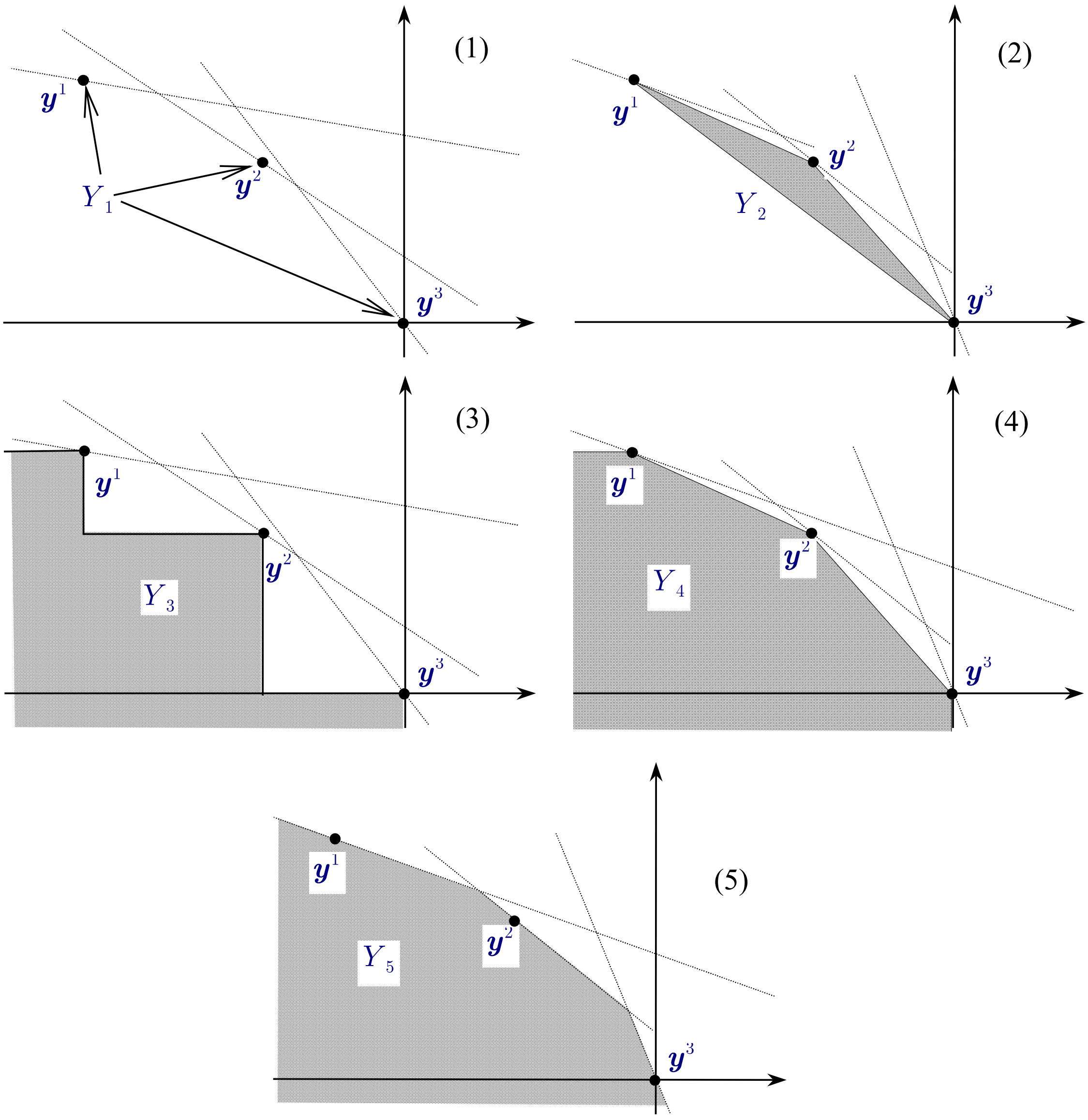


Рисунок 24. Возможные способы восстановления множества $\boldsymbol{Y}$ по наблюдаемым точкам

Наиболее простым является вариант, когда технологическое множество, которое при максимизации прибыли порождает такие выборы, состоит только из точек $\boldsymbol{y}^i$, т.е.

$$Y_1 = \{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, ..., \boldsymbol{y}^n\}.$$

Также можно в качестве технологического множества $Y$ можно взять выпуклую оболочку $Y_2$ точек $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, ..., \boldsymbol{y}^n$ (если мы предполагаем, что технологическое множество выпукло). Если мы предполагаем выпуклость и свободу расходования, то в качестве $Y$ можно взять разность между $Y_1$ и $\mathbb{R}^l_+$: $Y_3 = Y_1 - \mathbb{R}^l_+$, и между $Y_2$ и $\mathbb{R}^l_+$: $Y_4 = Y_2 - \mathbb{R}^l_+$. Еще один вариант — пересечение полупространств, отсекаемых соответствующими гиперплоскостями:

$$Y_5 = \{\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{p}^i \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{p}^i \boldsymbol{y}^i,\ i = 1, ..., n\}.$$

Все эти варианты для случая $n = 2$ изображены на приведенных выше рисунках. Прямые, нарисованные пунктиром, изображают цены. Отметим, что

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_4 \subseteq Y_5$$

и

$$Y_1 \subseteq Y_3 \subseteq Y_4 \subseteq Y_5.$$

Таким образом, существует несколько множеств, порождающий указанный спрос, причем $Y_5$ является «максимальным» из этих множеств (т.е. содержит любое другое множество). Покажем, что аналогичная процедура позволяет построить подходящее технологическое множество и в случае, когда количество наблюдений может быть бесконечно.

Предположим, что функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$, определенная на множестве цен $P$, такова, что $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ является решением задачи максимизации прибыли при ценах $\boldsymbol{p}$. Требуется на основе $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ и соответствующей функции прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$ восстановить соответствующее технологическое множество.

Заметим, что существование вектора $\boldsymbol{y} \in Y$, такого что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y} > \pi(\boldsymbol{p})$ при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$, противоречило бы гипотезе максимизации прибыли на $Y$. Объединим все вектора $\boldsymbol{y}$ не противоречащие этому условию при всех неотрицательных $\boldsymbol{p}$ в множество

$$Y_\pi = \bigcap_{\boldsymbol{p} \in P} \{\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\} = \{\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \in P\}.$$

Очевидно, что по построению выполнено $Y \subseteq Y_\pi$ (т.е. построенное технологическое множество будет в общем случае шире, чем исходное), и $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ является решением задачи производителя с технологическим множеством $Y_\pi$ при ценах $\boldsymbol{p} \in P$. Как следствие, функция прибыли для технологического множества $Y_\pi$ определена при всех $\boldsymbol{p} \in P$ и совпадает с $\pi(\boldsymbol{p})$.

Таким образом, мы нашли (максимальное) технологическое множество, которое порождает данные наблюдения.

Уместен вопрос: совпадет ли множество $Y_\pi$ с технологическим множеством $Y$, на основе которого оно построено? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам восстанавливать технологические множества по наблюдаемому поведению.

Ответ на вопрос зависит от свойств технологического множества $Y$ и от множества цен $P$, при которых наблюдается предложение.

В общем случае $Y$ и $Y_\pi$ могут не совпадать, поскольку описанный метод построения $Y_\pi$ порождает выпуклые множества (пересечение полупространств), а технологическое множество $Y$ может быть невыпуклым (как на Рис. 24.1 и 24.3). Кроме того, ясно, что множество цен $P$ может быть недостаточно «богатым» для того, чтобы технологическое множество было адекватно представлено наблюдаемыми выборами при этих ценах.

Рассмотрим частный случай, когда $P = \mathbb{R}^l_{++}$. В этом случае $Y$ и $Y_\pi$ могут не совпадать, поскольку наш метод построения $Y_\pi$ порождает множества, удовлетворяющее свойству свободы расходования, а технологическое множество $Y$ может не удовлетворять свойству свободы расходования (как на Рис. 24.1 и 24.2).

**Теорема 11.**

Пусть технологическое множество $Y$ непусто, замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда при $P=\mathbb{R}^l_{++}$ оно совпадает с порождаемым им множеством $Y_\pi$.

***Доказательство***:

Поскольку $Y\subseteq Y_\pi$, то остается показать только, что $Y_\pi\subseteq Y$.

Рассмотрим точку $\tilde{\boldsymbol{y}}$, не принадлежащую технологическому множеству $Y$. По теореме отделимости для непустого выпуклого замкнутого множества $Y$ и точки $\tilde{\boldsymbol{y}}$, не принадлежащей этому множеству, существует вектор коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{p}}$, не равный нулю, и число $q$, такие что

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{y}}>q\geqslant\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}\ \forall\boldsymbol{y}\in Y.$$

Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{p}}$ может быть вектором цен. Для этого нужно, чтобы он не имел нулевых или отрицательных компонент.

Предположим, что $\tilde{p}_i<0$. Рассмотрим некоторую точку $\boldsymbol{y}'\in Y$ и луч $\boldsymbol{y}'-\lambda\boldsymbol{e}^i$ при $\lambda\geqslant 0$, где $\boldsymbol{e}^i$ — орт ($i$-я компонента равна $1$, а остальные — нули). Этот луч целиком лежит во множестве $Y$, так как $Y$ удовлетворяет свойству свободы расходования. Величина $\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}'-\lambda\tilde{p}_i$ не ограничена сверху. Это противоречит тому, что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{y}}>\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}\ \forall\boldsymbol{y}\in Y$. Мы пришли к противоречию, поэтому $\tilde{\boldsymbol{p}}\geqslant\boldsymbol{0}$.

Более того, можно выбрать вектор коэффициентов так, что в нем не будет нулевых компонент. Действительно, рассмотрим вектор $\tilde{\boldsymbol{p}}+\varepsilon\boldsymbol{p}'$, где $\boldsymbol{p}'$ — произвольный вектор цен из $\mathbb{R}^l_{++}$. Величины $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}$ при $\boldsymbol{y}\in Y$ ограничены сверху значением $\pi(\boldsymbol{p}')$, поэтому, если $\varepsilon$ достаточно мало, то все еще будут выполняться неравенства

$$(\tilde{\boldsymbol{p}}+\varepsilon\boldsymbol{p}')\tilde{\boldsymbol{y}}>(\tilde{\boldsymbol{p}}+\varepsilon\boldsymbol{p}')\boldsymbol{y}\ \forall\boldsymbol{y}\in Y.$$

Следовательно, существует вектор $\tilde{\boldsymbol{p}}>\boldsymbol{0}$, такой что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{y}}>\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}\ \forall\boldsymbol{y}\in Y$. Отсюда следует, что $\tilde{\boldsymbol{p}}$ $\tilde{\boldsymbol{y}}>\pi(\tilde{\boldsymbol{p}})$, и, значит, $\boldsymbol{y}\notin Y_\pi$.

Мы показали, что любая точка, которая не принадлежит $Y$, не принадлежит и $Y_\pi$. А это значит, что $Y_\pi\subseteq Y$.

■

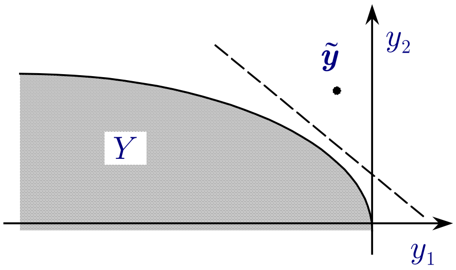
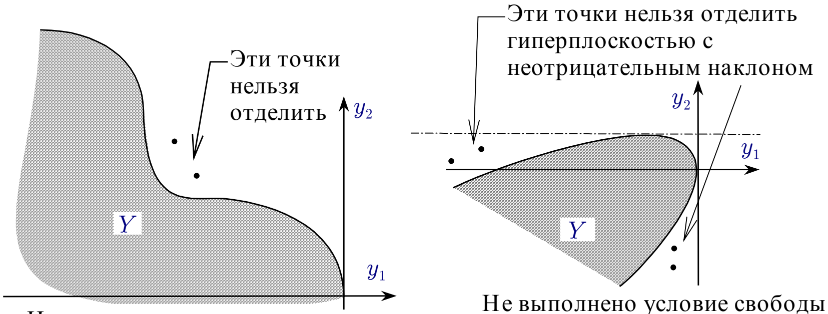


Рисунок 25. Иллюстрация отделимости

Ниже Рис. 26 приведены примеры ситуаций, когда при нарушении предположений теоремы, ее утверждение ($Y_\pi\subseteq Y$) неверно и, тем самым, невозможно восстановить $Y$ на основе функции прибыли.



Не выполнено условие выпуклости

Не выполнено условие свободы расходования

Рисунок 26. Ситуации, когда невозможно восстановить $\boldsymbol{Y}$.

Обсудим теперь следующую проблему: как для данной функции $\pi(\boldsymbol{p})$ и функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$, определенных на множестве цен $P$, определить, могут ли они являться они функцией прибыли и функцией предложения рационального производителя?

Понятно, что необходимыми требованиями к функции прибыли являются ее выпуклость, однородность первой степени и непрерывность. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\pi(\boldsymbol{p})$ была функцией прибыли для некоторого технологического множества. В качестве такого множества можно взять рассмотренное выше множество

$$Y_\pi = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{y} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \in P\}.$$

Следующий набор утверждений формализует сказанное выше:

(1) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то построенная на ее основе функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя.

(2) Если функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя, то построенная на ее основе функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли.

(3) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то существует технологическое множество, порождающее $\pi(\boldsymbol{p})$ как функцию прибыли.

Перечислим упомянутые необходимые условия. Для удобства доказательства потребуем дополнительно, что $\pi(\boldsymbol{p})$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ — непрерывно дифференцируемой.

Условия на функцию $\pi(\boldsymbol{p})$:

(**A1**) положительная однородность первой степени;

(**A2**) выпуклость;

(**A3**) $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема (более сильное условие, чем требуется).

Условия на функцию $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$:

(**B1**) положительно однородна нулевой степени,

(**B2**) матрица производных $M = \{\partial \boldsymbol{y}_s / \partial p_k\}$ существует и непрерывна, положительно полуопределена и симметрична.

Сформулируем приведенный выше набор неформальных утверждений как теорему.

**Теорема 12.**

**(1)** Пусть

$$y_k(\boldsymbol{p})=\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k},$$

где функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

Тогда $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})=(y_1(\boldsymbol{p}),...,y_l(\boldsymbol{p}))$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**) налагаемым на функцию спроса-предложения производителя.

**(2)** Пусть функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**).

Тогда функция $\pi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

**(3)** Пусть функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**). Тогда множество $Y_\pi=\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}\leqslant\pi(\boldsymbol{p})\ \forall\boldsymbol{p}\geqslant 0\}$ является технологическим множеством порождающим функцию прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$.

***Доказательство***:

**(1) (A1)-(A3)** $\Rightarrow$ **(B1)-(B2)**.

Поскольку функция $\pi(\boldsymbol{p})$ однородна первой степени, то ее производная $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ однородна нулевой степени.

Непрерывная дифференцируемость $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $\pi(\boldsymbol{p})$.

Матрица вторых производных любой дважды непрерывно дифференцируемой функции симметрична. Применяя это свойство к функции $\pi(\boldsymbol{p})$ имеем,

$$\frac{\partial^2\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_s\partial p_k}=\frac{\partial^2\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k\partial p_s}.$$

Матрица вторых производных функции $\pi(\boldsymbol{p})$ есть матрица первых производных функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$. Поэтому

$$\frac{\partial y_s}{\partial p_k}=\frac{\partial y_k}{\partial p_s}.$$

Положительная полуопределенность матрицы вторых производных (то есть $\boldsymbol{r}M\boldsymbol{r}\geqslant 0$ $\forall\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^n$) — необходимый (и достаточный) признак выпуклости любой дважды дифференцируемой функции.

**(2) (B1)-(B2)** $\Rightarrow$ **(A1)-(A3)**.

Продифференцируем $\pi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})=\sum p_k y_k(\boldsymbol{p})$ по $p_k$:

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}=y_k(\boldsymbol{p})+\sum_{s=1}^{l}p_s\frac{\partial y_s(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}=y_k(\boldsymbol{p})+\sum_{s=1}^{l}p_s\frac{\partial y_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_s}.$$

Второе равенство — следствие симметричности производных функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$. Так как $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ — положительно однородна нулевой степени, то по закону Эйлера

$$\sum_{s=1}^{l}p_s\frac{\partial y_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_s}=0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = y_k(\boldsymbol{p}).$$

Далее воспроизводим доказательство пункта **(1)** в обратном порядке.

**(3)**

Обозначим

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) = \nabla \pi(\boldsymbol{p}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — однородная первой степени функция и $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ — ее градиент, то по закону Эйлера

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, то в точке $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ при данных ценах $\boldsymbol{p}$ величина $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ всегда не меньше, чем $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}$ в любой точке $\boldsymbol{y} \in Y_\pi$. Если мы докажем, что при любых ценах $\boldsymbol{p} \geqslant 0$ точка $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ принадлежит множеству $Y_\pi = \{\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{p}'\boldsymbol{y} \leqslant \pi(\boldsymbol{p}')\ \forall \boldsymbol{p}' \geqslant 0\}$, то тем самым мы докажем, что $\pi(\boldsymbol{p})$ есть функция прибыли, соответствующая технологическому множеству $Y_\pi$.

То есть нам требуется показать, что $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) \leqslant \pi(\boldsymbol{p}')\ \forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \geqslant 0$.

График всякой выпуклой непрерывно дифференцируемой функция $\psi(\boldsymbol{r})$ лежит выше своей касательной, т.е. выполняется соотношение:

$$\psi(\boldsymbol{r}') \geqslant \psi(\boldsymbol{r}) + \nabla\psi(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + \nabla\pi(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\nabla\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, получаем требуемое для доказательства утверждения соотношение

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{p}'.$$

■

### Задачи

28. Известно, что при ценах $(1;2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(1;-1)$, а при ценах $(2;1)$ — вектор выпуска $(-1;1)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

29. Известно, что при ценах $(3;2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(2;-1)$, а при ценах $(2;3)$ — вектор выпуска $(1;-2)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

30. Известно, что при ценах $(1;4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4;3)$, при ценах $(1;1)$ — вектор выпуска $(0;0)$, а при ценах $(2;1)$ — вектор выпуска $(3;-4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-1;2)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

31. Известно, что при ценах $(1;4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4;3)$, при ценах $(1;1)$ — вектор выпуска $(0;0)$, а при ценах $(2;1)$ — вектор выпуска $(3;-4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-9;4)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

32. Сформулируйте аксиому выявленных предпочтений для модели производителя. Докажите, что если технологическое множество описывается строго вогнутой производственной функцией, то выбор производителя удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

33. Покажите, что выполняется соотношение $\Delta p^o \Delta y^o - \Delta \boldsymbol{w} \Delta \boldsymbol{r} \geqslant 0$.

34. Известно, что спрос потребителя удовлетворяет закону спроса только в случае благ, не являющихся товарами Гиффена, а спрос на факторы производства удовлетворяет закону спроса всегда. Какие особенности моделей рационального поведения производителя и потребителя предопределяют такие особенности их поведения?

35. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(\boldsymbol{p}) = p_1(\ln\frac{p_1}{p_2} - 1) + p_2.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

36. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(w, p^o) = p^{o\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (p^o \alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Найдите функцию спроса. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

## *Затраты и издержки*

Итак, мы изучили основные свойства модели рационального поведения производителя. В микроэкономике утвердилась также традиция описывать технологию посредством функции издержек, решая при этом задачу максимизиции прибыли в два этапа. На первом находится минимальные затраты (и соответствующая им технология), которые позволяют произвести данное количество продукции. Соответствующая зависимость между выпусками и этими (минимальными) затратами и называется функцией издержек. На втором, при известной функции издержек, при заданных ценах (или зависимостях этих цен от результатов производственной деятельности) на выпускаемую продукцию и (факторы производства) находится тот выпуск, которому соответствует максимальная прибыль. Такое разделение задачи "планирования" производства на два этапа представляется удобным исследовательским приемом, и особенно при исследовании моделей равновесия в производством, удовлетворяющим условиям постоянной отдачи от масштаба, а также при анализе моделей несовершенной конкуренции, когда поведение производителя оказывает влияние на рыночные цены.

В этом параграфе приведем соответствующие результаты относительно свойств функций издержек и связь этого понятия с теми понятиями, которые были рассмотрены выше.

В этом параграфе для упрощения обозначений вектор выпуска мы будем обозначать через $\boldsymbol{y}$ (вместо $\boldsymbol{y}^o$). Как и ранее, $\boldsymbol{r}$ — вектор соответствующих затрат.

### Множество требуемых затрат

**Определение 4.**

Для каждого вектора выпуска $\boldsymbol{y}$ **множество требуемых затрат** $V(\boldsymbol{y})$ — это множество векторов затрат, обеспечивающих этот выпуск при данном технологическом множестве $Y$, т.е.

$$V(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{r} \mid (-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) \in Y\}.$$

Из предполагаемых свойств $Y$ вытекают некоторые свойства множества $V(\boldsymbol{y})$ и соответствующего отображения $V(\cdot)$:

1. Из выпуклости $Y$ следует выпуклость множеств $V(\boldsymbol{y})$:

2. Из свободы расходования для $Y$ следует свобода расходования для множеств $V(\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{r} \in V(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{r}' \geqslant \boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{r}' \in V(\boldsymbol{y}).$$

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно.

Обычно предполагается **монотонность** отображения $V(\cdot)$, т. е. вложенность множеств $V(\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{y}' \Rightarrow V(\boldsymbol{y}') \subseteq V(\boldsymbol{y}).$$

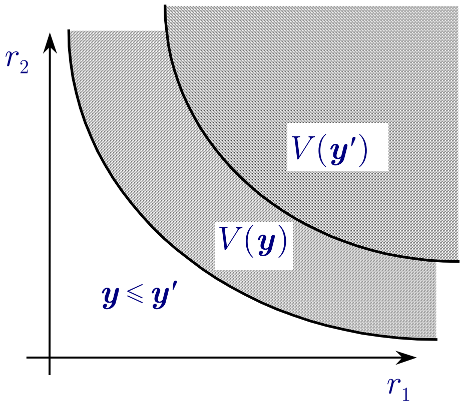


Рисунок 27. Монотонность $V(\cdot)$

Множества $V(\boldsymbol{y})$, как и $Y$, в предположении свободного расходования можно строить по производственной функции:

$$V(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{r} \mid f(\boldsymbol{r}) \geqslant y\}.$$

Обратно, в случае однопродуктовой технологии ($y \in \mathbb{R}$) можно определить на основе $V(\cdot)$ производственную функцию следующим образом:

$$f(\boldsymbol{r}) = \max_{y:\boldsymbol{r} \in V(y)} y.$$

**Теорема 13.**

Если отображение $V(\cdot)$ монотонно, то соответствующая производственная функция монотонна, а если к тому же множества $V(y)$ выпуклы, то она квазивогнута.

***Доказательство***:

Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.

■

В терминах множеств $V(y)$ можно определить **изокванты** для данной технологии

$$Q(y)=\{\boldsymbol{r}\in V(y)\,|\,\boldsymbol{r}\notin V(y'),\ \ \forall y'>y\}.$$

Это множество таких векторов затрат $\boldsymbol{r}$, которые позволяют произвести $y$, но не позволяют произвести больше $y$. Таким образом, изокванта $Q(y)$ — это граница множества $V(y)$.

Например, для производственной функции Кобба-Дугласа с двумя видами затрат имеем

$$Y=\{(-r_1,-r_2,y)\,|\,y\leqslant r_1^{\alpha}r_2^{1-\alpha}\},$$
$$V(y)=\{(r_1,r_2)\,|\,y\leqslant r_1^{\alpha}r_2^{1-\alpha}\},$$
$$Q(y)=\{(r_1,r_2)\,|\,y=r_1^{\alpha}r_2^{1-\alpha}\}.$$

Напомним, что через $\boldsymbol{w}$ мы обозначили цены затрачиваемых ресурсов (часть общего вектора цен $\boldsymbol{p}$, соответствующая $-\boldsymbol{r}$).

## Функция издержек

По аналогии с Задачей 3 рассмотрим следующую задачу

### Задача 4.

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}\to\min{}_{\boldsymbol{r}}$$
$$\boldsymbol{r}\in V(\boldsymbol{y}).$$

Обозначим множество цен факторов, на котором существует решение Задачи 4 при объеме выпуска $\boldsymbol{y}$, через $W(\boldsymbol{y})$.

**Определение 5.**

**Функция издержек** $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ — это значение целевой функции Задачи 4; для каждого вектора выпуска $\boldsymbol{y}$ и вектора цен факторов $\boldsymbol{w}\in W(\boldsymbol{y})$ она указывает минимальную величину издержек, при которых в соответствии с данной технологией можно произвести $\boldsymbol{y}$.

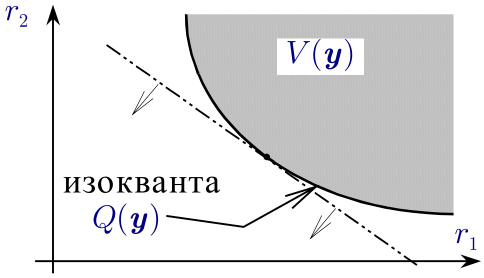


Рисунок 28. Построение функции издержек

Если технологическое множество задано производственной функцией $y\leqslant f(\boldsymbol{r})$, то Задача 4 примет вид:

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}\to\min{}_{\boldsymbol{r}}$$
$$y\leqslant f(\boldsymbol{r}).$$

Функция издержек обладает следующими свойствами.

**Теорема 14.** (Свойства функции издержек $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ выпуклой технологии)

Функция издержек $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$

(1) положительно однородна первой степени по ценам факторов:

$$c(\lambda \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = \lambda c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \ \forall y, \ \forall \boldsymbol{w} \in W(\boldsymbol{y});$$

(2) монотонна по ценам факторов и выпуску при ;

(3) вогнута по ценам на любом выпуклом подмножестве множества $W(\boldsymbol{y})$;

(4) непрерывна по ценам на внутренности множества $W(\boldsymbol{y})$, $\operatorname{int} W(\boldsymbol{y})$.

***Доказательство***:

Доказательство свойств (1), (3) и (4) аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.

Докажем только монотонность функции издержек.

$$\boldsymbol{w}' \geqslant\neq \boldsymbol{w} \Rightarrow c(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{y}) > c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \ \forall \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W(\boldsymbol{y}).$$

Пусть $\boldsymbol{r} > 0$ — оптимальные затраты при ценах факторов $\boldsymbol{w}$ и выпуске $\boldsymbol{y}$, т.е. $\boldsymbol{wr} = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$. Из $\boldsymbol{w}' \geqslant\neq \boldsymbol{w}$, следует, что $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{wr} < \boldsymbol{w}'\boldsymbol{r} \leqslant c(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{y})$.

■

В дальнейшем нам понадобится также понятие функции условного спроса.

**Определение 6.**

**Функция условного спроса** на факторы производства $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ есть оптимальное решение Задачи 4 при выпуске $\boldsymbol{y}$ и ценах факторов $\boldsymbol{w}$.

Заметим, что функция издержек и функция условного спроса на факторы производства определены для любого непустого замкнутого технологического множества $Y$.

**Теорема 15.** (Свойства функции условного спроса на факторы)

1) Функция условного спроса на факторы производства $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ однородна нулевой степени как функция цен факторов производства $\boldsymbol{w}$.

2) Если множество $V(\boldsymbol{y})$ строго выпукло, то $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — однозначная непрерывная функция $\boldsymbol{w}$.

***Доказательство***:

Доказательство этого утверждения аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Если, кроме того, функция издержек дифференцируема, то верна **лемма Шеппарда**, которая связывает издержки и функцию условного спроса на факторы.

**Теорема 16.**

Пусть функция издержек дифференцируема по ценам факторов при объеме производства $\boldsymbol{y}$.

Тогда для всех $\boldsymbol{w} \in \operatorname{int} W(\boldsymbol{y})$ выполнено

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})}{\partial w_i} = r_i(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$$

или

$$\nabla_w c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}).$$

***<u>Доказательство</u>***:

Зафиксируем цены факторов на уровне $\tilde{\boldsymbol{w}}\in\operatorname{int}W(\boldsymbol{y})$. Введем функцию на $W(\boldsymbol{y})$:

$$\gamma(\boldsymbol{w})=c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}(\tilde{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{y}).$$

По определению функции издержек и функции условного спроса $\gamma(\boldsymbol{w})$ достигает максимума, равного нулю, в точке $\tilde{\boldsymbol{w}}$:

$$\gamma(\boldsymbol{w})\leqslant 0 \ \text{ и } \ \gamma(\tilde{\boldsymbol{w}})=0.$$

Если функция издержек дифференцируема по ценам факторов, то функция $\gamma(\cdot)$ тоже дифференцируема. Поскольку точка $\tilde{\boldsymbol{w}}$ внутренняя в $W(\boldsymbol{y})$, то по условию первого порядка максимума градиент ее должен быть равен нулю:

$$\nabla\gamma(\tilde{\boldsymbol{w}})=\nabla_w c(\tilde{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{r}(\tilde{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}.$$

■

Как было указано выше, использование функции издержек позволяет рассматривать максимизацию прибыли как двухэтапную процедуру. На первом этапе по данной технологии и соответствующему множеству требуемых затрат строится функция издержек. На втором этапе решается задача выбора объема производства, максимизирующего прибыль, которая в этом случае рассчитывается как разница между **выручкой** и издержками:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}-c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\rightarrow\min_{\boldsymbol{y}\in Y^o}.$$

Здесь через $\boldsymbol{p}$ мы обозначили цены продукции, а через $Y^o$ — те объемы производства, которые допустимы при данном технологическом множестве (существуют затраты, которые вместе с $\boldsymbol{y}$ составляют допустимую технологию):

$$Y^o=\{\boldsymbol{y}\,|\,\exists\boldsymbol{r}\colon(-\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\in Y\}.$$

Это один из вариантов записи задачи производителя. Если функция издержек дифференцируема, и решение рассматриваемой задачи, $\bar{\boldsymbol{y}}$, является внутренним (т.е. $\bar{\boldsymbol{y}}\in\operatorname{int}Y^o$), то оно характеризуется следующим условием первого порядка:

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{w},\bar{\boldsymbol{y}})}{\partial y_k}=p_k\ \forall k,$$

или, в векторной записи,

$$\nabla_y c(\boldsymbol{w},\bar{\boldsymbol{y}})=\boldsymbol{p}.$$

Таким образом, оптимальный выпуск характеризуется тем, что предельные издержки равны цене.

На основе решения рассматриваемой задачи можно построить **функцию (отображение) предложения**. Она указывает оптимальный объем выпуска $\bar{\boldsymbol{y}}$ как функцию цен продукции $\boldsymbol{p}$ и цен факторов $\boldsymbol{w}$.

Обычно функции издержек используют в моделях частного равновесия (моделях квазилинейных экономик).

### Восстановление множества требуемых затрат

Построим по функции издержек $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ при некотором фиксированном объеме производства следующее множество:

$$V_c(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{wr} \geqslant c(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{y})\ \forall \boldsymbol{w} \geqslant 0\}.$$

При любом векторе выпуска $\boldsymbol{y}$ это множество является выпуклым по построению. Так как цены неотрицательны, то выполняется также следующее свойство, которое можно называть свойством свободы расходования производственных факторов:

$$V_c(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y}) + \mathbb{R}^n_+, \qquad (+)$$

т.е. если $\boldsymbol{r}$ принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{r}' \geqslant \boldsymbol{r}$, то $\boldsymbol{r}'$ также принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$.

Ясно, что множество требуемых затрат $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ могут не совпадать, если само исходное множество допустимых затрат $V(\boldsymbol{y})$ не является выпуклым или монотонным.

**Теорема 17.**

Пусть $V(\boldsymbol{y})$ выпуклое и удовлетворяющее свойству свободы расходования (+) множество. Тогда $V(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y})$.

***Доказательство***:

Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Отметим, что даже если множества $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ не совпадают друг с другом, это различие не существенно с точки зрения описания поведения производителя, поскольку $V_c(\boldsymbol{y})$ порождает ту же самую функцию издержек, что и $V(\boldsymbol{y})$.

**Теорема 18.**

Пусть $c^*(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — решение задачи

$$\boldsymbol{wr} \to \min\nolimits_{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{r} \in V_c(\boldsymbol{y}).$$

Тогда $c^*(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$.

***Доказательство***:

Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Заметим, что два эти утверждения — аналоги соответствующих результатов относительно связи $Y$ и $Y_\pi$, $\pi(\boldsymbol{p})$ и $\pi^*(\boldsymbol{p})$.

Это утверждение обосновывает возможность получения *некоторого* множества допустимых затрат $V_c(\boldsymbol{y})$, порождающего функцию издержек $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$. Но совпадение $V_c(\boldsymbol{y})$ и $V(\boldsymbol{y})$ возможно только в том случае, когда $V(\boldsymbol{y})$ удовлетворяет предположениям выпуклости и монотонности. Практический способ восстановления $V$ читатель может сконструировать сам.

## Задачи

37. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y^{1/2}(w_1 w_2)^{3/4}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да

♦ Нет

♦ Недостаточно информации

38. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = (y + 1/y)(w^1 w^2)^{1/2}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да

♦ Нет

♦ Недостаточно информации

39. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y(w_1 - (w_1 w_2)^{1/2} + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да

♦ Нет

♦ Недостаточно информации

40. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y(w_1 + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да

♦ Нет

♦ Недостаточно информации

41. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y \min\{w_1, w_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Да

♦ Нет

♦ Недостаточно информации

42. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y(aw_1 + bw_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ при положительных коэффициентах $a$ и $b$;

♦ если $a$ равно $b$;

♦ при любых коэффициентах $a$ и $b$ данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

43. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y \min\{aw_1, bw_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ при положительных коэффициентах $a$ и $b$;

♦ если $a$ равно $b$;

♦ при любых коэффициентах $a$ и $b$ данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

44. Функция $c(y, \boldsymbol{w}) = y w_1^a w_2^b$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ если сумма $a+b$ меньше или равна единицы

♦ при положительных коэффициентах $a$ и $b$, и если сумма $a+b$ меньше или равна единице

♦ при положительных коэффициентах $a$ и $b$, и если сумма $a+b$ больше единицы

45. Множество требуемых ресурсов на производство объема $y$ задается неравенством

$$a r_1 + b r_2 \geqslant y^2 \text{ при } a, b > 0.$$

Какой вид имеет соответствующая производственная функция?

Постройте функцию издержек.

46. Найдите функции издержек для следующих производственных функций:

а) $f(\boldsymbol{r}) = \cap_i r_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$,

б) $f(\boldsymbol{r}) = \sum_i a_i r_i^{\rho}$,

в) $f(\boldsymbol{r}) = \min\{r_i / a_i\}$,

г) $f(\boldsymbol{r}) = \sum_i a_i r_i$.

47. Предположим, что предприятие имеет строго вогнутую производственную функцию $f(\boldsymbol{r})$. Рассмотрим следующие две задачи:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{w}\boldsymbol{r} \to \min_{r} & \qquad f(\boldsymbol{r}) \to \max_{r} \\ y^* \leqslant f(\boldsymbol{r}) & \qquad \boldsymbol{w}\boldsymbol{r} \leqslant c^* \end{array}$$

Докажите следующие два утверждения:

I. Пусть $\boldsymbol{r}^*$ является решением первой задачи. Тогда $\boldsymbol{r}^*$ является решением второй задачи при $c^* = \boldsymbol{w}\boldsymbol{r}^*$.

II. Пусть $\boldsymbol{r}^*$ является решением второй задачи. Тогда $\boldsymbol{r}^*$ является решением первой задачи при $y^* = f(\boldsymbol{r}^*)$.

48. Предположим, что предприятие со строго вогнутой производственной функцией $f(\boldsymbol{r})$ имеет функцию издержек $c(\boldsymbol{w}, y)$. Докажите, что оптимальный объем производства в следующих двух задачах совпадает

$$\begin{array}{ll} py - \boldsymbol{w}\boldsymbol{r} \to \max_{y,r} & \qquad py - c(\boldsymbol{w}, y) \to \max_{r} \\ y \leqslant f(\boldsymbol{r}) & \end{array}$$

49. Доказать, что если функция издержек выпукла, то производителю выгоднее производить продукцию, чем закрыться (производить нулевой объем).

50. Докажите Теорему **13**.

51. Докажите Теорему **14**.

52. Докажите Теорему **15**.

53. Докажите Теорему **17**.

54. Докажите Теорему **18**.

55. Пусть функция издержек строго вогнута, и, кроме того, $c(0)=0$. Докажите, что данная функция издержек была порождена производственной функцией, которая в точках оптимального выбора производителя характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

56. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r)=r^{\alpha}$, вычислите функцию издержек. Покажите, что функция издержек однородна по цене фактора производства и выпукла по выпуску $y$.

57. Показать, что если производственная функция квазивогнута и обладает постоянной отдачей от масштаба, то функция предельных издержек не убывает по выпуску.

58. Покажите, что издержки фирмы возрастут, если цены на все выпускаемые этой фирмой продукты увеличатся пропорционально.

59. Покажите, что если производственная функция строго вогнута, то функция издержек строго выпукла.

## *Агрегирование в производстве*

Пусть существует $n$ фирм с технологическими множествами $Y_j$, $j=1,\ldots,n$. Зададимся вопросом о том, можно ли найти технологическое множество $Y_\Sigma$, такое чтобы производитель с таким технологическим множеством (**репрезентативный производитель** или агрегированный производитель) демонстрировал определенном смысле такое же поведение, как и $n$ исходных производителей.

Оказывается, что такое технологическое множество построить очень просто:

$$Y_\Sigma=\sum_j Y_j,$$

т.е.

$$Y_\Sigma=\{\sum_j \boldsymbol{y}_j \mid \boldsymbol{y}_j\in Y_j\}.$$

**Теорема 19.**

(1) Если при ценах $\boldsymbol{p}$ технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи $j$-го производителя, то технология

$$\bar{\boldsymbol{y}}_\Sigma=\sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j$$

является решением задачи агрегированного производителя при тех же ценах.

(2) Обратно, если $\bar{\boldsymbol{y}}_\Sigma$ является решением задачи агрегированного производителя, то найдутся технологии $\bar{\boldsymbol{y}}_j$, каждая из которых является решением задачи соответствующего производителя.

***Доказательство***:

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Как следствие указанного свойства, между функциями прибыли существует следующая связь:

$$\pi_\Sigma(\boldsymbol{p}) = \sum\nolimits_j \pi_j(\boldsymbol{p}).$$

Если $f_j(\cdot)$ — производственная функция $j$-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь производственную функцию $f_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum\nolimits_j f_j(\boldsymbol{r}_j) \to \max_{\{r_j \in R_j\}}$$

$$\sum\nolimits_j \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_\Sigma.$$

Можно показать, что построенная таким образом функция $f_\Sigma(\cdot)$ будет производственной функции, соответствующей агрегированному технологическому множеству $Y_\Sigma$.

Аналогично, если $c_j(\cdot)$ — функция издержек $j$-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь функцию издержек $c_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum\nolimits_j c_j(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}_j) \to \max_{\{\boldsymbol{y}_j \in Y_j^o\}}$$

$$\sum\nolimits_j \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{y}_\Sigma.$$

### Задачи

60. Докажите Теорему 19.

61. Докажите, что приведенный в этом параграфе способ агрегирования производственных функций корректен.

62. Докажите, что приведенный в этом параграфе способ агрегирования функций издержек корректен.

63. Технологические множества $n$ фирм одинаковы и состоят из двух технологий, $(0;0)$ и $(-1;1)$. Опишите агрегированное технологическое множество $Y_\Sigma$. Покажите, что усредненное технологическое множество $Y_\Sigma/n$ в пределе заполняет весь отрезок между $(0;0)$ и $(-1;1)$.

64. Повторите анализ предыдущей задачи для ситуации, когда технологические множества дополнены свободой расходования.

65. Технологические множества $n$ фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$(y_{j1}+1)^2+(y_{j2}+1)^2 \leqslant 2,\ j=1,\ldots,n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

66. Технологические множества $n$ фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$y_{j1}+y_{j2}^2 \leqslant 0,\ j=1,\ldots,n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

67. Для следующих производственных функций, $j=1,\ldots,n$, найдите агрегированную производственную функцию:

а) $f_j(r)=\alpha_j r$,

б) $f_j(r)=\alpha_j \ln(r+1)$,

в) $f_j(r)=\alpha_j \sqrt{r}$,

г) $f_j(r)=\alpha_j(1-\exp(-r))$,

68. Для следующих функций издержек, $j=1,\ldots,n$, найдите агрегированную функцию издержек:

а) $c_j(w,y)=w\alpha_j y$,

б) $c_j(w,y)=w\alpha_j(\exp(y)-1)$,

в) $c_j(w,y)=w\alpha_j y^3$,

г) $c_j(w,y)=-w\alpha_j \ln(1-y)$,

69. Фирма имеет $n$ заводов, издержки производства которых описываются следующими функциями: $c_i(w,y)=w\,\alpha_i\,y^2$, $i=1,\ldots,n$. Определите функцию издержек фирмы.

70. Фирма имеет два завода, издержки производства которых описываются следующими функциями $c_1(w,y)=w\,\alpha y^2$, $c_2(\boldsymbol{y})=w\,\beta y$. Определите функцию издержек фирмы.

### *ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ ИЗОКОСТАМИ И ИЗОКВАНТАМИ*

В заключение укажем на связь между двумя типами кривых: изоквантами в пространстве возможных издержек, определяемыми уравнениями типа $f(\boldsymbol{r})=y$ при разных $y$ и изокостами в пространстве возможных цен, определяемыми формулами типа $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})=\mathrm{const}$.

Для наглядности рассмотрим случай двух производственных факторов. Тогда при монотонной технологии можно рассматривать изокванту как функцию $r_2(r_1)$, а изокосту — как функцию $w_2(w_1)$. Эти зависимости задаются соответствующими соотношениями, определяющими их как неявные функции.

Из определения изокосты имеем

$$c(w_1{+}dw_1,\ w_2{+}dw_2,\ y)=c(w_1,\ w_2,\ y) \text{ или}$$

$$dw_1\frac{\partial c}{\partial w_1}+dw_2\frac{\partial c}{\partial w_2}=0$$

Тогда

$$\frac{dw_2}{dw_1}=-\frac{\dfrac{\partial c}{\partial w_1}(\boldsymbol{w},y)}{\dfrac{\partial c}{\partial w_2}(\boldsymbol{w},y)}=-\frac{r_1(\boldsymbol{w},y)}{r_2(\boldsymbol{w},y)}=-\frac{r_1^*}{r_2^*}$$

Аналогично получим соотношение для изокванты

$$\frac{dr_2}{dr_1}=-\frac{\dfrac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial r_2}}=-\frac{w_1}{w_2}.$$

Эти соотношения двойственности показывают, что чем больше кривизна изокосты, тем меньше кривизна изокванты, и наоборот. Действительно, на графиках видно, что если две точки, $\tilde{\boldsymbol{r}}$ и $\bar{\boldsymbol{r}}$ одного графика далеки друг от друга, а их касательные близки (малая кривизна, то есть сильная взаимозаменяемость затрат в производстве), то в двойственном графике соответствующие точки $\bar{\boldsymbol{w}}$, $\tilde{\boldsymbol{w}}$ будут характеризоваться, наоборот, близким положением, но сильно отличающимися касательными.

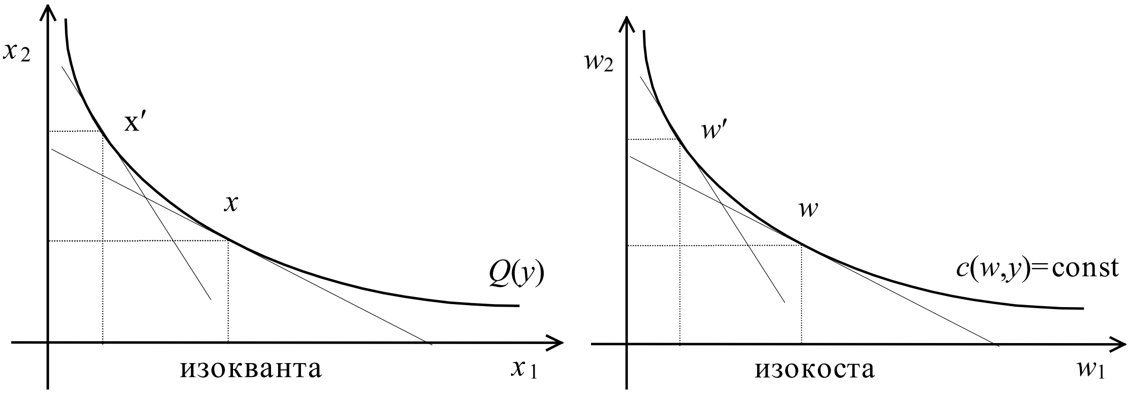
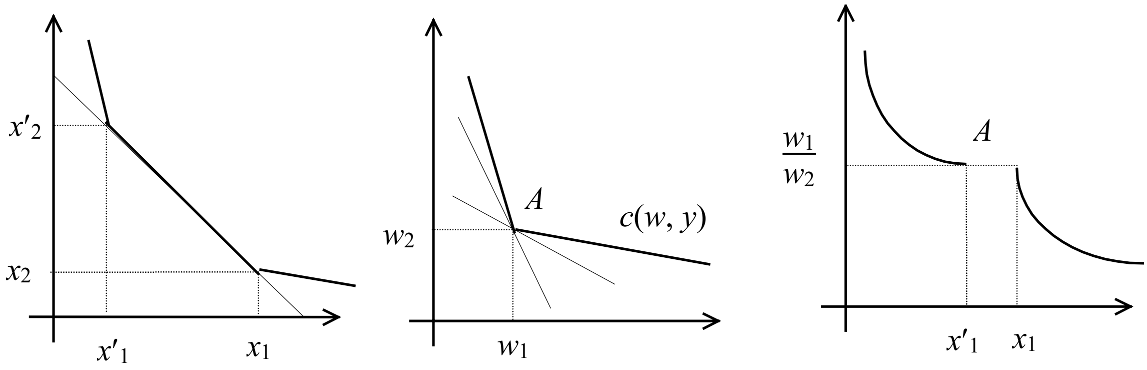


Рисунок 29 Связь между изокостами и изоквантами

При полной взаимозаменяемости затрат любой структуре затрат соответствует одна и та же структура цен (см. рис ниже). Таким образом, структура цен не определяет однозначно структуру затрат.



В любой точке отрезка производная одна и та же

Множество производных одной точке

Кривая спроса

Рисунок 30

И наоборот, если затраты жестко взаимодополняемы, то цены, при которых эти затраты минимизирую издержки, определяются неоднозначно.

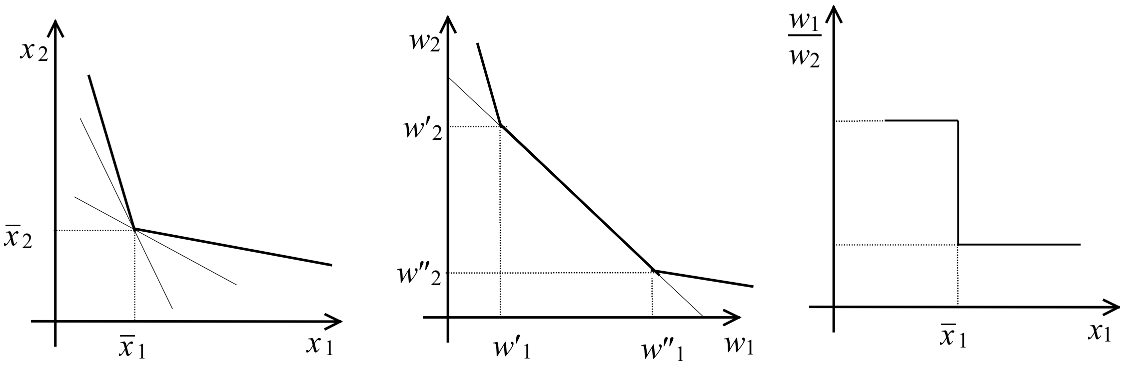


Рисунок 31. Ситуация, обратная предыдущей

Еще один «нерегулярный» случай— невыпуклость I*R*S — иллюстрирует нижеследующий рисунок.

При разных векторах цен $\boldsymbol{w}$ один и тот же $\boldsymbol{r}$.

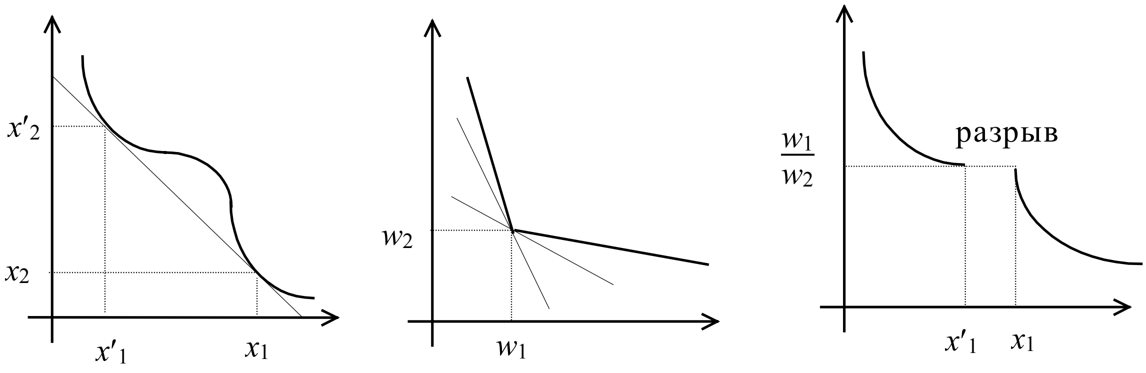


Рисунок 32. Изокванта не является выпуклой функцией

# 3. Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие

Анализ классических рынков уместно начать с перечисления характеристик рынков, при наличии которых их называют совершенными или классическими:

1) Отсутствие экстерналий — не опосредованных рынком влияний одних экономических субъектов на других. На поведение экономических субъектов поведение других экономических субъектов может влиять только через уровни цен и фиксированные денежные трансферты (например, получение потребителем прибыли с принадлежащих ему предприятий).

2) Существуют рынки всех благ, от которых зависят полезности потребителей и/или технологические множества производителей.

3) Существующие рынки является связанными: любое благо можно поменять на любое другое благо.

4) Совершенная конкуренция: каждый экономический субъект считает, что он не может повлиять на цены, принимает их как данные («достаточно мал»).

5) Нет издержек сделок, нет «рыночного трения». Цена покупки и цена продажи совпадают.

6) Совершенство информации. Уровни цен и характеристики обмениваемых благ известны каждому экономическому субъекту.

Реальные рынки далеки от совершенных рынков, однако их анализ выявляет некоторые эффекты, общие для всех рынков, и предваряет анализ несовершенных. В теоремах благосостояния мы покажем, что совершенный рынок как механизм согласования интересов экономических субъектов приводит к Парето-оптимальным исходам. В дальнейшем мы рассмотрим отдельные типы рыночных несовершенств и связанные с ними отклонения равновесий от Парето-оптимальности, то есть так называемые **фиаско рынка**.

## Классическая модель экономики. Допустимые состояния

Пусть имеются $l$ благ и $m$ потребителей. Каждый из потребителей характеризуется неоклассическими предпочтениями $\{\succ_i, \succeq_i, \sim_i\}$ на множестве $X_i$, а также принадлежащими ему **начальными запасами** $\omega_i$. Как правило в дальнейшем мы будем предполагать, что предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u_i(\cdot)$[51]. Множество $X_i$ — это множество всех тех наборов, которые потребитель (физически) в состоянии потребить. Обычно в микроэкономических моделях множество $X_i$ совпадает с неотрицательным ортантом: $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Но мы не вводим такой априорной предпосылки, рассматривая и ситуации, когда $X_i$ не совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Например, в ситуации, когда одним из благ является досуг, его потребление ограничено бюджетом времени потребителя. Другое ограничение может состоять в том, что потребление тех или иных благ не может быть ниже некоторой положительной пороговой величины («прожиточного минимума»). В ситуации, когда потребители сами создают некоторые блага, их можно моделировать отрицательными компонентами потребительских наборов.

Кроме того, пусть в экономике есть $n$ производителей (фирм), каждый из которых характеризуется производственным множеством $Y_j$ (множеством векторов чистого выпуска); $k$-

---

[51] Если неоклассические предпочтения непрерывны, то, в соответствии с теоремой Дебре, существует представляющая данные предпочтения непрерывная функция полезности $u_i(\cdot)$.

я компонента вектора $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$ показывает, сколько $k$-го блага выпускается $j$-м производителем. Технологические множества $Y_j$ в дальнейшем мы будем часто задавать в виде неявных производственных функций $g_j(\cdot)$. Напомним, что по определению $g_j(\cdot)$ называется неявной производственной функцией, если технология $\boldsymbol{y}_j$ принадлежит технологическому множеству $Y_j$ тогда и только тогда, когда $g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0$. Как и ранее, с целью упрощения изложения мы будем рассматривать только скалярные неявные производственные функции. Переформулировка рассматриваемых ниже теорем для случая векторных неявных производственных функций (т.е. технологических множеств, задаваемых несколькими ограничениями) не связана с какими-либо концептуальными трудностями.

Таким образом, классическая модель экономики задается следующими компонентами:

- $I = \{1, ..., m\}$ — множество потребителей,
- $J = \{1, ..., n\}$ — множество производителей (фирм),
- $K = \{1, ..., l\}$ — множество товаров (благ),
- $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ — множество допустимых наборов $i$-го потребителя,
- $\{\succ_i, \succsim_i, \sim_i\}$ — предпочтения потребителя или $u_i(\cdot)$ — функция полезности $i$-го потребителя ($u_i$: $X_i \mapsto \mathbb{R}$),
- $\omega_{ik}$ — начальный (до обмена) запас $k$-го блага у $i$-го потребителя,
- $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ — технологическое множество (множество допустимых технологий) $j$-го производителя, $g_j(\cdot)$ — неявная производственная функция ($g_j$: $\mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$).

Для описания состояния экономики используются следующие переменные:

- $x_{ik}$ — потребление $i$-м потребителем $k$-го блага ($k \in K$),
- $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, ..., x_{il})$ — потребительский набор $i$-го потребителя,
- $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_m)$ — потребительские наборы всех потребителей,
- $y_{jk}$ — производство $j$-м производителем $k$-го блага (это чистый выпуск, т.е. отрицательные компоненты соответствуют затратам),
- $\boldsymbol{y}_j = (y_{j1}, ..., y_{jl})$ — технология $j$-го производителя,
- $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_n)$ — набор технологий всех производителей.

Набор $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\{\boldsymbol{x}_i\}_{i \in I}, \{\boldsymbol{y}_j\}_{j \in J})$ называют состоянием экономики. Естественно рассматривать не все такие наборы, а только (физически) допустимые состояния экономики.

### Определение 1.

Под **допустимым состоянием экономики** принято понимать такую пару $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, что

✸ при всех $i \in I$ вектор $\boldsymbol{x}_i$ является допустимым набором для $i$-го потребителя (т.е. $\boldsymbol{x}_i \in X_i$),

✸ при всех $j \in J$ вектор $\boldsymbol{y}_j$ является допустимой технологией для $j$-го производителя (т.е. $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$),

✸ для экономики в целом выполнены балансы (общий объем потребления в экономике по каждому благу равен сумме общего объема производства и суммарных начальных запасов):

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} y_{jk}, \ \forall k \in K.$$

Отметим, что часто в моделях общего равновесия используются полубалансы:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{i\in I} \omega_{ik} + \sum_{j\in J} y_{jk},\ \forall k \in K.$$

При этом строгое неравенство должно означать, что в экономике осталось непотребленное благо. В рамках моделей с балансами в виде равенств возможность «выбрасывать» блага можно моделировать с помощью технологических множеств со свободой расходования по данным благам. В определенном смысле используемый здесь подход является более общим, поскольку позволяет моделировать блага, утилизация которых требует затрат ресурсов.

Любой механизм координации решений экономических субъектов должен приводить к допустимому состоянию экономики. Анализ экономического механизма включает описание условий, при которых он «работоспособен», и свойств тех допустимых состояний, к которым он может привести. Ниже мы проведем такое исследование для механизма ценовой координации совершенных рынков.

## Общее равновесие (равновесие по Вальрасу)[52]

В этом параграфе мы вводим понятие равновесия и обсуждаем ту роль, которую играет это понятие в неоклассическом анализе.

### Субъекты экономики в моделях общего равновесия

#### МОДЕЛЬ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Ниже через $p_k$ будем обозначать цену $k$-го блага, а через $\boldsymbol{p}$ вектор всех цен $(p_1, ..., p_l)$. Пусть потребитель $i \in I$, предпочтения $\succsim_i$ которого зависят только от собственного потребления $\boldsymbol{x}_i = \{x_{ik}\}_{k\in K}$, сталкивается с рыночными ценами $\boldsymbol{p}$ приобретаемых им благ. Как и ранее, мы предполагаем, что потребитель выбирает наилучший потребительский набор из тех, которые ему доступны, т.е. потребительских наборов, принадлежащих бюджетному множеству. Под бюджетным множеством подразумевается множество допустимых потребительских наборов, $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, удовлетворяющих бюджетному ограничению:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i = \sum_{k\in K} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i,$$

т.е. бюджетное множество имеет вид

$$B_i(\boldsymbol{p}, \beta_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \,|\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant \beta_i\}$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\cdot)$, где $\beta_i(\cdot)$ — функция, задающая доход потребителя. Способ формирования дохода зависит от конкретного варианта экономики. Например, в экономике обмена доход потребителя формируется за счет продажи по рыночным ценам его начальных запасов:

$$\beta_i(\boldsymbol{p}, \omega_i) = \boldsymbol{p}\omega_i = \sum_{k\in K} p_k \omega_{ik}.$$

В модели классических рынков предполагается, что начальные запасы $\omega_i$, цены, а также доходы из других источников не зависят от выбора потребителя (определяются экзогенно). Другими словами, потребитель считает, что не влияет на цены и свою исходную (до

---

[52] Развитие этой модели связано с такими именами как Адам Смит (1776), Давид Рикардо (1817), Леон Вальрас (1874,1883), Кеннет Эрроу и Жерар Дебрё (1950-е гг.).

торговли) собственность, принимая их как данные. Поэтому при описании выбора потребителя при заданных ценах будем считать, что доходы фиксированы.

Таким образом, набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является выбором потребителя, сталкивающегося с ценами $\boldsymbol{p}$ и имеющего доход $\beta_i$, если

1) набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ принадлежит бюджетному множеству, $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in B_i(\boldsymbol{p}, \beta_i)$;

2) любой потребительский набор $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ лучший, чем $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, не принадлежит бюджетному множеству, т.е. $\boldsymbol{x}_i \succ_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \Rightarrow \boldsymbol{x}_i \notin B_i(\boldsymbol{p}, \beta_i)$.

Если предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u_i(\cdot)$, то его выбор моделируется как решение задачи максимизации функции полезности по $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ при бюджетном ограничении. Таким образом, **задача потребителя** имеет вид

$$\begin{aligned} &u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max{}_{\boldsymbol{x}_i} \\ &\boldsymbol{x}_i \in B_i(\boldsymbol{p}, \beta_i). \end{aligned}$$

При дифференцируемости функций полезности можно охарактеризовать решение задачи потребителя, т.е. оптимальный для данного потребителя набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, при помощи теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме (см. Приложение).

Будем считать, что решение задачи потребителя внутреннее, т.е.[53]

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i).$$

Это позволяет не учитывать ограничение $\boldsymbol{x}_i \in X_i$.

Функция Лагранжа для задачи потребителя равна

$$L = u_i(\boldsymbol{x}_i) + \nu_i(\beta_i - \sum_{k \in K} p_k x_{ik}),$$

где $\nu_i$ — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что не все цены равны нулю) существует множитель Лагранжа $\nu_i \geqslant 0$, такой что в оптимуме

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \nu_i)}{\partial x_{ik}} = 0, \ \forall k \in K,$$

или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k, \ \forall k \in K.$$

Другими словами,

$$\nabla u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \nu_i \boldsymbol{p},$$

то есть градиент функции полезности коллинеарен вектору цен. Если предположить, что в решении задачи потребителя $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ не все производные функции полезности равны нулю, $\nabla u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \neq \mathbf{0}$, то $\nu_i > 0$. Такое решение задачи потребителя может иметь место только если цены, с которыми он сталкивается, не все равны нулю. Исключая множитель Лагранжа, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

---

[53] Напомним, что это означает, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ принадлежит $X_i$ вместе с некоторой своей окрестностью.

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik}}.$$

Следовательно, решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замещения любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи потребителя.

Это одно из условий первого порядка, т.е. необходимое условие максимума. Поскольку, как мы предположили, градиент не равен нулю, то $\nu_i > 0$, и по условию дополняющей нежесткости теоремы Куна—Таккера получаем, что бюджетное ограничение выходит на равенство:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i = \beta_i.$$

Это еще одно условие первого порядка.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое (внутреннее) решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи потребителя, если выполнено дополнительное условие, состоящее в том, что множество $X_i$ выпукло, а функция полезности $u_i(\cdot)$ вогнута.

Напомним, что $u_i(\cdot)$ называется вогнутой, если

$$u_i(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \alpha u_i(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)u_i(\boldsymbol{y})$$

для любого $\alpha \in [0,1]$ и любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

*Замечание*: На самом деле достаточно, чтобы данная функция полезности могла быть преобразована в вогнутую каким-либо монотонным (строго возрастающим) преобразованием. Монотонное преобразование функции полезности не меняет предпочтений потребителя. Так, например, функция $u(x,y) = xy$ и ее логарифм $\ln(u(x,y)) = \ln(x) + \ln(y)$ задают одни и те же потребительские предпочтения, хотя первая не вогнута, а вторая вогнута и допускает поэтому применение теоремы Куна—Таккера. Следовательно, допускает его и первая, приводимая к вогнутой.

Существуют и более слабые наборы условий, гарантирующие тот факт, что условие первого порядка приводят к решению задачи потребителя. Обычно они включают выпуклость предпочтений (или квазивогнутость представляющих их функций полезности) (см. задачу???). Мы приводим здесь более сильные, чем это необходимо, достаточные условия оптимальности, чтобы использовать в анализе хорошо известный читателям аппарат теории экстремальных задач — эффективное средство их анализа.

Отдельного рассмотрения требует случай, когда решение задачи потребителя не является внутренним. Пусть, например, $X_i = \mathbb{R}^l_+$ и потребление некоторых благ в решении задачи потребителя может быть равно нулю. Для получения дифференциальной характеристики такого решения опять можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера. Получаем, что оптимальный набор должен удовлетворять условиям

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant 0, \text{ причем } \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = 0, \text{ если } \bar{\boldsymbol{x}}_{ik} > 0, \ \forall k \in K.$$

или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant \nu_i p_k, \text{ причем } \frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k, \text{ если } \bar{\boldsymbol{x}}_{ik} > 0, \ k \in K.$$

### Модель производителя

При выборе объемов производства $\boldsymbol{y}_j = \{y_{jk}\}_{k\in K}$ каждая фирма $j \in J$ ограничена своим технологическим множеством $Y_j$.

В качестве целевой функции «классического» производителя берется его прибыль

$$\pi_j = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j = \sum_{k\in K} p_k y_{jk}.$$

В ситуации совершенной конкуренции производитель, как и потребитель, предполагает, что не может влиять на цены. Таким образом, задачей производителя является максимизации прибыли при технологических ограничениях:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max_{\boldsymbol{y}_j} \\ \boldsymbol{y}_j \in Y_j.\end{gathered}$$

Если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g_j(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\begin{gathered}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max_{\boldsymbol{y}_j} \\ g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0.\end{gathered}$$

При дифференцируемости функции $g_j(\cdot)$ решение этой задачи также можно охарактеризовать при помощи теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$L = \sum_{k\in K} p_k y_{jk} + \kappa_j g_j(\boldsymbol{y}_j),$$

где $\kappa_j$ — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, $\nabla g_j(\boldsymbol{y}_j) \neq \boldsymbol{0}$) существует множитель Лагранжа $\kappa_j \geqslant 0$, такой что в оптимуме

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \kappa_j)}{\partial y_{jk}} = 0,\ \forall k \in K,$$

или

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k,\ \forall k \in K.$$

Другими словами,

$$\kappa_j \nabla g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j) = \boldsymbol{p},$$

то есть градиент неявной производственной функции коллинеарен вектору цен. Если не все цены равны нулю ($\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$), то $\kappa_j > 0$. Исключая множитель Лагранжа $\kappa_j$, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk}}.$$

Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи производителя.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи потребителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g_j(\cdot)$ вогнута.

## Модели общего равновесия

Теперь модели отдельных экономических субъектов, потребителей и производителей, объединим в модели рынка (экономики) в целом. Такие модели называются **моделями общего равновесия** .

### *Модель обмена*

В случае, если экономика не содержит производства, то она называется **экономикой обмена**. Таким образом, экономика обмена характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, т.е.

$$\mathcal{E}_E = \{I, (X_i, \succsim_i, \omega_i)_{i\in I}\}.$$

В экономике обмена потребитель получает доход только от начальных запасов.

Введем теперь определение равновесия для экономики обмена.

**Определение 2.**

**Равновесием по Вальрасу в экономике обмена** $\mathcal{E}_E$ называется набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$, такой, что:

➔ каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя $i$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}$ $\omega_i$;

➔ $\bar{\boldsymbol{x}}$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_E$, следовательно, для всякого блага $k$ выполнено

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I} \omega_{ik}.$$

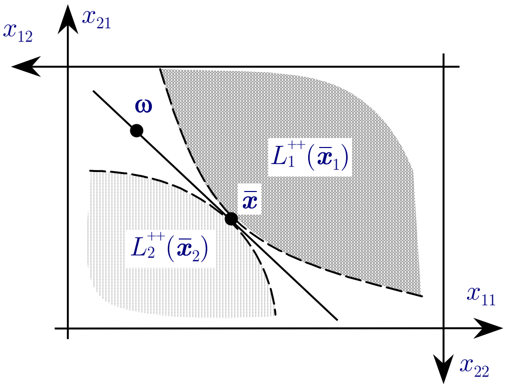


Рисунок 33. Иллюстрация равновесия на ящике Эджворта

Удобным инструментом для иллюстрации экономики обмена является диаграмма Эджворта (ящик Эджворта). Эта диаграмма позволяет наглядно представить экономику с 2 потребителями и 2 благами. Обычно предполагается, что множества допустимых потребительских наборов в такой экономике имеют вид $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{0}$. На диаграмме Эджворта потребление 1-го потребителя $(x_{11}, x_{12})$ представляется в обычной системе координат, а потребление 2-го потребителя $(x_{21}, x_{22})$ — в перевернутой с центром в точке $(\omega_{\Sigma1}, \omega_{\Sigma2})$, если смотреть из системы координат 1-го участника. Точка $(x_{11}, x_{12})$ в первой системе координат совпадет с точкой $(x_{21}, x_{22})$ во второй системе координат, что позволяет изобразить состояние $\boldsymbol{x}$ одной точкой на данной диаграмме.

Рис. 33 иллюстрирует на ящике Эджворта концепцию равновесия. Общая бюджетная прямая в равновесии проходит через точку начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$ и равновесный вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. У каждого потребителя множество $L_i^{++}(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ наборов, которые лучше, чем равновесный набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, лежит по соответствующую сторону от бюджетной прямой, так что это множество не имеет общих точек с бюджетным треугольником данного потребителя.

### *Модель Эрроу—Дебре*

Модель Эрроу—Дебре является развитием модели обмена и включает в себя, помимо потребителей, производственный сектор.

Особенностью модели является и то, что в ней специфицированы права собственности потребителей на владение фирмами, производящими продукцию. Таким образом, в модели предполагается, что все предприятия кому-то принадлежат, то есть каждый потребитель $i$ владеет долей $\gamma_{ij}$ предприятия $j$, причем $\sum_{i \in I} \gamma_{ij} = 1$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$.

Наличие производственного сектора влияет и на постановку задачи потребителя, поскольку доход потребителя складывается из того, что он может выручить от продажи начальных запасов и из его дохода от участия в прибыли. Поэтому доход потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и величинах прибыли $\pi_j$ равен

$$\beta_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \pi_j.$$

В целом **экономика Эрроу—Дебре** характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, множеством производителей, их производственными множествами и долями потребителей в прибыли фирм, т.е.

$$\mathcal{E}_{AD} = \{I, (X_i, \succsim_i, \omega_i)_{i \in I}, J, (Y_j)_{j \in J}, (\gamma_{ij})_{i \in I, j \in J}\}.$$

**Определение 3.**

**Равновесием по Вальрасу в экономике Эрроу—Дебре** $\mathcal{E}_{AD}$ называется набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой что:

➔ каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя $i$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}$ $\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j$;

➔ каждый вектор $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя $j$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

➔ $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_{AD}$, следовательно, для всякого блага $k$ выполнено

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk}.$$

Заметим, что условие допустимости состояния $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ означает выполнение балансов, что в контексте равновесия интерпретируется как равенство спроса и предложения[54].

Ясно, что экономика обмена является частным случаем экономики Эрроу—Дебре при отсутствии производства, а концепция равновесия в экономике обмена конкретизирует концепцию равновесия для экономики Эрроу—Дебре.

Удобно иллюстрировать равновесие экономики с производством на диаграмме, аналогичной ящику Эджворта (см. Рис. 34). Рассматривается экономика с одним потребителем, одним предприятием и двумя благами. Множество $\omega+Y$, состоящее из векторов $\omega+\boldsymbol{y}$, таких что $\boldsymbol{y}\in Y$, где $\omega$ — начальные запасы, $Y$ — технологическое множество, — это так называемое **множество производственных возможностей** экономики. Точка начальных запасов $\omega$ лежит на границе производственных возможностей (в предположении, что $\mathbf{0}$ лежит на границе технологического множества). Вектор $\bar{\boldsymbol{x}}=\omega+\bar{\boldsymbol{y}}$, соответствующий равновесию, тоже лежит на границе производственных возможностей. Через этот вектор проходит бюджетная прямая потребителя. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен. Множество лучших, чем $\bar{\boldsymbol{x}}$, точек лежит по противоположную сторону бюджетной прямой. Оно не имеет общих точек с бюджетным треугольником.

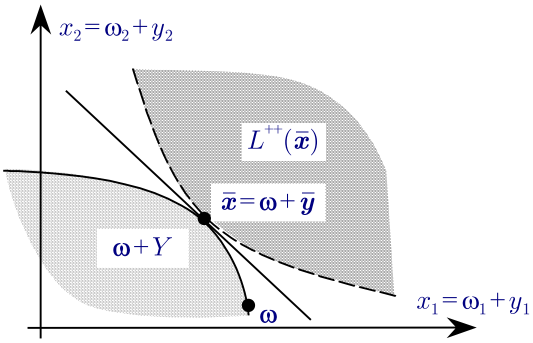


Рисунок 34. Иллюстрация равновесия в экономике с производством

### ЭКОНОМИКА С ТРАНСФЕРТАМИ

Если в экономике есть **трансферты** (перераспределение доходов между потребителями), то доход потребителя складывается из доходов от продажи начальных запасов, долях в прибыли фирм и трансфертов $S_i$:

$$\beta_i=\sum_{k\in K} p_k\omega_{ik}+\sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j+S_i.$$

Величина трансферта $S_i$ может быть как положительной так и отрицательной. Предполагается, что $S_i$ не зависит от выбора потребителя. Сумма трансфертов по всем потребителям должна быть равна нулю:

$$\sum_{i\in I} S_i=0.$$

---

[54] Если бы мы использовали вариант модели, о которой упоминалось выше — включающий балансы в виде неравенств (полубалансы), то в равновесии спрос мог бы быть ниже предложения. В таком случае определение равновесия потребовалось бы дополнить условием, что цены таких благ равны нулю. Более точно, потребовалось бы включить в определение равновесия закон Вальраса: $\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\bar{\boldsymbol{x}}_i=\bar{\boldsymbol{p}}\left(\sum_{i\in I}\omega_i+\sum_{j\in J}\bar{\boldsymbol{y}}_j\right)$. В противном случае «потери денег» в экономике приводили бы к существованию нереалистичных равновесий.

Дадим определение общего равновесия для общей модели **экономики с трансфертами**, задаваемой параметрами

$$\mathcal{E}_T = \{I, (X_i, \succsim_i, \omega_i, S_i)_{i\in I}, J, (Y_j)_{j\in J}, (\gamma_{ij})_{i\in I,\, j\in J}\}.$$

**Определение 4.**

**Равновесием по Вальрасу в экономике с трансфертами** $\mathcal{E}_T$ называется набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой что:

➔ каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя $i$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\, \omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i$;

➔ каждый вектор $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя $j$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

➔ $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_T$, следовательно, для всякого блага $k$ выполнено

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I} \omega_{ik} + \sum_{j\in J} \bar{y}_{jk}.$$

Экономика обмена и экономика Эрроу—Дебре являются частными случаями описанной здесь экономики с трансфертами.

## Некоторые свойства общего равновесия

Установим некоторые свойства равновесия, которые нам понадобятся в дальнейшем. При этом речь пойдет об общей модели экономики с производством и с трансфертами.

Простейшим свойством общего равновесия является то, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства. Действительно, сумма доходов потребителей равна

$$\sum_{i\in I} \beta_i = \sum_{i\in I} \boldsymbol{p}\omega_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \gamma_{ij} \boldsymbol{p} \boldsymbol{y}_j + \sum_{i\in I} S_i =$$

$$= \boldsymbol{p}\left(\sum_{i\in I} \omega_i + \sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j \sum_{i\in I} \gamma_{ij}\right) = \boldsymbol{p}\left(\sum_{i\in I} \omega_i + \sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j\right) = \boldsymbol{p} \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i,$$

где последнее равенство («закон Вальраса») является следствием выполнения балансов по благам. Таким образом, сумма доходов всех потребителей равна совокупным потребительским расходам. Это тождество выполняется для любого допустимого состояния экономики при любом векторе цен. Если бы хоть один потребитель не полностью израсходовал свой доход, то, сложив бюджетные ограничения, мы получили бы

$$\bar{\boldsymbol{p}} \sum_{i\in I} \bar{\boldsymbol{x}}_i < \sum_{i\in I} \beta_i,$$

и пришли бы к противоречию. Поэтому в равновесии $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \beta_i$ для любого потребителя $i \in I$.

В дальнейшем мы будем использовать также дифференциальные свойства равновесия.

Пусть функции полезности и производственные функции дифференцируемы, равновесие является внутренним, и в точке равновесия выполнено

$$\nabla u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \neq \mathbf{0} \;\; \forall i \in I.$$

Тогда существуют блага, цена которых не равна нулю. Поскольку потребительский набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя, а технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя, то выполняются следующие соотношения, называемые дифференциальной характеристикой равновесия:

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k}=\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik}},\ \forall i\in I,$$

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k}=\frac{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk}},\ \forall j\in J,$$

где $k$ — благо с ненулевой ценой.

Это необходимое условие равновесия. Из него следует, что в равновесии предельные нормы замещения (трансформации) любых двух благ $s$, $k$ для всех экономических субъектов совпадают. Так, на Рис. 33 в точке равновесия кривые безразличия касаются общей бюджетной прямой, а на Рис. 34 бюджетной прямой касаются граница производственных возможностей и кривая безразличия.

Другое необходимое условие равновесия, о котором говорилось выше, состоит в том, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства.

Выполнение этих двух условий для набора $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, где $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики, $\bar{\boldsymbol{p}}$ — вектор цен, не гарантирует, что этот набор представляет собой равновесие. Необходимые условия требуется дополнить условиями второго порядка — например, предположением о вогнутости функций полезности и производственных функций, чтобы превратить их в достаточные. Более подробно эти условия анализируются ниже при доказательстве второй теоремы благосостояния для дифференцируемых функций.

## Задачи

1. Назвать наиболее важные черты, по которым рынок называют совершенным или классическим: 1) от чего зависят предпочтения и потребительские множества, 2) влияние экономических субъектов на цены, 3) определенность информации, 4) влияние издержек сделок, 5) существование рынков.

2. Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, которые имеют следующие функции полезности и начальные запасы.

$$u_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{x_1{}^2} - \left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{y_1{}^2},\quad \omega_1 = (1, 0),$$

$$u_2(x_2, y_2) = -\left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{x_2{}^2} - \frac{1}{y_2{}^2},\quad \omega_2 = (0, 1).$$

Найдите равновесие в этой экономике. Единственно ли оно?

3. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$E_1(p_1, p_2) = -\frac{p_2}{p_1 + p_2} \qquad E_2(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

Является ли она однородной?

Является ли она непрерывной?

Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}\omega}{\boldsymbol{pa}}\boldsymbol{a} - \omega,$$

где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{l}_{++}$. Является ли она однородной? Является ли она непрерывной? Выполняется ли для нее закон Вальраса? Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

5. Пусть функции избыточного спроса на первые два товара в экономике с тремя благами имеют вид

$$E_1(\boldsymbol{p}) = -p_1/p_3 + p_2/p_3 + 1 \qquad \text{и} \qquad E_2(\boldsymbol{p}) = p_1/p_3 - 2p_2/p_3 + 2.$$

Найдите избыточный спрос на третий товар.

Может ли быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

6. Пусть экономика состоит из двух потребителей, и в ней обращаются два товара. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_1,y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} \qquad \text{и} \qquad u_2(x_2,y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}.$$

Потребители обладают начальными запасами в размере

$$\omega_1 = (a,b) \qquad \text{и} \qquad \omega_2 = (c,d).$$

Найдите равновесные цены и спрос потребителей как функции параметров a, b, c, d.

## *Теоремы существования общего равновесия*

Одним из наиболее важных вопросов, изучаемых при рассмотрении моделей общего равновесия, является вопрос существования равновесного распределения (более точно, равновесных распределений). В этом параграфе мы проиллюстрируем ряд стандартных способов доказательства существования равновесия в двух типах экономик: экономиках обмена и экономиках Эрроу—Дебре.

Способы доказательства существования равновесия основаны на демонстрации того факта, что некоторое, подходящим образом построенное, отображение имеет неподвижную точку, соответствующую состоянию равновесия, что, в свою очередь, опирается на варианты теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения некоторого компактного множества (обычно, множества цен) в себя, или на ее непосредственное обобщение — теорему Какутани о неподвижной точке точечно-множественного выпуклозначного отображения компактного множества в себя.

В наиболее простой версии доказательства построение такого отображения опирается на функцию (отображение) избыточного спроса $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$, то есть превышение спроса над предложением. Формальное определение избыточного спроса для различных типов экономик приводится ниже. Можно переформулировать определение равновесия в терминах избыточного спроса, поскольку, как нетрудно понять, равновесие существует тогда и только тогда, когда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, такой что $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, то есть такой набор цен, который уравновешивает спрос и предложение на всех рынках. В ситуации же, когда избыточный спрос определяется однозначно, равновесные цены удовлетворяют системе уравнений $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})=\mathbf{0}$.

Доказательство существования равновесия проводится в два этапа. Сначала доказывается, что определенные свойства функции избыточного спроса гарантируют существование равновесия. Далее, для экономик различных типов указываются условия (свойства предпочтений и т.д.), которые гарантируют выполнение данных свойств избыточного спроса.

### Существование общего равновесия в экономике обмена

Рассмотрим сначала экономику обмена. Для модели обмена функция избыточного спроса строится следующим образом. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}$ функция спроса (или, в общем случае, отображение спроса) $i$-го потребителя есть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \beta_i)$. Поскольку $\beta_i = \boldsymbol{p}\omega_i$, то будем рассматривать спрос как функцию только цен, т.е. $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ (в прежних обозначениях $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\omega_i)$). Тогда значение функции избыточного спроса при этих ценах показывает превышение спроса каждого товара при ценах $\boldsymbol{p}$ над начальными запасами потребителя. Значение избыточного спроса экономики при данных ценах есть сумма значений избыточного спроса для всех потребителей.

**Определение 5.**

**Функцией (отображением) избыточного спроса** в модели обмена называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I}(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \omega_i).$$

Покажем, что равновесными цены могут быть тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию $\mathbf{0} \in \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

Действительно, пусть $\mathbf{0} \in \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Это означает, что существуют потребительские наборы $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, такие что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \boldsymbol{x}_i(\bar{\boldsymbol{p}})$ $\forall i \in I$, другими словами для всех $i$, набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи $i$-го потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{\boldsymbol{p}}\omega_i$, и выполнено

$$\sum_{i\in I}(\bar{\boldsymbol{x}}_i - \omega_i) = \mathbf{0}.$$

Значит, пара $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ по определению является равновесием.

С другой стороны, если $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие, то $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \boldsymbol{x}_i(\bar{\boldsymbol{p}})$ $\forall i \in I$ и

$$\mathbf{0} = \sum_{i\in I}(\bar{\boldsymbol{x}}_i - \omega_i) \in \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}).$$

Рассмотрим другие свойства избыточного спроса.

Поскольку функции (отображения) спроса положительно однородны нулевой степени, т.е.

$$\boldsymbol{x}_i(\alpha\boldsymbol{p}, \alpha\beta) = \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \beta) \ \forall \alpha > 0,$$

то, как несложно проверить, функции (отображения) избыточного спроса также положительно *однородны нулевой степени*:

$$\boldsymbol{E}(\alpha\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \ \forall \alpha > 0,$$

Напомним, что в теории потребителя мы называли законом Вальраса соотношение $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \beta) = \beta$ для функции спроса. Аналогично для экономики в целом законом Вальраса называют равенство (являющееся следствием указанного соотношения)

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=0,$$

которое выполняется на некотором множестве цен.

Пусть $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\omega_i)\ \forall i \in I$, и, следовательно $\sum_{i\in I}(\boldsymbol{x}_i-\omega_i) \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$. Тогда в соответствии с **законом Вальраса**

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}(\boldsymbol{x}_i-\omega_i)=0.$$

Закон Вальраса, вообще говоря, выполняется не в любой экономике и не при любых ценах. Однако, если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то можно гарантировать его выполнение при любых ценах, для которых определена величина избыточного спроса. Действительно, если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то его спрос удовлетворяет закону Вальраса, т.е. он полностью израсходует свой доход:

$$\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\omega_i) \Rightarrow \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{p}\omega_i\ \forall \boldsymbol{p}.$$

Складывая эти равенства по всем потребителям, получаем закон Вальраса для экономики в целом.

Перейдем теперь к вопросу существования равновесия. Сначала мы рассмотрим условия существования равновесия в экономике, в которой решение задачи каждого потребителя единственно при любых ценах, и, следовательно, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ является функцией.

Поскольку функции избыточного спроса положительно однородны нулевой степени, то если $\bar{\boldsymbol{p}}$ — равновесный вектор цен, то $\lambda\bar{\boldsymbol{p}}$ — также равновесный вектор цен при любом $\lambda>0$ и наоборот. Т.е. равновесный вектор цен определяется с точностью до нормировки цен. Ниже будут рассмотрены ситуации, в которых гарантируется существование равновесия с положительными ценами. Поэтому равновесный вектор цен будем искать в следующем множестве цен (симплексе цен):

$$\mathcal{S}^{l-1}=\{\boldsymbol{p}\geqslant\boldsymbol{0}\,|\,\sum_{k\in K}p_k=1\}.$$

При этом каждому вектору цен $\boldsymbol{p}$ из $\mathbb{R}^l_+$ (за исключением нулевого вектора) можно однозначно сопоставить вектор $\lambda\boldsymbol{p}$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ при некотором $\lambda>0$. Этот способ нормировки цен удобен тем, что множество $\mathcal{S}^{l-1}$ компактно (что, как мы увидим ниже, позволяет непосредственно использовать теорему Брауэра).

Следующее утверждение указывает свойства функции избыточного спроса, которые гарантируют существование равновесия.

### Теорема 1.

Предположим, что функция $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=0$ является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_+$, $\boldsymbol{p}\neq 0$, положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса $\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=0$.

Тогда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}\in\mathbb{R}^l_+$, $\bar{\boldsymbol{p}}\neq 0$ такой, что $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})\leqslant 0$.

***<u>Доказательство</u>***:

Определим на множестве $\mathcal{S}^{l-1}$ следующую систему функций:

$$g_k(\boldsymbol{p})=\frac{p_k+\max\{0,\, E_k(\boldsymbol{p})\}}{1+\sum_{s\in K}\max\{0,\, E_s(\boldsymbol{p})\}},\ k\in K.$$

Функция $\boldsymbol{g}(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра: она отображает компактное множество $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя по построению и является непрерывной, так как построено путем операций, сохраняющих непрерывность. Поэтому существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, являющийся неподвижной точкой функции $\boldsymbol{g}(\cdot)$:

$$\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \bar{\boldsymbol{p}},$$

т.е.

$$\bar{p}_k = g_k(\bar{\boldsymbol{p}}) = \frac{\bar{p}_k + \max\{0, E_k(\bar{\boldsymbol{p}})\}}{1 + \sum_{s\in K}\max\{0, E_s(\bar{\boldsymbol{p}})\}}, \ \forall k \in K.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\bar{p}_k \sum_{s\in K} \max\{0, E_s(\bar{\boldsymbol{p}})\} = \max\{0, E_k(\bar{\boldsymbol{p}})\} \ \forall k \in K.$$

Умножим каждое из этих равенств на $E_k(\bar{\boldsymbol{p}})$ и сложим:

$$\sum_{k\in K} \bar{p}_k E_k(\bar{\boldsymbol{p}}) \sum_{s\in K} \max\{0, E_s(\bar{\boldsymbol{p}})\} = \sum_{k\in K} E_k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\boldsymbol{p}})\}.$$

В соответствии с законом Вальраса первый сомножитель левой части данного соотношения равен нулю, поэтому

$$\sum_{k\in K} E_k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\boldsymbol{p}})\} = 0.$$

Величина $E_k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ равна либо $0$, либо $(E_k(\bar{\boldsymbol{p}}))^2$. Поскольку каждое из слагаемых неотрицательно, то сумма может быть равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что $E_k(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant 0 \ \forall k \in K$.

■

Правило «пересчета» структуры цен, используемое в приведенном доказательстве,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) \to \boldsymbol{p},$$

имитирует возможную реакцию органа, ответственного за ценообразование, на неравновесия на рынках благ. В соответствии с ним цена дефицитного блага увеличивается на величину, пропорциональную дефициту. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы новый вектор цен был элементом множества $\mathcal{S}^{l-1}$.

Рассмотрим теперь, какие условия на предпочтения гарантируют нам выполнение предположений вышеприведенного утверждения. Предположим, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Тогда непрерывность предпочтений гарантирует существование решений задач потребителя, по крайней мере, на множестве строго положительных цен ($\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$). Локальная ненасыщаемость предпочтений гарантирует выполнение закона Вальраса ($\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0$). Строгая выпуклость предпочтений обеспечивает единственность решения задачи потребителя.

Непрерывность и строгая выпуклость предпочтений в случае экономики обмена гарантирует непрерывность функции совокупного спроса на множестве цен и позволяет говорить о том, что система функций $\{E_k(\boldsymbol{p})\}$ для этой экономики является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ при $\omega_i > \boldsymbol{0}$. Более того, если $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, то по закону Вальраса $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0$.

Правда, указанными свойствами функции совокупного спроса и, следовательно, функции избыточного спроса обладают только на множестве положительных цен, тогда как в доказательстве утверждения требуется выполнение аналогичных свойств на множестве всех неотрицательных цен. Описанный ниже прием позволяет в ряде случаев обойти это затруднение.

Модифицируем задачу потребителя, введя дополнительно к бюджетному ограничению количественное ограничение (квоту на потребление) по каждому продукту следующего типа:

$$x_{ik} \leqslant \omega_{\Sigma k} + \varepsilon,\ i \in I,\ k \in K.$$

где $\omega_{\Sigma k}$ — совокупные запасы благ в экономике, $\varepsilon$ — произвольная положительная константа.

Модифицированное таким образом бюджетное множество каждого потребителя оказывается компактным при любом векторе цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$, и поэтому в случае непрерывных предпочтений всегда существует наиболее предпочитаемый потребительский набор. В случае, когда предпочтения строго выпуклы, этот набор единственный, и таким образом, оказываются определенными модифицированные функции спроса $\boldsymbol{x}^*_i(\boldsymbol{p})$ и, следовательно, модифицированная функция избыточного спроса $\boldsymbol{E}^*(\cdot)$. В случае, когда функция $\boldsymbol{E}^*(\cdot)$ оказывается непрерывной, Теорема 1 гарантирует существование вектора цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при котором выполняется соотношение

$$\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}.$$

Выполнение соотношения $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, гарантирует тогда существование равновесия в исходной модели.

Непрерывность функции $\boldsymbol{E}^*(\cdot)$ на $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$ можно гарантировать, например, в случае, когда предпочтения потребителей непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы потребителей строго положительны ($\omega_i > \boldsymbol{0}$). Показать это можно способом, аналогичным доказательству непрерывности функции спроса на множестве цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ (см. главу, посвященную поведению потребителя).

Покажем теперь, что при $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$ определен избыточный спрос исходной задачи $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, и выполнено $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

Пусть $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Тогда $(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}}))$ — равновесие в модифицированной модели. Поскольку

$$x^*_{ik}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} - \sum_{s \neq k} x^*_{is}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} < \omega_{\Sigma k} + \varepsilon,$$

то дополнительно введенные нами ограничения несущественны, т.е. $(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}}))$ и $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. (Аналогичным образом можно показать, что если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$).

Покажем теперь, что если существует потребитель, предпочтения которого монотонны, то $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, т.е. цена любого блага окажется положительной. Действительно, предположение о том, что существует благо $k$, цена которого равна нулю, противоречит тому факту, что $\boldsymbol{x}^*_i(\bar{\boldsymbol{p}})$ является выбором потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$.

На основе этих рассуждений получаем следующую теорему существования равновесия в модели обмена.

**Теорема 2.**

Рассмотрим экономику обмена. Предположим, что $X_i = \mathbb{R}^l_+\ \forall i$, предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы всех потребителей положительны ($\omega_i > \boldsymbol{0}\ \forall i$). Предположим также, что существует потребитель, предпочтения которого монотонны. Тогда существует равновесие такое, что $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ .

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать прием, состоящий во введении количественных ограничений, в ситуации, когда начальные запасы хотя бы одного из потребителей не содержат хотя бы одного блага. Как показывает приведенный ниже пример, в этом случае функция избыточного спроса может не быть непрерывной на границе множества цен.

**Пример 1.** (Контрпример к теореме в случае нулевых начальных запасов одного из благ).

Пусть в экономике обмена есть только два блага ($l=2$), функции полезности потребителя $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{i2}},$$

а начальные запасы равны $\omega_i = (0;1)$. Очевидно, что предпочтения рассматриваемых потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы.

Задача потребителя состоит в том, чтобы максимизировать $u_i(x_{i1}, x_{i2})$ при следующих ограничениях:

$$p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} \leqslant p_2,$$

$$x_{i1} \geqslant 0,\ x_{i2} \geqslant 0.$$

При $p_1, p_2 \neq 0$ спрос потребителя на второе благо равен

$$x_{i2}(p_1, p_2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

Таким образом, $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$, когда $p_2 \to 0$. Но если $p_2 = 0$, то полезность можно сделать неограниченно большой, увеличивая $x_{i2}$ (спрос на второе благо бесконечен). Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p_2 = 0$.

Покажем, что в этой экономике равновесие не существует.

При $p_1, p_2 \neq 0$ спрос потребителя на первое благо равен

$$x_{i1}(p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{p_1(p_1 + p_2)},$$

т.е. положителен. Значит, при положительных ценах равновесия быть не может, так как в экономике первое благо отсутствует. Если же цена на одно из благ равна нулю, то соответствующий спрос бесконечен, и равновесия при этих ценах тоже нет.

Заметим, что модифицированная функция избыточного спроса не является непрерывной. При $p_1, p_2 \neq 0$ спрос потребителя такой же, как в исходной модели, и $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$ при $p_2 \to 0$. Но при $p_2 = 0$, спрос на второе благо равен $1 + \varepsilon$. Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p_2 = 0$, и приведенное доказательство существования «не работает».

⇦

Если в приведенном примере дать хотя бы одному из потребителей ненулевой запас первого блага, то, хотя избыточный спрос по прежнему не будет непрерывным, но равновесие существует. (Доказательство этого оставляем читателю в качестве упражнения). Таким образом, вышеприведенные условия на избыточный спрос являются довольно ограничительными.

Ниже приводится другой вариант теоремы существования с более слабыми условиями на избыточный спрос. Доказательство этого утверждения состоит в указании правила процесса ценообразования (отличного от описанного выше), имитирующего поведение ценообразующего органа, которое порождает отображение множества цен $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, удовлетворяющее теореме Какутани (о существовании неподвижной точки выпуклозначного замкнутого отображения компактного множества в себя).

**Теорема 3.**

Предположим, что функция $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ непрерывна на $\mathcal{S}_+^{l-1} = \{\mathbf{p} > \mathbf{0} \mid \sum\limits_{k \in K} p_k = 1\}$.
- $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ положительно однородна нулевой степени на $\mathcal{S}_+^{l-1}$.
- Выполнено тождество $\mathbf{p}\mathbf{E}(\mathbf{p}) = 0 \ \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ (закон Вальраса).
- Функции избыточного спроса ограничены снизу, т.е. существует число $t$, такое что

$$E_k(\mathbf{p}) > t \ \ \forall k, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}.$$

- Если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности, т.е. если $\{\mathbf{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}^0$ при $n \to \infty$, причем существует благо $k'$, такое что $\overset{0}{p}_{k'} = 0$, то

$$\max\nolimits_k \, (E_k(\mathbf{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда существует вектор $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, такой что $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = 0$.

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство условно разобьем на три этапа:

1. Построение отображения единичного симплекса $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя.

2. Проверка замкнутости графика и выпуклозначности построенного отображения и применение к нему теоремы о неподвижной точке.

3. Демонстрация того, что найденная неподвижная точка является вектором равновесных цен, рассматриваемой экономики.

**<u>Этап 1</u>.** Каждой цене $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ сопоставим множество

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid \mathbf{q}\mathbf{E}(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}) \ \ \forall \mathbf{q}' \in \mathcal{S}^{l-1}\},$$

и тем самым построим отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ из $\mathcal{S}_+^{l-1}$ в $\mathcal{S}^{l-1}$. Другими словами, значение отображения $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$) — множество всех векторов цен, максимизирующих стоимость избыточного спроса, вычисленного при старых ценах $\mathbf{p}$. Можно заметить, что любому неравновесному вектору цен $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ (т.е. в данном случае вектору $\mathbf{p}$ такому, что $\mathbf{E}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$) данное отображение ставить в соответствие подмножество (грань меньшей размерности) симплекса цен, а любому равновесному вектору — весь симплекс цен.

На границе симплекса цен $\mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$ определим $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ по правилу:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid \mathbf{q}\mathbf{p} = 0\} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid q^k = 0, \text{ если } p^k > 0\}.$$

Отметим, что множество $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ непусто при любом $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}$.

**<u>Этап 2</u>.** Выпуклозначность построенного отображения очевидна в силу того, что условия, определяющие множества $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, линейны. Таким образом, для доказательства существования неподвижной точки остается показать, что отображение $\boldsymbol{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Предположим, что последовательности $\{\boldsymbol{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\{\boldsymbol{q}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ с пределами $\boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{q}^0$ соответственно таковы, что $\boldsymbol{q}^n \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$. Покажем, что $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$. Возможны две ситуации: (1) $\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{S}_+^{l-1}$, (2) $\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$.

В случае $\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ существует $N$, такое, что при $n > N$ выполнено $\boldsymbol{p}^n \in \mathcal{S}_+^{l-1}$. При $n > N$ выполнено

$$\boldsymbol{q}^n \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \geqslant \boldsymbol{q}' \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \ \forall \boldsymbol{q}' \in \mathcal{S}^{l-1}.$$

Переходя к пределу, получим, что $\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0) \geqslant \boldsymbol{q}' \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0)$. Тем самым мы показали, что в этом случае $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$. Пусть $k$ — благо, для которого $p_k^0 > 0$. Покажем, что при достаточно больших $n$ выполнено $q_k^n = 0$. Тем самым мы покажем, что $q_k^0 = \lim q_k^n = 0$, и, следовательно, $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Если $\boldsymbol{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$, то по определению отображения $\boldsymbol{g}(\cdot)$ имеем $q_k^n = 0$. Таким образом, нам осталось доказать в случае $\boldsymbol{p}^n \in \mathcal{S}_+^{l-1}$, что если $p_k^0 > 0$, то при достаточно больших $n$ выполнено $q_k^n = 0$. По закону Вальраса имеем

$$p_k^n E^k(\boldsymbol{p}^n) = -\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n)$$

Используя ограниченность снизу функции избыточного спроса, имеем

$$-\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -t \sum_{k' \neq k} p_{k'}^n = -t\,(1 - p_k^n).$$

Отсюда

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -\frac{t(1 - p_k^n)}{p_k^n}.$$

Поскольку $p_k^n$ сходится к положительному пределу, это означает, что значение $E^k(\boldsymbol{p}^n)$ ограничено сверху. С другой стороны, величина $\max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ стремится к бесконечности. Поэтому при достаточно больших $n$ выполнено неравенство

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) < \max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $n$ вектор $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$ должен иметь $q^k = 0$. Действительно, согласно определению $\boldsymbol{g}(\cdot)$ для любого вектора $\boldsymbol{q}'$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\boldsymbol{q}' \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$. Однако, если бы $q^k > 0$, то при $E^k(\boldsymbol{p}^n) < \max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ мы могли бы построить на основе вектора $\boldsymbol{q}$ вектор $\boldsymbol{q}'$ для которого $\boldsymbol{q}' \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$.

Тем самым мы полностью доказали, что отображение $\boldsymbol{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Поскольку отображение $\boldsymbol{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график, выпуклозначно и отображает непустое компактное выпуклое множество $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, то к нему применима теорема Какутани, и существует неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^{l-1}$:

$$\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}}).$$

**<u>Этап 3.</u>**

Покажем, что неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(\cdot)$ является вектором цен равновесия.

Неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}}$ отображения $\boldsymbol{g}(\cdot)$ не может принадлежать границе симплекса цен ($\mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$). Этот факт следует из того, что согласно определению $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ для $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$ при всех $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ должно быть выполнено равенство $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = 0$. Если бы $\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$, где $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^{l-1} \backslash \mathcal{S}_+^{l-1}$, то мы имели бы $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} = \| \bar{\boldsymbol{p}} \|^2 = 0$. Этому условию удовлетворяет только точка $\bar{\boldsymbol{p}} = \mathbf{0}$, не принадлежащая симплексу цен.

Таким образом, $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \mathbf{0}$ и поэтому, как было отмечено при определении отображения, $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \mathbf{0}$. Покажем это формально.

Предположим противное. В силу закона Вальраса, если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \mathbf{0}$, то существуют $s$ и $s'$ такие, что $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > 0$ и $E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}}) < 0$. Поскольку $\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \mathbf{0}$, то по определению $\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ для любого $\boldsymbol{q} \in \mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \geqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Однако, так как $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}})$, то достаточно взять следующий вектор $\boldsymbol{q}$: $q^s = \bar{p}^s + \bar{p}^{s'}$, $q^{s'} = 0$, $q^k = \bar{p}^k$, $k \neq s, s'$, чтобы получить $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Мы пришли к противоречию.

Тем самым мы доказали существование цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при которых избыточный спрос равен нулю.

■

Данное доказательство можно проиллюстрировать графически.

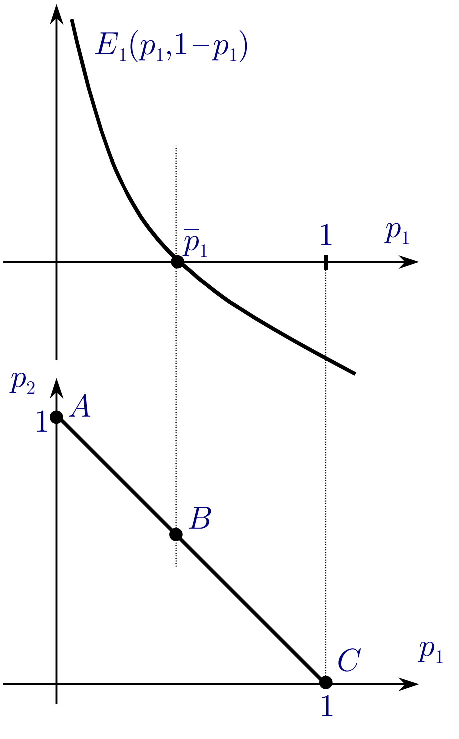


Рисунок 35. Иллюстрация доказательства теоремы существования

На данном рисунке $B$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(\cdot)$. Данное отображение определено на симплексе $AC$, и отображает точки отрезка $AB$, за исключением точки $B$, в точку $C$, точки отрезка $BC$, за исключением точки $B$, — в точку $A$, а точку $B$ — во весь симплекс (отрезок $AC$).

Опираясь на доказанную Теорему 3, можно показать, что в моделях обмена при непрерывности, строгой выпуклости и строгой монотонности предпочтений потребителей равновесие существует, если *совокупные* начальные запасы строго положительны, т.е. $\omega_\Sigma \gg 0$. Это утверждение очевидно, в силу того, что функция избыточного спроса в модели обмена при данных условиях на предпочтения потребителей является непрерывной, однородной первой степени и удовлетворяет закону Вальраса на $\mathcal{S}_+^{l-1}$. Ограниченность избыточного спроса снизу следует из того факта, что спрос потребителей неотрицателен и выполнены балансы (в качестве константы $t$ можно взять $t = -\max_k\{\omega_\Sigma^k\}$).

Для того, чтобы продемонстрировать выполнение условий Теоремы 3 для случая непрерывных, строго выпуклых и строго монотонных предпочтений, осталось показать выполнение последнего условия теоремы: если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности. Покажем это формально.

В силу того, что $\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\omega_\Sigma \gg 0$, имеем, что $\boldsymbol{p}^0\,\omega_\Sigma > 0$. Таким образом, существует потребитель $i$, такой, что $\boldsymbol{p}^0\,\omega_i > 0$. Следующее утверждение показывает, что спрос этого потребителя, по крайней мере, на одно из благ стремится к бесконечности по мере того, как $\boldsymbol{p}^n$ стремиться к $\boldsymbol{p}^0$, т.е.

$$\max_k (x_i^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty,$$

что и доказывает, что

$$\max_k (E^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

**Теорема 4.**

Пусть $\{\boldsymbol{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ — последовательность цен, причем $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}^0$ при $n\to\infty$, и существует благо $k$, такое что $p_k^0 = 0$.

Предположим, что:

- Потребитель имеет строго монотонные непрерывные предпочтения.
- Начальные запасы потребителя $\omega$ таковы, что $\boldsymbol{p}^0\omega > 0$.

Тогда

$$\max_k (x^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

***Доказательство***:

Предположим противное. Пусть спрос потребителя на все товары, ограничен, т.е. существует некоторое число $\boldsymbol{K}$, такое, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$. В силу того, что бесконечная последовательность на компакте имеет точки сгущения, найдется некоторая подпоследовательность $\{\boldsymbol{p}^{n_l}\}$, такая, что:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Так как $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ — оптимальное решение задачи потребителя, а предпочтения строго монотонны, то при ценах $\boldsymbol{p}^{n_l}$ выполняется закон Вальраса, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) = \boldsymbol{p}^{n_l}\omega.$$

Переходя в этом тождестве к пределу, получим, $\boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\omega$. Пусть $p_k^0 = 0$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где $\sigma$ — некоторое строго положительное число. В силу того, что предпочтения потребителей непрерывны, найдется такое $\delta>0$, что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где $\hat{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k - \delta\boldsymbol{e}^s$, а $s$ — номер товара, для которого $\boldsymbol{p}_s^0 > 0$. Очевидно также, что

$$\boldsymbol{p}^0\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma p_k^0 - \delta p_s^0 = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} - \delta p_s^0 < \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}}.$$

В силу непрерывности отношения предпочтения имеем, что существует $N$ такое, что для каждого $l > N$ $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$.

Так как $\boldsymbol{p}^{n_l} \to \boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}$, то

$$\lim \boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^0(\bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0.$$

Из определения предела следует, что найдется число $M$ такое, что для каждого $l$ большего $M$ справедливо, что $\boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0$, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) > \boldsymbol{p}^{n_l}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Таким образом, мы получили, что при $l > \max\{M, N\}$ набор $\hat{\boldsymbol{x}}$ строго лучше набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ и при этом стоит дешевле. Тем самым мы получили противоречие с оптимальностью набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$. Таким образом, не существует $\boldsymbol{K}$ такого, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$, т.е. $\max_k (x_k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty$ при $n\to\infty$.

■

Резюмируя проделанные выше рассуждения, сформулируем утверждение о существовании равновесия в экономике обмена при более слабых, чем ранее, предположениях.

**Теорема 5.**

Рассмотрим экономику обмена и предположим, что $X_i = \mathbb{R}^l_+ \ \forall i$, предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы и монотонны, а совокупные начальные запасы положительны ($\omega_\Sigma \gg 0$). Тогда в этой экономике существует равновесие такое, что $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$.

## Существование равновесия в экономике Эрроу—Дебре

Аналогичным образом определяется избыточный спрос в модели Эрроу—Дебре. Кроме начальных запасов и спроса следует учитывать также предложение благ, $\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p})$.

По аналогии с моделью обмена **законом Вальраса** для экономики Эрроу—Дебре называют следующее равенство:

$$\boldsymbol{p}\sum_i x_i^k = \boldsymbol{p}\sum_j y_j^k + \boldsymbol{p}\sum_i \omega_i^k,$$

которое выполняется для некоторого множества цен.

**Определение 6.**

**Функцией (отображением) избыточного спроса** в модели Эрроу—Дебре называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I}(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \omega_i) - \sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p}).$$

Вообще говоря, избыточный спрос является точечно-множественным отображением, но в ситуации, когда предпочтения строго выпуклы. Выше мы установили условия, когда совокупный спрос потребителя является непрерывной функцией. Если, в дополнение к этим условиям, технологическое множество каждого производителя является строго выпуклым, как предложение, так и совокупный избыточный спрос также являются непрерывными функциями. В этом случае мы можем для доказательства существования равновесия использовать аналоги утверждений предыдущего пункта. Так, в случае, когда технологические множества представляются производственными функциями, последние должны быть строго вогнутыми. Наиболее простой и часто рассматриваемый в экономической теории тип производственной функций, гарантирующий существование и непрерывность функции предложения на множестве неотрицательных цен, — неоклассическая производственная функция, «первичных» факторов производства, предложение которых ограничено. Характерным примером этого типа функций является функция Кобба-Дугласа, зависящая от труда и капитала.

Для ситуаций, когда предпочтения не являются строго выпуклыми, а технологические множества — строго выпуклыми, ниже будет предложено утверждение (о существовании квазиравновесия), на основе которого могут быть установлены различные условия существования равновесия (доказаны теоремы о существовании равновесия) в модели Эрроу—Дебре.

Предваряя это утверждение, сформулируем вспомогательную задачу, решение которой существует при более слабых предположениях, чем решение задачи потребителя, но при определенных условиях совпадает с ним.

**Задача ϒ (модифицированная задача потребителя)**

Найти $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, такой что

- $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i$,

- $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ не хуже, чем любой другой набор $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, который стоит в ценах $\boldsymbol{p}$ дешевле, чем $\beta_i$.

Введем сначала следующее вспомогательное понятие.

**Определение 7.**

Набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ называется **квазиравновесием** экономики Эрроу-Дебре, если выполняются следующие условия:

✸ Для каждого потребителя $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ удовлетворяет условиям Задачи ϒ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходах $\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum\limits_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j$.

✸ $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи $j$-го производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$.

✸ Выполнены полубалансы по каждому благу:

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_j \bar{y}_j^k + \sum_i \omega_i^k \qquad \forall k.$$

Условия существования квазиравновесия оказываются особенно простыми и описываются в приведенной ниже Теореме 6. С другой стороны состояние квазиравновесия является при некоторых предположениях о предпочтениях состоянием равновесия. Поэтому представляется удобным вначале установить условия существования квазиравновесия, а затем использовать их вместе с дополнительными предположениями, для доказательства существования равновесия в конкретных моделях экономики.

**Теорема 6.**

Предположим, что:

1) Множество $Z = (\sum_j Y_j + \sum\limits_i \boldsymbol{\omega}_i) \cap \mathbb{R}_+^l$ непусто, замкнуто и ограничено, (т.е. существует $N$ такое, что если $\boldsymbol{z} \in Z$, то $z_k \leqslant N$, $k = 1, ..., l$).

2) Предпочтения $\succeq_i$ выпуклы и непрерывны, $X_i$ — выпуклое замкнутое множество, ограниченное снизу, $\mathbf{0} \in X_i$, начальные запасы неотрицательны, $\omega_i \geqslant \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, n$.

3) $Y_j$ — выпуклое замкнутое множество и $\mathbf{0} \in Y_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Тогда в этой экономике существует квазиравновесие $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такое что $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$.

***Доказательство***:

Как и в предыдущих доказательствах, мы будем искать квазиравновесие как неподвижную точку некоторого специальным образом сконструированного отображения из множества $\Theta = \bigcap_{i=1}^{m} \hat{X}_i \times \bigcap_{j=1}^{n} \hat{Y}_j \times \mathcal{S}^{l-1}$ в себя. Здесь

$$\hat{X}_i = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{x}_i \leqslant N + \varepsilon\},$$

$$\hat{Y}_j = \{\boldsymbol{y}_j \in Y_j \mid |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N + \varepsilon\},$$

$$\mathcal{S}^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \geqslant 0 \mid \textstyle\sum_k p^k = 1\}.$$

Заметим, что каждое из этих множеств непусто, замкнуто и ограничено, поэтому их произведение $\Theta$ тоже непусто, замкнуто и ограничено.

Определим отображение $\boldsymbol{g}(\cdot)\colon \Theta \to \Theta$ следующим образом:

$$\boldsymbol{g}(\theta) = \bigcap_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_{xi}(\theta) \times \bigcap_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}_{yj}(\theta) \times \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{p}}(\theta).$$

Где компоненты отображения $\boldsymbol{g}(.)$ определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{g}_{xi}(\theta) = \{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}_i' \succeq \boldsymbol{x}_i'' \ \forall\, \boldsymbol{x}_i'' \in \hat{X}_i\colon \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i'' < \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\},$$

где

$$\beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) = \max\{0, \textstyle\sum_j \gamma_{ij} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\} + \boldsymbol{p}\omega_i,$$

$$\boldsymbol{g}_{yj}(\theta) = \{\boldsymbol{y}_j' \in \hat{Y}_j \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j' \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j'' \ \forall\, \boldsymbol{y}_j'' \in \hat{Y}_j\},$$

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{p}}(\theta) = \{\boldsymbol{p}' \in \mathcal{S}^{l-1} \mid (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'')(\sum_i \boldsymbol{x}_i - \sum_j \boldsymbol{y}_j - \sum_i \omega_i) \geqslant 0 \ \forall\, \boldsymbol{p}'' \in \mathcal{S}^{l-1}\}.$$

Заметим, что такое определение бюджета гарантирует непустоту бюджетного множества $\{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\}$ при любых ценах $\boldsymbol{p}$ и производственных планах $\boldsymbol{y}$.

Пусть $\bar{\theta} = \{\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{p}}\}$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$, т.е.

$$\bar{\theta} \in \boldsymbol{g}(\bar{\theta}).$$

Докажем, что $\bar{\theta}$ является квазиравновесием рассматриваемой экономики.

Поскольку каждый производственный план $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, то $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant 0$ и поэтому $\beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \sum_j \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}}\, \bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i$.

Сложив неравенства

$$\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \textstyle\sum_j \gamma_{ij} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}\omega_i$$

по всем потребителям, получим, что для экономики в целом выполнено соотношение:

$$\bar{\boldsymbol{p}} \sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \bar{\boldsymbol{p}} \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}} \sum_i \omega_i.$$

Покажем теперь, что выполняются балансовые соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum_i \omega_i \leqslant 0$$

Действительно, если хотя бы одна из компонент данного вектора была положительна, то положительной была бы и стоимость дефицита — величина $\bar{\boldsymbol{p}}\,(\sum\bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum\bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum\omega_i)$ (поскольку цены $\bar{\boldsymbol{p}}$, выбраны ценообразующим органом так, чтобы максимизировать эту величину). Но мы только что доказали, что данная величина не положительна.

Остается показать, что количественные ограничения в условиях, определяющих отображения $\boldsymbol{g}_{xi}(\cdot)$ и $\boldsymbol{g}_{yj}(\cdot)$ несущественны, в то смысле, что решения соответствующих задач потребителя и производителя одни и те же, как при наличии ограничений

$$\boldsymbol{x}_i \leqslant N+\varepsilon, |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N+\varepsilon,$$

так и при их отсутствии.

Пусть это не так, и существует, например, такой набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$, что $\bar{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{x}}_i < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$.

Поскольку выполняются соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \sum_i \omega_i \leqslant N,$$

то дополнительное количественное ограничение в точке $\bar{\boldsymbol{x}}_i^k$ должно быть выполнено как строгое неравенство:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i^k < N+\varepsilon.$$

На отрезке, соединяющем $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, найдется набор $\boldsymbol{x}_i'$ (достаточно близкий к $\bar{\boldsymbol{x}}_i$), такой что $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\boldsymbol{x}_i' < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$ и $\boldsymbol{x}_i' \leqslant N+\varepsilon$. Поскольку отношение $\succeq_i$ выпукло, то $\boldsymbol{x}_i' \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$, а это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \boldsymbol{g}_{xi}(\bar{\theta})$.

Похожим образом доказывается, что $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ максимизирует прибыль на всем множестве $Y_j$.

Таким образом, $\bar{\theta}$ действительно является квазиравновесием.

Для доказательства теоремы осталось проверить, что построенное отображение множества $\Theta$ в себя имеет замкнутый график, что устанавливается рассуждениями, аналогичными уже проделанным ранее (в Частях 1, 2).

■

На основе данного утверждения можно устанавливать существование равновесий при дополнительных предположениях, гарантирующих, что найденное квазиравновесие является равновесием, т.е. удовлетворяет следующим двум условиям:

1) каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i;$$

2) для всякого блага $k$ выполнены балансы

$$\sum_{i\in I}\bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}.$$

Мы сформулируем соответствующие утверждения, предоставив их доказательство читателю.

Во-первых, заметим, что при определенных условиях если $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие, то каждый потребительский набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является самым дешевым из тех, которые не хуже для этого потребителя, чем $\bar{\boldsymbol{x}}_i$. Следующая теорема описывает такие условия.

### Теорема 7.

Предположим, что предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, и $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи $\Upsilon$ при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\beta_i$.

Тогда

(1) потребительский набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ минимизирует затраты в ценах $\boldsymbol{p}$ на достижение уровня благосостояния, определяемого вектором $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, т.е. решает следующую задачу

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \min$$

$$\boldsymbol{x}_i \succsim_i \bar{\boldsymbol{x}}_i;$$

(2) потребительский набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ удовлетворяет соотношению:

$$\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \beta_i;$$

(3) если множество $X_i$ выпукло, предпочтения потребителя непрерывны, и существует[55] $\boldsymbol{x}_i \in X_i$: $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i < \beta_i$, то $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя.

***Доказательство***:

Доказательство Теоремы 7 оставляется в качестве упражнения.

■

Следствием Теоремы 7 являются следующие результаты, которые позволяют получать различные теоремы существования в модели Эрроу—Дебре на основе Теоремы ???.

### Теорема 8.

Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in X_i \subseteq \mathbb{R}^l_+$ — выпуклое множество, предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго монотонны. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\omega_i \geqslant \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^{m} \omega_i > \mathbf{0}$.

Тогда $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие по Вальрасу.

### Теорема 9.

Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in X_i$ — выпуклое множество, предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и монотонны. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\omega_i > \mathbf{0}$.

Тогда существует такое состояние экономики, $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ — равновесие по Вальрасу.

### Теорема 10.

---

[55] Такой $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ существует, например, при условии, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ и $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$.

Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$, $X_i$ — выпуклое множество, предпочтения потребителей локально ненасыщаемы и непрерывны, и совокупное технологическое множество $\sum_j Y_j$ удовлетворяет свойству свободы расходования[56]. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\omega_i > \mathbf{0}$.

Тогда существует такое состояние экономики, $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ — равновесие по Вальрасу.

### Задачи

7. В экономике распределения (в отличие от экономики обмена) задается вектор совокупных начальных запасов $\omega_\Sigma$ и доход $R_i$ каждого потребителя, т.е.

$$\mathcal{E}_D = \{(X_i, u_i(\cdot))_{i \in I;}\ \omega_\Sigma, (R_i)_{i \in I}\}$$

Под (общим) равновесием в экономике распределения мы будем понимать пару

$\{\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}\} = \{\boldsymbol{p}, \{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i \in I}\}$, такую, что:

— $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$,

— каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходах $R_i$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{x_i \in \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p},\ \omega_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant R_i\}$.

— состояние $\bar{\boldsymbol{x}}$ является допустимым, в частности, выполнены балансы по благам, т.е. $\forall k$

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^k = \sum_i \omega_i^k.$$

— $\boldsymbol{p}\,\omega_\Sigma = \sum_i R_i$

Показать, что в экономике распределения с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются следующими функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$$

не существует равновесия при $R_1 = 1$, $R_2 = 0$, и $\omega_\Sigma = (2, 1)$.

8. Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$, $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\omega_i > \mathbf{0}$. Покажите, что если предпочтения потребителей описываются леонтьевскими функциями полезности, то существует такое состояние экономики, $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ — равновесие по Вальрасу.

9. Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\boldsymbol{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{p}} \neq \mathbf{0}$, $X_i = \mathbb{R}^l_+$, предпочтения потребителей строго выпуклы, непрерывны и монотонны. Пусть

---

[56] Для выполнения этого условия достаточно, чтобы технологическое множество хотя бы одного производителя удовлетворяло условию свободы расходования.

также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\omega_i \geqslant \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^{m} \omega_i > \mathbf{0}$. Покажите, что это квазиравновесие является равновесием по Вальрасу.

10. Предположим, что все продукты производятся на основе первичных факторов, которые принадлежат потребителям и совокупные запасы которых положительны. Предположим также, что каждая фирма является однопродуктовой, ее технология описывается производственной функцией Кобба-Дугласа, а также что каждый продукт производится какой-то фирмой. Покажите, что если $\sum_{i=1}^{m} \omega_i \geqslant \mathbf{0}$, то для этой экономики выполняется условие, что множество $Z = (\sum_j Y_j + \sum_i \omega_i) \cap \mathbb{R}_+^l$ непусто, замкнуто и ограничено.

Какие дополнительные условия гарантируют существование квазиравновесия (равновесия) в такой экономике?

11. Показать, что в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями,

описываемыми следующими функциями полезности

$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}$, $\qquad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$,

не существует равновесия при $\omega_1 = (1, 1)$, $\omega_2 = (0, 1)$.

12. Рассмотрим экономику обмена с двумя благами и тремя потребителями, которые имеют следующи**Ошибка! Закладка не определена.**е функции полезнос**Ошибка! Закладка не определена.**ти и положительные начальные запасы.

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = e^{x_{11}} x_{12}$$

$$u_2(x_{21}, x_{22}) = \sqrt{x_{21}} + \sqrt{x_{22}}$$

$$u_3(x_{31}, x_{32}) = \min\{x_{31}, x_{32}\}$$

(1) Найдите функции спроса потребителей, опишите их свойства.

(2) Найдите функции избыточного спроса и проверьте, что они являются положительно однородными нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса.

(3) При каких начальных запасах известные вам утверждения гарантируют существование равновесия в этой экономике?

(4) Вычислите равновесие при следующих начальных запасах:

$$\omega_1 = (2, 3) \qquad \omega_2 = (1, 4) \qquad \omega_3 = (2, 1)$$

13. Рассмотрим экономику с $l$ благами и $m$ потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \sqrt{x_{ik}}\,, \ \alpha_{ik} > 0.$$

При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в этой экономике?

14. Рассмотрим экономику с $l$ благами и $m$ потребителями, предпочтения которых представляются функции полезности Кобба—Дугласа.

При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в этой экономике?

15. Рассмотрим экономику с $l$ благами и $m$ потребителями. Предпочтения первых $m-1$ потребителей представляются функциями полезности Кобба—Дугласа. Предпочтения $m$-го потребителя представляется линейной функцией полезности: $u_m(\boldsymbol{x}_m)=\sum_{k=1}^{l}\alpha_k x_{mk}$, $\alpha_k \geqslant 0$. Совокупные начальные запасы всех благ положительны.

(1) При каких значениях $\alpha_k$ можно гарантировать существование равновесия в этой экономике при любых начальных запасах?

(2) Пусть $\alpha_k=0$ при $k\neq l$ и $\alpha_l=1$, и начальные запасы имеют вид первых $m-1$ потребителей не содержат благо $l$. Найдите равновесие в этой экономике.

16. Вычислите квазиравновесия в следующей модели обмена:

В экономике есть только два блага ($l$=2), функции полезности потребителей $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\omega_i = (0, 1)$.

17. Покажите, что в модели обмена (с $m$ потребителями) с совпадающими, строго выпуклыми предпочтениями и совпадающими начальными запасами, равновесное распределение, если существует, единственно. Можно ли гарантировать при этом единственность равновесия

Каким будем такое распределение?

18. Покажите, что в модели обмена (с $m$ потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, и совпадающими начальными запасами, равновесие, если существует, единственно.

Какими будут при этом равновесные цены и равновесное распределение?

Какие дополнительные предположения относительно модели гарантируют существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

19. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.

Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

20. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы

совпадают.

Гарантирует ли выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

21. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

22. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.

Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

23. Предположим, что предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают, а совокупное производственное множество содержит нулевой вектор чистых выпусков.

Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений тот факт, что равновесные распределения (если существуют) совпадают с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

24. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают и содержат все блага в положительном количестве. Будет ли равновесное распределение (если существует) совпадать с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

## Парето-оптимальные состояния экономики и их характеристики

Вопрос о том, является ли данное состояние экономики, например равновесие, экономически эффективным, можно решать на основе того, принадлежит ли данное состояние границе Парето.

**Определение 8.**

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ является **Парето-улучшением** для допустимого состояния $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ или, другими словами, **доминирует его по Парето**, если для каждого потребителя $i \in I$ выполнено $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \boldsymbol{x}_i$ и существует хотя бы один потребитель $i_0$ для которого $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \boldsymbol{x}_{i_0}$.

**Определение 9.**

Допустимое состояние экономики $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ называется **Парето-оптимальным**, если для него не существует Парето-улучшений[57].

Множество оптимальных по Парето состояний образует **границу Парето**, $\mathcal{P}$, экономики.

Проиллюстрируем понятие оптимальности по Парето с помощью диаграммы Эджворта (см. Рис. 36). Парето-оптимальность состояния $\hat{\boldsymbol{x}}$ равносильна тому, что множества $L_1^{+}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$ не имеют общих точек и множества $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{+}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$ не имеют общих точек на ящике Эджворта. Здесь $L_i^{+}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, которые не хуже для потребителя $i$, чем набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, а $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, кото-

---

[57] Эта концепция оптимальности была предложена итальянским экономистом Вильфредо Парето в 1906 г. в книге *Manuale di economia politica*.

рые лучше, чем набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Для оптимальности достаточно, чтобы множества $L_1^+(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^+(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ имели только одну общую точку — $\hat{\boldsymbol{x}}$.

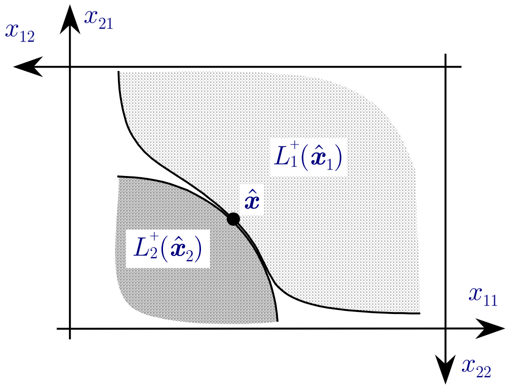


Рисунок 36. Иллюстрация Парето-оптимальности на ящике Эджворта

## Характеризация границы Парето через задачу максимизации взвешенной суммы полезностей

Чтобы находить границу Парето удобно пользоваться вспомогательной задачей. Сопоставим каждому из потребителей число $\alpha_i \geqslant 0$, такое что $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$, и рассмотрим следующую задачу максимизации взвешенной суммы полезностей на множестве допустимых состояний экономики:

Задача поиска оптимума Парето

$$\sum_{i\in I}\alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max{}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$$
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{E}. \qquad (\mathcal{P}^\alpha)$$

Здесь $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{E}$ означает, что $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}$.

Чтобы показать связь этой задачи с Парето-границей, введем также вспомогательное понятие слабой Парето-границы.

**Определение 10.**

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}})$ является **строгим Парето-улучшением** для допустимого состояния $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ или, другими словами, **строго доминирует его по Парето**, если для каждого потребителя $i\in I$ выполнено $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \boldsymbol{x}_i$.

**Определение 11.**

Допустимое состояние экономики $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит **слабой границе Парето**, $\mathcal{WP}$, если не существует другого допустимого состояния, которое строго доминирует его по Парето.

Очевидно, что по определению обычная (сильная) граница Парето $\mathcal{P}$ всегда содержится в слабой границе Парето $\mathcal{WP}$, т.е. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{WP}$.

**Теорема 11.**

(1) Если $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ — решение задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$, то $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, а если, кроме того, $\alpha_i > 0\ \forall i \in I$, то $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит (сильной) границе Парето.

(2) Пусть множества $X_i$ выпуклы, функции полезности $u_i(\cdot)$ непрерывны и вогнуты, технологические множества $Y_j$ выпуклы. Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то найдутся такие неотрицательные $\alpha_i$ ($\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$), что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является решением задачи ($\mathcal{P}^\alpha$).

***<u>Доказательство</u>***:

(1) Предположим, что существует решение задачи ($\mathcal{P}^\alpha$), $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$, которое не принадлежит слабой границе Парето. Тогда найдется такое допустимое состояние $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, что $u_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall i \in I$. При этом значение целевой функции задачи ($\mathcal{P}^\alpha$) будет выше в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}$, чем в точке $\hat{\boldsymbol{x}}$, а это противоречит тому, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — решение задачи ($\mathcal{P}^\alpha$). Доказательство для случая положительных коэффициентов и обычной (сильной) границы Парето полностью аналогично.

(2) Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето. Введем обозначение

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}_1), \ldots, u_n(\boldsymbol{x}_n))$$

и рассмотрим следующее множество:

$$U^- = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{E}\colon \boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\}.$$

Множество $U^-$ непусто, так как $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in U^-$. Покажем, что $U^-$ — выпуклое множество. Пусть $\boldsymbol{v}' \in U^-$ и $\boldsymbol{v}'' \in U^-$. Это означает, что существуют состояния экономики $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in \mathcal{E}$ и $(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'') \in \mathcal{E}$, такие что $\boldsymbol{v}' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')$ и $\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'')$. Покажем, что

$$\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U^-, \text{ если } \beta \in (0;1).$$

Несложно показать, что

$$(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'', \beta\boldsymbol{y}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}'') \in \mathcal{E}.$$

Так как $u_i(\cdot)$ — вогнутые функции, то

$$\boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'') \geqslant \beta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}') + (1-\beta)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'').$$

Это означает, что $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'')$, т.е. $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U^-$.

Множество $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid v_i > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall i \in I\}$ также является непустым и выпуклым.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то рассмотренные множества не имеют общих точек:

$$U^- \cap (\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}) = \varnothing,$$

в противном случае мы нашли бы допустимое состояние экономики, в котором каждый потребитель имел бы большую полезность, чем в $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$.

По теореме об отделимости существует разделяющая эти два множества гиперплоскость, т.е. существуют вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и число $b$, такие что

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \leqslant b \text{ при } \boldsymbol{v} \in U^-$$

и

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \geqslant b \text{ при } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}.$$

Покажем, что $\boldsymbol{a} \geqslant \boldsymbol{0}$. Предположим, что существует потребитель $i$, для которого $a_i < 0$. Тогда если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, то $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, где $t$ — положительное число, $\boldsymbol{e}^i$ — $i$-й орт.

Мы всегда можем подобрать достаточно большое $t$, чтобы выполнялось $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{e}^i)<b$, а это противоречит тому, что $\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})+\mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{v}^N=\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})+1/n\cdot\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Поскольку $\boldsymbol{v}^N \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})+\mathbb{R}^n_{++}\,\forall N$, то $\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}^N \geqslant b$. Переходя к пределу, получим $\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})\geqslant b$. С другой стороны, $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})\in U^-$ и $\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant b$. Следовательно, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})=b$.

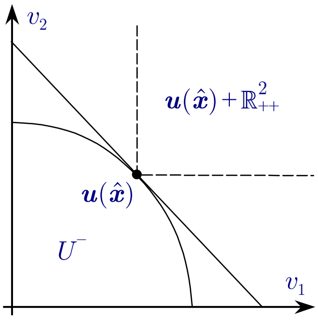


Рисунок 37

Таким образом, мы доказали существование гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, с коэффициентами $\boldsymbol{a}\geqslant\neq\mathbf{0}$, которая проходит через $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и разделяет множества $U^-$ и $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})+\mathbb{R}^n_{++}$ (см. Рис. 37). Возьмем в качестве коэффициентов $\alpha_i$ нормированные коэффициенты $a_i$:

$$\alpha_i=\frac{a_i}{\sum a_j}.$$

Не существует состояния $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{E}$, такого что

$$\sum_{i\in I}\alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i)>\sum_{i\in I}\alpha_i u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i).$$

Действительно, для такого состояния выполнено $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\in U^-$, откуда $\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Разделив это неравенство на $\sum a_i$, получим $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Это означает, что $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ является решением задачи ($\mathcal{P}^\alpha$).

■

Из этой теоремы следует, что множество решений задачи ($\mathcal{P}^\alpha$) при неотрицательных коэффициентах совпадает со слабой границей Парето и, следовательно, содержит в себе границу Парето. С другой стороны, множество решений задачи ($\mathcal{P}^\alpha$) при положительных коэффициентах содержится в границе Парето. Другими словами, эта задача позволяет получить для границы Парето оценки сверху и снизу. Кроме того, если сильная и слабая границы Парето совпадают, то задача ($\mathcal{P}^\alpha$) полностью характеризует границу Парето. Следующая теорема предлагает возможные условия, при которых такое совпадение имеет место.

**Теорема 12.**

(1) Если у каждого потребителя $X_i=\mathbb{R}^l_+$, предпочтения строго монотонны и непрерывны, то сильная граница Парето совпадает со слабой: $\mathcal{P}=\mathcal{WP}$.

(2) Если предпочтения каждого потребителя полустрого монотонны[58] и непрерывны, то все точки сильной границы Парето, компоненты которых строго положительны, также принадлежат и слабой границе Парето.

---

[58] Предпочтения называются полустрого монотонными, если они монотонны и из $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$.

***Доказательство***:

(1) Поскольку $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{WP}$, то достаточно доказать только, что $\mathcal{WP} \subseteq \mathcal{P}$. Пусть это не так, т.е. существует допустимое состояние $(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, принадлежащее слабой границе Парето, но не сильной.

Поскольку $(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$ не принадлежит границе Парето, то существует другое допустимое состояние $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, такое что $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq \check{\boldsymbol{x}}_i \ \forall i \in I$ и $\exists\, i_0 \in I$: $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \check{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Из строгой монотонности следует, что $\check{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succeq \boldsymbol{0}$, поэтому $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ не может быть нулевым вектором. Следовательно, потребитель $i_0$ потребляет хотя бы одно благо $k$ в положительном количестве: $\tilde{x}_{i_0 k} > 0$. Пусть $\boldsymbol{e}^k$ — $k$-й орт (вектор, где на $k$-м месте стоит $1$, а на остальных местах — $0$). Рассмотрим последовательность перераспределений ($N = 1, 2, \ldots$)

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(N) = \tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} - \frac{1}{N} \boldsymbol{e}^k,$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(N) = \tilde{\boldsymbol{x}}_i + \frac{1}{N(N-1)} \boldsymbol{e}^k \ \forall i \neq i_0.$$

По свойству строгой монотонности, имеем $\dot{\boldsymbol{x}}_i(N) \succ_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i(N) \ \forall i \neq i_0 \ \forall N$. Кроме того, для потребителя $i_0$ найдется достаточно большой номер $\bar{N}$, такой что набор $\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(\bar{N})$ допустим и (по свойству непрерывности предпочтений) $\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(\bar{N}) \succ_{i_0} \check{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Таким образом, мы нашли допустимое распределение $(\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(\bar{N}), \tilde{\boldsymbol{y}})$ которое строго доминирует допустимое распределение $(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может, так $(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето.

(2) Доказательство второй части теоремы оставляется в качестве упражнения.

■

## Дифференциальная характеристика границы Парето

Переформулируя определение, $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является Парето-оптимумом, если полезность ни одного из потребителей нельзя увеличить, не уменьшая полезность остальных потребителей (при том ограничении, что рассматриваются только допустимые состояния). Такая формулировка подсказывает следующую характеристику Парето-оптимальных состояний: для того, чтобы состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ было Парето-оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось решением следующих оптимизационных задач для всех $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$:

$$u_{i_0}(\boldsymbol{x}_{i_0}) \to \max\nolimits_{(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})} \qquad (\mathcal{P}_{i_0})$$

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \geqslant \hat{u}_i = u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i), \ \forall i \in I, \ i \neq i_0,$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i, \ \forall i \in I,$$

$$g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0, \ \forall j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} (x_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} y_{jk}, \ \forall k \in K.$$

Рассмотрим одну из таких задач для произвольного потребителя $i_0$ и в предположении, что состояние экономики $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ внутреннее в том смысле, что $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i) \ \forall i \in I$, применим к ней теорему Куна—Таккера (см. Приложение), предполагая, что функции полезности и производственные функции дифференцируемы. Соответствующий лагранжиан имеет вид (с точностью до постоянных слагаемых)

$$L = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(\boldsymbol{x}_i) + \sum_{j\in J} \mu_j g_j(\boldsymbol{y}_j) + \sum_{k\in K} \sigma_k \left(\sum_{j\in J} y_{jk} - \sum_{i\in I}(x_{ik} - \omega_{ik})\right).$$

По теореме Джона найдутся множители Лагранжа $\lambda_i \geqslant 0$ $(i\in I)$, $\mu_j \geqslant 0$ $(j\in J)$ и $\sigma_k$ $(k\in K)$, такие что в точке $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ производные функции Лагранжа по всем $x_{ik}$ и $y_{jk}$ равны нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ik}} = \lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0,\ \forall i, k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}} = \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0,\ \forall j, k.$$

Предположим, что в рассматриваемом состоянии $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны нулю. Другими словами мы предполагаем, что для каждого потребителя $i$ найдется благо $k$, такое что $\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik} \neq 0$, и что для каждого производителя $j$ найдется благо $k$, такое что $\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk} \neq 0$. Это предположение гарантирует выполнение условий регулярности теоремы Куна—Таккера.

Для проверки выполнения условий регулярности нужно убедиться, что градиенты всех активных ограничений (т.е. выполняющихся в рассматриваемом Парето-оптимальном состоянии как равенства) линейно независимы. Для этого достаточно доказать, что градиенты всех, а не только активных, ограничений линейно независимы. Это проводится проверкой ранга матрицы градиентов ограничений: записав структуру матрицы, следует убедиться что если линейная комбинация ее строк равна нулю, то все коэффициенты линейной комбинации нулевые. Мы здесь опускаем эту проверку.

Теорема Куна—Таккера утверждает, что можно выбрать множитель Лагранжа $\lambda_{i_0}$ равным $1$.

Из $\lambda_{i_0} = 1$, и из того, что существует благо $k_0$, такое что $\partial u_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0})/\partial x_{i_0 k_0} \neq 0$, следует что $\sigma_{k_0} > 0$. Следовательно, как несложно проверить, из условий первого порядка следует, что все $\lambda_i > 0$ $(i\in I)$ и $\mu_j > 0$ $(j\in J)$.

Отсюда, исключая коэффициенты $\lambda_i$ и $\mu_j$, получим дифференциальную характеристику внутренних ($\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ $\forall i\in I$) Парето-оптимальных состояний:

$$\frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}},$$

$$\frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Она означает совпадение предельных норм замещения (трансформации) любых двух товаров $k$, $k_0$ ($\sigma_{k_0} > 0$) для всех экономических субъектов. Так на Рис. 36 кривые безразличия двух потребителей касаются друг друга.

## Задачи

25. Для экономики обмена двух потребителей со строго монотонными, строго вогнутыми функциями полезности, заданными на $\mathbb{R}^l_+$, и строго положительными общесистемными запасами благ, доказать, что Парето-граница является связной кривой, соединяющей два угла ящика Эджворта, причем на каждой кривой безразличия в ящике Эджворта лежит ровно одна точка Парето, и что кривая Парето-границы не имеет колец. (Подсказка: вос-

пользоваться представлением Парето-границы через оптимизационную задачу с параметром задающим «вес» полезности одного из потребителей, и теоремой о непрерывности по параметру решения задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве).

26. Покажите, что в модели обмена (с $m$ потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей и совпадающими начальными запасами вектора начальных запасов потребителей составляют Парето-оптимальное распределение.

27. Найдите ядро в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются функциями Кобба—Дугласа, а начальные запасы равны $(1, a)$ и $(b, 1)$ соответственно при разных значениях $a, b \geqslant 0$.

28. Приведите пример экономики обмена, ядро которой...

(1) совпадает с границей Парето;

(2) содержит границу Парето как собственное подмножество;

(3) содержит только одно состояние экономики.

29. В модели обмена распределение $\boldsymbol{x}$ называется справедливым, если $\boldsymbol{x}_i \succeq_i \boldsymbol{x}_j \ \forall i, j$ (никто никому не завидует).

(1) Покажите, что множество справедливых распределений непусто.

(2) Покажите, что если предпочтения строго выпуклы, непрерывны и строго монотонны, а совокупные начальные запасы положительны, то множество справедливых распределений, которые являются Парето-оптимальными, непусто.

(3) Как выглядит множество Парето-оптимальных справедливых распределений, если предпочтения потребителей одинаковы?

30. Найдите равновесие и Парето-границу в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителя:

$$u_1(\boldsymbol{x}_1) = \ln(x_{11}) + \ln(x_{12}),$$

$$u_2(\boldsymbol{x}_2) = \ln(x_{21}) + \ln(x_{22}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1; 3),\ \boldsymbol{\omega}_2 = (3; 1).$$

Проиллюстрируйте этот анализ на диаграмме Эджворта и проинтерпретируйте графически обе теоремы благосостояния.

31. Рассмотрим модель обмена с $m$ одинаковыми потребителями со строго выпуклыми предпочтениями.

Покажите, что эгалитарное распределение $\boldsymbol{x}_i = \sum\omega_i/m$ принадлежит границе Парето.

Принадлежит ли это распределение ядру данной экономики?

При каких дополнительных предположениях это эгалитарное распределение можно реализовать как равновесие? При каких ценах?

Что можно сказать о таких ценах в случае, если предпочтения представимы строго монотонной дифференцируемой функцией полезности?

Остается ли это утверждение справедливым при отказе от предположения о выпуклости предпочтений?

## *Связь равновесия и Парето-оптимума. Теоремы благосостояния*

Сопоставляя дифференциальные характеристики оптимума Парето и равновесия, видим, что они совпадают. Это совпадение дифференциальных характеристик показывает, что выполняются так называемые **теоремы благосостояния**[59] (или, как их еще называют, фундаментальные теоремы экономики благосостояния). Первая теорема благосостояния утверждает, что равновесие Парето-оптимально. Вторая теорема благосостояния утверждает, что на основе Парето-оптимума можно построить равновесие.

Для доказательства первой теоремы благосостояния нам потребуется определение локальной ненасыщаемости предпочтений[60].

**Определение 12.**

Предпочтения потребителя $(\succ_i, \succeq_i, \sim_i)$ называются **локально ненасыщаемыми**, если для любого допустимого набора $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ в любой окрестности этого набора $V(\boldsymbol{x}_i)$ найдется другой лучший для него допустимый набор $\check{\boldsymbol{x}}_i$, т.е. такой набор, что

$$\check{\boldsymbol{x}}_i \in X_i, \quad \check{\boldsymbol{x}}_i \in V(\boldsymbol{x}_i) \text{ и } \check{\boldsymbol{x}}_i \succ \boldsymbol{x}_i.$$

Для локальной ненасыщаемости, в частности, достаточно, чтобы функция полезности в каждой точке множества $X_i$ строго возрастала хотя бы по одному из благ и $X_i = \mathbb{R}^l_+$. (Для внутренних потребительских наборов ($\boldsymbol{x}_i > \mathbf{0}$) строгое возрастание по одному из благ здесь можно заменить на строгое убывание по одному из благ).

**Теорема 13** (*первая теорема благосостояния*)

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — общее равновесие экономики, и функции полезности всех потребителей локально ненасыщаемы, тогда состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ Парето-оптимально.

***Доказательство.***

Доказательство проводится от противного: пусть есть другое допустимое состояние, $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, доминирующее состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ в смысле Парето, то есть такое, что

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \ \forall i \in I,$$

и потребитель $i_0$ для которого $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

---

[59] Идею этих теорем можно найти в книге Парето. Несколько известных экономистов (А. Лернер, Х. Хотеллинг, О. Ланге, М. Алле) занимались этими вопросами в 1930-1940 гг. и дали наброски доказательств. Формальные доказательства теорем разработали Кеннет Эрроу (1951) и Жерар Дебрё (1951, 1954).

[60] Отметим, что локальная ненасыщаемость предпочтений потребителя влечет за собой то, что решение задачи потребителя выводит бюджетное ограничение на равенство. Однако этот факт не добавляет ничего нового к характеристикам равновесия, поскольку, как показано выше, в любом равновесии бюджетное ограничение выполнено как равенство.

1) Набор $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ дороже, чем нужно, чтобы удовлетворять бюджетному ограничению при равновесных ценах и доходах, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} > \beta_{i_0}.$$

Если бы это было не так, то набор $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, более предпочтительный для него, чем $\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, являлся бы допустимым в задаче потребителя, что противоречит определению равновесия.

Аналогично для прочих потребителей $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \geqslant \beta_i$ $(\forall i \in I)$. Действительно, в противном случае (при $\bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{x}}_i < \beta_i$) существовала бы окрестность набора $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$, все точки которой удовлетворяли бы бюджетному ограничению, и по условию локальной ненасыщаемости в этой окрестности нашелся бы альтернативный допустимый набор $\check{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$, который лучше для потребителя, чем $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ и удовлетворяет бюджетному ограничению (см. Рис. 38). Этот набор лучше для потребителя, чем равновесный набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, что невозможно.

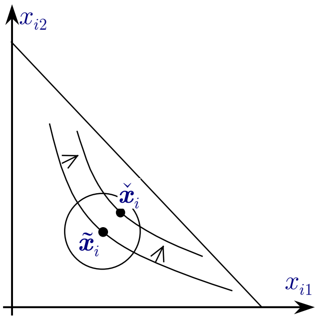


Рисунок 38. Иллюстрация к доказательству первой теоремы благосостояния

Суммируя полученные неравенства по всем потребителям, получаем

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i.$$

2) С другой стороны, вычислим сумму доходов потребителей в равновесии:

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \sum_{i\in I}\Big[\sum_{k\in K}\bar{p}_k\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\sum_{k\in K}\bar{p}_k\bar{y}_{jk} + S_i\Big] =$$

$$= \sum_{k\in K}\bar{p}_k\Big[\sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\sum_{i\in I}\gamma_{ij} + \sum_{i\in I}S_i\Big] = \sum_{k\in K}\bar{p}_k\Big(\sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\Big)$$

или

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

3) Поскольку $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — оптимальная технология для $j$-го предприятия при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, то

$$\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \bar{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Суммируя по всем предприятиям, получим

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

4) Сопоставим три полученные выше соотношения:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\boldsymbol{y}}_j$$

или

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i>\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i\in I}\omega_i+\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Это неравенство противоречит тому, что $(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние, поскольку в допустимом состоянии должны выполняться балансы

$$\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i=\sum_{i\in I}\omega_i+\sum_{j\in J}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Получено противоречие, поэтому для $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$ нельзя найти Парето-улучшение. Это означает, что $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимум.

■

Рассмотрим пример экономики с потребителями, характеризующимися локальным насыщением, и проиллюстрируем его с помощью ящика Эджворта.

**Пример 2.**

Первый потребитель имеет функцию полезности с «толстой» кривой безразличия

$$u_1=\begin{cases}x_{11}x_{12}, & x_{11}x_{12}<2\\ 2, & 2<x_{11}x_{12}<3\\ x_{11}x_{12}-1, & x_{11}x_{12}>3\end{cases}$$

У второго же потребителя функция полезности линейна

$$u_2=x_{21}+x_{22}.$$

Начальные запасы в экономике достаточно большие.

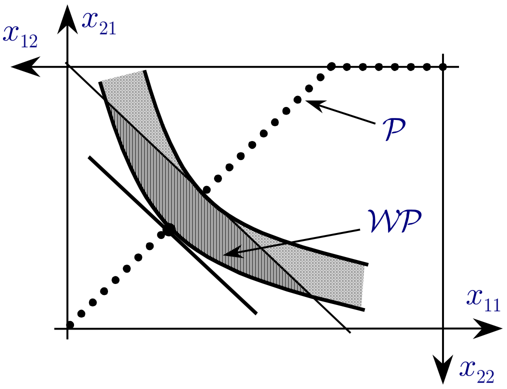


Рисунок 39. Контрпример к первой теореме благосостояния

Данная ситуация представляет собой контрпример к первой теореме благосостояния и показывает важность условия локальной ненасыщаемости. Точки в заштрихованной области Рис. 39 принадлежат слабой границе Парето, но не сильной. Их можно реализовать как равновесие при ценах $p_1=p_2=1$, но они не являются Парето-оптимальными.

⇦

Перейдем к доказательству того, что всякое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как равновесие (вторая теорема благосостояния). Мы докажем здесь эту теорему в предположении дифференцируемости функций с использованием теоремы Куна—Таккера.

**Теорема 14** (*вторая теорема благосостояния*)

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, причем

# функции полезности и производственные функции дифференцируемы,

# множества $X_i$ выпуклы, а функции полезности и производственные функции вогнуты[61],

# для всех потребителей $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \mathrm{int}(X_i)$ (т.е. рассматриваемый Парето-оптимум внутренний),

# в рассматриваемом состоянии градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны нулю:

$$\nabla u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) \neq \mathbf{0},\ \forall i \in I,$$

$$\nabla g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j) \neq \mathbf{0},\ \forall j \in J.$$

Тогда найдется вектор цен $\boldsymbol{p}$ и трансферты $S_i$, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — общее равновесие.

***Доказательство.***

Выше мы доказали, что в условиях теоремы найдутся множители Лагранжа $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$, $\mu_j > 0$ $(j \in J)$ и $\sigma_k$ $(k \in K)$, такие что в состоянии $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ выполняются следующие условия первого порядка:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \sigma_k,\ \forall i, k,$$

$$\mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0,\ \forall j, k.$$

Возьмем в качестве равновесных цен множители Лагранжа для балансовых ограничений, т.е. $p_k = \sigma_k$, $\forall k \in K$ и выберем такие трансферты $S_i$, чтобы доход каждого потребителя совпадал с расходами, требуемыми на покупку набора $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ при ценах $\boldsymbol{p}$ ($\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$), т.е.

$$S_i = \beta_i - \boldsymbol{p}\omega_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \boldsymbol{p} \hat{\boldsymbol{y}}_j = \boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{x}}_i - \omega_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Несложно проверить, что сумма этих трансфертов равна нулю.

Для того, чтобы доказать, что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является равновесием, нам достаточно доказать, (i) что для всех потребителей $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходах $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$, и (ii) что для всех производителей $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\boldsymbol{p}$.

(i) Очевидно, что набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является допустимым в задаче потребителя. Докажем, что он является оптимальным. Для этого воспользуемся обратной теоремой Куна—Таккера.

Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа $\nu_i$ для бюджетного ограничения, такой что выполнено условие первого порядка (выведенное ранее)

$$\frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k,\ \forall k \in K.$$

Этому требованию удовлетворяет $\nu_i = 1/\lambda_i$, поскольку выполнено $\lambda_i \partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik} = \sigma_k$ и $\lambda_i > 0$.

Условие дополняющей нежесткости для бюджетного ограничения выполнено, поскольку в точке $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ бюджетное ограничение активно. Поскольку функция полезности вогнута, а

---

[61] Здесь достаточно потребовать «приводимость к вогнутости».

множество $X_i$ выпукло, то выполнены все требования обратной теоремы Куна—Таккера. Т.е. $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя.

(ii) Докажем теперь, что технология $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ является оптимальной для $j$-го производителя. Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа $\kappa_j$ для технологического ограничения, такой что выполнено условие первого порядка

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k, \ \forall k \in K.$$

Этому требованию удовлетворяет $\kappa_j = \mu_j$. Условие дополняющей нежесткости для технологического ограничения выполнено, поскольку соответствующее условие с точностью до замены $\mu_j$ на $\kappa_j$ выполнено в Парето-оптимуме. Таким образом, выполнены условия Куна—Таккера, и поскольку производственная функция вогнута, то $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя.

■

**Замечание**.

В экономике без трансфертов, чтобы доходы $\beta_i$ равнялись требуемым расходам $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$, следует соответствующим образом распределить собственность, то есть указать начальные запасы $\omega_i$ и доли в прибылях $\gamma_{ij}$. Для этого достаточно найти долю $\theta_i$ каждого потребителя в совокупных расходах потребителей,

$$\theta_i = \frac{\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i}{\sum_s \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_s},$$

и поделить собственность в соответствующих пропорциях, т.е. взять $\gamma_{ij} = \theta_i \ \forall i, \ \forall j$ и $\omega_i = \theta_i \omega_\Sigma \ \forall i$, где $\omega_\Sigma$ — совокупные начальные запасы.

В экономике чистого обмена достаточно выбрать $\omega_i = \hat{\boldsymbol{x}}_i$.

Использование теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме — только один из возможных путей доказательства. Мы воспользовались им здесь, поскольку этот подход понадобится нам в дальнейшем для проверки противоположных утверждений — о неоптимальности несовершенных рынков. Условие дифференцируемости функций во второй теореме благосостояния на самом деле избыточны.

**Теорема 15** (*вторая теорема благосостояния без дифференцируемости*)

Пусть

# множества допустимых потребительских наборов $X_i$ выпуклы, предпочтения потребителей $\succsim_i$ выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы,

# технологические множества $Y_i$ каждого производителя выпуклы.

Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимальное по Парето состояние и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i) \ \forall i$ (т.е. данное Парето-оптимальное состояние является внутренним), то существуют цены $\boldsymbol{p}$ и трансферты $S_i$, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является общим равновесием.

***Доказательство.***

Введем ряд обозначений которые нам понадобятся в дальнейшем для доказательства этого утверждения.

Обозначим множество наборов лучших для потребителя $i$, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, через

$$L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)=\{\boldsymbol{x}_i\in X_i\,|\,\boldsymbol{x}_i\succ_i\hat{\boldsymbol{x}}_i\}.$$

Поскольку предпочтения потребителей выпуклы, и множества допустимых потребительских наборов $X_i$ выпуклы, то, как несложно показать, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ также выпуклы и, значит, их сумма

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})=\sum_i L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)=\{\sum_i \boldsymbol{x}_i|\ \boldsymbol{x}_i\in X_i,\ \boldsymbol{x}_i\succ_i\hat{\boldsymbol{x}}_i\}$$

выпукла. Кроме того, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ непусты по локальной ненасыщаемости, значит и $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ непусто.

Множество производственных возможностей,

$$Y_\Sigma+\omega_\Sigma=\sum_j Y_j+\omega_\Sigma=\{\sum_j \boldsymbol{y}_j+\omega_\Sigma\,|\,\boldsymbol{y}_j\in Y_j\},$$

тоже является выпуклым в силу выпуклости технологических множеств и непустым, так как ему принадлежит точка $\sum_j\hat{\boldsymbol{y}}_j+\omega_\Sigma$.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимум Парето, то множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma+\omega_\Sigma$ не имеют общих точек:

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})\cap(Y_\Sigma+\omega_\Sigma)=\varnothing.$$

Предположим, что существует общая точка $\boldsymbol{z}\in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $\boldsymbol{z}\in Y_\Sigma+\omega_\Sigma$. Это означало бы, что существует состояние экономики $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, такое что $\boldsymbol{x}_i\in X_i$, $\boldsymbol{x}_i\succ_i\hat{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i$, $\boldsymbol{y}_j\in Y_j$ $\forall j$, $\sum_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{z}$ и $\sum_j\boldsymbol{y}_j+\omega_\Sigma=\boldsymbol{z}$. Тем самым мы нашли бы допустимое состояние экономики, которое доминирует[62] оптимальное по Парето состояние $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может.

Поскольку множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma+\omega_\Sigma$ выпуклы, непусты и не пересекаются, к ним применима теорема об отделимости. Поэтому существует вектор $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l$, $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ и число $r\in\mathbb{R}$, такие что

$$\boldsymbol{pz}\geqslant r,\text{ если }\boldsymbol{z}\in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

и

$$\boldsymbol{pz}\leqslant r,\text{ если }\boldsymbol{z}\in Y_\Sigma+\omega_\Sigma.$$

Пусть $\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_i\}$ — такой набор допустимых потребительских наборов, что $\boldsymbol{x}_i\succsim_i\hat{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i$, что можно по аналогии записать как $\boldsymbol{x}\in L^{+}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Покажем, что $\boldsymbol{p}\sum_i\boldsymbol{x}_i\geqslant r$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений $\succsim_i$ следует, что для любого натурального числа $N$ в окрестности $V_{1/N}(\boldsymbol{x}_i)$ набора $\boldsymbol{x}_i$ существует набор $\boldsymbol{x}_i^N$, такой, что $\boldsymbol{x}_i^N\succ_i\boldsymbol{x}_i$, где $V_{1/N}(\boldsymbol{x}_i)$ — шар с центром $\boldsymbol{x}_i$ и радиусом $1/N$. Поскольку $\boldsymbol{x}_i^N\succ_i\boldsymbol{x}_i\succsim_i\hat{\boldsymbol{x}}_i$, то $\sum_i\boldsymbol{x}_i^N\in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$, откуда $\boldsymbol{p}\sum_i\boldsymbol{x}_i^N\geqslant r$. Заметим, что последовательность $\boldsymbol{x}_i^N$ сходится к $\boldsymbol{x}_i$. Переходя к пределу по $N$, получим требуемое неравенство.

Введем обозначение

$$\hat{\boldsymbol{z}}=\sum_i\hat{\boldsymbol{x}}_i=\sum_j\hat{\boldsymbol{y}}_j+\omega_\Sigma.$$

(Второе равенство здесь является следствием балансов по благам).

---

[62] Причем строго доминирует.

Поскольку $\hat{\boldsymbol{z}} \in L^+(\hat{\boldsymbol{x}})$ (по рефлексивности отношения $\succsim_i$ — каждый из наборов $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ не хуже себя самого), то $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{z}} \geqslant r$. С другой стороны, так как Парето-оптимум технологически допустим, то $\hat{\boldsymbol{z}} \in Y_\Sigma + \omega_\Sigma$, и $\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{z}} \leqslant r$. Следовательно, $r = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Таким образом, мы нашли гиперплоскость, проходящую через $\hat{\boldsymbol{z}}$ и разделяющую множества $Y_\Sigma + \omega_\Sigma$ и $L^+(\hat{\boldsymbol{x}})$ (см. Рис. 40). Возьмем коэффициенты этой гиперплоскости $\boldsymbol{p}$ в качестве цен и покажем, что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является равновесием при соответствующем подборе трансфертов.

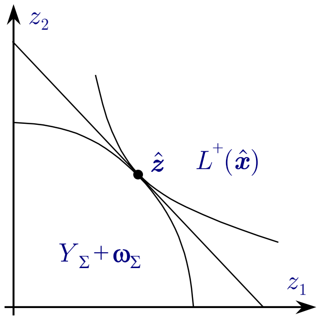


Рисунок 40. Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния

Покажем сначала, что при этих ценах прибыль каждого предприятия $j$ максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{y}}_j$. Пусть $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$. Тогда

$$\boldsymbol{y}_j + \sum\nolimits_{s\neq j} \hat{\boldsymbol{y}}_s + \omega_\Sigma \in Y_\Sigma + \omega_\Sigma$$

и выполнено

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}_j + \sum\nolimits_{s\neq j} \hat{\boldsymbol{y}}_s + \omega_\Sigma) \leqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{p}(\sum\nolimits_s \hat{\boldsymbol{y}}_s + \omega_\Sigma).$$

Отсюда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \leqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{y}}_j$. Другими словами, производитель не может при ценах $\boldsymbol{p}$ увеличить свою прибыль, выбрав $\boldsymbol{y}_j$ вместо $\hat{\boldsymbol{y}}_j$, то есть $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя.

Аналогичным образом доказывается, что любой набор $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, который не хуже $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ ($\boldsymbol{x}_i \succsim_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$), не может стоить дешевле, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ в ценах $\boldsymbol{p}$. Действительно, так как $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, то

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_i + \sum\nolimits_{s\neq i} \hat{\boldsymbol{x}}_s) \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{p}\sum\nolimits_s \hat{\boldsymbol{x}}_s.$$

Таким образом, из $\boldsymbol{x}_i \succsim_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ следует $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

Докажем, что при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$ полезность каждого потребителя $i$ максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Для этого требуется усилить доказанный только что факт и доказать, что из $\boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ следует $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i > \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Другими словами, требуется доказать, что лучший набор $\boldsymbol{x}_i$ ($\boldsymbol{x}_i \in X_i$ и $\boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$) должен стоить дороже, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ в ценах $\boldsymbol{p}$. Мы уже доказали, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$, поэтому осталось показать, что равенство здесь достигаться не может.

Предположим, что это не так и $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

Условие $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ означает, что $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ принадлежит множеству $X_i$ вместе с некоторой своей окрестностью. Поскольку не все цены равны нулю $(\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0})$, то в этой окрестности найдется набор $\boldsymbol{x}'_i$, который в ценах $\boldsymbol{p}$ стоит дешевле $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ и, следовательно, дешевле $\boldsymbol{x}_i$. Действительно, пусть $p_k \neq 0$ для некоторого блага $k$. Если $p_k > 0$, то можно немного уменьшить потребление этого блага по сравнению с $\hat{x}_{ik}$, а если $p_k < 0$, то немного увеличить. Таким образом, существует допустимый набор $\boldsymbol{x}'_i$, такой что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_i < \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i$.

Рассмотрим выпуклые комбинации $\alpha \boldsymbol{x}'_i + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_i$, $\alpha \in [0,1]$. Поскольку множество допустимых потребительских наборов $X_i$ выпукло, то все такие наборы допустимы. По непрерывности предпочтений найдется достаточно малое положительное $\alpha$, такое что набор

$$\boldsymbol{x}''_i = \alpha \boldsymbol{x}'_i + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_i.$$

лучше, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Кроме того, поскольку $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_i < \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i$, то $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''_i < \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i$.

Но, с другой стороны, из $\boldsymbol{x}''_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ следует, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''_i \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Получили противоречие.

Таким образом, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i > \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Значит, невозможно найти допустимый набор, который был бы лучше $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, но стоил бы не дороже, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Таким образом, $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

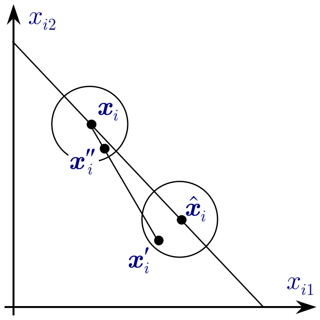


Рисунок 41. Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния

Для того, чтобы доказать, что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — равновесие Вальраса, нам осталось найти такие трансферты, равные в сумме нулю, чтобы с учетом трансфертов $\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Рассуждения здесь повторяют рассуждения предыдущей теоремы.

■

Рассмотрим примеры того, что отказ от предположений второй теоремы благосостояния приводит к тому, что она перестает быть верной. При этом удобно воспользоваться для иллюстрации ящиком Эджворта. Для того, чтобы на основе Парето-оптимума можно было построить равновесие, требуется найти прямую, которая бы разделяла множества $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$ на диаграмме Эджворта. Например, на Рис. 33 такая гиперплоскость имеется, поэтому точка $\bar{\boldsymbol{x}}$ является одновременно Парето-оптимальной и равновесной. На Рис. 36 первый потребитель имеет невыпуклые предпочтения и Парето-оптимальную точку $\hat{\boldsymbol{x}}$ нельзя реализовать как равновесие — не существует прямой, которая бы разделяла $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$. Приведем еще несколько примеров.

**Пример 3.**

Пусть потребители имеют функции полезности $u_1 = x_{11} + \sqrt{x_{12}}$ и $u_2 = x_{22}$.

Правый нижний угол ящика Эджворта ($\hat{\boldsymbol{x}}$) представляет собой оптимум Парето, но не может быть реализован как равновесие ни при каких ценах (см. Рис. 42). Эта экономика представляет собой контрпример ко второй теореме благосостояния с не внутренним оптимумом Парето. Прямая, разделяющая $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$, существует — она проходит горизонтально. Однако это разделение нестрогое, поскольку частично эта прямая лежит в $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$. Действительно, несложно проверить, что при ценах $p_1 = 0$ и $p_2 > 0$ набор $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ не является решением задачи первого потребителя, так как полезность не ограничена сверху.

⇦

В следующем примере вместо ящика Эджворта используется диаграмма, аналогичная той, что изображена на Рис. 34.

**Пример 4.**

Пусть экономика состоит из одного потребителя с локально насыщаемыми предпочтениями и одного производителя (см. Рис. 43). Точка Парето-оптимума $\hat{\boldsymbol{x}}=\omega+\hat{\boldsymbol{y}}$ лежит на границе производственных возможностей и находится внутри «толстой» кривой безразличия. Поскольку множество производственных возможностей и множество лучших наборов $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ не имеют на диаграмме общих точек, то это действительно оптимум.

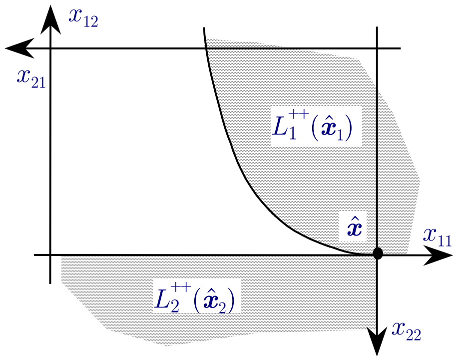


Рисунок 42. Контрпример ко второй теореме благосостояния: не внутренний Парето-оптимумом

Чтобы точка $\hat{\boldsymbol{x}}=\omega+\hat{\boldsymbol{y}}$ была равновесной, нужно, чтобы отношение цен было равно наклону границы производственных возможностей в этой точке. Однако в условиях бюджетного ограничения, соответствующего такому наклону бюджетной прямой, точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ не будет решением задачи потребителя, так как гипотетический бюджетный треугольник имеет общие точки с множеством $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$.

Аналогичный пример можно построить, если взять Парето-оптимум внутри множества производственных возможностей и внутри «толстой» кривой безразличия. Из такого оптимума нельзя сконструировать равновесие, поскольку (при ненулевых ценах) решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества. На этом примере видно, что рыночное равновесие, в отличие от концепции оптимальности по Парето, предполагает самостоятельную роль предприятий и технологическую эффективность. В равновесии достигается технологическая эффективность даже тогда, когда с общественной точки зрения она бесполезна.

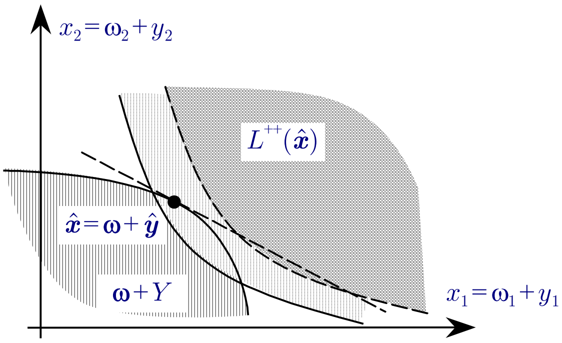


Рисунок 43. Контрпример ко второй теореме благосостояния: предпочтения потребителя не являются локально ненасыщаемыми

Оба эти примера демонстрируют некоторую содержательную недостаточность второй теоремы благосостояния. Дело в том, что в обеих экономиках имеются Парето-оптимумы, эквивалентные рассматриваемым Парето-оптимумам с точки зрения потребителей (в данном случае — единственного потребителя), на основе которых уже *можно* сконструировать равновесие. ⇦

## Задачи

32. Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы не применима из-за нарушения предположений, и равновесие нарушало бы ее утверждение. Можно привести графический пример, либо указать конкретные начальные запасы, $\omega_1$, $\omega_2$, функции полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и равновесие $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$.

33. Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы не применима из-за нарушения предположений, но утверждение первой теоремы благосостояния оставалось бы справедливым.

34. Привести пример экономики обмена с двумя потребителями и двумя благами, графический или с конкретными начальными запасами $\omega$, функциями полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, и состоянием этой экономики $\boldsymbol{x}$, для которой вторая теорема благосостояния не применима и

(A) утверждение второй теоремы благосостояния остается справедливым.

(B) утверждение второй теоремы благосостояния неверно.

35. Сформулируйте предположения первой теоремы благосостояния для экономики обмена.

36. Сформулируйте предположения второй теоремы благосостояния для экономики обмена.

37. Сформулируйте и докажите теоремы благосостояния в модели обмена в условиях строгой монотонности, строгой выпуклости предпочтений и положительности совокупных начальных запасов.

38. Для каждого из предположений второй теоремы благосостояния покажите (приведя соответствующий пример), что отказ от этого предположения приводит к тому, что утверждение теоремы оказывается неверным.

39. Что можно сказать о соотношениях предельных норм замены товаров в потреблении и производстве в точке равновесия? Связано ли это соотношение с отсутствием Парето-улучшающего изменения состояния? Если данное соотношение нарушается, как следует строить Парето-улучшение данного состояния экономики?

40. Пусть допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}$. Какие из функций полезности представляют предпочтения, удовлетворяющие условиям первой и (или) второй теоремы благосостояния?

1) $u(x_1, x_2) = x_1$,

2) $u(x_1, x_2) = -x_1$,

3) $u(x_1, x_2) = \text{const}$,

4) $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,

5) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,

6) $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$,

7) $u(x_1, x_2) = \exp(x_1)x_2$,

8) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

9) $u(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$,

10) $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.

41. Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. Какие дополнительные условия гарантируют, что на основе точки начальных запасов можно построить равновесие?

42. Пусть в экономике обмена с двумя потребителями их функции полезности равны

$$u_1(\boldsymbol{x}_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2,$$

и

$$u_2(\boldsymbol{x}_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2.$$

Найти Парето-границу. Какие из точек Парето-границы можно реализовать как равновесие подбором цен и распределения собственности? Решите эту задачу в случае, когда

(1) суммарные начальные запасы двух благ одинаковы,

(2) суммарные начальные запасы двух благ различаются.

43. В классической экономике обмена с двумя потребителями, функции полезности последних, заданные на $\mathbb{R}_+^2$, равны

(a) $u_1 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 + x_1 - x_2,$

(b) $u_1 = \min\{x_1, x_2\}, \quad u_2 = 6 - x_1 + x_2,$

(c) $u_1 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 - x_1 - x_2.$

В каких из трех экономик окажется, что...

1) любое равновесие Парето-оптимально (почему именно в этих, а в других — нет?),

2) любое Парето-оптимальное состояние $\boldsymbol{x} > 0$ можно превратить в равновесие подбором распределения собственности (почему именно в этих, а в других — нет?).

44. Сформулируйте и докажите вариант первой теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) на основе сопоставления дифференциальных характеристик Парето-оптимальных и равновесных состояний. Какие дополнительные предположения о свойствах функций полезности (помимо дифференцируемости) необходимо сделать?

45. Первая теорема благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) доказывается от противного: предполагаем, что существует альтернативное к равновесному состояние $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, более желательный для некоторого потребителя $i$. Условие локальной ненасыщаемости (сформулировать) используется для того, чтобы проверить, что:

А) альтернативный вариант дороже чем равновесный для потребителя $i$;

Б) спрос сбалансирован с предложением в равновесии;

В) ………………

Укажите словами верный вариант взамен приведенных и запишите его формулой.

46. В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), не использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того, чтобы применить теорему ……... ...... .... …… к множествам .... .... .... ...... ......... ......... ......... ......... ...…. ………. Сформулируйте применяемую теорему и определение соответствующих множеств.

47. В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того чтобы с помощью теоремы …. .... .... ….. ..... доказать, что соответствующие компоненты построенного состояния экономики являются решениями задач ……. … … …… … …… … . Сформулируйте применяемую теорему, соответствующие задачи и способ применения теоремы.

48. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия), использующем дифференцируемость, условия на градиенты функций нужны для того, чтобы применить Теорему ………. к задаче ………………

49. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при отсутствии свойства локальной ненасыщаемости не удается показать, что ................................. , так как может оказаться что.................................. (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

50. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия выпуклости предпочтений не удается показать, что ...................................., так как может оказаться что...................................... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

51. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия, что рассматриваемая точка — внутренняя, не удается показать, что ...................................., так как может оказаться что ...................................... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

52. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесных распределений) при невыполнении условия локальной ненасыщаемости, не удается показать, что ...................................., так как может оказаться что ...................................... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

53. Пусть два потребителя (потребление первого обозначим x, потребление второго обозначим z) в классической ситуации обмена имеют функции полезности

$$u_x(\boldsymbol{x}) = x_1^a + x_2^b, \quad u_z(\boldsymbol{z}) = cz_1 + dz_2,$$

где $\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$, и обладают начальными запасами $\omega_x$ и $\omega_z$.

а) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \omega)$ можно гарантировать, что состояние экономики, не улучшаемое по Парето, можно реализовать как равновесие?

Предположим, что в этой экономике осуществилось равновесие.

б) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \omega)$ можно гарантировать, что оно не улучшаемо по Парето?

в) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \omega)$ можно утверждать, что для обоих потребителей оно не лучше, чем начальное состояние?

г) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \omega)$ можно утверждать, что для одного из потребителей оно не лучше, чем начальное состояние? О каком из потребителей идет речь?

54. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\omega_x = (1; 1)$ и $\omega_z = (2; 1)$.

Укажите функцию $u_z(\cdot)$ и равновесие Вальраса такие, что равновесное состояние не является Парето-оптимальным состоянием данной экономики.

Какое условие теоремы (какой?) при этом будет нарушаться?

Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

55. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2)$, а другой — $u_z(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (4; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 2)$.

Укажите функцию $u_x(\cdot)$ и равновесие Вальраса в соответствующей экономике такие, что равновесное состояние этой экономики не является Парето-оптимальным. Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

56. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (3; 2)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 1)$.

Укажите функцию $u_z(\cdot)$ такую, что не каждый Парето-оптимум можно реализовать как равновесие. Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

Какие именно Парето-оптимальные состояния нельзя реализовать как равновесие. Объяснить, почему.

57. В экономике имеется один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\boldsymbol{y}) = -y_1 - \sqrt{y_2}$ и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (2; 0)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, Bx_2)$, $u = \max(Ax_1, Bx_2)$ или же $u = Ax_1 + Bx_2$. Выберите функцию и подберите параметры $A$ и $B$ так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

58. В экономике имеются потребители $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA},\ x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2; 2)$. Известно, что $u_2 = \sqrt{x_{2A}} + x_{2B}$, а функция полезности 1-го может быть одного из трех видов: $u_1 = \alpha \ln(1 + x_{1A}) + \beta \ln(1 + x_{1B})$, $u_1 = \alpha x_{1A} + \beta x_{1B}$ или же $u_1 = \alpha\, (x_{1A})^2 + \beta\, (x_{1B})^2$. Выберите функцию и подберите параметры $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (2; 0)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

59. В экономике имеется один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\boldsymbol{y}) = -y_1 - y_2$ и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (1; 3)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, x_2)$, $u = Ax_1 + x_2$ или же $u = \max(x_1 x_2, A)$. Выберите функцию и подберите параметр $A$ так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему ее нельзя реализовать как равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

60. В экономике имеются потребители $i=1,2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA},\ x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2;2)$. Известно, что $u_1 = (x_{1A})^2 + (x_{1B})^2$, а функция полезности 2-го может быть одного из трех видов: $u_2 = \max(x_{2A}, \alpha + x_{2B})$, $u_2 = \alpha x_{2A} + x_{2B}$ или же $u_2 = x_{2A}^{\alpha} x_{2B}$. Выберите функцию и подберите параметр $\alpha$ так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (1;2)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

61. Какие из нижеприведенных функций полезности соответствуют условиям 1-й теоремы благосостояния?

I. $u(x_1, x_2) = -1/x_1 - 1/x_2$, II. $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, III. $u(x_1, x_2) = 100$,

а) I и II.

б) I и III.

в) II и III.

г) только I.

62. Для выполнения первой теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

а) только локальной ненасыщаемости,

б) локальной ненасыщаемости и вогнутости,

в) дифференцируемости и вогнутости,

г) только вогнутости.

63. Для выполнения второй теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

а) локальной ненасыщаемости,

б) локальной ненасыщаемости и вогнутости,

в) вогнутости,

г) вогнутости и дифференцируемости.

64. Если функция полезности одного из потребителей является локально ненасыщаемой, то...

а) первая теорема благосостояния несправедлива;

б) бюджетное ограничение выполняется как равенство;

в) точка равновесия не является внутренней;

г) вторая теорема благосостояния несправедлива.

65. Вторая теорема благосостояния может не выполняться, если...

а) у одного из потребителей в его множестве потребительских наборов есть наилучший набор;

б) технологические множества выпуклы;

в) функция полезности хотя бы одного из потребителей недифференцируема;

г) функция полезности хотя бы одного из потребителей локально ненасыщаема.

66. В экономике двух потребителей с двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 2\sqrt{x_{12}} \text{ и } u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы 1-го потребителя равны $(1; 3)$, а 2-го — $(2; 1)$.

Пусть $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $T_1 = -1$, $T_2 = 1$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ является равновесием с трансфертами.

(б) Является ли это равновесие оптимальным по Парето? Обоснуйте свой ответ.

67. В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = 2\sqrt{x_1} + x_2,$$

а его начальные запасы равны $(3; 1)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = -y_1 + 2\sqrt{-y_2}.$$

Пусть $x_1 = 4$, $x_2 = 3/4$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1/4$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является Парето-оптимальным состоянием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

68. В экономике двух потребителей с двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 4\sqrt{x_{12}} \text{ и } u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы 1-го потребителя равны $(2; 4)$, а 2-го — $(1; 1)$.

Пусть $x_{11} = 1$, $x_{12} = 2$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 3$.

(а) Покажите формально, что $\boldsymbol{x}$ является Парето-оптимальным состоянием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

69. В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = x_1 + 2\sqrt{x_2},$$

а его начальные запасы равны $(3; 0)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = 4\sqrt{-y_1} - y_2.$$

Пусть $x_1=2$, $x_2=4$, $y_1=-1$, $y_2=4$, $p_1=2$, $p_2=1$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является равновесием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

70. При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели обмена (с $m$ потребителями) и совпадающими, выпуклыми и строго монотонными предпочтениями, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, распределение, состоящее из векторов начальных запасов, можно реализовать как равновесие? При каких ценах?

71. Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. При каких дополнительных условиях можно гарантировать существование и единственность равновесия в этой экономике?

72. Рассмотрим модель обмена в двумя благами и двумя потребителями с функциями полезности $u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^1$, совокупные начальные запасы которых положительны $\omega_\Sigma \gg 0$. Покажите формально, что:

а) Любая точка ящика Эджворта ($\boldsymbol{x}_1 \in [0, \omega_\Sigma^1] \times [0, \omega_\Sigma^2]$) принадлежит слабой и сильной границе Парето.

б) Каждую из точек ящика Эджворта можно реализовать как равновесие, и при этом $p^2=0$.

73. Рассмотрим модель обмена в двумя благами и двумя потребителями с функциями полезности$u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^2$ совокупные начальные запасы экономики положительны ($\omega_\Sigma \gg 0$). Покажите формально, что:

а) Правая ($x_1^1=\omega_\Sigma^1$, $x_1^2 \in [0, \omega_\Sigma^2]$) и нижняя ($x_1^1 \in [0, \omega_\Sigma^1]$, $x_1^2=0$) стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол ($\boldsymbol{x}_1 = (\omega_\Sigma^1, \omega_\Sigma^2)$) — сильную Парето-границу.

б) Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых неотрицательных ценах.

74. Пусть, как и в Примере 3, потребители имеют линейные функции полезности с положительными коэффициентами,

$$u_1 = \alpha_1 x_1^1 + \beta_1 x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = \alpha_2 x_2^1 + \beta_2 x_2^2,$$

совокупные начальные запасы экономики положительны ($\omega_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от значений коэффициентов.

75. Пусть в ситуации Примера 4 ($u_1 = \ln x_1^1 + \ln x_1^2$, $u_2 = x_2^1 + x_2^2$) совокупные начальные запасы экономики положительны ($\omega_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от величины начальных запасов.

76. Первый потребитель имеет функцию полезности с "толстой" кривой безразличия

$$u_1 = \begin{cases} x_1^1 x_1^2 & x_1^1 x_1^2 < 2 \\ 2 & 2 \leqslant x_1^1 x_1^2 \leqslant 3 \\ x_1^1 x_1^2 - 1 & x_1^1 x_1^2 \geqslant 3 \end{cases}$$

и

$$u_2 = x_2^1 + x_2^2.$$

В ситуации Примера 5 при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально сильную и слабую границы Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие. Как соотносятся между собой эти три множества?

77. В ситуации Примера 6 ($u_1 = -(x_1^1 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2$, $u_2 = 2x_2^1 + x_2^2$) при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

78. В ситуации Примера 7 ($u_1 = x_1^1 + \sqrt{x_1^2}$, $u_2 = x_2^2$) при положительных совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

## *Задачи к главе*

79. Покажите, что в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, если предпочтения гомотетичны и одинаковы, то граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта. Как найти равновесие в такой экономике, используя свойства границы Парето?

80. В моделях общего равновесия часто рассматривают альтернативную концепцию допустимого состояния экономики, заменяя балансы благ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk},\ \forall k \in K$$

на полубалансы

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk},\ \forall k \in K.$$

Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_A$.

Равновесием в этом случае называют набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой, что:

— цены $\bar{\boldsymbol{p}}$ неотрицательны;

— каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\beta_i = \sum_{k\in K} \bar{p}_k\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j$;

— каждый вектор $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

— состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ является допустимым;

— выполнен закон Вальраса, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_{j=1}^{n}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

Рассмотрите экономику с одним дополнительным производителем, технологическое множество которого имеет вид $Y_{n+1} = -\mathbb{R}^l_+$ (технология утилизации благ без издержек), и балансами в виде равенств. Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_U$. Рассмотрите равновесие в этой экономике и продемонстрируйте его эквивалентность равновесию в экономике $\mathcal{E}_A$, а именно:

(1) Покажите, что в любом равновесии экономики $\mathcal{E}_U$ цены благ неотрицательны.

(2) Покажите, что если $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$, то $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, где

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{n+1} = \sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j=1}^{n}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

(3) Покажите, что если $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, тогда $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$.

81. Рассмотрим модель обмена с $m$ потребителями. *Коалицией* называется любое подмножество множества потребителей. Говорят, что коалиция $S$ *блокирует* данное состояние экономики $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$, если существует состояние экономики $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$, такое что $\boldsymbol{y}_s \succ_s \boldsymbol{x}_s$ и $\sum_{s\in S}\boldsymbol{y}_s \leqslant \sum_{s\in S}\boldsymbol{\omega}_s$, где $\boldsymbol{\omega}_i$ — начальные запасы потребителя $i$, а $\succ_i$ — его предпочтения (другими словами, участники коалиции могут, обмениваясь только друг с другом, улучшить свое положение, по сравнению с рассматриваемым состоянием $\boldsymbol{x}$). Наконец, *ядро* данной экономики состоит из распределений $\boldsymbol{x}$, которые не блокируются ни одной из коалиций.

Предположим, что допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}$.

(1) Докажите, что если предпочтения потребителей строго монотонны и непрерывны, то каждое распределение из ядра Парето-оптимально.

(2) Покажите, приведя соответствующий контрпример, что отказ от условия строгой монотонности делает утверждение, вообще говоря, неверным.

(3) Докажите следующий аналог первой теоремы благосостояния: если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то равновесное распределение принадлежит ядру экономики.

82. Найти в соответствующей модели обмена с двумя потребителями и двумя благами (и потребительским множеством, удовлетворяющим ограничениям $\boldsymbol{x}_i \geqslant 0$) и с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_1 = (1;\, 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (1;\, 1)$

- равновесие,
- границу Парето,
- ядро.

Функции полезностей обоих потребителей одинаковы и имеют вид

(A) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$;

(B) $u(x_1, x_2) = \alpha_1\sqrt{x_1} + \alpha_2\sqrt{x_2}$;

(C) $u(x_1, x_2) = \alpha_1\sqrt{x_1} + \alpha_2 x_2$;

(D) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} \exp(\alpha_2 x_2)$.

83. Какими свойствами обладает равновесие в модели Эрроу-Дебре с локально ненасыщаемыми предпочтениями и строго положительными начальными запасами потребителей в случае, если технологические множества $Y_j$ производителей, вообще говоря, не выпуклы (Предположите, что $\mathbf{0} \in Y_j$). Аргументируйте свой ответ.

84. Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными (но, вообще говоря, не строго монотонными) предпочтениями. Аргументируйте свой ответ.

85. Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными и строго выпуклыми предпочтениями. Аргументируйте свой ответ.

86. Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными и строго выпуклыми предпочтениями. Аргументируйте свой ответ.

87. Предположим, что предпочтения потребителей в модели обмена допускают представление линейными функциями полезности. Какие свойства этих функций гарантируют, что каждое равновесие этой модели ...

(1) принадлежит слабой границе Парето;

(2) принадлежит сильной границе Парето.

88. Могут ли в экономике обмена с одинаковыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

89. Могут ли в экономике обмена с одинаковыми выпуклыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

90. Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и положительность начальных запасов не гарантирует, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

91. Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и выпуклость предпочтений не гарантирует, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

92. Покажите, что выпуклость предпочтений потребителей и Парето-эффективность состояния экономики с начальными запасами в качестве потребительских наборов не гарантирует, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

93. Покажите, что в экономике обмена прирост начальных запасов потребителя может привести к падению его полезности в точке равновесия.

*Указание*. Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями с одинаковыми предпочтениями, описываемыми следующей квазилинейной функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + x_2,$$

рассмотрите сравнительную статику потребителя 1 в зависимости от изменения начальных запасов $\omega_1$ и $\omega_2$.

94. (1) Предположим, что в экономике обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными квазилинейными сепарабельными предпочтениями происходит перераспределение начальных запасов. Покажите, что если начальные запасы потребителя возрастают, то его полезность не может упасть.

(2) Рассмотрим передачу ресурсов от первого потребителя ко второму, как и выше, но на этот раз предпочтения не квазилинейные. Предположите, что передаваемое количество мало и что изменение (относительное) равновесной цены мало. Покажите, что полезность потребителя 1 может упасть. Проинтерпретируйте с точки зрения соотношения между эффектом замены и эффектом дохода.

(3) Покажите, что в экономике с двумя товарами и двумя потребителями этот парадокс может произойти только в случае единственности равновесия. (Подсказка: Покажите, что если передача начальных запасов потребителя 1 ведет к уменьшению его полезности то-

гда в первоначальной ситуации должно существовать еще одно равновесие с еще более низким уровнем полезности у потребителя 1).

# 4. Квазилинейная экономика и частное равновесие

В этой главе мы рассмотрим теоретическое основание моделей **частного равновесия**, то есть таких моделей, в которых рассматривается равновесие на рынке одного товара в предположении, что цены всех остальных товаров остаются фиксированными.

Как известно, спрос и предложение каждого блага в моделях *общего равновесия* зависят, вообще говоря, от цен всех рассматриваемых благ. Такая зависимость не позволяет анализировать рынки благ по отдельности, поскольку изменения на одном рынке влияют на ситуацию на других рынках, приводя к сдвигу кривых спроса и предложения на этих рынках. Это, в свою очередь, приводит к сдвигам кривых спроса и предложения на данном рынке и т.д. Поэтому частный равновесный анализ оказывается корректным только в ситуациях, когда указанные зависимости отсутствуют. Это случай так называемых квазилинейных предпочтений. Если предпочтения потребителей квазилинейны, то функция спроса, соответствующая этим предпочтениям характеризуется отсутствием эффекта дохода. Если к тому же предпочтения и технологии сепарабельны, то рынки оказываются полностью независимыми и при изменениях на одном из них состояния прочих рынков остаются неизменными. В данной главе нам предстоит проиллюстрировать сказанное. Таким образом, экономика с квазилинейными сепарабельными предпочтениями годится для моделирования ситуаций, в которых в первом приближении можно пренебречь эффектом дохода и взаимозависимостью рынков.

Приведем соответствующие обозначения и определения. Рассмотрим экономику с $l+1$ благом, $m$ потребителями и $n$ производителями. Будем обозначать через $I=\{1,\dots,m\}$ множество потребителей, а через $J=\{1,\dots,n\}$ множество производителей.

Предположим, что предпочтения $i$-го потребителя описываются функцией полезности следующего вида: $u_i(x_{i1},\dots,x_{il},z_i)=v_i(x_{i1},\dots,x_{il})+z_i$. Эту функцию полезности принято называть **квазилинейной**. Последнее благо будем интерпретировать как деньги.[63] В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что величина $z_i$ может принимать и отрицательные значения.[64] Будем предполагать, что множество физически допустимых потребительских наборов потребителя $i$ задано ограничениями $x_{ik}\geqslant 0$.

Каждый потребитель сталкивается с бюджетным ограничением, формируемым его начальными запасами и доходами, получаемыми от владения финансовыми активами. Пусть каждый потребитель обладает начальными запасами только $(l+1)$-го блага. Другими словами, начальный запас потребителя $i$ имеет вид $(0,0,\dots,0,\omega_i)$, причем $\omega_i\geqslant 0$. Предполагается также, что потребитель $i\in I$ получает доход от владения активами в виде долей от прибыли фирм. Числа $\gamma_{ij}\geqslant 0, i\in I, j\in J$ задают распределение прав на получение прибыли, т.е. $\gamma_{ij}$ обозначает долю потребителя $i$ в прибыли фирмы $j$.

Производители в модели представлены технологиями вида $(y_1,\dots,y_l,-r)$, где $y_k\geqslant 0$ для всех $k=1,\dots,l$ — объемы выпуска первых $l$ благ, а $r\geqslant 0$ — затраты последнего $l+1$-го блага на производства первых $l$ благ. Таким образом, предполагается, что единственным затрачи-

---

[63] Тем самым мы имеем в виду следующую интерпретацию: рассматриваемая нами экономика является малой частью некоторой большей экономики, в которой эти деньги можно потратить на покупку производящихся там товаров.

[64] Это предположение введено для упрощения анализа. В дальнейшем предлагаются условия, которые гарантируют неотрицательность значений $z_i$ в рассматриваемых состояниях равновесия.

ваемым благом в каждом технологическом процессе является $(l+1)$-ое благо — деньги.[65] В анализе удобно описывать технологии с помощью **функции издержек** $c_j(y_1,\dots,y_l)$ (которая каждому вектору объемов первых $l$ благ сопоставляет необходимые для производства этих объемов затраты $(l+1)$-го блага). Для того чтобы формально установить связь функции издержек с технологическим множеством предприятия $j$ ($Y_j$), рассмотрим следующую задачу:

$$r \to \min_r$$

$$(y_1,\dots,y_l,-r) \in Y_j.$$

Функция $c_j(\boldsymbol{y})$ сопоставляет каждому вектору выпусков $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_l)$ значение целевой функции этой задачи. В предположении замкнутости технологического множества оптимальное решение существует, если существует хотя бы одно допустимое решение. В дальнейшем мы будем предполагать, что множество значений выпусков $\boldsymbol{y}$, при которых существует допустимое решение рассматриваемой задачи, совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Это означает, что функция издержек $c_j(\cdot)$ определена на множестве $\mathbb{R}^l_+$, т.е. все неотрицательные выпуски возможны. Заметим, что выпуклость множества $Y_j$ гарантирует выпуклость функции $c_j(\cdot)$.

Заметим, что функция издержек однозначно описывает технологическое множество в том случае, если выполнения для $\boldsymbol{y}$ и $r$ неравенств

$$r \geqslant c_j(\boldsymbol{y}),$$

$$\boldsymbol{y} \geqslant 0,$$

эквивалентно принадлежности множеству допустимых технологий $Y_j$ соответствующего вектора $(\boldsymbol{y},-r)$. Для этого можно дополнительно потребовать, чтобы технологическое множество $Y_j$ удовлетворяло свойству свободы расходования (можно «выбрасывать» блага), то есть, чтобы из допустимости технологии $(\boldsymbol{y},-r)$ всегда следовала допустимость технологии $(\boldsymbol{y}',-r')$, такой что $(\boldsymbol{y}',-r') \leqslant (\boldsymbol{y},-r)$.

Мы будем рассматривать два типа экономик. В одной из них (экономика $\mathcal{E}_Q$) предполагается, что потребитель не сталкивается с ограничением типа $z_i \geqslant 0$ (может «брать в долг» неограниченную сумму денег). В другой это ограничение принимается (экономика $\mathcal{E}^+_Q$).

Под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1,z_1),\dots,(\boldsymbol{x}_m,z_m),(\boldsymbol{y}_1,r_1),\dots,(\boldsymbol{y}_n,r_n)\}$, что выполнены неравенства:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk} \ \forall k=1,\dots,l,$$

$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j = \sum_{i\in I} \omega_i,$$

$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j) \ \forall j \in J,$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \ \forall i \in I, \quad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0 \ \forall j \in J.$$

Соответственно, под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}^+_Q$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1,z_1),\dots,(\boldsymbol{x}_m,z_m),(\boldsymbol{y}_1,r_1),\dots,(\boldsymbol{y}_n,r_n)\}$, что выполнены все вышеприведенные условия, и, кроме того, $z_i \geqslant 0 \ \forall i \in I$.

---

[65] Вообще говоря, мы можем предполагать, что некоторые из первых $l$ благ затрачиваются в производстве, и для них может выполняться $y_j<0$; это никак не изменит выводов.

## Характеристика Парето-оптимальных состояний в квазилинейных экономиках

Квазилинейностью предпочтений потребителей объясняется ряд особых свойств рассматриваемой экономики. В частности, анализировать Парето-оптимальные состояния в квазилинейной экономике можно с помощью следующей задачи оптимизации:

$$\sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j) \to \max{}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk} \;\forall k = 1, \ldots, l, \qquad (\mathcal{W})$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \;\forall i \in I,$$

$$\boldsymbol{y}_j \geqslant 0 \;\forall j \in J.$$

Другими словами, верна следующая теорема, дающая полное описание границы Парето экономики $\mathcal{E}_Q$.

**Теорема 1.**

Состояние $\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ является Парето-оптимальным состоянием в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$ тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи $(\mathcal{W})$,

$$\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)$$

и

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

***Доказательство***:

1) Докажем сначала, что если $\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ — Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$, то набор $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$.

Напомним, что Парето-оптимальное состояние при любом $i_0 \in I$ является решением следующей задачи условной максимизации:

$$v_{i_0}(\boldsymbol{x}_{i_0}) + z_{i_0} \to \max$$

$$v_i(\boldsymbol{x}_i) + z_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i \;\forall i \neq i_0$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk} \;\forall k = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i,$$

$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j) \;\forall j \in J,$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \;\forall i \in I, \quad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0 \;\forall j \in J.$$

Как несложно показать, в этой задачи первое, третье и четвертое неравенства можно заменить на равенства, не изменяя множество решений задачи. Выражая из этих равенств $z_i$ и $r_j$ и исключая их из оставшихся неравенств, видим, что данная задача сводится к задаче $(\mathcal{W})$.

2) Обратно, пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$. Рассмотрим произвольные $\hat{z}_j$, удовлетворяющие балансам

$$\sum_{i\in I}\hat{z}_i = \sum_{i\in I}\omega_i - \sum_{j\in J}\hat{r}_j, \qquad (\star)$$

где $\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)\ \forall j$. Легко увидеть, что состояние

$$\hat{S} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \dots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \dots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$$

является допустимым состоянием экономики $\mathcal{E}_Q$. Докажем, что оно Парето-оптимально. Пусть это не так, и существует другое допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_Q$,

$$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \dots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \dots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

такое что для всех потребителей $(i \in I)$

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i,$$

и существует, по крайней мере, один потребитель $i_0$, для которого выполнено

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \hat{z}_{i_0}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I}\tilde{z}_i > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I}\hat{z}_i. \qquad (\star\star)$$

Поскольку $\tilde{S}$ — допустимое состояние, то

$$\sum_{i\in I}\tilde{z}_i + \sum_{j\in J}\tilde{r}_j = \sum_{i\in I}\omega_i$$

и

$$\tilde{r}_j \geqslant c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j), \ \ j \in J,$$

откуда

$$\sum_{i\in I}\tilde{z}_i \leqslant \sum_{i\in I}\omega_i - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j). \qquad (\star\star\star)$$

Складывая $(\star)$, $(\star\star)$ и $(\star\star\star)$, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j) > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Поскольку $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{y}}_n)$ является допустимым в задаче $(\mathcal{W})$, то это означает, что существование состояния $\tilde{S}$ противоречит оптимальности $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ в задаче $(\mathcal{W})$.

■

Первая часть доказанной теоремы для экономики $\mathcal{E}_Q^+$ в общем случае не верна (см. нижеприведенный пример). Вторая часть верна при дополнительном предположении о том, что совокупные начальные запасы достаточно велики.

Как видно из вышеприведенной теоремы, задача поиска Парето-оптимума для экономики $\mathcal{E}_Q$ эквивалентна задаче $(\mathcal{W})$. В то же время множество допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q^+$ является подмножеством множества допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q$. Поэтому не исключена ситуация, в которой Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ не является Парето-оптимумом экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, не будет решением задачи $(\mathcal{W})$.

Несложно придумать пример экономики $\mathcal{E}_Q^+$ и Парето-оптимума этой экономики, так чтобы в этом Парето-оптимуме ограничение $z_i \geqslant 0$ оказалось существенным для одного из потребителей, и при снятии этого ограничения можно было бы увеличить полезность одного из потребителей, не уменьшая полезность остальных. Читатель может сконструировать такой пример самостоятельно.

Но даже если в Парето-оптимуме экономики $\mathcal{E}_Q^+$ все ограничения $z_i \geqslant 0$ выполняются как строгие неравенства, снятие данных ограничений может позволить осуществить Парето-улучшение. Приведем пример.

**Пример 1.**

Рассмотрим экономику с одним потребителем ($m=1$), одним производителем ($n=1$) и двумя благами ($l+1=2$). Для упрощения обозначений индексы будем опускать. Предпочтения потребителя заданы функцией $v(x)=5x^3-9x^2+6.9x$, а технологическое множество фирмы — функцией издержек $c(x)=x^4$. Обе функции являются возрастающими при $x \geqslant 0$, поэтому $y=x$, $r=c(x)$ и $z+r=\omega$, так что поиск Парето-оптимума сводится к максимизации функции

$$v(x)-c(x)$$

при ограничениях $x \geqslant 0$ и $c(x) \leqslant \omega$. Здесь ограничение $c(x) \leqslant \omega$ соответствует ограничению $z \geqslant 0$. Можно переписать последнее ограничение в виде $x \leqslant c^{-1}(\omega)$.

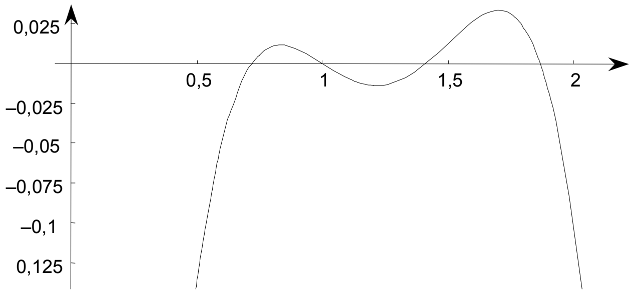


Рисунок 44. Пример существенности ограничения неотрицательности линейного члена

Пусть $\omega=1$, при этом $c^{-1}(\omega)=1$. Как видно на Рис. 44 функция $v(x)-c(x)$ имеет два локальных максимума: $x_1 \approx 0.83473$ и $x_2 \approx 1.6988$. Только второй из этих максимумов является глобальным. Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ достигается при $x=x_1$, поскольку максимизация идет на отрезке $[0,1]$. В то же время Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, решение задачи $(\mathcal{W})$ достигается при $x=x_2$.

⇦

В этом примере ключевым моментом является то, что функция $v(\cdot)$ не является вогнутой. Можно было построить подобный пример иначе: так, чтобы функция $v(\cdot)$ была вогнутой, но функция издержек не была выпуклой. Таким образом, для доказательства аналога первой части предыдущей теоремы в «выпуклой» экономике $\mathcal{E}_Q^+$ следует потребовать, чтобы все функции $v_i(\cdot)$ были вогнутыми, а функции $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ — выпуклыми. Аналогом этой теоремы для случая экономики $\mathcal{E}_Q^+$ является следующая теорема.

**Теорема 2.**

1) Предположим, что функции $v_i(\cdot)$ вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, и пусть

$$\hat{S}=\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{z}_1),\dots,(\hat{\boldsymbol{x}}_m,\hat{z}_m),(\hat{\boldsymbol{y}}_1,\hat{r}_1),\dots,(\hat{\boldsymbol{y}}_n,\hat{r}_n)\}\text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q^+$, причем $\hat{z}_i>0\ \forall i$. Тогда набор $(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{x}}_m,\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$.

2) Обратно, пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{x}}_m,\hat{\boldsymbol{y}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$, причем

$$\sum_{i\in I}\omega_i-\sum_{j\in J}c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)\geqslant 0.$$

Тогда для произвольных $\hat{z}_1,\dots,\hat{z}_m\geqslant 0$, удовлетворяющих балансам

$$\sum_{i\in I}\hat{z}_i=\sum_{i\in I}\omega_i-c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)$$

набор $\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{z}_1),\dots,(\hat{\boldsymbol{x}}_m,\hat{z}_m),(\hat{\boldsymbol{y}}_1,c_1(\hat{\boldsymbol{y}}_1)),\dots,(\hat{\boldsymbol{y}}_n,c_n(\hat{\boldsymbol{y}}_n))\}$ является Парето-оптимальным состоянием квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q^+$.

***<u>Доказательство</u>***:

1) Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение: если $\hat{S}$ — Парето-оптимум в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, удовлетворяющий условиям теоремы, то он также является Парето-оптимумом в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$. Если это утверждение верно, то доказываемое является тривиальным следствием предыдущей теоремы.

Докажем это вспомогательное утверждение от противного. Пусть в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$ существует допустимое состояние

$$\tilde{S}=\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1,\tilde{z}_1),\dots,(\tilde{\boldsymbol{x}}_m,\tilde{z}_m),(\tilde{\boldsymbol{y}}_1,\tilde{r}_1),\dots,(\tilde{\boldsymbol{y}}_n,\tilde{r}_n)\},$$

которое доминирует по Парето состояние $\hat{S}$.

Рассмотрим выпуклую комбинацию этих двух состояний:

$$S(\alpha)=\alpha\hat{S}+(1-\alpha)\tilde{S},\ \ \alpha\in[0,\,1].$$

Существует достаточно малое $\alpha>0$, такое что $S(\alpha)$ является допустимым в экономике $\mathcal{E}_Q^+$. Однако при $\alpha>0$ состояние $S(\alpha)$ представляет собой Парето-улучшение в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ по сравнению с $\hat{S}$, что противоречит предположению теоремы.

Подробное изложение доказательства оставляется в качестве упражнения.

2) Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Приведенные выше результаты позволяют нам в случае квазилинейной экономики использовать задачу $(\mathcal{W})$ для анализа Парето-оптимальных состояний.

В ситуации, когда функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, решение задачи $(\mathcal{W})$ единственно, поэтому два Парето-оптимальных состояния в экономике $\mathcal{E}_Q$ (в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, если $\tilde{z}_i$ и $\check{z}_i$ положительны)

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \dots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \dots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

$$(\check{\boldsymbol{x}}_1, \check{z}_1), \dots, (\check{\boldsymbol{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\boldsymbol{y}}_1, \check{r}_1), \dots, (\check{\boldsymbol{y}}_n, \check{r}_n)\}, \text{ —}$$

могут различаться лишь объемами потребления $(l+1)$-го блага. Другими словами, $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \check{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i \in I$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}_j = \check{\boldsymbol{y}}_j$ $\forall j \in J$.

Поэтому, как несложно заметить, в случае экономики $\mathcal{E}_Q$ граница Парето представляет собой гиперплоскость вида (читателю предлагается доказать этот результат самостоятельно)

$$\sum_{i \in I} u_i = const.$$

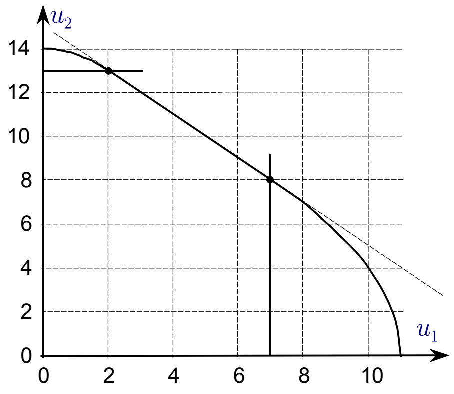


Рисунок 45. Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_Q^+$

В экономике $\mathcal{E}_Q^+$ граница Парето может «загибаться» из-за того, что некоторые из ограничений $z_i \geqslant 0$ являются существенными, что иллюстрирует следующий пример.

**Пример 2.**

На Рис. 46. изображена Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_Q^+$ со следующими параметрами: 2 блага ($l+1=2$), 2 потребителя, с функциями полезности

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = 4\sqrt{x_2} + z_2,$$

и один производитель с функцией издержек

$$c(y) = y.$$

Начальные запасы 2-го блага равны 10.

Несложно проверить, что решение задачи $(\mathcal{W})$ дает $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Однако это решение описывает точки границы Парето только при $u_1 \in [2; 7]$. Парето-граница при этом имеет вид

$$u_2 = 15 - u_1.$$

При $u_1 \in [0; 2]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 14 - \frac{u_1^2}{4}.$$

При $u_1 \in [7; 11]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 4\sqrt{11 - u_1}.$$

⇦

В случае двух благ можно привести графическую иллюстрацию Парето границы экономики типа $\mathcal{E}_Q^+$ на основе диаграммы Эджворта (см. Рис. 46). Жирная линия представляет собой границу Парето.

Так как в достаточно широком классе случаев решения задачи $(\mathcal{W})$ описывают Парето-границу, то целевую функцию задачи $(\mathcal{W})$ можно использовать для решения вопроса о принадлежности некоторого допустимого состояния к Парето-границе. В связи с этим, естественно рассматривать функцию

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i)-\sum_{j\in J}c_j(\boldsymbol{y}_j)$$

в качестве индикатора благосостояния. Основанием для этого является следующая теорема.

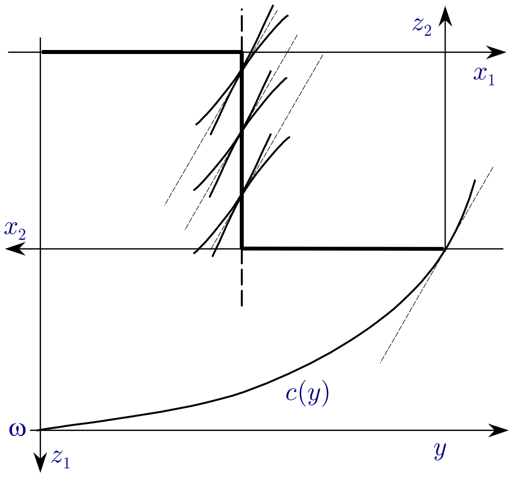


Рисунок 46. Парето-граница экономики типа $\mathcal{E}_Q^+$ на основе диаграммы Эджворта

Пусть

$$\tilde{S}=\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1,\tilde{z}_1),\ldots,(\tilde{\boldsymbol{x}}_m,\tilde{z}_m),(\tilde{\boldsymbol{y}}_1,\tilde{r}_1),\ldots,(\tilde{\boldsymbol{y}}_n,\tilde{r}_n)\},$$

$$\check{S}=\{(\check{\boldsymbol{x}}_1,\check{z}_1),\ldots,(\check{\boldsymbol{x}}_m,\check{z}_m),(\check{\boldsymbol{y}}_1,\check{r}_1),\ldots,(\check{\boldsymbol{y}}_n,\check{r}_n)\} \text{ —}$$

допустимые состояния экономики $\mathcal{E}_Q$ ($\mathcal{E}_Q^+$). Тогда выполнено следующая теорема.

**Теорема 3.**

1) Если каждый из потребителей в состоянии $\tilde{S}$ имеет не меньшую полезность, чем в состоянии $\check{S}$, т.е.

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)+\tilde{z}_i\geqslant v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i)+\check{z}_i\ \forall i,$$

и

$$\sum_{i\in I}\check{z}_i+\sum_{j\in J}c_j(\check{\boldsymbol{y}}_j)=\sum_{i\in I}\omega_i,^{66}$$

то

---

[66] Это условие будет, например, выполнено в общем равновесии.

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \geqslant W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}),$$

причем если существует потребитель $i_0$, такой что

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\check{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \check{z}_{i_0}$$

(т.е. состояние $\tilde{S}$ доминирует $\check{S}$ по Парето), то

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}).$$

2) Для экономики $\mathcal{E}_Q$ выполнено и обратное: если для состояний $\tilde{S}$ и $\check{S}$ верно $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, то можно подобрать $\tilde{z}'_1, \ldots, \tilde{z}'_m$ такие, что состояние экономики

$$\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}'_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}'_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

будет допустимым, причем

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}'_i > v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i) + \check{z}_i \ \forall i.$$

***Доказательство***:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Первая часть данного утверждения говорит о том, что любое Парето-улучшение сопровождается ростом индикатора $W(\cdot)$. Смысл второй части приведенного утверждения состоит в том, что если $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, то можно в состоянии $\tilde{S}$ произвести такие трансферты (перераспределить деньги), что новое состояние будет строго доминировать состояние $\check{S}$ по Парето. Заметим, что некоторые $z_i$ при этом могут оказаться отрицательными, поэтому вторая часть утверждения неприменима к экономике $\mathcal{E}_Q^+$.

В Парето-оптимуме квазилинейной экономики индикатор благосостояния достигает максимума. Пусть $\hat{W}$ — это максимальное значение. Разность между $\hat{W}$ и уровнем индикатора $W(S)$ в некотором состоянии $S$ называется **чистыми потерями благосостояния**:

$$DL = \hat{W} - W(S).$$

Сравнение уровней благосостояния в анализируемом состоянии и в идеальной ситуации позволяет количественно оценить, насколько далеко данное неэффективное состояние от границы Парето, и сколько экономика в целом теряет вследствие неэффективности.

## Характеристика поведения потребителей в квазилинейных экономиках

В дальнейшем сравниваются потребительские наборы, которые оказываются рыночными равновесиями при различных организациях рынков (совершенная конкуренция, монополия, олигополия и т.д.). При этом всюду предполагается, что потребители рассматривают рыночные цены как данные. Другими словами, определяя предпочитаемый потребительский набор $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ при рыночных ценах благ $(p, 1)$, потребитель в экономике $\mathcal{E}_Q$ решает следующую задачу:

$$\begin{gathered} v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) + z_i \to \max \\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i + z_i \leqslant \beta_i \qquad\qquad (\mathcal{C}_Q) \\ x_{ik} \geqslant 0. \end{gathered}$$

Соответствующая задача в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ включает дополнительное ограничение $z_i \geqslant 0$. (Будем обозначать эту задачу через $\mathcal{C}_Q^+$). Здесь через $\beta_i$ обозначен доход потребителя.

Имеют место следующие результаты, характеризующие оптимальный выбор потребителя.

**Теорема 4.**

Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_Q$ при ценах $\boldsymbol{p}$. Тогда $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением следующей задачи

$$v_i(x_{i1},\dots,x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max$$

$$x_{ik} \geqslant 0. \qquad (☺)$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи (☺), тогда $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \beta_i - \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_Q$ при ценах $\boldsymbol{p}$.

*__Доказательство__*:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Это означает, что спрос потребителя на первые $l$ благ не зависит от его дохода. Аналог этого результата верен и в случае задачи $\mathcal{C}_Q^+$, когда допустимые потребительские наборы удовлетворяют дополнительному условию $z_i \geqslant 0$, что показывает следующая теорема.

**Теорема 5.**

Предположим, что $v_i(\cdot)$ — вогнутая функция, а $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$,— решение задачи потребителя $\mathcal{C}_Q^+$ при ценах $\boldsymbol{p}$ (соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q^+$), такое что $\bar{z}_i > 0$. Тогда $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением следующей задачи

$$v_i(x_{i1},\dots,x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max$$

$$x_{ik} \geqslant 0 \ \forall k \qquad (😐)$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи (😐), и $\beta_i \leqslant \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$, тогда $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \beta_i - \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_Q^+$ при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе $\beta_i$.

*__Доказательство__*:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Предположим дополнительно, что $v_i(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для решения задачи оптимального выбора потребителя $\mathcal{C}_Q$ (или $\mathcal{C}_Q^+$ при $z_i > 0$) должно выполняться следующее условие

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \leqslant \boldsymbol{p},$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Таким образом, если решение задачи потребителя внутреннее ($\bar{\boldsymbol{x}}_i > \mathbf{0}$) и, кроме того, $z_i > 0$ в случае задачи $\mathcal{C}_Q^+$), то

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \boldsymbol{p}.$$

Другими словами, градиент функции $v_i(\cdot)$, вычисленный для набора благ, совпадающего с рыночным спросом потребителя, равен вектору рыночных цен этих благ. Таким образом, градиент функции $v_i(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x}_i)$ $i$-го потребителя — вектор цен первых $l$ благ, при котором потребитель предъявляет спрос именно на этот набор благ.

В классе квазилинейных экономик важную роль играет случай когда предпочтения всех потребителей, помимо свойства квазилинейности обладают свойством сепарабельности, т.е. функции полезности таких потребителей представимы в виде

$$u_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) + z_i = \sum_k v_{ik}(x_{ik}) + z_i.$$

Если функция полезности $i$-го потребителя имеет такой вид, то задачу потребителя $\mathcal{C}_Q$ можно разложить на $l$ задач — по одной на каждое благо кроме $(l+1)$-го:

$$v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik} \to \max_{x_{ik} \geqslant 0} \qquad (\mathcal{C}_{Qk})$$

**Теорема 6.**

Если $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_Q$ при ценах $\boldsymbol{p}$, то $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ при цене $p_k$. Обратно, если $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ при цене $p_k$ при $k = 1, \ldots, l$, то $\bar{\boldsymbol{x}}_i = (\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{il})$ — решение задачи $\mathcal{C}_Q$ при $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_l)$.

***<u>Доказательство</u>***:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Из данной теоремы следует, что функция спроса на $k$-е благо зависит только от цены на это благо, т.е. имеет вид $x_{ik}(p_k)$.

В этом случае (при условии дифференцируемости) необходимое условие оптимальности потребительского набора $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ (как в случае экономики $\mathcal{E}_Q$, так и в случае $\mathcal{E}_Q^+$ при $z_{i>}0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k,$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0,$ то

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Это условие является также и достаточным, если $v_{ik}(\cdot)$ — вогнутые функции.

Из Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следует, что, вместо исходной задачи мы можем использовать для анализа спроса на $k$-е благо задачу $\mathcal{C}_{Qk}$. Мы будем предполагать, что функция $v_{ik}(x_{ik})$ дважды дифференцируема, имеет положительную производную и строго вогнута. Строгая вогнутость гарантирует, в числе прочего, что если решение задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ существует, то оно единственно. Очевидно, что это решение есть значение функции спроса рассматриваемого потребителя на $k$-е благо при данном $p_k$, $x_{ik}(p_k)$.

Рассмотрим условия существования решения задачи $\mathcal{C}_{Qk}$. (Заметим, что из Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следует, что решение исходной задачи $\mathcal{C}_Q$ в случае сепарабельной функции полезности существует тогда и только тогда, когда существуют решения задач $\mathcal{C}_{Qk}$ при любом $k=1,\dots,l$.)

Введем обозначения [67]

$$\bar{p}=\sup{}_{x_{ik}>0}\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

и

$$\underline{p}=\inf{}_{x_{ik}>0}\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Легко видеть, что при любом $p_k$, таком что $\underline{p}<p_k<\bar{p}$, решение задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ существует. Действительно в силу непрерывности функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$, существует $x_{ik}$, такое что

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_k}=p_k.$$

Это $x_{ik}$ должно быть решением задачи потребителя при ценах $p_k$.

Кроме того, при ценах $p_k\leqslant\underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{Qk}$ не имеет решения. Покажем это. Пусть при $p_k\leqslant\underline{p}$ существует решение $x_{ik}(p_k)\geqslant 0$. Тогда должно выполняться необходимое условие оптимума (условие первого порядка)

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}\leqslant p_k.$$

Откуда в силу того, что $p_k\leqslant\underline{p}$ имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}\leqslant\inf{}_{x_{ik}>0}\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

Рассмотрим теперь значение функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$ в точке $x_{ik}(p_k)+\varepsilon$. В силу убывания этой функции имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k)+\varepsilon)}{\partial x_{ik}}<\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}$$

при любом $\varepsilon>0$. Откуда получаем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k)+\varepsilon)}{\partial x_{ik}}<\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}\leqslant\inf{}_{x_{ik}>0}\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}=\underline{p}.$$

Так как $x_{ik}(p_k)+\varepsilon>0$, мы получили противоречие с определением инфимума. Тем самым, предположив существование решения задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ при $p_k\leqslant\underline{p}$ мы пришли к противоречию, а значит полностью обосновали то, что при $p_k\leqslant\underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{Qk}$ не имеет решения.

Покажем теперь, что $x_{ik}(p_k)\to 0$ при $p_k\to\infty$. Рассмотрим для этого два случая: $\bar{p}=\infty$ и $\bar{p}<\infty$.

Пусть $\bar{p}=\infty$. При $p_k>\underline{p}$, по доказанному ранее решение $x_{ik}(p_k)$ задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ существует, причем оно будет внутренним ($x_{ik}(p_k)>0$), так как любое значение $p_k>\underline{p}$ по непрерывности

---

[67] $\bar{p}$ — это так называемая цена «удушения» спроса.

функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$ может быть реализовано при соответствующем подборе $x_{ik}$. Это означает, что условие первого порядка в этой задаче выполнено как равенство при $p_k > \underline{p}$:

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_k} = p_k,$$

и оно определяет функцию спроса $x_{ik}(p_k)$ при $p_k > \underline{p}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{p_k^n\}$, такую что

$$\lim_{n\to\infty} p_k^n = \infty.$$

Выделим из последовательности $\{p_k^n\}$ возрастающую подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$. На основании подпоследовательности цен $\{p_k^{n_s}\}$ построим соответствующую ей последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ по правилу

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}^{n_s})}{\partial x_{ik}} = p_k^{n_s}.$$

Так как $\lim_{s\to\infty} p_k^{n_s} = \infty$, то в силу строгой вогнутости функции полезности имеем, что последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ убывает, причем $x_{ik}^{n_s+1} < x_{ik}^{n_s}$. Как мы отметили выше при $p_k > \underline{p}$ решение задачи $\mathcal{C}_{Qk}$ является внутренним и, таким образом, $x_{ik}^{n_s} > 0\ \forall\ n_s$, но каждая убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел. Пусть $\tilde{x}_{ik}$ — предел этой последовательности объемов спроса и $\tilde{x}_{ik} > 0$. Тогда, как нетрудно заметить, подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$ имеет (в силу непрерывности $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$) конечный предел $\partial v_{ik}(\tilde{x}_{ik})/\partial x_{ik}$, что противоречит ее построению. Получив противоречие, мы доказали, тем самым, что $\tilde{x}_{ik} = 0$ и тем самым, что $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Пусть теперь $\overline{p} < \infty$. Тогда в силу убывания функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$ имеет место равенство

$$\overline{p} = \lim_{x_{ik}\to 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}} = \max_{x_{ik}\geqslant 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Тогда при любой цене $p_k \geqslant \overline{p}$ выполнено

$$\frac{\partial v_{ik}(0)}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k.$$

Отсюда следует, что при $p_k \geqslant \overline{p}$ спрос на данное благо равен нулю, т.е. $x_{ik}(p_k) = 0$, поскольку в силу вогнутости целевой функции это необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Отметим, что так как функция полезности в задаче $\mathcal{C}_{Qk}$ является *строго* вогнутой, то $x_{ik}(p_k) = 0$ — *единственное* решение этой задачи. Тем самым мы доказали, что в общем случае $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

### Потребительский излишек: определение, связь с прямой и обратной функциями спроса

Пользуясь выведенными выше характеристиками потребительского выбора, проанализируем связь оценки $v_i(\boldsymbol{x}_i)$ с площадью под кривой спроса потребителя.

Пусть $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$, т.е. является спросом потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$. Величина

$$CS_i = v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i - v_i(\boldsymbol{0})$$

называется **потребительским излишком**. В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что $v_i(\boldsymbol{0}) = 0$.

Мы рассмотрим случай квазилинейных сепарабельных функций полезности, т.е. $v_i(x_{i1},\ldots,x_{il})=\sum_{k=1}^{l} v_{ik}(x_{ik})$. Потребительский излишек при этом получается суммированием потребительских излишков, получаемых потребителем на рынках отдельных благ:

$$CS_i=\sum_{k=1}^{l}(v_{ik}(x_{ik})-p_k x_{ik})=\sum_{k=1}^{l} CS_{ik},$$

где $CS_{ik}=v_{ik}(x_{ik})-p_k x_{ik}$.

В этом случае геометрически излишек потребителя на рынке $k$-го блага равен площади фигуры, лежащей под графиком функции обратного спроса выше цены этого блага (см. Рис. 47).

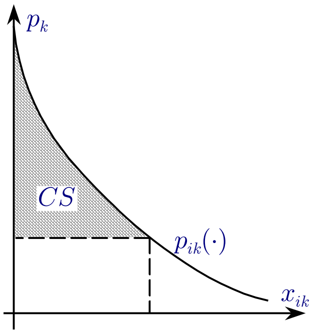


Рисунок 47. Излишек потребителя

Поясним это. Рассмотрим потребительский излишек как функцию цен:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l}[v_{ik}(x_{ik}(p_k))-p_k x_{ik}(p_k)] = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p_k).$$

Функции $CS_{ik}(p_k)=v_{ik}(x_{ik}(p_k))-p_k x_{ik}(p_k)$ определены при всех ценах $p_k \geqslant \underline{p}$ и, кроме того, не могут быть отрицательными.[68]

Как было доказано, $x_{ik}(p_k)\to 0$ при $p_k\to\infty$, откуда $v_{ik}(x_{ik}(p_k))\to 0$ при $p_k\to\infty$. Поскольку $p_k x_{ik}(p_k)\leqslant v_{ik}(x_{ik}(p_k))$, то при росте цены блага расходы на его приобретение стремятся к нулю, т.е. $p_k x_{ik}(p_k)\to 0$ при $p_k\to\infty$.

Функция $CS_i(\boldsymbol{p})$ является дифференцируемой, если функция полезности дважды дифференцируема. Дифференцируя ее, получаем (с учетом условий первого порядка для задачи потребителя), что при $x_{ik}(p_k)>0$

$$x_{ik}(p_k)=-\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}=-\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

(Читателю предоставляется проверить этот факт самостоятельно).

Если $x_{ik}(t)>0$ при всех $t\geqslant p_k$, то проинтегрировав обе части этого дифференциального уравнения, получим

$$-\int_{p_k}^{\infty}\frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t}dt=\int_{p_k}^{\infty}x_{ik}(t)dt.$$

Откуда

---

[68] Так как $x_{ik=}0$ является допустимым в задаче $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$, то $CS_{ik}(p_k)=v_{ik}(x_{ik}(p_k))-p_k x_{ik}(p_k) \geqslant v_{ik}(0)-p_k\cdot 0=0$, и, тем самым, $CS_{ik}(p_k) \geqslant 0$.

$$CS_{ik}(p) - \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = \int_p^\infty x_{ik}(t)dt,$$

что позволяет выразить излишек потребителя $i$ от потребления блага $k$ в виде

$$CS_{ik}(p) = \int_p^\infty x_{ik}(t)dt + \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t).^{69}$$

Поскольку второе слагаемое в этом соотношении равно нулю:

$$\lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = 0,$$

то

$$CS_{ik}(p) = \int_p^\infty x_{ik}(t)dt.$$

В силу того, что функция $p_{ik}(\cdot)$ является обратной к функции $x_{ik}(\cdot)$, имеет место соотношение[70]

$$CS_{ik}(p) = \int_0^{x_{ik}(p)} p_{ik}(q)dq - px_{ik}(p),$$

В итоге, общий потребительский излишек получаем суммированием этих интегралов по всем рынкам:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{l} \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \int_0^{x_{ik}(p)} p_{ik}(t)dt - p\sum_{k=1}^{l} x_{ik}(p).$$

## *Характеристика поведения производителей в квазилинейных экономиках*

Напомним, что в рассматриваемом случае технологию каждого производителя представляет функция издержек. Если технологическое множество выпукло, то функция издержек является выпуклой. В этом параграфе мы приведем постановки задачи потребителя при различных предположениях о типе конкуренции с которым сталкивается производитель.

Предположим, что $j$-й производитель сталкивается с функцией обратного спроса на производимые им блага вида

$$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j).$$

Здесь мы отходим от предположения о совершенстве конкуренции — производители не рассматривают цены как данные.

В предположении (обычном для неоклассической парадигмы), что производитель выбирает объемы производства соответствующих благ, максимизирующие прибыль, задача $j$-го производителя имеет вид:

---

[69] Заметим, что если существует цена $\bar{p}_k$, такая что $x_k(t) > 0$ при всех $t < \bar{p}_k$ и $x_k(t) = 0$ при всех $t \geqslant \bar{p}_k$, то при $p_k \leqslant \bar{p}_k$

$$-\int_{p_k}^{\bar{p}_k} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\bar{p}_k} x_{ik}(t)dt.$$

[70] Равенство доказывается интегрированием по частям и заменой переменных.

$$\pi_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j) \to \max\nolimits_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0}.$$

Если функции $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}_j)$ и $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ дифференцируемы, то необходимое условие оптимальности выпуска $\boldsymbol{y}_j$ производителя $j$ имеет вид

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + p_{jk}(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) \leqslant 0,$$

причем если $y_{jk} > 0$, то

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}_k(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) = 0.$$

В случае, если функции полезности сепарабельны, спрос на каждое благо зависит только от его цены. В этом случае цена любого блага зависит только от продаваемого количества блага:

$$p_{jk} = p_{jk}(y_{jk}).$$

Предположим также, что функция издержек производителя также сепарабельна, т.е.

$$c_j(\boldsymbol{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} c_{jk}(y_{jk}).$$

В этом случае прибыль имеет вид

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{l} [p_{jk}(y_{jk})y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})].$$

Задача максимизации прибыли распадается, таким образом на $l$ задач. Условия первого порядка приобретают более простой вид:

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) = c'_{jk}(y_{jk}).$$

И наконец, если цена спроса не зависит от продаваемого объема блага,

$$p_{jk}(y_{jk}) = const,$$

(производители принимают цены как данные, в отрасли складывается ситуация совершенной конкуренции), то $p'_{jk}(y_{jk}) = 0$ и условия первого порядка приобретают вид

$$p_{jk} \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Последнее соотношение задает функцию предложения $k$-го блага $j$-м предприятием. Это функция зависит только от цены $k$-го блага.

### Излишек производителя

Предположим, что производитель рассматривает цену как данную, или, другими словами, цена спроса не зависит от продаваемого объема, и цены у всех производителей одинаковы и равны $\boldsymbol{p}$. В качестве излишка производителя при ценах $\boldsymbol{p}$ будем рассматривать его прибыль при этих ценах, т.е.

$$PS_j = \pi_j = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j).$$

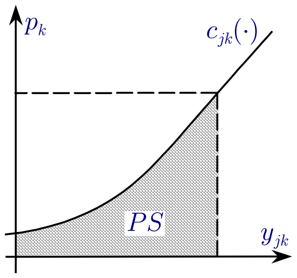


Рисунок 48. Излишек производителя

В случае, если функция издержек сепарабельна, излишек производителя можно представить как сумму излишков по $l$ рынкам:

$$PS_j=\sum_{k=1}^{l}[p_k y_{jk}-c_{jk}(y_{jk})]=\sum_{k=1}^{l}PS_{jk}.$$

Можно представить излишек производителя на $k$-м рынке в виде интеграла:

$$PS_{jk}=\int_0^{y_{jk}}[p_{k-}c'_{jk}(t)]dt-c_{jk}(0).$$

Он равен (с точностью до константы $c_{jk}(0)$) площади фигуры, образуемой прямой, проходящей через точку $(0,p_{jk})$ параллельно оси абсцисс, и кривой предельных издержек $c'_{jk}(y_{jk})$ (кривой предложения). В случае, когда $c_{jk}(0)=0$ получаем, что излишек производителя равен

$$PS_{jk}=\int_0^{y_{jk}}[p_{k-}c'_{jk}(t)]dt.$$

## Связь излишков потребителя и производителя с индикатором благосостояния

Предположим, что $\{(\boldsymbol{x}_1,z_1),\ldots,(\boldsymbol{x}_m,z_m),(\boldsymbol{y}_1,r_1),\ldots,(\boldsymbol{y}_n,r_n)\}$ — допустимое состояние экономики, причем $(\boldsymbol{x}_i,z_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_Q$ $i$-го потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j.$$

Тогда

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i)-\sum_{j\in J}c_j(\boldsymbol{y}_j)=$$

$$=\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i+\sum_{j\in J}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j-c_j(\boldsymbol{y}_j))=CS+PS,$$

где

$$CS=\sum_{i\in I}CS_i$$

— суммарный потребительский излишек,

$$PS=\sum_{j\in J}\pi_j(\boldsymbol{p})=\sum_{j\in J}PS_j(\boldsymbol{p})$$

— суммарный излишек производителей.

Другими словами, индикатор благосостояния $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, соответствующий любому равновесию, равен сумме излишков потребителей и производителей.

Заметим, что если $\boldsymbol{p}$ — равновесный вектор, предпочтения локально ненасыщаемы, то условия

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

выполнены. Заметим также, что в этом случае состояние экономики Парето-оптимально, и поэтому $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ достигает максимума на множестве допустимых состояний.

В сепарабельной экономике излишки потребителей и производителей представляют собой суммы соответствующих излишков на $l$ рынках:

$$CS=\sum_{k=1}^{l}CS_k,\quad PS=\sum_{k=1}^{l}PS_k.$$

## Представление суммарного спроса посредством модели репрезентативного потребителя

Очень часто при изучении моделей частного равновесия бывает удобно использовать предположение о том, что суммарный спрос порождается решением задачи *одного* потребителя. В том случае, когда такой потребитель существует, его называют **репрезентативным потребителем**.

Покажем, что в экономике $\mathcal{E}_Q$ репрезентативный потребитель всегда существует.

Пусть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ — вектор спроса $i$-го потребителя на первые $l$ благ при ценах $\boldsymbol{p}$. Тогда суммарный спрос всех потребителей равен

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})=\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

В этих обозначениях репрезентативный потребитель будет порождать своими предпочтениями суммарный спрос $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$.

Покажем что репрезентативный потребитель в этих условиях существует, причем его предпочтения на множестве потребительских наборов $(\boldsymbol{x},z)$, $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$, могут быть представлены квазилинейной функцией полезности вида:

$$u(\boldsymbol{x},z)=v(\boldsymbol{x})+z.$$

Рассмотрим следующую задачу (задачу максимизации суммы полезностей от потребления 1-го блага при фиксированном количестве $\bar{x}$ этого блага):

$$\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i)\to\max{}_{x_1,\ldots x_m}$$

$$\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i\leqslant\bar{\boldsymbol{x}}. \qquad (❄)$$

$$\boldsymbol{x}_i\geqslant 0$$

Тогда в качестве $v(\boldsymbol{x})$ мы можем взять значение этой задачи при $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}$. Покажем, что $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$ является решением задачи репрезентативного потребителя с функцией полезности, $u(\boldsymbol{x},z)=v(\boldsymbol{x})+z$, при любом векторе цен $\boldsymbol{p}>\boldsymbol{0}$.

Предположим противное. Как мы видели, задачу представительного потребителя в случае квазилинейных предпочтений можно записать в эквивалентной форме:

$$v(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}\to\max{}_{x\geqslant 0}.$$

Пусть существует $\tilde{\boldsymbol{x}}\geqslant\boldsymbol{0}$, такой что

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}>v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}))-\boldsymbol{p}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}).$$

При этом, так как $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})=\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$, и $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$, то должно быть выполнено

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}>\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))-\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}x_i(\boldsymbol{p}).$$

Заметим, что $v(\tilde{\boldsymbol{x}})=\sum_{i\in I}v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$, где $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{x}}$. Таким образом имеем

$$\sum_{i\in I}v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)-\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\geqslant\sum_{i\in I}v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)-\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}>\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))-\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Но это означает, что по крайней мере для одного из потребителей выполнено

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)-\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i>v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))-\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}),$$

что противоречит оптимальности набора $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$.

Докажем, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}))=\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})),$$

другими словами, индикатор благосостояния в экономике с одним представительным потребителем упорядочивает интересующие нас состояния экономики так же, как и индикатор благосостояния первоначальной экономики.

Предположим противное. Случай $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}))<\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))$ невозможен, т.к. $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. Поэтому предположим, что существует $\boldsymbol{p}$ такое, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}))>\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. По определению $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}))=\sum_{i\in I}v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$. Значит,

$$\sum_{i\in I}v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)>\sum_{i\in I}v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i\in I}\hat{\boldsymbol{x}}_i\leqslant\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})=\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Умножим на $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\hat{\boldsymbol{x}}_i > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Получили требуемое противоречие.

## *Задачи к главе*

1. Докажите вторую часть Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

2. а) Постройте контрпример с вогнутыми функциями $v_i(\cdot)$ и выпуклыми функциями $c_j(\cdot)$, который бы показывал, что условие $\hat{z}_i > 0 \ \forall i$ существенно в первой части Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

б) Постройте контрпример, который бы показывал, что условие выпуклости функции издержек существенно в первой части Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

3. Докажите Теорему **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

4. Покажите, что в случае квазилинейной экономики без ограничений на квазилинейное благо ($\mathcal{E}_Q$) Парето-граница в координатах полезностей $u_i$ представляет собой гиперплоскость вида $\sum_{i\in I} u_i = const.$

5. Докажите Теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

6. Докажите, что при $x_k(p_k) > 0$ выполнено

$$x_k(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

7. Пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, и $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ — некоторый вектор цен, причем $\boldsymbol{x}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

Докажите, что

$$\sum_{i\in I} u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i) = W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \sum_{i\in I} \omega_i$$

8. В экономике два блага ($l+1=2$) и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1=\sqrt{x_1}+z_1$ и $u_2=2\sqrt{x_2}+z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

9. Решите предыдущую задачу с функциями полезности $u_1=-3/x_1^3+z_1$ и $u_2=-3/x_2^3+z_2$.

10. Потребители ($i=1,\ldots,m$) имеют квазилинейные функции полезности вида

(A) $u_i=2\alpha_i\sqrt{x_i}+z_i$, (B) $u_i=-\alpha_i^2\dfrac{1}{x_i}+z_i$, (C) $u_i=2\alpha_i\ln x_i+z_i$.

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя в каждом из случаев.

11. Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага ($l+1=2$). Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо $i$-го потребителя при ценах $p$, $D(p)=\sum x_i(p)$ — суммарный спрос потребителей на первое благо, и $p(x)=D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x\geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x)=\int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x)+z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

12. В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p)=\frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

# 5. Риск и неопределенность

Принятие экономическим субъектом решений в условиях риска (неопределенности) означает, что его благосостояние в будущем зависит от двух факторов: его решения в данный момент и от того, какое **состояние мира** (состояние природы) реализуется в будущем: какая будет погода, экономическая конъюнктура и т. п. Что именно произойдет, человек, принимающий решение, может только догадываться. Когда же определенное состояние реализуется, то принятое решение уже нельзя изменить.

Таким образом, для характеристики ситуации выбора в условиях неопределенности мы должны, в дополнение к **множеству возможных решений** $A$, описать **множество состояний мира** $S$ и множество исходов (результатов) принятия решений $X$. При этом исход $\boldsymbol{x}_a(s) \in X$, описывает, что «получает» данный субъект в состоянии мира $s \in S$, если принимает решение $a \in A$. Это может быть, например, некоторый набор из множества допустимых потребительских наборов. Часто рассматривают случай, когда $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$). В этом случае исходы обычно называют **выигрышами** (денежными выигрышами). Ряд положений теории выбора в условиях неопределенности не зависит от природы рассматриваемых исходов.

Предполагается, что на множестве состояний мира $S$ задано тем или иным способом распределение вероятностей. Этот объект называется вероятностным пространством. Тогда с точки зрения теории вероятностей множество состояний мира $S$ — это множество элементарных событий, а функция $\boldsymbol{x}_a(\cdot)$, описывающая исходы действия $a$ во всех состояниях мира, — это случайная величина. Соответствующую случайную величину мы будем обозначать $\tilde{\boldsymbol{x}}_a$. В дальнейшем, чтобы не усложнять анализ техническими деталями, мы, как правило, будем предполагать, что множество состояний мира $S$ конечно: $S = \{1, \ldots, N\}$. Тогда случайная величина $\tilde{\boldsymbol{x}}_a$ является дискретной и может быть описана таблицей

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | … | $N$ |
| $\mu_{a1}$ | $\mu_{a2}$ | … | $\mu_{aN}$ |
| $\boldsymbol{x}_{a1}$ | $\boldsymbol{x}_{a2}$ | … | $\boldsymbol{x}_{aN}$ |

Здесь $\mu_{as} \geqslant 0$ — вероятность того, что реализуется состояние мира $s$ при условии, что осуществлены действия $a$ (принято решение $a$). Сумма вероятностей равна единице: $\sum_{s \in S} \mu_{as} = 1$.

Мы будем часто говорить об $\tilde{\boldsymbol{x}}_a$ как о случайных величинах, но, вообще говоря, речь неявно идет и о соответствующих вероятностных пространствах. А именно, объект $\tilde{\boldsymbol{x}}_a$ включает в себя не только информацию о функции $\boldsymbol{x}_a(\cdot)$, но и о вероятностях состояний мира $\mu_{as}$, т.е. всю информацию, содержащуюся в приведенной таблице. Будем называть $\tilde{\boldsymbol{x}}_a$ случайным потребительским набором.

Как обычно, мы следуем неоклассической парадигме и предполагаем, что индивидуум осуществляет принятие решения в условиях риска на основании своих *предпочтений*. Вообще говоря, для предсказания поведения индивидуума достаточно задать его предпочтения на множестве альтернатив $A$. Однако хотелось бы иметь более общее описание, чтобы анализировать поведение в условиях риска не в одной конкретной ситуации, задаваемой набором исходов $\boldsymbol{x}_{as}$ и вероятностей состояний мира $\mu_{as}$, а в некотором достаточно богатом множестве таких ситуаций. Таким образом, следует предположить существование предпочтений на множестве $A \times \tilde{X}$ пар $(a, \tilde{\boldsymbol{x}})$, где случайный потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ включает исходы $\boldsymbol{x}_s$ и их вероятности $\mu_s$ $(s \in S)$.

Заметим, что, рассматривая предпочтения на $A\times\tilde{X}$, мы неявно предполагаем, что, вообще говоря, индивидууму не безразлично, какие действия $a$ он предпринял. Содержательно это означает, что при принятии решения важны как исходы $\boldsymbol{x}_s$ принятого решения при всех возможных состояниях мира $S$, так и (говоря неформально) возможные издержки получения исходов, связанные с действиями $a$.

Однако все последствия предпринятых действий мы можем включить в наборы $\boldsymbol{x}_s$, так что сами по себе действия $a$ будут носить «нейтральный» характер. Другими словами, мы без потери общности можем рассматривать ситуацию, когда экономическому субъекту безразлично, какое решение привело к данным результатам:

> Для любых двух решений $a, b \in A$ и любого случайного потребительского набора $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}$ выполнено $(a, \tilde{\boldsymbol{x}}) \sim (b, \tilde{\boldsymbol{x}})$.

Таким образом, мы можем считать, что предпочтения заданы на множестве $\tilde{X}$.

Множество возможных случайных потребительских наборов, $\tilde{X}$, должно быть достаточно богатым. Удобно предположить, что оно имеет структуру $X\times M$, где $M$ — множество (симплекс) всех возможных векторов вероятностей $\mu = \{\mu_s\}_{s\in S}$, удовлетворяющих естественным требованиям $\mu_s \geqslant 0\ \forall s \in S$ и $\sum\limits_{s\in S}\mu_{as} = 1$.

В следующих двух параграфах мы покажем, что при некоторых предположениях относительно предпочтений на множестве $\tilde{X}$ существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$ особого вида (линейная по вероятностям состояний мира). Этот материал может быть пропущен без ущерба для понимания последующего изложения.

## Представление предпочтений линейной функцией полезности

Как уже сказано выше, мы будем исходить из того, что у принимающего решение индивидуума имеются некоторые предпочтения $\{\succsim, \succ, \sim\}$ на $\tilde{X}$. Как обычно, будем при этом предполагать, что предпочтения являются неоклассическими (в частности, отношение $\succ$ отрицательно транзитивно и асимметрично):

**(A1′)** На $A\times\tilde{X}$ заданы неоклассические предпочтения $\{\succsim, \succ, \sim\}$.

Как известно, если предпочтения являются неоклассическими (рациональными) и непрерывными, они могут быть представлены функцией полезности. В этом параграфе, опираясь на результаты последующего, мы покажем, что при выполнении некоторых дополнительных предположений относительно предпочтений, представляющая их функция полезности имеет некоторый специальный вид.

Итак, наша цель состоит в том, чтобы доказать, что представляющая рассматриваемые предпочтения функция полезности имеет вид:

$$U(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{s\in S}\mu_s u(x_s).$$

Функция $U(\cdot)$ такого вида называется **функцией Неймана—Моргенштерна** (**ожидаемой полезностью**), а функция $u(\cdot)$, заданная на множестве исходов $X$, — **элементарной функцией полезности** (функцией Бернулли)[71].

Первое предположение, которое требуется сделать, состоит в том, что для потребителя не имеет значение само по себе состояние мира. Это предположение позволяет характеризовать предпочтения на случайных потребительских наборах $\tilde{\boldsymbol{x}}$ посредством предпочтений на лотереях — объектах более простой природы. Если для потребителя не имеет значение само по себе состояние мира, и потребление $\boldsymbol{x}_s$ в нескольких различных состояниях мира совпадает, то можно «объединить» эти состояния и сложить вероятности. Получившийся объект и будет называться лотереей. Покажем, как построить такие лотереи и осуществить соответствующий переход к предпочтениям на них.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — случайный потребительский набор. Рассмотрим множество $\{\dot{\boldsymbol{x}}_j\}$ всех различных между собой исходов $\boldsymbol{x}_s$ из этого случайного набора, которым соответствуют положительные вероятности (другими словами, это носитель соответствующей случайной величины). Каждому исходу $\dot{\boldsymbol{x}}_j$ сопоставляется вероятность $\boldsymbol{p}_j$, равная сумме вероятностей состояний мира, в которых исход равен $\dot{\boldsymbol{x}}_j$, то есть

$$\boldsymbol{p}_j = \sum_{s:x_s=\dot{x}_j} \mu_s.$$

Такие объекты (множества различных исходов и их вероятности) принято называть **лотереями** на множестве $X$. Построенную на основе исходного случайного потребительского набора $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}$ лотерею будем обозначать $\ell(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Множество построенных таким образом лотерей будем обозначать $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \{\ell(\tilde{\boldsymbol{x}}) \,|\, \tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}\}.$$

Если потребовать, чтобы при сравнении разных $\tilde{\boldsymbol{x}}$ принимались во внимание только исходы и вероятности их получения, то предпочтения на множестве $\tilde{X}$ порождают предпочтения на множестве лотерей, порожденных этими величинами. В таком случае можно рассматривать непосредственно лотереи и предпочтения на множестве лотерей. Таким образом, мы предполагаем, что исходные предпочтения на $\tilde{X}$ удовлетворяют следующему свойству:

**(A1″)** Если для $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{X}$ выполнено $\ell(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \ell(\tilde{\boldsymbol{y}})$, то $\tilde{\boldsymbol{x}} \sim \tilde{\boldsymbol{y}}$.

Несложно понять, что предпочтения на множестве $\mathcal{L}$, построенные на основе исходных, будут неоклассическими.

Дальнейшее изложение не зависит от способа задания множества лотерей $\mathcal{L}$ и предпочтений на нем. Поскольку многие ситуации выбора изначально представляются как ситуации выбора на множестве лотерей, то приведенный ниже анализ имеет и самостоятельное значение.

Если множество состояний мира $S$ достаточно «большое» и множество $\tilde{X}$ достаточно богато, то и множество лотерей $\mathcal{L}$ будет достаточно представительным. Мы будем предпо-

---

[71] Эта функция впервые была выведена на основе аксиом Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их знаменитой книге John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944 (рус. пер.: Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970). Сама идея ожидаемой полезности появилась гораздо раньше (см. напр. работу Даниила Бернулли упоминаемую в сноске 76 на стр. 249).

лагать, что множество лотерей $\mathcal{L}$ содержит все так называемые простые лотереи, выделяемые следующим определением.

**Определение**

Под **простой лотереей** мы будем понимать лотерею с конечным носителем, т.е. пару $(X_p, \boldsymbol{p})$, где $X_p$ — конечное подмножество множества исходов $X$, а $\boldsymbol{p}$ — вектор вероятностей получения исходов из $X_p$.

Если множество состояний мира конечно, то все лотереи из множества $\mathcal{L}$ будут простыми. Однако при этом $\mathcal{L}$ не может содержать *все* простые лотереи, поскольку количество исходов в носителе лотереи не может быть больше числа состояний мира.

Вначале мы охарактеризуем условия существования функции полезности Неймана—Моргенштерна для предпочтений, заданных на множестве, состоящем только из простых лотерей. Позже мы поясним, как этот результат распространить на более общий случай.

Простую лотерею можно представить следующей таблицей:

| $\dot{\boldsymbol{x}}_1$ | $\dot{\boldsymbol{x}}_2$ | ... | $\dot{\boldsymbol{x}}_k$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

В дальнейшем удобно простую лотерею представлять в виде функции $p(\cdot)$ заданной на всем множестве $X$, считая, что $p(\boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x} \notin X_p$ и $p(\boldsymbol{x}_j) = p_j$. Тогда без потери общности простую лотерею $(X_p, \boldsymbol{p})$ можно отождествлять с $\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}$ понимается как сокращенное обозначение функции $p(\cdot)$. В дальнейшем будем придерживаться этого упрощения. Будем обозначать соответствующее $\boldsymbol{p}$ множество $X_p$, т.е. носитель лотереи, через $Supp(\boldsymbol{p})$.

$$Supp(\boldsymbol{p}) = \{x \in X \,|\, p(\boldsymbol{x}) > 0\}.$$

Понятно, что по определению вероятности

$$\sum\nolimits_{x \in Supp(\boldsymbol{p})} p(\boldsymbol{x}) = 1.$$

Множество всех простых лотерей участника обозначим $\mathcal{S}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что предпочтения заданы на всех возможных парах элементов множества $\mathcal{S}$.

Как уже говорилось из предположений (A1′) и (A1″) следует, что предпочтения на лотереях являются неоклассическими (рациональными). Поскольку в дальнейшем мы будем работать только с простыми лотереями, то переформулируем исходные предположения в терминах этих лотерей:

**(A1)** На множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ заданы неоклассические предпочтения $\{\succsim, \succ, \sim\}$.

Кроме рациональности предпочтений на лотереях, нам потребуется также сделать два важных предположения о свойствах комбинаций лотерей.

**Определение 1.**

Для любой пары простых лотерей $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0; 1]$ определим **выпуклую комбинацию** (смесь) $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$ как простую лотерею, носителем которой является объединение носителей лотерей $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$Supp(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = Supp(\boldsymbol{p}) \cup Supp(\boldsymbol{q}),$$

а вероятность исхода $\boldsymbol{x}$ рассчитывается по формуле

$$\alpha p(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) q(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in Supp(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}).$$

Построение выпуклой комбинации лотерей с различающимися множествами исходов иллюстрирует Рис. 49.

Одна из возможных интерпретаций операции выпуклой комбинации лотерей $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ состоит в том, что рассматривается двухэтапная лотерея: лотерея с двумя исходами, которые в свою очередь являются обычными одноэтапными лотереями. В первоначальной лотерее вероятности равны $\alpha$ и $1-\alpha$: с вероятностью $\alpha$ реализуется исход $\boldsymbol{p}$, а с вероятностью $1-\alpha$ — исход $\boldsymbol{q}$. При этом предполагается, что оценка лотереи потребителем не зависит от способа ее реализации: двухэтапная и соответствующая ей одноэтапная лотереи эквивалентны. То есть в оценке любой лотереи потребитель ориентируется лишь на исходы этой лотереи и вероятности, с которыми эти исходы реализуются, что и подразумевает предположение **(A1″)**. Так, две показанные на Рис. 49 лотереи эквивалентны, поскольку приводят в конечном итоге к одним и тем же исходам с одинаковыми вероятностями этих исходов, и поэтому их можно рассматривать как одну и ту же альтернативу.

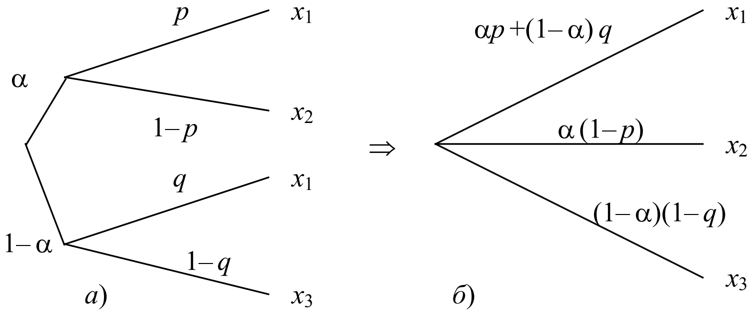


Рисунок 49. (а) Две простые лотереи, $p$ и $q$ и (б) их выпуклая комбинация $p\blacklozenge\alpha\blacklozenge q$

Легко понять, что множество всех простых лотерей $\mathcal{S}$ содержит все выпуклые комбинации своих элементов: если $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathcal{S}$, тогда $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}\in\mathcal{S}$, $\forall\alpha\in[0,1]$. Но ясно, что для произвольного подмножества множества $\mathcal{S}$ это свойство может не выполняться.

Мы будем исходить из того, что для выпуклых комбинаций лотерей выполнены следующие два предположения:

**(A2)** *Аксиома независимости от посторонних альтернатив*:

> Пусть $\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея. Тогда для любого $\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$ выполняется соотношение $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}\succ\boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

Эту аксиому можно интерпретировать через двухэтапные лотереи. Предположим, что индивидуум считает лотерею $\boldsymbol{p}$ более предпочтительной, чем $\boldsymbol{q}$. Ему предлагают выбрать заранее, что он предпочтет — $\boldsymbol{p}$ или $\boldsymbol{q}$, и проводят лотерею, исходами которой с вероятностями $\alpha$ и $1-\alpha$ соответственно являются та из лотерей $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, которую он выбрал, и лотерея $\boldsymbol{r}$. Ясно, что он выберет $\boldsymbol{p}$. Но это, фактически, то же, что выбирать между двумя двухэтапными лотереями: лотереей, где исходами являются $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{r}$ с вероятностями $\alpha$ и $1-\alpha$ соответственно, и лотерей, где исходами являются $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ с вероятностями $\alpha$ и $1-\alpha$. Следовательно, индивидууму следует выбрать первую из этих двухэтапных лотерей, что и означает, что $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}\succ\boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

**(A3)** *Аксиома исчерпания Архимеда*:

> Если $\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{r}$, то существуют числа $\alpha,\beta\in(0;1)$, такие что
>
> $$\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}\succ\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{r}.$$

Эта аксиома утверждает, что если лотерея $\boldsymbol{q}$ лучше $\boldsymbol{r}$, но хуже $\boldsymbol{p}$, то не может быть так, чтобы *все* нетривиальные смеси лотерей $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{r}$ были либо лучше, либо хуже $\boldsymbol{q}$: найдется хотя бы одна смесь, которая хуже $\boldsymbol{q}$, и хотя бы одна смесь, которая лучше $\boldsymbol{q}$.

При этих предположениях предпочтения на простых лотереях задаются функцией, которая линейна по вероятностям (имеет вид Неймана—Моргенштерна).

**Определение**

Функция полезности $U(\cdot)$, представляющая предпочтения на простых лотереях, называется **функцией полезности Неймана—Моргенштерна**, если существует определенная на множестве исходов $X$ функция $u(\cdot)$, такая что

$$U(\boldsymbol{p}) = \sum\nolimits_{x \in Supp(\boldsymbol{p})} p(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}).$$

Мы хотим доказать следующий результат[72].

**Теорема 1.**

Если предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ удовлетворяют предположениям (A1)-(A3), то существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$, имеющая вид Неймана—Моргенштерна. Такое представление единственно с точностью до линейного преобразования.

Теорема 49 указывает предположения о предпочтениях на простых лотереях (на множестве $\mathcal{S}$), гарантирующие существование функции полезности $U(\boldsymbol{p})$, имеющей вид Неймана—Моргенштерна. Этих предположений, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы гарантировать существование подобной функции полезности на более сложных лотереях. Однако, если в дополнение к свойствам (A1)-(A3) предположить, что предпочтения определены на множестве всех лотерей, заданных на $X$, (т.е. борелевских вероятностных мер на множестве $X$) и непрерывно (в слабой топологии) на этом множестве, то построенную функцию $U(\boldsymbol{p})$ можно определить на любой вероятностной борелевской мере стандартным способом, поскольку множество простых мер является плотным во множестве всех борелевских мер. Читатель может попробовать доказать соответствующие утверждения самостоятельно, обращаясь, в случае необходимости, к учебникам по математическому анализу и топологии.

Таким образом, мы можем определить полезность $U$ как функцию от лотереи $\boldsymbol{p} \in \mathcal{L}$. Покажем, что эта же функция задает предпочтения на множестве исходных случайных величин $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}$.

Действительно эта функция (рассматриваемая как функция $U(\tilde{\boldsymbol{x}})$), обладает тем свойством, что если случайным величинам $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}$ соответствует одна и та же лотерея, то по предположению (A1″) $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}$ эквивалентны, и, следовательно, $U(\tilde{\boldsymbol{x}}) = U(\tilde{\boldsymbol{y}})$. При этом функция $U(\tilde{\boldsymbol{x}})$ оказывается линейной по исходным вероятностям $\mu_s$. Для того, чтобы это показать, следует вспомнить, как мы построили вероятности $p(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in Supp(\boldsymbol{p})$, на основе исходных вероятностей $\mu_s$:

---

[72] Здесь используется не та систему аксиом, которая предложена в книге фон Неймана и Моргенштерна. Здесь мы используем ставший традиционным подход Н. Йенсена (N. E. Jensen "An Introduction to Bernoullian Utility Theory, I: Utility functions", *Swedish Journal of Economics*, 69 (1967), 163-83).

$$U = \sum\nolimits_{x \in Supp(\boldsymbol{p})} p(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) = \sum_j p_j u(\dot{x}_j) = \sum_j \sum_{s: x_s = \dot{x}_j} \mu_s u(x_j) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).$$

Окончательно получаем следующий вид для функции полезности, представляющей исходные предпочтения на $\tilde{X}$:

$$U(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).$$

Заметим, что, в соответствии с определением функции Неймана—Моргенштерна, ее можно записать в следующем виде

$$U(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathsf{E} u(\tilde{\boldsymbol{x}}).$$

где $\mathsf{E}$ — оператор математического ожидания. Заметим также, что этот вид не зависит от предположений о конечности множества состояний мира. Если это множество не является конечным, то соответствующие суммы по $s \in S$ заменяются интегралами. В дальнейшем мы чаще всего будем пользоваться оператором $\mathsf{E}$, а не соответствующей суммой, поскольку это упрощает обозначения и позволяет формулировать и доказывать утверждения в более общей форме. Что именно спрятано за оператором $\mathsf{E}$ имеет значение в основном тогда, когда требуется брать производные от $U(\cdot)$.

## *Доказательство существования представления предпочтений на множестве простых лотерей линейной функцией полезности*

В этом параграфе нам предстоит доказать Теорему 49. Для упрощения выкладок понадобятся некоторые свойства операции выпуклой комбинации лотерей. Доказательство их достаточно очевидно.

**Теорема 2.**

Операция выпуклой комбинации лотерей на множестве всех простых лотерей $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами:

- $\boldsymbol{p} \blacklozenge 1 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$,
- $\boldsymbol{p} \blacklozenge 0 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$,
- $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \blacklozenge (1 - \alpha) \blacklozenge \boldsymbol{p}$,
- $(\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}) \blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{p} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} \blacklozenge (\alpha\beta + (1 - \alpha)\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

Функция Неймана—Моргенштерна является линейной по вероятностям. Дадим общее определение линейности функции.

**Определение**

Будем называть функцию полезности $U(\cdot)$, представляющую предпочтения на лотереях, линейной, если для произвольных лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ верно соотношение

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1 - \alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

Докажем, что линейность функции полезности эквивалентна тому, что это функция Неймана—Моргенштерна.

**Теорема 3.**

Если $U(\cdot)$ является линейной функцией полезности, представляющей предпочтения на множестве лотерей $\mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда она имеет вид Неймана—Моргенштерна.

***Доказательство***:

Обозначим $\delta(\boldsymbol{x})$ лотерею, в которой $\boldsymbol{x}$ является единственным исходом, т.е.

$$Supp(\delta(\boldsymbol{x})) = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Определим функцию $u(\cdot)$ на множестве элементарных исходов $X$ по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = U(\delta(\boldsymbol{x})).$$

Тогда $U(\boldsymbol{p}) = \sum_{x \in Supp(\boldsymbol{p})} p(\boldsymbol{x})\ u(\boldsymbol{x})$. Докажем это утверждение по индукции.

Пусть утверждение доказано для лотерей с $k$ исходами, и пусть $\boldsymbol{p}$ — лотерея с $k$+1 исходом. Пусть $\boldsymbol{x}'$ — один из этих исходов, т.е. $\boldsymbol{x}' \in Supp(\boldsymbol{p})$. Тогда

$$\boldsymbol{p} = \delta(\boldsymbol{x}') \blacklozenge p(\boldsymbol{x}') \blacklozenge \boldsymbol{q},$$

где $\boldsymbol{q}$ — лотерея с $Supp(\boldsymbol{q}) = Supp(\boldsymbol{p}) \backslash \boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})/(1 - p(\boldsymbol{x}'))\ \forall \boldsymbol{x} \in Supp(\boldsymbol{q})$.

В силу линейности функции $U(\cdot)$

$$U(\delta(\boldsymbol{x}') \blacklozenge p(\boldsymbol{x}') \blacklozenge \boldsymbol{q}) = p(\boldsymbol{x}')\ u(\boldsymbol{x}') + (1 - p(\boldsymbol{x}')U(\boldsymbol{q}).$$

В силу предположения индукции

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{x \in Supp(\boldsymbol{q})} q(\boldsymbol{x})\ u(\boldsymbol{x}) = \sum_{x \in Supp(\boldsymbol{q})} p(\boldsymbol{x})/(1 - p(\boldsymbol{x}'))\ u(\boldsymbol{x}).$$

В итоге получим требуемый результат

$$U(\boldsymbol{p}) = (p(\boldsymbol{x}')\ u(\boldsymbol{x}') + (1 - p(\boldsymbol{x}'))\ (\sum_{x \in Supp(\boldsymbol{q})} p(\boldsymbol{x})/(1 - p(\boldsymbol{x}'))\ u(\boldsymbol{x})) =$$

$$= \sum_{x \in Supp(\boldsymbol{p})} p(\boldsymbol{x})\ u(\boldsymbol{x}).$$

Доказательство обратного достаточно очевидно.

■

Следующая теорема является обратной к той, которую мы хотим доказать.

**Теорема 4.**

Если предпочтения на множестве лотерей представимы линейной функцией полезности $U(\cdot)$, то эти предпочтения удовлетворяют свойствам (A1)-(A3).

***Доказательство***:

(A1) Свойство (A1) очевидно.

(A2) (независимость от посторонних альтернатив)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда $U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q})$.

Пусть $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, $\alpha$ — число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1 - \alpha) U(\boldsymbol{r}) >$$

$$> \alpha U(\boldsymbol{q}) + (1 - \alpha) U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{q} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}).$$

Поэтому $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{r}$.

(A3) (аксиома исчерпания Архимеда)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r}$, то есть

$$U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q}) > U(\boldsymbol{r}).$$

Тогда если

$$\alpha > \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\alpha\,(U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})) > U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})$, откуда по свойству линейности $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}$. Аналогично, если

$$\beta < \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

■

Если предпочтения участника на лотереях удовлетворяют аксиомам (A1)-(A3), то можно подобрать линейную функцию полезности, которая представляет предпочтения этого участника, притом такая линейная функция полезности единственна. Ниже мы докажем это[73], используя следующее вспомогательное предположение (теорема верна и без этого предположения[74]):

**(A4)** Множество $\mathcal{S}$ содержит наихудший $\boldsymbol{w}$ и наилучший $\boldsymbol{b}$ элементы:

$$\boldsymbol{w} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{b} \quad \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathcal{S}.$$

Для доказательства этого докажем ряд утверждений. Всюду предполагается, что выполнены свойства (A1)-(A4).

В случае, когда $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{w}$, все лотереи из множества $\mathcal{S}$ эквивалентны и построение функции полезности с нужными свойствами не вызывает труда:

$$U(\boldsymbol{p}) = C,$$

где $C$ — произвольное число. (Понятно, что константа — линейная функция.) Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\boldsymbol{w} \succ \boldsymbol{b}$.

### Теорема 5.

Для любой пары лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, таких что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, и пары чисел $\alpha, \beta \in [0,1]$ условие

$$\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\beta > \alpha.$$

***Доказательство***:

Докажем сначала, что из $\beta > \alpha$ следует $\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$.

---

[73] Эти доказательства можно сделать более элегантными, если предположить конечность множества $X$.

[74] См. напр. Peter C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley, 1970. (рус. пер.: П. Фишбёрн. Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978). Ниже предлагается доказать это утверждение самостоятельно в виде серии утверждений.

В случае $\alpha\neq 0$ рассмотрим лотерею $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\frac{\alpha}{\beta}\blacklozenge\boldsymbol{q}$. Для нее выполнено

$$\boldsymbol{r}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}\blacklozenge\frac{\alpha}{\beta}\blacklozenge\boldsymbol{q})\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\frac{\alpha}{\beta}\,\beta\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}.$$

Так как $\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{q}$, то по аксиоме (A2) при $\frac{\alpha}{\beta}\in(0,1]$ выполнено

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\frac{\alpha}{\beta}\blacklozenge\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{p}\blacklozenge\frac{\alpha}{\beta}\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}.$$

Условие $\boldsymbol{p}\succ\boldsymbol{r}$ при $\beta\in(0,1]$ позволяет еще раз применить (A2):

$$\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{r}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q},$$

откуда получаем $\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$.

В предыдущем доказательстве нам требовалось, чтобы $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$. В случае $\alpha = 0$ соотношение $\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ выполнено, так как

$$\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge 0\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}$$

и кроме того по (A2) имеем $\boldsymbol{q}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}\prec\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}$.

Докажем обратное. Пусть для некоторых $\alpha$ и $\beta$ выполнено $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}\prec\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}$, но при этом $\alpha\geqslant\beta$. Если $\alpha>\beta$, то по только что доказанному $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}\succ\boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}$, что противоречит асимметричности строгого отношения предпочтения. Если же $\alpha = \beta$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{q}$, что противоречит нерефлексивности отношения $\succ$. Таким образом, утверждение доказано.

■

Будем обозначать через $\boldsymbol{f}(\alpha)$ выпуклую комбинацией лучшей и худшей лотерей с коэффициентом $\alpha\in[0,1]$, т.е

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = \boldsymbol{b}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{w}.$$

Обозначим множество таких лотерей через $\boldsymbol{f}([0,1])$. Напомним, что мы рассматриваем только случай $\boldsymbol{b}\succ\boldsymbol{w}$. Из определения функции $\boldsymbol{f}(\cdot)$ следует, что она задает взаимооднозначное соответствие между отрезком [0, 1] и множеством $\boldsymbol{f}([0,1])$, поскольку при $\alpha\neq\beta$ $\boldsymbol{f}(\alpha)\neq\boldsymbol{f}(\beta)$. Следующее утверждение показывает, что на основании функции $\boldsymbol{f}(\cdot)$ можно построить функцию полезности.

### Теорема 6.

Для любой лотереи $\boldsymbol{p}$ из $\mathcal{S}$ найдется единственное число $U(\boldsymbol{p})\in[0,1]$ такое, что справедливо $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p}))\sim\boldsymbol{p}$. Функция $U(\cdot)$ является функцией полезности, представляющей данные предпочтения.

***<u>Доказательство</u>***:

Для любой лотереи $\boldsymbol{p}\in\mathcal{S}$ нам нужно установить, что существует эквивалентная ей лотерея из $\boldsymbol{f}([0,1])$.

Когда $\boldsymbol{p}\sim\boldsymbol{b}$ либо $\boldsymbol{p}\sim\boldsymbol{w}$ доказательство существования числа $U(\boldsymbol{p})$ тривиально: оно равно 1 и 0 соответственно.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{w}\prec\boldsymbol{p}\prec\boldsymbol{b}$.

Обозначим множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые лучше $\boldsymbol{p}$, через $A^+$:

$$A^+ = \{\alpha\in[0,1] \mid \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha)\}.$$

Аналогично множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые хуже чем $\boldsymbol{p}$, обозначим $A^-$:

$$A^- = \{\alpha\in[0,1] \mid \boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{p}\}.$$

Эти два множества непусты, так как $1 \in A^+$ и $0 \in A^-$.

Так как множества $A^+, A^-$, непусты и ограничены, то существуют числа

$$\alpha^+ = \inf A^+,\ \alpha^- = \sup A^-.$$

Для этих чисел справедливо соотношение $\alpha^- \leqslant \alpha^+$; в противном случае нашелся бы общий элемент $\alpha\in A^-$, $\alpha\in A^+$, что противоречит нерефлексивности $\succ$.

Покажем, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-)$, т.е. $\alpha^+ \notin A^+$ и $\alpha^- \notin A^-$. Предположим противное. Пусть, например, $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha^+)$. В таком случае в силу (A3) существует $\gamma>0$, такое что для лотереи $\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+)$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{w}\blacklozenge\gamma\blacklozenge\boldsymbol{f}(\alpha^+) = \boldsymbol{w} \blacklozenge\gamma\blacklozenge (\boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha^+ \blacklozenge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha^+(1-\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)),$$

то это означает, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)) \succ \boldsymbol{p}$. Значит, $\alpha^+(1-\gamma) \in A^+$, а это противоречит определению числа $\alpha^+$. Итак, предположение $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}$ неверно. Поэтому $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p}$. Рассуждения для $\alpha^-$ аналогичны. Таким образом,

$$\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-).$$

Если сопоставить это с вытекающим из Теоремы 5 и $\alpha^- \leqslant \alpha^+$ соотношением

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^+),$$

то

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \sim \boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{f}(\alpha^+).$$

Таким образом, мы можем выбрать $U(\boldsymbol{p}) = \alpha^+$. Существование числа $U(\boldsymbol{p})$ доказано.

Единственность числа $U(\boldsymbol{p})$ следует из Теоремы 5.

Теперь покажем, что $U(\boldsymbol{p})$ есть функция полезности. Из Теоремы 5 следует, что из двух лотерей из $\boldsymbol{f}([0,1])$ хуже та, коэффициент которой меньше и обратно:

$$\boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{f}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Для двух произвольных лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{S}$ соотношение $\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q}$ эквивалентно тому, что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q}))$. Поэтому

$$\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q} \Leftrightarrow U(\boldsymbol{p}) < U(\boldsymbol{q}).$$

■

Докажем теперь, что построенная таким образом функция является единственной линейной функцией, представляющей рассматриваемые предпочтения.

**Теорема 7.**

Функция полезности $U(\cdot)$, такая что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, является линейной.

Эта функция — единственная (с точностью до линейного преобразования) линейная функция полезности, представляющая данные предпочтения.

***Доказательство***:

(Линейность)

Мы хотим доказать, что если $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{S}$, $\alpha \in [0,1]$, то выполнено

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

При $\alpha=0$ и $\alpha=1$ доказываемое очевидно.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Пусть утверждение теоремы неверно, например, для некоторых $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{S}$

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) < \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

Тогда можно подобрать числа $0 \leqslant \beta < U(\boldsymbol{p})$ и $0 \leqslant \gamma < U(\boldsymbol{q})$, такие что

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

откуда

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma).$$

По свойствам операции комбинирования лотерей

$$\boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) = \boldsymbol{b} \blacklozenge (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{w} =$$

$$= (\boldsymbol{b} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{w}) \blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{b} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Поскольку $\beta < U(\boldsymbol{p})$, то $\boldsymbol{f}(\beta) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, и по аксиоме (A2) получим

$$\boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Аналогичным образом, поскольку $\gamma < U(\boldsymbol{q})$, то верно соотношение $\boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q})) \sim \boldsymbol{q}$, и по аксиоме (A2)

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Получаем, в противоречие с нерефлексивностью отношения предпочтения $\prec$, цепочку соотношений

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Аналогичным образом можно прийти к противоречию, предположив, что $U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) > \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q})$. Значит,

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha) U(\boldsymbol{q}).$$

(Единственность)

Предположим, что $V(.)$ — другая линейная функция полезности. Обозначим

$$V^*(\boldsymbol{p}) = \frac{V(\boldsymbol{p}) - V(\boldsymbol{w})}{V(\boldsymbol{b}) - V(\boldsymbol{w})}.$$

Данное преобразование является линейным. Покажем, что $V^*(\boldsymbol{p}) = U(\boldsymbol{p})$. Поскольку $V(.)$ линейна, то $V^*(\boldsymbol{p})$ также линейна. Кроме того, функции $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают для худшей и лучшей лотерей:

$$V^*(\boldsymbol{w}) = U(\boldsymbol{w}) = 0 \text{ и } V^*(\boldsymbol{b}) = U(\boldsymbol{b}) = 1.$$

Это означает, что функции $V^*(.)$ и $U(.)$ в силу линейности совпадают на $\boldsymbol{f}([0,1])$. Поскольку любая лотерея из $\mathcal{S}$ эквивалентна лотерее из $\boldsymbol{f}([0,1])$, то $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают на любой лотерее из $\mathcal{S}$.

■

Сопоставляя доказанные в этом параграфе теоремы, видим, что мы, фактически, доказали Теорему 49. Правда, при этом мы использовали дополнительное предположение (A4). (Способ доказательства Теоремы 49 обрисован в задаче 5).

### Теорема 8.

Если предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ удовлетворяют предположениям (A1)-(A4), то существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$, имеющая вид Неймана—Моргенштерна. Такое представление единственно с точностью до линейного преобразования.

## Задачи

1. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей, $\succ$, транзитивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{s}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{s}$ ($\alpha\in[0,1]$).

2. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей, $\succ$, нерефлексивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{q}$ ($\alpha\in[0,1]$).

3. Пусть выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}$, то найдется единственное $\alpha\in[0,1]$, такое что $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{r}$.

4. Пусть выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$ ($\alpha\in[0,1]$).

5. Докажите Теорему 49, т.е. «подправьте» доказательства этого параграфа таким образом, чтобы не требовалось использовать предположение (A4).

*Указание*: Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — две лотереи, такие что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда, как было показано выше, существует функция полезности Неймана—Моргенштерна, определенная на «отрезке» $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$. Пусть теперь $\boldsymbol{s}$ — любая лотерея. Тогда, по отрицательной транзитивности $\succ$, выполняется одно из трех соотношений:

$$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{q},$$

$$\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q},$$

$$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}.$$

Предположим, что функция полезности Неймана—Моргенштерна, представляющая отношение предпочтения, определена на отрезке $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$ и пусть $\boldsymbol{s}$ удовлетворяет соотношению: $\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}$) . Тогда существует (и единственно) число $\alpha$ ($\beta$) такое, что

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \quad (\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{s})$$

Определим $U(\cdot)$ в последних двух случаях на основе соотношений:

$$U(\boldsymbol{p}) = \alpha\ U(\boldsymbol{s}\ ) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q})\ (U(\boldsymbol{q}\ ) = \beta\ U(\boldsymbol{p}\ ) + (1-\beta)U(\boldsymbol{s})).$$

Демонстрация линейности определенной таким образом функции в значительной степени воспроизводит этапы доказательства теоремы в частном случае, когда $U(\cdot)$ определена лишь на «отрезке» $\{\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{p}\succeq\boldsymbol{r}\succeq\boldsymbol{q}\}$.

## *Предпочтения потребителя в условиях неопределенности*

Модифицируем модель поведения потребителя, чтобы учесть в ней неопределенность. Следуя Эрроу, мы будем различать блага не только по их физическим характеристикам, но и по состояниям мира, в которых они потребляются. Будем называть такие блага **контингентными** или **условно-случайными**. Каждое контингентное благо характеризуется двумя индексами — индексом блага $k\in K$, и индексом состояния мира $s\in S$. Тогда $x_{ks}$ — количество блага $k$, которое потребитель потребил (планирует потребить) в состоянии мира $s$.

Таким образом, к параметрам экономики добавляется множество состояний мира $S=\{1, \ldots, \hat{s}\}$. Мы будем считать его конечным. Потребляемый набор благ для $i$-го потребителя будет описываться вектором $\boldsymbol{x}_i=\{x_{iks}\}_{(k,s)}$. В предположении о том, что потребитель состояниям мира приписывает вероятности их реализации $\mu_{is}$, каждому такому потребительскому набору $\boldsymbol{x}_i$ соответствует случайная величина (и лотерея), которую мы будем обозначать $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ (это $l$-мерная дискретная случайная величина, принимающая значения $\boldsymbol{x}_{is}$ с вероятностями $\mu_{is}$). Следуя сложившейся традиции, будем предполагать, что на множестве этих случайных величин потребитель имеет неоклассические (рациональные) предпочтения, которые допускают представление функцией полезности. Эту функцию полезности будем обозначать $U_i(\cdot)$. В этой целевой функции учтены как полезности для него каждого товара в каждом состоянии мира (например, зонт полезнее в дождь), так и его личные гипотезы о вероятностях событий.

Поскольку в этом параграфе анализируется поведение одного и того же потребителя, индекс $i$ будем опускать.

В предположении, что оценки вероятности состояний мира у данного потребителя не меняются, мы можем считать, что его функция полезности $U(\cdot)$ задана на различных потребительских наборах, и писать $U(\boldsymbol{x})$ вместо $U(\tilde{\boldsymbol{x}})$.

Различают следующие типы потребителей в соответствие с их поведением в ситуациях с неопределенностью (свойствами предпочтений):

**Определение 2.**

Будем называть потребителя имеющим **неприятие риска**, если его функция полезности $U(\cdot)$ (как функция $\boldsymbol{x}$) квазивогнута.

Будем называть потребителя имеющим строгое неприятие риска или **рискофобом**, если его функция полезности $U(\cdot)$ строго квазивогнута

Будем называть потребителя **нейтральным к риску**, если $U(\cdot)$ линейна.

Будем называть потребителя **рискофилом**, если $U(\cdot)$ строго квазивогнута.

Напомним, что функция квазивогнута тогда и только тогда, когда множества потребительских наборов, предпочитаемых наборам, на кривой безразличия, выпуклы для каждой кривой безразличия. Вогнутость функции влечет за собой ее квазивогнутость, но не наоборот.

Рис. 50 иллюстрирует эти понятия для случая одного (физического) товара и двух состояний мира. На графиках изображены кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску в предположении, что $x_1$—потребление данного блага в первом, а $x_2$— во втором состоянии мира.

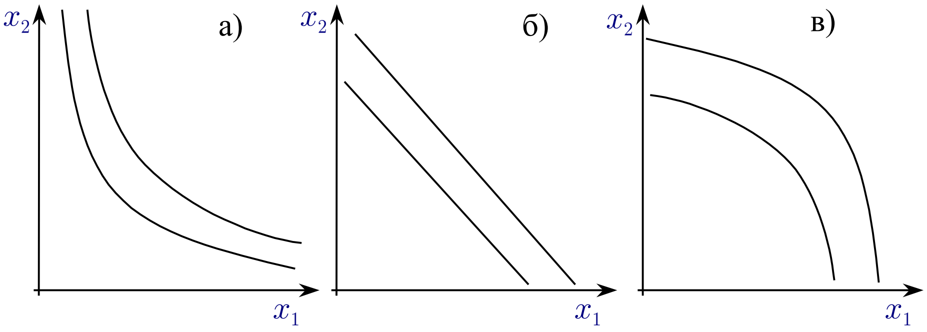


Рисунок 50. Кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску: а) рискофоб, б) нейтральный к риску, в) рискофил

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что функция $U(\cdot)$ имеет вид Неймана—Моргенштерна (аддитивная по вероятностям функция). Это частный, но наиболее удобный и поэтому наиболее часто используемый для анализа случай функции полезности $U(\cdot)$:

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(\boldsymbol{x}_s),$$

где $\mu_s$ — оценки потребителем вероятностей состояний мира $s \in S$, $\boldsymbol{x}_s \in X$ — потребительский набор в состоянии мира $s$ (контингентный потребительский набор), а $u(\boldsymbol{x}_s)$ — **элементарная функция полезности** (функция Бернулли) рассматриваемого потребителя

$$u(\cdot)\colon X \mapsto \mathbb{R},$$

не зависящая от состояния мира, а зависящая только от потребления благ как таковых.

частный, но наиболее удобный и поэтому наиболее часто используемый для анализа случай функции полезности $U(\cdot)$

Мы будем предполагать, что эта функция является возрастающей. Вероятности, заложенные в функции полезности участника могут быть и ошибочными, поэтому в общем случае их следует рассматривать как **субъективные вероятности**.

Напомним, что полезность по Нейману-Моргенштерну есть (субъективное) математическое ожидание полезности или просто ожидаемая полезность:

$$U(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E} u(\tilde{\boldsymbol{x}}).$$

Будем предполагать, что во всех рассматриваемых ниже ситуациях все необходимые условия существования функции полезности Неймана—Моргенштерна выполнены.

Переопределим для функции Неймана—Моргенштерна отношение к риску в терминах элементарной функции полезности.

### Определение

Будем называть потребителя с глобальной функцией полезности $U(\cdot)$ типа Неймана—Моргенштерна имеющим (строгое) **неприятие риска** (**рискофобом**), если его элементарная функция полезности $u(\cdot)$ (строго) вогнута, **нейтральным к риску**, если она линейна, и (строго) **предпочитающим риск** (**рискофилом**) — если она (строго) выпукла.

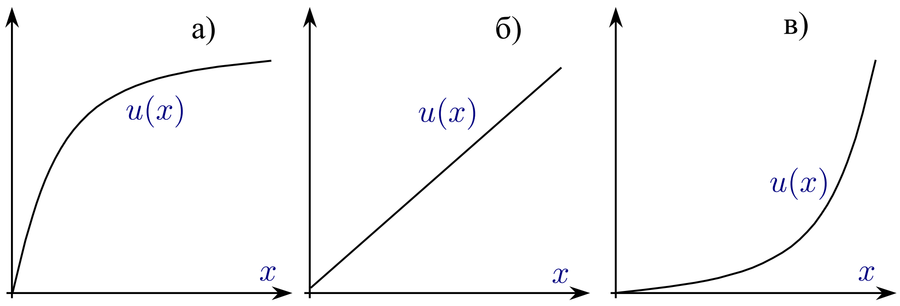


Рисунок 51. Элементарные функции полезности для потребителей с разным отношением к риску: а) рискофоб, б) нейтральный к риску, в) рискофил

Можно показать, что из определения неприятия риска в терминах $u(\cdot)$ следует определение неприятия в терминах $U(\cdot)$, (обратное, вообще говоря, неверно). Из вогнутости $u(\cdot)$ следует вогнутость $U(\cdot)$, а следовательно и квазивогнутость.

В дальнейшем мы будем рассматривать только поведение экономических субъектов, характеризующихся неприятием риска, как более типичное.

Часто рассматривают ситуации, когда контингентные потребительские наборы содержат единственное благо — деньги. Соответствующие лотереи называют денежными. Количество денег, которое получает индивидуум в состоянии мира $s$ ($x_s$) будем называть доходом в этом состоянии мира (контингентным доходом). При этом используют следующие понятия (индекс блага опускаем).

**Ожидаемый доход** $\mathsf{E}\tilde{x}$ — это математическое ожидание дохода. В данном случае он вычисляется как

$$\mathsf{E}\tilde{x} = \sum_{s \in S} \mu_s x_s.$$

В терминах ожидаемого дохода рассмотренные выше три группы потребителей в зависимости от их отношения к риску характеризуются следующими соотношениями между ожидаемой полезностью денежной лотереи и полезностью ожидаемого дохода от нее:

– рискофилы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})) > u(\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}))$,

– рискофобы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}))$,

– нейтральные по отношению к риску: $\mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})) = u(\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}))$.

Здесь $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — любая «нетривиальная» случайная величина (формально это означает, что вероятность того, что она не совпадает со своим математическим ожиданием, не равна нулю).

Заметим, что соотношение $\mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})) \geqslant u(\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}))$ для всех случайных величин (так называемое неравенство Йенсена) выполнено тогда и только тогда, когда функция вогнута. Фактически это и есть определение вогнутой функции. Строгое неравенство $\mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}))$ для произвольной «нетривиальной» случайной величины $\tilde{\boldsymbol{x}}$ выполнено тогда и только тогда, когда функция строго вогнута.

**Безрисковым** или **гарантированным** называется такой случайный потребительский набор $\tilde{x}$, что в любом состоянии мира потребитель имеет один и тот же доход: $x_s = \mathsf{E}\tilde{x}\ \forall s \in S$.

**Безрисковым или гарантированным эквивалентом**[75] данного потребительского набора $\tilde{x}$ называется такой доход $x^*$, что соответствующий безрисковый потребительский набор $\tilde{x}^*$ дает потребителю ту же самую полезность:

$$\mathsf{E}u(\tilde{x}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s) = \mathsf{E}u(\tilde{x}^*) = u(x^*).$$

Величина $\Delta x$ называется **вознаграждением за риск** для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\tilde{x} - \Delta x$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}u(\tilde{x}) = u(\mathsf{E}\tilde{x} - \Delta x).$$

Эта величина показывает, какую сумму денег (в терминах ожидаемого дохода) готов потерять потребитель за то, чтобы избавиться от риска.

У рискофобов безрисковый эквивалент ниже ожидаемого дохода от любой рискованной денежной лотереи (величина вознаграждения за риск положительна). Соответственно, у рискофилов он выше ожидаемого дохода (величина вознаграждения за риск отрицательна), а у нейтральных по отношению к риску потребителей совпадает (величина вознаграждения за риск равна нулю). Читателю предоставляется показать это самостоятельно.

Проиллюстрируем введенные понятия графически. На Рис. 52 изображена элементарная функция полезности потребителя с неприятием риска (функция вогнута). Потребитель предполагает, что могут произойти два события ($A$ и $B$) с некоторыми вероятностями ($\mu_A$ и $\mu_B$). Его потребительский набор имеет вид $\boldsymbol{x} = (x_A, x_B)$, где $x_A$ и $x_B$ — доход, который получит потребитель, если произойдут события $A$ и $B$ соответственно. Как несложно понять, точка $(\mathsf{E}\tilde{x}, U)$ лежит на отрезке, соединяющей точки $(x_A, u(x_A))$ и $(x_B, u(x_B))$ и делит его в отношении $\mu_B$ к $\mu_A$. Здесь $\mathsf{E}\tilde{x}$ — ожидаемый доход набора, а $U$ — полезность. Поскольку потребитель не любит риск, то график функции полезности лежит выше указанного отрезка, и ожидаемая полезность $U = \mathsf{E}u(\tilde{x})$ больше полезности ожидаемого дохода $u(\mathsf{E}\tilde{x})$. Гарантированный эквивалент $\tilde{x}$ выбирается так, чтобы $U(\tilde{x}) = u(x^*)$. Плата за риск $\Delta x$ равна разности между ожидаемой доходностью и доходностью гарантированного эквивалента.

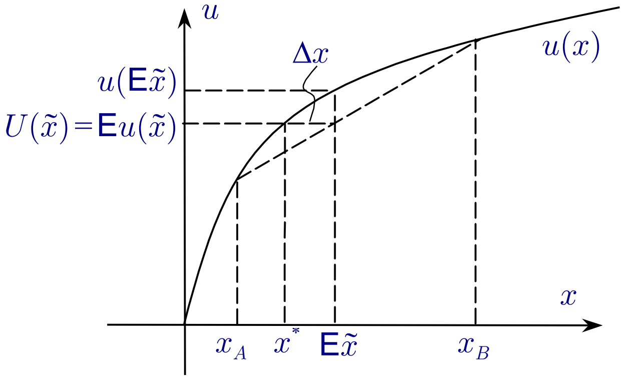


Рисунок 52. Различные характеристики лотереи с двумя событиями

**Пример 1.** (Санкт-Петербургский парадокс)[76]

---

[75] Англ. *certainty equivalent*.

[76] Описание и объяснение этого парадокса приводятся в статье известного швейцарского ученого Даниила Бернулли: Daniel Bernoulli, "Specimen theoriae novae de mensura sortis", Commentarii academiae scientiarium imperialis Petropolitanae, T. V. Petropoli, 1738, 175-192 (рус. пер.: Д. Бернулли, "Опыт новой теории измерения жребия", в кн. Теория потребительского поведения и спроса, — СПб.: Экономическая школа, 1993).

«Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?».

Ожидаемый доход от этой игры для Павла бесконечно велик, однако вряд ли кто согласиться заплатить за право участия в такой игре очень большую сумму. В этом и состоит парадокс. Объяснение парадокса состоит в том, что «ценность денег» для игрока не является постоянной. Она определяется некоторой возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности.

Предположим, что исходный (безрисковый) доход игрока составляет сумму $\omega$ дукатов. В таком случае он сталкивается с лотереей, приносящей ему доход $\omega+2^{k-1}$ с вероятностью $2^{-k}$ $(k=1,2,\dots,\infty)$. Ожидаемый доход (с учетом цены $p$, уплаченной за участие в игре) равен

$$\mathsf{E}\tilde{x}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(\omega+2^{k-1}-p)=\infty.$$

Если элементарная функция полезности игрока — $u(\cdot)$, то ожидаемая полезность равна

$$U=\mathsf{E}u(\tilde{x})=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}u(\omega+2^{k-1}-p).$$

Если $x^*$ — безрисковый эквивалент этой лотереи, то игрок будет готов заплатить за право участвовать в игре $x^*-\omega$.

Например, если $u(x)=\ln(x)$ и $\omega=100$, то максимальная цена, которую Павел будет готов отдать за участие в игре, определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\ln(100+2^{k-1}-p)=\ln(100).$$

Отсюда, решая численно это уравнение, получим

$$p\approx 4{,}36<\infty,$$

то есть несколько больше $4$ дукатов.

⇐

## Задачи

6. Потребитель имеет элементарную функцию полезности $u(x)=\sqrt{x}$. Он получает доход $9$ с вероятностью $2/3$ и доход $25$ с вероятностью $2/3$. Найти плату за риск.

7. Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег). Лотерея $\$3$ и $\$5$ с вероятностями $1/2$ и $1/2$ и лотерея $\$3$ и $\$9$ с вероятностями $2/3$ и $1/3$ для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум

(а) рискофоб;

(б) нейтрален к риску;

(в) рискофоб?

8. Пусть есть одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x)=\sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен $\$9$. Существует

лотерейный билет, который может выиграть $\$0$ с вероятностью $0{,}5$ (если выпадет «орел») и $\$7$ с вероятностью $0{,}5$ («решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации:

(1) За какую сумму $x$ потребитель купил бы такой билет?

(2) За какую сумму $y$ потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из $9$-ти билетов по $\$1$ выигрывающих в состоянии мира «орел» и $9$-ти по $\$1$ на «решку»)?

(3) Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму $z$ он бы его продал?

9. Рискофоб с элементарной функцией полезности (функцией Бернулли) вида $u(x)=-1/x$ имеет $\$900$ и лотерейный билет, который дает $\$900$ с вероятностью $1/2$ и $\$0$ с вероятностью $1/2$. За сколько он продал бы этот билет?

10. Богатство потребителя равно $100$ д.е. Элементарная функция полезности равна квадратному корню из дохода. Лотерейный билет дает выигрыш $0$ д.е. с вероятностью $\pi$ и $20$ д.е. с вероятностью $(1-\pi)$. Цена билета равна $5$ д.е. При каких вероятностях потребитель

(1) купит билет?

(2) продаст билет (сам его эмитирует)?

(3) продаст билет, если ему его подарят?

(Решать не обязательно, достаточно составить неравенство)

11. Рассмотрим следующую игру: если игрок называет число $a$, то получает дополнительно к имеющейся у него сумме $\omega$ сумму $a$ с вероятностью $1/3$ и $(-a)$ с вероятностью $2/3$. Какое число назовет игрок, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

(a) $u(x)=\sqrt{x}$; (b) $u(x)=-e^{-ax}$; (c) $u(x)=-\dfrac{1}{x}$;

(d) $u(x)=\ln x$; (e) $u(x)=ax-bx^2$; (f) $u(x)=a\sqrt{x}+bx$.

12. Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x)=\sqrt{x}$, владеет суммой денег $\omega$ рублей и лотерейным билетом, выигрывающим $a$ рублей с вероятностью $1/2$. Покажите, что при уменьшении $a$ до нуля цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремиться к величине ожидаемого (для данного рискофоба) выигрыша по этому билету.

13. Индивидуум, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x)=\sqrt{x}$, располагает суммой денег $\omega$ рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий $a$ рублей с вероятностью $1/2$. Пусть $p$ — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(1) Чему равна $p$ при $\omega=9$ и $a=16$?

(2) Покажите, что $p$ ...

- растет при увеличении величины выигрыша $a$.

- растет при увеличении суммы денег $\omega$.

- не может превышать величину $a/4$ рублей.

14. Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход $\$1000$ , но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на $20\%$ меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в $0{,}1$. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

15. Золотоискатель с запасом $900\$$, полезностью типа Неймана—Моргенштерна и функцией Бернулли вида $u(x)=\sqrt{x}$ решает, купить ли по цене $300\$$ золотоносный участок, где с равной вероятностью ожидает выигрыш в $900\$$ или ничего.

(A) За сколько он купил бы у геолога соответствующий прогноз, если положительный прогноз означает, что с вероятностью $0{,}75$ золото есть, а отрицательный — что с вероятность $0{,}75$ золота нет?

(B) Предположим, золотоискатель не купил прогноз, а застраховался на сумму в $300\$$ на случай отсутствия золота и купил участок. По какой цене продавались страховые контракты?

## *Задача потребителя при риске*

В экономике с неопределенностью естественно ожидать заключения контрактов, условных по состояниям мира. Соответственно, блага следует рассматривать как условные по состояниям мира — контингентные (условно-случайные) блага. Каждое контингентное благо характеризуется парой $(k, s)$. Контингентное благо естественно интерпретировать как актив, дающий право получить единицу блага $k$ если (и только если) реализуется состояние мира $s$. Такой актив получил название **актива Эрроу**. (Нам понадобится понятие актива Эрроу ниже, когда речь пойдет о модели Раднера. В данном контексте это только интерпретация контингентного блага.)

Если ничто не препятствует заключению контрактов условных по состояниям мира (т.е. купле-продаже контингентных благ), то можно предположить, что любое контингентное благо можно обменять на любое другое контингентное благо. Иными словами, можно предположить, что любое благо $k_1$ в любом состоянии мира $s_1$ можно поменять (прямо или косвенно) на любое благо $k_2$ в любом состоянии мира $s_2$. Это предположение о полноте рынков контингентных благ.

Следует отметить, что предположение о полноте рынков контингентных благ является достаточно ограничительным и, как правило, не позволяет адекватно моделировать реальные рынки с риском. Тем не менее, модели, основанные на этом предположении, оказывается полезными при анализе реальных феноменов и понимании причин фиаско рынка при наличии неопределенности.

Другое предположение, которое мы сделаем — это предположение о свободной конкуренции на рынках контингентных благ. С точки зрения задачи потребителя — это стандартное предположение о том, что потребитель считает цены данными. Через $p_{ks}$ мы будем обозначать рыночную цену контингентного блага $(k, s)$ (это цена контракта на поставку единицы блага $k$ в ситуации, если реализуется состояние мира $s$, т.е. цена соответствующего актива Эрроу).

Эти предположения позволяют записать задачу потребителя:

$$U_i(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{s\in S} \mu_s u_i(\boldsymbol{x}_{is}) \to \max_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks},$$

$$\boldsymbol{x}_{is} \in X_i \ \forall s \in S.$$

По сути, задача потребителя имеет тот же вид, что и в классической модели, только индекс блага становится двойным, и суммирование в бюджетном ограничении идет по двум индексам — $k$ и $s$. Дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя тоже совершенно аналогична дифференциальной характеристике выбора потребителя в отсутствии неопределенности:

$$\frac{\partial U_i/\partial x_{ik_1s_1}}{\partial U_i/\partial x_{ik_2s_2}} = \frac{p_{k_1s_1}}{p_{k_2s_2}}, \ \forall k_1, k_2 \in K, \ \forall s_1, s_2 \in S.$$

С учетом того, что целевая функция имеет специфический вид (Неймана—Моргенштерна), дифференциальную характеристику можно переписать в терминах элементарной функции полезности:

$$\frac{\mu_{s_1} u'_{ik_1}(\boldsymbol{x}_{is_1})}{\mu_{s_2} u'_{ik_2}(\boldsymbol{x}_{is_2})} = \frac{p_{k_1s_1}}{p_{k_2s_2}}, \ \forall k_1, k_2 \in K, \ \forall s_1, s_2 \in S,$$

где $u'_{ik}(\cdot)$ — производная элементарной функции полезности по $k$-му благу.

Проиллюстрируем введенные понятия простым примером.

**Пример 2** (Задача страхования имущества).

Предположим, что потребитель имеет имущество стоимостью $\omega_1$, которое в случае состояния мира 1 (при отсутствии пожара) сохранится, а в случае пожара — состояния мира 2 — окажется равным $\omega_2$ ($\omega_2 < \omega_1$). На (совершенном) рынке страховых услуг этот потребитель может приобрести страховой контракт ($\gamma$, $y$), где — $\gamma \in [0,1]$ — цена контракта, а $y$ — страховая сумма. То есть если потребитель застрахуется на сумму $y$, то он вне зависимости от состояния мира заплатит $\gamma y$ и получит $y$ в случае пожара. Таким образом, при отсутствии пожара доход потребителя будет равен

$$x_1 = \omega_1 - \gamma y,$$

если же пожар произойдет, то доход составит

$$x_2 = \omega_2 + y - \gamma y.$$

Таким образом, мы имеем одно благо — деньги, и два состояния мира (отсутствие и наличие страхового случая).

Бюджетное ограничение того вида, что выше (в терминах контингентных потребительских наборов), можем получить, исключив $y$:

$$(1-\gamma)x_1 + \gamma x_2 \leqslant (1-\gamma)\omega_1 + \gamma\omega_2.$$

Покупая страховой контракт, потребитель тем самым меняет благо 'деньги в состоянии 1' на благо 'деньги в состоянии 2' в отношении

$$p^1/p^2 = (1-\gamma)/\gamma.$$

Предположим далее, что потребитель имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна

$$U = (1–\mu)u(x_1) + \mu u(x_2),$$

такую что производная элементарной функции полезности $u'(\cdot)$ положительна и строго убывает (т.е. потребитель характеризуется строгим неприятием риска), где $\mu$ — вероятность пожара. Дифференциальная характеристика решения задачи потребителя как обычно имеет вид

$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}=\frac{(1-\mu)u'(x_1)}{\mu\, u'(x_2)}=\frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

Опираясь на то, что $u'(\cdot)$ — убывающая функция, можно сделать выводы об оптимальном решении потребителя в зависимости от соотношения вероятности пожара $\mu$ и цены страховки $\gamma$. При $\gamma=\mu$ (актуарно справедливая цена страховки) имеем

$$u'(x_1)=u'(x_2).$$

Таким образом, в этом случае потребитель застрахуется на такую сумму, что $x_1=x_2$, то есть на всю сумму потенциального ущерба:

$$y=\omega_1-\omega_2.$$

Нетрудно проверить, что если цена будет высокой ($\gamma>\mu$), то он застрахуется так, что

$$u'(x_1)<u'(x_2),$$

откуда $x_1>x_2$. То есть страховая сумму будет меньше величины ущерба. Наоборот, при $\gamma<\mu$ страховая сумма будет превосходить величину ущерба.

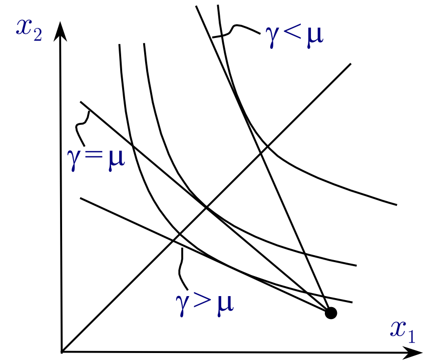


Рисунок 53. Иллюстрация различных соотношений между ценой и вероятностью в задаче страхования имущества

В предположении, что потребитель является рискофобом, этот результат обобщить на случай, когда элементарная функция полезности недифференцируема.

Будем рассматривать доход потребителя как случайную величину $\tilde{x}$, которая принимает значение $x_1$ с вероятностью $(1-\mu)$, и $x_2$ с вероятностью $\mu$.

Тогда при $\gamma=\mu$ ожидаемый доход $\mathsf{E}\tilde{x}$ равен $(1-\gamma)\omega_1+\gamma\omega_1$, то есть не зависит от суммы страховки $y$. Рискофоб предпочитает среди таких лотерей ту, которая не связана с риском, то есть дает один и тот же доход вне зависимости от состояния мира. А к такой лотерее приводит страхование на полную сумму потерь.

При $\gamma>\mu$ ($\gamma<\mu$) с ростом страховой суммы $y$ величина ожидаемого дохода $\mathsf{E}\tilde{x}$ уменьшается (увеличивается). Поэтому потребителю не выгодно выбирать $y$ больше (меньше) величины ущерба. Действительно, если он застрахуется на величину ущерба, то риск будет отсутствовать, а ожидаемый доход $\mathsf{E}\tilde{x}$ будет выше. Таким образом, если $\gamma>\mu$, то $y\leqslant\omega_1-\omega_2$, а если $\gamma<\mu$, то $y\geqslant\omega_1-\omega_2$. Строгие неравенства можно гарантировать только при дифференцируемости. Если функция полезности недифференцируема, то при $\gamma\neq\mu$ оптимальным может быть страхование на полную сумму ущерба ($y=\omega_1-\omega_2$).

⇐

### Задачи

16. Предпочтения судовладельца описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности от богатства $x$ вида $u(x)$, причем $u(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную. Он владеет богатством $\$40\,000$ и может потерять в случае аварии судна $\$10\,000$.

(A) Пусть вероятность аварии равна $0{,}02$ и известно, что он застраховался на сумму $\$9\,000$. Возможно ли, что цена страхования на $\$1$ равна $\$0{,}02$? Если нет, то больше или меньше, чем $\$0{,}02$? Объясните.

(B) Пусть цена страхования на $\$1$ равна $\$0{,}02$ и известно, что он застраховался на сумму $\$11\,000$. Возможно ли, что вероятность аварии равна $0{,}02$? Если нет, то больше или меньше, чем $0{,}02$? Объясните.

(C) Пусть вероятность аварии равна $0{,}01$ и известно, что цена страхования на $\$1$ равна $\$0{,}02$. Возможно ли, что он застраховался на сумму $\$10\,000$? Если нет, то больше или меньше, чем $\$10\,000$? Объясните.

17. Приведите пример, когда оптимальным является страхование на полную сумму ущерба при том, что цена страховки не является актуарно справедливой.

## *Модель инвестора (выбор оптимального портфеля)*

К выбору наиболее предпочтительной денежной лотереи сводятся многочисленные модели инвестиционного повеления.

Мы проиллюстрируем этот анализ на основе следующей простой двухпериодной модели.

Рассмотрим задачу распределения одного блага — капитала[77] — между несколькими активами $k \in K = \{1, ..., l\}$. Модель двухпериодная. В первый период инвестор вкладывает капитал в активы, а во второй получает доход с этих активов. Величину капитала будем обозначать $\omega$ ($\omega > 0$).

Каждый актив характеризуется своей доходностью (отношением чистого дохода от единицы актива к цене). Пусть $\tilde{r}_k$ — валовая доходность $k$-го актива, т.е. валовой доход на рубль вложений. Волна означает, что это случайная величина. Если считать пространство состояний мира дискретным, как и выше, то доходность $\tilde{r}_k$ — дискретная случайная величина и принимает значения $r_{ks}$ ($s \in S$) с соответствующими вероятностями $\mu_s$.

Инвестор должен выбрать размеры вложений $z_k$ в каждый из доступных активов $k \in K$ при следующих ограничениях:

⅄ Можно покупать актив, но не эмитировать его, т.е.

$$z_k \geqslant 0.$$

⅄ Общая сумма вложений не должна превышать величину капитала, т.е.

---

[77] Возможно, первоначально капитал размером имеется в виде безрискового актива $k=0$ (см. далее). Может быть, начальный запас имеет более общий вид:

$$(\omega_0, ..., \omega_l)\colon \sum_{k \in K} \omega_k = \omega.$$

$$\sum_{k\in K} z_k \leqslant \omega.$$

Последнее неравенство представляет собой аналог бюджетного ограничения.

Вектор $\{z_k\}_{k\in K}$ будем называть **портфелем**. Общий (валовой) доход от портфеля равен:

$$\tilde{x} = \sum_{k\in K} z_k \tilde{r}_k.$$

Если пространство состояний мира дискретное, то доход от портфеля $\tilde{x}$ — дискретная случайная величина и принимает значения

$$x_s = \sum_{k\in K} z_k r_{ks}$$

с вероятностями $\mu_s$.

Как обычно, предполагаем, что предпочтения инвестора описывается функцией типа Неймана—Моргенштерна

$$U = \mathsf{E}u(\tilde{x}) = \sum_{s\in S} \mu_s u(x_s).$$

В дальнейшем мы везде будем считать, что $u(\cdot)$ — дифференцируемая функция, причем производная $u'(\cdot)$ положительна и убывает (инвестор — рискофоб).

Поскольку капитал $\omega$ — постоянная величина (выбор между накоплением и потреблением остается за рамками модели), то полезность определяется **структурой портфеля**, и можно вместо величины вложений в $k$-й актив, $z_k$, рассматривать долю этого актива в портфеле

$$\alpha_k = z_k / \omega.$$

Тогда

$$\tilde{x} = \omega \sum_{k\in K} \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Получим следующую задачу:

$$U = \mathsf{E}u(\tilde{x}) = \mathsf{E}u(\omega \sum_{k\in K} \alpha_k \tilde{r}_k) \to \max_{\{\alpha_k\}}.$$

$$\sum_{k\in K} \alpha_k \leqslant 1,$$

$$\alpha_k \geqslant 0,\ \forall k \in K.$$

Принято вводить еще безрисковый актив $k=0$ с гарантированной доходностью $\tilde{r}_k = r_0$ (его можно интерпретировать как государственные ценные бумаги или вклад до востребования). Этот актив имеет одну и ту же доходность $r_0$ независимо от состояния мира. При этом $K = \{0, \ldots, l\}$.

Еще одно предположение, которое принято делать — нет ограничения на неотрицательность вложений в безрисковый актив, т.е. может быть $\alpha_k < 0$. Интерпретация — можно взять кредит на любую сумму по той же ставке $r_0$.

Так как производная $u'(x)$ положительна, то целевая функция ненасыщаема и поэтому «бюджетное ограничение» в задаче инвестора выходит на равенство, т.е.

$$\alpha_0 = 1 - \sum_{k\neq 0} \alpha_k.$$

Исключив $\alpha_0$, преобразуем задачу инвестора к виду

$$\mathsf{E}u(\omega(r_0 + \sum_{k\neq 0} \alpha_k(\tilde{r}_k - r_0))) \to \max_{\{\alpha_k\}}.$$

При соответствующих условиях регулярности производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной.[78] Будем предполагать, что эти условия выполнены. Тогда условие первого порядка решения задачи инвестора имеет вид

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\omega(\tilde{r}_k - r_0)] \leqslant 0,\ \forall k \neq 0.$$

Кроме того, если $\alpha_k > 0$, то это условие выполняется как равенство

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\omega(\tilde{r}_k - r_0)] = 0.$$

или

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0 \mathsf{E}u'(\tilde{x}).$$

Нетрудно проверить, что в силу свойств функции $u(\cdot)$ (инвестор — рискофоб) и линейности оператора $\mathsf{E}$, ожидаемая полезность портфеля, как функция долей вложений в соответствующие активы, является вогнутой. Поэтому эти условия являются достаточными условиями оптимальности портфеля.

Рассмотрим частный случай этой задачи. Пусть есть два актива — безрисковый и один рискованный. Задача инвестора имеет вид:

$$\mathsf{E}u(\omega(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1)) \to \max_{\alpha_0,\, \alpha_1}.$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 1,$$
$$\alpha_1 \geqslant 0.$$

Исключив $\alpha_0$, получим следующую задачу одномерной максимизации:

$$U = \mathsf{E}u(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0))) \to \max_{\alpha_1 \geqslant 0}.$$

Обозначим максимизируемую функцию через $U(\alpha_1)$ и вычислим ее производную:

$$\frac{\partial U(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \mathsf{E}[u'(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0)))\,\omega(\tilde{r}_1 - r_0)] =$$
$$= \omega\,(\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] - r_0 \mathsf{E}u'(\tilde{x})).$$

Решение задачи инвестора (если оно существует) может быть внутренним ($\alpha_1 > 0$) либо граничным ($\alpha_1 = 0$).

1) Если в оптимальном портфеле $\alpha_1 > 0$, то $\partial U(\alpha_1)/\partial \alpha_1 = 0$, откуда

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] = r_0 \mathsf{E}u'(\tilde{x}).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $u'(\tilde{x})$ является убывающей функцией $\tilde{r}_1$, поэтому

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] < \mathsf{E}u'(\tilde{x})\mathsf{E}\tilde{r}_1.$$

---

[78] Достаточно, чтобы пространство состояний мира было дискретно. Для непрерывных распределений условие регулярности заключается в том, что носитель распределения не зависит от параметра, по которому берется производная.

(Ковариация $u'(\tilde{x})$ и $\tilde{r}_1$ отрицательна). Таким образом, поскольку $\mathsf{E}u'(\tilde{x})>0$ (ожидание положительной случайной величины положительно), необходимое условие внутреннего решения состоит в том, что $r_0<\mathsf{E}\tilde{r}_1$

2) Если в оптимальном портфеле $\alpha_1=0$, то $\tilde{x}=\omega r_0$ (т.е. доход портфеля — не случайная величина). Значит,

$$\frac{\partial U(\alpha_1)}{\partial\alpha_1}=\omega\, u'(\omega r_0)(\mathsf{E}\tilde{r}_1-r_0).$$

Поскольку для граничного решения $\partial U(\alpha_1)/\partial\alpha_1\leqslant 0$ и производная элементарной функции полезности положительна, то получим следующее необходимое условие оптимальности граничного решения:

$$\mathsf{E}\tilde{r}_1\leqslant r_0.$$

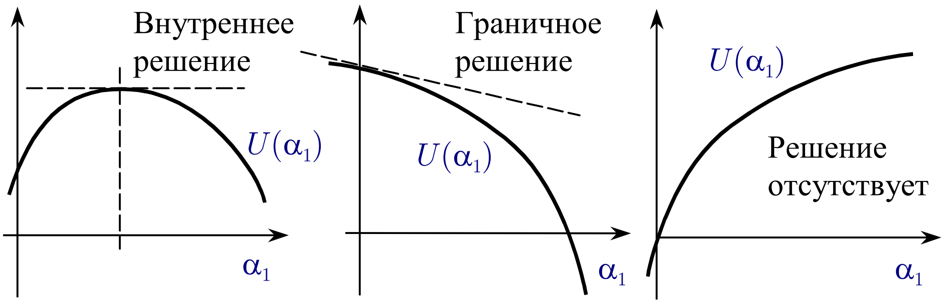


Рисунок 54

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, что 1-й актив войдет в портфель ($\alpha_1>0$) является то, что его ожидаемая доходность больше гарантированной ($\mathsf{E}\tilde{r}_1>r_0$).

Тот факт, что для случая двух активов условие $\mathsf{E}\tilde{r}_1>r_0$ является достаточным, является частным случаем более общего результата, который называется **теоремой о диверсификации**.

**Теорема 9** (теорема Самуэльсона о диверсификации)[79]

Пусть инвестор характеризуется целевой функцией типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(.)$, и пусть, кроме того,

- функция $u'(x)$ положительна и убывает;
- доходности активов (статистически) независимы;[80]
- ограничение $\alpha_0\geqslant 0$ несущественно;
- выполнены условия регулярности, обеспечивающие, что производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной.

Тогда любой актив $k\in K$, ожидаемая доходность которого выше доходности безрискового актива ($\mathsf{E}\tilde{r}_k>r_0$) войдет в портфель, т.е. $\alpha_k>0$.

***Доказательство.***

---

[79] Samuelson, Paul A. "General Proof that Diversification Pays", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **2** (1967), 1-13.

[80] В модели Марковица достаточно некоррелированности (см. ниже).

Как мы видели ранее, условие первого порядка для задачи инвестора имеет вид (постоянный множитель $\omega > 0$ можно сократить)

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r}_k - r_0)] \leqslant 0, \ \forall k \neq 0,$$

Предположим, что $\alpha_k = 0, \ k \neq 0$ ($k$-й актив не входит в портфель). При этом величины $\tilde{r}_k$ и $\tilde{x}$ должны быть между собой независимы ($\tilde{x}$ зависит только от доходностей остальных активов). Следовательно, $\tilde{r}_k$ и $u'(\tilde{x})$ также независимы (функции от независимых случайных величин тоже независимы). Воспользовавшись тем, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, получим, что

$$\mathsf{E}\tilde{r}_k \mathsf{E}u'(\tilde{x}) \leqslant r_0 \mathsf{E}u'(\tilde{x}).$$

Так как $\mathsf{E}u'(\tilde{x}) > 0$, то $\mathsf{E}\tilde{r}_k \leqslant r_0$. Следовательно, если $\mathsf{E}\tilde{r}_k > r_0$, то не может быть $\alpha_k = 0$, т.е. такой актив войдет в портфель.

■

Если несколько преобразовать условие первого порядка, можно привести интересную его интерпретацию.

По определению ковариации для двух случайных величин $\xi$ и $\eta$ выполнено

$$\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{Cov}(\xi, \eta) + \mathsf{E}(\xi)\mathsf{E}(\eta).$$

С учетом этого соотношения условия оптимальности (если $k$-й актив вошел в портфель, т.е. $\alpha_k > 0$),

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0 \mathsf{E}u'(\tilde{x}).$$

можем записать в виде

$$\mathsf{E}\tilde{r}_k = r_0 - \frac{\mathsf{Cov}(u'(\tilde{x}), \tilde{r}_k)}{\mathsf{E}u'(\tilde{x})}.$$

Второе слагаемое этого выражения — величина

$$-\frac{\mathsf{Cov}(u'(\tilde{x}), \tilde{r}_k)}{\mathsf{E}u'(\tilde{x})}$$

представляет собой превышение ожидаемой доходности $k$-го актива над доходностью безрискового актива и носит название **премии за риск**.

Заметим, что полученное соотношение означает, что включение актива в оптимальный портфель определяется не только его средней доходностью, но и величиной корреляции его доходности с доходностью всего портфеля. Премия за риск является положительной, если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированны. Это объясняется тем, что если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированны, то доходность актива и предельная полезность отрицательно коррелированны, поскольку предельная полезность у рискофоба является убывающей функцией. Следовательно, такой актив включается в оптимальный портфель, только если он характеризуется положительной премией за риск.

С другой стороны, премия за риск является отрицательной, если доходность актива и доходность портфеля отрицательно коррелированны. Такой актив может входить в оптимальный портфель, несмотря на то, что он характеризуется отрицательной премией за риск. Этот феномен называется хеджированием. Так, например, у страховых полисов ожидаемая чистая доходность, как правило, меньше нуля, но они часто включаются в портфель рискофоба, так как их доходность отрицательно коррелирует с ожидаемым доходом от портфеля.

### Задачи

18. Пусть инвестор с полезностью типа Неймана—Моргенштерна сталкивается с $m$ активами один из которых — гарантированный, с возможностью кредита. Какие достаточные условия гарантируют, что все рискованные активы войдут в портфель?

19. Пусть инвестор с элементарной функцией полезности $u(x)=\ln x$ имеет возможность вложить свое богатство $\omega$ в $n$ рискованных активов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_i=1+1/i$, и в гарантированный актив с доходностью $r_0=1{,}1$. Укажите гипотезы и условия на параметры, при которых все рискованные активы войдут в портфель.

20. Инвестор со строгим неприятием риска выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью $r_0$, а сколько вложить в рискованные активы двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1>r_0$, $\bar{r}_2>r_0$. Пусть функция полезности инвестора типа Неймана—Моргенштерна и возможен кредит в банке, а доходность рискованных активов вероятностно независима.

Какие из перечисленных исходов возможны

а) все три актива войдут в портфель;

б) только один рискованный и один безрисковый войдут;

в) только два рискованных войдут в портфель?

21. Инвестор выбирает, какую долю $\alpha$ своего капитала $K$ вложить в рискованный актив, а какую долю — в безрисковый.

(A) Пусть его элементарная функция полезности равна $u(x)=-e^{-\gamma x}$ $(\gamma>0)$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *сумму* $(\alpha K)$.

(B) Пусть $u(x)=x^{\gamma}$ $(0<\gamma<1)$, $u(x)=-x^{-\gamma}$ $(\gamma>0)$ или $u(x)=\ln x$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *долю* капитала $(\alpha)$.

22. Пусть на рынке доступны лишь два актива — рискованный и безрисковый. Как изменяется величина вложений в рискованный актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

Решить задачу при

(a) $u(x)=\sqrt{x}$; (b) $u(x)=-e^{-ax}$; (c) $u(x)=-\dfrac{1}{x}$;

(d) $u(x)=\ln x$; (e) $u(x)=ax-bx^2$; (f) $u(x)=a\sqrt{x}+bx$.

23. Инвестор имеет элементарную функцию полезности $u=x^3$. Состояния мира $A$ и $B$ могут осуществиться с вероятностями $\mu_A=2/3$ и $\mu_B=2/3$. Инвестор может вложить свои $10$

единиц капитала в два предприятия. Доход двух предприятий в двух состояниях мира равен: $x_{1A}=1$, $x_{2A}=2$, $x_{1B}=4$, $x_{2B}=3$. Найдите оптимальный портфель.

24. Известно, что рискованный актив дает доход, равный $2$ в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и $\beta$ во втором состоянии мира, а безрисковый — $1$ (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать $\beta$, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

25. Известно, что рискованный актив дает доход, равный $2$ в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и $10$ во втором состоянии мира, а безрисковый — $\beta$ (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать $\beta$, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

26. Известно, что рискованный актив дает доход, равный $4$ в первом состоянии мира (с вероятностью $\beta$) и $1$ во втором состоянии мира, а безрисковый — $2$ (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать $\beta$, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

27. Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/4$) и $\beta$ во втором состоянии мира, а безрисковый — $1$ (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий только безрисковый актив в положительном количестве (отрицательные количества невозможны). Определите интервал, в котором может лежать $\beta$, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

28. [Аткинсон, Стиглиц] Инвестору доступны не приносящий дохода безрисковый актив и рискованный актив, причем норма доходности рискового актива зависит следующим образом в зависимости от некоторой базовой нормы доходности $\tilde{r}$ и параметра $\tau\in[0;1]$:

(а) $\tilde{r}_1=(1-\tau)\tilde{r}$;

(б) $\tilde{r}_1=\tilde{r}+\tau(\tilde{r}-\bar{r})$, где $\bar{r}=\mathsf{E}(\tilde{r})$.

Как меняется структура оптимального портфеля инвестора-рискофоба в зависимости от параметра $\tau$? Проинтерпретируйте полученные результаты.

Проиллюстрируйте анализ для простого случая, когда есть всего два состояния природы, на диаграмме (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»)[81].

---

[81] Это упражнение опирается на методы сравнительной статики, которые используются в анализе влияния налогообложения на инвестиционные решения.

29. [Аткинсон, Стиглиц] Докажите, что в ситуации, когда инвестору доступны приносящий доход безрисковый и рискованный активы, налог на валовой доход от портфельных инвестиций увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск (т.е. дисперсию доходности оптимального портфеля), если эластичность по доходу спроса на рискованный актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

## *Сравнительная статика решений в условиях неопределенности*

В этом параграфе мы попытаемся ответить на следующие вопросы, относящиеся к сравнительной статике инвестиционного поведения

— какие условия на предпочтения инвестора гарантируют рост вложений в рискованную часть портфеля при росте величины суммарных инвестиций;

— какие условия на предпочтения двух инвесторов гарантирую большую величину вложений в рискованную часть портфеля одного из них при равных величинах суммарных инвестиций;

— какие свойства двух лотерей гарантируют, что одну их них всегда предпочитает любой другой инвестор, предпочтения которого представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

Ответ на первые два вопроса формулируется в терминах характеристик отношения к риску, к анализу которых мы переходим.

Рассмотрим лотерейный билет, которой приносит чистый выигрыш $\varepsilon_1$ с вероятностью $\mu$ и $\varepsilon_2$ с вероятностью $1-\mu$. Обозначим соответствующую случайную величину через $\tilde{\varepsilon}$. Потребитель, располагающий суммой денег $\omega$, приобретет этот лотерейный билет, если лотерея, описываемая случайной величиной $\tilde{x}=\omega+\tilde{\varepsilon}$, предпочитается вырожденной лотерее, дающей $\omega$ с вероятностью 1, т.е.

$$\mathsf{E}(u(\omega+\tilde{\varepsilon}))\geqslant u(\omega).$$

или

$$\mu u(\omega+\varepsilon_1)+(1-\mu)u(\omega+\varepsilon_2)\geqslant u(\omega).$$

Обозначим множество всех таких лотерейных билетов $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ (которые потребитель согласен приобрести) через $\mathcal{E}(\omega)$.

Изобразим на плоскости $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ множество $\mathcal{E}(\omega)$. Потребителю выгодно приобрести любой лотерейный билет, представленный точкой из I квадранта, и не выгодно приобретать любой лотерейный билет, представленный точкой из III квадранта. Выгодность приобретения билетов, представленных точками из II и IV квадрантов зависит, в частности, от отношения к риску рассматриваемого потребителя. Если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ вогнута, то множество $\mathcal{E}(\omega)$ выпукло. (Докажите это.)

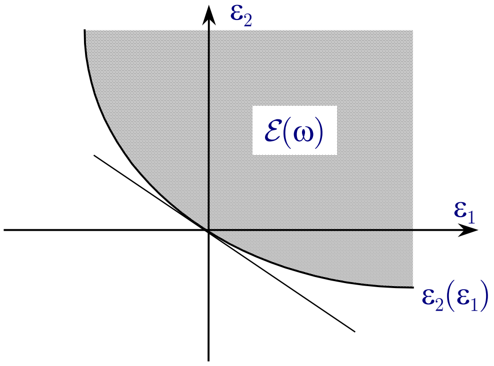


Рисунок 55. Лотерейные билеты, которые потребитель готов приобрести

Для любой лотереи, лежащей на границе этого множества, выполняется:

$$\mu u(\omega+\varepsilon_1)+(1-\mu)u(\omega+\varepsilon_2)=u(\omega). \qquad (1)$$

Это уравнение задает зависимость $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в виде неявной функции. Стандартные свойства элементарной функции полезности и условие $\mu<1$ гарантируют существование такой функции и ее дифференцируемость. Подставим $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в (1) и продифференцируем по $\varepsilon_1$ в точке $0$. Используя, тот факт, что $\varepsilon_2(0)=0$ получим

$$\mu u'(\omega)+(1-\mu)u'(\omega)\varepsilon_2'(0)=0.$$

Это уравнение описывает касательную к $\mathcal{E}(\omega)$ в точке $(0,0)$. Эта касательная имеет наклон $-\dfrac{\mu}{1-\mu}$. Поскольку выпуклое множество лежит выше своей касательной, то точки лежащие ниже этой касательной не принадлежат $\mathcal{E}(\omega)$. Таким образом, если $\varepsilon_2$ будет меньше, чем $-\dfrac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_1$, то участник заведомо не примет участия в такой лотерее (какова бы ни была вероятность $\mu$).

Рассмотрим двух рискофобов. Пусть первый из них принимает лотереи, принадлежащие множеству $\mathcal{E}^1(\omega)$, а второй — $\mathcal{E}^2(\omega)$. Если $\mathcal{E}^2(\omega)\subset\mathcal{E}^1(\omega)$ (строгое включение), то естественно считать, что из этих двух рискофобов второй характеризуется бóльшим неприятием риска, чем первый.

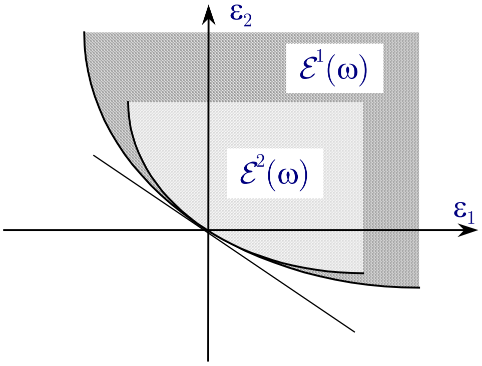


Рисунок 56. Сравнение отношений к риску двух потребителей

Если ни одно из включений $\mathcal{E}^2(\omega)\subset\mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^1(\omega)\subset\mathcal{E}^2(\omega)$ не выполнено, то мы не можем проранжировать рассматриваемых участников, используя данное правило.

Заметим, что линейная аппроксимация этих множеств (полуплоскость, задаваемая касательной в нуле) одна и та же и не отражает различие в отношениях к риску. Поэтому следует рассмотреть «аппроксимацию второго порядка».

В предположении, что элементарная функция полезности дважды непрерывно дифференцируема, продифференцируем выражение (1) по $\varepsilon_1$ дважды в точке $0$. Получаем

$$\mu u''(\omega)+(1-\mu)[u''(\omega)(\varepsilon_2'(0))^2+u'(\omega)\varepsilon_2''(0)]=0.$$

С учетом того, что $\varepsilon_2'(0)=-\frac{\mu}{1-\mu}$, получим

$$\varepsilon_2''(0)=-\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}\frac{\mu}{(1-\mu)^2}.$$

Мы убедились, что уравнения границ множеств $\mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^2(\omega)$ в первом приближении всегда совпадают, а во втором приближении могут различаться. При этом, если $\varepsilon_2''(0)$ у первого меньше, чем у второго, то в окрестности нуля $\mathcal{E}^2(\omega)$ содержится в $\mathcal{E}^1(\omega)$. (Понятно, что глобально это может не выполняться). Поэтому величину $-u''(\omega)/u'(\omega)$ можно рассматривать как локальную меру неприятия риска. Эти рассуждения мотивируют введение следующей характеристики предпочтений потребителя.

**Определение**

**Мерой неприятия риска Эрроу—Пратта** называется величина

$$r(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

При определенных условиях эту меру неприятия риска можно рассматривать и как глобальную меру неприятия риска. В терминах меры Эрроу—Пратта из двух участников можно считать, что тот участник характеризуется бóльшим неприятием риска, у которого мера Эрроу—Пратта всегда больше.

Предложенный Эрроу и Праттом подход — не единственный способ измерить отношение к риску. Выше мы ввели вознаграждение за риск, которую тоже можно рассматривать как меру отношения к риску. Напомним, что величина $\Delta x(\tilde{x})$ называется **вознаграждением за риск** для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\tilde{x}-\Delta x(\tilde{x})$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}u(\tilde{x})=u(\mathsf{E}\tilde{x}-\Delta x(\tilde{x})).$$

Также напомним, что для любого рискофоба вознаграждение за риск — величина неотрицательная. Естественно считать, что в терминах вознаграждения за риск из двух участников тот характеризуется большим неприятием риска, у которого вознаграждение за риск всегда больше.

Можно предложить еще один способ ранжирования рискофобов по их отношению к риску — «степень вогнутости» элементарной функцией полезности. Можно считать, что $u(\cdot)$ «более вогнута», чем $v(\cdot)$, если существует строго вогнутая строго возрастающая функция $G(\cdot)$ такая, что $u(x)=G(v(x))\ \forall x$, тогда участник с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ характеризуется большим неприятием риска.

Оказывается, что все эти способы ранжирования эквивалентны, о чем свидетельствует следующее утверждение.

**Теорема 10** (Теорема Пратта).

Рассмотрим двух потребителей, предпочтения которых характеризуются дважды непрерывно дифференцируемыми элементарными функциями полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, такими что $u_i'(x)>0$ и $u_i''(x)\leqslant 0$ $\forall x$, $i=1,2$.

Следующие три условия эквивалентны:

(i) $r_1(x)>r_2(x)$ $\forall x$, где $r_i(\cdot)$ — мера неприятия риска Эрроу—Пратта, соответствующая $u_i(\cdot)$.

(ii) Существует строго вогнутая строго возрастающая функция $G(\cdot)$ такая, что $u_1(x)=G(u_2(x))$ $\forall x$.

(iii) Для всех случайных переменных $\tilde{x}$ с ненулевой дисперсией ($\mathsf{Var}(\tilde{x})\neq 0$) выполнено $\Delta x_1(\tilde{x})>\Delta x_2(\tilde{x})$.

***<u>Доказательство</u>***:

(i) ⇒ (ii)

Определим $G(\cdot)$ для любого $x$ принадлежащего области значений функции $u_2(\cdot)$ следующим образом:

$$G(x)=u_1(u_2^{-1}(x)).$$

(Поскольку $u_2(\cdot)$ строго монотонна, то она обратима).

Мы так определили функцию $G(\cdot)$, что

$$u_1(x)=G(u_2(x)).$$

Заметим, что эта функция является дважды непрерывно дифференцируемой и строго монотонно возрастающей. Дважды продифференцируем последнее соотношение:

$$u_1'(x)=G'(u_2(x))u_2'(x),$$

$$u_1''(x)=G''(u_2(x))u_2'(x)+G'(u_2(x))u_2''(x).$$

Поделив вторую производную на первую, получим

$$-r_1(x)=-r_2(x)+\frac{G''(u_2(x))}{G'(u_2(x))}u_2'(x).$$

Поскольку $r_1(x)>r_2(x)$, $u_2'(x)>0$, $G'(u_2(x))>0$, то $G''(y)<0$ $\forall y=u_2(x)$, то есть функция $G(\cdot)$ строго вогнута в своей области определения.

(ii) ⇒ (iii)

Пусть функции $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ таковы, что $u_1(x)=G(u_2(x))$ $\forall x$. Тогда для «нетривиальной» случайной величины $\tilde{x}$ (т.е. и для любой случайной величины с положительной дисперсией):

$$u_1(\mathsf{E}\tilde{x}-\Delta x_1(\tilde{x}))=\mathsf{E}u_1(\tilde{x})=\mathsf{E}G(u_2(\tilde{x}))<$$

$$<G(\mathsf{E}u_2(\tilde{x}))=G(u_2(\mathsf{E}\tilde{x}-\Delta x_2(\tilde{x})))=u_1(\mathsf{E}\tilde{x}-\Delta x_2(\tilde{x})).$$

В дополнение к соотношению $u_1(x)=G(u_2(x))$ мы использовали здесь определение вознаграждения за риск и неравенство Йенсена в строгой форме.

Из монотонности $u_1(\cdot)$ следует, что $\Delta x_1(\tilde{x})>\Delta x_2(\tilde{x})$.

(iii) ⇒ (i)

Пусть $\tilde{\varepsilon}(t)$ — семейство случайных величин, принимающих значение $t$ и $-t$ с равными вероятностями. Рассмотрим семейство случайных величин $\tilde{x}(t)=\omega+\tilde{\varepsilon}(t)$. Обозначим для потребителя с элементарной функцией полезности $u_i(\cdot)$ вознаграждение за риск для $\tilde{x}(t)$ через $\Delta_i(t)$. Таким образом, верно соотношение

$$u_i(\mathsf{E}\tilde{x}(t)-\Delta_i(t))=u_i(\omega-\Delta_i(t))=\frac{1}{2}u_i(\omega+t)+\frac{1}{2}u_i(\omega-t)=\mathsf{E}u_i(\tilde{x}(t)),$$

т.е.

$$u_i(\omega-\Delta_i(t))=\frac{1}{2}u_i(\omega+t)+\frac{1}{2}u_i(\omega-t) \qquad (3)$$

Покажем, что для достаточно малых $t$ величина $\Delta_i(t)$ пропорциональна мере Эрроу—Пратта, что и докажет соответствующее утверждение.

Поскольку функция $u_i(\cdot)$ обратима, то можно получить выражение для вознаграждения за риск в явном виде:

$$\Delta_i(t)=\omega-u_i^{-1}(\frac{1}{2}u_i(\omega+t)+\frac{1}{2}u_i(\omega-t)).$$

Поскольку функция $u_i(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, то $\Delta_i(t)$ — тоже дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Заметим, что $\Delta_i(0)=0$ и $\Delta_i'(0)=0$. Первое равенство очевидно. Покажем, что выполняется и второе. Действительно, дифференцируя тождество (3) по $t$ получим

$$-u_i'(\omega-\Delta_i(t))\Delta_i'(t)=\frac{1}{2}u_i'(\omega+t)-\frac{1}{2}u_i'(\omega-t),$$

откуда при $t=0$

$$-u_i'(\omega)\Delta_i'(0)=0.$$

Дважды дифференцируя тождество (3) по $t$ получим

$$u_i''(\omega-\Delta_i(t))(\Delta_i'(t))^2-u_i'(\omega-\Delta_i(t))\Delta_i''(t)=\frac{1}{2}u_i''(\omega+t)+\frac{1}{2}u_i''(\omega-t),$$

откуда при $t=0$ получим

$$-u_i'(\omega)\Delta_i''(0)=u_i''(\omega)$$

или

$$\Delta_i''(0)=-\frac{u_i''(\omega)}{u_i'(\omega)}=r_i(\omega).$$

Подставим полученные результаты в ряд Тейлора:

$$\Delta_i(t)=\frac{1}{2}t^2r_i(\omega)+o(t^2).$$

■

Введенная мера Эрроу—Пратта называется абсолютной мерой Эрроу—Пратта. Кроме того, рассматривают **относительную меру Эрроу—Пратта**, которая определяется по формуле:

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)}.$$

Относительная мера Эрроу—Пратта является эластичностью предельной полезности (по доходу).

Меры Эрроу—Пратта являются полезными инструментами анализа поведения инвестора в условиях риска, т.к. в их терминах получаются ответы на стандартные вопросы сравнительной статики: как изменяется структура инвестиционного портфеля при изменении размера инвестиций, доходностей активов и т.д. А к проблемам сравнительной статики сводятся многие проблемы прикладной экономики: характер спроса на деньги в портфельной теории формирования спроса на деньги, влияние налогообложения и т.д.

В терминах (абсолютной) меры Эрроу—Пратта можно охарактеризовать спрос на рискованный актив как функцию величины инвестиций в рассматриваемый портфель из двух активов.

$$U = \mathsf{E}u(\omega r_0 + z(\tilde{r} - r_0)) \to \max{}_{\alpha \geqslant 0}.$$

Мы предполагаем, что решение $z(\omega)$ существует $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$ и что $\mathsf{E}\tilde{r} > r_0$, т.е. что решение внутреннее ($z(\omega) > 0$).

**Теорема 11**.

Если мера Эрроу—Пратта $r(x)$ убывает, то рискованный актив является нормальным благом, т.е. $z'(\omega) > 0$.

***Доказательство***:

Условие оптимальности портфеля имеет вид

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = 0,$$

где $\tilde{x} = \omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0)$.

Продифференцируем его по ω:

$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)(r_0 + z'(\omega)(\tilde{r} - r_0))] = 0,$$

По свойствам оператора мат. ожидания

$$r_0 \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = -z'(\omega)\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2],$$

откуда

$$z'(\omega) = -r_0 \frac{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)]}{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]},$$

Ясно, что знаменатель здесь меньше нуля, так как в силу вогнутости функции полезности $u''(x) < 0$. Покажем, что числитель больше нуля.

Рассмотрим случайную величину $\tilde{r} - r_0$: она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

$u''(\omega r_0 + z(\omega)(r - r_0))(r - r_0)$

Рассмотрим случай $\tilde{r} = r > r_0$. Тогда в силу убывания функции $r(\cdot)$ при $z > 0$

$$r(\omega r_0 + z(r - r_0)) < r(\omega),$$

По определению меры Эрроу—Пратта

$$-\frac{u''(\omega r_0 + z(r - r_0))}{u'(\omega r_0 + z(r - r_0))} < r(\omega),$$

Умножив это неравенство на знаменатель и на $-(r - r_0)$, получаем:

$$u''(\omega r_0 + z(r - r_0)) > -r(\omega)u'(\omega r_0 + z(r - r_0)),$$

Легко видеть, что при $\tilde{r}=r<r_0$ это неравенство тоже верно. Это означает, что верно соотношение

$$\mathsf{E}u''(\omega r_0+z(\omega)(\tilde{r}-r_0))>-r(\omega)\mathsf{E}u'(\omega r_0+z(\omega)(\tilde{r}-r_0)).$$

Следовательно, $z'(\omega)>0$. Другими словами, рискованный актив является нормальным благом.

■

Отметим, однако, что это свойство не выполняется для случая с двумя и более рискованными активами.

## Задачи

30. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта неприятия риска убывает, то $u'''\leqslant 0$. Покажите, что обратное неверно.

31. Приведите примеры элементарной функции полезности с возрастающей, убывающей и постоянной абсолютной и относительной мерой Эрроу—Пратта.

32. Покажите, что при увеличении объема инвестиций доля инвестиций в рискованный актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) постоянна (возрастает, убывает), если относительная мера Эрроу—Пратта убывает (возрастает, постоянна).

33. Покажите, что в первом приближении премия за риск равна

$$r(w)\sigma^2/2,$$

где $r(.)$ — абсолютная мера Эрроу—Пратта, а $\sigma^2$ — дисперсия лотереи.

34. Пусть в ситуации с двумя активами, рассмотренной выше, $\alpha(R_0)$ — оптимальная доля вложений в рискованный актив как функция доходности безрискового актива. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта растет ($r'(.) > 0$) и решение внутреннее ($0 < \alpha(R_0) < 1$), то $\frac{\mathrm{d}\alpha(R_0)}{\mathrm{d}R_0}>0$, т.е. уменьшение доходности безрискового актива приводит к увеличению доли вложений в рискованный актив.

Указание:

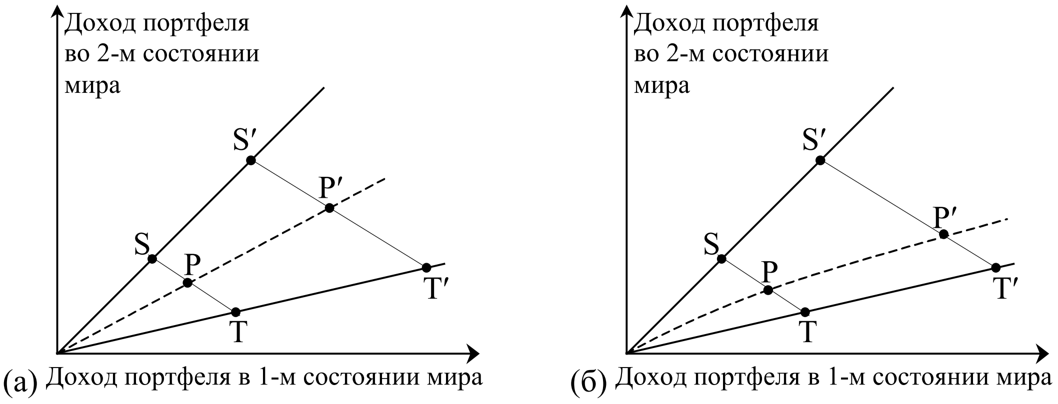
Покажите, продифференцировав условие первого порядка, что

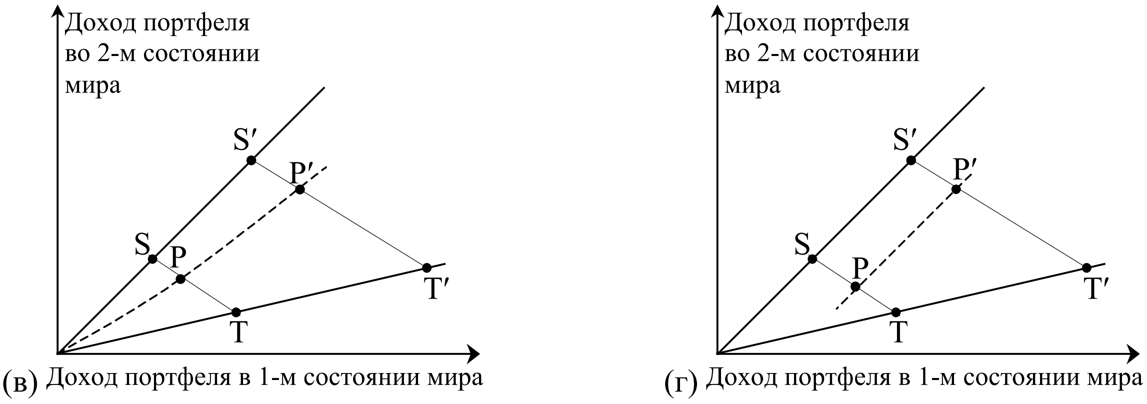
$$\frac{d\alpha(R_0)}{dR_0}=\frac{\mathsf{E}\,(u'(\tilde{w}))-w(1-\alpha(R_0))\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0))}{w\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0)^2)}.$$

Отсюда следует требуемый результат, поскольку $\mathsf{E}\,(u''(\tilde{\omega})(\tilde{R}-R_0))\leqslant 0$ (вследствие того, что $r'(.) > 0$).

35. Предположим, что (в мире с двумя состояниями) имеется один рискованный (с нормой доходности $\tilde{r}$) и один не приносящий дохода безрисковый актив. Охарактеризуйте в терминах относительной и абсолютной меры неприятия риска Эрроу—Пратта (эластичности по богатству спроса на рисковый актив) представленные на рисунке возможные структу-

ры оптимальных портфелей при разных уровнях богатства. Линия PP′ представляет совокупность фактических портфелей (при разных уровнях инвестиций в портфель), SS′ (TT′) — совокупность портфелей при условии, что портфели содержат лишь безрисковые (рисковые) активы. Линии ST (S′T′) представляют совокупность допустимых портфелей при данном уровне инвестиций.





36. Докажите, что если у двух участников меры неприятия риска $r^1(\cdot)$ и $r^2(\cdot)$ таковы, что при всех $x$ выполнено $r^1(x) \leqslant r^2(x)$, то для любого исходного уровня богатства $\omega$ выполнено $\mathcal{E}^2(\omega) \subseteq \mathcal{E}^1(\omega)$. (Заметим, что обратное утверждение фактически доказано в тексте параграфа).

## *Приложение: модель Марковица*[82] *и* CAPM

Рассмотрим интересный частный случай модели инвестора, предположив, что элементарная функция полезности $u(\cdot)$ имеет вид

$$u(\cdot) = a_0 + a_1 x - a_2 x^2.$$

---

[82] Markowitz, Harry "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, **7** (1952). Markowitz, Harry *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (New York, John Wiley & Sons, 1959). Tobin, James "Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk “, *Review of Economic Studies*, **25** (1958). Tobin, James "The Theory of Portfolio Selection", in F. H. Hahn and F. P. R. Brechling (eds.), *The Theory of Interest Rates* (London, Macmillan, 1965).

(Можно интерпретировать это как квадратичную аппроксимацию первоначальной элементарной функции полезности получаемую разложением в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка в некоторой точке:

$$u(\cdot)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots)$$

Предполагается, что здесь $a_1, a_2>0$. Условие $a_2>0$ гарантирует, что инвестор является рискофобом. Условие $a_1>0$ гарантирует, что при достаточно малых $x$ элементарная функция полезности имеет положительную производную. Очевидно, что квадратичная функция может быть адекватной аппроксимацией не при всех $x$, поскольку при $x=a_1/(2a_2)$ она достигает максимума, а далее убывает (т.е. по сути дела она подразумевает насыщаемость предпочтений инвестора).[83]

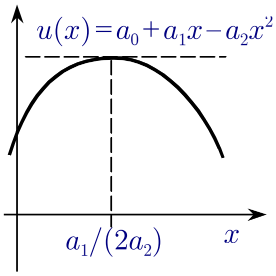


Рисунок 57

При такой элементарной функции полезности ожидаемая полезность случайного дохода $\tilde{x}$ равна

$$U=\mathsf{E}u(\tilde{x})=a_0+a_1\mathsf{E}\tilde{x}-a_2\mathsf{E}(\tilde{x}^2).$$

Введем обозначения $\bar{x}=\mathsf{E}\tilde{x}$ (ожидаемый доход) и $\sigma_x^2=\mathsf{Var}\,\tilde{x}$ (дисперсия дохода). По определению дисперсии

$$\mathsf{E}(\tilde{x}^2)=(\mathsf{E}\tilde{x})^2+\mathsf{Var}\,\tilde{x}=\bar{x}^2+\sigma_x^2.$$

В этих обозначениях ожидаемая полезность примет вид

$$U=a_0+a_1\bar{x}-a_2(\bar{x}^2+\sigma_x^2).$$

Таким образом, при квадратичной элементарной функции полезности целевая функция инвестора зависит от двух характеристик распределения его дохода от портфеля: от математического ожидания дохода (среднего дохода) и дисперсии дохода (которую можно считать мерой рискованности). Эта парадигма «среднее-дисперсия» Марковица не только упрощает анализ инвестиционного поведения, но и позволяет давать наглядные геометри-

---

[83] У квадратичной функции есть и другие серьезные недостатки, вследствие чего модель Марковица нельзя считать вполне адекватной для описания инвестиционного поведения. Однако она вполне оправдана, если считать ее первым приближением с точки зрения моментов распределения. Очевидно, что если учитывать только первые моменты (ожидаемые доходности), то модель станет совсем неадекватной, поскольку не будет учитывать риск (см. об этом, например, в статье Г. Марковица). П. Самуэльсон показал (Paul A. Samuelson. "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments." *The Review of Economic Studies*, Vol. 37, No. 4. (Oct., 1970), pp. 537-542), что при малом риске, т.е. в пределе, при стремлении распределения доходностей активов $\tilde{r}_k$ к вырожденному распределению, при котором $\tilde{r}_k$ принимает значение $r_0$ с вероятностью единица, приближение по двум первым моментам дает верное решение с точки зрения структуры портфеля. Если учесть более высокие моменты, то приближение будет более точным, но анализ модели существенно усложняется.

Другой случай (помимо квадратичной функции), при котором ожидаемая полезность зависит только от ожидаемой доходности и дисперсии доходности, — это когда доходности активов $\tilde{r}_k$ имеют (многомерное) нормальное распределение. Но нормальное распределение плохо аппроксимирует поведение доходностей реальных финансовых активов.

ческие интерпретации различных этапов такого анализа, поскольку каждый портфель в этой ситуации характеризуется всего двумя параметрами.

Удобно, как и выше, перейти от дохода к валовой доходности портфеля, которую обозначим через $\tilde{r}_P$:

$$\tilde{r}_P = \tilde{x}/\omega.$$

Обозначим через $\bar{r}_P$ ожидаемую доходность портфеля, $\mathsf{E}\tilde{r}_P$, а через $\sigma_P^2$ — дисперсию доходности портфеля, $\mathsf{Var}\,\tilde{r}_P$. Поскольку $\tilde{x} = \omega\tilde{r}_P$, то, вынося константу $\omega$ за операторы мат. ожидания и дисперсии, получим

$$\bar{x} = \mathsf{E}\tilde{x} = \mathsf{E}(\omega\tilde{r}_P) = \omega\mathsf{E}\tilde{r}_P = \omega\bar{r}_P$$

и

$$\sigma_x^2 = \mathsf{Var}\,\tilde{x} = \mathsf{Var}(\omega\tilde{r}_P) = \omega^2\mathsf{Var}\,\tilde{r}_P = \omega^2\sigma_P^2.$$

Подставим эти выражения в функцию полезности:

$$U = a_0 + a_1\omega\bar{r}_P - a_2\omega^2(\bar{r}_P{}^2 + \sigma_P^2)$$

или, при введении обозначений $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1\omega$, $b_2 = a_2\omega^2$,

$$U = b_0 + b_1\bar{r}_P - b_2(\bar{r}_P{}^2 + \sigma_P^2),$$

Мы можем нормировать эту функцию, применив к ней соответствующее линейное возрастающее преобразование. Окончательно получаем следующую функцию полезности:

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P{}^2 + \sigma_P^2).$$

Функция зависит от ожидаемой доходности портфеля и дисперсии доходности портфеля. Коэффициент $\gamma$ отражает степень неприятия риска.

Доходность портфеля очевидным образом связана с доходностями активов:

$$\tilde{r}_P = \sum_{k\in K}\alpha_k\tilde{r}_k$$

или

$$\tilde{r}_P = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}_k$ — вектор долей активов (структура портфеля), $\tilde{\boldsymbol{r}}$ — вектор, составленный из доходностей активов. Таким образом, доходность портфеля — это взвешенное среднее доходностей активов, где в качестве весов выступают доли активов в портфеле.

Обозначим через $\bar{\boldsymbol{r}}$ вектор, составленный из ожидаемых доходностей активов $\bar{r}_k = \mathsf{E}\tilde{r}_k$, а через $\boldsymbol{V}$ — ковариационную матрицу доходностей активов. В этих обозначениях для ожидаемой доходности портфеля выполнено соотношение

$$\bar{r}_P = \mathsf{E}\tilde{r}_P = \mathsf{E}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{r}} = \sum_{k\in K}\alpha_k\bar{r}_k,$$

(ожидаемая доходность портфеля — это взвешенное среднее ожидаемых доходностей активов), а для дисперсии доходности портфеля выполнено

$$\sigma_P^2 = \mathsf{Var}(\tilde{r}_P) = \mathsf{Var}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}}) = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}} - \mathrm{E}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}}))^2] =$$

$$= \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{r}})^2] = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}(\tilde{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}}))^2] = \mathsf{E}[\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}(\tilde{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}})(\tilde{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}] =$$

$$= \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}[(\tilde{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}})(\tilde{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}})^{\mathsf{T}}]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Типичным элементом ковариационной матрицы $\boldsymbol{V}$ является ковариация между доходностями пары активов:

$$c_{k_1k_2}=\mathsf{Cov}(\tilde{r}_{k_1},\tilde{r}_{k_2})=\mathsf{E}[(\tilde{r}_{k_1}-\bar{r}_{k_1})(\tilde{r}_{k_2}-\bar{r}_{k_2})].$$

Ковариационная матрица симметрична и по диагонали ее стоят дисперсии доходностей отдельных активов $\sigma_k^2=c_{kk}=\mathsf{Var}\,\tilde{r}_k$.

[Напомним, что в дискретном случае величины $\bar{r}_k$, $\sigma_k^2$ и $c_{k_1k_2}$ вычисляются по формулам:

$$\bar{r}_k=\sum_{s\in S}\mu_s r_{ks},$$

$$\sigma_k^2=\sum_{s\in S}\mu_s(r_{ks}-\bar{r}_k)^2,$$

$$c_{k_1k_2}=\sum_{s\in S}\mu_s(r_{k_1s}-\bar{r}_{k_1})(r_{k_2s}-\bar{r}_{k_2})).\ ]$$

Дисперсию доходности портфеля можно выразить также через корреляции доходностей активов:

$$\sigma_P^2=\sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\rho_{k_1k_2},$$

где $\sigma_k$ — корень из дисперсии (среднеквадратическое отклонение) доходности $k$-го актива, $\rho_{k_1k_2}$ — коэффициент корреляции доходностей активов $k_1$ и $k_2$, определяемый как

$$\rho_{k_1k_2}=\frac{c_{k_1k_2}}{\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}}.$$

В конечном итоге задача инвестора в модели Марковица приобретает следующий вид:

$$U=\alpha^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{r}}-\gamma((\alpha^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{r}})^2+\alpha^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\alpha)\to\max{}_{\alpha}.$$

$$\sum_{k\in K}\alpha_k\leqslant 1,$$

$$\alpha_k\geqslant 0,\ \forall k\in K,\ k\neq 0.$$

В зависимости от рассматриваемой модели безрисковый актив $k=0$ может присутствовать, либо нет в формулировке этой задачи инвестора. Эта задача представляет собой задачу квадратичного программирования, поскольку в нее входят только многочлены второго порядка от долей $\alpha_k$.

В такой упрощенной модели выбора каждый актив характеризуется для инвестора всего двумя параметрами, поэтому задачу инвестирования можно и удобно рассматривать на диаграмме с осями $\sigma$, $\bar{r}$ (диаграмма риск-доходность). На этой диаграмме каждый актив или портфель активов $P$ можно изобразить точкой $(\sigma_P,\bar{r}_P)$.

Кривые безразличия (линии уровня функции полезности)

$$\bar{r}_P-\gamma(\bar{r}_P{}^2+\sigma_P^2)=\text{const}$$

представляют собой окружности с центром в точке

$$(\sigma_P,\bar{r}_P)=(0,{}^1\!/_{2\gamma}).$$

Мы будем в дальнейшем предполагать, что точка насыщения с доходностью ${}^1\!/_{2\gamma}$ находится выше доходностей всех доступных инвестору активов.

Для этой модели можно доказать ряд утверждений о характеристиках портфелей, характеризующих структуры допустимых и оптимальных портфелей в разных ситуациях (с точки зрения доходностей доступных инвестору активов).

Рассмотрим случай, когда портфель составлен из безрискового актива ($k=0$) и одного рискованного актива (первого). Дисперсия доходности такого портфеля равна

$$\sigma_P^2 = \mathsf{Var}(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1) = \mathsf{Var}(\alpha_1 \tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \mathsf{Var}(\tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \sigma_1^2.$$

Среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = \alpha_1 \sigma_1,$$

т.е. при комбинировании безрискового и рискованного активов среднеквадратичное отклонение портфеля пропорционально среднеквадратичному отклонению рискованного актива, причем коэффициент пропорциональности равен доле вложений в рискованный актив.

Доходность же портфеля, очевидно, равна

$$r_P = \alpha_0 r_0 + \alpha_1 \overline{r}_1 = (1-\alpha_1) r_0 + \alpha_1 \overline{r}_1 = r_0 + \alpha_1 (\overline{r}_1 - r_0).$$

Таким образом, портфели $(\sigma_P, \overline{r}_P)$, соответствующие различным выпуклым комбинациям этих активов лежат на отрезке с концами в точках $(0, r_0)$ и $(\sigma_1, \overline{r}_1)$. Это множество допустимых портфелей для случая, когда кредит невозможен (т.е. инвестор не может выбрать $\alpha_0 > 0$). Если кредит доступен, то возможные комбинации лежат на луче, выходящем из $(0, r_0)$ и проходящем через $(\sigma_1, \overline{r}_1)$. Часть луча за точкой $(\sigma_1, \overline{r}_1)$ соответствует кредиту ($\alpha_0 > 0$). Этот луч — аналог бюджетной прямой для задачи инвестора.

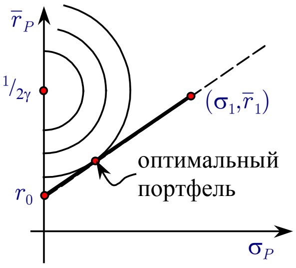


Рисунок 58. Оптимальный портфель в случае двух активов

Оптимальному портфелю на графике соответствует точка, в которой кривая безразличия касается луча. Доли активов в оптимальном портфеле определяются отношением инвестора к риску (параметром $\gamma$). Для того, чтобы оптимальный портфель был внутренним (в смысле $\alpha_1 > 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{r}_1 > r_0$. В случае же $\overline{r}_1 \leqslant r_0$ наклон луча будет отрицательный и оптимум будет достигаться при $\alpha_1 = 0$ (рискованный актив не войдет в портфель).

Перейдем теперь к рассмотрению портфелей, содержащих несколько рискованных активов. Мы выясним при различных частных предположениях о коррелированности доходностей активов, какова будет структура множества возможных портфелей и каким будет оптимальный портфель.

Сначала рассмотрим случай, когда доходности всех рискованных активов жестко положительно коррелированны, то есть когда коэффициент корреляции между любой парой активов равен единице:

$$\rho_{k_1k_2}=1\ (\forall k_1,\ k_2\neq 0).$$[84]

При этом

$$\sigma_P^2=\sum_{k_1}\sum_{k_2}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}=\sum_{k_1}\alpha_{k_1}\sigma_{k_1}\sum_{k_2}\alpha_{k_2}\sigma_{k_2}=\left(\sum_k\alpha_k\sigma_k\right)^2$$

откуда

$$\sigma_P=\sum_k\alpha_k\sigma_k.$$

(В матричном виде

$$V=\begin{pmatrix}\sigma_1\sigma_1 & \cdots & \sigma_l\sigma_1\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_1\sigma_l & \cdots & \sigma_l\sigma_l\end{pmatrix}=\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}},$$

где $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_k\}_k$ — вектор корней из дисперсий активов. В этих обозначениях

$$\sigma_P^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma})^2.)$$

Для ожидаемой доходности вне зависимости от коррелированности выполняется

$$\bar{r}_P=\sum_k\alpha_k\bar{r}_k.$$

Отсюда следует, что множество точек $(\sigma_P, \bar{r}_P)$ при неотрицательных долях $\alpha_k$ есть выпуклая комбинация точек $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих рассматриваемым активам:

$$(\sigma_P, \bar{r}_P)=\sum_k\alpha_k(\sigma_k, \bar{r}_k)$$

(риски складываются с весами $\alpha$, как и доходности).

Другими словами, на диаграмме риск-доходность множество возможных рискованных портфелей представляет собой выпуклый многоугольник с вершинами в точках $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих отдельным активам.

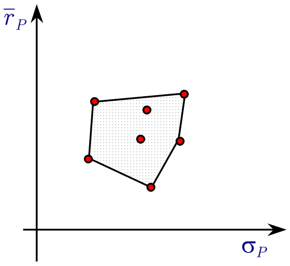


Рисунок 59. Возможные рискованные портфели в случае жестко положительно коррелированных активов

Проанализируем структуру портфелей, содержащих дополнительно безрисковый актив.

Выше мы уже рассмотрели, как комбинировать рискованный *актив* с безрисковым. Нетрудно понять, что по аналогичным формулам вычисляются характеристики портфеля, полученного при комбинировании рискованного *портфеля* с безрисковым активом. Любой такой портфель на диаграмме риск-доходность будет представлять собой точку отрезка (луча) соединяющего безрисковый актив с данным рискованным портфелем. Действи-

---

[84] Такое может происходить, если доходности зависят от фазы экономического цикла или другого общего параметра.

тельно, пусть доли активов в исходном рискованном портфеле равны $\nu_k$, тогда этот портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_R=\sum_{k\neq 0}\nu_k\bar{r}_k,$$

$$\sigma_R^2=\sum_{k_1\neq 0}\sum_{k_2\neq 0}\nu_{k_1}\nu_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Назовем комбинированным портфелем, состоящим из безрискового актива и исходного портфеля, с долями $\alpha_0$ и $1-\alpha_0$ соответственно, такой портфель, в котором доли вложений в рискованные активы равны $\alpha_k=\nu_k(1-\alpha_0)$, а доля вложений в безрисковый актив равна $\alpha_0$. Такой портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_P=\sum_{k\in K}\alpha_k\bar{r}_k,$$

$$\sigma_P^2=\sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Покажем, что выполнено следующие соотношения:

$$\tilde{r}_P=\alpha_0r_0+(1-\alpha_0)\tilde{r}_R,$$

$$\sigma_P=(1-\alpha_0)\sigma_R,$$

$$\bar{r}_P=\alpha_0r_0+(1-\alpha_0)\bar{r}_R,$$

то есть при таком комбинировании с портфелями можно обращаться так же, как с активами. (Этот результат можно обобщить на случай комбинирования любых портфелей).

Действительно,

$$\bar{r}_P=\sum_{k\in K}\alpha_k\bar{r}_k=\alpha_0r_0+\sum_{k\neq 0}\nu_k(1-\alpha_0)\bar{r}_k=$$

$$=\alpha_0r_0+(1-\alpha_0)\sum_{k\in K}\nu_k\bar{r}_k=\alpha_0r_0+(1-\alpha_0)\bar{r}_R.$$

Для дисперсии комбинированного портфеля имеем

$$\sigma_P^2=\sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}=$$

$$=\alpha_0{}^2c_{00}+\sum_{k_1\neq 0}\alpha_{k_1}\alpha_0c_{k_10}+\sum_{k_2\neq 0}\alpha_0\alpha_{k_2}c_{0k_2}+\sum_{k_1\neq 0}\sum_{k_2\neq 0}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Учитывая, что $c_{00}=c_{k_10}=c_{0k_2}=0$, и $\alpha_k=\nu_k(1-\alpha_0)$ получаем

$$\sigma_P^2=(1-\alpha_0)^2\sum_{k_1\neq 0}\sum_{k_2\neq 0}\nu_{k_1}\nu_{k_2}c_{k_1k_2}=(1-\alpha_0)^2\sigma_R^2$$

или

$$\sigma_P=(1-\alpha_0)\sigma_R.$$

Вернемся к анализу портфеля, в котором все рискованные активы жестко положительно коррелированны. Учитывая полученный только что результат, охарактеризуем все комбинированные портфели в этом случае. Каждый из них является точкой на луче, выходящем из точки $(0,r_0)$ и проходящем через одну из точек многогранника рискованных активов. Таким образом, комбинированные портфели в данном случае представляют собой выпуклый конус, составленный из таких лучей. Оптимальный портфель должен лежать на верхней границе этого конуса, в точке, где ее касается кривая безразличия инвестора (см. Рис. 60).

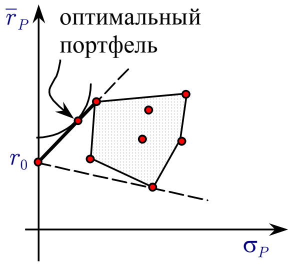


Рисунок 60. Оптимальный портфель в случае жестко положительно коррелированных активов

В оптимальный портфель в невырожденном случае войдет только один рискованный актив, имеющий наилучшие характеристики.

Здесь рискованная часть портфеля определяется из задачи

$$\frac{\bar{r}_k - r_0}{\sigma_k} \to \max_{k=1,\dots,l}.$$

Выбирается актив, для которого луч будет иметь наибольший наклон. Только он и может войти в портфель с положительным весом.

В вырожденном случае (см. Рис. 61) несколько активов характеризуются максимальным наклоном и все они могут войти в оптимальный портфель. В оптимуме относительные доли вложений в такие активы не определены однозначно.

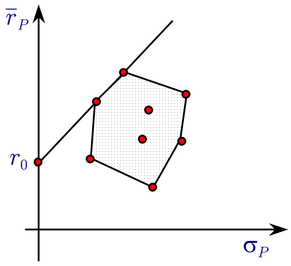


Рисунок 61. Жестко положительно коррелированные активы — вырожденный случай

Мы рассматривали только поведение инвестора, т.е. спрос на активы, но можно рассматривать и предложение активов. Если те, кто предлагает активы, могут менять доходность, но не коэффициенты корреляции, то естественно ожидать, что в равновесии на рынке активов все предлагаемые активы лежат на оптимальном луче. Таким образом, для строго положительно коррелированных активов «вырожденный» случай в определенном смысле довольно естественен.

Второй случай коррелированности — жесткая отрицательная корреляция. Имеет смысл рассматривать только пару таких активов (для более чем двух активов все коэффициенты корреляции не могут равняться $-1$). Таким образом, пусть есть два актива, 1 и 2, такие что $\rho_{12}=-1$. Применяя общую формулу для расчета дисперсии, получим

$$\sigma_P^2 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha_1^2\sigma_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 = (\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2)^2,$$

откуда среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = |\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2|.$$

Ожидаемая доходность портфеля равна

$$\bar{r}_P = \alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2.$$

Несложно понять, что допустимые комбинации таких двух активов составляют ломаную. Точка излома соответствует портфелю с нулевым риском ($\sigma_P = 0$). Это означает, что из двух жестко отрицательно коррелированных активов можно составить безрисковый портфель.

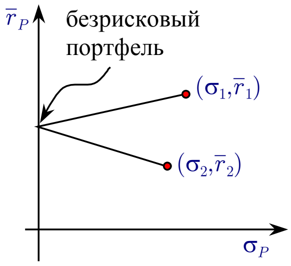


Рисунок 62. Возможные рискованные портфели в случае жестко отрицательно коррелированных активов

Чтобы получить такую ломаную на графике, нужно отразить одну из точек относительно вертикальной оси и соединить отрезком с другой точкой.

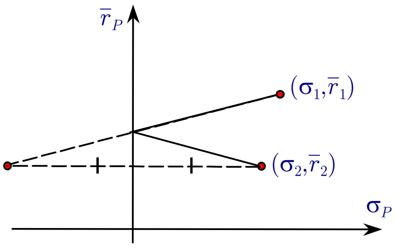


Рисунок 63. Построение ломаной возможных рискованных портфелей в случае жестко отрицательно коррелированных активов

Безрисковый портфель получается при следующей структуре портфеля:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},\ \alpha_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Его доходность, которую мы обозначим $r_{00}$, равна

$$r_{00} = \frac{\sigma_1 \bar{r}_2 + \sigma_2 \bar{r}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Поскольку из двух таких активов можно составить безрисковый портфель, то рассматривать, как эти активы будут сочетаться с безрисковым активом, не имеет особого смысла. Можно сказать только, что при $r_{00} > r_0$ и возможности кредита по ставке $r_0$ получается парадоксальный результат — можно брать в кредит по ставке $r_0$ и инвестировать без риска с доходностью $r_{00}$. При этом можно получить сколь угодно большую доходность портфеля. (Формально в модели решение существует, так как целевая функция насыщаема). Ясно, что этого не может происходить в рыночном равновесии. Следует учесть предложение активов. Естественно предположить, что в равновесии должно быть $r_{00} \leqslant r_0$ (отсутствие «рога изобилия»).

Третий случай, который мы рассмотрим — некоррелированные активы. Тогда

$$V = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_l^2).$$

$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{V} \boldsymbol{\alpha} = \sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2.$$

$$\sigma_P=\sqrt{\sum_k \alpha_k^2\sigma_k^2}.$$

Ожидаемая доходность портфеля, как всегда, равна

$$\bar r_P=\sum_k \alpha_k \bar r_k.$$

Из двух некоррелированных активов комбинируется дуга, изогнутая влево (см. Рис. 64).

$$\bar r_P=\alpha_1\bar r_1+\alpha_2\bar r_2=\alpha_1\bar r_1+(1-\alpha_1)\bar r_2.$$

$$\sigma_P=\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2+\alpha_2^2\sigma_2^2}=\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2+(1-\alpha_1)^2\sigma_2^2}.$$

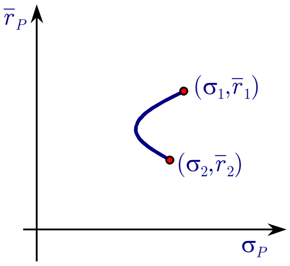


Рисунок 64. Возможные рискованные портфели в случае двух некоррелированных активов

В отличие от случая жесткой положительной коррелированности, риски при некоррелированности не складываются, поэтому риск при комбинировании активов будет снижен. Тогда все активы с доходностью выше гарантированной должны войти в оптимальный портфель (эффект диверсификации). Другими словами, для случая некоррелированных доходностей в модели Марковица выполняется аналог теоремы о диверсификации:

> Если доходности всех рискованных активов в модели Марковица некоррелированны, то рискованный актив войдет в оптимальный портфель ($\alpha_k>0$), если, и только если, его ожидаемая доходность выше гарантированной ($\bar r_k>r_0$).

Доказательство этого утверждения будет приведено ниже.

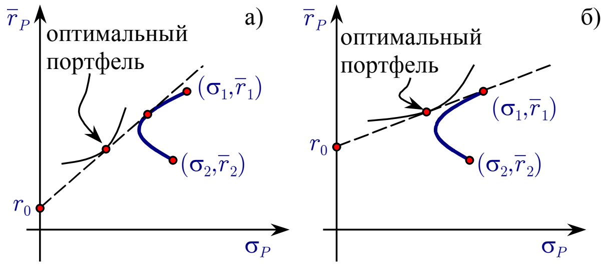


Рисунок 65. Оптимальные портфели в случае двух некоррелированных активов.

На Рис. 65 а оба рискованных актива входят в оптимальный портфель, так как их ожидаемая доходность больше доходности безрискового актива. На Рис. 65 б только один рискованный актив (1-й) входит в оптимальный портфель.

При произвольном коэффициенте корреляции комбинации доходности и риска, достижимые комбинированием двух активов, окажутся на графике некоторой кривой соединяющей эти точки и выгибающейся, при неполной коррелированности, влево. На Рис. 66 показаны портфели, которые можно составить из двух активов при разных коэффициентах корреляции. Чем меньше коэффициент корреляции, тем сильнее влево выгибается кривая возможных портфелей.

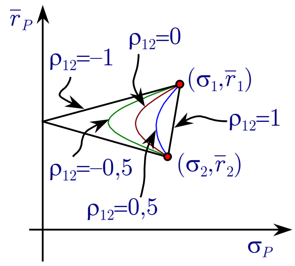


Рисунок 66. Возможные портфели из двух рискованных активов при разных коэффициентах корреляции

В общем случае допустимое множество $\mathcal{R}$ всех доступных инвестору портфелей, состоящих из рискованных активов, на диаграмме риск-доходность будет изображаться некоторой связной фигурой, граница которой оказывается кривой, выпуклой влево (см. напр. Рис. 67).[85] Очевидно, что множество $\mathcal{R}$ лежит в пределах, задаваемых наибольшей и наименьшей ожидаемой доходностью доступных активов. Т.е. для любого рискованного портфеля $(\sigma_M, \overline{r}_M) \in \mathcal{R}$ выполнено

$$\min \overline{r}_k \leqslant \overline{r}_M \leqslant \max \overline{r}_k.$$

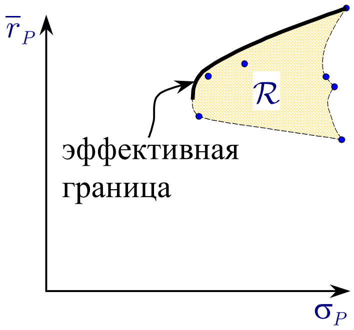


Рисунок 67. Множество возможных рискованных портфелей для нескольких активов

Если бы инвестор выбирал портфель из множества $\mathcal{R}$, то он *не стал бы* выбирать такой портфель $(\sigma_M, \overline{r}_M)$, для которого существует другой допустимый портфель $(\sigma'_M, \overline{r}'_M) \in \mathcal{R}$ с лучшими характеристиками, т.е. такой что

$$\sigma'_M \leqslant \sigma_M \text{ и } \overline{r}'_M \geqslant \overline{r}_M,$$

причем одно из неравенств строгое. Выбор инвестора всегда лежал бы на **эффективной границе**, состоящей из портфелей, для которых при заданной величине риска доходность максимальна (см. Рис. 67).

Комбинируя рискованные портфели с безрисковым активом получим множество всех возможных портфелей, которое на диаграмме будет выглядеть как конус с вершиной в точке $(0, r_0)$ (см. Рис. 68). Этот конус состоит из всех таких лучей, что они выходят из точки $(0, r_0)$ и проходят через одну из точек $(\sigma_M, \overline{r}_M) \in \mathcal{R}$.

---

[85] Диаграмма изображает множество возможных портфелей, составленных из 7 активов, при некоторой матрице корреляций доходностей этих активов.

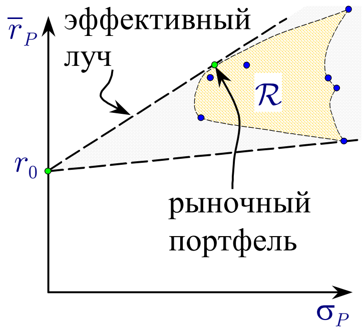


Рисунок 68. Множество возможных портфелей для нескольких активов

Комбинируя наилучшую (по наклону луча) точку из $\mathcal{R}$с безрисковым активом, как и ранее получаем наилучший по соотношению риска и доходности. Оптимальный портфель определяется наиболее крутым лучом (см. Рис. 68), т.е.

$$\frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M} \to \max{}_{(\sigma_M, \bar{r}_M)\in\mathcal{R}}$$

Полезность инвестора от оптимального портфеля равна

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P{}^2 + \sigma_P^2),$$

где величины $\bar{r}_P$ и $\sigma_P^2$ можно выразить через доли всех активов, кроме безрискового, ($\alpha_k$, $k$=1,...,$l$) следующим образом:

$$\bar{r}_P = r_0 + \sum_{k=1}^{l} \alpha_k(\bar{r}_k - r_0),$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1=1}^{l}\sum_{k_2=1}^{l} \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} = \bar{r}_k - r_0 \text{ и } \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k} = \sum\nolimits_j \alpha_j c_{jk}.$$

Будем рассматривать полезность $U$ как функцию долей всех рискованных активов. Оптимальный портфель характеризуется долями, максимизирующими эту функцию (при ограничениях на их неотрицательность).

Найдем производную $U$ по $\alpha_k$:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} - \gamma\left(2\bar{r}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k}\right) =$$

$$= \bar{r}_k - r_0 - \gamma(2\bar{r}_P(\bar{r}_k - r_0) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk})) =$$

$$= (1 - 2\gamma\bar{r}_P)(\bar{r}_k - r_0) - \gamma\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}.$$

Для оптимального портфеля $\partial U / \partial \alpha_k \leqslant 0$, причем для активов, входящих в портфель ($\alpha_k > 0$), по условию дополняющей нежесткости, $\partial U / \partial \alpha_k = 0$.

Из условий дополняющей нежесткости

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0,$$

т.е.

$$(1-2\gamma\bar{r}_P)(\bar{r}_P-r_0)-\gamma\sigma_P^2=0,$$

откуда, исключая обсужденный выше вырожденный случай, когда $\sigma_P^2=0$, получим

$$1-2\gamma\bar{r}_P=\frac{\gamma\sigma_P^2}{\bar{r}_P-r_0},$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha_k}=\gamma(\sigma_P^2\frac{\bar{r}_k-r_0}{\bar{r}_P-r_0}-\sum_{j=1}^{l}\alpha_j c_{jk}).$$

Взвешенная сумма ковариаций в этой формуле равна:

$$\sum_{j=1}^{l}\alpha_j c_{jk}=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\mathrm{Cov}(\tilde{r}_j,\tilde{r}_k)=\mathrm{Cov}(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\tilde{r}_j,\tilde{r}_k)=$$

$$=\mathrm{Cov}(\tilde{r}_P-\alpha_0 r_0,\tilde{r}_k)=\mathrm{Cov}(\tilde{r}_P,\tilde{r}_k).$$

Обозначим эту величину $c_{Pk}$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha_k}=\gamma(\sigma_P^2\frac{\bar{r}_k-r_0}{\bar{r}_P-r_0}-c_{Pk}).$$

Следовательно, условия первого порядка $\partial U/\partial\alpha_k\leqslant 0$, характеризующие оптимальный портфель, можно записать следующим образом:

$$\sigma_P^2\frac{\bar{r}_k-r_0}{\bar{r}_P-r_0}\leqslant c_{Pk},$$

причем если $k$-й актив входит в оптимальный портфель ($\alpha_k>0$), то здесь достигается равенство. Т.е. для активов, входящих в портфель, выполнено следующее условие оптимальности:

$$\bar{r}_k-r_0=\frac{c_{Pk}}{\sigma_P^2}(\bar{r}_P-r_0).$$

Пусть $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_l)$ — структура рискованной части портфеля. Величина $\nu_k$ представляет собой долю вложений в $k$-й актив в общих вложениях в рискованные активы. Другими словами, если $(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$ — оптимальный для инвестора портфель, то

$$\nu_k=\frac{\alpha_k}{\sum_{j\neq 0}\alpha_j},\ k\neq 0.$$

В знаменателе стоит $\sum_{j\neq 0}\alpha_j=1-\alpha_0$ — доля рискованной части портфеля. Можно записать это соотношение и в другом виде:

$$\alpha_k=\nu_k(1-\alpha_0),\ k\neq 0.$$

Рассмотрим портфель, составленный только из рискованных активов, с долями $\nu_k$. Его доходность обозначим через $\tilde{r}_M$. Она связана с доходностью полного оптимального портфеля как

$$\tilde{r}_P=\alpha_0 r_0+(1-\alpha_0)\tilde{r}_M.$$

Следовательно,

$$\bar{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0)\bar{r}_M,$$

$$\sigma_P^2 = (1-\alpha_0)^2 \sigma_M^2,$$

$$c_{Pk} = \mathsf{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_k) = \mathsf{Cov}((1-\alpha_0)\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) =$$

$$= (1-\alpha_0)\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) = (1-\alpha_0) c_{Mk}.$$

Используя эти обозначения, условия первого порядка для актива, входящего в оптимальный портфель, можно записать как

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0),$$

где

$$\beta_k = \frac{\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k)}{\mathsf{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{Mk}}{\sigma_M^2}.$$

Это *основная формула модели CAPM*[86]. В соответствии с этим соотношением ожидаемую доходность актива, вошедшего в портфель, можно разбить на две части:

1) доходность безрискового актива, $r_0$ (это компенсация за отложенное потребление);

2) компенсация за подверженность риску, $\bar{r}_k - r_0$ (премия за риск).

Коэффициент $\beta_k$ — это ковариация между доходностью $k$-го актива и доходностью рискованной части оптимального портфеля, нормированная на дисперсию доходности рискованной части оптимального портфеля. Такой нормированный показатель называется величиной **бета** этого актива.

Для активов, не входящих в оптимальный портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

В частном случае, когда доходности рискованных активов некоррелированны между собой, очевидно, что беты всех активов, не вошедших в оптимальный портфель, будут равны нулю. Следовательно, для актива, не вошедшего в портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0) = 0.$$

С другой стороны, если актив вошел в портфель, то его бета должна быть положительна. Следовательно, для такого актива

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0) > 0$$

(где мы предполагаем, что $\bar{r}_M > r_0$). Тем самым, мы доказали «теорему о диверсификации», сформулированную выше.

Интерпретируем теперь полученные результаты в контексте ситуации, когда всем инвесторам на рынке доступны одни и те же активы.

1) Множество $\mathcal{R}$допустимых комбинаций рискованных активов у всех будет одним и тем же.

2) Поскольку оптимальный портфель у каждого инвестора лежит на луче с наибольшим наклоном, выходящим из точки $(0, r_0)$ и проходящем через точку множества $\mathcal{R}$, то у всех инвесторов рискованная часть портфеля будет иметь одно и то же соотношение $(\bar{r}_M - r_0)/\sigma_M$. Рискованный портфель, характеризующийся этим оптимальным соотношением называется **рыночным портфелем** (см. Рис. 69). Это точка «касания» эффективного луча и

---

[86] См. напр., статью Уильяма Шарпа: William F. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, **19** (1964), 425-442.

ется **рыночным портфелем** (см. Рис. 69). Это точка «касания» эффективного луча и множества $\mathcal{R}$ Ясно, что всякая точка $(\sigma_P, \overline{r}_P)$, лежащая на эффективном луче удовлетворяет уравнению

$$\overline{r}_P = r_0 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\overline{r}_M - r_0)$$

или

$$\frac{\overline{r}_P - r_0}{\sigma_P} = \frac{\overline{r}_M - r_0}{\sigma_M},$$

где $(\sigma_M, \overline{r}_M)$ — характеристики рыночного портфеля.

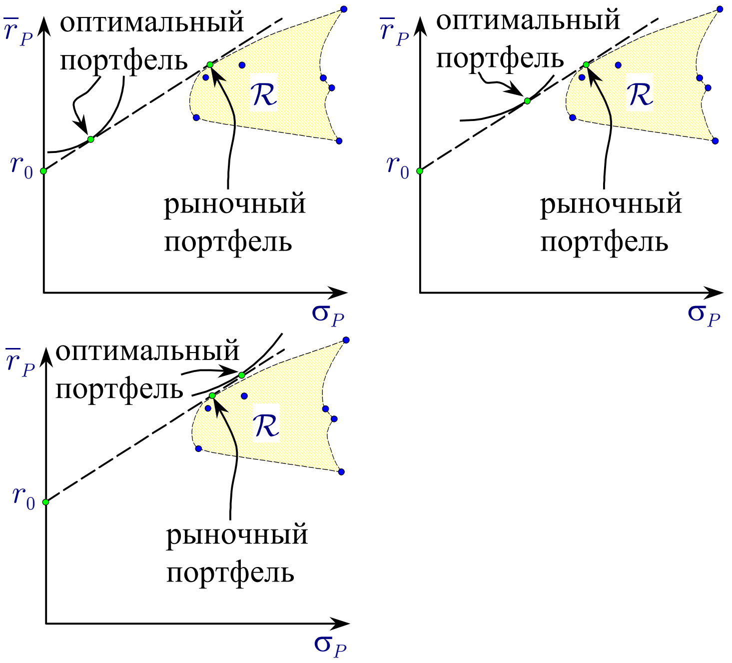


Рисунок 69. Оптимальные портфели разных инвесторов

**Теорема о разделении** (Separation Theorem):

> Для всякого инвестора (независимо от $\gamma$) рискованная часть оптимального портфеля является рыночным портфелем.

Соответственно, процесс поиска оптимального портфеля можно разделить на два этапа: сначала определяется оптимальный рискованный портфель $(\sigma_M, \overline{r}_M)$, а затем в зависимости от склонности к риску выбирается его оптимальное сочетание с безрисковым активом. При отождествлении оптимального рискованного портфеля с рыночным задачу первого «решает» рынок и инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и этим портфелем. Тем самым, вместо того, чтобы рассматривать все активы, *инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и рыночным портфелем*. (Выше мы уже анализировали подобную задачу).

Это утверждение называют также «**теоремой о взаимных фондах**» ("Mutual Fund Theorem"). Название отражает тот факт, что в «мире Марковица» инвесторы могут доверить составление оптимального портфеля рискованных активов инвестиционным организациям («взаимным фондам»), а сами должны будут лишь комбинировать этот готовый портфель с безрисковым активом в соответствии со своими предпочтениями.

Как мы видели, точка касания $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, вообще говоря, может быть не единственной. Кроме того, в общем случае данной паре $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ не всегда соответствует единственная структура активов, поэтому рыночный портфель может быть не единственным.

Если мы имеем дело с невырожденным случаем (например, когда матрица корреляций доходностей рискованных активов невырождена), то рыночный портфель $(\nu_1,...,\nu_l)$ единственный и вектор $(\nu_1,...,\nu_l)$ *для любого инвестора* характеризует структуру рискованной части портфеля. Таким образом, этот же вектор характеризует структуру продаж активов на рынке в целом (отсюда и термин «рыночный портфель»).

Показатель бета отдельного актива, $\beta_k = c_{Mk}/\sigma_M^2$, представляет собой характеристику актива, общую для всех инвесторов. Бета актива измеряет степень взаимосвязанности доходности актива и доходности рыночного портфеля. Бета актива, фактически, представляет собой наклон теоретической линии регрессии доходности актива по доходности рыночного портфеля (отсюда и название).

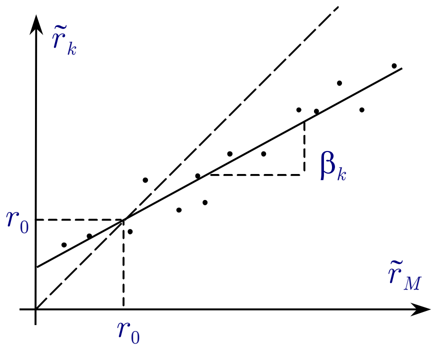


Рисунок 70. Интерпретация беты актива как наклона линии регрессии

Коэффициенты бета характеризуют структуру равновесия на рынке активов, задавая обратное соотношение между риском и доходностью:

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

Эти соотношения показывают, что премия за риск, $\bar{r}_k - r_0$, пропорциональна коэффициенту $\beta_k$. Коэффициент пропорциональности здесь — премия за риск для рыночного портфеля, $\bar{r}_M - r_0$.

Отметим несколько свойств этих равновесных соотношений и коэффициентов бета.

Ожидаемая доходность актива с нулевой бетой (т.е. актива, доходность которого некоррелированна с рыночной доходностью) равна безрисковой ставке, $r_0$. Поскольку такой актив не изменяет риск рыночного портфеля, то он по сути дела является безрисковым (несмотря на то, что дисперсия доходности может быть положительной).

Актив с бетой, равной единице, эквивалентен рыночному портфелю и обладает той же ожидаемой доходностью, что и рыночный портфель.

Определим бету произвольного портфеля следующим образом:

$$\beta_P = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_M)}{\mathrm{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{MP}}{\sigma_M^2}.$$

При этом бета портфеля — это взвешенное среднее бет активов, составляющих портфель:

$$\beta_P = \frac{1}{\sigma_M^2}\mathrm{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_M) = \frac{1}{\sigma_M^2}\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{l}\alpha_k \tilde{r}_k, \tilde{r}_M\right) = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{k=1}^{l}\alpha_k c_{Mk} = \sum_{k=1}^{l}\alpha_k \beta_k.$$

Заметим, что для любого портфеля, лежащего на эффективном луче $\sigma_P = (1-\alpha_0)\sigma_M$ и

$$c_{MP} = \mathrm{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_M) = (1-\alpha_0)\sigma_M^2.$$

Следовательно, у такого портфеля бета равна

$$\beta_P = \frac{c_{MP}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_P}{\sigma_M}.$$

В частности, бета рыночного портфеля равна единице.

Для эффективного портфеля, так же как для активов, входящих в оптимальный портфель, выполнено

$$\bar{r}_P - r_0 = \beta_P(\bar{r}_M - r_0) = r_0 + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\bar{r}_M - r_0).$$

Это уравнение эффективного луча, которое мы вывели выше.

### Задачи

37. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством $\omega$ и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(\bar{r}_0, \sigma_0) = (1; 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}2; 0{,}3)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}15; 0{,}2)$, $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}3; 0{,}4)$. Рискованные активы жестко положительно коррелированы (с коэффициентом $1$). Что можно сказать о структуре рисковой части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

38. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством $\omega$ и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (?, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}1; 0{,}2)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}2; 0{,}2)$. Рискованные активы некоррелированы. При какой величине $r_0$ рисковая часть оптимального портфеля может иметь характеристики $(\bar{r}_R, \sigma_R) = (1{,}15; \sqrt{0{,}2})$? Поясните словами и графически.

39. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством $\omega$ и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (1, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (0{,}9; 0{,}1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}1; 0{,}2)$. Рискованные активы жестко отрицательно коррелированы (с коэффициентом $-1$). Что можно сказать о структуре рисковой части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

40. В модели Марковица инвестор со строгим неприятием риска выбирает какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью $r_0$ а сколько вложить в рискованные активы (акции) двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Могут ли какие-либо условия на коэффициент корреляции $\rho$ и (или) доходности гарантировать, что

(А) все три актива войдут в портфель;

(B) только первый из рискованных активов войдет в портфель;

(C) только два рискованных актива войдут в портфель?

41. Пусть в модели Марковица инвестор, обладающий капиталом $1$ млн. долл. делает выбор между тремя активами: один безрисковый с доходностью $r_0=1,1$, а другие два — с доходностями $\overline{r}_1=1,2$ и $\overline{r}_2=1,5$ соответственно и дисперсиями доходностей $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$. Известно, что инвестор выбрал портфель, характеризующейся доходностью $r_P=1,27$ и дисперсией доходности $\sigma_P^2=0,17$. Доходность рискованной части его портфеля равна $r_R=1,44$.

(1) Найдите суммы, вложенные инвестором в каждый из активов.

(2) Найдите дисперсию доходности рискованной части портфеля этого инвестора.

(3) Найдите коэффициент корреляции доходностей двух рискованных активов.

42. В модели Марковица инвестор сталкивается с двумя рискованными активами с характеристиками $\sigma_1^2=4$, $\overline{r}_1=2$, $\sigma_2^2=1$, $\overline{r}_2=11/2$, где $\sigma_k^2$ — дисперсия доходности $k$-го актива, а $\overline{r}_k$ — ожидаемая доходность, и с одним безрисковым активом с доходностью $r_0=1$. Известно, что инвестор выбрал такой портфель, что его рискованная часть имеет характеристики $\sigma_R^2=8/3$, $\overline{r}_R=12/3$, а сам оптимальный портфель имеет ожидаемую доходность $\overline{r}_P=12/3$. Найдите дисперсию доходности оптимального портфеля. Найдите доли активов в оптимальном портфеле. Найдите величину корреляции между доходностями двух рискованных активов.

43. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной $1,6$. Имеются два вида активов: акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1,\overline{r}_1)=(2;1,2)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2,\overline{r}_2)=(1;1,4)$, причем они некоррелированы. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в рисковой (рыночной) части портфеля инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0=1$ до $r_0=2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

44. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной $1,7$. Имеются два вида активов$-$акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1,\overline{r}_1)=(1;0,8)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2,\overline{r}_2)=(1;1,4)$, причем они отрицательно коррелированы с коэффициентом $-1$. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0=1$ до $r_0=2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

45. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной $1,8$. Имеются два вида активов$-$акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1,\overline{r}_1)=$

$(2; 1{,}4)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \overline{r}_2) = (1; 1{,}3)$, причем они положительно коррелированы с коэффициентом $1$. Будет ли строго возрастать или убывать доля акций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

46. (Очень осторожный инвестор).

Некий инвестор всегда предпочитает активы с меньшим риском (дисперсией) вне зависимости от ожидаемой доходности. Пусть он составляет портфель из двух активов с ожидаемыми полезностями $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$ и дисперсиями доходности $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$. В какой пропорции войдут в портфель эти активы, если они ...

(1) жестко положительно коррелированны (коэффициент корреляции равен $\rho_{12} = 1$),

(2) некоррелированы ($\rho_{12} = 0$),

(3) строго отрицательно коррелированы ($\rho_{12} = -1$).

47. На отрезке в ряд расположены четыре предприятия:

Время от времени происходит стихийное бедствие, которое сокращает прибыли на двух соседних предприятиях наполовину. Без учета этого прибыль на всех предприятиях одинакова. Вероятность стихийного бедствия для каждой пары предприятий, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, одинакова. В какой пропорции распределит свой капитал между акциями этих предприятий инвестор с квадратичной элементарной функцией полезности?

48. Покажите, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\overline{r}_1, \sigma_1)$, $(\overline{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированны, и выполнено $\overline{r}_1 < \overline{r}_2$, то оптимальный портфель обязательно содержит 2-й актив. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

49. Покажите в явном виде, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\overline{r}_1, \sigma_1)$, $(\overline{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированны, и безрисковый актив, и выполнено $\overline{r}_1 < \overline{r}_2$, то оптимальный портфель содержит 1-й актив тогда и только тогда, когда $r_0 < \overline{r}_1$. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

## Задачи к главе

50. Имеются два вида активов — облигации и акции. Их доходности, зависящие от предполагаемого состояния экономики, приведены в таблице:

| Состояние экономики | Вероятность события | Доходность облигаций | Доходность акций |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Спад | $2/3$ | $1{,}1$ | $1{,}0$ |
| Норма | $2/3$ | $1{,}4$ | $1{,}6$ |
| Подъем | $2/3$ | $1{,}7$ | $2{,}2$ |

Кредит невозможен. Элементарная функция полезности инвестора равна $u(x)=4x-x^2$.

(А) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом максимизации функции полезности фон Неймана—Моргенштерна.

(Б) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина.

(В) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина, если дополнительно существует безрисковый актив с доходностью $1{,}3$.

# 6. Рынки в условиях неопределенности

В этом параграфе мы рассматриваем модели общего равновесия (обмена) с контингентными благами в предположении, что существует конечное множество таких благ, а, следовательно, и состояний мира. Участники обмена при этом имеют собственные (возможно неверные) представления о вероятностях возможных состояний мира. Частным случаем этой ситуации является рынок, где представления всех участников о вероятностях совпадают. Заметим, что часто полученные результаты не зависят от того, являются ли эти представления верными или ошибочными.

## *Модель Эрроу экономики с неопределенностью*

Как и прежде, будем предполагать, что имеется $m$ потребителей ($i \in I = \{1, ..., m\}$) и $l$ товаров ($k \in K = \{1, ..., l\}$). $S = \{1, ..., \hat{s}\}$ — множество всех возможных состояний мира. Условно можно представить, что рассматриваются два момента времени — «сегодня» и «завтра». Предполагается, что *сегодня* заключаются сделки и уравновешиваются рынки, а выполняться сделки будут *завтра*, когда выяснится, какое из состояний мира реализуется.

Напомним, что контингентным благом $(k, s)$ является контракт, заключаемый сегодня и гарантирующий поставку единицы товара $k \in K$ завтра в том случае, если реализуется состояние $s \in S$.

Цену такого контингентного блага обозначим $p_{ks}$, а его количество, приобретаемое потребителем $i$ — $x_{iks}$. Таким образом, потребительский набор в данной модели характеризуется вектором $\boldsymbol{x}_i = \{x_{iks}\}_{ks} \in \mathbb{R}^{l\hat{s}}$. Заметим, что контингентное благо покупается и оплачивается сегодня, когда неизвестно, какое состояние мира реализуется.

Как и прежде, будем предполагать, что в каждом из состояний мира $s \in S$ потребитель $i$ обладает начальными запасами $\omega_{is} \in \mathbb{R}^l$. Таким образом, начальные запасы $\omega_i = \{\omega_{iks}\}_{ks}$ потребителя $i$ состоят из наборов контингентных благ.

Будем рассматривать здесь только экономику без производства (экономику обмена). Потребители обмениваются между собой только имеющимися у них контингентными благами и заключают сделки в рамках бюджетного ограничения. Каждый из потребителей максимизирует в рамках такого ограничения свою функцию полезности $U_i(\boldsymbol{x}_i)$.

Напомним, что задача потребителя имеет вид

$$U_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks}, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{x}_{is} \in X_i \ \forall s \in S.$$

Соответствующую экономику назовем **экономикой Эрроу**. Выполнение балансов в этой экономике требуется для каждого из состояний мира $s \in S$ отдельно. Т.е. состояние экономики Эрроу допустимо, если для каждого блага и каждого состояния мира выполнен баланс:

$$\sum_{i\in I} x_{iks} = \sum_{i\in I}\omega_{iks}, \ \forall k \in K, \ \forall s \in S.$$

Кроме того, как и ранее, для допустимости состояния экономики требуется допустимость наборов всех потребителей:

$$\boldsymbol{x}_{is} \in X_i, \ \forall s \in S, \ \forall i \in I.$$

Определение общего равновесия остается прежним.

**Определение 1.**

Назовем $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ **равновесием Эрроу—Дебре** экономики Эрроу, если

1) $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя (1) при ценах $\boldsymbol{p}$.

2) $\bar{\boldsymbol{x}}$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{iks} = \sum_{i \in I} \omega_{iks},\ \forall k \in K,\ \forall s \in S.$$

Несложно понять, что такая модель рынка ничем не отличается от классической, с точностью до способа спецификации благ $(k, s)$. Этот факт можно использовать для доказательства теорем благосостояния для равновесия Эрроу—Дебре.

## Теоремы благосостояния для экономики Эрроу

В этом параграфе мы получим аналог двух теорем благосостояния, характеризующих свойства равновесия в терминах Парето-эффективности. При определении Парето-эффективности в данной экономике мы сталкиваемся с проблемами, связанными с возможными ошибками при оценке вероятностей состояний мира.

Заметим, что понятие (и определение) Парето-оптимального состояния такой экономики зависит от способа оценивания возможных потребительских наборов и, в конечном итоге, от оценок вероятностей состояний мира. В дальнейшем мы будем использовать два таких понятия. Первое, аналогичное классическому определению, основывается на функциях полезности потребителей, полученных при оценках состояний мира, приписываемых этим состояниям данными потребителями (функциях $U_i(\boldsymbol{x}_i)$). Второе основывается на истинных значениях вероятностей состояний мира.

**Определение 2.**

Допустимое состояние экономики Эрроу $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m)$ называется **(субъективно) Парето-оптимальным**, если не существует другого допустимого состояния $\check{\boldsymbol{x}} = (\check{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{x}}_m)$, такого что $U_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) \leqslant U_i(\check{\boldsymbol{x}}_i)$, причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое.

Альтернативное определение мы дадим только для случая, когда предпочтения описываются функцией Неймана—Моргенштерна.

**Определение 3.**

Пусть функции полезности всех потребителей в экономике Эрроу имеют вид Неймана—Моргенштерна с субъективными вероятностями:

$$U_i(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{s \in S} \mu_{is} u_i(\boldsymbol{x}_{is}),$$

и $\mu_i$ — объективные вероятности состояний мира.

Допустимое состояние экономики Эрроу $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m)$ называется **(объективно) Парето-оптимальным**, если не существует другого допустимого состояния $\check{\boldsymbol{x}} = (\check{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{x}}_m)$, такого что

$$\sum_{s \in S} \mu_s u_i(\check{\boldsymbol{x}}_{is}) \geqslant \sum_{s \in S} \mu_s u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{is}),$$

причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое.

Различие двух определений связано только с корректировкой возможных ошибок в оценке вероятностей состояний мира потребителями.

В этом параграфе мы будем исходить из первого (субъективного) определения оптимальности. При использовании этого определения для экономики Эрроу выполнены аналоги Теорем благосостояния при стандартных предположениях. В то же время, очевидно, что при использовании второго («объективного») определения оптимальности, аналоги Теорем благосостояния при тех же предположениях в общем случае не выполнены.

**Теорема 1.**[87]

Пусть $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре экономики Эрроу, причем предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда $\bar{\boldsymbol{x}}$ — Парето-оптимальное состояние.

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ — внутреннее Парето-оптимальное состояние экономики Эрроу. Предположим также, что предпочтения потребителей выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы. Тогда существуют цены $\boldsymbol{p}$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}})$ является равновесием Эрроу—Дебре при некотором распределении собственности $\omega_i$.

***Доказательство.***

Перенумеруем контингентные блага: $(k, s) \to k'$.

После такой операции получаем классическую модель Вальраса с $l\times\hat{s}$ «обычными» благами, в которой выполнены предположения первой и второй теорем благосостояния.

■

Один из возможных способов нумерации контингентных благ иллюстрирует Таблица 1.

Таблица 1. Иллюстрация нумерации контингентных благ

|  |  |  | $s$ |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  | **1** | **2** | **3** | **4** |
| $k$ | **1** | 1 | 4 | 7 | 10 |
|  | **2** | 2 | 5 | 8 | 11 |
|  | **3** | 3 | 6 | 9 | 12 |

## Свойства равновесий Эрроу—Дебре и Парето-оптимальных состояний в экономике Эрроу с функциями полезности Неймана—Моргенштерна

Мы рассмотрим в данном параграфе, какие черты специфический вид функции полезности Неймана—Моргенштерна (линейность по вероятностям и постоянство элементарных функций полезности по состояниям мира) накладывают на равновесия и Парето-оптимальные состояния.

**Пример 1.**

Рассмотрим экономику, в которой есть одно благо (деньги), два потребителя, и два состояния мира: $R$ (дождь), и $S$ (солнечная погода). Потребители обладают начальными за-

---

[87] Заметим, что в случае, когда предпочтения потребителей представимы функцией полезности Неймана-Моргенштерна, ненасыщаемость предпочтений гарантируется монотонностью элементарной функции полезности, непрерывность — непрерывностью элементарной функции полезности, выпуклость — ее вогнутостью.

пасами $\omega_1=(1,3)$, $\omega_2=(3,1)$ контингентных благ. Т.е., первый потребитель, если обмен не происходит, может рассчитывать на $1$ при дожде и на $3$ при солнце, а второй — наоборот. Пусть оба считают, что вероятности состояний $R$ и $S$ равны $\mu_R=0.25$ и $\mu_S=0.75$ соответственно, и имеют одинаковые элементарные функции полезности $u_i(x)=\ln(x)$. Тогда функции полезности потребителей имеют вид:

$$U_i=0{,}25\ln(x_{iR})+0{,}75\ln(x_{iS}),\ i=1,2.$$

Описанная экономика представляет собой типичный пример «ящика Эджворта», только интерпретация переменных специфическая. Здесь речь идет не об обмене обычными («физическими») благами, а об *обмене рисками*.

Дифференциальная характеристика Парето-оптимума имеет вид

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}}=\frac{0{,}25\,x_{1S}}{0{,}75\,x_{1R}}=\frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}}=\frac{0{,}25\,x_{2S}}{0{,}75\,x_{2R}},$$

откуда

$$x_{1S}x_{2R}=x_{1R}x_{2S}.$$

В Парето-оптимуме также должны выполняться балансы:

$$x_{1R}+x_{1S}=4,$$

$$x_{2R}+x_{2S}=4.$$

Отсюда получаем следующее уравнение границы Парето в координатах $(x_{1R},x_{1S})$:

$$x_{1S}(4-x_{1R})=x_{1R}(4-x_{1S})$$

или

$$x_{1S}=x_{1R}.$$

Следовательно, граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта.

Найдем теперь равновесие. Его дифференциальная характеристика имеет вид:

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}}=\frac{0{,}25\,x_{1S}}{0{,}75\,x_{1R}}=\frac{p_R}{p_S},$$

$$\frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}}=\frac{0{,}25\,x_{2S}}{0{,}75\,x_{2R}}=\frac{p_R}{p_S}.$$

Равновесие удовлетворяет соотношениям для Парето-оптимальных состояний, то есть, как и предсказывает Теорема 1, равновесие лежит на границе Парето. Таким образом, в равновесии $x_{1S}=x_{1R}$.

Учитывая это соотношение, получим из дифференциальной характеристики равновесия, что отношение цен в двух состояниях мира равно

$$\frac{p_R}{p_S}=\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, можно выбрать $p_R=1$, $p_S=3$.

Поскольку предпочтения потребителей монотонны, то бюджетные ограничения в равновесии выходят на равенство. Для 1-го потребителя

$$p_Rx_{1R}+p_Sx_{1S}=p_R+p_S\cdot 3,$$

т.е.

$$x_{1R}+3x_{1S}=1+3\cdot 3=10.$$

Поскольку $x_{1S}=x_{1R}$, то $\bar{x}_{1S}=\bar{x}_{1R}=2{,}5$.

Учитывая балансы, $\bar{x}_{2S}=\bar{x}_{2R}=1{,}5$.

$\Leftarrow$

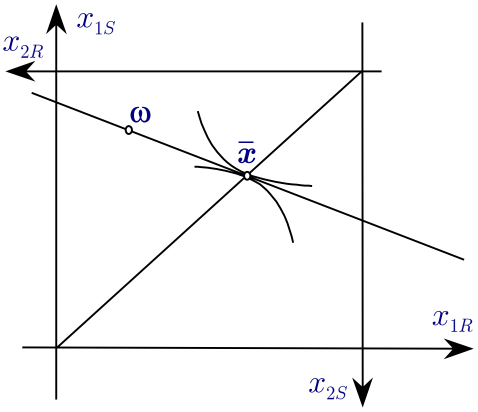


Рисунок 71. Иллюстрация к Примеру 1

В приведенном примере в любом Парето-оптимальном состоянии (а значит, и в равновесии) потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира. Другая его примечательная особенность состоит в том, что отношение цен для двух состояний мира оказалось пропорциональным отношению вероятностей этих состояний. Оказывается, эти закономерности верны и в более общих случаях, когда, как и в данном примере, суммарные запасы не зависят от состояний мира. Покажем это.

**Определение 4.**

Будем говорить, что в экономике Эрроу **отсутствует системный риск**, если $\sum_i \omega_{iks}=\sum_i \omega_{ikt}$, $\forall k \in K$, $\forall s,t \in S$.

**Теорема 2.**

Пусть в экономике Эрроу системный риск отсутствует, предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми оценками вероятностей состояний мира и строго вогнутыми элементарными функциями полезности, заданными на выпуклых множествах допустимых наборов $X_i$. Тогда в любом Парето-оптимальном состоянии экономики $\hat{\boldsymbol{x}}$ потребление каждого потребителя не зависит от состояния мира (т.е. отсутствует индивидуальный риск):

$$\hat{x}_{iks}=\hat{x}_{ikt},\quad \forall i \in I,\ \forall k \in K,\ \forall s,t \in S.$$

***Доказательство***.

Пусть в равновесии для какого-либо потребителя $j$ данное свойство не выполнено, например, $\hat{x}_{jks} \neq \hat{x}_{jkt}$. Тогда допустимое состояние экономики $\boldsymbol{x}^*$, такое что

$$x^*_{iks}=\sum_{t\in S} \mu_t \hat{x}_{ikt}$$

является Парето-улучшением для состояния $\hat{\boldsymbol{x}}$, что противоречит Парето-оптимальности $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Проверим, что состояние $\boldsymbol{x}^*$ является допустимым.

$$\sum_{i\in I} x^*_{iks}=\sum_{i\in I}\sum_{t\in S}\mu_t \hat{x}_{ikt}=\sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\hat{x}_{ikt}=\sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\omega_{ikt}=\sum_{i\in I}\omega_{ikt}.$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\sum_i \omega_{ikt}$ не зависит от состояния мира и сумма вероятностей состояний мира равна 1.

Проверим теперь, что $\boldsymbol{x}^*$ является Парето-улучшением. Заметим, что для любого потребителя $\boldsymbol{x}_i^*$ является безрисковым набором, поэтому

$$U_i(\boldsymbol{x}_i^*) = \sum_{s\in S} \mu_s u_i(\boldsymbol{x}_{is}^*) = u_i(\boldsymbol{x}_{is}^*) \sum_{s\in S} \mu_s = u_i(\boldsymbol{x}_{is}^*)$$

Для произвольного потребителя $i$ по определению $x_{iks}^*$ и неравенству Йенсена

$$U_i(\boldsymbol{x}_i^*) = u_i(\boldsymbol{x}_{is}^*) = u_i(\sum_{t\in S} \mu_t \hat{\boldsymbol{x}}_{it}) \geqslant \sum_{s\in S} \mu_s u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{is}) = U_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i).$$

Для потребителя $j$ неравенство здесь строгое.

■

**Теорема 3.**

Пусть в экономике Эрроу системный риск отсутствует, и предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми оценками вероятностей состояний мира и возрастающими строго вогнутыми элементарными функциями полезности. Тогда в равновесии Эрроу—Дебре $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ выполнено.

(i) Потребление каждого потребителя не зависит от состояния мира:

$$\bar{x}_{iks} = \bar{x}_{ikt}, \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall s, t \in S.$$

(ii) Если, дополнительно, в равновесии потребительский набор хотя бы одного потребителя является внутренним[88], элементарные функции полезности дифференцируемы, то отношение цен на одно и то же «физическое» благо в двух разных состояниях мира равно отношению вероятностей этих состояний:

$$\frac{p_{ks}}{p_{kt}} = \frac{\mu_s}{\mu_t}, \quad \forall k \in K, \forall s, t \in S.$$

***Доказательство***.

(i) Отсутствие индивидуального риска ($\bar{\boldsymbol{x}}_{is} = \bar{\boldsymbol{x}}_{it}, \ \forall s, t \in S$) следует из первой теоремы благосостояния и Теоремы 2.

(ii) Для потребителя $i$, набор которого является внутренним, выполнена дифференциальная характеристика

$$\frac{\mu_s u_{ik}'(\bar{\boldsymbol{x}}_{is})}{\mu_t u_{ik}'(\bar{\boldsymbol{x}}_{it})} = \frac{p_{ks}}{p_{kt}}, \quad \forall k \in K, \forall s, t \in S,$$

Как только что доказано, в равновесии $\bar{\boldsymbol{x}}_{is} = \bar{\boldsymbol{x}}_{it}$, откуда и следует требуемое соотношение.

■

Если в экономике есть системный риск, то приведенные свойства не выполняются. Однако, равновесия и в этом случае обладают некоторыми общими свойствами. В частности, если благо одно, состояний мира два и потребителя два, то граница Парето проходит в

---

[88] Это условие выполнено, например, если $X_i$ состоят из неотрицательных векторов, и суммарные начальные запасы любого блага положительны. Поскольку суммарные начальные запасы положительны, то в равновесии всегда существует потребитель $i$, который предъявляет спрос на некоторое благо $k$ в каком-то из состояний мира, а, следовательно, и во всех состояниях мира. и этого блага

промежутке между двумя биссектрисами соответствующего ящика Эджворта (который в этом случае будет неквадратным), т.е. потребление в относительно «скудном» состоянии мира должно быть относительно низким. То же самое верно и для равновесия, которое по первой теореме благосостояния должно лежать на границе Парето. Кроме того, цена для более «скудного» состояния относительно выше. Действительно, в равновесии выполняется

$$\frac{\mu_R u_i'(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u_i'(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S},\ i=1,2.$$

Если приравнять друг к другу предельные нормы замещения двух потребителей, учитывая балансы, то вероятности сократятся:

$$\frac{u_1'(\bar{x}_{1R})}{u_1'(\bar{x}_{1S})} = \frac{u_2'(\omega_{\Sigma R}-\bar{x}_{1R})}{u_2'(\omega_{\Sigma S}-\bar{x}_{1S})}.$$

Пусть $\omega_{\Sigma R} < \omega_{\Sigma S}$. Докажем, что $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Если бы было выполнено $\bar{x}_{1R} \geqslant \bar{x}_{1S}$, то $u_1'(\bar{x}_{1R}) \leqslant u_1'(\bar{x}_{1S})$, поскольку предельная полезность для рискофоба — убывающая функция. Отсюда следует, что

$$u_2'(\omega_{\Sigma R}-\bar{x}_{1R}) \leqslant u_2'(\omega_{\Sigma S}-\bar{x}_{1S}),$$

и что $\omega_{\Sigma R}-\bar{x}_{1R} \geqslant \omega_{\Sigma S}-\bar{x}_{1S}$. Получили противоречие. Таким образом, $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Аналогично доказывается, что $\bar{x}_{2R} < \bar{x}_{2S}$.

Доказанное верно и для границы Парето, поскольку дифференциальные характеристики равновесий и Парето-оптимальных состояний совпадают.

Кроме того, из $\bar{x}_{iR} < \bar{x}_{iS}$ и дифференциальной характеристики решения задачи потребителя следует, что

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} < \frac{\mu_R u_i'(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u_i'(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S}.$$

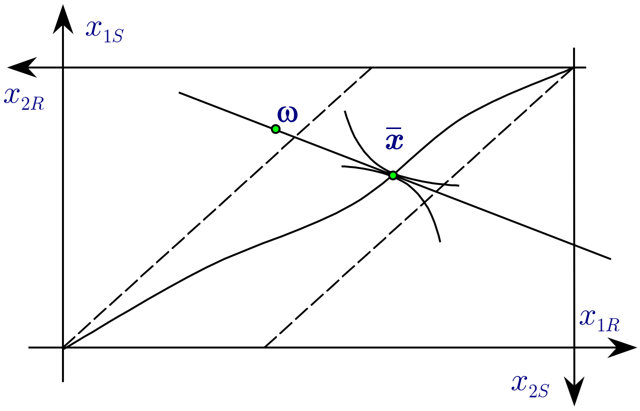


Рисунок 72. Парето-граница и равновесие в условиях системного риска

Рассмотрим теперь на примере свойства равновесия в случае, когда один из потребителей нейтрален к риску.

**Пример 2.**

Пусть функции полезности потребителей имеют вид:

$$U_1(\boldsymbol{x}_1) = \mu_R x_{1R} + \mu_S x_{1S},$$

$$U_2(\boldsymbol{x}_2) = \mu_R \ln(x_{2R}) + \mu_S \ln(x_{2S}).$$

Первый из потребителей здесь нейтрален к риску, а второй — рискофоб.

Дифференциальная характеристика границы Парето имеет следующий вид:

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{\mu_R x_{2S}}{\mu_S x_{2R}},$$

откуда $x_{2S} = x_{2R}$. Это соотношение выполнено только на внутренней части границы Парето. Оно означает, что соответствующая часть границы является биссектрисой положительного ортанта системы координат 2-го потребителя. Это же свойство должно выполняться и для любого внутреннего равновесия. Содержательно это означает, что нейтральный к риску 1-й потребитель полностью застрахует 2-го потребителя-рискофоба.

В предположении о допустимости неотрицательных (для второго потребителя — положительных) количеств благ, граница Парето «загибается» в месте пересечения с одной из осей координат 1-го потребителя.

⇐

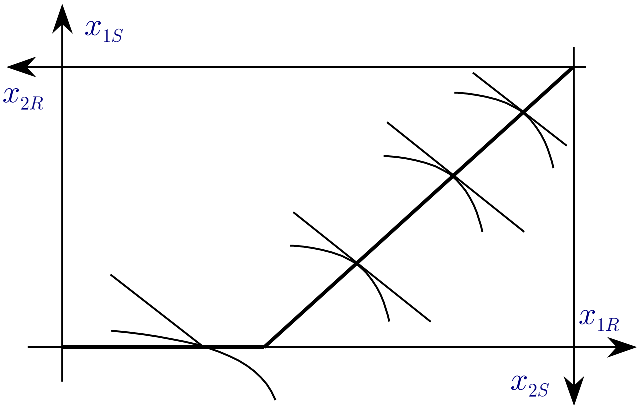


Рисунок 73. Парето-граница в случае, когда первый потребитель нейтрален к риску

Гипотезы $\mu_{is}$ разных участников $i$ торговли о вероятностях состояний мира $s \in S$ не обязаны совпадать. Это не мешает торговле, а иногда и создает условия для нее. Пример этого получим, изменив параметры экономики, рассмотренной в Примере **1**.

**Пример 3.** (Пари)

Пусть функции полезности потребителей имеют вид:

$$U_1(\boldsymbol{x}_1) = 0{,}25 \ln(x_{1R}) + 0{,}75 \ln(x_{1S}),$$
$$U_2(\boldsymbol{x}_2) = 0{,}75 \ln(x_{2R}) + 0{,}25 \ln(x_{2S}).$$

Первый потребитель считает второе событие в три раза вероятнее первого; второй — наоборот. Начальные запасы одинаковые для обоих: $\omega_i = (2, 2)$. Равновесие в этой модели единственно, равновесные цены, соответствующие разным состояниям природы, совпадают между собой: $p_R = p_S$. Равновесные распределения: $\bar{x}_{1R} = \bar{x}_{2S} = 1$; $\bar{x}_{1S} = \bar{x}_{2R} = 3$. Данный пример можно интерпретировать в том смысле, что потребители, имея разные представления о вероятностях состояний мира, заключают между собой пари. Несмотря на то, что отсутствует риск с точки зрения начальных запасов, обмен будет происходить (равновесие не совпадает с точкой начальных запасов), в результате чего в равновесии потребители сталкиваются с индивидуальным риском.

Отношение цен блага в двух состояниях мира будет лежать в промежутке между отношениями вероятностей:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75}<\frac{1}{1}<\frac{0{,}75}{0{,}25},$$

т.е.

$$\frac{\mu_{1R}}{\mu_{1S}}<\frac{p_R}{p_S}<\frac{\mu_{2R}}{\mu_{2S}}.$$

Уравнение субъективной границы Парето здесь будет иметь вид

$$x_{1S}=\frac{9x_{1R}}{1+2x_{1R}}.$$

Таким образом, субъективная Парето-граница (ее внутренняя часть) проходит выше диагонали-биссектрисы.

В этой модели условием (субъективно) взаимовыгодной торговой сделки является различие в оценках вероятностей реализации различных состояний мира. В то же время, поскольку первоначальное состояние вне зависимости от истинных вероятностей состояний мира (объективно) Парето-оптимально (так как нет системного риска, и начальные запасы лежат на диагонали ящика Эджворта), этот обмен ведет к ухудшению реального благосостояния по крайней мере одного потребителя. Таким образом, на этом примере очевидно различие между «субъективным» и «объективным» определениями границы Парето.

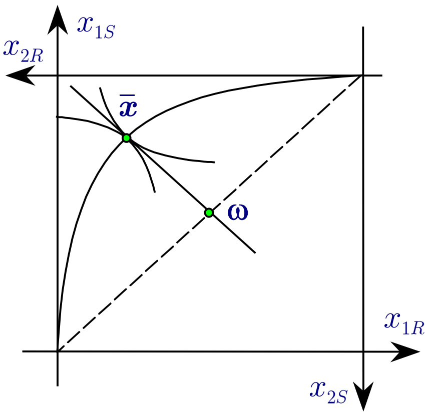


Рисунок 74. Иллюстрация к Примеру 3

⇐

## Задачи

1. В экономике распределения с риском имеется два потребителя с функциями полезности Неймана—Моргенштерна, один товар и два состояния мира — $A$ и $B$, случающиеся с равными вероятностями. Элементарные функции полезности равны $u_1=-\exp(-x_1)$ и $u_2=-\exp(-2x_2)$ соответственно. Общие начальные запасы в экономике равны $(4;7)$. Найти Парето-оптимум и равновесие, если доходы обоих равны $10$.

2. В экономике имеется два потребителя, одно физическое благо и $n$ состояний мира. Элементарные функции полезностей потребителей одинаковы и имеют вид $u_i(x)=\sqrt{x}$, $i=1,2$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s}=s$, а второго — $\omega_{2s}=n+1-s$. Вероятности состояний мира

(a) одинаковы, т.е. $\mu_s=1/n$;

(b) пропорциональны номеру состояний, т.е. $\mu_s=\lambda s$, где

$$\lambda = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Найдите равновесие Эрроу-Дебре в обоих случаях, (a) и (b). Напомним, что

$$\sum_{s=1}^{n} s = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. В ситуации предыдущей задачи элементарные функции полезностей потребителей одинаковы и имеют вид $u_1(x) = x$, $u_2(x) = \sqrt{x}$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s} = n$, а второго — $\omega_{2s} = s$. Найдите равновесие Эрроу-Дебре в тех же случаях (a) и (b).

4. (A) Покажите, что в модели Эрроу с единственным физическим благом внутреннее равновесие единственно, если предпочтения каждого потребителя представимо функцией полезности Неймана-Моргенштерна (с дифференцируемой элементарной функцией полезности).

(B) Как измениться результат, если отказаться от предположения дифференцируемости элементарной функции полезности?

(C) Как измениться результат, если отказаться от предположения о том, что равновесие внутреннее?

## Равновесие Раднера в экономике Эрроу

То, что для равновесия Эрроу—Дебре в экономике с Риском верны аналоги теорем благосостояния, противоречит интуиции. Известно, что неполнота информации все же представляет проблемы для рынков в реальной жизни. Что-то в сформулированной модели должно быть не так. Одним из объяснений может служить различие в субъективных оценках вероятности (неравномерность распределения информации между экономическими субъектами). Однако это объяснение недостаточно.

Очевидно, что модель нереалистична. Нереалистична она не потому, что в ней фигурируют понятия «сегодня», «завтра» и «контингентные блага». Ту же самую модель можно интерпретировать достаточно широко, в зависимости от конкретной ситуации. Основное нереалистичное предположение данной модели — это *наличие полной системы рынков*. Это заранее заложено в формулировке модели в виде *единого бюджетного ограничения*. Содержательно полнота рынков означает, что каждый потребитель может поменять любой товар при любом состоянии мира на любой другой товар в любом другом состоянии мира, неважно, непосредственно или с помощью цепочки обменов. Рынок с неопределенностью может стать несовершенным, если невозможно обменять ни одно благо в каком-либо состоянии $s_1$ ни на одно благо в другом состоянии $s_2$. Такое может быть, если по каким-либо причинам не заключаются соответствующие контракты *условные по состояниям мира*. При этом бюджеты потребителей уже не будут едиными. Потребители тогда имеют отдельные бюджеты в зависимости от состояния мира.

Пусть $C = \{1, ..., \hat{c}\}$ — активы, имеющие хождение в рассматриваемой экономике (в равной степени доступные всем потребителям). Каждый актив $c \in C$ характеризуется матрицей доходностей[89] $\boldsymbol{a}_c = \{a_{ksc}\}_{ks}$, где $a_{ksc}$ — количество $k$-го блага, которое дает этот актив в слу-

---

[89] Это доходности в натуральном выражении (в физических количествах благ). Соответствующие денежные доходности рассчитываются по формуле:

чае, если во 2-м периоде произойдет состояние мира $s$. Будем предполагать, что доходность актива не зависит от того, кто им владеет, т.е. коэффициенты $a_{ksc}$ одинаковы для всех потребителей. Цену этого актива обозначим $q_c$, а его количество, приобретаемое $i$-м потребителем — $z_{ic}$. Ограничений на знак величин $z_{ic}$ не накладывается. Случай $z_{ic}<0$ можно интерпретировать в том смысле, что потребитель эмитирует соответствующий актив в количестве $|z_{ic}|$ (либо берет соответствующий кредит). В предположении, что

- потребитель принимает цены как данные,

- в 1-м периоде происходит только обмен активами (обмен «физическими» благами и потребление в модели Раднера происходят во 2-м периоде),

- начальные запасы активов любого типа у любого потребителя равны нулю[90],

бюджетное ограничение 1-го периода имеет вид

$$\sum_{c\in C} q_c z_{ic} \leqslant 0.$$

Во 2-м периоде, после осуществления некоторого состояния мира $s \in S$, происходит обмен благами с учетом обязательств по активам, приобретенным в 1-м периоде. Соответствующее бюджетное ограничение 2-го периода для каждого состояния мира имеет вид:

$$\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks} \omega_{iks} + \sum_{c\in C} \sum_{k\in K} p_{ks} a_{ksc} z_{ic}.$$

Это бюджетное ограничение можно записать также в следующем виде:

$$\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks} \breve{\omega}_{iks},$$

где $\breve{\omega}_{iks}$ — новые начальные запасы, учитывающие чистые обязательства портфеля активов, приобретенных в первом периоде, рассчитываемые по формуле

$$\breve{\omega}_{iks} = \omega_{iks} + \sum_{c\in C} a_{ksc} z_{ic}.$$

Будем предполагать, что активы служат только для передачи покупательной способности между различными состояниями мира (мы обсудим ниже эту их функцию) и не влияют на уровень благосостояния потребителя, поэтому, как и ранее, будем считать, что предпочтения описываются функцией полезности, зависящей лишь от объемов потребления в различных состояниях мира, $U_i(\boldsymbol{x}_i)$.

Если бы потребитель в первом периоде, планируя свой портфель активов в первом периоде, знал, в дополнение к ценам активов $\boldsymbol{q}$, и цены благ $\boldsymbol{p}$ в различных состояниях мира, то, в соответствии с предположением о его предпочтениях, он выбрал бы портфель активов и планы потребления в различных состояниях мира, которые были бы решением следующей задачи:

---

$$r_{sc} = \frac{\sum_k p_{ks} a_{ksc}}{q_c} = \frac{\boldsymbol{p}_s \boldsymbol{a}_{sc}}{q_c}.$$

Заметим, что при интерпретации доходностей $r_{sc}$ следует учитывать, что в модели Раднера денежные единицы 1-го периода не сопоставимы с денежными единицами 2-го периода. Более того, они не сопоставимы между разными состояниями мира $s$ 2-го периода.

[90] Это предположение не влияет на анализ модели, но несколько упрощает описание модели и соответствующие выкладки.

$$\begin{gathered}
U_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max\nolimits_{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i}, \\
\sum_{c\in C} q_c z_{ic} \leqslant 0, \\
\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks} \omega_{iks} + \sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks} a_{ksc} z_{ic}, \ \forall s \in S, \\
\boldsymbol{x}_i \in X_i.
\end{gathered} \tag{2}$$

Однако в первый период цены $\boldsymbol{p}$ второго периода ему неизвестны. Поэтому, чтобы сформировать портфель активов в 1-м периоде, потребитель должен сформировать некоторые ожидания $\overset{e}{\boldsymbol{p}_i}$ по поводу цен 2-го периода во всех состояниях мира, поскольку ценность его портфеля зависит от будущей конъюнктуры. В модели Раднера предполагается, что эти ожидания оправдываются, т.е. во 2-м периоде на рынках благ обмен фактически происходит по ценам, которые ожидались в 1-м периоде при формировании портфеля.

Сказанное мотивирует следующее определение равновесия:

### Определение 5.

Назовем $(\bar{\boldsymbol{p}}, \{\overset{e}{\bar{\boldsymbol{p}}_i}\}_{i\in I}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ **равновесием Раднера** экономики Эрроу, если

1) $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{z}}_i)$ — решение задачи потребителя (2) при ценах $\overset{e}{\bar{\boldsymbol{p}}_i}$ и $\bar{\boldsymbol{q}}$.

2) Выполнены балансы по активам:

$$\sum_{i\in I} \bar{z}_{ic} = 0, \ \forall c \in C.$$

3) Ожидания потребителей оправдываются: $\overset{e}{\bar{\boldsymbol{p}}_i} = \bar{\boldsymbol{p}}$.

4) $\bar{\boldsymbol{x}}$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{iks} = \sum_{i\in I} \omega_{iks}, \ \forall k \in K, \forall s \in S.$$

Поскольку в равновесии ожидания оправдываются, то определение можно упростить, если считать равновесием Раднера набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ и заменить ожидаемые цены на фактические. В дальнейшем мы всегда будем пользоваться этим сокращенным обозначением.

Таким образом, в модели (равновесии) Раднера мы отказывается от одного очень сильного предположения модели Эрроу — полноты рынков контингентных благ, чтобы заменить его другим (очень ограничительным) предположением, — что потребители способны предвидеть будущие равновесные цены в любом возможном состоянии мира.

Как будет показано в дальнейшем, если это предположение дополнить предположением о том, что множество доступных потребителям активов достаточно «богатое» (условие полноты рынков), то любое равновесие в этой модели будет Парето-оптимальным и любое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как такое равновесие. В то же время, подход Раднера позволяет моделировать и приводящие к фиаско рынка ситуации, возникающие, когда множество доступных потребителям активов является довольно «бедным», и, следовательно, Парето-оптимум может быть недостижим.

Для анализа равновесия Раднера можно воспользоваться понятием арбитража: где под арбитражем понимаются изменения в портфеле активов с целью увеличить его доходность (по крайней мере, в одном состоянии мира). Всюду в этой главе мы будем использовать термин «арбитраж» в этом несколько специфическом смысле.

Под **планом арбитража** мы будем понимать вектор $\Delta \boldsymbol{z} = \{\Delta z_c\}_{c \in C}$, характеризующий изменения в портфеле активов типичного потребителя, $\boldsymbol{z}_i$. При таком изменении левая часть бюджета первого периода (чистые расходы на покупку активов) рассматриваемого потребителя изменится на величину $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z}$. Очевидно, что если $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} \leqslant 0$ при данном векторе цен активов $\boldsymbol{q}$, то такой план арбитража не выводит за границы бюджетного множества 1-го периода. Изменение дохода рассматриваемого потребителя в $s$-м состоянии мира, вызываемое данным планом арбитража $\Delta\boldsymbol{z}$ равно

$$\sum_{c \in C}\sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc} \Delta z_c = \boldsymbol{p}_s \boldsymbol{A}_s \Delta \boldsymbol{z},$$

где $\boldsymbol{A}_s$ — матрица доходностей активов в состоянии мира $s$. Такой арбитраж имеет целью получить во втором периоде по крайней мере в одном состоянии мира прирост дохода потребителя (при том, что в остальных состояниях мира доход не уменьшится).

**Определение 6.**

Будем говорить, что в модели Раднера при ценах активов $\boldsymbol{q}$, ценах благ $\boldsymbol{p}$ и доходностях активов $\{a_{ksc}\}$ **арбитраж невозможен**, если не существует такого плана арбитража $\Delta\boldsymbol{z}$, что $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} \leqslant 0$, и для любого состояния мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{c \in C}\sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc} \Delta z_c \geqslant 0,$$

причем хотя бы для одного состояния мира неравенство строгое.

Если цены в модели Раднера таковы, что арбитраж возможен, то такая ситуация не может быть равновесием. Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

**Теорема 4.**

Пусть в экономике Эрроу предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира, и $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с некоторой системой активов. Тогда при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}$ и данной системе активов арбитраж невозможен.

***Доказательство*.**

Действительно, арбитраж означает, что возможно получить прирост дохода в одном из состояний мира, что противоречит локальной ненасыщаемости.

■

Очевидно, что аналогом контингентных благ модели Эрроу в модели Раднера является актив Эрроу, который дает право получить единицу $k$-го блага, если реализуется состояние мира $s$. Формально актив $c$ является **активом Эрроу** для $(k_0, s_0)$, если $a_{ksc} = 1$ при $k = k_0$, $s = s_0$, и $a_{ksc} = 0$ при остальных $k$ и $s$. Для таких активов удобно использовать обозначение $(k, s)$.

Перед тем, как обратиться к более общему случаю, рассмотрим подробнее частный случай, когда все активы в экономике являются активами Эрроу. В задаче потребителя бюджетное ограничение 1-го периода:

$$\sum_{(k,s) \in C} q_{ks} z_{iks} \leqslant 0.$$

Баланс активов в 1-м периоде:

$$\sum_{i\in I} z_{iks}=0,\ \ \forall (k,s)\in C.$$

Бюджетное ограничение 2-го периода:

$$\sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks} + \sum_{(k,s)\in C} p_{ks}z_{iks}.$$

Таблица 2. Пример множества $\boldsymbol{C}$ (из четырех активов Эрроу) в экономике с активами Эрроу, $\boldsymbol{l=2}$, $\boldsymbol{\hat{s}=3}$.

|  |  |  | $s$ |  |
|---|---|---|---|---|
|  |  | **1** | **2** | **3** |
| $k$ | **1** | ⊗ |  | ⊗ |
|  | **2** |  | ⊗ | ⊗ |

Заметим, что модель Эрроу можно рассматривать как частный случай модели Раднера. Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, т.е.

$$C=\{(k,s)\mid k\in K, s\in S\},$$

то модель Раднера — фактически другая формулировка модели Эрроу.

Действительно, из равновесия Эрроу—Дебре $(\check{\boldsymbol p},\check{\boldsymbol x})$ легко сконструировать равновесие Раднера $(\bar{\boldsymbol p},\bar{\boldsymbol q},\bar{\boldsymbol x},\bar{\boldsymbol z})$. Для этого достаточно взять

$$\bar p_{ks}=\check p_{ks},\ \bar q_{ks}=\check p_{ks},\ \bar x_{iks}=\check x_{iks},\ \bar z_{iks}=\check x_{iks}-\omega_{iks}.$$

Тогда обмены в первом периоде при заключении контрактов исчерпывают все возможные выгоды обмена, и во второй период обменов не будет, поскольку $\breve\omega_{iks}=\omega_{iks}-\bar z_{iks}=\check x_{iks}$. Проверка этого факта предлагается в качестве упражнения.

Для доказательства обратного утверждения — что, если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то на основе равновесия Раднера можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре — требуется воспользоваться свойствами равновесия Раднера.

Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то в равновесии цены активов Эрроу пропорциональны ценам контингентных благ. Действительно, предположим, что в равновесии Раднера все цены положительны, и пусть $k_1, k_2$ — два блага, а $s$ — состояние мира, такие что в равновесии цены активов Эрроу и цены благ не пропорциональны, например,

$$\bar p_{k_1 s}/\bar q_{k_1 s}>\bar p_{k_2 s}/\bar q_{k_2 s}.$$

Здесь $k_1$ — относительно более дорогое благо, что позволяет осуществить арбитраж и получить дополнительный доход в состоянии мира $s$, включив в портфель несколько большее количество актива $(k_1, s)$ и несколько меньшее — актива $(k_2, s)$, и не нарушить при этом бюджетное ограничение. Чтобы арбитраж был невозможен, равновесные цены должны быть такими, что для любого $s$ вектора $\bar{\boldsymbol p}_s$ и $\bar{\boldsymbol q}_s$ были коллинеарны (пропорциональны), где $\bar{\boldsymbol p}_s$ и $\bar{\boldsymbol q}_s$ — части векторов $\bar{\boldsymbol p}$ и $\bar{\boldsymbol q}$, соответствующие состоянию мира $s$.

Докажем это свойство в общем виде, не предполагая положительность цен в равновесии Раднера, но при этом используя в доказательстве менее интуитивно очевидный план арбитража, чем только что предложенный.

**Теорема 5.**

Пусть в экономике Эрроу предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира, и $(\bar{\boldsymbol p},\bar{\boldsymbol q},\bar{\boldsymbol x},\bar{\boldsymbol z})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{(k,s) \mid k \in K, s \in S\}$. Тогда для любого состояния мира $s \in S$ можно найти коэффициент пропорциональности $\lambda_s > 0$, такой что $\bar{\boldsymbol{p}}_s = \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s$.

***Доказательство.***

Рассмотрим одно из состояний мира $s \in S$. Из локальной ненасыщаемости следует, что $\bar{\boldsymbol{p}}_s \neq 0$ и $\bar{\boldsymbol{q}}_s \neq 0$, откуда $|\bar{\boldsymbol{q}}_s|^2 \neq 0$. Рассмотрим следующий план арбитража:

$$\Delta \boldsymbol{z}_t = 0,\ t \neq s \ \text{ и } \ \Delta \boldsymbol{z}_s = \bar{\boldsymbol{p}}_s - \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s,$$

где

$$\lambda_s = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}_s \bar{\boldsymbol{q}}_s}{|\bar{\boldsymbol{q}}_s|^2}.$$

Для этого плана выполнено $\bar{\boldsymbol{q}} \Delta \boldsymbol{z} = \bar{\boldsymbol{q}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = 0$. Поскольку арбитраж невозможен, то отсюда следует, что $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = 0$. Действительно, при $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s > 0$ этот план арбитража позволяет увеличить доход любого потребителя в состоянии мира $s$. Случай $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s < 0$ сводится к случаю $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s > 0$ изменением знака $\Delta \boldsymbol{z}_s$ на противоположный.

Но если $\bar{\boldsymbol{q}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = 0$ и $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = 0$, то

$$|\bar{\boldsymbol{p}}_s - \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s|^2 = (\bar{\boldsymbol{p}}_s - \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s) \Delta \boldsymbol{z}_s = \bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s - \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = 0.$$

т.е. $\bar{\boldsymbol{p}}_s = \lambda_s \bar{\boldsymbol{q}}_s$.

Докажем, что $\lambda_s > 0$. Если это не так и $\lambda_s \leqslant 0$, то $\bar{\boldsymbol{p}}_s \bar{\boldsymbol{q}}_s \leqslant 0$, и следующий план арбитража:

$$\Delta \boldsymbol{z}_t = 0,\ t \neq s \ \text{ и } \ \Delta \boldsymbol{z}_s = \bar{\boldsymbol{p}}_s,$$

удовлетворяет условиям $\bar{\boldsymbol{q}} \Delta \boldsymbol{z} = \bar{\boldsymbol{q}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s \leqslant 0$ и $\bar{\boldsymbol{p}}_s \Delta \boldsymbol{z}_s = |\bar{\boldsymbol{p}}_s|^2 > 0$. Это противоречит невозможности арбитража при равновесных ценах.

■

Заметим, что ключевое предположение модели Раднера — потребители, при расчете цен активов, предвидят цены всех благ во всех состояниях мира — не является при этом существенным, так как структура наблюдаемых ими в первом периоде цен активов совпадает со структурой цен благ второго периода. Данное предположение становится существенным в ситуациях, когда какие-то активы Эрроу отсутствуют. Заметим также, что в этой ситуации, даже в том случае, когда равновесие Эрроу—Дебре единственно, существует бесконечно много равновесий Раднера с нетривиальными обменами во втором периоде в дополнение к рассмотренному выше равновесию, когда обмены во втором периоде отсутствуют.

Используя только что доказанное свойство равновесия Раднера с полным набором активов Эрроу, продемонстрируем, что на основе такого равновесия можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре.

**Теорема 6.**

Пусть в экономике Эрроу предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира, и $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{(k,s) \mid k \in K, s \in S\}$. Тогда $(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре.

***Доказательство.***

Из предыдущей теоремы следует, что $(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — тоже равновесие Раднера в рассматриваемой экономике. Складывая все бюджетные ограничения задачи $i$-го потребителя, убеждаемся, что это при этом получится бюджетное ограничение задачи $i$-го потребителя в модели Эрроу. Следовательно, эти две задачи эквивалентны[91]. Т.е. $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя в модели Эрроу при ценах $\bar{\boldsymbol{q}}$. Несложно проверить, что остальные условия равновесия Эрроу—Дебре также выполнены.

■

Основное условие, гарантирующее эквивалентность моделей Эрроу—Дебре и Раднера, — наличие возможности переносить покупательную способность из одного состояния мира в другое. При этом вовсе не обязательно требовать, чтобы имелись *все* активы Эрроу. Для того, чтобы эта возможность существовала, достаточно, в частности, чтобы имелись все активы Эрроу, выраженные в 1-м благе, и только они (благо 1 — счетная единица, *numeraire*):

$$C = \{(1, s) \mid s \in S\}.$$

Проанализируем равновесие Раднера с таким набором активов. При анализе удобно использовать следующие обозначения: $q_{1s} = q_s$, $z_{i1s} = z_{is}$.

Заметим, что арбитраж в этой экономике возможен тогда и только тогда, когда $q_s$ и $p_{1s}$ имеют разные знаки или же $q_s = 0$ хотя бы для одного состояния мира $s$. Мы будем далее предполагать, что 1-е благо нужно всем потребителям во всех состояниях мира, т.е. функции полезности строго возрастают по потреблению 1-го блага в каждом состоянии мира. Тогда в равновесии Раднера $p_{1s} > 0 \ \forall s \in S$. При этом арбитраж возможет тогда и только тогда, когда $q_s \leqslant 0$ хотя бы для одного состояния мира $s$. Соответствующий план арбитража построить достаточно просто — он должен сводится к покупке актива Эрроу, соответствующего состоянию $s$. Невозможность арбитража эквивалентна условию $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{0}$.

Торговля в первом периоде в подобной экономике фактически означает, что продаются или покупаются начальные запасы 1-го блага таким образом, чтобы во 2-м периоде, торгуя скорректированными запасами, получить доход, достаточный для покрытия расходов, связанных с приобретением равновесного потребительского набора $\check{\boldsymbol{x}}$, соответствующему равновесию Эрроу—Дебре. То есть торговля в первом периоде представляет собой «перераспределение покупательной способности» потребителя между состояниями мира с избыточной и недостаточной покупательной способностью.

Доказательства следующих двух теорем, проводящих параллели между равновесием Раднера и равновесием Эрроу—Дебре, демонстрируют правильность такой интерпретации равновесия Раднера при $C = \{(1, s) \mid s \in S\}$.

**Теорема 7.**

Пусть в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению 1-го блага в каждом состоянии мира, и $(\check{\boldsymbol{p}}, \check{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике. Тогда существует портфель активов Эрроу $\bar{\boldsymbol{z}}$, выраженных в 1-м благе, а также цены активов $\bar{\boldsymbol{q}}$ такие, что $(\check{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \check{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера с $C = \{(1, s) \mid s \in S\}$.

***Доказательство.***

---

[91] Мы пропустили здесь часть рассуждений (строгое доказательство эквивалентности), но их легко восстановить, пользуясь как образцом доказательствами теорем, приведенных далее в этом параграфе.

Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Эрроу—Дебре в каждом состоянии мира ($\check{p}_{1s}>0\ \forall s\in S$).

Дефицит, связанный с потреблением в состоянии мира $\check{\boldsymbol{x}}_{is}$ потребительского набора $\check{\boldsymbol{x}}_{is}$, в ценах $\check{\boldsymbol{p}}$ составляет величину $d_{is}=\check{\boldsymbol{p}}_s(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})$. Тогда величину дефицита $d_{is}$ потребитель $i$ может покрыть, выбирая величину $\bar{z}_{is}$ равной $\frac{d_{is}}{\check{p}_{1s}}$. Такой выбор $\bar{z}_{is}$ гарантирует, что выполнены бюджетные ограничения второго периода задачи потребителя $i$ в модели Раднера:

$$\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}=\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}+\check{p}_{1s}\bar{z}_{is},$$

Заметим, что выполняется соотношение $\sum_{s\in S}d_{is}=0$ (бюджетное ограничение потребителя $i$ в модели Эрроу в равновесных ценах). Если выбрать в качестве цены актива $(1,s)$ цену первого блага в состоянии мира $s$, т.е. $\bar{q}_s=\check{p}_{1s}$, то соотношение $\sum_{s\in S}d_{is}=0$ гарантирует выполнение бюджетного ограничения первого периода задачи потребителя $i$ в модели Раднера.

Таким образом, $(\check{\boldsymbol{x}}_i,\bar{\boldsymbol{z}}_i)$ — допустимое решение в задаче (2) при ценах $\check{\boldsymbol{p}}$ и $\bar{\boldsymbol{q}}$. Покажем, что оно также является оптимальным решением. Предположим, что есть другое допустимое решение задачи (2), $(\check{\boldsymbol{x}}_i,\check{\boldsymbol{z}}_i)$, которое дает $i$-му потребителю более высокую полезность. Так как $(\check{\boldsymbol{x}}_i,\check{\boldsymbol{z}}_i)$ допустимо, то

$$\sum_{s\in S}\check{p}_{1s}\check{z}_{is}\leqslant 0,$$
$$\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}\leqslant\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}+\check{p}_{1s}\check{z}_{is}.$$

Сложив, получим

$$\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}\leqslant\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is},$$

что означает, что $\check{\boldsymbol{x}}_i$ — допустимое решение задачи (1), которое более предпочтительно для потребителя, чем $\check{\boldsymbol{x}}_i$. Противоречие.

Проверим, что $\forall s\in S$ выполнены балансы активов:

$$\sum_{i\in I}\bar{z}_{is}=\sum_{i\in I}\frac{d_{is}}{\check{p}_{1s}}=\sum_{i\in I}\frac{\check{\boldsymbol{p}}_s(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})}{\check{p}_{1s}}=\frac{\check{\boldsymbol{p}}_s}{\check{p}_{1s}}\sum_{i\in I}(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})=0.$$

Последнее равенство следует из балансов благ.

■

Для обратного утверждения нельзя в общем случае взять $\bar{\boldsymbol{p}}=\check{\boldsymbol{p}}$, поскольку в равновесии Раднера цены $\bar{\boldsymbol{p}}_s$ в каждом состоянии мира $s$ можно умножить на произвольный положительный множитель, и при этом рассматриваемое состояние останется равновесием. Таким образом, требуется взять $\check{\boldsymbol{p}}_s=\lambda_s\bar{\boldsymbol{p}}_s$, где $\lambda_s$ — некоторый положительный множитель.

**Теорема 8.**

Пусть в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению 1-го блага в каждом состоянии мира, и $(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C=\{(1,s)\mid s\in S\}$. Тогда существует вектор цен $\check{\boldsymbol{p}}$, такой что $(\check{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре.

***Доказательство*.**

Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Раднера в каждом состоянии мира. Кроме того, для каждого потребителя $i$ выполнены (как равенства) бюджетные ограничения 1-го и 2-го периодов:

$$\sum_{s\in S}\bar{q}_s\bar{z}_{is}=0,$$
$$\bar{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}=\bar{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}+p_{1s}\bar{z}_{is}.$$

Выберем $\check{\boldsymbol{p}}_s$ следующим образом,

$$\check{\boldsymbol{p}}_s=\frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}}\bar{\boldsymbol{p}}_s.$$

Тогда

$$\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}=\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}+q_s\bar{z}_{is}.$$

Складывая эти соотношения для всех состояний мира с бюджетным ограничением 1-го периода, убеждаемся, что при ценах $\check{\boldsymbol{p}}$ выполняется бюджетное ограничение в модели Эрроу:

$$\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_{is}=\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}.$$

Таким образом, $\check{\boldsymbol{x}}_i$ — допустимое решение задачи потребителя (1). Покажем, что оно является оптимальным.

Пусть это не так, и $\check{\boldsymbol{x}}_i$ — другое допустимое решение задачи (1), с более высоким значением полезности. Так как $\check{\boldsymbol{x}}_i$ допустимо, то

$$\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\check{\boldsymbol{x}}_i\leqslant\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s\boldsymbol{\omega}_{is}.$$

Тогда можно подобрать портфель активов, $\check{\boldsymbol{z}}_i$, такой что $(\check{\boldsymbol{x}}_i,\check{\boldsymbol{z}}_i)$ — допустимое решение задачи потребителя (2) в модели Раднера при ценах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Для этого, как и в доказательстве предыдущей теоремы, можно выбрать $\check{z}_{is}$ так, чтобы покрыть бюджетный дефицит в соответствующем состоянии мира, $d_{is}=\bar{\boldsymbol{p}}_s(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})$, т.е. $\check{z}_{is}=\dfrac{d_{is}}{\bar{p}_{1s}}$. При этом

$$\sum_{s\in S}\bar{q}_s\check{z}_{is}=\sum_{s\in S}\frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}}\bar{\boldsymbol{p}}_s(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})=\sum_{s\in S}\check{\boldsymbol{p}}_s(\check{\boldsymbol{x}}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{is})\leqslant 0,$$

т.е. выполнено бюджетное ограничение 1-го периода. Бюджетное ограничение 2-го периода выполнено в силу определения $\check{z}_{is}$. Получили противоречие.

■

**Пример 4.**

Рассмотрим модель Раднера с двумя состояниями мира, $s=R,S,$ двумя благами, $k=A,B$ двумя потребителями и возможными активами Эрроу, отмеченными в таблице. Они выражены в благе $A$.

| | $s=R$ | $s=S$ |
|---|---|---|
| $k=A$ | $\otimes$ | $\otimes$ |
| $k=B$ | | |

Ожидания потребителей по поводу вероятностей состояний мира совпадают и равны $\mu_R=\mu_S=1/2$.

Предпочтения потребителей также одинаковы и элементарные функции полезности равны:

$$u_i(x_A, x_B)=\ln(x_A)+\ln(x_B),\ i=1,2.$$

Начальные запасы указаны в нижеследующей таблице.

| | $\omega_1$ | | $\omega_2$ | | $\omega_\Sigma$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $B$ | $A$ | $B$ | $A$ | $B$ |
| $s=R$ | 2, | 0 | 0, | 2 | 2, | 2 |
| $s=S$ | 2, | 2 | 0, | 0 | 2, | 2 |

С точки зрения начальных запасов в этом примере нет системного риска.

Задача потребителя $i=1,2$ равновесия Раднера этой экономики имеет следующий вид:

$$U_i=\frac{1}{2}(\ln(x_{iAR})+\ln(x_{iBR}))+\frac{1}{2}(\ln(x_{iAS})+\ln(x_{iBS}))\rightarrow\max_{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{z}_i}$$

$$q_R z_{iR}+q_S z_{iS}\leqslant 0,$$

$$p_{AR}x_{iAR}+p_{BR}x_{iBR}\leqslant p_{AR}\omega_{iAR}+p_{BR}\omega_{iBR}+p_{AR}z_{iR},$$

$$p_{AS}x_{iAS}+p_{BS}x_{iBS}\leqslant p_{AS}\omega_{iAS}+p_{BS}\omega_{iBS}+p_{AS}z_{iS}.$$

Найдем равновесие Раднера в этом примере, пользуясь его взаимосвязью с равновесием Эрроу—Дебре. Поскольку нет системного риска, то в равновесии потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира:

$$x_{iAR}=x_{iAS},\ x_{iBR}=x_{iBS}.$$

Отношение цен одного и того же блага в двух состояниях, должно быть равно отношению вероятностей:

$$\frac{p_{AR}}{p_{AS}}=\frac{\mu_A}{\mu_B}=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1=\frac{p_{BR}}{p_{BS}}.$$

Можно проверить, что в равновесии Эрроу—Дебре

$$x_{1AR}=x_{1AS}=x_{1BR}=x_{1BS}=3/2.$$

$$x_{2AR}=x_{2AS}=x_{2BR}=x_{2BS}=1/2.$$

$p_{AR}=p_{AS}=p_{BR}=p_{BS}$ (можно выбрать $=1$).

Положим $q_R=p_{AR}=1$, $q_S=p_{AS}=1$. Для того, чтобы получить равновесие Раднера, нужно еще вычислить $z_{is}$:

$$d_{1R}=\boldsymbol{p}_R(\boldsymbol{x}_{iR}-\boldsymbol{\omega}_{iR})=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1.$$

$$z_{1R}=\frac{d_{1R}}{p_{AR}}=\frac{1}{1}=1.$$

Аналогично $d_{1S}=-1$.

$$z_{1S}=\frac{d_{1S}}{p_{AS}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Для второго потребителя характеристика его портфеля активов определяется из баланса активов:

$$z_{2R}=-1,\ z_{2S}=1.$$

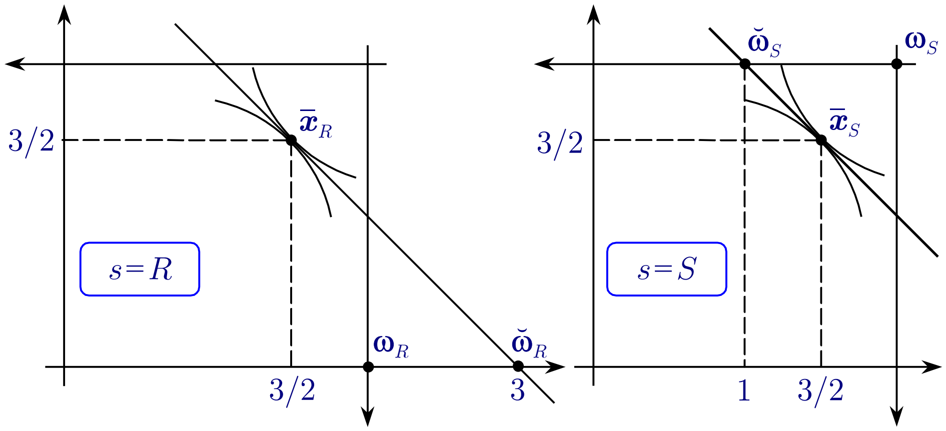


Рисунок 75. Иллюстрация к примеру 4

⇐

Рассмотрим теперь модель Раднера, в которой активы не обязательно являются активами Эрроу. Для упрощения анализа будем предполагать, что все активы выражены только в первом благе. Поскольку доходности по остальным благам при этом равны нулю, то соответствующие коэффициенты можно не рассматривать. При этом будем использовать следующие обозначения: $\boldsymbol{a}_s=\{a_{sc}\}_c$ — вектор, составленный из доходностей всех активов в состоянии мира $s$, $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{a}_s\}_s$ — матрица, составленная из доходностей всех активов во всех состояниях мира.

Хотя в такой экономике могут быть довольно сложные активы, но они фактически сводятся к набору элементарных активов (активов Эрроу). Соответственно, цену любого (сколь угодно сложного) актива можно вычислить через цены активов Эрроу, даже если таких активов в экономике нет. Для доказательства этого факта мы опять воспользуемся тем, что в равновесии Раднера арбитраж невозможен.

Рассмотрим, что означает в такой экономике невозможность арбитража. Переформулируя определение, арбитраж невозможен, если не существует такого плана арбитража $\Delta\boldsymbol{z}$, что $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z}\leqslant 0$, и для любого состояния мира $s\in S$ выполнено $p_{1s}\boldsymbol{a}_s\Delta\boldsymbol{z}\geqslant 0$, причем хотя бы для одного состояния мира неравенство строгое. Если $p_{1s}>0$ в любом состоянии мира, то последнее неравенство эквивалентно $\boldsymbol{a}_s\Delta\boldsymbol{z}\geqslant 0$. Такая переформулировка означает невозможность составить допустимый план арбитража (не требующий увеличения чистых расходов на покупку активов), такой что он приводит к приросту доступного потребителю количества 1-го блага по крайней мере в одном состоянии мира и не уменьшает эту величину в других состояниях мира. Формально возможность арбитража при ценах активов $\boldsymbol{q}$ записывается следующим образом:

$$\exists\Delta\boldsymbol{z}\colon\ \boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z}\leqslant 0 \text{ и } \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}\geqslant\neq\boldsymbol{0}.$$

Для доказательства того факта, что цены активов можно разложить по ценам активов Эрроу требуется также дополнительное предположение о том, что матрица доходностей активов обладает следующим свойством:

$$\exists\Delta\boldsymbol{z}\colon\ \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}\geqslant\neq\boldsymbol{0}. \qquad (☼)$$

Это свойство означает, что арбитраж в принципе возможен, если не учитывать бюджетное ограничение 1-го периода: можно подобрать план арбитража такой, что любом состоянии мира $\boldsymbol{a}_s\Delta\boldsymbol{z}\geqslant 0$ и хотя бы для одного состояния неравенство строгое. (Ясно, что при равновесных ценах активов такой план арбитража должен потребовать увеличения чистых расходов на приобретение активов: $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} > 0$).

**Теорема 9**[92]**.**

(i) Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица доходностей активов, удовлетворяющая предположению (✡), а $\boldsymbol{q}$ — цены активов, при которых арбитраж невозможен. Тогда существует вектор $\pi \geqslant\neq \mathbf{0}$, такой что $\boldsymbol{q} = \pi\boldsymbol{A}$.

(ii) Пусть цены активов можно представить в виде $\boldsymbol{q} = \pi\boldsymbol{A}$, где $\pi > \mathbf{0}$. Тогда при ценах активов $\boldsymbol{q}$ арбитраж невозможен.

***Доказательство.***

Предположим, что не существует вектора $\pi \geqslant \mathbf{0}$, такого что $\boldsymbol{q} = \pi\boldsymbol{A}$. Это означает, что выпуклое замкнутое множество

$$V = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} = \pi\boldsymbol{A},\ \pi \in \mathbb{R}^{\hat{s}}\},$$

не содержит вектор $\boldsymbol{q}$. Простроим на основе этого «прибыльный» план арбитража, и придем к противоречию с предположением о том, что арбитраж невозможен.

По теореме о разделяющей гиперплоскости существует вектор $\Delta\boldsymbol{z}'$, такой что $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z}' < c$ и $\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{z}' \geqslant c$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Поскольку $V$ — конус, то константу $c$ можно положить равной нулю. При этом уравнение $\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{z}' = 0$ задает опорную гиперплоскость к конусу $V$, проходящую через его вершину. Поскольку $\boldsymbol{a}_s \in V$, то $\boldsymbol{a}_s\Delta\boldsymbol{z}' \geqslant 0\ \forall s$, т.е. $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}' \geqslant 0$.

Вектор $\Delta\boldsymbol{z}'$ не обязательно дает требуемый план арбитража, поскольку не исключается случай $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}' = 0$, когда в любом состоянии мира план арбитража $\Delta\boldsymbol{z}'$ не приводит к изменению дохода. Но может оказаться возможным несколько скорректировать $\Delta\boldsymbol{z}'$ и получить выгодный план арбитража. Возьмем произвольный план арбитража $\Delta\boldsymbol{z}''$, такой что $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}'' \geqslant\neq 0$. (Должно выполняться $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z}'' > 0$, то есть этот план потребует увеличения чистых расходов на приобретение активов, иначе мы сразу получим, что арбитраж возможен). На основе $\Delta\boldsymbol{z}'$ и $\Delta\boldsymbol{z}''$ можно построить комбинированный план $\Delta\boldsymbol{z} = \Delta\boldsymbol{z}' + \lambda\Delta\boldsymbol{z}''$, где $\lambda$ — достаточно малое положительное число, такой что $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} \leqslant 0$ и $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z} \geqslant\neq 0$. Таким образом, получили противоречие с невозможностью арбитража, и доказали, что требуемый вектор $\pi \geqslant \mathbf{0}$ существует.

Ясно, что $\pi \neq \mathbf{0}$, поскольку $\pi = \mathbf{0}$ возможно только при $\boldsymbol{q} = \pi\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, что противоречит невозможности арбитража при ценах $\boldsymbol{q}$.

(ii) Пусть $\boldsymbol{q} = \pi\boldsymbol{A}$, где $\pi > \mathbf{0}$, и пусть $\Delta\boldsymbol{z}$ — план арбитража, такой что $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Тогда $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} = \pi\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z} > 0$. Таким образом, одновременное выполнение условий $\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{z} \leqslant 0$ и $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$ невозможно.

■

Требуемое для доказательства условие (✡) верно при многих достаточно естественных предположениях на матрицу $\boldsymbol{A}$. В частности, достаточно, чтобы матрица $\boldsymbol{A}$ имела ранг, равный количеству состояний мира, другими словами, чтобы вектора $\boldsymbol{a}_s$ были линейно независимы. Другой случай, когда можно легко построить $\Delta\boldsymbol{z}''$ — когда хотя бы один из активов не приносит отрицательного дохода ни в одном состоянии мира, а по крайней

---

[92] Фактически, это переформулировка в терминах рассматриваемой модели известной «леммы Фаркаша» из теории линейных неравенств.

мере в одном приносит положительный доход (например, актив Эрроу). Тогда соответствующий план арбитража может заключаться в том, чтобы приобрести единицу такого актива (все компоненты вектора $\Delta \boldsymbol{z}''$ равны нулю, кроме компоненты, соответствующей данному активу, которая равна единице). В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что матрица доходностей активов обладает свойством (☼).

Поскольку при равновесных ценах $\boldsymbol{q}$ арбитраж невозможен, то из доказанной теоремы следует, что можно представить равновесные цены активов в виде $\boldsymbol{q}=\pi \boldsymbol{A}$. Отдельный элемент вектора $\pi$, $\pi_s$, можно интерпретировать как цену актива Эрроу $(1, s)$.

Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$, то такой вектор $\pi$ определяется однозначно. Можно выбрать $\hat{s}$ активов с линейно независимыми векторами доходностей и сформировать из них матрицу $\hat{\boldsymbol{A}}$, при этом $\pi=\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}$. В противном случае удовлетворяющих этому соотношению векторов $\pi$ может быть бесконечно много. Например, если в экономике есть только активы Эрроу, выраженные в 1-м благе, но не для всех состояний мира, то цены активов Эрроу для отсутствующих активов $(1, s)$ можно выбрать произвольным образом.

Для каждой матрицы доходностей активов $\boldsymbol{A}$ можно задать **подпространство активов**, как подпространство, натянутое на вектора, соответствующие доходностям активов в разных состояниях мира:

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\hat{c}}\}.$$

Вектор $\boldsymbol{z}$ здесь можно интерпретировать как портфель активов (поскольку речь идет об объективной характеристике системы активов, то индекс потребителя не пишется), а отдельный элемент вектора $\boldsymbol{w}$, $w_s$, — как доход от этого портфеля в состоянии мира $w_s$ (выраженный в количестве 1-го блага). Таким образом $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A})$ — это множество тех доходов, которые можно получить при некотором выборе портфеля $\boldsymbol{z}$.

Для равновесий Раднера существенным является именно это подпространство активов, а не матрица $\boldsymbol{A}$, по которой оно строится. Покажем это, доказав, что если $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}')$, то из равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{A}'$. В доказательстве мы воспользуемся полученным выше представлением вектора цен активов в виде $\boldsymbol{q}=\pi \boldsymbol{A}$.

### Теорема 10.

Пусть в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению 1-го блага в каждом состоянии мира, и $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ — равновесие Раднера в этой экономике, где все активы выражены в 1-м благе, и $\boldsymbol{A}$ — матрица их доходностей, удовлетворяющая предположению (☼). Тогда если $\boldsymbol{A}'$ — другая матрица доходностей, такая что $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}')$, то существует портфель активов $\boldsymbol{z}'$ и цены активов $\boldsymbol{q}'$ такие, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\boldsymbol{A}'$.

***Доказательство***.

Поскольку цены $\boldsymbol{q}$ соответствуют равновесию Раднера, и предпочтения локально ненасыщаемы, то при этих ценах невозможен арбитраж. Предположение (☼) гарантирует при этом, что существует вектор $\pi = \{\pi_s\}_s$, такой что $\boldsymbol{q}=\pi \boldsymbol{A}$.

В качестве цен активов $\boldsymbol{q}'$ в конструируемом равновесии возьмем $\pi \boldsymbol{A}'$.

Построим теперь $\boldsymbol{z}'$. Поскольку $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{A})$ и $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}')$, то $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}')$. Другими словами, для любого $\boldsymbol{z}_i$ существует вектор $\boldsymbol{z}_i'$, такой что $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}_i' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i$. Для каждого набора $\boldsymbol{z}_i$, $i=$

$1, ..., m-1$ возьмем такой $\boldsymbol{z}'_i$. Кроме того, выберем $\boldsymbol{z}'_m$ так, чтобы выполнялся баланс активов:

$$\boldsymbol{z}'_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{z}'_i.$$

Поскольку $\sum_{i \in I} \boldsymbol{z}_i = 0$, то $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}'_m = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_m$.

Покажем теперь, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\boldsymbol{A}'$. Набор $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}'_i)$ допустим в задаче $i$-го потребителя при ценах $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'$ и матрице доходностей $\boldsymbol{A}'$, поскольку

$$\boldsymbol{q}'\boldsymbol{z}'_i = \pi \boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}'_i = \pi \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{q}\boldsymbol{z}_i \leqslant 0.$$

и

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\omega_i - p_{1s}\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{p}\,\omega_i - p_{1s}\boldsymbol{a}'_s\boldsymbol{z}'_i.$$

Покажем, что $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}'_i)$ является оптимальным решением. Пусть это не так, и $(\check{\boldsymbol{x}}_i, \check{\boldsymbol{z}}'_i)$ — другое допустимое решение задачи $i$-го потребителя при ценах $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'$ и матрице доходностей $\boldsymbol{A}'$, с более высоким значением полезности. Тогда, следуя рассмотренной выше схеме, можно подобрать портфель активов, $\check{\boldsymbol{z}}_i$, такой что $(\check{\boldsymbol{x}}_i, \check{\boldsymbol{z}}_i)$ — допустимое решение задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и матрице доходностей $\boldsymbol{A}$. Поскольку $\check{\boldsymbol{x}}_i$ дает потребителю более высокую полезность, чем $\boldsymbol{x}_i$, то это противоречит оптимальности $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i)$ при ценах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и матрице доходностей $\boldsymbol{A}$.

■

***Замечание***. Таким образом, каждому равновесию Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\boldsymbol{A}$ соответствует равновесие Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\boldsymbol{A}'$ с теми же планами потребления и ценами благ. Верно и обратное, если матрица $\boldsymbol{A}'$ удовлетворяет предположению (☼).

Если матрица доходностей $\boldsymbol{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$ (т.е., если структура доступных активов является достаточно «богатой»), то

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{L}(\boldsymbol{I}),$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица размерности $\hat{s} \times \hat{s}$. Матрица доходностей $\boldsymbol{I}$ соответствует случаю, когда $C = \{(1, s) \mid s \in S\}$, то есть когда все активы в экономике являются активами Эрроу, выраженными в 1-м благе. Поэтому при выполнении этого условия — полного ранга матрицы $\boldsymbol{A}$ — верны аналоги доказанных ранее для случая $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ теорем об эквивалентности равновесий Эрроу—Дебре и Раднера.

### Теорема 11.

Предположим, что в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению 1-го блага в каждом состоянии мира. Кроме того, будем предполагать, что все доступные потребителям в равновесиях Раднера активы выражены в 1-м благе, и матрица их доходностей $\boldsymbol{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира.

(i) Пусть $(\check{\boldsymbol{p}}, \check{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике. Тогда существует портфель активов $\bar{\boldsymbol{z}}$ и цены активов $\boldsymbol{q}$ такие, что $(\check{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}, \check{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера.

(ii) Наоборот, пусть $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике. Тогда существует вектор цен $\check{\boldsymbol{p}}$, такой что $(\check{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре.

***Доказательство.***

Данное утверждение является следствием Теорем 7, 8 и 10.

На основании равновесия Эрроу—Дебре можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{I}$, а на основании последнего — равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{A}$. Наоборот, на основании равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\boldsymbol{I}$, а на основании последнего — равновесие Эрроу—Дебре.

■

> ***Замечание.*** Пользуясь свойствами равновесия Эрроу—Дебре, получим важное следствие из данной теоремы: если матрица активов в модели Раднера имеет полный ранг, то каждое равновесие в такой модели Парето-оптимально. С другой стороны, если матрица активов неполного ранга, то возникает проблема неполноты рынков, и в общем случае равновесие Раднера неоптимально.

## Задачи

5. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i=1,2$), двумя состояниями мира ($Sun$, $Rain$) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Bananas$) запасы которых в состоянии мира $S$ у 1-го потребителя — $\omega_{1S}=(0;0)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2S}=(3;6)$, а в состоянии мира $R$ у 1-го потребителя — $\omega_{1R}=(5;1)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2R}=(1;2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_1=-1/x_{1a}-1/x_{1b} \qquad u_2=x_{2a}+4x_{2b}$$

Предположим, что вероятность состояния мира $S$ равна $2/3$, а вероятность состояния мира $R$ — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_{1S}=(2;1)$, $x_{1R}=(2;1)$, $x_{2S}=(1;5)$, $x_{2R}=(4;2)$, $p_a=(1;2)$, $p_b=(4;8)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

6. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i=1,2$), двумя состояниями мира ($Good$, $Bad$) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Cucumbers$) запасы которых в состоянии мира $G$ у 1-го потребителя — $\omega_{1G}=(4;4)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2G}=(2;2)$, а в состоянии мира $B$ — $\omega_{1B}=(1;1)$ и $\omega_{2B}=(5;5)$ соответственно. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности вида

$$u_i=\ln x_{ia}+\ln x_{ic}$$

Предположим, что вероятность состояния мира $G$ равна $2/3$, а вероятность состояния $B$ — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_1=(3;3;3;3)$, $x_2=(3;3;3;3)$, $p_G=(2;2)$, $p_B=(1;1)$, является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

7. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i=1,2$), двумя состояниями мира ($Sun$, $Rain$) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Bananas$) запасы которых в состоянии мира $S$ у 1-го потребителя — $\omega_{1S}=(3;3/2)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2S}=(3;3/2)$, а в состоянии мира $R$ у 1-го потребителя — $\omega_{1R}=(3;3/2)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2R}=(3;3/2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_i=\ln x_{ia}+\ln x_{ib}$$

Предположим, что субъективная вероятность состояния мира $S$ для 1-го потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира $R$ — $2/3$. Субъективная вероятность состояния мира $S$ для 2-го потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира $R$ — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_{1S}=(2;1)$, $x_{1R}=(4;2)$, $x_{2S}=(4;2)$, $x_{2R}=(2;1)$, $p_a=(1;1)$, $p_b=(2;2)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

8. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира ($R$ и $S$), с двумя благами ($A$ и $B$) и системой активов, состоящей из всех возможных активов Эрроу. Пусть цены активов равны $(q_{aR},q_{aS},q_{bR},q_{bS})=(1;2;3;4)$, а цены благ равны $(2;6)$ в состоянии $R$ и $(1;3)$ состоянии $S$. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

9. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира ($R$ и $S$), с двумя благами ($A$ и $B$) и системой активов, состоящей из двух активов Эрроу, выраженных в благе $A$. Пусть цены активов равны $(q_{aR},q_{aS})=(1;4)$. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

10. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира ($R$ и $S$), с двумя благами ($A$ и $B$) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе $A$. Один актив дает $1$ в состоянии $R$ и $1$ в состоянии $S$, а другой — $0$ в состоянии $R$ и $1$ в состоянии $S$. Выгоден ли план арбитража $\Delta z=(1;-1)$? Предложите цены активов, при которых этот план арбитража не приводит к увеличению чистых расходов на покупку активов.

11. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира ($R$ и $S$), с двумя благами ($A$ и $B$) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе $A$. Один актив дает $1$ в состоянии $R$ и $1$ в состоянии $S$, а другой — $0$ в состоянии $R$ и $1$ в состоянии $S$. Пусть цены этих активов равны $4$ и $1$ соответственно. Найдите соответствующие «цены активов Эрроу» $\pi_R$ и $\pi_S$. Что можно сказать по этим ценам о возможности арбитража?

12. Покажите, что равновесию Раднера могут соответствовать планы потребления, которые являются недопустимыми в задачах потребителя в модели Эрроу при любых равновесных ценах.

## *Задачи к главе*

13. Известно, что потребитель в экономике с риском с полной системой рынков имеет строго вогнутую элементарную функцию полезности, зависящую от одного (физического)

блага и заданную на неотрицательных количествах потребления. Что можно сказать об объемах потребления в разных состояниях мира, если цены блага в разных состояниях мира пропорциональны вероятностям? Рассмотрите либо общий случай, либо (для упрощения) дифференцируемую функцию полезности и 2 состояния мира.

14. Рассмотрите модель Эрроу—Дебре (с условно-случайными благами) в которой есть единственное физическое благо. Пусть количество состояний природы равно количеству потребителей, причем каждому потребителю соответствует одно состояние природы, в котором он владеет всем начальным запасом. Пусть, кроме того, начальные запасы не зависят от состояний природы и оценки вероятностей состояний природы у потребителей совпадают. Предположив, что элементарные функции полезности потребителей, $u_i(\cdot)$, строго вогнутые и возрастающие, покажите, что...

1) в Парето-оптимальных состояниях потребление не зависит от состояния природы.

2) равновесия Эрроу—Дебре и Раднера единственны. Охарактеризуйте эти равновесия.

15. Рассмотрите следующую ситуацию (близкую по духу концепции справедливости Джона Роулза). Два индивидуума в первый период должны выбрать, как они будут жить во втором периоде. Во втором периоде каждый из них может быть либо бедным, либо богатым в зависимости от состояния мира. В состоянии мира 1 богатым будет 1-й индивидуум, а в состоянии мира 2 — 2-й. В первом периоде они не знают, кто кем будет («покров неведения»), и могут заключать между собой соглашения относительно перераспределения богатства во втором периоде. Дайте интерпретацию этой ситуации с точки зрения модели Эрроу—Дебре (или Раднера). При каких предположениях можно ожидать исхода, характеризующегося социальным равенством?

16. Вчера Анатолий вложил в банк Чара $100\$$ из своих сбережений в $1000\$$, ожидая получить через день $+30\%$ с вероятностью $0{,}8$ или потерять вложение с вероятностью $0{,}2$. Аналогично, Борис вложил в компанию МММ $100\$$ из своих сбережений в $1000\$$ ожидая получить через день $+30\%$ с вероятностью $0{,}8$ или потерять вложение с вероятностью $0{,}2$. Предпочтения обоих представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

(1) Сделайте, если можно, (или укажите, что нельзя) по этим данным выводы –

- о склонности участников к риску…

- о совпадении их субъективных оценок вероятностей (оба актива доступны обоим)…

- о статистической (не)зависимости выигрыша Чары и МММ.

(2) Предположим, что на следующий день А и Б обменялись информацией и имеют уже одинаковые субъективные вероятности выигрыша Чары$=0{,}5$ и МММ$=0{,}5$, считая их жестко отрицательно коррелированными, и могут заключать друг с другом любые условные контракты. Можно ли утверждать, что ненулевой обмен акций Чары на МММ произойдет, или нужны дополнительные предположения на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать, что $50$ акций Чары обменяют на $50$ акций МММ, или для этого нужны дополнительные предположения на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать Парето-эффективность результата обмена?

(3) Как изменятся Ваши ответы на указанные вопросы, если считать акции жестко положительно коррелированными?

(4) Та же ситуация, что в пункте (2), но возможные контракты ограничены двумя типами: или за $1\$$ сегодня и $1$ акцию МММ две акции Чары, или за $1\$$ сегодня и $m$ акций Чары две акции МММ. Записать задачу Анатолия в форме модели Раднера. Гарантирован ли Парето-эффективный результат торговли?

# 7. Налоги

Как будет показано в главе об экстерналиях, один из логически возможных способов коррекции работы рыночного механизма в ситуации с экстерналиями — различного рода налоги. Налоги используются также и для финансирования общественных благ в том случае, когда такие блага предоставляет государство. Однако, за исключением идеализированных ситуаций, такие способы коррекции фиаско рынка также приводят в неэффективному распределению ресурсов.

В этой главе мы проиллюстрируем тот факт, что фактически при любой системе неаккордных налогов рыночное равновесие, как правило, не является Парето-эффективным, так как ведет к искажению структуры рыночных цен.

Одна из целей этой главы (помимо того, что здесь вводятся понятия, используемые в последующих главах) — выявить и сопоставить характер подобных неэффективностей для различных типов налогов.

## Общее равновесие с налогами, не зависящими от деятельности

В предыдущей главе мы, фактически, уже рассмотрели равновесие с **аккордными налогами**,[93] которые в том контексте называли *трансфертами* (точнее, аккордные трансферты — это аккордные налоги со знаком минус). Поскольку в нашем случае это налог на потребителя, то его можно назвать подушным налогом.[94] Используя термин «аккордный» мы хотим подчеркнуть, что экономический субъект не может повлиять на величину налога (трансферта), считает ее фиксированной. Анализ равновесия с аккордными трансфертами позволил сделать вывод о его эффективности: при локальной ненасыщаемости *равновесие с аккордными налогами является Парето-оптимальным*.

Таким образом, аккордные налоги являются в некотором смысле идеальными. Почему же они не используются? Одна из причин состоит в том, что характеристики экономических агентов, значения которых обуславливают величину налога, являются ненаблюдаемыми величинами, приватной информацией самих агентов, не заинтересованных, вообще говоря, в обнародовании этой информации. Еще одна причина — существующие представления экономических агентов о свойствах "хорошей", "справедливой" налоговой системы — считается, что богатые и платежеспособные должны платить больше). Но величина платежеспособности (в дополнению к тому, что является ненаблюдаемой), зависит от усилий экономических агентов, и поэтому требование *социальной справедливости*" несовместимо со свойством паушальных налогов — отсутствием влияния на усилия экономических агентов.

Например, аккордными в модели обмена являются налоги на начальные запасы, которые можно интерпретировать как налоги на ресурсы, выплачиваемые из ренты, ими порождаемой. Однако, не все типы начальных запасов достаточно хорошо измеримы с точки зрения их возможности приносить доход. Скажем, способность человека осуществлять ту или иною деятельность плохо измерима налоговыми органами. Это ограничивает реализацию данной идеи. Кроме того, некоторые начальные запасы, скажем, капитала или земли, являются запасами только в краткосрочном периоде (в статике), а в более широкой постановке нужно рассматривать влияние налогов на мотивацию их приобретения. Таким образом, обычно мы оказываемся в ситуациях, рассматриваемых ниже.

---

[93] Аккордный налог также называют паушальным. Соответствующий английский термин — *lump-sum tax*.

[94] Англ. *poll tax*.

## Общее равновесие с налогами на потребление

Пусть $t_{ik}$ — ставка налога на потребление блага $k$ потребителем $i$. Мы рассмотрим здесь общий случай, когда ставки налога могут быть разными для разных потребителей. Также здесь не исключается случай, что $t_{ik}$ могут быть отрицательными (случай трансфертов).

Задача $i$-го потребителя с учетом налогов на потребление модифицируется следующим образом:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i} \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K}(p_k+t_{ik})x_{ik} \leqslant \beta_i,$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Поскольку в этой главе нас, прежде всего, влияние интересует влияние налогов на экономическую деятельность, а не то, каким образом налоги используются, то мы будем предполагать, что собранная сумма налогов перераспределяется между потребителями посредством трансфертов[95].

Таким образом, мы будем предполагать следующую структуру дохода потребителя:

$$\beta_i = \boldsymbol{p}\,\omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i,$$

а для экономики в целом будем требовать сбалансированность соответствующих платежей (налогов и трансфертов):

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} t_{ik}x_{ik} = \sum_{i\in I} S_i.$$

Заметим, что мы ввели в задачу потребителя налоги с единицы товара,[96] ставка которых назначается в денежных единицах. Можно рассматривать и налог со стоимости товара (адвалорный),[97] ставка которого имеет устанавливается в процентах от цены. В случае, когда все налоги на потребление адвалорные, задача потребителя выглядит как

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i} \tag{4}$$

$$\sum_{k\in K}p_k(1+\tau_{ik})x_{ik} \leqslant \beta_i,$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Очевидно, что эти два вида налогов фактически эквивалентны, если их ставки связаны соотношением $t_{ik}=p_k\tau_{ik}$ в том смысле, что для любой системы адвалорных налогов можно подобрать налоги с единицы, приводящие к тем же результатам, и наоборот. В дальнейшем речь пойдет о налоге с единицы, но все сказанное с соответствующими оговорками относится и к налогам со стоимости (адвалорным).[98]

---

[95] Но мы могли бы остаться в рамках традиционной модели общего равновесия (в модели в явном виде не представлено государство; экономические агенты — это потребители и производители), представив государственный орган, выражающий общественную потребность в общественном благе и отвечающий за его приобретение в качестве одного из потребителей.

[96] Англ. *unit tax*.

[97] Лат. *ad valorem*.

[98] Ясно, что указанное соотношение не может выполняться при $t_{ik}\neq 0$ и $p_k=0$, поэтому эквивалентность здесь не полная.

Обозначим всю систему ставок налогов на потребление, существующих в экономике, через $\boldsymbol{t}=\{t_{ik}\}$, и рассмотрим общее равновесие с такими налогами.

**Определение 1.**

Назовем $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ равновесием с налогами на потребление $\boldsymbol{t}$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$, если

1) $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя (3) при ценах $\boldsymbol{p}$, доходах

$$\beta_i = \boldsymbol{p}\omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i,$$

и налогах на потребление, соответствующих системе налогов $\boldsymbol{t}$;

2) $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя при ценах $\boldsymbol{p}$;

3) $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_{i\in I}(\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\ \forall k;$$

4) сумма налогов равняется сумме трансфертов

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} t_{ik}\bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I} S_i.$$

Рассмотрим, как влияют налоги на равновесное состояние экономики. Нижеследующий пример показывает, что равновесие с налогами может быть неоптимальным.

**Пример 1.**

Рассмотрим экономику чистого обмена, в которой есть 2 потребителя и 2 блага. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \ln(x_{i1}) + \ln(x_{i2}),\ i = 1, 2.$$

Пусть потребление облагается адвалорными налогами по ставкам $\tau_{ik}$. Равновесие с такими налогами характеризуется следующими уравнениями:

$$\frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{11}} = \frac{p_1(1+\tau_{11})}{p_2(1+\tau_{12})},\quad \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} = \frac{p_1(1+\tau_{21})}{p_2(1+\tau_{22})}.$$

С другой стороны, Парето-оптимальные состояния в рассматриваемой экономике характеризуются уравнениями

$$\frac{\hat{x}_{12}}{\hat{x}_{11}} = \frac{\hat{x}_{22}}{\hat{x}_{21}} = \frac{\omega_{12}+\omega_{22}}{\omega_{11}+\omega_{21}}.$$

Из сравнения этих двух соотношений видно, что для Парето-оптимальности равновесия необходимо, чтобы ставки налогов удовлетворяли условию

$$\frac{1+\tau_{11}}{1+\tau_{12}} = \frac{1+\tau_{21}}{1+\tau_{22}}.$$

Поскольку $\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = \omega_{11} + \omega_{21}$ и $\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = \omega_{12} + \omega_{22}$, то несложно проверить, что эти условия будут также и достаточными для оптимальности.

Пусть приведенное условие не выполнено, например, потребление 1-м потребителем 1-го товара облагается по ставке 800%[99], а остальные налоги равны нулю, т.е. $\tau_{11}=8$, $\tau_{12}=\tau_{21}=\tau_{22}=0$. При этом возможно следующее равновесие:

$$p_1=1/3,\ p_2=1,\ \bar{x}_{11}=0.5,\ \bar{x}_{12}=1.5,\ \bar{x}_{21}=1.5,\ \bar{x}_{22}=0.5$$

(читатель может самостоятельно подобрать начальные запасы и трансферты, которые согласуются с этим равновесием). Очевидно, что такое равновесие не Парето-оптимально.

На Рис. 76 стрелкой показано направление возможного Парето-улучшения из точки равновесия. Из рисунка видно, что бюджетные прямые двух потребителей в отличие о классического случая не совпадают (показаны штрих-пунктирными линиями). Наклоны бюджетных прямых определяются отношением цен с учетом налогов, а эти отношения у потребителей разные. Поскольку отличаются отношения цен с учетом налогов, то отличаются и предельные нормы замещения. В Парето-оптимуме же предельные нормы замещения должны совпадать.

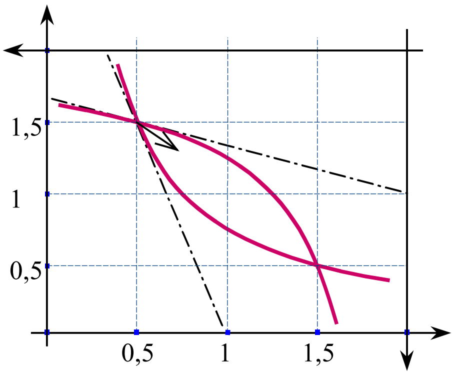


Рисунок 76. Неоптимальность неуниформных налогов на потребление

⇦

Найдем теперь условия, при которых равновесие оказывается оптимальным.

Условия первого порядка для внутреннего решения $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ задачи (3) имеют вид

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}}=\nu_i(p_k+t_{ik}),\ \forall k,$$

где $\nu_i$ — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению. Получаем следующую дифференциальную характеристику (внутреннего) равновесия с налогами (для любых благ $k$ и $k_0$, $p_{k_0}+t_{ik_0}\neq 0$):

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}=\frac{p_k+t_{ik}}{p_{k_0}+t_{ik_0}}$$

(отношение предельных полезностей равно отношению цен с учетом налогов).

Как показывает сравнение дифференциальных характеристик равновесия и Парето-оптимума, равновесие с налогами на потребление обладает следующим свойством: оно Парето-оптимально тогда и только тогда, когда для всех экономических субъектов отношения цен с учетом налогов, т.е. индивидуальных цен $p^t_{ik}=p_k+t_{ik}$, одинаковы. Назовем такие налоги **неискажающими**.

---

[99] Такая большая ставка взята, чтобы сделать более наглядным рисунок.

Другими словами, налоги будут неискажающими, когда все вектора индивидуальных цен $\boldsymbol{p}_i^t$ коллинеарны, т.е. для любой пары потребителей $i_1$ и $i_2$ существует множитель $\alpha$, такой что

$$\boldsymbol{p}_{i_1}^t = \alpha \boldsymbol{p}_{i_2}^t.$$

В частности, неискажающую систему налогов можно получить, взяв ставки $t_{ik}$ для всех благ $k$ пропорциональными ценам $p_k$ (для каждого потребителя $i$). В терминах адвалорных налогов это условие означает, что ставки $\tau_{ik}$ для всех благ $k$ одинаковы, т.е. $\tau_{ik} = \tau_{is}$, $\forall k, s \in K$. Будем называть такую систему налогов на потребление **униформной**.

Так, если рассмотреть экономику с производством, где предприятия не облагаются налогами, то для предприятий дифференциальная характеристика остается такой же, как в классической модели:

$$\frac{\partial g_j / \partial y_{jk}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Поэтому неискажающая система налогов должна быть такой, что индивидуальные цены потребителей $\boldsymbol{p}_i^t$ пропорциональны рыночным ценам $\boldsymbol{p}$. Очевидно, что такая система налогов окажется униформной.[100]

Следующую ниже теорему несложно сформулировать и для случая экономики с производством и налогами на производителей

**Теорема 1.**

Пусть $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — Парето-оптимальное равновесие с налогами на потребление $\boldsymbol{t}$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$, и

- функции полезности, $u_i(\cdot)$ дифференцируемы;
- равновесие внутреннее в том смысле, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ $\forall i$;
- в равновесии градиенты всех функций полезности не равны нулю:

$$\nabla u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \neq \boldsymbol{0},\ \forall i \in I.$$

Тогда налоги $\boldsymbol{t}$ являются неискажающими[101].

***Доказательство*.**

Как и в случае классической модели, в задаче потребителя во внутреннем равновесии градиент его функции полезности коллинеарен вектору его индивидуальных цен $\boldsymbol{p}_i^t$. С другой стороны в Парето-оптимуме все градиенты функций полезности коллинеарны. Тем самым все $\boldsymbol{p}_i^t$ коллинеарны, т.е. система налогов неискажающая.

■

В рассмотренной выше в Примере **1** экономике налоги не обязательно должны быть униформными по товарам, чтобы равновесие было оптимальным. Причина этого, заключается в том, что в данной экономике по сути дела ни один из потребителей не сталкивается с

---

[100] Если предприятия также облагаются налогами, то униформное налогообложение фактически эквивалентно налогу на прибыль. Неуниформное налогообложение тоже может быть неискажающим, но его пришлось бы реализовывать с помощью не только налогов, но и дотаций к ценам.

[101] Теорему несложно сформулировать и для случая экономики и доказать для случая экономики с производством и налогами на производителей

рыночными ценами $\boldsymbol{p}$. Поэтому неправильно было бы выражать требование неискажающих налогов в терминах этих цен.

Чтобы избежать этой неоднозначности, ставки налога можно, например, нормировать таким образом, чтобы налоги на одного из потребителей были равны нулю. Тогда условие оптимальности будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1+\tau_{11}}{1+\tau_{12}}=\frac{1}{1},$$

т.е. $\tau_{11}=\tau_{12}$.

Заметим, что дифференцируемость функций полезности — существенное условие теоремы, так же как и условие внутренности равновесия. В иных случаях совпадение норм предельной замены любой пары благ в Парето-оптимуме не гарантировано, а оно является основой этой теоремы.

Докажем теперь, что для Парето-оптимальности равновесия достаточно, чтобы ставки налогов на потребление были неискажающими, Суть доказательства состоит в том, что при униформных ставках налогов на потребление эти налоги по сути эквивалентны аккордным налогам, и тем самым, аккордным трансфертам. А для экономики с трансфертами мы уже имеем доказательство оптимальности равновесия.

**Теорема 2.**

Пусть $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — равновесие с налогами на потребление, в котором налоги $\boldsymbol{t}$ являются неискажающими, и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда $\bar{\boldsymbol{x}}$ — Парето-оптимальное состояние экономики.

***Доказательство.***

Поскольку налоги являются неискажающими, то существует вектор $\tilde{\boldsymbol{p}}$, такой что он коллинеарен всем индивидуальным ценам: $\boldsymbol{p}_i^t=\alpha_i\tilde{\boldsymbol{p}}$ (Например, в качестве $\tilde{\boldsymbol{p}}$ можно выбрать вектор индивидуальных цен первого потребителя). С учетом этого бюджетное ограничение $i$-го потребителя можно записать в виде

$$\alpha_i\sum_{k\in K}\tilde{p}_k x_{ik}=\alpha_i\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_i\leqslant\beta_i$$

или

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_i\leqslant\beta_i/\alpha_i=(\boldsymbol{p}\omega_i+S_i)/\alpha_i.$$

Рассматриваемому равновесию с налогами на потребление соответствует общее равновесие в классической модели с ценами $\tilde{\boldsymbol{p}}$ и трансфертами $\tilde{T}_i$, такими что

$$(\boldsymbol{p}\omega_i+S_i)/\alpha_i=\tilde{\boldsymbol{p}}\omega_i+\tilde{S}_i.$$

Ясно, что при этом новое бюджетное ограничение $i$-го потребителя допускает приобретение тех же потребительских наборов, что и бюджетное ограничение в исходном равновесии с налогами. Для доказательства того, что $(\tilde{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ является равновесием в классической модели, остается показать, что сумма трансфертов $\tilde{S}_i$ равна нулю. Действительно, мы определили $\tilde{S}_i$ так, что

$$\tilde{S}_i=(\boldsymbol{p}\omega_i+S_i)/\alpha_i-\tilde{\boldsymbol{p}}\omega_i.$$

В равновесии с налогами бюджетное ограничение выполнено как равенство, поэтому

$$S_i = \boldsymbol{p}_i^t \bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i = \alpha_i \tilde{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i.$$

отсюда

$$\tilde{S}_i = (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \alpha_i \tilde{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i)/\alpha_i - \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_i = \tilde{\boldsymbol{p}}(\bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i).$$

Сумма $\sum_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\omega}_i)$ равна нулю по условиям равновесия, поэтому

$$\sum_{i \in I} \tilde{S}_i = 0$$

По первой теореме благосостояния для классической модели $\bar{\boldsymbol{x}}$ является Парето-оптимумом.

■

### Задачи

1. Приведите пример оптимального равновесия с искажающими налогами на потребление. (Подсказка: рассмотрите потребителя с недифференцируемой функцией полезности).

## Общее равновесие с налогами на покупку (продажу)

Вывод о преимуществах неискажающих налогов на потребление трудно применить на практике. Во-первых, здесь имеются те же сложности, что и с аккордными налогами, но в меньшей степени, поскольку бюджетные ограничения сжимаются пропорционально. Во-вторых, невозможно наблюдать потребление некоторых благ, а следовательно и облагать налогом все блага, все сферы деятельности. Налоговые службы умеют облагать налогами покупаемые товары, но не изготовленные самими потребителями[102], работу, но не досуг. Эти «перекосы» налогообложения приводят к неоптимальности.

Предположим, что в экономике производство отсутствует (т.е. будем рассматривать экономику обмена с трансфертами), и имеются только налоги *на покупку* благ и трансферты. (Ситуация, когда есть только налоги на продажу благ анализируется аналогично).

Если $x_{ik} > \omega_{ik}$, то потребитель $i$ *покупает* благо $k$, а если $x_{ik} < \omega_{ik}$, то *продает его*.

Бюджетное ограничение потребителя в такой экономике можно записать следующим образом:

$$\sum_{k \in K} \left( (p_k + t_{ik}) [x_{ik} - \omega_{ik}]^+ + p_k [x_{ik} - \omega_{ik}]^- \right) \leqslant S_i,$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$[z]^+ = \begin{cases} z, & z \geqslant 0, \\ 0, & z \leqslant 0, \end{cases}$$

$$[z]^- = \begin{cases} -z, & z \leqslant 0, \\ 0, & z \geqslant 0. \end{cases}$$

При наличии производства доходы потребителя возросли бы на величину прибыли. Эту величину в приведенном ограничении следует прибавить к трансфертам.

Рис. 77 иллюстрирует это бюджетное ограничение в случае двух благ. На рисунке видно, что в рассматриваемой ситуации бюджетная линия имеет изгибы. Если нет трансфертов

---

[102] Если потребители могут сами производить какие-то блага, то модель потребителя следует дополнить производственной функцией.

рассматриваемому потребителю, то изгиб один и совпадает с точкой начальных запасов (Рис. 77а). Слева от точки изгиба наклон бюджетной линии определяется отношением $p_1/(p_2+t_{i2})$, а справа — отношением $(p_1+t_{i1})/p_2$. Решение задачи потребителя (при локальной ненасыщаемости) попадает либо на левую часть бюджетной линии (потребитель продает 1-е благо и покупает 2-е), либо на правую часть бюджетной линии (потребитель продает 2-е благо и покупает 1-е), либо на точку изгиба (нет торговли — потребитель остается с начальными запасами).

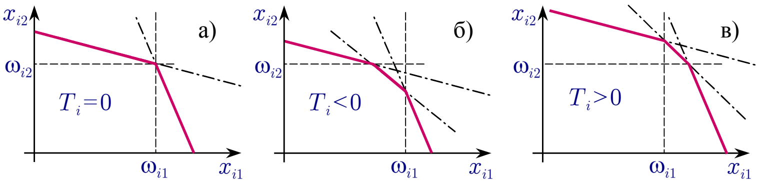


Рисунок 77. Бюджетная линия потребителя, облагаемого налогами на покупки при разной величине трансфертов

Если трансферты потребителю не равны нулю, то бюджетная линия будет иметь две точки изгиба. В одной из точек изгиба $x_{i1}=\omega_{i1}$, в другой — $x_{i2}=\omega_{i2}$. Наклон левой и правой частей бюджетной линии определяются соотношениями $p_1/(p_2+t_{i2})$ и $(p_1+t_{i1})/p_2$ соответственно. Наклон средней части бюджетной линии определяется соотношением $p_1/p_2$ при $S_i<0$ и соотношением $(p_1+t_{i1})/(p_2+t_{i2})$ при $S_i>0$.

Будем рассматривать экономику без производства (экономику обмена с трансфертами) и предполагать, что функции полезности дифференцируемы, в равновесии с налогами все цены и налоги положительны и равновесие внутреннее. Кроме того, будем предполагать, что в этом равновесии найдется некоторый потребитель $i_1$, который покупает некоторое благо $s$ и продает некоторое благо $k$.

Если один потребитель покупает некоторое благо, то найдется другой потребитель, который его продает (и наоборот). Поэтому найдется потребитель $i_2$, который продает благо $s$.

Для потребителя $i_1$ выполняется (без доказательства)

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 s}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}}=\frac{p_s+t_{i_1 s}}{p_k}.$$

С другой стороны, для потребителя $i_2$, вообще говоря (без доказательства),

$$\frac{p_s}{p_k+t_{i_2 s}}\leqslant\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}\leqslant\frac{p_s}{p_k},$$

причем

$$\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}=\frac{p_s}{p_k},$$

если он продает благо $k$, и

$$\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}=\frac{p_s}{p_k+t_{i_2 k}},$$

если он покупает благо $k$.

Из сопоставления дифференциальных характеристик для двух потребителей видим, что

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 s}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}}>\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}.$$

Значит, это равновесие не оптимально по Парето.

Экономику с производством рассмотрим подробнее на частном примере.

**Пример 2.**

Пусть в экономике имеется 2 блага, один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$ и одна фирма с явной производственной функцией $y_1 = f(a)$, причем функции $u(\cdot)$ и $f(\cdot)$ дифференцируемы, и $\partial u(\boldsymbol{x})/\partial x_k > 0$ и $f'(a) > 0$. Второе благо — это время потребителя, которым он обладает в количестве $\omega$ и делит его между досугом $x_2$ и трудом $a = -y_2 = \omega - x_2$. Запасы 1-го блага равны нулю, и оно только производится из 2-го. Предположим, что собранные налоги возвращаются потребителю, и он, кроме того, получает прибыль предприятия и заработную плату. Допустимые потребительские наборы задаются ограничениями $x_1 \geqslant 0$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant \omega$.

Рассмотрим равновесие с налогами на покупку. Поскольку покупается только первое благо, то только оно облагается налогом. Ставку этого налога обозначим $t$.

В данной модели возможны три типа равновесия: внутреннее равновесие ($0 < x_2 < \omega$) и два граничных равновесия: когда потребитель не работает ($x_2 = \omega$) и когда он не имеет досуга ($x_2 = 0$). Случай $x_2 = 0$ не будем анализировать как малоинтересный.

Предположим, что равновесие внутреннее. Тогда оно характеризуется следующими условиями:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1 + t}{p_2}$$

и

$$\frac{1}{f'} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Если $t \neq 0$, то

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \neq \frac{1}{f'},$$

и равновесие не оптимально по Парето. Это различие предельных норм замещения связано с тем, что отношения цен, с которыми сталкивается потребитель и фирма различаются.

Неоптимальность внутреннего равновесия иллюстрирует Рис. 78. В точке равновесия $\bar{\boldsymbol{x}}$ кивая безразличия $I$ касается бюджетной линии $B$ с наклоном $(p_1 + t)/p_2$. Заметим, что бюджетная линия обрывается при $x_2 = \omega$, и бюджетное множество имеет вид трапеции. В той же точке равновесия кривая производственных возможностей $P$ имеет наклон $p_1/p_2$ (касательная показана штриховой линией $B'$). Стрелка показывает направление Парето-улучшения.

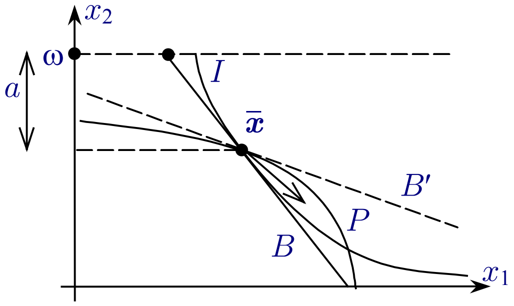


Рисунок 78

Предположим теперь, что в равновесии потребитель не работает[103]. Тогда это равновесие характеризуется следующими условиями

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \leqslant \frac{p_1+t}{p_2}$$

и

$$\frac{1}{f'} \geqslant \frac{p_1}{p_2}.$$

В граничном оптимуме

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \leqslant \frac{1}{f'}.$$

Таким образом, граничное равновесие может быть как оптимальным, так и нет (см. Рис. 79 и 80).

---

[103] Эта ситуация нереалистична при наличии всего одного потребителя, но позволяет продемонстрировать на простой модели эффекты, которые вполне возможны при наличии нескольких потребителей — часть потребителей может получать нетрудовые доходы. Во-первых, это могут быть государственные трансферты за счет налогов на других потребителей, во-вторых, это может быть прибыль принадлежащих им предприятий.

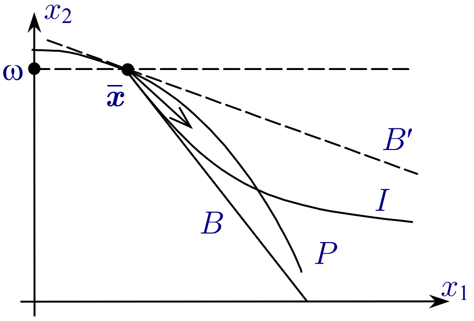


Рисунок 79. Неоптимальное граничное равновесие

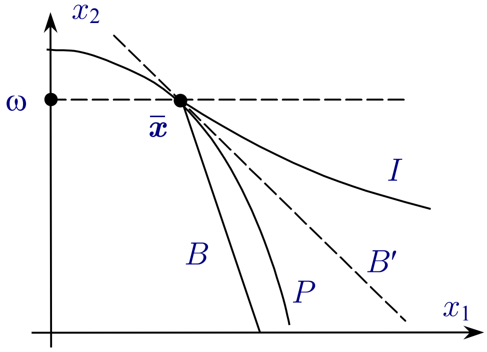


Рисунок 80. Оптимальное граничное равновесие

Заметим, что использование налога на заработную плату (на продажу 2-го блага) не меняет анализ, поскольку ситуация с налогами на заработную плату и на покупку остальных благ (в нашем примере на 1-е благо) сводится к ситуации с налогами на покупку и с субсидированием экзогенных для потребителя «нетрудовых» доходов (трансфертов $S$ и прибыли $\pi$). Действительно, пусть ставка налога на покупку 1-го блага, как и выше, равна $t$, а ставка налога на заработную плату — $s$. Тогда бюджетное ограничение имеет вид

$$(p_1+t)x_1+(p_2-s)(x_2-\omega)\leqslant S+\pi.$$

Умножив это на $p_2/(p_2-s)$, получим

$$\frac{p_2}{p_2-s}(p_1+t)x_1+p_2(x_2-\omega)\leqslant\frac{p_2}{p_2-s}(S+\pi)$$

или

$$(p_1+t')x_1+p_2(x_2-\omega)\leqslant S'+\pi',$$

где

$$t'=\frac{p_2}{p_2-s}(p_1+t)-p_1=\frac{p_2t+p_1s}{p_2-s}.$$

Как налог на покупку $t$, так и налог на заработную плату $s$ искажают соотношение цен, причем в одном и том же направлении. Таким образом, и при использовании налога на заработную плату внутреннее равновесие неоптимально.

⇦

## Задачи

2. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, $m$ потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает

второе, а другой потребитель получает положительный трансферт, покупает второе благо и продает первое. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

3. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, $m$ потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает второе, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

4. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, $m$ потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

5. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, $m$ потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт, продает первое благо и покупает второе. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

## *Оптимум второго ранга. Налог Рамсея*[104]

Предположим, что для неких целей государству требуется собрать определенную сумму налогов. Например, это может быть требование собрать столько налогов, чтобы на эту сумму можно было приобрести некоторый заданный набор благ[105]. Коль скоро Парето-оптимум в равновесии с налогами недостижим, то естественно поставить задачу уменьшить в каком-то смысле «бремя», связанное с налогами.

Обычные Парето-оптимальные состояния определяются на множестве всех (физически) допустимых состояний экономики. Поскольку при ограничении на сумму собранных налогов не все допустимые состояния могут быть реализованы как равновесие с налогами, то естественно рассматривать только состояния, которые могут быть реализованы как такое равновесие, и изменить соответствующим образом понятие оптимальности.

Обычный Парето-оптимум принято называть **оптимумом первого ранга**, а Парето-оптимум, который определяется на множестве всех тех состояний, которые могут быть реализованы с помощью равновесий из определенного класса — оптимумом второго ранга.

---

[104] См. F. P. Ramsey, “A Contribution to the Theory of Taxation,” *The Economic Journal*, **37** (1927), 47-61. Хотя в статье Ф. Рамсея это не оговаривается в явном виде, но речь там фактически идет о квазилинейной экономике. В этом параграфе анализ проводится на той же модели, но при упрощающем предположении о сепарабельности функции полезности и функции издержек (т.е. в терминологии Рамсея в предположении, что «товары независимы»).

[105] Как известно, в модели общего равновесия цены определены с только точностью до положительного множителя, поэтому не имеет смысла рассматривать чисто номинальное задание по сбору налогов. Необходимо каким-то образом связать денежную сумму с реальными величинами.

**Определение 2**.

**Оптимум второго ранга** — это такое состояние экономики из заданного множества состояний, для которого не существует другого состояния экономики из того же множества состояний, которое доминировало бы его по Парето.

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу оптимального налогообложения: подобрать такие налоги, чтобы равновесие с этими налогами являлось оптимумом второго ранга при некотором заданном ограничении на сумму налогов.

Рассмотрим квазилинейную сепарабельную экономику.

Нам достаточно рассмотреть одного репрезентативного потребителя с функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}, z) = v(\boldsymbol{x}) + z = \sum_{k \in K} v_k(x_k) + z$$

и одного репрезентативного производителя с функцией издержек

$$c(\boldsymbol{y}) = \sum_{k \in K} c_k(y_k).$$

Предполагаем, что запасы обычных благ равны нулю, поэтому материальные балансы для них имеют вид:

$$x_k = y_k.$$

Если в эту экономику вводятся налоги с единицы товара (unit taxes) *на все блага, кроме последнего* (по которому квазилинейна функция полезности)[106], то на каждом рынке существует две цены — цена производителя ($p_k^L$) и цена потребителя ($p_k^H$), которые связаны между собой соотношением

$$p_k^H = p_k^L + t_k.$$

Из задачи потребителя получаем, что в равновесии (внутреннем в смысле $x_k > 0$) выполнено условие первого порядка

$$p_k^H = v_k'(x_k).$$

Аналогично для репрезентативного производителя

$$p_k^L = c_k'(y_k).$$

Таким образом, дифференциальная характеристика равновесия с налогами в рассматриваемой квазилинейной сепарабельной экономике имеет вид

$$v_k'(x_k) = c_k'(y_k) + t_k.$$

Задача оптимального налогообложения состоит в том, чтобы собрать с рынков обычных благ определенную сумму налогов таким образом, чтобы благосостояние было максимальным, где благосостояние измеряется функцией (индикатором благосостояния)

$$W = v(\boldsymbol{x}) - c(\boldsymbol{y}).$$

Эквивалентная формулировка состоит в том, чтобы минимизировать чистые потери от налогов

$$DL = \hat{W} - W,$$

---

[106] Это благо в теории оптимального налогообложения обычно интерпретируется как время потребителя, которое он может делить между досугом и трудом.

где $\hat{W}$— максимально возможный уровень благосостояния, достигаемый в Парето-оптимуме.

Из сепарабельности следует, что общие чистые потери есть сумма чистых потерь по отдельным рынкам. Это означает (графически), что мы должны минимизировать сумму «заштрихованных треугольников», измеряющих чистые потери на отдельных рынках.

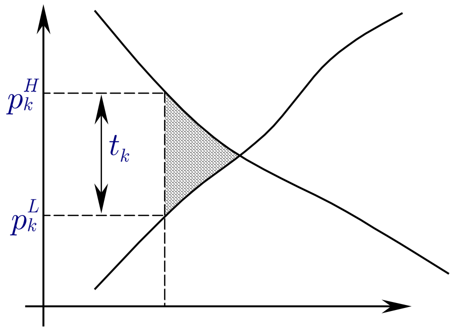


Рисунок 81. Чистые потери благосостояния на рынке $k$-го блага

Таким образом, ставится задача нахождения оптимума второго ранга путем выбора налоговых ставок $t_k$, максимизирующих благосостояние при следующих ограничениях:

1) Состояние экономики должно быть равновесием с налогами.

2) Сбор налогов не должен быть меньше заданной величины $R$.

(Можно, наоборот, рассматривать максимизацию сбора налогов при ограничении на величину потерь благосостояния).

В результате приходим к следующей задаче

$$W=\sum_{k\in K} v_k(x_k)-\sum_{k\in K} c_k(x_k)\to\max{}_{x_k,t_k}$$
$$v_k'(x_k)=c_k'(x_k)+t_k,\ \forall k,$$
$$\sum_{k\in K} t_k x_k\geqslant R.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L=\sum_{k\in K} v_k(x_k)-\sum_{k\in K} c_k(x_k)+\lambda\left(\sum_{k\in K} t_k x_k-R\right)+\sum_{k\in K}\sigma_k[v_k'(x_k)-c_k'(x_k)-t_k].$$

Приравняем производные к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}=v_k'(x_k)-c_k'(x_k)+\lambda t_k+\sigma_k\left(v_k''(x_k)-c_k''(x_k)\right)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_k}=\lambda x_k-\sigma_k=0.$$

Отсюда, учитывая, что $v_k'(x_k)-c_k'(x_k)=t_k$, и исключая множители Лагранжа $\sigma_k$ получаем, что искомое состояние должно описываться соотношением

$$t_k+\lambda t_k+\lambda x_k\left(v_k''(x_k)-c_k''(x_k)\right)=0,$$

или

$$t_k=\frac{\lambda}{1+\lambda}x_k\left(-v_k''(x_k)+c_k''(x_k)\right),$$

Учтем, что $v_k'(\cdot)$ — обратная функция спроса, а $c_k'(\cdot)$ — обратная функция предложения. Это позволяет записать формулу через эластичности спроса и предложения:

$$\varepsilon_k^D(x_k) = \frac{1}{v_k''(x_k)} \frac{v_k'(x_k)}{x_k} (<0),$$

$$\varepsilon_k^S(x_k) = \frac{1}{c_k''(x_k)} \frac{c_k'(x_k)}{x_k}.$$

Кроме того, поскольку мы рассматриваем состояние равновесия с налогами, то можно заменить $v_k'(x_k)$ на $p_k^H$ и $c_k'(x_k)$ на $p_k^L$.

Окончательно, получаем формулу (формулу Рамсея)

$$t_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left( \frac{p_k^H}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{p_k^L}{\varepsilon_k^S} \right).$$

Подставив в эту формулу $p_k^H = p_k^L + t_k$, выразим из нее $t_k$ и разделим на $p_k^L$:

$$\frac{t_k}{p_k^L} = \lambda \frac{\frac{1}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{1}{\varepsilon_k^S}}{1+\lambda+\lambda \frac{1}{\varepsilon_k^S}}.$$

При малой величине собираемых налогов, $R$, множитель Лагранжа, $\lambda$, мал. Действительно, можно доказать, что при $R=0$ множитель Лагранжа $\lambda$ равен нулю. Пусть это не так и $\lambda>0$. Воспользуемся тем, что

$$t_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} x_k (-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)).$$

При $\lambda>0$ из условий Куна-Таккера ограничение на сбор налогов должно выполняться как равенство, т.е. $\sum_k t_k x_k = R = 0$. Подставим в это ограничение $t_k$:

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{k \in K} x_k^2 (-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)) = 0.$$

В предположении убывающей предельной полезности и убывающей отдачи от масштаба выражение слева должно быть положительным. Мы пришли к противоречию. Значит, при $R=0$ множитель Лагранжа $\lambda$ должен быть равен нулю. При этом все ставки налогов должны быть нулевые. (Этим мы попутно доказали, что перераспределение между рынками с помощью налогов, т.е. субсидирование одних рынков за счет других, неэффективно.)

В первом приближении при $R$ близком к нулю мы можем записать

$$t_k \approx \lambda x_k (-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)),$$

кроме того, дифференцируя условия равновесия, получаем

$$dt_k = dx_k (-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)),$$

При малых налогах ($dt_k \approx t_k$) из этого следует, что

$$\frac{dx_k}{x_k} \approx \lambda.$$

Таким образом, в первом приближении оптимальные налоги снижают объемы потребления (и производства) всех благ в равной пропорции.

Кроме того, малые оптимальные налоги (налоги при $R$ близком к нулю) можно выразить через эластичности спроса и предложения в равновесии без налогов:

$$\frac{t_k}{p_k^L} \approx \lambda\left(\frac{1}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{1}{\varepsilon_k^S}\right).$$

Таким образом, **правило оптимального налогообложения Рамсея** заключается в том, что относительные ставки налогов должны быть (в первом приближении) пропорциональны сумме обратных эластичностей спроса и предложения на соответствующих рынках:

$$\frac{t_k}{p_k^L} \sim \frac{1}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{1}{\varepsilon_k^S}.$$

Существенным ограничением данного правила является то, что предполагается независимость рынков (формально — сепарабельность). Если отказаться от этого предположения, то в формуле появятся перекрестные эластичности.

Другое существенное предположение изложенной модели — квазилинейность предпочтений. Различные правила налогообложения Рамсея получаются в рамках модели общего равновесия и при других упрощающих предположениях. В следующем параграфе мы рассмотрим одну из таких моделей.

## Задачи

6. Рассмотрите экономику обмена с двумя видами благ ($x$ и $y$) и двумя потребителями (1 и 2), где каждый потребитель имеет функцию полезности $u_i = \ln(x_i) + \ln(y_i)$ и начальные запасы $\omega_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy})$. Государство собирает адвалорный налог на продажу благ. Цель государства состоит в том, чтобы на собранные средства приобрести по рыночным ценам благо $x$ в количестве $x_0$ и благо $y$ в количестве $y_0$. Предполагаем, что с собственных закупок государство налог не взимает.

(A) Всегда ли государство может добиться своей цели?

(B) Может ли случиться так, что равновесие с налогами будет Парето-оптимальным (Парето-оптимальным с учетом того, что государство должно получить $x_0$ и $y_0$ благ $x$ и $y$)?

7. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами (A и B). Функции полезности потребителей: $u_1 = 2\ln a_1 + b_1$ $u_2 = \ln a_2 + b_2$, где $a_i$ — потребление блага A, а $b_i$ — потребление блага B $i$-м потребителем. Начальные запасы благ: $\omega_1 = (2; 3)$, $\omega_2 = (3; 2)$. Вводится натуральный налог на потребление блага A, так что $i$-й потребитель потребляет после уплаты налога $a_i(1 - \tau_i)$ блага A, где $\tau_i$ — ставка налога. Соответственно. государство собирает в форме налога $a_1\tau_1 + a_2\tau_2$ блага A.

(A) Найти равновесие, которое возникнет после введения налога ($a_i$, $b_i$ и отношение цен $p_A/p_B$).

(B) Найти Парето-оптимум, учитывая, что заданное количество ($a_0$) блага A должно уйти государству. При каком распределении налога равновесие будет Парето-оптимальным?

8. В квазилинейной экономике есть 2 потребителя с функциями полезности

$$u_1 = \sqrt{x_1} + z_1, \quad u_2 = \sqrt{x_2} + z_2$$

и предприятие с функцией издержек $c(y) = 2y$.

(A) Вводится адвалорный налог на потребление 1-го блага со ставкой $\tau$. Найдите конкурентное равновесие в экономике $(p, x_1, x_2, y)$ как функцию величины $\tau$.

(B) Пользуясь результатами пункта (A), найдите чистые потери благосостояния от налога при ставке $\tau=1$, (т.е. 100%).

9. В экономике производится один предмет потребления, $y$, спрос на который образуется в результате максимизации следующей функции полезности репрезентативного потребителя: $u(y,x)=2\sqrt{y+1}+x$ , где $x$ — потребление свободного времени. Потребитель владеет единичным запасом времени, который он распределяет между рабочим временем $L$ и свободным временем $x$. Рабочее время предлагается единственной фирме, которая производит $y$ по технологии $y=\ln(2L)+3$. Вычислите чистые потери от введения 50%-го налога на продажу предмета потребления (продажная цена производителя равна половине цены, которую платит покупатель). Заработную плату примите за $1$.

10. Рассмотрите модель оптимального налогообложения Рамсея в ситуации двух независимых рынков. На первом рынке спрос равен $D=10-p$, а предложение равно $S=1+p$. На втором рынке спрос равен $D=10-p/2$, а предложение равно $S=1+p/2$.

(A) Запишите условия первого порядка для оптимальных налогов (не исключая множитель Лагранжа)

(B) Во сколько раз отличается налог на одном рынке от налога на другом.

11. В ситуации частного конкурентного равновесия государству требуется собрать налоги общей величины $R$ с $n$ независимых рынков. Оно использует налог с единицы товара со ставкой $t_i$ ($i=1,...,n$). Функции спроса и предложения линейны: $S_i=a_i+b_i p$ и $D_i=c_i-d_i p$. Задача состоит в том, чтобы распределить налоги по рынкам так, чтобы общие потери благосостояния были минимальными.

Как ставка налога на данном рынке зависит от наклона кривых спроса и предложения? (Подсказка: не следует исключать из соответствующих условий первого порядка множитель Лагранжа).

12. Задача Рамсея выбора ставок налогов состоит в том, чтобы при сохранении величины налоговых сборов ...

а) минимизировать чистые потери,

б) минимизировать потери потребителя,

в) максимизировать объем продаж,

в) максимизировать прибыль.

Ее решение предписывает установить большие ставки налогов в тех отраслях (допишите) ... ... ... ... ...

13. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Пусть эластичность спроса в точке равновесия $|\varepsilon|=3$, предельные издержки у всех производителей постоянны и одинаковы и правительство устанавливает налог в размере $\$6$ с единицы товара. Если спрос — линейная функция, то насколько поднимется цена? А в случае спроса с постоянной эластичностью $|\varepsilon|=3$?

14. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D=8-p$, предложение имеет вид $S=3+p$. На этом рынке вводится налог на потребление в размере 50% цены. Найдите чистые потери благосостояния от введения налога.

15. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D=8-p$, предложение бесконечно эластично. На этом рынке вводится налог в размере $2$ ед. на единицу товара. Найдите потери потребителей от введения налога, если до введения налога объем торговли на рынке был равен $4$ ед.

## Правило оптимального налогообложения для «малых» потребителей

Пусть в экономике имеется большое число потребителей, предпочтения которых задаются строго вогнутыми функциями полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$. Предположим, что последнее ($l$-е) благо — это время потребителя, так что $x_{il}$ — это досуг потребителя, а $\omega_i - x_{il}$ — предложение труда, где $\omega_i$ — запас времени потребителя. Допустимые потребительские наборы задаются ограничениями $x_{ik} \geqslant 0$, $\forall k$ и $x_{il} \leqslant \omega_i$.

Потребители могут получать доход от продажи труда, а также из прибылей принадлежащих им фирм и от государства в виде трансфертов. Не специфицируя остальную часть экономики (производство, поведение государства), охарактеризуем внутреннее равновесие с индивидуальными налогами $\boldsymbol{t}_i$ на покупку благ потребителями, являющееся оптимумом второго ранга. Пусть при данной системе налогов $\boldsymbol{t} = \{\boldsymbol{t}_i\}$ равновесные цены равны $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$.

Будем предполагать, что каждый потребитель мал в том смысле, что влиянием величины его индивидуальных налогов $\boldsymbol{t}_i$ на равновесные цены $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$ можно пренебречь. Это предположение позволяет вывести условия оптимальности налогов $\boldsymbol{t}$ на основе анализа отдельного потребителя при фиксированных рыночных ценах $\boldsymbol{p}$ и фиксированной величине суммы налогов, выплачиваемой этим потребителем[107].

Напомним, что в модели с налогами на покупку благ бюджетное ограничение потребителя $i$ имеет вид (если есть доходы от фирм, то они добавляются к $S_i$)

$$\sum_{k\in K}(p_k+t_{ik})[x_{ik}-\omega_{ik}]^{+}+p_k[x_{ik}-\omega_{ik}]^{-})\leqslant S_i,$$

Предположим, что потребитель продает труд ($l$-е благо). Поскольку все блага, кроме $l$-го, покупаются на рынке, то они облагаются налогами. Труд, соответственно, не облагается налогом. Бюджетное ограничение в данном случае записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{l-1}(p_k+t_{ik})x_{ik}+p_l x_{il}=\sum_{k=1}^{l}(p_k+t_{ik})x_{ik}\leqslant p_l\omega_i+S_i.$$

т.е. оно имеет такой же вид, как и с налогами на потребление, с тем исключением, что ставка налога на досуг равна нулю. В дальнейшем мы абстрагируемся от того, что рас-

---

[107] Эта модель впервые была проанализирована Полом Самуэльсоном в 1951 г. в его докладе Министерству финансов США (перепечатан в Samuelson, P. A. “Theory of Optimal Taxation,” *Journal of Public Economics*, **30** (1986), 137-143). В литературе по оптимальному налогообложению полученные Самуэльсоном результаты принято называть «правилом Рамсея». При изложении модели обычно делается предположение, что все потребители одинаковы, хотя, как очевидно из нашего анализа, важна только неизменность цен. Анализ Самуэльсона был распространен на случай экономики с производством и меняющимися ценами в статье Diamond, P. A. and J. A. Mirrlees, “Optimal taxation and public production I: Production efficiency and II: Tax rules,” *American Economic Review*, **61** (1971), 8-27 and 261-278.

сматривается налог на покупки, и будем действовать так, как если бы это был налог на потребление.

Прежде, чем анализировать этот случай, рассмотрим гипотетическую ситуацию, в которой можно устанавливать налоги на потребление всех благ, включая досуг.

Рассмотрим задачу максимизации полезности потребителя при дополнительных ограничениях, что потребительский набор представляет собой спрос потребителя при данных ставках налогов ($\boldsymbol{x}_i = \bar{\boldsymbol{x}}_i(\boldsymbol{t}_i)$), и что требуется собрать фиксированную сумму налогов $R_i$ (она равна фактически собираемому в равновесии налоговому доходу). Если налоги оптимальны, то они являются решением указанной задачи. В противном случае на основе решения данной задачи можно построить Парето-улучшение для экономики в целом (в смысле оптимума второго ранга).

Выпишем эту задачу формально, опуская для упрощения записи индекс потребителя:

$$u(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})) \to \max{}_{t} \qquad (\text{⌘})$$

$$\boldsymbol{t}\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) \geqslant R,$$

где $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и налогах $\boldsymbol{t}$:

$$u(\boldsymbol{x}) \to \max{}_{\boldsymbol{x}}$$

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t})\boldsymbol{x} \leqslant \beta = p_l\omega + S_i.$$

Функция $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ связана с обычной функцией потребительского спроса соотношением $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}, \beta)$.

Условия первого порядка для внутреннего решения задачи потребителя имеют вид

$$\frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}))}{\partial x_k} = \nu(p_k + t_k)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\nabla u(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})) = \nu(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}),$$

где $\nu$ — множитель Лагранжа бюджетного ограничения.

В равновесии бюджетное ограничение выполняется как равенство, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ удовлетворяет тождеству

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t})\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{s=1}^{l}(p_s + t_s)\bar{x}_s(\boldsymbol{t}) = \beta.$$

Дифференцируя это тождество по $t_k$, получим соотношение

$$\sum_{s=1}^{l}(p_s + t_s)\frac{\partial \bar{x}_s(\boldsymbol{t})}{\partial t_k} = -x_k(\boldsymbol{t}).$$

Подставляя условия первого порядка, получим соотношение, которое характеризует изменение полезности потребителя при малом изменении ставки налога на $k$–е благо:

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} = -\nu\bar{x}_k.$$

Используя полученные соотношения, охарактеризуем теперь решение задачи (⌘), и, тем самым, оптимальные ставки налогов. Функция Лагранжа для задачи (⌘) имеет вид

$$L = u(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})) + \lambda(\boldsymbol{t}\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) - R).$$

Условия первого порядка для решения

$$\frac{\partial L}{\partial t_k}=\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}+\lambda(\sum_{s=1}^{l}t_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}+\bar{x}_k)=0.$$

Подставляя полученные выше характеристики решения задачи потребителя, преобразуем эти условия к виду:

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}=\lambda\sum_{s=1}^{l}p_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}.$$

Запишем эти соотношения в матричном виде:

$$\nabla\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\nabla u=\lambda\nabla\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p},$$

где $\nabla\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ — матрица частных производных $\{\partial\bar{x}_s/\partial t_k\}$. Если это невырожденная матрица, то можно записать условия оптимальности налогов как

$$\nabla u=\lambda\boldsymbol{p}.$$

Поскольку

$$\nabla u=\nu(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}),$$

то

$$\lambda\boldsymbol{p}=\nu(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t})$$

или

$$\boldsymbol{t}=\frac{\lambda-\nu}{\nu}\boldsymbol{p}.$$

Таким образом, *оптимальные налоги на потребление должны быть униформными*. Этот вывод совпадает с полученным выше в посвященном таким налогам параграфе.

Пусть теперь $t_l=0$. Ясно, что с этим ограничением (при «гладкой» функции полезности) налоги не могут быть оптимальными, поскольку не являются униформными. Этот факт иллюстрирует Рис. 82.

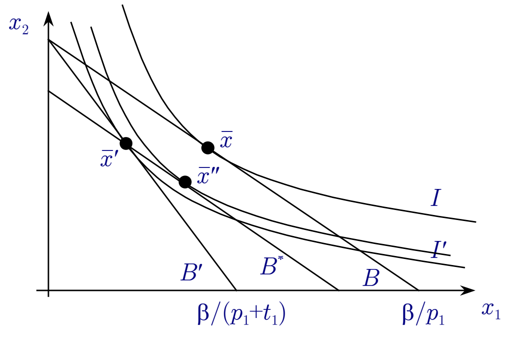


Рисунок 82. Неоптимальность неуниформного налога

Введение налога на благо 1 вызывает поворот бюджетной прямой ($B\rightarrow B'$) и переход потребителя к новому равновесию ($\bar{x}\rightarrow\bar{x}'$). Рассмотрим «бюджетную прямую» $B^*$, параллельную первоначальной ($B$) и проходящую через точку равновесия, как если бы ввели эквивалентный аккордный налог (или униформные налоги на потребление). Поскольку вспомогательная бюджетная прямая пересекает кривую безразличия, то соответствующее решение задачи потребителя $\bar{x}''$ обеспечивает потребителю более высокую полезность, чем $\bar{x}'$ без снижения величины налога. На рисунке направление такого «Парето-улучшения» показано стрелкой.

При $t_l=0$ в задаче $(⌘)$ появляется дополнительное ограничение. Условия первого порядка

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}+\lambda(\sum_{s=1}^{l}t_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}+\bar{x}_k)=0,$$

в этом случае должны выполнятся для всех благ, кроме $l$-го. Если подставим в них полученные выше характеристики решения задачи потребителя, то получаем соотношение

$$-\nu\bar{x}_k+\lambda(\sum_{s=1}^{l}t_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}+\bar{x}_k)=0$$

или

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}t_s=-\frac{\lambda-\nu}{\lambda}\bar{x}_k.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ограничение по сбору налогов существенно, т.е. $\lambda>0$, и $\bar{x}_k>0$ (равновесие внутреннее). Последнее слагаемое здесь равно нулю, поэтому

$$\sum_{s=1}^{l-1}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}t_s=-\frac{\lambda-\nu}{\lambda}\bar{x}_k.$$

Производные функции $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ равны соответствующим производным обычной функции спроса по ценам. Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{l-1}\frac{\partial x_s}{\partial p_k}t_s=-\frac{\lambda-\nu}{\lambda}\bar{x}_k.$$

Если предпочтения потребителя *гомотетичны*, то

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_k}=\frac{\partial x_k}{\partial p_s}\;\forall k,s,$$

и можно записать это соотношение как

$$\sum_{s=1}^{l-1}\frac{\partial x_s}{\partial p_k}\frac{t_s}{x_k}=\sum_{s=1}^{l-1}\frac{\partial x_k}{\partial p_s}\frac{p_s}{x_k}\frac{t_s}{p_k}=-\frac{\lambda-\nu}{\lambda}.$$

или, с использованием эластичностей спроса по ценам, $\varepsilon_{ks}$,

$$\sum_{s=1}^{l-1}\varepsilon_{ks}\frac{t_s}{p_k}=-\frac{\lambda-\nu}{\lambda}.$$

Если же функция полезности потребителя *квазилинейна* по труду и *сепарабельна*, на спрос потребителя на отдельное благо влияет только налог на это благо. При этом все перекрестные производные равны нулю и условие оптимальности имеет очень простой вид:

$$\frac{t_k}{p_k}=\frac{\lambda-\nu}{\lambda}\frac{1}{|\varepsilon_k|},$$

т.е. относительные (адвалорные) налоги должны быть обратно пропорциональны эластичностям.

В общем случае симметричность производных не выполнена, однако можно перейти к хиксианскому спросу, для которого эта симметричность имеет место.

Напомним, что уравнение Слуцкого имеет вид

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_k}=\frac{\partial h_s}{\partial p_k}-x_k\frac{\partial x_s}{\partial \beta}\;\forall k,s$$

Подставляя $\partial x_s / \partial p_k$ в характеристику оптимальных налогов, получаем

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_s}{\partial p_k} t_s = \left( \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial \beta} t_s - \frac{\lambda - \nu}{\lambda} \right) x_k = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} x_k,$$

где

$$\alpha = \lambda \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial \beta} t_s + \nu$$

не зависит от $k$. Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_s}{\partial p_k} t_s = \sum_{s=1}^{l-1} S_{sk} t_s = \sum_{s=1}^{l-1} S_{ks} t_s = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \bar{x}_k$$

или

$$\sum_{s=1}^{l-1} \varepsilon_{ks}^{h} \frac{t_s}{p_s} = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda},$$

где $S_{ks} = \partial h_s / \partial p_k$ — коэффициент замены Слуцкого ($S_{sk} = S_{ks}$), а

$$\varepsilon_{ks}^{h} = -\frac{\partial h_k}{\partial p_s} \frac{p_s}{x_k} \text{ —}$$

эластичность хиксианского спроса на $k$-е по цене $s$-го блага.

Взяв полный дифференциал от хиксианского спроса $h_k(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}, u)$, получим, что изменение спроса за счет эффекта замены равно

$$dh_k = \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_k}{\partial p_s} dt_s$$

В случае, когда налоги малы ($dt_k \approx t_k$), можно воспользоваться полученным условием оптимальности:

$$dh_k = \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_k}{\partial p_s} dt_s \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} x_k$$

откуда

$$\frac{dh_k}{x_k} \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}.$$

Т.е. следствием введения малых оптимальных налогов является сокращение спроса за счет эффекта замены на все облагаемые блага в одинаковой пропорции. Поскольку в квазилинейной экономике эффект дохода равен нулю для всех благ, кроме последнего, то $dh_k = dx_k$ и

$$\frac{dx_k}{x_k} \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}.$$

В случае гомотетичных предпочтений эта характеристика тоже имеет место, поскольку изменение спроса на отдельное благо за счет эффекта дохода пропорционально величине спроса на это благо.

Пусть в экономике имеется 3 блага ($l = 3$), и третье благо (досуг) не облагается налогом. Тогда

$$\varepsilon_{11}^{h} \tau_1 + \varepsilon_{12}^{h} \tau_2 = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda},$$

$$\varepsilon_{21}^{h}\tau_1+\varepsilon_{22}^{h}\tau_2=-\frac{\lambda-\alpha}{\lambda},$$

где $\tau_k=t_k/p_k$ относительные ставки налогов. Отсюда

$$\varepsilon_{11}^{h}\frac{\tau_1}{\tau_2}+\varepsilon_{12}^{h}=\varepsilon_{21}^{h}\frac{\tau_1}{\tau_2}+\varepsilon_{22}^{h}$$

или

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{\varepsilon_{12}^{h}-\varepsilon_{22}^{h}}{\varepsilon_{21}^{h}-\varepsilon_{11}^{h}}.$$

Из однородности хиксианской функции спроса, —

$$S_{11}p_1+S_{12}p_2+S_{13}p_3=0,$$

$$S_{21}p_1+S_{22}p_2+S_{23}p_3=0, \text{—}$$

следует, что $-\varepsilon_{11}^{h}=\varepsilon_{12}^{h}+\varepsilon_{13}^{h}$ и $-\varepsilon_{22}^{h}=\varepsilon_{21}^{h}+\varepsilon_{23}^{h}$.

Окончательно получаем

$$\frac{t_1/p_1}{t_2/p_2}=\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{\varepsilon_{23}^{h}+\varepsilon_{21}^{h}+\varepsilon_{12}^{h}}{\varepsilon_{13}^{h}+\varepsilon_{21}^{h}+\varepsilon_{12}^{h}}.$$

Эту формулу можно проинтерпретировать в том смысле, что отношение ставок двух облагаемых налогом благ зависит от перекрестных эластичностей этих благ по цене 3-го блага. В отсутствии возможности облагать третье благо, в оптимуме второго ранга приходится облагать комплементарные ему: если 2-е благо «в большей степени является комплементарным для 3-го, чем 1-е», в том смысле что $\varepsilon_{23}^{h}<\varepsilon_{13}^{h}$, то относительная ставка налога на него должна быть выше: $t_1/p_1>t_2/p_2$.

### Задачи

16. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Потребитель облагается оптимальными налогами на потребление (на единицу товара), и известно, что ставка налога на первый товар равна $t_1=1$. Каким должен быть налог на второй товар?

17. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Потребитель облагается оптимальными налогами на потребление (на единицу товара), и известно, что ставки налога равны $t_1=1$ и $t_2=2$. Чему равно отношение рыночных цен $p_1/p_2$?

18. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Из-за введения оптимальных налогов на потребление (на единицу товара) потребление обоих благ упало в $2$ раза. Какие налоги были установлены?

19. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Результат введения налогов на потребление (на единицу то-

вара) оказался таким же, как если бы потребителя обложили подушным налогом размером $T$. Чему было равно отношение ставок налогов $t_1/t_2$?

20. Покажите, что если в модели оптимального налогообложения «малого» потребителя функция полезности не дифференцируема, оптимальность может достигаться и при неуниформных налогах.

21. Приведите пример оптимального налогообложения «малого» потребителя, когда малые налоги приводят к сокращению спроса на блага в *разных* пропорциях.

# 8. Экстерналии

Приведенные теоремы благосостояния выясняют оптимальность «классических» (совершенных) рынков. Если ослабить условия этих теорем, то рынок без координации или регулирования может иметь неэффективные равновесия. В частности, в мире Вальраса взаимовлияния экономических субъектов происходят через посредство рынка (цены благ и доходы). Если же этого не происходит, то рынок может быть несовершенным.

В этой главе мы рассмотрим модели ситуаций, когда существуют влияния экономических субъектов друг на друга, которые по тем или иным причинам не опосредуются рынком (так называемые **внешние влияния** или **экстерналии**).

## Модель экономики с экстерналиями

Описание экономики с экстерналиями совпадает с соответствующим описанием совершенного рынка. Единственное отличие заключается в том, что аргументами функций полезности и производственных функций являются, вообще говоря, объемы потребления и производства благ всеми экономическими субъектами.

Формально внешние влияния (экстерналии) мы вводим в модели, предполагая, что функции полезности $u_i$ и/или допустимые множества $X_i$ потребителей зависят от решений всех других участников:

$$u_i = u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}) \text{ и } X_i = X_i(\boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y})$$

(мы второй случай далее не рассматриваем). Здесь, как и ранее, $\boldsymbol{x}$ —вектор объемов потребления, а $\boldsymbol{y}$ – вектор объемов производства. Точно также мы предполагаем, что производственные множества $Y_j$ фирм зависят от решений других участников: $Y_j = Y_j(\boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x})$; производственные функции с учетом этой зависимости приобретают вид

$$g_j = g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}).$$

**Определение 1.**

Если для некоторого потребителя $i \neq i^*$ его функция полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ зависит от $x_{i^*k}$ нетривиальным образом (то есть не является константой по $x_{i^*k}$), то говорят, что потребление потребителем $i^*$ блага $k$ оказывает **внешнее влияние** на $i$-го потребителя. Соответствующая переменная $x_{i^*k}$ называется **экстерналией**. Точно так же потребление потребителем $i^*$ блага $k$ оказывает внешнее влияние на $j$-го производителя, если $g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ нетривиальным образом зависит от $x_{i^*k}$; производство производителем $j^*$ блага $k$ оказывает внешнее влияние на $i$-го потребителя, если $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ нетривиальным образом зависит от $y_{j^*k}$; производство производителем $j^*$ блага $k$ оказывает внешнее влияние на влияние на производителя $j \neq j^*$, если $g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ нетривиальным образом зависит от $y_{j^*k}$.

Для каждого потребителя $i$ через $E_i$ обозначим множество благ, таких что их потребление этим потребителем оказывает внешнее влияние хотя бы на одного потребителя или производителя[108]. Соответственно, для каждого производителя $j$ через $E_j$ обозначим множество благ, таких что их производство этим производителем оказывает внешнее влияние хотя бы на одного потребителя или производителя.

---

[108] Отметим очевидную связь множеств $E_i^I$ и $E_i^J$ с множеством $E_i$.

Если все множества $E_i$ и $E_j$ пусты, то модель экономики с экстерналиями совпадает с классической моделью.

В зависимости от характера оказываемого ими влияния различают положительные и отрицательные экстерналии (хотя такая классификация не является полной).

**Отрицательными внешними влияниями** являются, например, громкая музыка, курение, загрязнение окружающей среды. Мы будем считать экстерналии отрицательными, если функция полезности (производственная функция) по ним убывает. Для дифференцируемых функций отрицательными можно называть экстерналии, для которых соответствующие производные отрицательны.

Есть и примеры **положительных внешних влияний**. Классический пример положительных экстерналий — расположенные рядом сад и пасека: пчелы опыляют фруктовые деревья, что приводит к тому, что садовод собирает больший урожай; пчеловод же получает больше меда. В определенном смысле общественные блага, которым посвящена следующая глава — это частный случай экстерналий. Положительные экстерналии формально определяются по аналогии с отрицательными (возрастание функции, положительность производных).

## Проблема экстерналий

Если участники ситуации с экстерналиями способны без издержек измерять уровень влияний, устанавливать, охранять и контролировать права собственности на них (право оказывать влияния либо право не подвергаться влиянию, или др.), способны к переговорам, то обычно они достигают Парето-оптимального соглашения по координированию экстерналий (см. «теорему Коуза» ниже). В противоположном случае часто возникает **«фиаско рынка»**, то есть неоптимальность по Парето возникающего некоординируемого равновесия. В простых ситуациях (например, частного равновесия) это «фиаско» проявляется в **избыточности** деятельности, порождающей экстерналии, в случае отрицательных экстерналий; при положительных же влияниях она обычно недостаточна по сравнению с оптимальными.

Чтобы пояснить этот эффект рассмотрим сначала пример *частного* равновесия[109] без координации экстерналий.

**Пример 1. («Трагедия общин»)[110]**.

Пусть каждый из $m$ фермеров $i \in \{1, ..., m\}$ выбирает размер своего стада коров $y_i \geqslant 0$. Для его выпаса используется общественное пастбище, со свободным доступом на него коров, принадлежащих данным фермерам. Все коровы одинаковы, и одна корова дает $\varphi$ молока, причем это количество зависит от размера всего стада $Y = \sum_i y_i$, т.е. $\varphi = \varphi(Y)$. Если фермер имеет $y_i$ коров, то он получает от них $y_i \varphi(Y)$ молока.

В дальнейшем нам удобнее пользоваться функцией $f(Y) = Y\varphi(Y)$, выражающей зависимость общего надоя молока со всего стада как функцию от общего числа коров. Предполагается, что $f(0) = 0$, $f'(.)$ положительна и убывает. Убывание $f'(.)$ что отражает падающую эффективность (истощение луга). Пусть цена молока равна $p$, стоимость одной коровы равна $c$, тогда индивидуальная прибыль $i$-го участника при данных стратегиях $\boldsymbol{y}_{-i}$ прочих участников равна

---

[109] Это означает в данном случае, что участники не влияют на цены: они «малы» относительно экономики в целом.

[110] См. William Forster Lloyd, *Two Lectures on the Checks to Population*, 1833; Garrett Hardin, "The Tragedy of the Commons," *Science*, New Series, **162** (No. 3859, Dec. 13, 1968), 1243-1248.

$$\pi_i(y_i, \boldsymbol{y}_{-i}) = p\, y_i \varphi(y_i + \sum_{j\neq i} y_j) - c y_i =$$
$$= p \frac{y_i}{y_i + \sum_{j\neq i} y_j} f(y_i + \sum_{j\neq i} y_j) - c y_i.$$

Равновесие при свободном использовании луга — это равновесие по Нэшу соответствующей игры, т.е. набор стратегий $\bar{y}_i$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\bar{y}_i \in \operatorname{argmax}_{y_i} \pi_i(y_i, \bar{\boldsymbol{y}}_{-i}).$$

Если же вести выпас как единое предприятие, то оптимальным будет общий размер стада $\hat{Y}$, максимизирующий совокупную прибыль от выпаса

$$\hat{Y} = \operatorname{argmax}_Y \{p f(Y) - cY\}.$$

Предположим, что $m > 1$, и $\{\bar{y}_i\}$ и $\hat{Y}$ существуют.[111] Тогда

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i > \hat{Y},$$

т.е. свободный доступ к общинному пастбищу приводит к избыточному размеру стада.[112]

Действительно, условия первого порядка для внутреннего (в смысле $\bar{y}_i > 0\ \forall i$) равновесия по Нэшу имеют вид

$$p \cdot \left( \frac{\bar{Y} - \bar{y}_i}{\bar{Y}^2} f(\bar{Y}) + \frac{\bar{y}_i}{\bar{Y}} f'(\bar{Y}) \right) = c,$$

суммируя которые, получаем

$$p \cdot \left( \frac{m-1}{\bar{Y}} f(\bar{Y}) + f'(\bar{Y}) \right) = mc.$$

С другой стороны, условия первого порядка для оптимального размера общественного стада $\hat{Y}$ (при $\hat{Y} > 0$) имеет вид

$$p f'(\hat{Y}) = c.$$

Преобразуя эти два соотношения, получаем

$$m(f'(\hat{Y}) - f'(\bar{Y})) = (m-1)\left( \frac{f(\bar{Y})}{\bar{Y}} - f'(\bar{Y}) \right) > 0.$$[113]

Поскольку $f'(\cdot)$ убывает, то $\bar{Y} > \hat{Y}$.

Если, например $f(Y) = \sqrt{Y}$ и $c = 1$, то, как легко проверить,

$$\bar{Y} = p^2 \left(1 - \frac{1}{2m}\right)^2,$$

в то время как

---

[111] Установить условия существования и провести доказательство существования предоставляется читателю. Анализ аналогичных моделей приведен, например, в главах, посвященных монопольным и олигопольным рынкам.

[112] Английский термин *congestion* — перегруженность, чрезмерно интенсивное использование.

[113] Неравенство следует из известного факта, что средняя производительность больше предельной, если производственная функция вогнута и равна нулю при нулевых затратах.

$$\hat{Y}=\frac{p^2}{4}.$$

Поскольку $\left(1-\frac{1}{2m}\right)^2>\frac{1}{4}$ при $m>1$, то $\bar{Y}>\hat{Y}$.

Неоптимальность равновесия объясняется тем, что когда фермер максимизирует свою прибыль, он не учитывает своего влияния на прибыль других. Воспользовавшись тем, что при $y_i>0$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial y_j}=p\frac{y_i}{Y}\left(f'(Y)-\frac{f(Y)}{Y}\right)<0\ (\forall\ i\neq j),$$

и, учитывая характеристику равновесия,

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial y_i}=0,$$

получим, что в точке равновесия выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\pi_j}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}\sum_{j=1}^{m}\pi_j<0.$$

Это означает, что фермер мог бы увеличить общую прибыль, сократив свое стадо и используя пастбище менее интенсивно.

Любое такое изменение ухудшит положение того фермера, который осуществит такую корректировку размера своего стада, хотя и улучшит положение всех остальных. Если же хотя бы двое фермеров немного уменьшат размер своего стада, то возрастет прибыль *каждого* фермера. Другими словами, такое изменение будет представлять собой строгое Парето-улучшение. Действительно, рассмотрим дифференциально малое изменение размеров стада каждого фермера:

$$(dy_1,\ \dots\ ,\ dy_m).$$

При этом

$$d\pi_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\pi_i}{\partial y_j}dy_j.$$

Если $i\neq j$, то $\partial\pi_i/\partial y_j<0$. С другой стороны в точке равновесия $\partial\pi_i/\partial y_i=0$. Таким образом, если $dy_i\leqslant 0\ \forall i$ и по крайней мере для двух фермеров неравенство строгое, то $d\pi_i>0\ \forall i$.

⇐

Продемонстрированная проблема **«избыточности»** вредных влияний носит весьма общий характер и встречается в ситуациях загрязнения среды, совместного использования всех видов общих ресурсов (дорог, мест отдыха, ...) и др.

Это же явление с обратным знаком — **«тенденция к недостаточности»** деятельности, дающей положительные внешние эффекты. Например, если стремящийся к чисто личной выгоде колхозник или член бригады получает просто долю общей прибыли и не контролирует, то его усилия, при естественных предположениях, окажутся ниже оптимальных.

Как можно видеть из рассмотренного примера, ключевая причина неоптимальности в ситуациях с экстерналиями — игнорирование при нескоординированных индивидуальных решениях выгоды или вреда, создаваемых для других субъектов. Ниже мы рассмотрим различные способы коррекции неоптимальных равновесий. В частности, фиаско рынка с «общим благом» исчезнет, если некоторым образом распределить права собственности. Например, крестьяне могут договориться об изначальных квотах выпаса (например, поровну от оптимального объема), а затем, при необходимости, продавать и покупать квоты друг у друга.

## Задачи

1. Два охотника охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой $i$-м охотником ($y_i$) зависит от его усилий ($x_i$) и общего количества дичи в лесу ($z$) как $y_i=x_i z$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $z=6-x_1-x_2$. Охотники стремятся добыть как можно больше дичи. Сравните результаты некоординированного поведения и оптимум Парето.

2. Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании ($y_i$) зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает ($x_i$), составляя $x_i/(1+x_1+x_2)$ долю от общих запасов нефти в месторождении ($1000$ баррелей). Рыночная цена нефти — $15$ песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3+x_i)$ песо. Каков будет результат «эгоистичной погони за прибылью»? Покажите, что месторождение будет эксплуатироваться слишком интенсивно.

3. («Теорема о плохом колхозе») Пусть доход $y_\Sigma$ артели («колхоза») есть простая сумма результатов $y_i \geqslant 0$, создаваемых усилиями отдельных участников $i=1, ..., n$. Доход распределяется поровну. Функция полезности $u_i(r_i, y_i)$ каждого участника возрастает по его доходу $r_i=y_\Sigma/n$, и убывает по его усилиям $y_i$. Показать, что если хотя бы один участник в равновесии Нэша осуществляет усилия ($\exists i\colon y_i>0$), то оно не Парето-оптимально. Предложите Парето-улучшение.

4. [MWG] Группа состоит из $m$ студентов. Каждый $i$-й студент учится по $h_i$ часов в неделю. Эти усилия уменьшают его уровень полезности на величину $h_i^2/2$. В то же время это дает студенту добавку к стипендии, так что его полезность увеличивается на величину $\phi(h_i/\bar{h})$, где $\bar{h}$ — среднее количество часов, которое посвящают учебе студенты данной группы, а $\phi(\cdot)$ — дифференцируемая строго возрастающая вогнутая функция. Найдите характеристику внутреннего равновесия (по Нэшу). Сравните с оптимальным по Парето исходом. Дайте интерпретацию.

5. Каждый год $n$ рыбаков ловят в озере рыбу. Ситуация начинается в году $t=1$ и продолжается бесконечно. Количество рыбы на начало $t$-го года составляет $y_t$. За год $i$-й рыбак вылавливает $x_{it}/(\sum_i x_{it}+1)$ долю от общего количества рыбы $y_t$, где $x_{it}$ — его издержки на лов рыбы в году $t$. Цена на рыбу постоянна и равна $p$. Каждый рыбак максимизирует дисконтированную прибыль

$$\pi_i=\sum_{t=1}^{\infty}\pi_{it}\delta^{t-1} \ (0<\delta<1).$$

В начале года количество рыбы в два раза больше оставшегося к концу предыдущего года.

(1) Пусть каждый рыбак выбирает постоянную стратегию $x_i=x_{it}$. Покажите, что вылов рыбы будет больше оптимального.

(2) Как зависит выбор $x_i$ и динамика рыбных запасов от цены на рыбу и дисконтирующего множителя $\delta$?

(3) Предположим, что рыбаки остаются на озере только по одному году, и каждый год приезжают новые $n$ рыбаков. Как это повлияет на ситуацию?

## Свойства экономики с экстерналиями. Теорема о неэффективности

Не представляет труда переформулировать для экономики с экстерналиями понятие Парето-эффективности. По аналогии с классической моделью доказывается утверждение, характеризующее Парето-оптимальные состояния экономики с экстерналиями: допустимое состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является Парето-оптимумом тогда и только тогда, когда оно является решением следующих $m$ задач ($i_0=1,\ldots,m$):

$$u_{i_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \max_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant \hat{u}_i = u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \ \forall i \in I, i \neq i_0,$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i \ \forall i \in I,$$

$$g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0 \ \forall j \in J,$$

$$\sum_{i\in I}(x_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j\in J} y_{jk} \ \forall k \in K.$$

На основе этого свойства Парето-оптимального состояния можно получить его дифференциальную характеристику. Лагранжиан этой задачи для некоторого $i_0$ имеет вид:

$$L = \sum_{i\in I}\lambda_i u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \sum_{k\in K}\sigma_k\left(\sum\nolimits_j y_{jk} - \sum\nolimits_i (x_{ik} - \omega_{ik})\right)$$

Условия первого порядка для внутренних решений имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ik}} = \sum_{s\in I}\lambda_s \frac{\partial u_s(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} + \sum_{j\in J}\mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0 \ \ \forall i, k, \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}} = \sum_{i\in I}\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial y_{jk}} + \sum_{s\in J}\mu_s \frac{\partial g_s(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \ \forall j, k. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что существует благо $k_0$, обладающее следующими свойствами:

- благо $k_0$ не порождает внешние влияния, т.е.

$$k_0 \notin E_i \ \forall i \in I \text{ и } k_0 \notin E_j \ \forall j \in J,$$

- в рассматриваемом состоянии экономики (⓪)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik_0}} > 0 \ \forall i \in I \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk_0}} < 0 \ \forall j \in J.$$

Такое благо может играть роль естественной единицы счета для экономики[114].

Если в рассматриваемом оптимуме Парето существует подобное благо, то, как можно проверить, выполнены условия регулярности теоремы Куна—Таккера, и можно считать, что $\lambda_{i_0} = 1$ (для всех $i_0 = 1, \ldots, m$). Это позволяет исключить из полученных соотношений множители Лагранжа и представить дифференциальную характеристику в терминах предельных норм замещения.

---

[114] Естественно интерпретировать это благо как время потребителей, которое они могут использовать как рабочее время и как досуг.

Из условий первого порядка для блага $k_0$ получим

$$\lambda_i = \frac{\sigma_{k_0}}{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})/\partial x_{ik_0}} \; \forall i \in I,$$

$$\mu_j = -\frac{\sigma_{k_0}}{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})/\partial y_{jk_0}} \; \forall j \in J.$$

Кроме того, для потребителя $i_0$ соотношение $\partial L/\partial x_{i_0k_0} = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial u_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{i_0k_0}} = \sigma_{k_0}.$$

Следовательно, $\sigma_{k_0} > 0$. (Таким образом, множители Лагранжа $\lambda_i$ и $\mu_j$ все положительны). Произведя подстановку, получим следующую дифференциальную характеристику Парето-границы в экономике с экстерналиями:

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq i} \frac{\partial u_s/\partial x_{ik}}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{ik}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} - \sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}. \qquad (8)$$

Из (7) в частности, для каждой пары потребителей, $i_1$ и $i_2$, и любого блага $k$ выполнено

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial x_{i_1k}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{i_1k}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial x_{i_2k}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{i_2k}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}. \qquad (9)$$

Аналогичное соотношение справедливо для любой пары экономических субъектов, потребителей или производителей.

Сравним полученную дифференциальную характеристику Парето-оптимальных состояний для экономики с экстерналиями с дифференциальной характеристикой рыночного равновесия

$$(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$$

в этой экономике (в предположении, что такое равновесие существует). Как и выше, будем предполагать, что существует благо $k_0$, такое что выполнены условия (©).

Здесь мы делаем обычное для моделей с экстерналиями предположение, что экономические субъекты считают экстерналии, которые на них влияют, фиксированными (экзогенными, величина которых не зависит от их решений). Таким образом, экономический субъект максимизирует свою целевую функцию только по «своим» переменным.

Так, $i$-й потребитель максимизирует полезность по своему потребительскому набору $\boldsymbol{x}_i$. Задача потребителя имеет вид:

$$\begin{gathered} u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}) \to \max\nolimits_{\boldsymbol{x}_i} \\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant \beta_i, \\ \boldsymbol{x}_i \in X_i. \end{gathered}$$

А $j$-й производитель максимизирует прибыль, выбирая объем производства $\boldsymbol{y}_j$, т.е. решает следующую задачу:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max\nolimits_{\boldsymbol{y}_j} \\ g_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Как несложно показать, цена блага $k_0$ во внутреннем равновесии положительна. Дифференциальная характеристика рыночного равновесия имеет привычный вид:

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}, \ \forall i \in I,$$

$$\frac{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial y_{jk_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}, \ \forall j \in J,$$

где $k$ — произвольное благо.

Отсюда следует, что для любой пары потребителей, $i_1$ и $i_2$, выполнено

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k_0}} = \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}}. \qquad (10)$$

Сравнивая дифференциальные характеристики равновесия и Парето оптимума, мы видим, что левая часть соотношения (10) является одним из слагаемых левой части соотношения (9). То же самое можно сказать про правые части. Из общих соображений трудно ожидать, что одно из этих соотношений влечет за собой другое. Вполне может оказаться, что эти две дифференциальные характеристики несовместны. Несовместность дифференциальных характеристик означала бы, что справедливо утверждение, противоположное по смыслу теоремам благосостояния, то есть аналоги теорем благосостояния для такой экономики были бы неверны.

С другой стороны, сложно выявить достаточно общие условия, которые гарантировали бы, что дифференциальные характеристики рыночного равновесия и Парето-оптимума несовместны в экономике с экстерналиями. Это связано с тем, что деятельность любого экономического субъекта в общем случае может влиять на любого другого экономического субъекта, и структура взаимосвязей в экономике с экстерналиями может быть слишком сложной, чтобы позволить делать однозначные выводы. По-видимому, нельзя обойтись без того, чтобы предположить некоторого рода «регулярное» поведение производных по экстерналиям. Следующая теорема использует один из возможных наборов таких предположений (несомненно, эти предположения можно было бы ослабить).

**Теорема 1**.

Пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — допустимое состояние экономики с экстерналиями такое, что $\boldsymbol{x}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ $\forall i$, функции полезности и производственные функции дифференцируемы. Пусть, кроме того,

- существует благо $k_0$, для которого выполнены условия (⓪);
- все экстерналии, связанные с объемом производства производителем $j^*$ блага $k^*$ ($y_{j^*k^*}$), неотрицательные в том смысле, что

$$\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial y_{j^*k^*}} \geqslant 0, \ \forall i,$$

$$\frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial y_{j^*k^*}} \geqslant 0, \ \forall j \neq j^*,$$

причем хотя бы одно неравенство строгое;

- потребление хотя бы одним потребителем $i_0$ блага $k^*$ ($x_{i_0 k^*}$) не порождает внешние влияния, т.е. $k^* \notin E_{i_0}$.

Тогда следующие два утверждения не могут быть верными одновременно:

1) Существуют цены $\boldsymbol{p}$ и распределение собственности, такие что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — рыночное равновесие этой экономики.

2) Состояние $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — Парето-оптимум этой экономики.

***Доказательство.***

Пусть рассматриваемое состояние является Парето-оптимальным. Тогда для $k=k^*$ и $j=j^*$ выполняется соотношение (8). Поскольку мы предположили, что экстерналии, связанные с $y_{j^*k^*}$, положительные, и, кроме того, производные, связанные с благом $k_0$, $\partial u_i/\partial x_{ik_0}$ и $\partial g_j/\partial y_{jk_0}$ положительны и отрицательны соответственно, то сумма «экстернальных слагаемых» в левой части уравнения (8) больше нуля. Это означает, что

$$\frac{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k_0}}<\frac{\sigma_{k^*}}{\sigma_{k_0}}.$$

Кроме того, для $k=k^*$ и $i=i_0$ в уравнении (7) по предположению нет слагаемых, связанных с экстерналиями, т.е. его можно записать в виде

$$\frac{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k_0}}=\frac{\sigma_{k^*}}{\sigma_{k_0}}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k_0}}<\frac{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k_0}}.$$

С другой стороны, если бы рассматриваемое состояние было равновесием, то в нем то же самое соотношение должно было бы выполняться как равенство:

$$\frac{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/\partial y_{j^*k_0}}=\frac{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial x_{i_0k_0}}.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение о том, что $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ не может быть одновременно равновесием и Парето-оптимумом.

■

**Замечание**.

В данной теореме мы предположили, что экстерналии *положительны*, связаны с *производством*, и существует *потребитель*, потребление которым того же блага не создает экстерналий. Все эти три предположения можно изменить, то есть рассмотреть *отрицательные* экстерналии и/или экстерналии, связанные с *потреблением*, и/или предположить существование *производителя*, производство которым того же блага не создает экстерналий. Теорема при этом остается верной. Доказательство проводится аналогично.

**Замечание**.

Хотя теорема одна, но она противоположна *обеим* теоремам благосостояния. Ее можно переформулировать двумя способами:

1) Равновесие в экономике с экстерналиями не может быть Парето-оптимальным.

2) Парето-оптимум в экономике с экстерналиями нельзя реализовать как рыночное равновесие (ни при каких ценах и распределении доходов).

Неоптимальность равновесия $(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$ в условиях Теоремы 1 можно подтвердить также, подобрав Парето-улучшение — другое допустимое состояние экономики, $(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}})$, которое доминирует по Парето состояние $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$. При этом Парето-улучшение $(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}})$ мы можем подобрать так, что в нем производство положительных экстерналий $y_{j^*k^*}$ строго больше, чем в рассматриваемом равновесии.

Если же все экстерналии связанные с некоторой переменной $y_{j^*k^*}$ отрицательные, то аналогичным образом можно подобрать Парето-улучшение так, что в нем производство экстерналий строго меньше, чем в рассматриваемом равновесии. Верны и аналогичные утверждение для благ, вызывающих экстерналии в потреблении. Доказательство этих утверждений мы опускаем, проиллюстрировав их для конкретных примеров экономик с экстерналиями.

Проиллюстрируем проведенный анализ частным случаем экономики с экстерналиями.

**Пример 2**. [Маленво]( Общее равновесие; экстерналии в производстве)

Рассмотрим экономику с 3 товарами, 1 (репрезентативным) потребителем и 2 производителями. Производитель $j=1,2$ производит только $j$-ый продукт, используя единственный производственный фактор — труд. Будем обозначать объемы производства $y_1$ и $y_2$, а затраты труда — $a_1$ и $a_2$ соответственно.[115] Будем предполагать также, что технологии представимы явными производственными функциями следующего вида:

$$y_1 \leqslant f_1(a_1, y_2),$$

$$y_2 \leqslant f_2(a_2, y_1).$$

то есть выпуск каждого блага при тех же затратах труда зависят от выпуска другого блага, что означают имеют место экстерналии.

Предпочтения потребителя заданы функцией полезности $u(x_1, x_2, x_3)$, зависящей от объемов потребления двух производимых в данной экономике благ, $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, и досуга $x_3 \geqslant 0$. Потребитель обладает только запасом $\omega$ 3-го блага (времени).

Функция полезности и производственные функции в дифференцируемы. Кроме того, производные этих функций везде имеют «естественные» знаки, а именно:

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_2} > 0, \frac{\partial f_1}{\partial a_1} > 0, \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} > 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} > 0.$$

Балансовые ограничения в рассматриваемой экономике имеют вид:

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$a_1 + a_2 + x_3 = \omega.$$

Парето-оптимальные состояния данной экономики[116],

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{a}_1, \hat{a}_2),$$

должны быть решениями следующей задачи:[117]

$$u(y_1, y_2, \omega - a_1 - a_2) \to \max\nolimits_{(y_1,\, y_2,\, a_1,\, a_2)}$$

$$y_1 \leqslant f_1(a_1, y_2),$$

$$y_2 \leqslant f_2(a_2, y_1),$$

---

[115] Заметим, что мы здесь отошли от стандартного представления производства в терминах чистых выпусков и несколько упростили обозначения, т.е. перешли к новым переменным: $y_j = y_{jj}$ $(j=1,2)$, $a_j = -y_{j3}$.

[116] Скорее всего, для конкретных функций в рассматриваемой экономике будет только одно Парето-оптимальное состояние. Но это нам в данном случае не важно.

[117] Данная задача получена на основе конкретизации для данной экономики характеристики Парето-оптимума и замены переменных.

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,$$

$$a_1 + a_2 \leqslant \omega.$$

Задача, характеризующая Парето-оптимум, здесь одна, т.к. потребитель один. Лагранжиан этой задачи имеет вид:

$$L(y_1, y_2, a_1, a_2, \mu_1, \mu_2) =$$

$$= u(y_1, y_2, \omega - a_1 - a_2) + \mu_1(f_1(a_1, y_2) - y_1) + \mu_2(f_2(a_2, y_1) - y_2)$$

Будем предполагать, что решения этой задачи внутренние. Тогда Парето-оптимальное состояние можно охарактеризовать следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \mu_1 + \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} - \mu_2 = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_3} + \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_3} + \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = 0$$

Поскольку предельный продукт труда положителен, можно записать множители Лагранжа как

$$\mu_1 = \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_1 / \partial a_1},\ \mu_2 = \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_2 / \partial a_2}$$

и получить следующую характеристику Парето-оптимума:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_1 / \partial a_1} + \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_2 / \partial a_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_1 / \partial a_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} - \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_2 / \partial a_2} = 0$$

Или, разделив на положительную предельную полезность досуга $\partial u / \partial x_3$,

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1 / \partial a_1} - \frac{\partial f_2 / \partial y_1}{\partial f_2 / \partial a_2},$$

$$\frac{\partial u / \partial x_2}{\partial u / \partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2 / \partial a_2} - \frac{\partial f_1 / \partial y_2}{\partial f_1 / \partial a_1}.$$

Теперь охарактеризуем рыночные равновесия в данной экономике, при которых все блага потребляются в положительных количествах (внутренние равновесия). Пусть

$$(p_1, p_2, p_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \text{ —}$$

равновесие. Выпуск $\bar{y}_j$ и затраты труда $\bar{a}_j$ являются решением следующей задачи (максимизации прибыли $j$-го производителя):

$$\pi_j = p_j f_j(a_j, \bar{y}_{-j}) - p_3 a_j \to \max_{a_j}.$$

Поэтому в равновесии

$$\frac{1}{\partial f_1 / \partial a_1} = \frac{p_1}{p_3} \text{ и } \frac{1}{\partial f_2 / \partial a_2} = \frac{p_2}{p_3},$$

то есть предельные нормы трансформации равны отношениям цен.

С другой стороны, функция Лагранжа для задачи потребителя имеет вид

$$L=u(x_1,x_2,x_3)+\lambda(\beta-(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)).$$

Дифференцируя ее по $x_1$, $x_2$ и $x_3$ и упрощая полученные условия первого порядка, получим обычную характеристику потребительского набора $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3)$ — равенство отношения предельных полезностей отношению цен:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_1}{p_3} \text{ и } \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_2}{p_3}.$$

Поэтому в равновесии

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}.$$

Если хотя бы одна из производных $\partial f_1/\partial y_2$ и $\partial f_2/\partial y_1$, характеризующих предельный эффект внешнего влияния, в состоянии равновесия, не равна нулю, то сравнивая дифференциальные характеристики, мы можем сделать вывод, что равновесие не может быть Парето-оптимальным, и, наоборот, Парето-оптимум невозможно реализовать как равновесие.

Величины $\dfrac{\partial f_j/\partial y_{-j}}{\partial f_j/\partial a_j}$, на которые отличаются характеристики равновесия и Парето-оптимума, показывают (в случае положительных экстерналий), сколько труда можно «сэкономить» при производстве данного блага при увеличении на «малую единицу» производства другого блага. Рассчитывая оптимальный объем затрат труда, производитель не учитывает этот эффект.

Из сопоставления ее с характеристикой равновесия можно заключить:

При выполнении условия $\partial f_j/\partial y_{-j}=0$ в состоянии рыночного равновесия характеристика равновесия будет иметь такой же вид, как и характеристика Парето-оптимального состояния. Но поскольку обе эти характеристики представляют необходимые условия, из этого факта нельзя заключить без дополнительных предположений, что равновесие Парето-оптимально. Стандартный подход в доказательстве оптимальности рыночного равновесия опирается предположение о вогнутости производственных функций и функции полезности. Однако предположение о вогнутости производственных функций по «чужой» переменной (экстерналиям) представляется произвольным и ему нельзя дать столь же естественной интерпретации, как вогнутости по «своей» переменной.

Проиллюстрируем утверждение о неоптимальности производства благ в данном примере, указав в явном виде Парето-улучшение для равновесного состояния. Построим это в дифференциалах — малый допустимый сдвиг

$$(dx_1,dx_2,dx_3,dy_1,dy_2,da_1,da_2).$$

из точки равновесия, который бы повышал полезность потребителя.

Чтобы искомый сдвиг был допустимым, он не должен нарушать балансовые и производственные ограничения. Соответствующие условия получаем дифференцированием этих ограничений:

$$dy_1=dx_1,$$

$$dy_2=dx_2,$$

$$da_1+da_2+dx_3=0.$$

$$dy_1=\frac{\partial f_1}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2,$$

$$dy_2=\frac{\partial f_2}{\partial a_2}da_2+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1.$$

Отсюда получаем

$$dx_3=-da_1-da_2=$$

$$=-\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1}\left(dy_1-\frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2\right)-\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}\left(dy_2-\frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1\right),$$

Полезность потребителя изменится на величину

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x})\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x})\,dx_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}(\bar{x})\,dx_3.$$

Подставим $dx_k$, выраженные через $dy_j$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x})\,dy_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x})\,dy_2-$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_3}(\bar{x})\left(\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1}\left(dy_1-\frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2\right)+\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}\left(dy_2-\frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x_3}\left(\left(\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}-\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1}+\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2}\right)dy_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}-\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}+\frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}\right)dy_2\right).$$

Учитывая дифференциальную характеристику равновесия, получим, что

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2}dy_1+\frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}dy_2\right).$$

Если хотя бы одна из производных $\partial f_1/\partial y_2$ и $\partial f_2/\partial y_1$ не равна нулю, то можно подобрать изменения объемов производства $dy_1$ и $dy_2$ так, что полезность потребителя увеличится ($du>0$). Это означает, что соответствующее изменение объемов производства определяет Парето-улучшение. Так, если, например, $\partial f_1/\partial y_2=0$ (случай одностороннего внешнего влияния), то если $\partial f_2/\partial y_1>0$ (случай положительных внешних влияний), то следует $dy_1>0$, т.е. локальное Парето-улучшение связано с увеличением производства блага, вызывающего положительные экстерналии в производстве другого блага. Это можно интерпретировать как локально недостаточное производство положительных экстерналий.

Остается открытым вопрос: является ли производство в равновесии недостаточным по сравнению также и с Парето-оптимальным состоянием экономики, т.е. верно ли $\bar{y}_1<\hat{y}_1$? Ответить на этот вопрос можно только при дополнительных предположениях относительно рассматриваемой экономики.

Покажем, что предположение о том, что равновесие внутреннее, существенно для истинности утверждения Теоремы 1.

Пусть в равновесии $\bar{x}_3=0$. Тогда в равновесии выполнено следующее соотношение

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}=\frac{\partial f_2/\partial a_2}{\partial f_1/\partial a_1}.$$

В оптимальном состоянии

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}=\frac{\dfrac{1}{\partial f_1/\partial a_1}-\dfrac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2}}{\dfrac{1}{\partial f_2/\partial a_2}-\dfrac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}}.$$

Эти две характеристики совпадут, если

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1}\right)^2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial a_2}\right)^2\frac{\partial f_1}{\partial y_2}$$

Нетрудно придумать конкретные функции, для которых данная характеристика будет достаточным условием Парето-оптимальности, так что равновесие окажется Парето-оптимальным.

⇐

Подчеркнем, что и условие дифференцируемости функций полезности и производственных функций существенны для справедливости Теоремы 1.

Существуют также и опровергающие примеры с взаимокомпенсацией экстерналий, когда часть экстерналий, связанных с некоторой переменной положительные, а часть отрицательные.

Возможная неэффективность рыночного равновесия в экономике с экстерналиями часто служит обоснованием государственного регулирования экономики. Существуют два основных способа такого регулирования: прямое — количественные ограничения на производство и потребление благ, вызывающих экстерналии, и непрямое — налогообложение таких благ. Рассмотрим эти способы подробнее.

## Задачи

6. При доказательстве неоптимальности нерегулируемого равновесия в экономике с экстерналиями условие внутренности равновесия используется для того, чтобы ...

7. Пусть в экономике обмена есть два потребителя и два блага. Функция полезности второго потребителя зависит от уровня собственного потребления, а также от уровня полезности первого потребителя. Найдите и сопоставьте дифференциальные характеристики внутреннего равновесия и внутреннего Парето-оптимума.

8. Для следующих трех экономик

- запишите дифференциальную характеристику Парето-оптимума,
- запишите дифференциальную характеристику равновесия,
- предложите Парето-улучшение в дифференциалах.

(A) [Маленво] В экономике с 2 благами, 2 потребителями и 1 фирмой потребление первого блага является престижным и вызывает зависть у другого потребителя (т.е. имеют место отрицательные экстерналии, связанные с потреблением этого блага). Таким образом, функции полезности имеют вид $u(x_{11}, x_{12}, x_{12})$ и $u(x_{21}, x_{22}, x_{11})$. Технология фирмы позволяет производить из единицы второго блага единицу первого блага.

(B) В экономике с двумя благами, предпочтения потребителей $i=1,...,m$ заданы функциями полезности

$$u_i(x_i, \sum_{s=1}^{m} x_s, y_i).$$

Имеется технология, по которой из единицы блага $x$ можно произвести единицу блага $y$, и наоборот.

(C) В экономике с двумя благами, 1 потребителем и $n$ фирмами технологии фирм описываются неявными производственными функциями: $g_j(y_{j1}, y_{j2}) \geqslant 0$. Полезность потребителя зависит от суммарного объема производства 1-го блага:

$$u_i(x_1, x_2, \sum_{j=1}^{n} y_{i1}).$$

## Равновесие с квотами на экстерналии

**Определение 2**.

Назовем **квотой** ограничение на производство блага каким-либо производителем или потребление блага каким-либо потребителем вида $x_{ik} = \tilde{x}_{ik}$ или $y_{jk} = \tilde{y}_{jk}$.

В дальнейшем будем обозначать через $Q_i$ множество благ $k$, таких что на величину $x_{ik}$ их потребления $i$-м потребителем установлена квота. Аналогично будем обозначать через $Q_j$ множество благ $k$, таких что на величину $y_{jk}$ их производства $j$-м производителем установлена квота.

При наличии квот задача потребителя $i$ модифицируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}) \to \max{}_{\boldsymbol{x}_i} \\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant \beta_i. \\ x_{ik} = \tilde{x}_{ik} \, \forall k \in Q_i \\ \boldsymbol{x}_i \in X_i. \end{gathered} \tag{11}$$

Соответственно при наличии квот задача производителя $j$ имеет вид:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max{}_{\boldsymbol{y}_j} \\ y_{jk} = \tilde{y}_{jk} \, \forall k \in Q_j \\ g(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Введем также обозначение $\tilde{\boldsymbol{x}} = \{\tilde{x}_{ik} \mid k \in Q_i\}$ и $\tilde{\boldsymbol{y}} = \{\tilde{y}_{jk} \mid k \in Q_j\}$.

**Определение 3**.

Назовем $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ равновесием с квотами $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \{Q_i\}_i, \tilde{\boldsymbol{y}}, \{Q_j\}_j)$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$ ($\sum_i S_i = 0$), если

- $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя (11) при $\boldsymbol{x}_{-i} = \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$, $\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}$, ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i$$

  и квотах, определяемых $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $Q_i$;

- $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя (12) при $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}_{-j} = \bar{\boldsymbol{y}}_{-j}$, ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и квотах, определяемых $\tilde{\boldsymbol{y}}$ и $Q_j$;

- $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_{i \in I} (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk} \, \forall k \in K.$$

Для этого равновесия верен аналог второй теоремы благосостояния, т.е. утверждение о том, что Парето-оптимум экономики с экстерналиями можно реализовать как равновесие.

**Теорема 2**.

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями с $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Предположим также, что

- $\hat{x}_{ik} > 0 \ \forall i, \forall k \notin E_i$;

- функции полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ дифференцируемы по переменным $x_{ik}, k \notin E_i$; производственные функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ дифференцируемы по переменным $y_{jk}, k \notin E_j$;

- существует благо $k_0$, для которого выполнены условия (◎);

- функции $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вогнуты по переменным $x_{ik}, k \notin E_i$; функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ вогнуты по переменным $y_{jk}, k \notin E_j$.

Тогда существуют цены $\boldsymbol{p}$, множества квотируемых благ $Q_i$ и $Q_j$, квоты $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$, и трансферты $\boldsymbol{S}$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является равновесием с квотами. При этом множества квотируемых благ можно выбрать так, что $Q_i = E_i$ и $Q_j = E_j$.

***Доказательство***.

Ограничимся схемой доказательства. В предположениях теоремы выполнены условия регулярности, и можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера того, чтобы охарактеризовать Парето-оптимум $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$. В качестве цен благ возьмем множители Лагранжа для балансовых ограничений $\sigma_k$. В качестве множеств $Q_i$ и $Q_j$ квотируемых благ выберем любые множества благ, содержащие все блага из $E_i$ и $E_j$ соответственно. Квоты установим в соответствии с рассматриваемым оптимальным состоянием, т.е. $\tilde{x}_{ik} = \hat{x}_{ik} \ \forall k \in Q_i$ и $\tilde{y}_{jk} = \hat{y}_{jk} \ \forall k \in Q_j$.

Далее доказывается, что $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи (11) при данных ценах и квотах и доходах $\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Действительно, точка $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является допустимой в этой задачи и в ней выполнены условия первого порядка, что следует из выполнения условий первого порядка для оптимума Парето:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall i \ \forall k \notin E_i.$$

Условия первого порядка в данном случае являются достаточными условиями оптимальности. Аналогичным образом доказывается, что $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи (12).

Для доказательства теоремы осталось указать величины трансфертов $\boldsymbol{S}$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{S})$ является равновесием с квотами. Трансферты следует подобрать так, чтобы с их учетом доходы потребителей были равны расходам, т.е. $\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i$. Требуемыми трансфертами являются величины

$$S_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{p}\,\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{y}}_j.$$

Несложно проверить, что сумма этих величин равна нулю.

■

**Замечание**.

Включив в множество $Q_i$ ($Q_j$) все блага, по которым функция полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (соответственно, производственная функция $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$) не является вогнутой, мы получим вариант доказанной теоремы для случая невыпуклой экономики. Этот прием можно использовать и для реализации Парето-оптимума как равновесия в экономике без экстерналий.

**Замечание**.

Теорема верна и без условия дифференцируемости (2). При этом условие (3) заменяется на предположение о локальной ненасыщаемости по благам, которые не порождают экстерналий.

## Равновесие с налогами на экстерналии

В дальнейшем будем рассматривать лишь налоги с единицы экстерналии, выраженные в деньгах. Обозначим через $P_i$ множество благ $k$, потребление которых $i$-м потребителем облагается налогами. Аналогично через $P_j$ обозначим множество благ $k$, производство которых $j$-м производителем облагается налогами.

Пусть $t_{ik}$ — ставка налога на потребление блага $k$ потребителем $i$. Тогда задача $i$-го потребителя модифицируется следующим образом:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}) \to \max_{\boldsymbol{x}_i} \tag{13}$$

$$\sum_{k \notin P_i} p_k x_{ik} + \sum_{k \in P_i} (p_k + t_{ik}) x_{ik} \leqslant \beta_i$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Условия первого порядка для внутреннего решения $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ данной задачи имеют вид

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}, \bar{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k, \ \forall k \notin P_i, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}, \bar{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = \nu_i \, (p_k + t_{ik}), \ \forall k \in P_i, \tag{15}$$

где $\nu_i$ — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению.

Соответственно если $t_{jk}$ — ставка налога на производство блага $k$ производителем $j$, то задача производителя $j$ имеет вид:

$$\sum_{k \notin P_j} p_k y_{jk} + \sum_{k \in P_j} (p_k - t_{jk}) y_{jk} \to \max_{\boldsymbol{y}_j} \tag{16}$$

$$g(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

Условия первого порядка для решения $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ данной задачи имеют вид

$$\kappa_j \frac{\partial g(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{\boldsymbol{y}}_{-j}, \bar{\boldsymbol{x}})}{\partial y_{jk}} + p_k = 0, \ \forall k \notin P_j, \tag{17}$$

$$\kappa_j \frac{\partial g(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{\boldsymbol{y}}_{-j}, \bar{\boldsymbol{x}})}{\partial y_{jk}} + p_k - t_{jk} = 0, \ \forall k \in P_j, \tag{18}$$

где $\kappa_j$ — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

Введем обозначения для ставок всех налогов, существующих в экономике, $\boldsymbol{t}_I = \{t_{ik} \mid k \in P_i\}$ и $\boldsymbol{t}_J = \{t_{jk} \mid k \in P_j\}$, и рассмотрим общее равновесие с такими налогами.

**Определение 4**.

Назовем $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ равновесием с налогами $(\boldsymbol{t}_I, \{P_i\}_i, \boldsymbol{t}_J, \{P_j\}_j)$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$ экономики с экстерналиями, если

♦ $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя (13) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\, \omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i,$$

налогах, определяемых $\boldsymbol{t}_I$, $P_i$ и объемах потребления и производства других экономических субъектов $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$.

♦ $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи производителя (16) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, налогах, определяемых $\boldsymbol{t}_j$, $P_j$ и объемах производства и потребления других экономических субъектов $\bar{\boldsymbol{y}}_{-j}$, $\bar{\boldsymbol{x}}$.

♦ $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_{i\in I} (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j\in J} \bar{y}_{jk} \ \forall k.$$

♦ сумма налогов равняется сумме трансфертов

$$\sum_{i\in I} \sum_{k\in P_i} t_{ik} \bar{x}_{ik} + \sum_{j\in J} \sum_{k\in P_j} t_{jk} \bar{y}_{jk} = \sum_{i\in I} S_i.$$

Приведенное ниже утверждение представляет собой аналог второй теоремы благосостояния для равновесия с налогами на экстерналии. Оно утверждает, что (при некоторых естественных условиях) для Парето-оптимального состояния этой экономики можно найти цены благ и налоги такие, что данное Парето-оптимальное состояние окажется равновесием с налогами.

**Теорема 3.**

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями с $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Предположим также, что

- $\hat{x}_{ik} > 0 \ \forall i \ \forall k \notin E_i$;
- функции полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и производственные функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ дифференцируемы;
- существует благо $k_0$, для которого выполнены условия (⓪);
- функции $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вогнуты по $\boldsymbol{x}_i$; функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ вогнуты по переменным $\boldsymbol{y}_j$.

Тогда существуют цены $\boldsymbol{p}$, множества налогооблагаемых благ $P_i$ и $P_j$, налоги $\boldsymbol{t}_I$, $\boldsymbol{t}_J$, и трансферты $\boldsymbol{S}$, такие что $(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является равновесием с налогами. При этом множества налогооблагаемых благ можно выбрать так, что $P_i = E_i$ и $P_j = E_j$.

***Доказательство***.

Ограничимся также схемой доказательства. В качестве цены $k$-го блага $p_k$ можно взять множитель Лагранжа $\sigma_k$ для балансового ограничения. В качестве множеств $P_i$ и $P_j$ облагаемых налогами благ выберем любые множества благ, содержащие все блага из $E_i$ и $E_j$ соответственно. В качестве ставки налога $t_{ik}$, $k \in P_i$ выберем

$$t_{ik} = -\sum_{s\neq i} \lambda_s \frac{\partial u_s(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} - \sum_{j\in J} \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{ik}},$$

где $\lambda_s$ и $\mu_j$ — множители Лагранжа для задачи, характеризующей рассматриваемый оптимум Парето. Ставка налога для блага, не принадлежащего $P_s$, принимается равной нулю.

Далее доказывается, что $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи (13) при

$$\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik},$$

$\boldsymbol{x}_{-i} = \hat{\boldsymbol{x}}_{-i}$, $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}}$, данных ценах и введенных налогах. Действительно, точка $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ является допустимой в этой задаче. Поскольку задача каждого потребителя является выпуклой, то для доказательства этого факта достаточно установить, что при этом выполняются условия первого порядка. Условия первого порядка Парето-оптимума можно переписать следующим образом:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = p_k + t_{ik}, \forall k \in P_i,$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = p_k, \forall k \notin P_i.$$

Но это и есть условия первого порядка в задаче потребителя при $\nu_i$, равном $\dfrac{1}{\lambda_i}$.

Аналогично в качестве ставки налога $t_{jk}$, $k \in P_j$ выберем

$$t_{jk} = -\sum_{i \in I} \lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial y_{jk}} - \sum_{s \neq j} \mu_s \frac{\partial g_s(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial y_{jk}},$$

а ставку налога для блага, не принадлежащего $P_s$, примем равной нулю. Далее доказывается, что $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи (12) при данных ценах и $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{y}_{-j} = \hat{\boldsymbol{y}}_{-j}$.

Для доказательства теоремы осталось указать величины трансфертов $\boldsymbol{S}$. Легко видеть, что требуемыми трансфертами являются величины

$$S_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik} - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}(\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{y}}_j - \sum_{k \in P_j} t_{jk}\hat{y}_{jk})).$$

Их сумма равна, как и требуется, величине

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in P_j} t_{jk}\hat{y}_{jk},$$

и с учетом этих трансфертов доходы потребителей равны

$$\beta_i = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik},$$

то есть ровно столько, сколько необходимо для покупки набора $\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

■

**Замечание**.

Ставка налога может оказаться величиной отрицательной. Это, в частности, будет иметь место когда потребление (производство) данного блага вызывает только положительные экстерналии. Содержательно это означает, что потребителю (производителю) выплачивается дотации по соответствующей ставке.

**Замечание**.

Теорема верна и без условия дифференцируемости. При этом условие (⓪) заменяется на предположение о локальной ненасыщаемости.

В следующем утверждении описаны условия, при которых равновесия с налогами Парето-оптимальны. Таким образом, это утверждение представляет собой вариант первой теоремы благосостояния для такой экономики. Условия оптимальности равновесия с налогами, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, имеют вид следующего **правила Пигу**:

$$\frac{t_{ik}}{p_{k_0}} = -\sum_{s \neq i} \frac{\partial u_s(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial x_{ik}}{\partial u_s(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial x_{sk_0}} + \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})/\partial x_{ik}}{\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})/\partial y_{jk_0}}, \ \forall i, \forall k \in P_i, \qquad (\mathcal{T})$$

$$\frac{t_{jk}}{p_{k_0}} = -\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial y_{jk}}{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial g_s(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})/\partial y_{jk}}{\partial g_s(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})/\partial y_{sk_0}}, \ \forall j, \forall k \in P_j.$$

Если равновесие с налогами на экстерналии Парето-оптимально и удовлетворяет правилу Пигу, то соответствующие налоги называют **налогами Пигу**[118].

**Теорема 4.**

Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с налогами $(\boldsymbol{t}_I, \{P_i\}_i, \boldsymbol{t}_J, \{P_j\}_j)$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$ экономики с экстерналиями и, кроме того,

- $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ (равновесие внутреннее)
- все блага, порождающие экстерналии, облагаются налогами, т.е. $E_i \subseteq P_i$ и $E_j \subseteq P_j$.
- функции полезности и производственные функции дифференцируемы;
- существует благо $k_0$, для которого выполнены условия (⓪).

Тогда,

(i) если функции полезности и производственные функции вогнуты, то чтобы это равновесие с налогами было Парето-оптимальным, достаточно, чтобы налоги удовлетворяли правилу Пигу ($\mathcal{T}$);

(ii) если равновесие с налогами Парето-оптимально, и для каждого блага $k$ существует хотя бы один потребитель $i$ (или производитель $j$), для которого потребление (или производство) данного блага не облагается налогом, т.е. $k \notin P_i$ ($k \notin P_j$), то налоги должны удовлетворять правилу Пигу ($\mathcal{T}$).

***Доказательство.***

(i) Нам нужно показать, что найдутся числа $\{\lambda_i\}_i$, $\{\mu_j\}_j$, $\{\sigma_k\}_k$, $\lambda_i \geqslant 0, \mu_j \geqslant 0$, такие что для них выполнены соотношения (5)-(6) (дифференциальная характеристика Парето-оптимума экономики с экстерналиями). По обратной теореме Куна—Таккера при вогнутости функций полезности и производственных функций выполнение этих соотношений — достаточное условие максимума для каждой из задач, характеризующих Парето-оптимальные состояния экономики с экстерналиями.

Воспользуемся дифференциальной характеристикой равновесия с налогами (14)-(15) и (17)-(18). Множители Лагранжа выберем следующим образом:

$$\lambda_i = 1/\nu_i, \quad \mu_j = \kappa_j, \quad \sigma_k = \bar{p}_k.$$

---

[118] Pigou, A. C. *The economics of welfare*, London: Macmillan, 1932 (рус. пер. А. Пигу, «Экономическая теория благосостояния», М.: Прогресс, 1985).

Поскольку по предположению все блага, не облагаемые налогами, т.е. $k \notin P_i$ и $k \notin P_j$, не порождают экстерналий, то дифференциальные характеристики Парето-оптимума для них имеют вид:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k, \ \forall i, \quad \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0, \ \forall j.$$

Легко проверить, что они выполнены при выполнении соотношений (14) и (17).

Кроме того, из (14) и (17) при $k = k_0$ имеем

$$\lambda_i = \frac{1}{\nu_i} = \frac{\bar{p}_{k_0}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} > 0,$$

$$\mu_j = \kappa_j = -\frac{\bar{p}_{k_0}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} > 0,$$

откуда получаем следующие выражения для налогов, указанных в условии теоремы:

$$t_{ik} = -\sum_{s \neq i} \lambda_s \frac{\partial u_s}{\partial x_{ik}} - \sum_{j \in J} \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x_{ik}}.$$

$$t_{jk} = -\sum_{i \in I} \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial y_{jk}} - \sum_{s \neq j} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial y_{jk}}.$$

Подставляя их в дифференциальные характеристики равновесия с налогами (15) и (18), убеждаемся в том, что дифференциальные характеристики Парето-оптимума (5)-(6) выполнены.

(ii) Для любого $k \neq k_0$ существует экономический субъект, потребление (производство) которым этого блага не облагается налогом. Предположим, например, что это потребитель $i$. (Для случая, если таким экономическим субъектом является производитель, рассуждения аналогичны, что читателю предлагается проверить самостоятельно.) Из условий первого порядка задачи потребителя $i$ следует, что

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}.$$

С другой стороны, потребление этим потребителем благ $k$ и $k_0$ не порождает экстерналий и поэтому из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Это означает, что $\bar{p}_k / \bar{p}_{k_0} = \sigma_k / \sigma_{k_0}$, т.е. множители Лагранжа пропорциональны ценам.

Для произвольного потребителя $i$ и блага $k$, потребление которого данным потребителем облагается налогом $(k \in P_i)$, имеем из условия первого порядка задачи потребителя

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k + t_{ik}}{\bar{p}_{k_0}}.$$

С другой стороны, из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq i} \frac{\partial u_s / \partial x_{ik}}{\partial u_s / \partial x_{sk_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j / \partial x_{ik}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Производя соответствующие замены, получим требуемый результат:

$$\frac{t_{ik}}{\bar{p}_{k_0}} = -\sum_{s\neq i}\frac{\partial u_s/\partial x_{ik}}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}} + \sum_{j\in J}\frac{\partial g_j/\partial x_{ik}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}$$

Аналогично, для произвольного производителя $j$ и блага $k$, производство которого данным производителем облагается налогом $(k \in P_j)$, имеем

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\bar{p}_k - t_{jk}}{\bar{p}_{k_0}}.$$

и

$$-\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} + \sum_{i\in I}\frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{s\neq j}\frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}} = -\frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}},$$

откуда следует, что

$$\frac{t_{jk}}{\bar{p}_{k_0}} = -\sum_{i\in I}\frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s\neq j}\frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}}, \forall j, \forall k \in P_j.$$

■

**Замечание**.

Хотя по условиям теоремы множество благ, потребление (производство) которых облагается налогами, не обязано совпадать с множеством благ, порождающих экстерналии, ставки налога на блага, не порождающие экстерналии (блага из множеств $P_i \backslash E_i$ и $P_j \backslash E_j$) оказываются равными нулю. Из этого, фактически, следует, что множества налогооблагаемых благ должны включать блага, порождающие экстерналии, и только их.

**Замечание**.

Предположение о том, что для каждого блага $k$ существует хотя бы один потребитель $i$ (или производитель $j$), для которого потребление (или производство) данного блага не облагается налогом, т.е. $k \notin P_i$ $(k \notin P_j)$ фактически оказывается необходимым для справедливости второй части теоремы. В ситуациях, когда оно не выполняется, поведение потребителя $i$, а следовательно и равновесие, не зависят от того, какую часть цены $p_k + t_{ik}$, с которой он сталкивается, данный потребитель выплачивает в качестве налога, а какую — в качестве рыночной цены.

### Пример 3 (продолжение Примера 2)

Введем в экономику Примера **2** $t_1$ и $t_2$ — налоги на выпуски 1-го и 2-го предприятия соответственно. Охарактеризуем внутренние равновесия с налогами. Пусть

$$(p_1, p_2, p_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2, t_1, t_2) \text{ —}$$

такое равновесие. Задача максимизации прибыли $j$-го производителя имеет следующий вид:

$$\pi_j = (p_j - t_j)\, f_j(a_j, \bar{y}_{-j}) - p_3 a_j \to \max\nolimits_{a_j}.$$

Дифференцируя по $a_j$, получаем условия первого порядка для решения этой задачи:

$$\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1} = \frac{p_1 - t_1}{p_3} \text{ и } \frac{1}{\partial f_2/\partial a_2} = \frac{p_2 - t_2}{p_3},$$

то есть предельные нормы трансформации равны отношениям цен, с которыми сталкивается производитель, т.е. цен с учетом налогов.

Вид условий первого порядка задачи потребителя не изменится, так как потребитель не облагается налогом

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_1}{p_3} \text{ и } \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_2}{p_3}.$$

Из полученной дифференциальной характеристики равновесия имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1}+\frac{t_1}{p_3},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}+\frac{t_2}{p_3}.$$

Для того, чтобы равновесие было Парето-оптимальным, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1}-\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2}-\frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1},$$

т.е.

$$\frac{t_1}{p_3}=-\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2},$$

$$\frac{t_2}{p_3}=-\frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}.$$

Заметим, что если предпочтения потребителя выпуклы, то такие ставки налогов гарантируют Парето-оптимальность равновесия с налогами.

⇐

## Задачи

9. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}+z_1 \text{ и } u_2=2\sqrt{x_2}-x_1+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид $c(y)=y$. Начальные запасы первого блага (блага $x$) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

10. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}+z_1 \text{ и } u_2=2\sqrt{x_2}+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид

$$c(y,x_1,x_2)=y+2x_1+x_2.$$

Начальные запасы первого блага (блага $x$) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

11. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}-y+z_1 \text{ и } u_2=2\sqrt{x_2}+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид $c(y)=2y$. Начальные запасы первого блага (блага $x$) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

12. В экономике есть 2 потребителя с функциями полезности

$$u_1=-1/x_1+z_1-x_2,\ u_2=-1/x_2-2x_1+z_2$$

и предприятие с функцией издержек $c(y)=y$.

(A) Сформулировать условия Парето-оптимума.

(B) Будет ли в нерегулируемом равновесии избыточным или недостаточным потребление товара $x$ (в смысле дифференциально-малого отклонения от равновесия)?

(C) Сформулировать задачи потребителей для налогов Пигу.

13. Экономика состоит из одного потребителя и одного предприятия. Технологическое множество задается условиями $y_x^2+2y_z\leqslant 0$ и $y_z\leqslant 0$. Функция полезности имеет вид $u=\ln x+z-y_x^2$, где $y_x$ — объем экстерналий. Начальные запасы равны $(\omega_x,\omega_z)=(0;1000)$.

(1) Дайте определение общего равновесия применительно к данной модели. Найдите его. (Используйте нормировку $p_z=1$).

(2) Найдите Парето-оптимум. Будет ли равновесный объем производства $y_x$ выше или ниже Парето-оптимального?

(3) Вычислите налоги Пигу.

14. Экономика состоит из трех человек, потребляющих два типа благ, $x$ и $z$. Благо $x$ — это уровень «ухоженности» приусадебного участка, а благо $z$ — все остальные блага. Двое из потребителей соседи, так что красивый внешний вид участка одного соседа создает положительный внешний эффект для другого. Третий же человек живет вдалеке. Функции полезности имеют вид

$$u_1=\ln x_1+\ln x_2+z_1\ ,\ u_2=\ln x_1+\ln x_2+z_2\ ,$$

$$u_3=\ln x_3+z_3.$$

Каждый потребитель имеет запас по $5$ единиц каждого из двух благ.

(а) Найдите вальрасовское равновесие в данной экономике.

(б) Найдите все Парето-эффективные распределения благ в этой экономике.

(в) Предложите налог (или субсидию) Пигу, корректирующий экстерналию. Точно опишите, как, кем и за что он (она) платится.

15. Для экономик из задачи 7. Пусть в экономике обмена есть два потребителя и два блага. Функция полезности второго потребителя зависит от уровня собственного потребления, а также от уровня полезности первого потребителя. Найдите и сопоставьте дифференциальные характеристики внутреннего равновесия и внутреннего Парето-оптимума.

8 найдите соотношения для налогов Пигу.

## Рынки экстерналий

В этом параграфе мы покажем, что неэффективность равновесия экономики с экстерналиями — следствие отсутствия рынков экстерналий. Другими словами, если в дополнение к рынкам обычных благ возникла бы полная система рынков экстерналий, для такой экономики была бы справедливой первая теорема благосостояния, т.е. равновесие в такой экономике оказалось бы Парето-оптимальным. Этот взгляд на проблему экстерналий связан с именем К. Эрроу[119].

Предположим, что в дополнение к обычным рынкам, существует полная система конкурентных рынков экстерналий, т.е. существует рынок для каждой экстерналии из множеств $E_i$, $E_j$.

Обозначим

- через $q_{isk}$ цену экстерналии, состоящей во влиянии потребления $k$-го блага $i$-м потребителем на благосостояние $s$-го потребителя, $x_{ik}{\to}u_s$;
- через $q_{ijk}$ цену экстерналии, состоящей во влиянии потребления $k$-го блага $i$-м потребителем на производственные возможности $j$-го производителя, $x_{ik}{\to}g_j$;
- через $q_{jik}$ цену экстерналии, состоящей во влиянии производства $k$-го блага $j$-м производителем на благосостояние $i$-го потребителя, $y_{jk}{\to}u_i$;
- через $q_{jsk}$ цену экстерналии, состоящей во влиянии производства $k$-го блага $j$-м производителем на производственные возможности $s$-го производителя, $y_{jk}{\to}g_s$;
- через $\boldsymbol{q}$ полный набор цен экстерналий.

В этой модели предполагается, что платит тот, кто создает экстерналию. Может оказаться (например, в случае положительных экстерналий), что эта цена экстерналии отрицательна. Это следует понимать в том смысле, что «потребитель» экстерналии платит за нее тому, кто создает экстерналию.

В этой ситуации задача потребителя $i$ модифицируется следующим образом:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}) \to \max \tag{19}$$

$$\sum_{k\in K} p_k x_{ik} +$$

$$+ \sum_{s,k:\, x_{ik}\to u_s} q_{isk} x_{ik} + \sum_{j,k:\, x_{ik}\to g_j} q_{ijk} x_{ik} -$$

$$-\sum_{s\neq i} \sum_{k\,:\,x_{sk}\to u_i} q_{sik} x_{sk} - \sum_{j} \sum_{k\,:\,y_{jk}\to u_i} q_{jik} y_{jk} \leqslant \beta_i.$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Потребитель здесь выбирает объемы потребления благ $\boldsymbol{x}_i$ и влияющих на него экстерналий.

Хотя запись бюджетного ограничения выглядит довольно громоздкой, смысл ее достаточно прост: первая сумма — расходы на оплату обычных благ из рассматриваемого потребительского набора, следующие вторые суммы (вторая строчка бюджетного ограничения) — оплата внешних влияний, оказываемых данным потребителем на всех других эконо-

---

[119] Arrow, K. J. "The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market versus Non-market Allocation," in *Collected Papers of K. J. Arrow*, Vol. II, Harvard University Press, 1983.

мических субъектов. И наконец, последние две суммы — оплата другими экономическими субъектами внешнего влияния на данного потребителя.

Условия первого порядка для решения этой задачи выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \nu_i \left( p_k + \sum_{s:\, x_{ik} \to u_s} q_{isk} + \sum_{j:\, x_{ik} \to g_j} q_{ijk} \right) \forall k, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{sk}} = -\nu_i\, q_{sik}\ \forall s, k\colon x_{sk} \to u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_{jk}} = -\nu_i\, q_{jik}\ \forall j,\, k\colon y_{jk} \to u_i. \qquad (21)$$

Прибыль $j$-го производителя задается функцией

$$\pi_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k \in K} p_k\, y_{jk} -$$
$$- \sum_{i,k:\, y_{jk} \to u_i} q_{jik} y_{jk} - \sum_{s,k:\, y_{jk} \to g_s} q_{jsk} y_{jk} +$$
$$+ \sum_i \sum_{k\,:\, x_{ik} \to g_j} q_{ijk} x_{ik} + \sum_{s \neq j} \sum_{k\,:\, y_{sk} \to g_j} q_{sjk} y_{sk}$$

Задача $j$-го производителя модифицируется аналогичным образом:

$$\pi_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}) \to \max \qquad (22)$$
$$g(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_{-j}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

Производитель выбирает объемы производства благ $\boldsymbol{y}_j$ и влияющих на него экстерналий.

### Определение 5.

Назовем $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ **равновесием с торговлей экстерналиями** и трансфертами $\boldsymbol{S}$ ($\sum_i S_i = 0$), если

(i) $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — решение задачи (19) при ценах обычных благ $\bar{\boldsymbol{p}}$, ценах экстерналий $\bar{\boldsymbol{q}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}} \omega_i + \sum_j \gamma_{ij} \pi_j(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}}) + S_i\,.$$

(ii) $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ — решение задачи (22) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и $\bar{\boldsymbol{q}}$.

(iii) $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние, т.е.

$$\sum_i (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_j \bar{y}_{jk}\ \forall k.$$

Заметим, что выполнение условий (i) и (ii) гарантирует совпадение при данных ценах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ спроса и предложения на рынках экстерналий. Поэтому соответствующее требование не включено в определение равновесия.

Следующая теорема является аналогом второй теоремы благосостояния для равновесия с торговлей экстерналиями.

### Теорема 5.

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями.

Предположим также, что

- $\boldsymbol{x}_i \in \operatorname{int}(X_i)$ (равновесие внутреннее) $\forall i$ ;
- функции полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и производственные функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ дифференцируемы;
- существует благо $k_0$, для которого выполнены условия (◎);

- функции полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и производственные функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ вогнуты.

Тогда существуют цены $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и трансферты $\boldsymbol{S}$, такие что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является равновесием с торговлей экстерналиями.

***Доказательство***.

Как и в предыдущих теоремах, ограничимся схемой доказательства. Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимум, то по теореме Куна—Таккера он удовлетворяет уравнениям (5) и (6).

Цены выбираются следующим образом:

$$p_k = \sigma_k,$$

$$q_{isk} = -\lambda_s \frac{\partial u_s(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}}, \quad q_{ijk} = -\mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{ik}},$$

$$q_{jik} = -\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial y_{jk}}, \quad q_{jsk} = -\mu_s \frac{\partial g_s(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial y_{jk}}.$$

Далее доказывается, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является решением задачи (19) при данных ценах и таких доходах, которые в точности покрывают расходы на приобретение набора $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ обычных благ и экстерналий, т.е.

$$\beta_i = \textstyle\sum_k p_k \hat{x}_{ik} +$$

$$+ \sum_{s,k:\, x_{ik} \to u_s} q_{isk} \hat{x}_{ik} + \sum_{j,k:\, x_{ik} \to g_j} q_{ijk} \hat{x}_{ik} -$$

$$- \sum_{s \neq i} \sum_{k:\, x_{sk} \to u_i} q_{sik} \hat{x}_{sk} - \sum_j \sum_{k:\, y_{jk} \to u_i} q_{jik} \hat{y}_{jk}.$$

Действительно, точка $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является допустимой. Поскольку задача каждого потребителя является выпуклой, то для доказательства этого факта достаточно установить, что при этом выполняются условия первого порядка.

Условия первого порядка Парето-оптимума можно переписать следующим образом:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial x_{ik}} = p_k + \sum_{s:\, x_{ik} \to u_s} q_{isk} + \sum_{j:\, x_{ik} \to g_j} q_{ijk}, \ \forall k.$$

Это есть условия первого порядка (20) в задаче потребителя при $\nu_i$, равном $\dfrac{1}{\lambda_i}$. При том же $\nu_i$ условия первого порядка (21) следуют из определения цен $q_{sik}$, $q_{jik}$.

Аналогичным образом доказывается, что $(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}})$ является решением задачи (22) при данных ценах.

Для доказательства теоремы осталось указать величины трансфертов $\boldsymbol{S}$. Легко видеть, что требуемыми трансфертами являются величины

$$\boldsymbol{S}_i = \beta_i - \boldsymbol{p}\,\omega_i - \textstyle\sum_j \gamma_{ij} \pi_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{x}}),$$

где $\beta_i$ определены выше. Читатель может проверить, что их сумма равна нулю.

■

**Замечание**.

Теорема верна и без условия дифференцируемости. При этом условие (⓪) заменяется на предположение о локальной ненасыщаемости.

Поскольку в модели с торговлей экстерналиями система рынков оказывается полной, справедлива первая теорема благосостояния.

**Теорема 6.**

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{S})$ — равновесие с торговлей экстерналиями и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда состояние этой экономики $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ Парето-оптимально.

***Доказательство***.

Доказательство этой теоремы фактически повторяет доказательство первой теоремы экономики благосостояния для «обычной» экономики.

■

Связь между ценами экстерналий и налогами на экстерналии устанавливают следующие два утверждения, показывающие, что на основе любого равновесия с торговлей можно построить равновесие с налогами с теми же ценами обычных благ и налогами, равными сумме цен соответствующих экстерналий. Указанная связь задается следующим правилом:

$$t_{ik} = \sum_{s:\, x_{ik} \to u_s} q_{isk} + \sum_{j:\, x_{ik} \to g_j} q_{ijk} \; \forall k \in E_i, \qquad (\maltese)$$

$$t_{jk} = \sum_{i:\, y_{jk} \to u_i} q_{jik} + \sum_{s:\, y_{jk} \to g_s} q_{jsk} \; \forall k \in E_j.$$

**Теорема 7.**

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями.

Тогда существуют трансферты, такие что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с налогами $(\boldsymbol{t}_I, \{E_i\}_i, \boldsymbol{t}_J, \{E_j\}_j)$, где ставки налогов задаются правилом (✠) при $\boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{q}}$.

***Доказательство***.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что

(i) $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи (13) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, налогах, определяемых $\boldsymbol{t}_I$, $E_i$, доходах

$$\beta_i = \sum_{k \notin E_i} \bar{p}_k \bar{x}_{ik} + \sum_{k \in E_i} (\bar{p}_k + t_{ik}) \bar{x}_{ik}$$

и объемах потребления и производства других экономических субъектов $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}, \bar{\boldsymbol{y}}$.

(ii) $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ — решение задачи (16) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, налогах, определяемых $\boldsymbol{t}_j$, $E_j$, и объемах производства и потребления других экономических субъектов $\bar{\boldsymbol{y}}_{-j}, \bar{\boldsymbol{x}}$.

(iii) Трансферты следует выбрать равными «бюджетным дефицитам» потребителей, а затем доказать, что сумма трансфертов равняется сумме собранных налогов

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in E_i} t_{ik} \bar{x}_{ik} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in E_j} t_{jk} \bar{y}_{jk}.$$

Доказательство пунктов (i) и (ii) основывается на том факте, что если $(\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2)$ является решением следующей задачи оптимизации

$$f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \to \max_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2}$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in X,$$

то $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ является решением редуцированной задачи

$$f_0(\boldsymbol{x}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2) \to \max_{\boldsymbol{x}_1}$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2) \in X.$$

Справедливость пункта (iii) — следствие определения трансфертов и налогов $t_{ik}$, $t_{jk}$ и того факта, что в равновесии с торговлей экстерналиями бюджетные ограничения выходят на равенство.

■

Для справедливости обратного утверждения существенным является предположение о том, что равновесие с налогами Парето-оптимально.

**Теорема 8.**

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с налогами $(\boldsymbol{t}_I, \{P_i\}_i, \boldsymbol{t}_J, \{P_j\}_j)$ и трансфертами $\boldsymbol{S}$, причем состояние экономики $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ Парето-оптимально.

Предположим также, что

- выполнены условия Теоремы **4** (ii);
- функции полезности $u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и производственные функции $g_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ вогнуты.

Тогда существуют цены $\boldsymbol{q}$ экстерналий и трансферты $\boldsymbol{S}'$ такие, что $(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями. При этом $\boldsymbol{q}$ удовлетворяют правилу (✠).

***Доказательство*.**

Так как $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, то по Теореме **5** существуют цены благ $\boldsymbol{p}$, цены экстерналий $\boldsymbol{q}$ и трансферты $\boldsymbol{S}$ такие, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями.

Возьмем произвольное благо $k \neq k_0$. По предположению теоремы существует экономический субъект, потребление (производство) которым этого блага не облагается налогом. Предположим, например, что это потребитель $i$. (Для случая, если таким экономическим субъектом является производитель, рассуждения аналогичны, что читателю предлагается проверить самостоятельно). Сопоставляя условия первого порядка задачи потребителя $i$ в равновесии с налогами и в равновесии с торговлей экстерналиями заключаем, что

$$\frac{p_k}{p_{k_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}.$$

Без потери общности можно считать, что $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, поскольку цены в равновесии определяются с точностью до множителя.

В соответствии с Теоремой **4** (ii) верно правило Пигу ($\mathcal{T}$).

Воспользовавшись условиями первого порядка задач потребителя и производителя в равновесии с торговлей экстерналиями,

$$\frac{\partial u_s / \partial x_{ik}}{\partial u_s / \partial x_{sk_0}} = -\frac{q_{isk}}{p_{k_0}}, \quad \frac{\partial g_j / \partial x_{ik}}{\partial g_j / \partial x_{ik_0}} = \frac{q_{ijk}}{p_{k_0}} \; \forall k \in E_i,$$

$$\frac{\partial u_i / \partial y_{jk}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = -\frac{q_{jik}}{p_{k_0}}, \quad \frac{\partial g_s / \partial y_{jk}}{\partial g_s / \partial y_{sk_0}} = \frac{q_{jsk}}{p_{k_0}} \; \forall k \in E_j,$$

мы можем переписать соотношения Пигу, учитывая, что часть слагаемых в них равна нулю, в виде (✠).

■

**Пример 4 (продолжение Примеров 2 и 3)**

Пусть в экономике Примера 2 происходит торговля экстерналиями между предприятиями. Обозначим через $q_1$ и $q_2$ цены на экстерналии, связанные с выпуском продукции 1-м и 2-м предприятием соответственно. Охарактеризуем внутренние равновесия с торговлей экстерналиями. Задача максимизации прибыли $j$-го производителя имеет следующий вид:

$$\pi_j = (p_j - q_j)\, f_j(a_j, y_{-j}) - p_3 a_j + q_{-j} y_{-j} \to \max_{a_j, y_{-j}}.$$

Дифференцируя по $a_j$ и $y_{-j}$, получаем условия первого порядка для решения этой задачи:

$$\frac{1}{\partial f_1/\partial a_1} = \frac{p_1 - q_1}{p_3}, \quad \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1} = -\frac{q_2}{p_3},$$

$$\frac{1}{\partial f_2/\partial a_2} = \frac{p_2 - q_2}{p_3} \text{ и } \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2} = -\frac{q_1}{p_3}.$$

Вид условий первого порядка задачи потребителя не изменится:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_1}{p_3} \text{ и } \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Исключая из дифференциальной характеристики равновесия цены, получим соотношения, совпадающие с дифференциальной характеристикой Парето-оптимума:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial a_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial a_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}.$$

Заметим, что если налоги вычисляются на основе равновесия с торговлей экстерналиями, то они совпадают с ценами экстерналий. Более того, если предпочтения потребителя строго выпуклы, то налоги Пигу и цены экстерналий совпадают всегда, так как Парето-оптимальное состояние в такой экономике единственно.

⇐

### Задачи

16. Для экономик из задачи 7. Пусть в экономике обмена есть два потребителя и два блага. Функция полезности второго потребителя зависит от уровня собственного потребления, а также от уровня полезности первого потребителя. Найдите и сопоставьте дифференциальные характеристики внутреннего равновесия и внутреннего Парето-оптимума.

8 охарактеризуйте равновесие с торговлей экстерналиями. Будет ли оно Парето-оптимальным?

## Альтернативная модель экономики с экстерналиями

В рассмотренной выше модели экономики с экстерналиями вешние влияния связаны непосредственно с объемами потребления и производства благ. Зачастую, однако, такие воздействия определяются не только объемами, но и способами производства и потребления таких благ. Так, объем загрязнения окружающей среды выхлопными газами определяется не только количеством автомобилей в данной местности, но и тем, как часто их используют их владельцы, типом двигателя, средней скоростью передвижения и т.д. Такие характеристики поведения экономических субъектов не всегда возможно учесть в предложенном выше подходе к моделированию экстерналий.

Альтернативный подход к моделированию внешний влияний состоит в следующем:

Введем для каждого экономического субъекта вектор дополнительных переменных, описывающих характеристики процесса потребления и производства благ, вызывающие экстерналии (или, для краткости, вектор экстерналий) $\boldsymbol{a}_i \in A_i$ и $\boldsymbol{a}_j \in A_j$.

Полный набор дополнительных переменных будем обозначать через $\boldsymbol{a}$. Как и ранее, обозначим через $\boldsymbol{a}_{-i}$ $(\boldsymbol{a}_{-j})$ вектор экстерналий, вызываемых всеми остальными экономическими субъектами. Функции полезности и производственные функции в этом случае зависят также и от дополнительных переменных:

$$u_i = u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{-i}),$$

$$g_j = g_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{-j}).$$

Читателю предлагается переформулировать все предыдущие понятия и результаты в данном случае (как и в общем случае, когда внешние влияния вызывают как величинами потребления и производства обычных благ $(\boldsymbol{x}_{-i}, \boldsymbol{y}_{-j})$ так и характеристиками их потребления и производства $\boldsymbol{a}_{-i}$. $(\boldsymbol{a}_{-j})$.

Мы проиллюстрируем данный подход к моделированию экстерналий, введенные понятия и разные типы равновесий  несколькими примерами.

**Пример 5 (курильщик и некурящий)**

Два студента, живущие в одной комнате в общежитии, имеют функции полезности

$$u_1(x_1, a) \text{ и } u_2(x_2, a),$$

которые зависят от имеющихся в их распоряжении денег ($x_1$ для первого, $x_2$ для второго) и от количества выкуриваемых первым из них сигарет ($a$). Второй участник — некурящий, и $\partial u_2(x_2, a)/\partial a < 0$, а у первого, напротив, $\partial u_1(x_1, a)/\partial a > 0$, если количество сигарет меньше $\breve{a}$ и $\partial u_1(x_1, a)/\partial a < 0$, если $a > \breve{a}$. Ежедневный доход каждого равен $\omega_i$.

Рассмотрим два варианта правил поведения: либо (*A*) курить в комнате запрещается, без разрешения соседа по комнате, либо (*B*) признается право курить без ограничения (эту экономику можно проиллюстрировать на ящике Эджворта, см. Рис. 83). При любом из этих правил возможны соглашения-сделки, приводящие к состояниям экономики (например, *A*′ в случае первого правила и *B*′ в случае второго), улучшающие благосостояния обоих участников. Поэтому у нас есть все основания ожидать, что в отсутствие явных или неявных запретов (и издержек сделок), два студента достигнут соглашения, в результате которого эта простая экономика окажется в Парето-оптимальном состоянии. Так, в случае *A* курящий может «купить» у некурящего право выкурить несколько сигарет в день. В случае *B*, наоборот, курящий может, за соответствующую сумму денег, выкуривать на несколько сигарет меньше (см. Рис. 83 б).

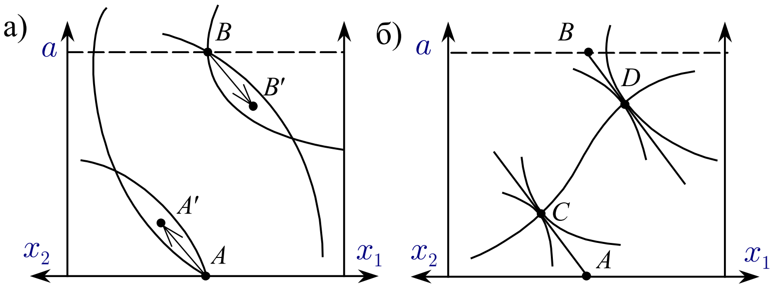


Рисунок 83.

Пример иллюстрирует два момента. Во-первых, когда, как в этом примере, объем экстерналий измерим и издержки сделок несущественны, тогда определение правил поведения и торговля экстерналиями способны решить проблему экстерналий и привести к Парето-оптимальным состояниям экономики — устранить «фиаско рынка». В этом случае экстерналии, в сущности, превращаются в обычные товары, то есть возникает рынок экстерналий.

Во-вторых, с теоретической точки зрения, в отличие от обыденного понимания загрязнения, экстерналии симметричны. Если в варианте *B* ущерб от наличия экстерналий наносится некурящему, то в варианте *A* — курильщику.

Заметим, что правила поведения порождают своего рода права собственности. Так, ситуация *A* подразумевает право некурящего не соглашаться на любой вариант выбора объема экстерналий курильщиком. Ситуация *B* — право курильщика на выбор любого объема. Эти права собственности можно моделировать в данной и подобной ей ситуациях как право определять объем производства экстерналий одним из экономических субъектов. Так, в ситуации *A* это право принадлежит некурящему, в ситуации *B* — курильщику.

Можно рассматривать и более общий случай, когда признается право первого на курение определенного числа сигарет в день. Курить сверх этого «лимита» он может только с согласия некурящего, который заинтересован дать такое разрешение лишь при компенсации нанесенного ему при этом ущерба. При любой такой спецификации прав «начальное состояние» рассматриваемой экономики представляется точкой отрезка, соединяющего точки *A* и *B*. Это начальное состояние (и предполагаемое им распределение прав собственности) оказывает влияние на состояние экономики, которое будет достигнуто в результате соглашений между участниками сделки, и, в частности, на состояние рыночного равновесия — результата обмена по равновесным рыночным ценам.

⇐

**Пример 6 (экономика с однородными экстерналиями)**

Рассмотрим экономику с одним типом экстерналий, которые «производят» только производители и «потребляют» только потребители. В этой экономике на уровень благосостояния потребителя не влияет источник экстерналии, а только совокупное производство этих экстерналий, т.е.

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}) = u_i(\boldsymbol{x}_i, \sum_{j\in J} a_j)$$

$$g_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}) = g_j(\boldsymbol{y}_j, a_j),$$

где $a_j \in A_j \subseteq \mathbb{R}$. Охарактеризуем Парето-оптимальные состояния этой экономики, разные типы равновесий, а также налоги Пигу $\{t_j\}$ и цены экстерналий $\{q_{ji}\}$ (в равновесии с торговлей экстерналиями).

Рассмотрим сначала, Парето-оптимальное состояние экономики $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}})$, такое что $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{int}(X_i)$, $\hat{a}_j \in \operatorname{int}(A_j)$. Предположим, что существует благо $k_0$, удовлетворяющее условиям, аналогичным условиям (◎). Дифференцируя функции Лагранжа задач, характеризующих это состояние,

$$L = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(\boldsymbol{x}_i, \sum_{j\in J} a_j) + \sum_{j\in J} \mu_j g_j(\boldsymbol{y}_j, a_j) + \sum_{k\in K} \sigma_k (\sum_{j\in J} y_{jk} - \sum_{i\in I}(x_{ik} - \omega_{ik})),$$

получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ik}} = \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0 \ \forall i, k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}} = \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = \sum_{i\in I} \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial a} + \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial a_j} = 0 \ \forall j.$$

Поскольку для соответствующих задач выполнены условия регулярности, то множители Лагранжа $\lambda_i$ и $\mu_j$ положительны.

Из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}, \ \forall i, \ \forall j, \ \forall k.$$

$$\sum_{i\in I} \frac{\partial u_i/\partial a}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j/\partial a_j}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}, \ \forall j.$$[120]

Охарактеризуем теперь обычные рыночные равновесия в этой экономике. Пусть $\boldsymbol{p}$ — цены благ. Тогда задача потребителя, располагающего доходом $\beta_i$, имеет вид:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}) \to \max_{\boldsymbol{x}_i}$$
$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant \beta_i,$$
$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Дифференциальная характеристика внутреннего решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}, \ \forall k.$$

При тех же ценах задача производителя имеет вид:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max_{\boldsymbol{y}_j, a_j}$$
$$g_j(\boldsymbol{y}_j, a_j) \geqslant 0,$$
$$a_j \in A_j.$$

Дифференциальная характеристика внутреннего (по $a_j$) решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}, \ \forall k.$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial a_j} = 0.$$

---

[120] Это соотношение в теории общественных благ называют уравнением Самуэльсона (см. следующую главу).

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ — равновесие. Тогда если экстерналии одного типа для всех потребителей (только положительные или только отрицательные), то состояние экономики $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ не оптимально по Парето. Например, если $\partial u_i / \partial a \leqslant 0 \; \forall i$ и неравенство строгое по крайней мере для одного потребителя, то

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} \neq 0 = \frac{\partial g_j / \partial a_j}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}},$$

что не совпадает с дифференциальной характеристикой Парето-оптимальных состояний.

В равновесии с налогами должно быть выполнено

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = -\frac{\partial g_j / \partial a_j}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}}, \; \forall j.$$

Правило Пигу для оптимальных налогов имеет вид

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = -\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}}, \; \forall j.$$

Отсюда видно, что налоги Пигу одинаковы для всех производителей. С другой стороны, если в равновесии налоги определены этими соотношениями, то равновесие удовлетворяет дифференциальной характеристике Парето-оптимума, что при вогнутости функций полезности и производственных функций гарантирует Парето-оптимальность.

Цены экстерналий в равновесии с торговлей экстерналиями удовлетворяют соотношениям

$$\frac{q_{ij}}{p_{k_0}} = -\frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}}, \; \forall i, \; \forall j,$$

то есть не зависят от производителя, который создает экстерналии. Другими словами, мы фактически имеем $m$ рынков экстерналий по числу потребителей.

Если равновесие в экономике с налогами и равновесие в экономике с торговлей экстерналиями соответствуют одному и тому же состоянию экономики, то налоги и цены экстерналий связаны соотношениями

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = \sum_{i \in I} \frac{q_{ij}}{p_{k_0}}, \; \forall j.$$

$\Leftarrow$

## Задачи

17. («Курение») Из двух соседей по комнате первый — некурящий, второй — курильщик. Функции полезности имеют вид:

$$u_1 = \ln(x_1) - z^2,$$

$$u_2 = \ln(x_2) - 0.5 z^2 + 10 z.$$

Здесь $x_i$ — количество денег на другие блага, $z$ — количество выкуренных 2-м сигарет, $\omega_i$ — начальные запасы денег.

(1) Предположим, что сигареты «бесплатные», т.е. производятся из денег с нулевыми издержками. Найти равновесие. Построить Парето-улучшение из равновесия (в дифференциалах). Найти Парето-границу.

(2) Пусть теперь сигареты стоят $p$ (т.е. производятся по технологии с постоянной отдачей от масштаба). Найти равновесие и Парето-границу в зависимости от $p$. При каких значениях $p$ равновесие оптимально?

## Экстерналии в квазилинейной экономике

В этом параграфе будем рассматривать квазилинейную экономику с экстерналиями. В этой экономике имеется $l+1$ обычных благ. Предпочтения потребителей и технологии фирм описываются функциями следующего вида:[121]

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{-i}) = v_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{-i}) + z_i,$$

где $\boldsymbol{x}_i \geqslant 0$, $\boldsymbol{a}_i \in A_i$ а объемы потребления $(l+1)$-го (квазилинейного) блага, $z_i$, могут быть произвольными, и

$$g_j(\boldsymbol{y}_j, r_j, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{-j}) = r_j - c_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{-j}),$$

где, как обычно $c_j(\cdot)$ — функция издержек, которая показывает затраты $(l+1)$-го блага на производство обычных благ в количестве $\boldsymbol{y}_j \geqslant 0$ и экстерналий в количестве $\boldsymbol{a}_j \in A_j$.

Известно, что Парето-оптимальные состояния квазилинейной экономики характеризуются следующей задачей:

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}) \to \max{}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}}$$

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i = \sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j, \qquad (\mathcal{W}_E)$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0,\ \boldsymbol{a}_i \in A_i,$$

$$\boldsymbol{y}_j \geqslant 0,\ \boldsymbol{a}_j \in A_j.$$

Если $((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}), (\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}), \hat{\boldsymbol{a}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, то $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}})$ — решение данной задачи. Обратно, если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}})$ — решение данной задачи, то найдутся числа $\hat{z}_i$ и $\hat{r}_j$, такие что $((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}), (\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}), \hat{\boldsymbol{a}})$ — Парето-оптимум.

Функция $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})$ является индикатором благосостояния данной экономики.

Воспользуемся приведенной характеристикой Парето-оптимальных состояний. Пусть $((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}), (\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}), \hat{\boldsymbol{a}})$ — Парето-оптимум, такой что $\hat{\boldsymbol{a}}_i \in \operatorname{int}(A_i)$ и $\hat{\boldsymbol{a}}_j \in \operatorname{int}(A_j)$, а функции полезности и издержек дифференцируемы. Дифференцируя функцию Лагранжа данной задачи,

$$L = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}) + \sum_{k\in K} \sigma_k \Big(\sum_{j\in J} y_{jk} - \sum_{i\in I} x_{ik}\Big),$$

получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} \leqslant \sigma_k \text{ и } \frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k, \text{ если } \hat{x}_{ik} > 0,\ \forall i, k,$$

$$\frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} \leqslant \sigma_k \text{ и } \frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} = \sigma_k, \text{ если } \hat{y}_{jk} > 0,\ \forall j, k,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{ie}} + \sum_{s\neq i} \frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}} = \sum_{j\in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}},\ \forall e \in E_i.$$

$$\sum_{i\in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{je}} = \frac{\partial c_j}{\partial a_{je}} + \sum_{s\neq j} \frac{\partial c_s}{\partial a_{je}},\ \forall e \in E_j.$$

---

[121] См. главу, посвященную «классической» квазилинейной экономике.

Охарактеризуем теперь обычные рыночные равновесия в этой экономике. Пусть $\boldsymbol{p}$ — цены первых $l$ благ. Цену $(l+1)$-го блага будем считать равной $1$. При этих ценах потребление первых $l$ благ $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и создание экстерналий $\bar{\boldsymbol{a}}_i$ потребителем $i$ определяется на основе решения следующей задачи, которая получается из обычной модели поведения потребителя подстановкой бюджетного ограничения с учетом вида функции полезности:

$$v_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max{}_{\boldsymbol{x}_i \geqslant 0, \boldsymbol{a}_i \in A_i}$$

Дифференциальная характеристика внутреннего по $a_i$ решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k \text{ и } \frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} = p_k, \text{ если } \bar{x}_{ik} > 0,\ \forall k,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{ie}} = 0\ \forall e \in E_i.$$

С учетом формы производственной функции задача производителя приобретает вид:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}) \to \max{}_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0, \boldsymbol{a}_j \in A_j}$$

Дифференциальная характеристика внутреннего по $a_j$ решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} \geqslant p_k \text{ и } \frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} = p_k, \text{ если } \bar{y}_{jk} > 0,\ \forall k,$$

$$\frac{\partial c_j}{\partial a_{je}} = 0\ \forall e \in E_j.$$

Пусть $(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ — внутреннее равновесие. Тогда если некоторая экстерналия одного типа для всех потребителей (только положительная или только отрицательная), то состояние экономики $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ не оптимально по Парето. Этот факт можно установить как и ранее, сравнивая дифференциальные характеристики Парето-оптимальных и равновесных состояний.

Пусть, например, $e^* \in E_{j^*}$ таково, что в этом равновесии

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} \leqslant 0\ \forall i \text{ и } \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}} \geqslant 0\ \forall j \neq j^*,$$

причем по крайней мере одно из этих неравенств строгое. Тогда

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} < \sum_{j \neq j^*} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}}.$$

Поскольку рассматривается состояние равновесия, то

$$\frac{\partial c_{j^*}}{\partial a_{j^*e^*}} = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} < \sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}},$$

что означает, что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ не Парето-оптимально.

Вообще говоря, для того, чтобы сделать этот вывод, достаточно сделать более слабое предположение, что «предельный эффект» экстерналии, т.е. величина

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} - \sum_{j \neq j^*} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}},$$

не равна нулю. Обозначим эту величину через $\varepsilon$.

Укажем также возможные Парето-улучшения для состояния равновесия для данного случая. Пусть $((d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{z}), (d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{r}), d\boldsymbol{a})$ — дифференциально малое изменение для состояния равновесия, причем

$$d\boldsymbol{x}=0,\ d\boldsymbol{y}=0,\ d\boldsymbol{a}_i=0\ \forall i,\ d\boldsymbol{a}_j=0\ \forall j\neq j^*,\ da_{j^*e}=0\ \forall e\neq e^*.$$

Тогда эффект изменения производства экстерналии $a_{j^*e^*}$ на величину $da_{j^*e^*}$ окажется равным $\varepsilon\, da_{j^*e^*}$. Пусть, например, предельный эффект экстерналии $a_{j^*e^*}$ положителен ($\varepsilon>0$). Тогда если $da_{j^*e^*} > 0$, то величина $\varepsilon\, da_{j^*e^*}$ положительна. Она представляет собой экономию блага $(l+1)$ в результате указанного увеличения производства экстерналии $e^*$ производителем $j^*$.

Изменение должно быть таким, чтобы новое состояние было допустимым. Это требование определяет соотношения, которым должны удовлетворять изменения. Так, дифференцируя баланс по $(l+1)$-му благу, получим

$$\sum_{i\in I} dz_i + \sum_{j\in J} dr_j = 0.$$

Изменение производства экстерналии вызывают изменения затрат $(l+1)$-го блага на предприятиях:

$$dr_j = \frac{\partial c_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{\boldsymbol{a}})}{\partial a_{j^*e^*}}\, da_{j^*e^*},$$

причем $dr_{j^*}=0$, поскольку в равновесии $\partial c_{j^*}(\bar{\boldsymbol{y}}_{j^*}, \bar{\boldsymbol{a}})/\partial a_{j^*e^*}=0$.

Полезности потребителей при этом меняются на величины

$$du_i = dv_i + dz_i = \frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{a}})}{\partial a_{j^*e^*}}\, da_{j^*e^*} + dz_i.$$

Сумма изменений полезностей с учетом соотношений между изменениями равна $\varepsilon\, da_{j^*e^*}$. Действительно,

$$\sum_{i\in I} du_i = \sum_{i\in I} \frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{a}})}{\partial a_{j^*e^*}}\, da_{j^*e^*} + \sum_i dz_i = .$$

$$= \Big(\sum_{j\in J} \frac{\partial c_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{\boldsymbol{a}})}{\partial a_{j^*e^*}} + \varepsilon\Big)\, da_{j^*e^*} - \sum_j dr_j = .$$

$$= \sum_{j\in J} dr_j + \varepsilon\, da_{j^*e^*} - \sum_{j\in J} dr_j = \varepsilon\, da_{j^*e^*}.$$

Существуют такие $\{dz_i\}$, что все $du_i$ положительны. Если, например,

$$dz_i = \varepsilon\, da_{j^*e^*}/m - \frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{\boldsymbol{a}})}{\partial a_{j^*e^*}}\, da_{j^*e^*}\ \forall i,$$

то

$$du_i = \varepsilon\, da_{j^*e^*}/m > 0\ \forall i.$$

Понятно, что если равновесие с налогами Парето-оптимально, то величина, например, ставки налога, взимаемого с производителя $j$ за выпуск единицы экстерналий должна быть равна предельному эффекту экстерналий, взятому со знаком минус, т.е.

$$t_{je}=-\sum_{i\in I}\frac{\partial v_i}{\partial a_{je}}+\sum_{s\neq j}\frac{\partial c_s}{\partial a_{je}}.$$

Аналогично для экстерналии, производимой потребителем,

$$t_{ie}=-\sum_{s\neq i}\frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}}+\sum_{j\in J}\frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}}.$$

Это вариант правила Пигу для квазилинейной экономики.

Обратно, если ставки налогов на производство экстерналий удовлетворяют правилу Пигу, то равновесие с налогами Парето-оптимально при дополнительных предположениях о том, что функции полезности вогнуты, а функции издержек выпуклы.

Цены экстерналий в равновесии с торговлей экстерналиями удовлетворяют соотношениям

$$q_{ise}=-\frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}},\ \forall i,\ \forall s\neq i,\ \forall e\in E_i,$$

$$q_{ije}=\frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}},\ \forall i,\ \forall j,\ \forall e\in E_i,$$

$$q_{jie}=-\frac{\partial v_i}{\partial a_{je}},\ \forall j,\ \forall\, i,\ \forall e\in E_j,$$

$$q_{jse}=\frac{\partial c_s}{\partial a_{je}},\ \forall j,\ \forall\, s\neq j,\ \forall e\in E_j,$$

то есть совпадают с соответствующим «предельным ущербом» от экстерналии.

Если равновесие в экономике с налогами и равновесие в экономике с торговлей экстерналиями соответствуют одному и тому же состоянию экономики, то налоги и цены экстерналий связаны соотношениями

$$t_{ie}=\sum_{s\neq i}q_{ise}+\sum_{j\in J}q_{ije}.$$

$$t_{je}=-\sum_{i\in I}q_{jie}+\sum_{s\neq j}q_{jse},$$

Заметим, что если функции полезности вогнуты, а функции издержек выпуклы, причем хотя бы одна из них строго, то величины налогов Пигу и цен экстерналий не зависят от состояния равновесия и рассчитываются по указанным выше формулам на решении задачи ($\mathcal{W}_E$).

Интерес представляет также частный случай, когда воздействие экстерналий на благосостояние потребителей и производственные возможности производителей не зависит от уровня потребления и производства обычных благ, т.е. ситуацию, когда функции полезности и функции издержек имеют следующий вид (сепарабельны):

$$u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{-i})=v_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{-i})+z_i = v_{ix}(\boldsymbol{x}_i)+v_{ia}(\,\boldsymbol{a})+z_i$$

$$c_j(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{-j}) = c_{jy}(\boldsymbol{y}_j)+c_{ja}(\boldsymbol{a}).$$

В этом случае объем производства и потребления всех обычных благ (кроме квазилинейного блага) не зависит от типа равновесия (один и тот же, как в «обычном» рыночном равновесии, так и в равновесии с налогами и в равновесии с торговлей экстерналиями), хотя производство и потребление экстерналий в этих состояниях могут различаться. Более того, рынки сепарабельных экстерналий можно анализировать независимо от рынков обычных благ.

**Пример 7 (курильщик и некурящий)**

Модифицируем Пример 5 для квазилинейной экономики с сепарабельными экстерналиями. Пусть функции полезности студентов имеют вид

$$u_i = v_{ix}(\boldsymbol{x}_i) + v_{ia}(a) + z_i,\ i = 1, 2,$$

где $\boldsymbol{x}_i$ — объемы потребления «обычных» благ, $z_i$ — количество денег на остальные блага, $a \geqslant 0$ — количество выкуриваемых первым из них сигарет. Как и ранее, второй участник — некурящий, и $v'_{2a}(a) < 0$, а у первого, напротив, $v'_{1a}(a) > 0$, если количество сигарет меньше $\breve{a}$ ($\breve{a} > 0$) и $v'_{1a}(a) < 0$, если $a > \breve{a}$.

Как уже говорилось, можно «забыть» о существовании благ $\boldsymbol{x}_i$ и сосредоточится на экстерналии $a$ и квазилинейном благе $z_i$. Поскольку ситуация фактически «двумерная», то она, как и ранее, иллюстрируется с помощью Рис. 83 (только по горизонтальным осям откладывается $z_i$).

В точке $A$, соответствующей абсолютному праву некурящего на чистый воздух ($a = 0$) имеют место неравенства $v'_{2a}(0) < 0 < v'_{1a}(0)$.

Если выполнено $-v'_{2a}(0) < v'_{1a}(0)$ (т.е. предельный ущерб от экстерналий не слишком велик — не превышает предельной оценки курения для курильщика), то состояние $A$ не оптимально. Действительно, оптимум должен характеризоваться максимумом частичного индикатора благосостояния

$$W(a) = v_{1a}(a) + v_{2a}(a).$$

В граничном Парето-оптимуме ($a = 0$) должно быть выполнено $W'(0) \leqslant 0$, т.е. $-v'_{2a}(0) \geqslant v'_{1a}(0)$.

Из этого состояния можно произвести строгое Парето-улучшение вида $da > 0$, $dz_2 > 0$, $dz_1 = -dz_2 < 0$. При этом

$$dv_1 = v'_{1a}(0)da - dz_2,$$
$$dv_2 = v'_{2a}(0)da + dz_2.$$

Для того, чтобы одновременно $dv_1 > 0$ и $dv_2 > 0$, нужно выбрать $dz_2$ так, чтобы

$$-v'_{2a}(0)da < dz_2 < v'_{1a}(0)da.$$

В точке $B$, соответствующей праву свободно курить ($a = \breve{a}$), выполнено $v'_{1a}(\breve{a}) = 0$, $v'_{2a}(\breve{a}) < 0$. Ясно, что при этом условие оптимальности $W'(\breve{a}) = 0$ не выполнено. Парето-улучшение должно иметь вид $da < 0$, $dz_1 > 0$, $dz_2 = -dz_1 < 0$. При этом

$$dv_1 = dz_1,$$
$$dv_2 = v'_{2a}(\breve{a})da - dz_1.$$

Некурящий улучшит свое благосостояние ($dv_2 > 0$) при $dz_1 < v'_{2a}(\breve{a})da$.

Внутреннее равновесие с торговлей экстерналиями характеризуется соотношениями $v'_{2a}(\bar{a}) = -q$ и $v'_{1a}(\bar{a}) = q$, где $\bar{a}$ — количество дыма в этом равновесии. При этом $W'(\bar{a}) = 0$.

⇐

**Пример 8 (экстерналии в производстве, частное равновесие)**

Рассмотрим квазилинейную экономику с 3 благами ($l = 2$) и двумя производителями, производящих 1-е и 2-е блага соответственно, затрачивая 3-е благо. Их функции издержек зависят от некоторых действий первого производителя (например, действий по уменьшению загрязнений, которые (загрязнения) негативно влияют на условия деятельности второго производителя.

Будем предполагать, что объем загрязнений, произведенных первым производителем, однозначно определяется объемом выпускаемой им продукции $y_1 \geqslant 0$ и поэтому может быть измерен этим объемом. Тем самым мы возвращаемся к подходу, обсужденному в первом параграфе данной главы. Будем считать также, что внешнее влияние первого предприятия на второе увеличивает издержки 2-го предприятия на одну и ту же величину, независимо от выпуска этого предприятия:

$$c_1 = c_1(y_1) \quad \text{и} \quad c_2 = c_{22}(y_2) + c_{21}(y_1)$$

причем $c'_{21}(y_1) > 0$.

В дальнейшем будем также предполагать выполненными стандартные предположения неоклассического анализа, а именно, предельные издержки обоих производителей положительны

$$c'_1(y_1) > 0,\ c'_{22}(y_2) > 0,$$

и не убывают по объемам производства. Потребительский спрос порождается репрезентативным потребителем с сепарабельной функцией полезности

$$u = v_1(x_1) + v_2(x_2) + z,$$

такой что предельные полезности $v'_k(x)$ положительны и убывают.

Проиллюстрируем на этом простом примере все рассмотренные нами инструменты корректировки фиаско рынка.

***Парето-оптимум.***

Индикатор благосостояния для данной экономики имеет вид

$$W = v_1(y_1) + v_2(y_2) - c_1(y_1) - c_{22}(y_2) - c_{21}(y_1).$$

Дифференцируя его, получаем следующую дифференциальную характеристику Парето-оптимальных состояний:

$$v'_1(\hat{y}_1) = c'_1(\hat{y}_1) + c'_{21}(\hat{y}_1),$$
$$v'_2(\hat{y}_2) = c'_{22}(\hat{y}_2).$$

Если общие издержки $c'_1(y_1) + c'_{21}(y_1)$ не убывают, то при сделанных выше предположениях, эта дифференциальная характеристика однозначно определяет объемы производства первых двух благ в Парето-оптимальных состояниях. Поэтому мы можем говорить о Парето-оптимальных объемах производства $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$.

***Рыночное равновесие.***

Поскольку обратные функции спроса и обратные функции предложения имеют вид:

$$p_1^D(y_1) = v'_1(y_1), \quad p_2^D(y_1) = v'_2(y_2),$$
$$p_1^S(y_1) = c'_1(y_1), \quad p_2^S(y_1) = c'_{22}(y_2),$$

то рыночное равновесие определяет следующая дифференциальная характеристика (равенство цен спроса и предложения на обоих рынках):

$$v'_1(\overline{y}_1) = c'_1(\overline{y}_1),$$
$$v'_2(\overline{y}_2) = c'_{22}(\overline{y}_2).$$

Сепарабельность функции полезности приводит к независимости объемов спроса и предложения первого и второго блага от других благ и поэтому позволяет анализировать их рынки независимо друг от друга. В дальнейшем мы будем характеризовать только рынок первого блага, так как характеристики рынка второго не зависят от выбранных способов регулирования первого. Заметим также, что отсутствие внешнего влияния первого производителя на второго приводит к тому, что производство второго блага в рыночном равновесии равно его количеству в каждом Парето-оптимальном состоянии $\bar{y}_2 = \hat{y}_2$ (Парето-оптимальному количеству). С другой стороны, сравнивая характеристики равновесного и Парето-оптимального количества первого блага, можем заключить, что при сделанных предположениях относительно внешних влияний (отрицательные экстерналии) выполнено $\hat{y}_1 < \bar{y}_1$. Это следует из того, что функция $v_1'(y_1) - c_1'(y_1)$ убывает, равна $c_{21}'(\hat{y}_1) > 0$ при $y_1 = \hat{y}_1$ и равна $0$ при $y_1 = \bar{y}_1$.

Рис. 84 показывает оптимальный $\hat{y}_1$ и равновесный $\bar{y}_1$ выпуски первого производителя и иллюстрирует причину фиаско рынка: первый производитель в своих расчетах издержек и дохода принимает во внимание только часть действительных предельных издержек, связанных с производством первого блага. Здесь $c_1'(y_1)$ — частные предельные издержки 1-го предприятия, а $c_1'(y_1) + c_{21}'(y_1)$ — общественные предельные издержки. Разница, $c_{21}'(y_1)$, соответствует предельному ущербу от экстерналии.

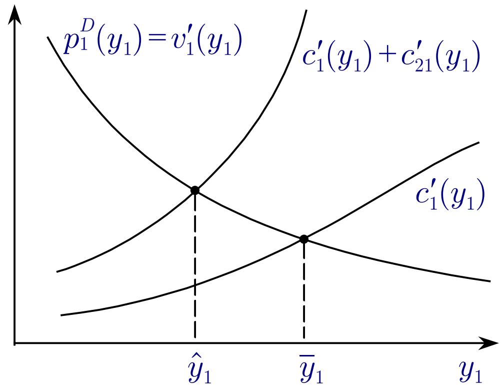


Рисунок 84.

***Квотирование.***

При количественном ограничении (квоте) на объем выпуска первого производителя в размере $\tilde{y}_1 = \hat{y}_1$ равновесие с квотами на рынке 1-го блага установится при цене $p_1 = p_1(\hat{y}_1)$ и объеме производства $\hat{y}_1$.

***Налог Пигу***.

Ставка налога Пигу на загрязнение равна

$$t = c_{21}'(\hat{y}_1),$$

поскольку при таком налоге равновесие с налогами Парето-оптимально. Действительно, решением задачи 1-го производителя,

$$\Pi_1(y_1) = p_1 y_1 - c_1(y_1) - t y_1 \rightarrow \max,$$

при цене первого блага $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ является величина $\hat{y}_1$.

***Дотации за сокращение загрязнений.***

Другое возможное решение проблемы экстерналий — **дотации** за уменьшение объема их производства ниже некоторой установленной квоты $\tilde{y}_1$. Пусть $s$ — ставка такого дотационного возмещения. Тогда прибыль от выпуска $y_1$ единиц продукции в условиях дотаций приносит прибыль в размере

$$\Pi_1(y_1) = p_1 y_1 - c_1(y_1) + s(\tilde{y}_1 - y_1),$$

и поэтому достигает максимального размера при объеме выпуска $y_1$ (единиц продукции), который определяется из уравнения

$$p_1 = c_1'(y_1) + s.$$

Как и выше, ставка дотационных выплат в размере $s = c_{21}'(\hat{y}_1)$ при цене первого блага $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ обеспечивает производство оптимального объема продукции $\hat{y}_1$ (и оптимального объема экстерналий). Это означает, что $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ — цена равновесия на рынке 1-го блага при таком выборе ставки дотаций.

Заметим, что величина квоты не влияет на равновесие на рынке первого блага. При $\tilde{y}_1 = 0$ дотация оказывается налогом, так как в равновесии $y_1 > \tilde{y}_1 = 0$.

***Торговля экстерналиями***.

Напомним, что К. Эрроу видел проблему экстерналий в отсутствии рынка экстерналий. Предположим, что существует рынок экстерналий и пусть цена единицы экстерналии составляет $q$. Объем производства экстерналий обозначим $a$.

Тогда задача первого производителя имеет вид

$$\Pi_1 = p_1 y_1 - qa - c_1(y_1) \to \max_{y_1, a},$$
$$y_1 = a,$$

а задача второго производителя имеет вид

$$\Pi_2 = p_2 y_2 + qa - c_{22}(y_2) - c_{21}(a) \to \max_{y_2, a}.$$

Покажем, что цены $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$, $p_2 = p_2^D(\hat{y}_2)$ и $q = c_{21}'(\hat{y}_1)$ являются ценами равновесия на рынках первых двух благ и экстерналий, а равновесные объемы производства будут равны $y_1 = a = \hat{y}_1$ и $y_2 = \hat{y}_2$.

Предложение экстерналий (их производство первым производителем) составляет тогда величину $a$, определенную соотношением

$$p_1 - q = c_1'(a),$$

а спрос — соотношением

$$q = c_{21}'(a).$$

Равновесие (равенство спроса и предложения) на рынке экстерналий определяет объем их производства, удовлетворяющий соотношению

$$p_1 = c_1'(a) + c_{21}'(a).$$

При $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ решением этого уравнения является $\hat{y}_1$.

При указанных ценах и объемах производства первых двух благ цены спроса и предложения на первые два блага равны:

$$p_1^D(y_1) = c_1'(y_1) + c_{21}'(y_1) = p_1^S(y_1)$$

и

$$p_2^D(y_2) = c_{22}'(y_2) = p_2^S(y_1),$$

что означает, что соответствующие цены являются равновесными.

⇐

## Задачи

18. Прибыль птицефабрики (фирмы 1) находится в зависимости от того, насколько сильно два алюминиевых завода (фирмы 2 и 3) загрязняют атмосферу. Цена на кур равна 6, цена на алюминий равна 2. Функции издержек равны

$$c_1 = 2y_1^2 + y_1(y_2 + y_3),$$
$$c_i = 0{,}5\, y_i^2,\ (i = 2,\, 3),$$

где $y_1$ — объем производства кур, $y_2$, $y_3$ — объем производства алюминия. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства (подразумевая, что фирмы могут делиться прибылью), (в) налоги/дотации Пигу, (г) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

19. Фирма 1 — пивзавод — сбрасывает в реку отходы, что уменьшает доходы двух одинаковых рыболовецких предприятий (фирмы 2 и 3). Цена на пиво равна 12, цена на рыбу равна 8. Функции издержек равны

$$c_1 = 2y_1^2,$$
$$c_i = 1{,}5\, y_i^2 + 2y_1 y_i,\ (i = 2,\, 3),$$

где $y_1$ — выпуск пива, $y_2$, $y_3$ — улов рыбы. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства (подразумевая, что фирмы могут делиться прибылью), (в) налоги/дотации Пигу, (г) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

20. Две фирмы оказывают друг на друга внешние влияния. Цена на продукцию 1-й фирмы равна 13, цена на продукцию 2-й фирмы равна 11. Функции издержек равны соответственно

$$c_1 = 2y_1^2 + 4y_1 y_2 + y_2^2,$$
$$c_2 = 3/2\, y_2^2 + 2y_1 y_2 + 3/2\, y_1^2,$$

где $y_j \geqslant 0$ — объемы выпуска. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства, (в) квоты, обеспечивающие Парето-оптимум, (г) налоги/дотации Пигу. Сравните прибыли в каждой из ситуаций.

21. («Садовод и пчеловод») Один из двух соседей — садовод — принимает ежегодно решение об объеме производства яблок (apples) $y_a \geqslant 0$, а второй — пчеловод — об объеме производства меда (honey) $y_h \geqslant 0$. Цены этих товаров экзогенны (т.е. ищем частное равновесие) и равны $p_a, p_h$ соответственно. Издержки обоих зависят от действий соседа, т.е. они имеют вид $c_a(y_a, y_h)$, $c_h(y_a, y_h)$, причем функции дифференцируемы и известно, что $\partial c_a(y_a, y_h)/\partial y_h < 0$ и $\partial c_h(y_a, y_h)/\partial y_a < 0$, т.е. издержки сбора яблок убывают в зависимости от количества пчел $y_h$, а издержки сбора меда убывают по переменной $y_a$. Цель обоих — максимизация своей прибыли

$$\pi_j = p_j y_j - c_j(y_j, y_{-j})\ (j = a, h).$$

Покажите, что внутреннее нерегулируемое равновесие здесь всегда не оптимально (где оптимум определяется по максимуму совокупной прибыли), причем объем производства обоих недостаточен (по крайней мере, локально). Постройте локальное Парето-улучшение.

22. [MWG] На ферме Джонса производится только мед. Существуют два способа производства меда: без пчел и с пчелами. По первому способу ведро искусственного меда (неотличимого от настоящего) производится из $1$ галлона кленового сиропа с использованием единицы труда. То же самое количество меда можно произвести традиционным способом (с пчелами). Для этого потребуется $k$ единиц труда и $b$ пчел. В обоих случаях ферма Джонса приспособлена к производству не более чем $H$ ведер меда.

На соседней ферме, принадлежащей Смиту, выращиваются яблоки. Если имеются пчелы, то требуется меньше труда, так как тогда опыление производится пчелами, а не работниками, при этом $c$ пчел заменяют одного работника. Ферма Смита позволяет вырастить $A$ бушелей яблок.

Предположим, что рыночная ставка заработной платы равна $w$, цена пчелы — $p_b$, а цена галлона кленового сиропа — $p_m$. Каждый фермер производит максимально возможное количество продукции, минимизируя издержки (предполагается, что рыночные цены таковы, что в оптимуме производство окупается). Является ли это состояние экономики эффективным? Как оно зависит от параметров $k$, $b$, $c$, $w$, $p_b$, $p_m$? Дайте интуитивное объяснение результата. Сколько Смит будет готов предложить Джонсу за то, чтобы он производил мед с помощью пчел? Была бы достигнута эффективность, если бы обе фермы принадлежали одному человеку? Какие налоги должно ввести правительство для достижения эффективности?

## *Слияние и торг*

Малочисленность участников торговли экстерналиями позволяет заключить, что конкурентный рынок как механизм перераспределения прав собственности (контроля над производством экстерналий) не может возникнуть — здесь мы сталкиваемся с типичным случаем двухсторонней монополии при любом определении прав собственности. Поэтому уместно рассмотреть и другие варианты механизмов координации действий экономических субъектов, связанных между собой посредством экстерналий.

### *Слияние*

Выше в Примерах 2 и 8 мы рассмотрели экстерналии в производстве, которыми затронуты две фирмы. Поскольку экстерналиями затронуты только эти две фирмы, то естественно было бы рассмотреть возможность их объединения в одну фирму.

**Пример 9 (продолжение Примера 2, с.349)**

В результате слияния предприятий образуется фирма, максимизирующая суммарную прибыль

$$\pi_\Sigma = p_1 y_1 + p_2 y_2 - p_3(a_1 + a_2)$$

по объемам производства и $y_j$ и затратам труда $a_j$ при технологических ограничениях

$$y_1 \leqslant f_1(a_1, y_2) \text{ и } y_2 \leqslant f_2(a_2, y_1).$$

Лагранжиан этой задачи имеет вид

$$L = p_1 y_1 + p_2 y_2 - p_3(a_1 + a_2) + \lambda_1(f_1(a_1, y_2) - y_1) + \lambda_2(f_2(a_2, y_1) - y_2).$$

Дифференцируя лагранжиан и приравнивая производные к нулю, получим следующую дифференциальную характеристику решения задачи максимизации суммарной прибыли:

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial a_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial a_2} \text{ и } \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial a_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial a_1}.$$

Учитывая дифференциальную характеристику решения задачи потребителя,

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_1}{p_3} \text{ и } \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3}=\frac{p_2}{p_3}.$$

убеждаемся, что характеристика равновесия при слиянии фирм совпадает с характеристикой Парето-оптимальных состояний.

$\Leftarrow$

У нас есть основания ожидать, что существенное внешнее влияние производителей друг на друга — исключительное явление, поскольку рыночные силы создают стимулы для интернизации экстерналий (т.е. превращение внешних влияний во внутрифирменные влияния) через слияние предприятий. Действительно, распределение прав собственности, при котором производство экстерналий неэффективно, приводит к рыночному равновесию, при котором совокупная прибыль обоих предприятий ниже, чем прибыль единого предприятия, полученного в результате их слияния.

Если в экономике существуют только экстерналии рассмотренного типа, то слияние предприятий полностью решает проблему экстерналий — экономика становится полностью «классической», и для нее верны (при выполнении соответствующих предположений) обе теоремы благосостояния.

Аналогично может решаться проблема внешнего влияния отдельного потребителя на фирму (или наоборот, фирмы на потребителя) — он может стать собственником фирмы, полностью ее контролировать и получать весь остаточный доход (с точки зрения сравнения с классической моделью важно то, что эта прибыль для такого собственника не экзогенна). Для моделирования подобной ситуации приходится несколько выйти за рамки классической модели общего равновесия, дополнив задачу потребителя производственным блоком. Однако такая модификация не создает серьезных трудностей с доказательством теорем благосостояния, и, соответственно, выводы по сравнению с обычной моделью не меняются.

### Торг

Вообще говоря, для интернизации экстерналий вовсе не обязательно должно происходить слияние в один экономический субъект с единой целевой функцией. Два отдельных экономических субъекта могут вступить в соглашение по поводу объема производства экстерналии и суммы компенсирующих платежей. Соглашение в условиях двусторонней монополии может быть достигнуто при помощи какой-либо процедуры **торга** (переговоров).

Рассмотрим опять ситуацию, когда одно предприятие (например, 1-е) оказывает внешнее влияние на другое предприятие (2-е). Пусть $a \in A$ — уровень этих внешних влияний. Технологические множества предприятий зависят от этого уровня: $Y_j(a)$. Если соглашение между фирмами непосредственно затрагивает только экстерналии и денежные платежи, но не технологии, выбираемые фирмами, то можно рассмотреть задачу выбора технологии, которая дает максимальный уровень прибыли фирмы при данном уровне экстерналий и при данном векторе рыночных цен $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max{}_{\boldsymbol{y}_j \in Y_j(a)}.$$

Обозначим через $\Pi_j^0(a,\boldsymbol{p})$ максимальную прибыль $j$-й фирмы при данных $\boldsymbol{p}$ и $a$.

Предположим, что торг между фирмами не влияет на их поведение на остальных рынках, и что они являются ценополучателями, т.е. действуют, считая цены $\boldsymbol{p}$ фиксированными. Это позволяет рассматривать вектор цен $\boldsymbol{p}$ в процедуре торга как фиксированный параметр.

Пусть $T$ — плата 2-й фирмы 1-й. (Если, наоборот, 1-я фирма платит 2-й, то $T$ будет отрицательной). В процедуре торга выбираются две переменные: $a$ и $T$.

Результат торга будет зависеть от его организации, или другими словами, соотношения **переговорной силы** сторон.. Рассмотрим в качестве примера возможной организации торга крайний случай простого одноэтапного торга («не хочешь, не бери»): одна из фирм предлагает соглашение $(a,T)$, а другая может либо согласиться, либо отказаться. В случае отказа фирмы оказываются в исходном состоянии (статус-кво).

Результат торга будет зависеть также и от статус-кво, т.е. от прав собственности (прав контролировать деятельность, вызывающую экстерналии). Стандартный случай, который мы рассматривали выше при анализе рыночного равновесия, заключается в том, что уровень экстерналий выбирается той фирмой, которая их производит (в нашем случае это 1-я фирма). Можно рассмотреть также противоположный случай, когда уровень экстерналий выбирается той фирмой, на которую они воздействуют (в нашем случае это 2-я фирма). В обоих случаях фирма, выбирающая экстерналии решает задачу максимизации прибыли по уровню экстерналий:

$$\Pi_j^0(a) \to \max{}_{a\in A}.$$

Если $A=\mathbb{R}_+$ и экстерналии отрицательные, то можно ожидать, что 2-я фирма выберет нулевой уровень экстерналий, а первая — такой, что $\partial\Pi_1^0(a)/\partial a=0$.

Возможны и другие варианты. Законодательство может накладывать количественное ограничение на экстерналии (квоту). Например, может быть установлено, что $a=\tilde{a}$ и этот уровень может быть изменен только с согласия обеих сторон. При каждом распределении прав собственности будет выбран определенный уровень экстерналий, например, $a=\bar{a}$, и прибыли фирм в статус-кво составят $\bar{\Pi}_1=\Pi_1^0(\bar{a})$ и $\bar{\Pi}_2=\Pi_2^0(\bar{a})$.

В результате торга прибыли предприятий окажутся равными

$$\Pi_1=\Pi_1^0(a)+T,$$
$$\Pi_2=\Pi_2^0(a)-T.$$

Коль скоро прибыль трансферабельна, оптимальное значение $a$ с точки зрения предприятий — это значение $a$, максимизирующее суммарную прибыль:

$$\Pi_1^0(a)+\Pi_2^0(a) \to \max{}_{a\in A}.$$

Пусть $\hat{\Pi}_\Sigma$ — соответствующий максимум. Наличие экстерналий в типичных случаях ведет к тому, что $\hat{\Pi}_\Sigma>\bar{\Pi}_1+\bar{\Pi}_2$, и, следовательно, возможны взаимовыгодные соглашения между предприятиями. В частности, если объем экстерналий выбирает первое предприятие на таком уровне, что $\partial\Pi_1^0(a)/\partial a=0$, то такие возможности всегда существуют. Действительно, если первое предприятие уменьшает производство экстерналий на величину $\Delta a$, то его прибыль в первом приближении уменьшается на величину

$$\partial\Pi_1^0(a)/\partial a\cdot\Delta a=0$$

(т.е. в первом приближении остается постоянной) тогда как прибыль второго возрастает на величину

$$\partial\Pi_2^0(a)/\partial a\cdot\Delta a,$$

более чем достаточную, чтобы компенсировать потери первого (по крайней мере, при небольших изменениях выпуска).

Учитывая это, предположим, что имеется положительный нереализованный излишек $\hat{\Pi}_\Sigma-\bar{\Pi}_1-\bar{\Pi}_2$, и предприятия могут в результате торга поделить его между собой.

Предположим сначала, что соглашение $(a,T)$ предлагает первое предприятие. Оно не будет отвергнуто вторым предприятием только в том случае, если его прибыль окажется в результате сделки не ниже, чем в статус-кво. В этих условиях естественно ожидать, что первое предприятие предложит сделку, которая является решением следующей задачи:

$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + T \to \max{}_{a\in A,T},$$
$$\Pi_2 = \Pi_2^0(a) - T \geqslant \bar{\Pi}_2.$$

Ясно, что для первой фирмы выгодно сделать платеж $T$ как можно большим, поэтому в оптимуме ограничение выходит на равенство, и прибыль второй фирмы будет такой же, как в статус-кво. Подставляя $T = \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_2$ в прибыль первой фирмы, получим эквивалентную задачу:

$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_2 \to \max{}_{a\in A},$$

Поскольку $\bar{\Pi}_2$ является константой, то решением задачи будет уровень экстерналий, максимизирующий суммарную прибыль.

Таким образом, в результате торга будет достигнут, фактически, такой же результат, как и при слиянии предприятий. Чтобы включить рассмотренную модель торга в модель общего равновесия, мы должны вспомнить, что результат торга зависит от вектора цен $\boldsymbol{p}$. В равновесии объем экстерналий $\bar{a}$ должен быть результатом торга при равновесных ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, а равновесная технология каждого из двух предприятий, $\bar{y}_j$, должна быть решением вышеприведенной задачи максимизации прибыли по $y_j$ при данном уровне экстерналий $\bar{a}$ и ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$. Если все экстерналии в экономике интернизируются при помощи торга, то равновесия должны быть оптимальными по Парето.

Если соглашение будет предлагать второе предприятие, то оно, соответственно, будет решать задачу

$$\Pi_2 = \Pi_2^0(a) - T \to \max{}_{a\in A,T},$$
$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + T \geqslant \bar{\Pi}_1,$$

которая сводится к задаче

$$\Pi_2 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_1 \to \max{}_{a\in A}.$$

Ясно, что и в этом случае решением задачи будет уровень экстерналий, максимизирующий суммарную прибыль.

Этот анализ иллюстрирует Рис. 85.

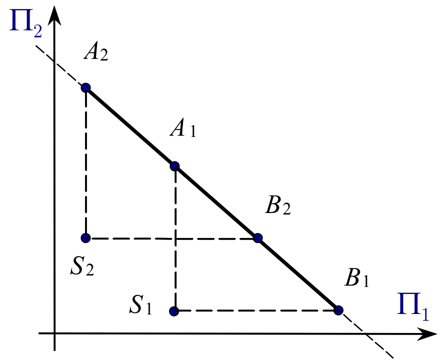


Рисунок 85.

Точка $S_1$ изображает статус-кво в случае, когда право контроля производства экстерналий принадлежит первому производителю. Точка $S_2$ — статус-кво в случае, когда право контроля над производством экстерналий принадлежит первому производителю.

При этом треугольник $S_1A_1B_1$ изображает множество ситуаций, которые могут быть получены как результат Парето-улучшений статус-кво $S_1$, а треугольник $S_2A_2B_2$ — как результат Парето-улучшений статус-кво $S_2$.

Проведенный анализ можно проинтерпретировать в более абстрактных терминах теории торга. В более общем случае рассматривается множество $\mathcal{R}$ возможных распределений прибыли $(\Pi_1, \Pi_2)$, которые в нашей ситуации описываются соотношением

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a),\ a \in A.$$

Эффективная граница этого множества, $\mathcal{P}$, характеризуется следующим образом: распределение прибыли $(\Pi_1, \Pi_2)$ принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда не существует распределений прибыли $(\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2)$, принадлежащих $\mathcal{R}$, таких что

$$\Pi_1 \leqslant \tilde{\Pi}_1, \Pi_2 \leqslant \tilde{\Pi}_2,$$

и по крайней мере одно из этих неравенств строгое. В нашем примере это требование эквивалентно отсутствию во множестве $\mathcal{R}$ точек $(\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2)$, таких что

$$\Pi_1 + \Pi_2 < \tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2.$$

Другими словами, в нашей ситуации $(\Pi_1, \Pi_2)$ принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\Pi_1 + \Pi_2 = \hat{\Pi}_\Sigma$.

Предполагается, что если участники торга не придут к соглашению, то они окажутся в ситуации, когда их прибыли равны $(\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2)$. Эта ситуация называется **точкой угрозы**. Точки $(\Pi_1, \Pi_2)$ множества $\mathcal{P}$, для которых выполняется соотношение $\Pi_1 \geqslant \bar{\Pi}_1$, $\Pi_2 \geqslant \bar{\Pi}_2$ составляют так называемое **переговорное множество**. В предложенной выше модели переговоров в качестве точки угрозы выбиралась ситуация, которую следует ожидать в отсутствие соглашения. На Рис. 85 отрезок $A_1B_1$ представляет переговорное множество для торга с точкой угрозы $S_1$, а $A_2B_2$ — переговорное множество для торга с точкой угрозы $S_2$.

Говоря неформально, соглашение — любая точка множества $\mathcal{R}$. Торг — механизм достижения соглашения. Торг эффективен, если соответствующее соглашение принадлежит переговорному множеству. Таким образом, любой эффективный торг ставит в соответствие точке угрозы некоторую точку переговорного множества.

Рассматривая одноэтапный торг типа «не хочешь, не бери», мы получили два крайних случая распределения переговорной силы. В случае многоэтапного торга распределение переговорной силы может быть иным, и результат торга может оказаться внутри переговорного множества[122]. Более того, оказывается, что для любой точки переговорного множества можно придумать механизм торга, которые бы ее реализовал.

Заметим, что, не зная механизма торга, мы не можем предсказать его точный исход (конкретную точку переговорного множества): как уже говорилось, перераспределение прибыли $(\Pi_1, \Pi_2)$ будет зависеть от организации переговоров, переговорной силы участников и т.д. Однако *можно ожидать, что ничто не будет мешать рациональным хозяйствующим субъектам достигнуть оптимального состояния; при этом объем производства экстерналий (но не величина компенсации) не будет зависеть ни от первоначального распределения прав собственности, ни от характера организации переговоров, он будет определяться максимумом суммарной прибыли предприятий.*

Этот результат известен под названием «**теоремы Коуза**». По словам самого Рональда Коуза «конечный результат (который максимизирует ценность производства) не зависит от правовой позиции, если предполагается, что ценовая система работает без издержек»[123].

Проиллюстрируем проведенный анализ на конкретном примере. В отличие от рассмотренной теоретической модели экстерналии в нем совпадают с выпуском первого предприятия. Однако такое изменение не меняет общих выводов.

**Пример 10 (продолжение Примера 8, с.378).**

При данных ценах $p_1$, $p_2$ прибыли равны

$$\Pi_1^0 = p_1 y_1 - c_1(y_1),$$
$$\Pi_2^0 = p_2 y_2 - c_{22}(y_2) - c_{21}(y_1).$$

Поскольку изменение прибыли второго предприятия при изменении $y_1$ не зависит от величины $y_2$, в целях упрощения анализа будем считать прибыль второго предприятия равной величине убытка от экстерналий со знаком минус за вычетом платежа $T$:

$$\Pi_2^0 = -c_{21}(y_1) - T.$$

Объем экстерналии $y_1$, максимизирующий суммарную прибыль, определяется уравнением

$$p_1 = c_1'(y_1) + c_{21}'(y_1).$$

Пусть, более конкретно,

$$c_1(y_1) = y_1^2,\ c_{21}(y_1) = y_1^2.$$

Тогда $\Pi_1^0 = p_1 y_1 - y_1^2$, $\Pi_2^0 = -y_1^2$. Суммарная прибыль,

$$\Pi_1^0 + \Pi_2^0 = p_1 y_1 - 2y_1^2,$$

достигает максимума при выпуске $y_1 = p_1/4$ и равна $p_1^2/8$;

Точка угрозы $S_1$ определяется на основе решения задачи

$$\Pi_1^0 = p_1 y_1 - y_1^2 \to \max_{y_1}.$$

При этом $\bar{y}_1 = p_1/2$, $\bar{\Pi}_1 = p_1^2/4$, $\bar{\Pi}_2 = -p_1^2/4$.

Точка угрозы $S_2$ определяется на основе решения задачи

---

[122] Подробнее о многоэтапном торге можно узнать в приложении, посвященном теории игр.

[123] R. H. Coase. "The Problem of Social Cost," *Journal of Law and Economics*, **3** (1960), 1-44 (рус. пер. Р. Коуз, Проблема социальных издержек, в кн. Фирма, рынок и право. — М.: Дело, 1993). См. также R. H. Coase, "Notes on the Problem of Social Cost," in: *The Firm, the Market and the Law*, The University of Chicago Press, 1988, 157-186 (рус. пер. Р. Коуз, Заметки к проблеме "социальных издержек", *там же*).

$$\Pi_2^0 = -y_1^2 \to \max_{y_1},$$

При этом $\overline{y}_1 = 0$, $\overline{\Pi}_1 = 0$, $\overline{\Pi}_2 = 0$.

Таким образом, $S_1 = (p_1^2/4, -p_1^2/4)$, $S_2 = (0; 0)$.

Исходы четырех вариантов торга приведены ниже:

[1, 1]: $\Pi_1 = 3p_1^2/8$, $\Pi_2 = \overline{\Pi}_2 = -p_1^2/4$, $T = 3p_1^2/16$,

[1, 2]: $\Pi_1 = \overline{\Pi}_1 = p_1^2/4$, $\Pi_2 = -p_1^2/8$, $T = p_1^2/16$,

[2, 1]: $\Pi_1 = p_1^2/8$, $\Pi_2 = \overline{\Pi}_2 = 0$, $T = -p_1^2/16$,

[2, 2]: $\Pi_1 = \overline{\Pi}_1 = 0$, $\Pi_2 = p_1^2/8$, $T = -3p_1^2/16$,

где [i, j] обозначает ситуацию, когда права контроля над производством экстерналий принадлежат $i$-му предприятию, а право предложить вариант соглашения — $j$-му предприятию. Во всех случаях результатом торга будет уровень производства экстерналий $y_1 = p_1/4$, соответствующий максимально возможной суммарной прибыли $p_1^2/8$.

Величину прибылей при различных распределениях прав собственности и различных процедурах переговоров иллюстрирует Рис. 86.

⇐

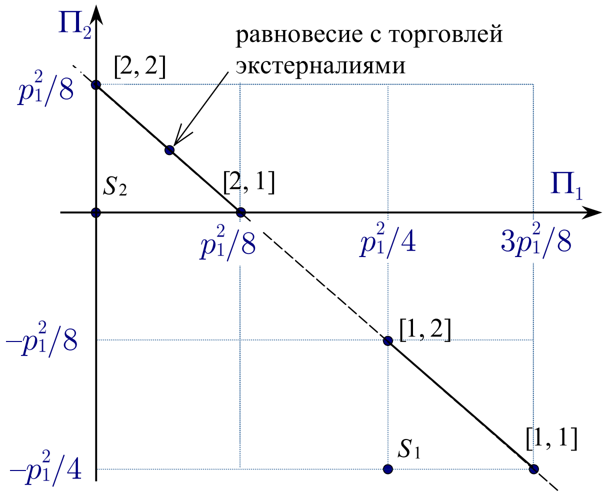


Рисунок 86

Р. Коуз трактовал проблему экстерналий как проблему нечеткого определения прав собственности. В ситуации, когда права собственности определены четко и обеспечено их соблюдение, издержки сделок, в том числе и издержки переговоров по передаче прав собственности (прав контроля над деятельностью, вызывающей экстерналии) отсутствуют (пренебрежимо малы), эффективное производство будет обеспечено при любом распределении прав собственности (прав контроля над производством экстерналий).

Если трансакционные издержки достижения соглашения не равны нулю, то торг может не приводить к Парето-оптимуму (оптимуму первого ранга). Но деятельность других возможных институтов, в рамках которых может осуществляться контроль над экстерналиями, тоже связана с трансакционными издержками. По мнению Коуза это обязательно следует учитывать при сравнении различных институтов.

При ненулевых трансакционных издержках, речь, таким образом, должна идти об оптимуме второго ранга. Если оставаться в рамках рыночного решения проблемы экстерналий — через соглашение между сторонами — желательно, чтобы права собственности были распределены так, чтобы трансакционные издержки достижения соглашения были минимальными.

Другая важная причина невозможности достижения эффективных соглашений (которой Коуз не уделил достаточного внимания) — асимметричная информация. Если участники торга неодинаково информированы (например, не знают точно прибыль противоположной стороны в статус-кво), то соглашение может не быть достигнуто, либо может быть выбран неоптимальный объем экстерналий. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе, посвященной рынкам с асимметричной информацией.

### Задачи

23. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями. Потребитель $X$ имеет функцию полезности

$$u_x = x_1 x_2 + 2z - z^2.$$

Потребитель $Y$ имеет функцию полезности

$$u_y = y_1 y_2 - z^2.$$

Здесь $x_k$, $y_k$ — объемы потребления двух обычных благ, $z$ — уровень (отрицательного) внешнего влияния $X$ на $Y$ ($X$ имеет право выбирать его произвольно). Потребитель $X$ владеет единицей первого блага, а потребитель $Y$ — единицей второго блага. Потребители рассматривают пропорции обмена как данные (условия совершенной конкуренции).

(1) Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(2) Желая изменить $z$, потребитель $Y$ предлагает потребителю $X$ $t$ единиц второго блага в обмен на то, что тот установит $z$ на уровне $z^*$. Потребитель $X$ может либо согласиться на эту сделку, либо отказаться. На этом торг между ними заканчивается.

Торговля на обоих рынках происходит одновременно, т.е. сделка на рынке экстерналий изменяет начальные запасы благ и влияет на равновесную цену $p$. Учтите, что при этом оба потребителя считают, что не могут повлиять на цену $p$!

Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(3)* Решите ту же задачу в случае, когда $u_x = x_1 x_2 + 2\theta z - z^2$, где случайная величина $\theta$ принимает значения $0$ и $1$ с равной вероятностью, и значение $\theta$ известно только потребителю $X$.

## *Торговля квотами на однородные экстерналии*

Рассмотренные выше «не координированное» рыночное равновесие, равновесие с налогами и равновесие с торговлей экстерналиями неявно предполагали существование некоторой системы прав собственности на экстерналии. Так, рыночное равновесие предполагает «право» производителя экстерналий на их производство в любом объеме. Равновесие с налогами и равновесие с торговлей экстерналиями предполагает «возмещение» ущерба от экстерналий теми, кто их производит.

В этой параграфе мы изучим влияние других систем прав собственности на состояние экономики, а также результатов «рыночной» торговли правами собственности.

Заметим, прежде всего, что множество Парето-оптимальных состояний не зависит от распределения прав собственности. А поскольку величина цен экстерналий в равновесии с торговлей экстерналиями и ставки налогов Пигу определяются характеристиками соответствующего Парето-оптимального состояния, распределение прав собственности при реализации этого состояния как равновесия с налогами или равновесия с торговлей экстерналиями влияет лишь на величины трансфертов.

Рассмотрим квазилинейный вариант экономики с однородными экстерналиями, которые «производят» только предприятия и «потребляют» только потребители, проанализированной в Примере 6. Предпочтения описываются функциями полезности вида

$$u_i = v_i(\boldsymbol{x}_i, \sum_j a_j) + z_i,$$

а технологии — функциями издержек $c_j(\boldsymbol{y}_j, a_j)$.

Предположим, что для каждого производителя установлена квота на производство экстерналий в размере $\tilde{a}_j$. При этом задача производителя имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j, \tilde{a}_j) \to \max{}_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0}$$

Покажем, что если распределение квот произвольно, то равновесие с квотами не Парето-оптимально.

Предположим, что $(\boldsymbol{p}, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с квотами, $\bar{a}_j \in \operatorname{int}(A_j)$, причем существуют по крайней мере два производителя, таких что

$$\frac{\partial c_{j_1}}{\partial a_{j_1}} \neq \frac{\partial c_{j_2}}{\partial a_{j_2}}.$$

Тогда состояние $((\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}))$ не является Парето-оптимальным. Мы покажем это, построив строгое Парето-улучшение в дифференциалах. Пусть $da_j$ — дифференциально малые изменения объемов экстерналий. Тогда при условии, что объемы выпуска первых $l$ благ остаются неизменными, суммарные затраты $(l+1)$-го блага изменяются на величину

$$\sum_j \frac{\partial c_j}{\partial a_j} da_j.$$

Несовпадение предельных издержек производства экстерналий означает, что можно уменьшить суммарные затраты $(l+1)$-го блага, не изменяя общий объем экстерналий, т.е. выбрав $da_j$ так, что $\sum_j da_j = 0$. Строгое Парето-улучшение можно получить, распределив эту величину, например, поровну между всеми потребителями.

Таким образом, можно увеличить общественное благосостояние, перераспределяя квоты. Покажем, что такое (увеличивающее благосостояние) перераспределение можно получить на основе рыночной торговли квотами.

Будем предполагать, что производители могут продавать и покупать квоты по рыночной цене $p_a$. Задача производителя приобретает следующий вид:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j, a_j) + p_a(\tilde{a}_j - a_j) \to \max{}_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0, a_j \in A_j}.$$

Более формально определим **равновесие с торговлей квотами** $(\boldsymbol{p}, p_a, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ в данной экономике следующим образом:

- Набор $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и экстерналиях $\bar{\boldsymbol{a}}$.
- Технология $(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{r}_j, \bar{a}_j)$ является решением задачи производителя при ценах $\boldsymbol{p}$, $p_a$.
- Выполнены балансы по обычным благам.
- Суммарное «производство» экстерналий равно общей квоте:

$$\sum_j a_j = \sum_j \tilde{a}_j.$$

Докажем сначала, что состояние равновесие с торговлей квотами приводит к состоянию экономики $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{a}})$, для которого не существует Парето-улучшения при условии, что общий объем производства экстерналий остается постоянным, т.е. при условии, что

$$\sum_j a_j = \sum_j \tilde{a}_j.$$

Такое состояние называют **оптимумом второго ранга**. Заметим, что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{a}})$ при этом является решением следующей задачи на условный максимум:

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = \sum_i v_i(\boldsymbol{x}_i, \sum_j a_j) - \sum_j c_j(\boldsymbol{y}_j, a_j) \to \max{}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}}$$

$$\sum_i \boldsymbol{x}_i = \sum_j \boldsymbol{y}_j. \qquad (\mathcal{W}_C)$$

$$\sum_j a_j = \sum_j \tilde{a}_j$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0,$$

$$\boldsymbol{y}_j \geqslant 0,\ a_j \in A_j$$

Другими словами, верна следующая теорема:

**Теорема 9.**

Пусть $(\boldsymbol{p}, p_a, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями. Тогда $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{a}})$ является решением задачи $(\mathcal{W}_C)$.

***Доказательство.***

Пусть $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{a}')$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{W}_C)$.

Поскольку $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя, то набор $\boldsymbol{x}'_i$ не может дать потребителю более высокую полезность при тех же ценах, т.е.

$$v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \sum_j \tilde{a}_j) - \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i \geqslant v_i(\boldsymbol{x}'_i, \sum_j \tilde{a}_j) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_i. \qquad (*)$$

С другой стороны $(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{a}_j)$ — решение задачи производителя, поэтому $(\boldsymbol{y}'_j, a'_j)$ не может дать производителю более высокую прибыль при тех же ценах, т.е.

$$\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j - c_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{a}_j) + p_a(\tilde{a}_j - \bar{a}_j) \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}'_j - c_j(\boldsymbol{y}'_j, a'_j) + p_a(\tilde{a}_j - a'_j). \qquad (**)$$

Суммируя неравенства (*) и (**) получим, с учетом балансов по обычным благам и ограничения $\sum_j a_j = \sum_j \tilde{a}_j$, что

$$\sum_i v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \sum_j \tilde{a}_j) - \sum_j c_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j, \bar{a}_j) \geqslant \sum_i v_i(\boldsymbol{x}'_i, \sum_j \tilde{a}_j) - \sum_j c_j(\boldsymbol{y}'_j, \hat{a}_j).$$

Это означает, что $W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}}) \geqslant W(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{a}')$, т.е. $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ является решением задачи $(\mathcal{W}_C)$.

■

Укажем на два следствия этой теоремы.

### Теорема 10.

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями, а $(\check{\boldsymbol{p}}, \check{p}_a, (\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{z}}), (\check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{r}}, \check{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в той же экономике. Тогда $W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}}) \leqslant W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{a}})$.

Если, кроме того, $\bar{a}_j \in \operatorname{int}(A_j)$, и хотя бы для двух производителей выполнено

$$\frac{\partial c_{j_1}(\bar{\boldsymbol{y}}_{j_1}, \bar{a}_{j_1})}{\partial a_{j_1}} \neq \frac{\partial c_{j_2}(\bar{\boldsymbol{y}}_{j_2}, \bar{a}_{j_2})}{\partial a_{j_2}}, \qquad (\clubsuit)$$

то $W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}}) < W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{a}})$.

***Доказательство***.

Нестрогое неравенство $W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{a}}) \geqslant W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ является прямым следствием предыдущей теоремы.

Если выполнены дополнительные условия ($\clubsuit$), то, как было показано ранее, для равновесия с квотами существует Парето-улучшение, при котором суммарный объем экстерналий не меняется. Как известно, в квазилинейной экономике Парето-улучшение приводит к росту индекса благосостояния $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})$. Таким образом, равенство $W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{a}}) = W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ невозможно, поскольку $(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{a}})$ — решение задачи $(\mathcal{W}_C)$, а указанное Парето-улучшение приводит к допустимому решению задачи $(\mathcal{W}_C)$. Значит, неравенство строгое.

■

Мы показали, что, даже если торговля квотами не приводит к Парето-оптимальному состоянию, то по крайней мере, она приводит к росту общественного благосостояния. Следующая теорема говорит о том, что при правильном выборе общего размера квот на экстерналии торговля квотами обеспечивает достижение Парето-оптимального состояния.

### Теорема 11 («теорема Мида»)[124]

Пусть $(\boldsymbol{p}, p_a, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями, а $((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}), (\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{a}}))$ — некоторый Парето-оптимум этой экономики.

Если

$$\sum_j \tilde{a}_j = \sum_j \hat{a}_j,$$

то $((\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}))$ — Парето-оптимальное состояние экономики.

***Доказательство***.

Состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$ является решением задачи $(\mathcal{W}_C)$, а $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}})$ — допустимое решение этой же задачи. Поэтому

$$W(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}}) \leqslant W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}}).$$

С другой стороны, поскольку $((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}), (\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{a}}))$ — Парето-оптимум, то

$$W(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}}) \geqslant W(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}}).$$

---

[124] Meade, J. "External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation," *Economic Journal*, **62** (1952), 54-67.

Значит, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{a}})$, как и $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{a}})$, является решением задачи $(\mathcal{W})$, и, следовательно, $((\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}))$ — Парето-оптимальное состояние экономики.

■

**Замечание**.

Если $(\boldsymbol{p}, p_a, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — Парето-оптимальное равновесие с торговлей квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями. Тогда если налоги на экстерналии $t_j$ для всех производителей выбрать равными $p_a$, то $(\boldsymbol{p}, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \{t_j\})$ — равновесие с налогами. Верно и обратное утверждение:

Предположим, что $(\boldsymbol{p}, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \{t_j\})$ — равновесие с налогами Пигу, причем, $t_j = t_0$., т.е. ставки налога одинаковы для всех производителей.[125] Тогда $(\boldsymbol{p}, t_0, (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{z}}), (\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{a}}), \tilde{\boldsymbol{a}})$ — равновесие с торговлей квотами при любых квотах $\tilde{\boldsymbol{a}}$, таких что.

$$\sum_j \tilde{a}_j = \sum_j \bar{a}_j.$$

Аналогичная связь существует и между равновесием с торговлей квотами и равновесием с торговлей экстерналиями. Читателю предлагается самостоятельно сформулировать соответствующие утверждения.

### Задачи

24. Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами и однородными экстерналиями. Первое благо производится из второго по технологиям, описываемым функциями издержек вида

$$c_j(y_j, a_j) = y_j^2 + \left(a_j - \frac{j+n}{2n}\right)^2 \ (j = 1, \ldots, n),$$

где $y_j$ — объем производства первого блага, $a_j$ — объем производства экстерналий. Функция полезности репрезентативного потребителя имеет вид

$$u(x, \sum_{j=1}^{n} a_j) = \ln(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j + z,$$

где $x$ — объем потребления первого блага, $z$ — объем потребления второго блага.

(1) Найдите равновесие без регулирования.

(2) Найдите Парето-оптимум.

(3) Пусть на объемы производства экстерналий установлены одинаковые квоты $\tilde{a}$. При каких квотах благосостояние будет максимальным?

(4) Найдите равновесие с торговлей квотами в зависимости от квот $\tilde{a}$. При каких квотах будет достигаться Парето-оптимум?

## *Задачи к главе*

25. Какие из понятий не имеют прямого отношения к теории экстерналий?

a) налоги Рамсея

---

[125] В ситуации, когда равновесие с налогами Пигу внутреннее по объемам экстерналий и функции издержек дифференцируемы, налоги Пигу у всех производителей должны совпадать.

б) налоги Кларка

в) налоги Пигу

г) теорема Коуза

26. [MWG] Рассмотрим экстерналии, затрагивающие двух потребителей. Функции полезности потребителей имеют вид $u_i = v_i(h) + z_i$ $(i = 1, 2)$, где $h$ — уровень экстерналии, $z_i$ — количество денег, расходуемое на другие блага. Функции $v_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы, причем $v_i''(\cdot) < 0$ $(i = 1, 2)$, $v_1'(\cdot) > 0$, $v_2'(\cdot) < 0$. Первый потребитель обладает неограниченным правом производить экстерналии.

(1) Охарактеризуйте результат свободного действия рынка. Покажите, что он будет неоптимальным.

(2) Каким должен быть оптимальный налог Пигу на 1-го потребителя?

(3) Допустим, 2-й потребитель может ослабить влияние экстерналий, затратив некоторые усилия $e$. При этом его функция полезности имеет вид $u_2 = v_2(h, e) + m_2$, и $\partial^2 v_2 / \partial h \partial e > 0$ (чем больше уровень усилий, тем меньше предельная «вредность» экстерналий). Нужно ли облагать налогами или субсидировать усилия, чтобы достичь оптимального равновесия?

27. [MWG] Производитель имеет дифференцируемую строго выпуклую функцию издержек $c(y, h)$, где $y$ — объем выпуска ($p$ — рыночная цена выпускаемого блага), $h$ — уровень (отрицательных) экстерналий. Экстерналии влияют на потребителя, чья функция полезности имеет вид $u = v(h) + z$, где $z$ — количество денег, расходуемое на другие блага.

(1) Найдите условия первого порядка для задачи фирмы.

(2) Найдите условия первого порядка Парето-оптимума.

(3) Покажите, что налог на экстерналии может привести к оптимальности, а налог на производство в общем случае — нет.

(4) При какой форме функции издержек налог на производство все же приводит к оптимальности?

28. [Laffont] Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами, $m$ потребителями и одним производителем, с функцией издержек $c(y) = y^2$. Производитель оказывает отрицательное внешнее влияние на потребителей:

$$u_i = \ln x_i + z_i - 0{,}5 \ln y$$

Каждый потребитель располагает начальным запасом в виде четырех единиц квазилинейного блага. Предполагается, что каждый потребитель пренебрегает своим влиянием (через предъявляемый им спрос) на величину производства и, тем самым, на свою полезность.

(1) Найдите конкурентное равновесие и вычислите величину благосостояния.

(2) Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния этой экономики. Покажите, что равновесие не может принадлежать границе Парето. Вычислите чистые потери благосостояния в равновесии.

(3) Найдите налоги Пигу и соответствующее равновесие (предполагается, что налоги распределяются между потребителями с помощью фиксированных трансфертов). Объясните, почему того же результата можно добиться, облагая потребление. Какая при этом должна быть ставка налога?

(4) Покажите, что «национализация» производства, при которой предприятию разрешено выбирать только планы производства, дающие нулевую прибыль, еще менее предпочтительна, чем свободное функционирование рынка. Объясните, почему.

(5) Пусть в ситуации предыдущего пункта потребление $x_i$ облагается налогом. Определите оптимальный уровень ставки налога (максимизирующий благосостояние). Почему данное состояние будет Парето-оптимальным? Объясните, почему налоговые сборы здесь будут больше, чем от оптимальных налогов в конкурентном равновесии.

(6) Предположим, что национализированное предприятие устанавливает цену по правилу

$$(\text{цена}) = (\text{предельные издержки}) \cdot (1 + \mu),$$

Как ведет себя благосостояние в зависимости от маржи $\mu$? Может ли при таком ценообразовании достигаться оптимум?

# 9. Общественные блага

В той главе мы рассмотрим подробнее частный случай однородных экстерналий.

**Определение 1**.

Назовем **коллективным благом** такое благо, потребление которого одним потребителем не делает это благо недоступным для других потребителей; то есть связь между количеством $x_{ik}$, доступным потреблению отдельным ($i$-м) потребителем[126], и наличным количеством блага $k$ в экономике в целом ($x_k=\sum_j y_{jk}+\omega_{\Sigma k}$) выражается неравенством $x_{ik}\leqslant x_k$.

Иными словами, когда один из участников потребляет такое благо, то количество этого блага доступное другим участникам не уменьшается. Будем называть это свойство **неконкурентностью совместного потребления** (англ. *non-rivalness*). Самым распространенным видом коллективных благ является информация: изобретения, литературные произведения, аудио- и видеозаписи, компьютерные программы, кабельное телевидение и т.п.; так возможность посмотреть какую-то передачу по телевизору не зависит от того, что кто-то еще включил свой телевизор. Многие блага имеют характер *смешанный*, промежуточный между коллективными и обычными, частными благами. В качестве примера можно указать транспортную инфраструктуру (дороги, мосты), потребительские свойства которой ухудшаются по мере нарастания интенсивности ее использования.

Важным частным случаем коллективных благ являются так называемые общественные блага. Они обладают дополнительным свойством — **неисключаемостью** (*non-excludability*). Это означает, что физические или организационные условия не позволяют никого устранить из процесса потребления этого блага. Поэтому объем потребления общественного блага *одинаков* для всех потребителей и совпадает с объемом его производства[127].

**Определение 2**.

Коллективное благо, обладающее свойством неисключаемости называют **общественным благом**.

Формально, если $k$-ое благо является общественным, то объем $x_{ik}$ потребления этого блага $i$-ым потребителем равен[128] $x_{ik}=x_k=\sum_j y_{jk}$.

Общественные блага можно считать частным случаем экстерналий (рассматривать их, например, как положительные влияния производителей на потребителей) и поэтому мы имеем все основания ожидать неэффективность рыночных решений в ситуации с общественными благами.

---

[126] Для упрощения анализа рассматриваемых ниже моделей с общественными благами мы рассматриваем только случай, когда коллективные блага являются таковыми только для потребителей, другими словами, коллективные блага не затрачиваются в производстве. Если бы коллективные блага затрачивались в производстве, то нельзя было бы моделировать технологии как вектора чистых выпусков, нужно было бы различать производство и производственное потребление таких благ. Кроме того, в таком случае агрегирование предприятий не сводится к простой сумму технологических множеств.

[127] Будем предполагать, что начальные запасы каждого общественного блага у каждого потребителя равны нулю, что вполне согласуется с понятием общественного блага.

[128] Для более тонкого разграничения типов благ можно (мы не будем этого делать) ввести еще одну переменную — то количество общественного блага, которое реально потребляется участником. Оно может быть меньше имеющегося в распоряжении количества. Если предполагать неубывание функций полезности по этой переменной, разница между имеющимся и потребляемым не важна.

Типичный пример общественного блага — национальная безопасность. Обычно неисключаемость имеет не абсолютный, характер; просто исключение любого потребителя из процесса потребления этого блага связано с запретительно высокими издержками или институциональными, например, юридическими ограничениями. В тех случаях, когда исключение не связано с высокими издержками, один и тот же вид коллективных благ, например, телевизионные программы, дороги, может принимать как форму частного блага (кабельное телевидение, частные скоростные шоссе), так и общественного блага, т.е. блага, доступного для всех.

Неконкурентность совместного потребления затрудняет использование рыночного механизма для финансирования  блага. Она делает невозможным распределение этого блага посредством обычного конкурентного рынка, на котором цена единая и потребители и производители считают невозможным для себя повлиять на эту цену.

Неисключаемость создает дополнительную проблему — **проблему финансирования общественного блага**, которую часто называют **проблемой безбилетника**. Ей, в основном, и посвящена эта глава.[129]

Пример «трагедии общин» является иллюстрацией того, что неисключаемость может обуславливаться существующими в обществе институтами, и указывает одно из направлений, в котором может получить разрешение проблема безбилетника — установление собственности на коллективные блага, чтобы собственник имел право не допускать других субъектов к потреблению принадлежащего ему блага. В этой главе мы рассмотрим другие решения проблемы безбилетника.[130]

---

[129] Важно понимать, что для обычных, частных благ неисключаемость (невозможность не допустить к потреблению) создает еще более серьезную проблему; количество общественного блага по крайней мере не уменьшается от того, что его потребляет кто-то другой. Напротив, отсутствие охраны законом и/или моралью прав собственности на частные блага (например, на урожай огородов) быстро приводит к их исчезновению. Таким образом, мы наблюдаем существование только тех частных благ, права собственности на которые удается гарантировать (исключаемые блага).

[130] Укажем на два вида рыночных решений этой проблемы, которые отличаются распределением прав собственности. Как мы видели при рассмотрении экстерналий (и увидим в дальнейшем при обсуждении равновесия Линдаля), назначение индивидуализированной цены для каждого потребителя обеспечивает Парето-оптимальность равновесия. Близкий аналог индивидуализированной платы за коллективное благо — *ценовая дискриминация* (англ. discrimination – неодинаковое отношение) при продаже монопольных продуктов. Если производитель точно знает предпочтения каждого потребителя (и умеет предотвращать воровство — несанкционированное копирование), то монопольное равновесие с индивидуальными ценами окажется Парето-эффективным. При этом цены должны различаться не только в зависимости от потребителя, но и в зависимости от количества, купленного потребителем (индивидуальная цена на каждую единицу блага). Для коллективных благ характерно наличие больших капитальных затрат (англ. *lump-sum costs*) и небольших затрат на обеспечение потребления их дополнительным субъектом (например, издержки копирования информации). Обычное для конкурентных рынков установление цены по предельным издержкам здесь невозможно, поскольку не будут окупаться капитальные затраты. Таким образом, рынок благ коллективного потребления имеет тенденцию к монополизации — уменьшается количество фирм и увеличиваются их размеры, так что каждая отдельная фирма получает возможность влиять на цену. Это позволяет проводить ценовую дискриминацию — назначать разные цены для разных потребителей.

Другое решение той же проблемы — *кооператив* (или клуб) потребителей. Кооператив собирает деньги на приобретение блага от своих членов, а затем распределяет благо между ними, не допуская к потреблению не членов.

По сути дела, и коммерческая фирма, и кооператив решают одну и ту же задачу — задачу дискриминации: распределить финансирование общих затрат между потребителями в зависимости от их потребностей. Грубо говоря, платить должен тот, кому благо нужно в большей степени и кто готов больше заплатить. Вопрос состоит в том, какой из этих институтов может лучше справится с задачей.

## Экономика с общественными благами

Введем теперь модель **экономики с общественными благами**, которая отличается от классической модели введением общественных благ. Обозначим через $K_1$ множество общественных благ, а через $K_2$ — множество частных благ. Поскольку мы не различаем доступное для потребления и потребляемое количество общественного блага, то можно считать, что в потребительские функции прямо входит общий имеющийся объем общественного блага $x_k$, поэтому потребительский набор $i$-го потребителя приобретает вид

$$\boldsymbol{x}_i = (\{x_k\}_{k\in K_1}, \{x_{ik}\}_{k\in K_2}) = (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}).$$

Будем предполагать, что множество допустимых потребительских наборов $i$-го потребителя $X_i$ имеет следующую структуру:

$$X_i = X^{(1)} \times X_i^{(2)},$$

так что $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \in X_i$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{x}^{(1)} \in X^{(1)} \text{ и } \boldsymbol{x}_i^{(2)} \in X_i^{(2)}.$$

Состояние $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ экономики с общественными благами является допустимым, если выполнены следующие соотношения (напомним, что начальные запасы общественных благ мы считаем равными нулю):

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i,\ \forall i \in I,$$

$$x_k = \sum_{j\in J} y_{jk},\ \forall k \in K_1,\ \forall i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{j\in J} y_{jk} + \sum_{i\in I} \omega_{ik},\ \forall k \in K_2,$$

$$g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0,\ \forall j \in J.$$

Как и в рассматриваемых ранее моделях, каждое Парето-оптимальное состояние экономики с общественными благами может быть охарактеризовано как решение $m$ задач оптимизации. На их основе можно получить дифференциальную характеристику множества Парето-оптимальных состояний экономики с общественными благами в случае, когда функции полезности и производственные функции дифференцируемы.

Итак, допустимое состояние экономики $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$, является Парето-оптимальным тогда и только тогда, когда оно является решением следующих оптимизационных задач ($i_0 = 1, \ldots, m$):

$$u_{i_0}(\boldsymbol{x}_{i_0}) \to \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i,\ \forall i \in I,$$

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \geqslant u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i),\ \forall i \neq i_0,$$

$$g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0,\ \forall j \in J,$$

$$x_k = \sum_{j\in J} y_{jk},\ \forall k \in K_1,\ \forall i,$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{j\in J} y_{jk} + \sum_{i\in I} \omega_{ik},\ \forall k \in K_2.$$

Последнее равенство выражает материальные балансы для общественных благ, и только оно отличает эту задачу от соответствующей задачи для классической экономики. Соответствующий этим задачам лагранжиан (в котором пропущены константы $u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$) имеет вид:

$$L=\sum_{i\in I}\lambda_i u_i(\boldsymbol{x}_i)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(\boldsymbol{y}_j)+$$
$$+\sum_{k\in K_1}\sigma_k(\sum_{j\in J}y_{jk}-x_k)+\sum_{k\in K_2}\sigma_k(\sum_{j\in J}y_{jk}+\sum_{i\in I}\omega_{ik}-\sum_{i\in I}x_{ik}).$$

Если функции полезности $u_i(\cdot)$ и производственные функции $g_j(\cdot)$ дифференцируемы, то, дифференцируя лагранжиан, получим характеристику внутреннего Парето-оптимума (т.е. при обычном предположении, что $\hat{\boldsymbol{x}}_i\in\mathrm{int}(X_i)$).

Тогда для любой из указанных выше задач справедливо следующее утверждение (теорема Джона Фрица): существуют (не все равные нулю) множители Лагранжа ($\lambda_i$, $\mu_j$, $\sigma_k$) такие, что $\lambda_i\geqslant 0\ \forall i$, $\mu_j\geqslant 0\ \forall j$, и

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}=0\ \forall i\in I,\ \forall k\in K_1,\quad \frac{\partial L}{\partial x_{ik}}=0\ \forall i\in I,\ \forall k\in K_2,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}}=0\ \forall j\in J,\ \forall k\in K.$$

Условие регулярности (линейная независимость градиентов ограничений соответствующей задачи) гарантирует, что можно найти такой набор множителей Лагранжа, что $\lambda_{i_0}=1$. В рассматриваемом случае выполнение условия регулярности можно гарантировать, например, в случае, если в любом допустимом состоянии экономики для каждого потребителя $i$ существует частное благо $k\in K_1$, такое что $\partial u_i(\boldsymbol{x}_i)/\partial x_{ik}>0$, а для каждого производителя $j$ существует частное благо $k\in K_2$, такое что $\partial g_j(\boldsymbol{y}_j)/\partial y_{jk}<0$.

В этом случае, исключив из необходимых условий экстремума множители Лагранжа[131], получим дифференциальную характеристику оптимума:

$$\sum_{i\in I}\frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_k}{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik_0}}=\frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk_0}},\ \forall i\in I,\ \forall j\in J,\ \forall k\in K_1,$$
$$\frac{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik_0}}=\frac{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk_0}},\ \forall i\in I,\ \forall j\in J,\ \forall k\in K_2, \qquad (23)$$

где $k_0\in K_1$ — частное благо, такое что $\sigma_{k_0}\neq 0$.

Второе из полученных соотношений называют **уравнением Самуэльсона**[132]. Оно говорит, что *сумма* предельных норм замещения общественного блага на частное в потреблении равна предельной норме замещения общественного блага на частное в производстве.

Уравнение Самуэльсона иллюстрирует Рис. 87 («диаграмма Самуэльсона»)[133]. На трех совмещенных графиках ось ординат соответствует производству и потреблению общественного блага. Для того, чтобы найти Парето-оптимум, следует задаться некоторой кривой безразличия одного из потребителей, например, 2-го. На третьем графике кривая производственных возможностей совмещена с выбранной кривой безразличия. Расстояние по горизонтали между этими кривыми показано на первом графике в виде кривой. Точка ка-

---

[131] Проверьте, что множители Лагранжа $\lambda_i>0\ \forall i$, $\mu_j>0\ \forall j$ и существует по крайней мере одно благо $k_0\in K_1$, такое, что $\sigma_{k_0}>0$.

[132] Samuelson, P.A. "The Pure Theory of Public Expenditure," *Review of Economics and Statistics*, **36** (1954) 387-389. См. также статью Г. Боуэна, упомянутую в сноске 142.

[133] Существуют и другие иллюстрации уравнения Самуэльсона. См. напр. Рис. 90 («диаграмму Кольма») и комментарий к нему.

сания с кривой безразличия 1-го потребителя соответствует набору 1-го потребителя в Парето-оптимуме. Задавшись другой кривой безразличия 2-го потребителя, мы нашли бы другой оптимум.

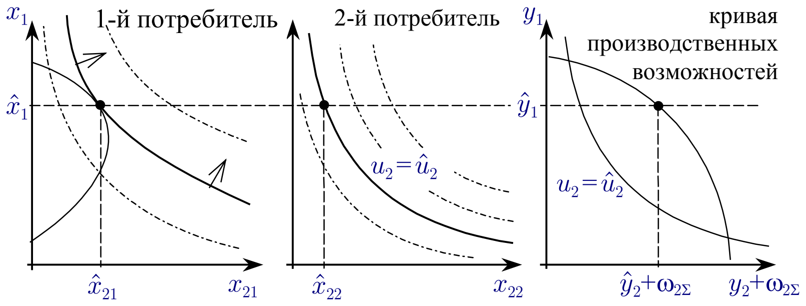


Рисунок 87. Иллюстрация условий Парето-оптимальности для экономики с общественным благом

## Задачи

1. Уравнение Самуэльсона связывает...

а) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

б) норму замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве;

в) норму замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

г) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве.

## Квазилинейная экономика с общественными благами

Особенно простым анализ экономики с общественными благами становится при квазилинейности функций полезности. Это соответствует анализу частного равновесия, который проводится в начальных курсах микроэкономики.

Будем предполагать, что в экономике два блага, одно из которых общественное, а другое — частное, причем

$$X^{(1)} \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ и } X_i^{(2)} = \mathbb{R}\ \forall i,$$

а предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности:

$$u_i(x, z_i) = v_i(x) + z_i\,,$$

где $x$ — объем потребления общественного блага (он равен объему производства $y$), а $z_i$ — объем потребления частного блага (который можно интерпретировать как объем потребления всей совокупности частных благ). Поскольку предпочтения линейны по $z_i$, последнее удобно считать денежной стоимостью частных благ.

Производственные возможности экономики описываются функцией издержек $c(y)$, (обратной к производственной функции), которая показывает минимальное количество частного блага, $r$, необходимое для производства $y$ единиц общественного блага.

В дальнейшем будем различать два случая. Первый— ситуация, когда общественное благо может производится и потребляться в любом количестве, является безгранично делимым, («непрерывный» случай), функции полезности и издержек — дифференцируемы. Второй — ситуация, когда производитель и (или) потребитель может выбирать лишь из конечного числа вариантов, как правило двух («производить — не производить», «потреблять — не потреблять»). Этот случай будем называть «дискретным».

Рассмотрим сначала непрерывный случай. Для него уравнение Самуэльсона имеет вид:

$$\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

Это соотношение можно установить независимо на основе характеристики Парето-оптимальных состояний квазилинейной экономики. Действительно, как было установлено ранее, Парето-оптимальное состояние квазилинейной экономики полностью характеризуется задачей максимизации индикатора благосостояния. Для рассматриваемой экономики эта задача имеет следующий вид:

$$W(x) = \sum_{i\in I} v_i(x) - c(x) \to \max_{x\geqslant 0}.$$

Таким образом, в этой экономике Парето-оптимальные состояния характеризуются объемом производства общественного блага, максимизирующим благосостояние, $\hat{x}$. Этот объем естественно назвать Парето-оптимальным объемом общественного блага. Если предельные полезности $v_i'(x)$ неотрицательны и не возрастают, причем хотя бы у одного потребителя они убывают, а предельные издержки $c'(y)$ положительны и не убывают, то такой объем будет единственным.

Для Парето-оптимального объема общественного блага выполняется соотношение:

$$\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) \leqslant c'(\hat{x}),$$

причем, если общественное благо производится, т.е. $\hat{y} > 0$, то

$$\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}),$$

В дальнейшем мы будем считать, что $\hat{x} > 0$.

Заметим, что в случае, когда первое благо — частное, условия Парето-оптимальности его производства и потребления имеют вид (случай, когда $x_i > 0$, $\forall i$):

$$v_i'(\hat{x}_i) = c'(\hat{y}),\ \forall i,$$

$$\sum_{i\in I} \hat{x}_i = \hat{y}.$$

Указанное различие можно проиллюстрировать следующим примером. Сравним, как принимаются решения в случае приобретения одного и того же блага (например, телевизора) в личное (частное благо) и коллективное пользование (общественное благо). В первом случае телевизор приобретается только в том случае, если цена не выше оценки телевизора для покупателя. Если же телевизор устанавливается в холле студенческого общежития, то решение о его приобретении должно приниматься уже на основе сравнения его цены и суммы оценок этого блага всеми студентами, живущими в общежитии.

Это пример уместнее проанализировать в контексте второй ситуации, поскольку рассматриваемое благо (телевизор) либо производится (и приобретается), т.е. $x = 1$ (при соответствующем выборе единиц измерения), либо нет, т.е. $x = 0$.

Будем предполагать без потери общности, что $v_i(0) = 0$, $c(0) = 0$, и обозначим $v_i(1) = v_i$ и $c(1) = c$. Тогда

$$W(0)=0 \quad \text{и} \quad W(1)=\sum_{i\in I} v_i - c.$$

Поэтому $\hat{x}=0$, если $\sum_i v_i < c$ и $\hat{x}=1$, если $\sum_i v_i > c$. В случае, когда $\sum_i v_i = c$, задача имеет два решения, поэтому оптимальным является любое решение относительно объема производства общественного блага.

### Задачи

2. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

При $a = a'$, $b = b'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен $x'$. При $a = ka'$, $b = kb'$ $(k > 0)$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен $x''$, где $x'' > x'$. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $k > 1$ или $k < 1$? Обоснуйте свое утверждение.

3. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида $u_j = v_j(x) + z_j$. Производные $v_j'(x)$ положительны и убывают. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = \alpha y$.

При $\alpha = \alpha'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен $x'$. При $\alpha = \alpha''$ $(\alpha'' > \alpha')$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен $x''$. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $x'' > x'$ или $x'' < x'$? Обоснуйте свое утверждение.

## *Равновесие с добровольным финансированием общественного блага (равновесие без координации)*

Заметим предварительно, что рассматриваемому случаю однородных экстерналий соответствует рыночное равновесие, в котором, как правило, общественное благо не производится, так как в нем нет механизма возмещения производителям общественных благ их затрат на такое производство[134]. Альтернативная возможность — механизм финансирования общественного блага на основе добровольных вкладов (пожертвований) потребителей этого блага. Примерами служат добровольные взносы в благотворительные фонды, финансирующие какие-либо общественные блага, например, научные исследования.

Рассмотрим одну из возможных формализаций такого механизма. Обозначим добровольный взнос $i$-го участника на приобретение $k$-го общественного блага через $t_{ik} \geqslant 0$. Будем предполагать также, что существуют рынки общественных благ. Поскольку благосостояние потребителя зависит от *общего* количества этих благ, то при определении своего взноса $t_{ik}$ потребитель $i$ формирует ожидания $(t_{isk}^e, \ \forall s \neq i)$ относительно взносов других участников.

---

[134] Есть исключения, например ситуации, когда производство общественного блага по технологическим причинам является побочным результатом производства частных (рыночных) благ.

Собранная сумма идет на приобретение общественного блага:

$$p_k x_k = p_k y_k = \sum\nolimits_i t_{ik},\ \forall k \in K_1.$$

Таким образом, задача потребителя $i$ имеет вид:

$$\begin{gathered} u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{t}_i} \\ \sum_{k \in K_1} p_k x_{ik} + \sum_{k \in K_2} t_{ik} \leqslant \beta_i, \\ p_k x_k = t_{ik} + \sum_{s \neq i} t^e_{isk},\ \forall k \in K_1, \\ \boldsymbol{x}_i \in X_i, \\ t_{ik} \geqslant 0,\ \forall k \in K_1. \end{gathered} \qquad (24)$$

**Определение 3.**

**Равновесие без координации** или, иначе, **равновесие с добровольным финансированием общественных благ**[135] есть набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой что

\# $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;

\# каждый набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и взносы $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ являются решением соответствующей задачи потребителя (24) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i$$

и ожиданиях $\{t^e_{isk}\}_{s \neq i, k \in K_2}$, таких что $t^e_{isk} = \bar{t}_{sk}\ \forall s \neq i,\ \forall k \in K_1$;

\# каждая технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (26) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

\# сумма взносов равна совокупным расходам на каждое общественное благо:

$$\bar{p}_k \bar{x}_k = \sum_{j \in J} \bar{p}_k \bar{y}_{jk} = \sum_{i \in I} t_{ik},\ \forall k \in K_1.$$

Охарактеризуем решение задачи потребителя в состоянии равновесия в предположении, что $\boldsymbol{x}_i \in \operatorname{int}(X_i)$. Функция Лагранжа этой задачи:;

$$L_i = u_i(\boldsymbol{x}_i) + \sum_{k \in K_1} \nu_{ik}\Big(t_{ik} + \sum_{s \neq i} t^e_{isk} - p_k x_k\Big) + \lambda_i\Big(\beta_i - \sum_{k \in K_1} t_{ik} - \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik}\Big).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nu_{ik} p_k = 0,\ \forall k \in K_1,$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} - \lambda_i p_k = 0,\ \forall k \in K_2,$$

$\dfrac{\partial L_i}{\partial t_{ik}} = \nu_{ik} - \lambda_i \leqslant 0$, причем $\nu_{ik} - \lambda_i = 0$, если $t_{ik} > 0$,

---

[135] По-видимому, впервые эту концепцию равновесия ввел Эдмон Маленво. См. его учебник E. Malinvaud, *Leçons de téorie microéconomique*, Paris: Dunot, 1969 (рус. пер. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. — М.: Наука, 1985). Маленво называл его равновесием с подпиской (фр. souscription). В русском языке есть более удачное слово *складчина*.

где $\lambda_i$ — множитель Лагранжа бюджетного ограничения, а $\nu_{ik}$ — множитель Лагранжа бюджета для $k$-го общественного блага.

Предположим, что для любого потребителя $i$ существует частное благо $k$, такое что $\partial u_i/\partial x_{ik}>0$. Тогда $\lambda_i>0\ \forall i$, что, в свою очередь, означает, что равновесная цена любого такого блага положительна.

Пусть $k_0$ — некоторое частное благо, такое что его цена положительна. Тогда $\partial u_i/\partial x_{ik_0}>0$ $\forall i$. Если потребитель $i$ делает положительный взнос на общественное благо $k$ ($t_{ik}>0$), то из дифференциальной характеристики решения задачи потребителя следует, что

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}=\frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Для потребителя, делающего нулевой взнос, такое равенство нормы предельной замены отношению цен может не выполняться. Можно проверить, что если равновесная цена общественного блага $k$ положительна, то, вообще говоря,

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}\leqslant\frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Из решения задачи $j$-го производителя

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}=\frac{p_k}{p_{k_0}},\ \forall j,\ \forall k\in K_1.$$

Предположим, что в равновесии суммарный взнос на общественное благо $k^*$ положительный, и пусть $i_1$ — потребитель, который делает положительный взнос на приобретение этого общественного блага. Тогда в равновесии должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0}}=\frac{p_{k^*}}{p_{k_0}}=\frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}},$$

В Парето-оптимуме же должно выполняться условие Самуэльсона:

$$\sum_i\frac{\partial u_i/\partial x_{k^*}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}=\frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}.$$

Отсюда следует, что равновесие и Парето-оптимум могут совпадать только если

$$\sum_{i\neq i_1}\frac{\partial u_i/\partial x_{k^*}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}=0.$$

В случае, когда $\partial u_i/\partial x_k\geqslant 0\ \forall i$, это соотношение имеет место только тогда, когда $\partial u_i/\partial x_k=0$ $\forall i\neq i_1$.

Следующая теорема неэффективности резюмирует эти рассуждения. По смыслу она противоположна обеим теоремам благосостояния.

**Теорема 1.**

Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с добровольным финансированием, такое что $\boldsymbol{x}_i\in\mathrm{int}(X_i)$ $\forall i\in I$, функции полезности и производственные функции дифференцируемы. Пусть, кроме того,

- для любого потребителя $i$ существует частное благо $k_0$, такое что $\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)/\partial x_{ik_0}>0$ и $\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}}_j)/\partial y_{jk_0}<0\ \forall j$;
- все предельные полезности по общественному благу $k^*$ неотрицательные,

$$\frac{\partial u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{k^*}} \geqslant 0,\ \forall i;$$

- ♦ в равновесии существует потребитель $i_1$ с $\bar{t}_{i_1k^*} > 0$,

причем по хотя бы для одного потребителя $i_2 \neq i_1$ неравенство строгое.

Тогда состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ не оптимально по Парето.

***Доказательство***.

Приведенные выше рассуждения, фактически, доказывают эту теорему.

Уместно привести альтернативное доказательство, показав, что можно построить Парето-улучшение, увеличив объем производства общественного блага и соответствующим образом перераспределив ресурсы. Существование такого Парето-улучшения можно неформально интерпретировать как локальную недостаточность количества общественного блага в равновесии.

Рассмотрим следующий дифференциально малый сдвиг из точки равновесия:

$$dx_{k^*} = dy_{jk^*} > 0 \text{ и } dy_{jk_0} < 0,\ \ dy_{jk_0} = dx_{i_1k_0} + dx_{i_2k_0}$$

$$\text{причем, } dx_{i_1k_0} < 0,\ dx_{i_2k_0} < 0,$$

где $j$ — произвольное предприятие.

Другими словами, предлагаемое изменение заключается в увеличении производства и потребления общественного блага $k^*$ на величину $dy_{jk^*}$, компенсированное уменьшением производства частного блага $k_0$ на величину $dy_{jk_0}$ и, соответственно, его потребления потребителями $i_1$ и $i_2$ на величину $dx_{i_2k_0}$ и $dx_{i_1k_0}$ соответственно.

Для того, чтобы новое состояние экономики было допустимым, величины $dy_{jk^*}$ и $dy_{jk_0}$ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_{jk_0}} dy_{jk_0} + \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk^*}} dy_{jk^*} = 0.$$

Указанные изменения объемов потребления благ $k^*$ и $k_0$ приводят к изменениям в уровне полезности потребителя $i_1$ на величину

$$du_{i_1} = \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{k^*}} dx_{k^*} + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_1k_0} = \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{k^*}} dy_{jk^*} + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_1k_0} =$$

$$= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} \left( \frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0}} dy_{jk^*} + dx_{i_1k_0} \right)$$

Учитывая дифференциальную характеристику равновесия (равенство предельных норм замещения блага $k^*$ на благо $k_0$ в производстве и потреблении для потребителя $i_1$), эту величину можно выразить как

$$du_{i_1} = \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} \left( \frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} dy_{jk^*} + dx_{i_1k_0} \right) =$$

$$= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} (-dy_{jk_0} + dx_{i_1k_0}) = -\frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_2k_0}.$$

Поскольку $\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0} > 0$, то при $dx_{i_2k_0} < 0$ прирост полезности $du_{i_1}$ положителен.

Аналогичные преобразования можно провести и для изменения полезности потребителя $i_2$:

$$du_{i_2}=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{k^*}}dx_{k^*}+\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}dx_{i_2k_0}=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{k^*}}dy_{jk^*}+\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}dx_{i_2k_0}=$$

$$=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}(\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}dy_{jk^*}+dx_{i_2k_0})=$$

$$=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}(-\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}\frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}dy_{jk_0}+dx_{i_2k_0})=$$

Представим изменения потребления блага $k_0$ в виде

$$dx_{i_2k_0}=\alpha\, dy_{jk_0},$$

где $\alpha\in(0,1)$ — доля потребителя $i_2$ в уменьшении потребления блага $k_0$. Тогда

$$du_{i_2}=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}(\alpha\, dy_{jk_0}-\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}\frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}dy_{jk_0})=$$

$$=\frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}}(\alpha-\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}\frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}})dy_{jk_0}=$$

Поскольку $dy_{jk_0}<0$, то $du_{i_2}>0$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha<\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}\frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}.$$

Мы можем всегда подобрать долю $\alpha\in(0,1)$, удовлетворяющую этому неравенству[136]. Таким образом, существует строгое Парето-улучшение в дифференциалах.

■

Заметим, что при отказе от любого из условий теоремы ее утверждение, вообще говоря, перестает быть справедливым. Так, равновесие при добровольной подписке может быть Парето-оптимальным в перечисленных ниже ситуациях.

**1)** Потребитель всего один $m=1$. (В этой ситуации, однако, едва ли уместно говорить об общественном благе).

**2)** Общественное благо в рассматриваемой экономике единственно и его «ценит» только один потребитель (сверх уровня, финансируемого этим потребителем), т.е. предельная полезность общественного блага при данной величине его потребления положительна только для одного потребителя (и равна нулю для остальных).

**3)** Предельные полезности всех общественных «благ» у одних участников положительны, у других отрицательны, и происходит точное уравновешивание.

**4**) Частные и общественные блага комплементарны в потреблении. Заметим, что при этом не выполнено условие дифференцируемости функций полезности.

**5**) Равновесие не является внутренним. Здесь полезно различать два возможных случая.

Случай (а): множество допустимых потребительских наборов обуславливают ограничение вида $x_{k^*}\geqslant 0$ по общественному благу $k^*$, и в равновесии производство этого блага равно нулю. Такое равновесие может быть Парето-оптимальным, если производство его оказывается «слишком дорогим», экономически неоправданным.

---

[136] Заметим, что если $\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}}=\frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}$, то $\alpha$ можно выбрать произвольно, другими словами, Парето-улучшение гарантируется при любых пропорциях уменьшения потребления первого блага. С другой стороны, если $\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}=0$, то мы не можем подобрать $\alpha$ и построить Парето-улучшение рассматриваемого типа.

Случай (б): в равновесии потребление всех благ, за исключением одного (общественного) блага равно нулю.

**6**) Равновесие может быть Парето-оптимальным и в случае, когда общественное благо является неделимым.

**Пример 1 (комплементарность частного и общественного блага).**

В экономике имеется два потребителя с функциями полезности

$$u_i(x_1, x_{i2}) = \min(x_1, x_{i2}),$$

где $x_1 \geqslant 0$ — потребление общественного блага, $x_{i2} \geqslant 0$ — потребление частного блага $i$-м потребителем, и один производитель с неявной производственной функцией

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2,$$

где $y_1$ — производство общественного блага, $y_2$ — чистое производство частного блага ($-y_2$ — затраты частного блага). Другими словами, имеющаяся технология позволяет произвести единицу общественного блага из единицы частного.

Потребители имеют только запасы частного блага в размере $\omega_i > 0$. Баланс по общественному благу имеет вид $x_1 = y_1$, а по частному благу —

$$x_{12} + x_{22} = y_2 + \omega_1 + \omega_2.$$

Покажем, что любое равновесие в этой модели Парето-оптимально и любой Парето-оптимум можно реализовать как равновесие (при подходящем выборе трансфертов).

Опишем сначала Парето-оптимальные состояния данной экономики. Можно заметить следующие факты:

- В Парето-оптимуме количество общественного блага не может быть ниже потребления частного блага любым потребителем. Пусть, это не так, например, $x_1 < x_{12}$. Тогда можно немного уменьшить $x_{12}$ и произвести за счет этого больше общественного блага $x_1$. При этом полезность обоих потребителей возрастет.
- В Парето-оптимуме количество общественного блага не может быть выше потребления частного блага каждым из потребителем. Пусть это не так, т.е. $x_1 > x_{12}$ и $x_1 > x_{22}$. Тогда можно уменьшить немного производство общественного блага, произвести за счет этого больше частного блага и увеличить $x_{12}$ или $x_{22}$. При этом полезность соответствующего потребителя возрастет, а полезность другого потребителя не изменится.
- В любом Парето-оптимуме используются все ресурсы, т.е. выполнено

$$x_1 + x_{12} + x_{22} = \omega_1 + \omega_2.$$

Отсюда следует, что Парето-оптимальные состояния в этой экономике могут быть трех типов:

$$\text{(i) } x_{12} < x_1 = x_{22}, \text{ (ii) } x_{22} < x_1 = x_{12}, \text{ (iii) } x_1 = x_{12} = x_{22}.$$

Можно показать, что если в допустимом состоянии экономики выполнено одно из этих трех условий и используются все ресурсы, то это Парето-оптимум.

Опишем теперь равновесия в этой модели. Заметим, что в любом равновесии цены общественного и частного блага совпадают. Можно выбрать их равными единице: $p_1 = p_2 = 1$. Учитывая это, в равновесии задача потребителя имеет вид

$$\begin{aligned} &\min(x_1, x_{i2}) \to \max_{x_i, t_i} \\ &\quad x_{i2} + t_i \leqslant \beta_i, \\ &\quad x_1 = t_i + t_{-i}, \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_{i2} \geqslant 0,$$
$$t_i \geqslant 0.$$

Потребителю в равновесии выгодно полностью истратить свой доход $\beta_i$. Поэтому мы можем подставить $x_{i2} = \beta_i - t_i$ и $x_1 = t_i + t_{-i}$ в целевую функцию:

$$\min(t_i + t_{-i}, \beta_i - t_i) \to \max_{t_i}$$
$$0 \leqslant t_i \leqslant \beta_i.$$

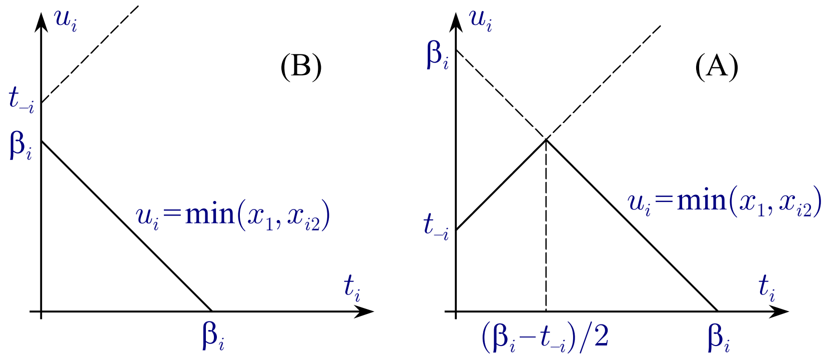


Рисунок 88. Комплементарность частного и общественного блага

Решение задачи потребителя будет зависеть от соотношения параметров $t_{-i}$ и $\beta_i$.

(A) Если $t_{-i} > \beta_i$, то $t_i = 0$, $x_1 = t_{-i}$ и $x_{i2} = \beta_i$.

(B) Если $t_{-i} \leqslant \beta_i$, то $t_i = (\beta_i - t_{-i})/2$, $x_1 = x_{i2} = (\beta_i + t_{-i})/2$.

Логически возможны 4 варианта равновесия: AA, AB, BA, BB. Вариант AA невозможен, так как при этом $t_1 = t_2 = 0$, а это, поскольку доходы потребителей неотрицательны, противоречит условиям $t_1 > \beta_2$ и $t_2 > \beta_1$. Все остальные варианты возможны. Охарактеризуем соответствующие им состояния равновесия.

(AB) Несложно проверить, что в таком равновесии

$$t_1 = 0,\ t_2 = x_1 = x_{22} = \beta_2/2,\ x_{12} = \beta_1.$$

Это равновесие возможно при условии, что $\beta_2 > 2\beta_1$.

(BA) Этот вариант получается из предыдущего заменой индексов:

$$t_2 = 0,\ t_1 = x_1 = x_{i1} = \beta_1/2,\ x_{22} = \beta_2.$$

Такое равновесие возможно при условии, что $\beta_1 > 2\beta_2$.

(BB) Такое равновесие должно удовлетворять уравнениям

$$t_1 = (\beta_1 - t_2)/2, \quad x_1 = x_{12} = (\beta_1 + t_2)/2,$$
$$t_2 = (\beta_2 - t_1)/2, \quad x_1 = x_{22} = (\beta_2 + t_1)/2.$$

Откуда получаем

$$t_1 = (2\beta_1 - \beta_2)/3, \quad t_2 = (2\beta_2 - \beta_1)/3,$$
$$x_1 = x_{12} = x_{22} = (\beta_1 + \beta_2)/3.$$

Это равновесие возможно при условиях $t_1 \leqslant \beta_2$, $t_2 \leqslant \beta_1$, т.е. $\beta_1 \leqslant 2\beta_2$, $\beta_2 \leqslant 2\beta_1$.

Заметим, что в любом равновесии

$$\beta_1 + \beta_2 = p_1\omega_1 + S_1 + p_2\omega_2 + S_1 = \omega_1 + \omega_2.$$

Несложно проверить, что каждом из этих типов равновесий выполнено

$$x_1+x_{12}+x_{22}=\beta_1+\beta_2.$$

Поскольку $\beta_1+\beta_2=\omega_1+\omega_2$, то в любом равновесии ресурсы используются полностью. В равновесиях типа (AB) выполнены условия (i), в равновесиях типа (BA) выполнены условия (ii), а в равновесиях типа (BB) выполнены условия (iii). Таким образом, любое равновесие Парето-оптимально.

Более того, в этой экономике любое Парето-оптимальное состояния можно реализовать как равновесие с добровольным финансированием. Так, например, Парето-оптимуму, удовлетворяющему условию (i), соответствует равновесие типа (AB), такое что

$$\beta_1=x_{12},\quad \beta_2=2x_1=2x_{22},\quad t_1=0,\quad t_2=x_1=x_{22}.$$

Парето-оптимуму, удовлетворяющему условию (iii), соответствуют равновесия типа (BB), такие что

$$\beta_1+\beta_2=3x_1=3x_{12}=3x_{22},\quad t_1=(2\beta_1-\beta_2)/3,\quad t_2=(2\beta_2-\beta_1)/3.$$

$\Leftarrow$

Мы привели пример экономики, соответствующей ситуации (4). Читателю предлагается привести примеры экономик, соответствующих ситуациям (2), (3), (5) и (6) самостоятельно.

Комментируя теорему, отметим, что при добровольном финансировании возможны ситуации, когда некоторые потребители не делают взносы на финансирование общественного блага. Таких потребителей называют «безбилетниками». В том случае, когда, например, предельные нормы замещения $\dfrac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k_0}}$общественного блага $k^*$ частным благом $k_0$ различны, только один потребитель финансирует производство общественного блага. Остальные оказываются безбилетниками. Ниже, для случая квазилинейной экономики мы покажем, что такая ситуация является типичной.

В случае квазилинейной экономики равновесие с добровольным финансированием общественного блага это набор $(\bar{p}, \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{x}, \bar{y})$ такой что

☞ При цене $\bar{p}$ взнос $\bar{t}_i$ является решением задачи потребителя

$$v_i((t_i+\sum_{s\neq i}\bar{t}_s)/\bar{p})-t_i \to \max_{t_i\geqslant 0}.$$

☞ Суммарная величина взносов совпадает с суммой, требуемой для финансирования общественного блага в объеме $\bar{x}$ по цене $\bar{p}$:

$$\sum_{i\in I}\bar{t}_i=\bar{p}\bar{x}.$$

☞ При цене $\bar{p}$ величина $\bar{y}$ является решением задачи производителя

$$py-c(y)\to \max_{y\geqslant 0}.$$

☞ Спрос на общественное благо равен предложению: $\bar{x}=\bar{y}$

В равновесии выполняются соотношения:

$$v_i'(\bar{x})\leqslant\bar{p},\quad \text{причем}\quad v_i'(\bar{x})=\bar{p}, \text{ если } t_i>0;$$

$$\bar{p}\leqslant c'(\bar{x}), \text{ причем } \bar{p}=c'(\bar{x}), \text{ если } \bar{x}>0.$$

Предположим, что $\overline{x}>0$ (равновесие внутреннее). Тогда существует потребитель $i_1$ такой, что $t_i>0$ и, следовательно, $v'_{i_1}(\overline{x})=c'(\overline{x})$.

Если $v'_i(\overline{x})\geqslant 0$, и существует не совпадающий с $i_1$ потребитель, для которого это неравенство строгое, то $\sum_i v'_i(\overline{x}) > c'(\overline{x})$.

Предположим, что предельные полезности $v'_i(x)$ неотрицательны и не возрастают, причем хотя бы у одного потребителя они убывают, а предельные издержки $c'(y)$ всюду положительны и не убывают. Тогда $\overline{x}> \hat{x}$, где $\hat{x}$ — Парето-оптимальный объем производства (и потребления) общественного блага. Это следует из того, что $W'(x)=\sum_i v'_i(x)-c'(x)$ — убывающая функция, $W'(\overline{x})>0$, и $W'(\hat{x})\leqslant 0$.

Появление этого эффекта недопроизводства общественных благ легко понять в контексте проводившегося нами анализа экстерналий, когда каждый потребитель, планируя приобретение общественного блага, не учитывает влияния своих действий (поскольку не заинтересован при таком механизме его финансирования учитывать это влияние) на рост благосостояния других потребителей, а поэтому планирует приобрести его слишком мало. Эта незаинтересованность учитывать влияние своих действий на благосостояние других участников составляет суть проблемы безбилетника: каждый потребитель заинтересован в увеличении вклада в финансирование общественного блага другими, но не заинтересован сам в увеличении своего.

Кто именно из потребителей будет безбилетником в квазилинейной экономике можно в ситуации, когда потребители ранжированы по их предельной оценке общественного блага безотносительно объема его потребления, т.е. в случае, если выполняется соотношение

$$v'_1(x) < v'_2(x) < \ldots < v'_m(x) \ \forall x>0.$$

Проанализируем свойства равновесий с добровольным финансированием в этой ситуации. Пусть $(\overline{p}, \boldsymbol{\overline{t}}, \overline{x}, \overline{y})$ — такое равновесие. Тогда

$$v'_m(\overline{x})\leqslant\overline{p}.$$

Поскольку $v'_i(\overline{x})<v'_m(\overline{x})\ \forall i\neq m$, то $v'_i(\overline{x})<\overline{p}$. Это влечет за собой то, что $\overline{t}_i=0$, $\forall i\neq m$, т.е. все потребители, кроме $m$ не участвуют в финансировании общественного блага.

(Аналогичный результат имеет место и в дискретном случае, когда

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_m.$$

А именно, в равновесии общественное благо может финансировать только $m$-й потребитель).

Таким образом, $\overline{x}=\overline{t}_m/\overline{p}$, и возможны равновесия двух типов:

(1) $\overline{t}_m=0$ и $\overline{y}=0$,

(2) $\overline{t}_m>0$ и $\overline{y}>0$.

В первом случае $v'_m(0)\leqslant\overline{p}\leqslant c'(0)$.[137] Поскольку предельная полезность $v'_m(x)$ не возрастает, а предельные издержки не убывают, то любое такое состояние будет соответствовать равновесию.

---

[137] Если величины $v'_m(0)$ и $c'(0)$ не определены, то эти величины в неравенстве следует заменить соответствующими пределами.

Во втором случае $v_m'(\overline{x})=\overline{p}=c'(\overline{x})$. Как и в первом случае, поскольку предельная полезность $v_m'(x)$ не возрастает, а предельные издержки не убывают, то любое такое состояние будет соответствовать равновесию. Данную ситуацию иллюстрирует Рис. 89.

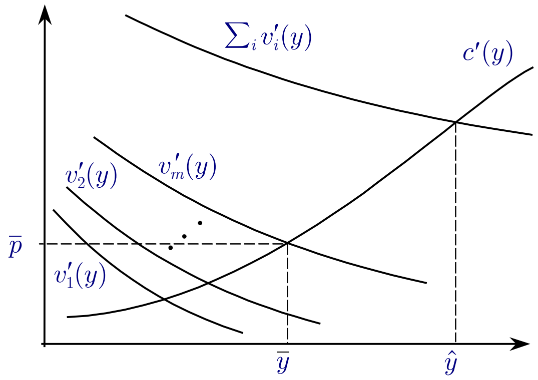


Рисунок 89. Равновесие с добровольным финансированием при упорядоченности оценок

Если $v_m'(0)<c'(0)$, то равновесие может быть только первого типа, а если $v_m'(0)>c'(0)$, то равновесие может быть только второго типа.

Предположим дополнительно, что функция $v_m'(x)-c'(x)$ убывает. Тогда необходимые условия равновесия являются достаточными. А именно, если

$$\overline{x}=\overline{y}$$
$$\overline{p}=v_m'(\overline{x})=c'(\overline{y}),$$
$$\overline{t}_m=\overline{p}\overline{x},$$

и

$$\overline{t}_i=0,\ \forall i\neq m,$$

то $(\overline{p},\overline{\boldsymbol{t}},\overline{x},\overline{y})$ является равновесием с добровольным финансированием. Действительно, необходимые условия решений задач потребителя и производителя выполнены, поскольку

$$v_i'(\overline{x})<v_m'(\overline{x})=\overline{p}=c'(\overline{y})\ \text{ и }\ \overline{t}_i=0,\ \forall i\neq m.$$

Сделанные выше предположения относительно поведения предельных полезностей и предельных издержек гарантируют, что необходимые условия решений задач потребителя и производителя являются достаточными.

Аналогично, если $v_m'(0)\leqslant\overline{p}\leqslant c'(0)$, то $(\overline{p},\mathbf{0},0,0)$ является равновесием с добровольным финансированием.

Отсюда следует, что (если функция $v_m'(x)-c'(x)$ непрерывна) равновесие существует тогда и только тогда, когда существует объем общественного блага $x$ такой, что $c'(x)\geqslant v_m'(x)$. Поскольку равновесный объем $\overline{x}$ удовлетворяет этому условию, то это условие является необходимым. Поэтому остается доказать достаточность. Действительно, если $v_m'(0)\leqslant c'(0)$, то существует равновесие с $\overline{x}=0$. Если же $v_m'(0)>c'(0)$, то по непрерывности существует $\overline{x}>0$, такой что $v_m'(\overline{x})=c'(\overline{x})$, и на его основе можно сконструировать равновесие.

Кроме того, в рассматриваемых условиях равновесие единственно. Читатель может доказать это самостоятельно.

**Пример 2.**

Пусть

$$u_i(x, z_i) = 2\alpha_i \ln x + z_i,\ c(y) = y^2.$$

Оптимальный объем производства общественного блага составляет тогда величину $\hat{y}$, удовлетворяющую соотношению Самуэльсона:

$$\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

В данном примере это соотношение имеет вид

$$\sum_{i\in I}(2\alpha_i/\hat{x}) = 2\hat{x} \text{ или } \hat{x}^2 = \sum_{i\in I}\alpha_i.$$

Заметим попутно, что $\hat{r} = \hat{x}^2$ — это как раз *издержки производства общественного блага*. Таким образом, оптимальный объем общественных расходов составляет величину

$$\hat{r} = \sum_{i\in I}\alpha_i.$$

В случае же равновесия с добровольным финансированием

$$v_i'(\bar{x}) \leqslant c'(\bar{x})\ \forall i,$$

т.е.

$$2\alpha_i/\bar{x} \leqslant 2\bar{x}\ \forall i \text{ или } \bar{x}^2 \geqslant \alpha_i\ \forall i.$$

Поскольку $\bar{x} > 0$, то существует по крайней мере один потребитель, который делает положительный взнос. Это означает, что $\bar{x}^2 = \max_i \alpha_i$. Объем расходов на общественное благо составляет величину

$$\bar{r} = \max_i \alpha_i.$$

Цена общественного блага равна $\bar{p} = c'(\bar{x}) = 2\bar{x}$, а сумма взносов равна

$$\sum_{i\in I}\bar{t}_i = \bar{p}\bar{x} = 2\bar{x}^2 = 2\bar{r}.$$

Пусть в экономике $3$ участника, и $\alpha_i = i$. Платить будет потребитель, который ценит общественное благо больше всех, а именно третий. Остальные предпочтут пользоваться благом бесплатно. Отсюда

$$\bar{r} = 3,\ \bar{x} = \bar{y} = \sqrt{3},\ p = 2\sqrt{3},\ \bar{t}_3 = 6,\ \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0.$$

В Парето-оптимуме $\hat{x} = \sqrt{6}$, то есть равновесное количество общественного блага меньше оптимального.

⇐

## Задачи

4. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \text{ и } u_2 = bv(x) + z_2\ (a, b \geqslant 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

При каких $a$ и $b$ (внутреннее) равновесие с добровольным финансированием будет Парето-оптимальным? Обоснуйте свое утверждение.

5. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

(1) Какие условия на $a$ и $b$ гарантируют, что во (внутреннем) равновесии с добровольным финансированием только у первого потребителя взнос будет положительным? Обоснуйте свое утверждение.

(2) Какие условия на функцию $v(x)$ гарантируют, что в равновесии с добровольным финансированием общественное благо будет производиться?

6. В экономике с общественным благом ($s > 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln s + z_1$, а другой — $u_2 = 2/3 \ln s + z_2$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0; 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить $\beta$ единиц общественного ($\beta > 0{,}5$). При каких значениях параметра $\beta$ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

7. В экономике с общественным благом ($G \geqslant 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 0{,}5\,G + z_1$, а другой — $u_2 = \gamma G + z_2$ ($\gamma > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 40)$ и $\omega_2 = (0; 20)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра $\gamma$ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

8. В экономике с общественным благом ($Q > 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln Q + z_1$, а другой — $u_2 = \delta \ln Q + z_2$. ($\delta > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0; 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра $\delta$ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

9. В экономике с общественным благом ($x \geqslant 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 2x + z_1$, а второй — $u_2 = \alpha x + z_2$ ($\alpha > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 10)$ и $\omega_2 = (0; 10)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра $\alpha$ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10. В экономике с общественным благом ($x > 0$) и частным благом первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln(2 + x) + z_1$, а второй — $u_2 = \delta \ln(2 + x) + z_2$ ($\delta > 0$). Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра $\delta$ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

11. В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 4\ln x_1 \text{ и } u_2 = \ln G + 3\ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — $5$ и $8$ соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из единицы частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

12. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = Gx_1$ и $u_2 = G^2x_2$, где $G$ и $x_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $G^3 = r$, где $r$ — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 0{,}5$, $\omega_2 = 2{,}5$. Прибыль предприятия целиком идет второму потребителю.

(A) Проверьте, что $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $G = 1$, $r = 1$, $p_G = 3$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

13. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{z} + \sqrt{x_1}$ и $u_1 = 2\sqrt{z} + \sqrt{x_2}$, где $z$ и $x_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $9z = a$, где $a$ — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 117$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(A) Проверьте, что $x_1 = 4$, $x_2 = 81$, $z = 4$, $a = 36$, $p_z = 9$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 36$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = -3/a - 1/x_1$ и $u_2 = -1/a - 1/x_2$, где $a$ и $x_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $a = 3h$, где $h$ — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 2/3$, $\omega_2 = 2/3$. Прибыль предприятия делится пополам между потребителями.

(A) Проверьте, что $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $a = 2$, $h = 2/3$, $p_a = 1$, $p_x = 3$, $t_1 = 2$, $t_2 = 0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

14. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = xz_1^4$ и $u_2 = xz_2$, где $x$ и $z_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $x^2 = z_0$, где $z_0$ — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 9/4$, $\omega_2 = 3/4$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(A) Проверьте, что $z_1=2$, $z_2=3/4$, $x=1/2$, $z_0=1/4$, $p_x=1$, $p_z=1$, $t_1=1/2$, $t_2=0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

15. В квазилинейной экономике с двумя благами, одно из которых — общественное, предпочтения потребителей $i=1,\ldots,m$ и заданы функциями полезности

$$u_i(G,z_i)=\alpha_i f(G)+z_i,$$

где $G$ — общественное благо, $z_i$ — оставшиеся деньги, $f(\cdot)$ — функция с убывающей производной. При этом выполняются неравенства $\alpha_i<\alpha_j$ при $i<j$. Технология задана функцией издержек единственного предприятия, $c(G)$. Охарактеризуйте равновесие с добровольным финансированием. Будут ли в этой ситуации безбилетники, и если будут, то кто? Обоснуйте. Сравните с Парето-оптимумом.

16. Пусть в квазилинейной экономике предпочтения потребителей описываются функцией полезности вида

$$u_i(x,z_i)=\alpha_i \ln x+z_i,$$

а функция издержек имеет вид

$$c(y)=y^2/2.$$

Начальные запасы частного блага у потребителей достаточно велики. Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага. При каких условиях в этой экономике будет по крайней мере один «безбилетник»? Какие потребители окажутся «безбилетниками»?

17. Предположим, что в экономике с тремя потребителями производство общественного блага финансируется с помощью добровольных взносов частного блага $t_i\geqslant 0$, причем единица общественного блага производится из единицы частного. Функции полезности равны $u_i=Gx_i$. Найдите равновесие и Парето-оптимум, если начальные запасы частного блага равны а) $\omega=(2;3;7)$, б) $\omega=(2;4;6)$.

18. [Bergstrom] (Субсидирование добродетели)

Благосостояние Аристотеля и Платона зависит от двух благ — одного частного и одного общественного. Их предпочтения совпадают и задаются вогнутой дважды дифференцируемой функцией полезности $u_i=u(x_1,x_{i2})$. Аристотель и Платон располагают одинаковыми запасами частного блага. Единицу общественного блага можно произвести из единицы частного. Его производство финансируется за счет добровольных взносов, и каждый из философов рассматривает взнос другого как данный. Добровольные взносы Аристотеля субсидируются из расчета $\sigma$ руб. субсидии за $1$ руб. взносов (другими словами, Аристотель фактически выплачивает $(1-\sigma)$ руб. на $1$ руб. взносов). Субсидии финансируются за счет аккордных налогов, бремя которых делится поровну между философами. Известно, что в равновесии производство общественного блага положительно.

(1) Кто из философов может делать в равновесии положительные взносы?

(2) Выиграет ли Платон, если субсидию будут выплачивать ему, а не Аристотелю? Как можно объяснить полученный результат?

(3) Предположим, что благовоспитанные философы получают моральное удовлетворение от того, что часть общественного блага куплена за их средства, другими словами, функция полезности зависит дополнительно от количества общественного блага, купленного за счет *чистого* взноса данного философа (т.е. без учета субсидий). Поменяется ли от этого ответ на предыдущий вопрос?

## Равновесие (псевдоравновесие) Линдаля

Ранее в этой главе были выведены дифференциальные характеристики Парето-оптимальных состояний экономики. Можно ли, по аналогии с экономиками без общественных благ, реализовать эти состояния экономики как рыночные равновесия, установив тем самым вариант второй теоремы благосостояния для таких экономик?

Покажем, что это возможно сделать, модифицировав должным образом понятие равновесия[138]. Сравнение дифференциальных характеристик Парето-оптимальных состояний экономик с общественными благами и классических экономик указывает направление такой модификации. Так, уравнения Самуэльсона, связывающие предельные нормы замещения общественного на частное благо в потреблении и производстве, не влекут за собой равенство предельных норм замещения общественного блага на частное для всех потребителей: в общем случае в Парето-оптимальных состояниях эти предельные нормы замещения могут быть разными. А поскольку в рыночном равновесии отношение предельных норм замещения благ равны отношению их цен, то возможная модификация рыночного равновесия состоит в отказе от единой цены для общественных благ и введении индивидуализированных цен таких благ.

Другими словами, будем считать, что каждый потребитель сталкивается с индивидуализированной ценой общественного блага, $q_{ik}$, $(k \in K_1)$. Далее, уравнение Самуэльсона подсказывает, что сумма индивидуализированных цен должна равняться цене, с которой сталкиваются производители общественного блага, т.е.

$$\sum_{i \in I} q_{ik} = p_k, \ \forall k \in K_1.$$

Такое равновесие с индивидуализированными ценами общественных благ называют **равновесием Линдаля**.

Приведем точную формулировку модели Линдаля.

Задача потребителя в модели Линдаля имеет вид[139]

$$\begin{aligned} & u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i} \\ & \sum_{k \in K_1} q_{ik} x_k + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i, \\ & \boldsymbol{x}_i \in X_i. \end{aligned} \tag{25}$$

Задача производителя имеет обычный вид

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \to \max_{\boldsymbol{y}_j}. \\ & g_j(\boldsymbol{y}_j) \geqslant 0, \ \forall j. \end{aligned} \tag{26}$$

---

[138] Заметим, что аналогичное исследование мы провели в общем случае экстерналий. Здесь мы его конкретизируем для частного случая рассматриваемых в этой главе — общественных благ.

[139] В случае частных благ все потребители сталкиваются с одинаковыми ценами и выбирают разные наборы, в случае общественных благ все наоборот: потребители сталкиваются с *разными ценами* и потребляют *одинаковые наборы*.

**Определение 4**.

Назовем $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ **равновесием (псевдоравновесием) Линдаля**[140], если

# $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;

# каждый набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением соответствующей задачи потребителя (25) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, и индивидуализированных ценах общественных благ $\{\bar{q}_{ik}\}_{k\in K_2}$ и доходах;

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i$$

# технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя (26) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

# сумма индивидуализированных цен общественного блага равна цене производителя:

$$\sum_{i\in I}\bar{q}_{ik} = \bar{p}_k \ \forall k\in K_1.$$

В равновесии Линдаля достигается **консенсус** в том смысле, что каждый потребитель при равновесных ценах предъявляет спрос именно на существующий (произведенный) объем общественного блага:

$$\bar{x}_{ik} = \bar{x}_k = \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}, \ \forall i, \ \forall k\in K_1.$$

Для случая дифференцируемых функций мы можем убедиться в совпадении дифференциальных характеристик внутренних Парето-оптимальных состояний и внутренних равновесий Линдаля.

Действительно, при сделанных ранее предположениях дифференциальная характеристика решения задачи потребителя (25) имеет вид:

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{q_{ik}}{p_{k_0}}, \ \forall i, \forall k\in K_1,$$

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}, \ \forall i, \forall k\in K_2.$$

где $k_0\in K_1$ — частное благо, такое что $p_{k_0}\neq 0$.

Аналогично, дифференциальная характеристика решения задачи производителя (26) имеет вид:

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}, \ \forall j, \ \forall k\in K.$$

Учитывая, что для общественных благ $\sum_i q_{ik} = p_k$, исключим из этих характеристик цены и получим уравнения, совпадающие с полученной ранее дифференциальной характеристикой оптимума.

---

[140] Lindahl, Erik, *Die Gerechtigkeit der Besteuerung*, диссертация, университет Лунда, 1919, ч. I, гл. 4, "Positiv Lösung" (англ. пер. Lindahl, E. "Just Taxation — a Positive Solution" in R.Musgrave and A.Peacock (eds.), *Classics in the Theory of Public Finance*. London: Macmillan, 1958). Эрик Линдаль, развивая идеи Кнута Викселя, предложил концепцию решения проблемы финансирования общественных благ, которую ниже мы называем равновесием при консенсусе. Более поздние исследователи назвали рассматриваемое в этой главе конкурентное псевдоравновесие «равновесием Линдаля», поскольку между двумя равновесными концепциями существует близкая связь (см. напр. D. K. Foley, "Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods," *Econometrica*, **38** (1970), 66-72).

Совпадение дифференциальных характеристик равновесия и Парето-оптимума при дополнительных предположениях вогнутости функций полезности и производственных функций гарантирует справедливость первой и второй теорем благосостояния для данного варианта экономик с общественными благами.

Равновесие Линдаля иллюстрирует Рис. 90 («диаграмма Кольма»). На рисунке изображена экономика с двумя благами, общественным ($k=1$) и частным ($k=2$), и двумя потребителями, в которой технология позволяет производить из единицы частного блага единицу общественного. Точки $A$, $B$ и $C$ соответствуют суммарным начальным запасам частного блага, $\omega_{\Sigma 2}=\omega_{12}+\omega_{22}$, отложенным по осям $x_1$, $x_{12}$ и $x_{22}$ соответственно. Они задают симплекс $ABC$ допустимых состояний экономики. Две дуги, показанные пунктиром, — это кривые безразличия потребителей в равновесии Линдаля в соответствующих системах координат. Их касаются бюджетные прямые потребителей, показанные штрих-пунктирными линиями. Все эти линии из систем координат потребителей $1$ и $2$ проецируются на плоскость $ABC$ параллельно осям $x_{22}$ и $x_{12}$ соответственно. Проекции двух бюджетных прямых совпадают — это прямая, проходящая через точку начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$ и через точку $\bar{\boldsymbol{x}}$ равновесия Линдаля. В точке $\bar{\boldsymbol{x}}$ две проекции кривых безразличия касаются друг друга (показаны сплошной линией). Касание проекций кривых безразличия говорит о Парето-оптимальности равновесия Линдаля.

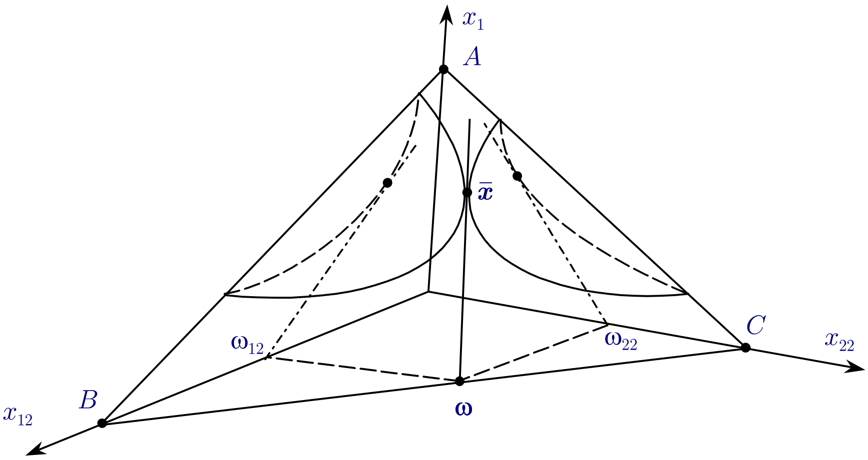


Рисунок 90. Иллюстрация равновесия Линдаля

Рассмотрим равновесие Линдаля в частном случае квазилинейной экономики. При индивидуализированной цене $q_i$ общественного блага спрос каждого потребителя на это благо есть решение следующей задачи:

$$v_i(x_i)-q_i x_i \to \max_{\boldsymbol{x_i \geqslant 0}}.$$

В случае, если ее решение — внутреннее ($x_i>0$), выполнено следующее условие первого порядка

$$q_i = v_i'(x_i).$$

Задача производителя имеет следующий вид:

$$py-c(y) \to \max_{y\geqslant 0}$$

Если ее решение внутреннее ($y>0$), то выполнено следующее условие первого порядка

$$c'(y)=p.$$

В равновесии $(\bar{p}, \{\bar{q}_i\}_i, \{\bar{x}, \bar{z}_i\}_i, \{\bar{y}, \bar{r}\})$ $\bar{x}$ является решением задачи потребителя при цене $\bar{q}_i$, $\bar{y}$ — решением задачи производителя при цене $\bar{p}$, причем $\bar{x}=\bar{y}$ и цены связаны соотношением $\overline{p}=\sum_i \overline{q}_i$. Равенство спроса и предложения на рынке первого блага автоматически гарантирует, по закону Вальраса, равновесие на рынке второго (частного) блага.

Таким образом, в равновесии имеет место соотношение

$$\sum_{i\in I} v_i'(\overline{x})=\overline{p}=\sum_{i\in I}\overline{q}_i=c'(\overline{y}).$$

т.е. выполняется дифференциальная характеристика Парето оптимума.

С другой стороны, любое допустимое состояние экономики $(\{\hat{x},\hat{z}_i\}_i,\{\hat{y},\hat{r}\})$, для которого выполняется данное соотношение, может быть реализовано как равновесие при дополнительном предположении о выпуклости функции издержек $c(y)$ и вогнутости функций полезности $v_i(x_i)$. Действительно, при индивидуализированных ценах $\overline{q}_i=v_i'(\hat{x})$ спрос каждого потребителя на общественное благо составляет величину $\hat{x}$, равную предложению этого блага $\hat{y}$ — объему производства, который максимизирует прибыль производителя при ценах $\overline{p}=\sum_{i\in I} q_i$.

Дифференцируемость функций полезности и производственных функций, не требуется для справедливости теорем благосостояния. Избыточным оказывается и требование вогнутости функций полезности и производственных функций для справедливости первой теоремы благосостояния.

Другими словами, можно показать, что имеют место следующие утверждения.

### Теорема 2 (первая теорема благосостояния)

Если $(\overline{\boldsymbol{p}},\overline{\boldsymbol{q}},\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$ — равновесие Линдаля в экономике с общественными благами, и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$ — Парето-оптимальное состояние.

Теорема имеет почти ту же формулировку, что и в случае с обычными, частными благами. Появляется лишь новая квалификация равновесия (равновесие по Линдалю).

### Теорема 3 (вторая теорема благосостояния)

Предположим, что предпочтения $\succsim_i$ потребителей непрерывны $\forall i$, предпочтения, а также множества $X_i$, $\forall i$ и $Y_j$, $\forall j$ выпуклы. Тогда, если $(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{y}})$ — внутреннее Парето-оптимальное состояние рассматриваемой экономики, то существуют цены $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, а также трансферты $\boldsymbol{S}$ такие, что $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})$ — псевдоравновесие Линдаля.

Установить справедливость этих утверждений можно, построив для рассматриваемой экономики модифицированную модель совершенного рынка *путем сведения общественных благ к частным* и убедившись в том, что

— допустимым и Парето-оптимальным состояниям исходной экономики соответствуют допустимые и Парето-оптимальные состояния модифицированной экономики;

— равновесию Линдаля исходной экономики соответствует вальрасовское равновесие модифицированной экономики;

— предположения сформулированных выше первой и второй теорем благосостояния для экономики с общественными благами гарантируют выполнение предположений первой и второй[141] теорем благосостояния для модифицированной (классической) модели.

Смысл этого сведения состоит в следующем. В ситуациях описанного типа мы сталкиваемся с вариантом производственных экстерналий (все произведенное количество блага $k$, $k \in K_1$, должно потребляться каждым потребителем). Поэтому, в соответствии с рецептом рассматриваемого в предыдущей главе «решения» для экономики с экстерналиями, для каждого такого типа экстерналий должны быть учреждены рынки ($I \times K_1$ вместо $K_1$ как в случае, если бы эти блага были частными) с собственными (индивидуализированными) ценами общественных благ на каждом из таких рынков.

Опишем элементы этой модифицированной экономики: множество благ, множество потребителей, множество производителей, множество допустимых потребительских наборов, предпочтения и начальные запасы для каждого потребителя, технологическое множество для каждого производителя. Каждому частному благу сопоставим одно благо, а каждому общественному благу $k$ сопоставим набор из $m$ благ — по одному на каждого потребителя. Таким образом, в модифицированной экономике $ml_1 + l_2$ благ, где $l_1$ — число общественных, а $l_2$ — число частных благ в исходной экономике. Множества потребителей и производителей не меняются.

Модифицированное потребительское множество $\tilde{X}_i$ потребителя $i$ строится на основе $X_i$ по следующему правилу:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i = (\boldsymbol{x}_{i,1}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}_{i,m}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \in \tilde{X}_i$$

тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{x}_{i,i}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \in X_i,$$

$$\boldsymbol{x}_{i,s}^{(1)} = \mathbb{0} \ \forall s \neq i.$$

Предпочтения $i$-го потребителя $\tilde{\succeq}_i$ связаны с предпочтениями $\succeq_i$ в исходной экономике по следующему правилу:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i \tilde{\succeq}_i \tilde{\boldsymbol{z}}_i$$

тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{x}_{i,i}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \succeq_i (\boldsymbol{z}_{i,i}^{(1)}, \boldsymbol{z}_i^{(2)}).$$

Начальные запасы состоят только из частных благ в прежних количествах:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = (\mathbb{0}, \dots, \mathbb{0}, \boldsymbol{\omega}_i^{(2)}).$$

Технологическое множество $\tilde{Y}_j$ фирмы $j$ имеет следующую структуру. Технология

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j = (\boldsymbol{y}_{j,1}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{y}_{j,m}^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)})$$

является допустимой в технологическом множестве $\tilde{Y}_j$ ($\tilde{\boldsymbol{y}}_j \in \tilde{Y}_j$) тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{y}_{j,1}^{(1)} = \dots = \boldsymbol{y}_{j,m}^{(1)} = \boldsymbol{y}_j^{(1)},$$

и

$$(\boldsymbol{y}_j^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)}) \in Y.$$

---

[141] Для второй теоремы благосостояния это не совсем так, поскольку не для всех благ будет выполнено условие внутренности, поэтому теорема несколько модифицируется.

Заметим, что технологическое множество каждого производителя позволяет производить индивидуализированные блага только в одинаковых количествах (независимо от того, какому потребителю они «предназначены»).

По построению $(\{(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)})\}_i, \{(\boldsymbol{y}_j^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)})\}_j)$ — допустимое состояние в исходной экономике тогда и только тогда, когда

$$(\{(\mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \boldsymbol{x}_i^{(2)})\}_i, \{(\boldsymbol{y}_j^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}_j^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)})\}_j) \text{ —}$$

допустимое состояние в модифицированной экономике.

Аналогичное утверждение можно сделать и относительно взаимосвязи между Парето-оптимальными состояниями исходной и модифицированной экономики.

Читателю оставляется в качестве упражнения проверка того, что набор $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \{(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)})\}_i, \{(\boldsymbol{y}_j^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)})\}_j)$ — равновесие Линдаля в исходной экономике с общественными благами тогда и только тогда, когда $(\tilde{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ — вальрасовское равновесие в модифицированной экономике, где

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}),$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i = (\mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}),$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j = (\boldsymbol{y}_j^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}_j^{(1)}, \boldsymbol{y}_j^{(2)}).$$

**Пример 3 (продолжение Примера 2).**

Пусть опять

$$u_i(x, z_i) = 2\alpha_i \ln x + z_i, \; c(y) = y^2.$$

В равновесии Линдаля

$$\bar{p} = c'(\bar{y}) = 2\bar{y}.$$

$$\bar{q}_i = v_i'(\bar{y}) = 2\alpha_i / \bar{y}.$$

Пользуясь $\sum\limits_{i \in I} \bar{q}_i = \bar{p}$, получим $\bar{y} = \sqrt{\sum_i \alpha_i}$, что совпадает с Парето-оптимальным объемом производства общественного блага $\hat{y}$.

Пусть в экономике $3$ участника, и $\alpha_i = i$. Тогда

$$\bar{y} = \sqrt{6}, \bar{p} = 2\sqrt{6}, \bar{q}_1 = 2/\sqrt{6}, \bar{q}_2 = 4/\sqrt{6}, \bar{q}_3 = 6/\sqrt{6}.$$

⇐

Модификация понятия равновесия позволяет получить характеристику Парето-оптимальных состояний экономики с общественными благами, аналогичную второй теореме благосостояния для экономики с частными благами. Тем самым, конструкция, предложенная Линдалем, указывает на возможность использовать механизм цен для координации решений и действий потребителей и производителей, для достижения эффективного распределения ресурсов в такой экономике, как и в экономике с частными благами.

Но эта конструкция скорее подчеркивает проблемы, которые связаны с использованием механизма цен для координации решений участников, чем дает описание этого механизма. Здесь есть три обстоятельства, на которые следует обратить внимание, подчеркивающие нереалистичность этой конструкции как механизма координации хозяйственной деятельности потребителей и производителей:

1. В теореме большое значение имеет то, что это модель совершенной конкуренции, что на рынках потребители и производители действуют как ценополучатели, т.е. воспринимают цены благ как данные. Такая гипотеза является оправданной, когда производителей

и потребителей достаточно много. Хотя мы можем здесь предположить, что производителей общественного блага довольно много, то есть со стороны производителей нам нет никаких оснований считать, что эта гипотеза совершенной конкуренции нарушена, однако покупатель общественного блага на каждом индивидуализированном рынке всего один, т.е. это чистый случай монопсонии. И, конечно, в этой ситуации предполагать, что покупатель будет действовать как ценополучатель никаких оснований нет. Конечно, если попытаться реализовать эту конструкцию Линдаля в реальной жизни, то потребитель будет использовать свое влияние на цены для того, чтобы установить наиболее удовлетворительный уровень цен.

2. Можно было бы прибегнуть к централизованному механизму установления цен — законодательно закрепить цены на нужном нам уровне, обеспечивающем Парето-оптимальное распределение. Однако ясно, что, чтобы действовать правильно, правительственные органы, устанавливающие цены, должны знать информацию о предельных полезностях общественного блага для каждого участника. Эта информация, конечно, недоступна. А каждый потребитель, приватно обладающий этой информацией, понимая, каким образом будет осуществляться ценообразование, заинтересован в том, чтобы манипулировать этой информацией для обеспечения наиболее предпочтительной для себя ситуации с производством общественных благ. В последующем мы обсудим финансирование общественных благ и поймем, что, действительно, такая заинтересованность и возможности манипулировать информацией у потребителей существуют.

3. Мы неявно предполагаем, когда индивидуализируем рынки, что если потребитель не купит благо, то он не сможет им пользоваться, т.е. предполагаем исключаемость потребителя из процесса потребления общественных благ. Но природа общественных благ как раз и состоит в том, что исключаемость невозможна. Предположение о поведении и ожиданиях потребителей, которое лежит в основе модели Линдаля, противоречит рациональности потребителей. А гипотеза о рациональности — это основа современной микроэкономики.

Эта конструкция очень важна, но значение ее исключительно теоретическое. Значение состоит в том, что эта конструкция выявляет проблемы, которые возникают при использовании рыночного механизма для координации финансирования общественного блага.

Таким образом, подчеркнем еще раз, концепция равновесия по Линдалю лишь выявляет и подчеркивает трудности использования механизма цен для обеспечения эффективного распределения ресурсов (и координации решений хозяйствующих субъектов) в ситуации с общественными благами. Все это заставляет отнести данную проблематику к тому разделу микроэкономики, который занимается анализом фиаско рынка, и изучать альтернативные механизмы распределения ресурсов в ситуации с общественными благами.

В результате возникает вопрос об альтернативных механизмах, их достоинствах и недостатках, к чему мы и переходим.

### Задачи

19. В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 2\ln x_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \ln G + 3\ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — $6$ и $4$ соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из $2$ единиц частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие Линдаля.

20. Какие условия являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы равновесие Линдаля:

1) существовало …

2) было Парето-эффективным …

21. [Bergstrom] В местечке Брасс Манки провинции Онтарио имеется $1000$ жителей, у каждого из которых функция полезности имеет вид $u_i(x_i, y) = y^{\alpha}(x_i + k_i)$, где $y \geqslant 0$ — размер общественного катка, а $x_i \geqslant 0$ — годовое потребление пончиков. Стоимость строительства и содержания одного квадратного дюйма катка равна $1$ пончику (пончики являются естественной денежной единицей в Брасс Манки). У каждого жителя есть некоторый запас пончиков $\omega_i$.

Найдите равновесие Линдаля. Каким будет количество общественного блага? Сколько заплатит за общественное благо $i$-й житель?

## *Долевое финансирование: общие соображения*

Будем предполагать, что бремя финансирования общественных благ устанавливается априорно на основе определения доли каждого потребителя в покрытии любой возможный величины общественных расходов. Пусть $\delta_{ik}(x_k)$ — доля $i$-го потребителя, где $x_k$ — объем потребления общественного блага $k$. Сумма долей равна единице:

$$\sum_{i \in I} \delta_{ik}(x_k) = 1 \ \forall k.$$

При этом взнос $i$-го потребителя на финансирование $k$-го общественного блага равен $\delta_{ik}(x_k) p_k x_k$. Можно интерпретировать эту величину как налог со ставкой $\delta_{ik}(x_k)$. Такой способ финансирования общественных благ мы будем называть **долевым финансированием**.

Долевое финансирование решает проблему безбилетника, возникающую при добровольном финансировании. Однако остается открытым вопрос о том, в каком объеме производить общественные блага. При данных рыночных ценах и данных долях вовсе не обязательно желаемые потребителями объемы производства совпадут. Поясним сказанное. При заданных долях $\delta_{ik}(x_{ik})$ и ценах $\boldsymbol{p}$ потребитель $i$ "предъявит спрос" на такие количества частных и общественных благ $(\bar{\boldsymbol{x}}_i^{(1)}, \bar{\boldsymbol{x}}_i^{(2)})$, которые являются решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} u_i(\boldsymbol{x}_i^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \to \max_{\boldsymbol{x}_i} \\ \sum_{k \in K_1} \delta_{ik}(x_{ik}) p_k x_{ik} + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i, \\ \boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{x}_i^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \in X_i, \end{gathered} \tag{27}$$

Если бы все потребители при некоторых ценах предъявляли спрос на одни и те же объемы общественных благ (консенсус), и на рынках всех благ спрос равнялся бы предложению, то экономика оказалась бы в состоянии равновесия.

**Определение 5.**

**Равновесие с долевым финансированием при консенсусе** есть набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой что

# $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;

# для каждого потребителя $(\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \bar{\boldsymbol{x}}_i^{(2)})$ является решением задачи (27) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i;$$

# каждая технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (26) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Для равновесия при консенсусе можно доказать теоремы благосостояния. При этом если доли $\delta_{ik}(x_k)$ не зависят от объемов:

$$\delta_{ik}(x_k) = \delta_{ik} \ \forall x_k,$$

то доказательство оказывается достаточно простым, поскольку каждому равновесию при консенсусе соответствует равновесие Линдаля и наоборот. Пусть $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с долевым финансированием при консенсусе. Тогда $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие Линдаля, где $\bar{q}_{ik} = \delta_{ik}\bar{p}_k$. сопоставим индивидуализированные цены $q_{ik}$ равновесия Линдаля. Если же $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие Линдаля, то $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — равновесие с долевым финансированием при консенсусе с долями, рассчитываемыми по формуле $\delta_{ik} = \bar{q}_{ik}/\bar{p}_k$. Доказательство этого факта достаточно очевидно, и читатель может провести его самостоятельно.

При дифференцируемости функций полезности и производственных функций во внутреннем равновесии при консенсусе должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = (\delta_{ik}(\bar{x}_k) + \delta'_{ik}(\bar{x}_k)\bar{x}_k)\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}},$$

где $k$ — произвольное общественное благо, а $k_0$ — частное благо с ненулевой ценой. При постоянных долях

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \delta_{ik}\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}},$$

откуда

$$\delta_{ik} = \frac{\dfrac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}}{\displaystyle\sum_{s \in I}\frac{\partial u_s/\partial x_k}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}}}.$$

Отсюда ясно, что далеко не при любых долях финансирования подобное равновесие может существовать.

В частном случае квазилинейной экономики задачу потребителя можно записать в виде

$$v_i(x_i) - \delta_i p x_i \to \max{}_{x_i \geqslant 0}.$$

Во внутреннем равновесии

$$v'_i(\bar{x}) = \delta_i \bar{p}.$$

Условие для долей принимает вид

$$\delta_i = \frac{v'_i(\bar{x})}{\sum_{s \in I} v'_s(\bar{x})}.$$

Рис. 91 иллюстрирует равновесие при консенсусе в случае квазилинейной экономики и двух потребителей. Пусть $x_i(\cdot)$ — функция, обратная к $v_i'(\cdot)$. Тогда при данной цене $\overline{p}$ спрос потребителя на общественное благо в зависимости от доли равен $x_i = x_i(\delta_i \overline{p})$. Консенсус определяется уравнением

$$x_1(\delta_1 \overline{p}) = x_2(\delta_2 \overline{p}) = x_2((1-\delta_1)\overline{p}).$$

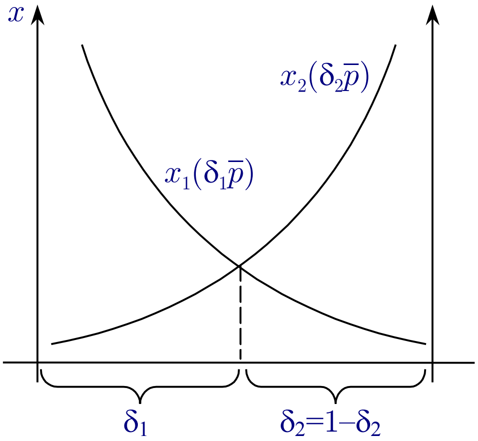


Рисунок 91. Иллюстрация равновесия при консенсусе

Ясно, что равновесие при консенсусе может существовать лишь при специальном подборе долей финансирования. Поэтому рассмотренная здесь концепция равновесия имеет, как и равновесие Линдаля, только теоретическое значение. Его можно использовать как своего рода исходный пункт при анализе долевого финансирования. В общем случае, при произвольно выбранных долях финансирования общественного блага, нет оснований ожидать, что при любых рыночных ценах желаемые объемы потребления общественных благ у всех потребителей будут совпадать. Поэтому возникает проблема согласования их предпочтений относительно этих количеств.

Другими словами, в концепции равновесия с долевым финансированием способ финансирования общественных благ следует дополнить некоторым механизмом принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ, который бы «работал» и при отсутствии консенсуса. Ниже приводятся примеры таких механизмов.

## Задачи

22. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 4y$.

Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями $\delta_1$ и $\delta_2$. Известно, что был достигнут консенсус. Что можно сказать об отношении долей $\delta_1/\delta_2$? Обоснуйте свое утверждение.

23. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y)=5y$.

Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями $2/3$ и $2/3$. При каких условиях на $a$ и $b$ в этой экономике не может быть достигнут консенсус. Обоснуйте свое утверждение.

## Долевое финансирование с равновесием при голосовании простым большинством

Один из самых распространенных механизмов принятия общественных решений (процедур коллективного выбора) — это **голосование**.

При анализе голосования мы будем исходить из предпочтений потребителей на наборах общественных благ (при заданных рыночных ценах и структуре общественных расходов). Для этого рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{gathered} u_i(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) \to \max \\ \sum_{k\in K_1} \delta_{ik}(x_k) p_k x_k + \sum_{k\in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i, \\ (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(2)}) = \boldsymbol{x}_i \in X_i, \end{gathered} \tag{28}$$

где полезность максимизируется по $\boldsymbol{x}_i^{(2)}$ при *заданной* величине $\boldsymbol{x}^{(1)}$. На основе этих задач предпочтения можно задать с помощью функции полезности $\tilde{u}_i(\cdot)$, сопоставляющей каждому набору общественных благ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ максимально достижимое значение полезности в данной задаче.

Одна из самых распространенных процедур — голосовании по правилу простого большинства.

**Определение 6**.

Пусть $\mathcal{A}$— множество альтернатив и $\{\succsim_i\}_i$ — набор предпочтений $i=1, ..., m$ на $\mathcal{A}$ Альтернатива $\bar{a}\in\mathcal{A}$ называется **равновесием при голосовании по правилу простого большинства** если не существует такой альтернативы $a\in\mathcal{A}$ что она лучше $\bar{a}$ по большинству предпочтений.

На основе этой процедуры можно предложить концепцию равновесия для экономики с общественными благами.

**Определение 7**.

**Равновесие с долевым финансированием и голосованием на основе правила простого большинства** есть набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такой что[142]

\# $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;

\# для каждого потребителя $\bar{\boldsymbol{x}}_i^{(2)}$ является решением задачи (28) при ценах $\boldsymbol{p}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i$$

и объемах потребления общественных благ $\boldsymbol{x}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}$;

---

[142] По-видимому, впервые голосование по поводу выбора объема общественного блага было проанализировано Говардом Боуэном в статье Howard R. Bowen, "The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources," *Quarterly Journal of Economics*, **58** (1943), 27-48

# $\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}$ — равновесие при голосовании по правилу простого большинства для альтернатив, заданных множеством наборов общественных благ $X^{(1)}$, и набора предпочтений, заданных функциями $\tilde{u}_i(\cdot)$;

# каждая технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (26) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Выбор количества общественных благ с помощью голосования простым большинством сталкивается с двумя серьезными проблемами:

(1) Такое равновесие существует только при довольно ограничительных предположениях. Известный **парадокс Кондорсе**[143] показывает, что, вообще говоря, при числе участников не менее трех ($\geqslant 3$) равновесие при голосовании может не существовать даже при конечном числе альтернатив.

(2) Даже если равновесие существует, оно обычно не Парето-оптимально.

Существование равновесия при голосовании можно гарантировать в случае, когда предпочтения потребителей **однопиковые**.

Приведем определение понятия однопиковых предпочтений для частного случая, когда множество альтернатив $\mathcal{A}$ является подмножеством действительных чисел (этот случай соответствует экономике, в которой существует только одно общественное благо). Отношение предпочтения $\succsim_i$ потребителя (на множестве альтернатив $\mathcal{A}$) **однопиковое**, если выполняются следующие условия:

(a) существует оптимальная с точки зрения потребителя $i$ альтернатива $\hat{a}_i$ (альтернатива $\hat{a}_i$ такая, что $\hat{a}_i \succsim_i a$ для всех $a \in \mathcal{A}$);

(b) если $a^1 \leqslant a^2 \leqslant \hat{a}_i$, то $a^2 \succsim_i a^1$;

(c) если $a^1 \geqslant a^2 \geqslant \hat{a}_i$, то $a^2 \succsim_i a^1$.

Проиллюстрируем сказанное на примере квазилинейной экономики. Пусть доля $\delta_i$ каждого потребителя в финансировании общественного блага постоянна и положительна. Тогда предпочтения потребителя $i$ на множестве возможных вариантов потребления общественного блага задаются функцией

$$\tilde{u}_i(x) = v_i(x) - \delta_i p x.$$

Будем считать, что для любого $i$ функция $\tilde{u}_i(x)$ достигает максимума на множестве неотрицательных чисел при любом положительном $p$. Обозначим это оптимальное с точки зрения потребителя $i$ количество общественного блага $\hat{x}_i$[144]. Тогда соответствующие предпочтения являются однопиковыми (при $\hat{a}_i = \hat{x}_i$) на множестве альтернатив $\mathcal{A} = [0, \infty)$.

---

[143] Жан Антуан Кондорсе (Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat marquis de Condorcet), 1743-1794 — французский математик и социолог.

В примере Кондорсе рассматриваются 3 участника, выбирающие из 3 альтернатив. Парадокс возникает, когда предпочтения заданы следующим образом:

$$a_1 \succ_1 a_2 \succ_1 a_3,$$
$$a_3 \succ_2 a_1 \succ_2 a_2,$$
$$a_2 \succ_3 a_3 \succ_3 a_1.$$

[144] Условие $v_i'(x_i) \to 0$ при $x_i \to \infty$ гарантирует существование такого количества.

Действительно, по построению величина $\hat{x}_i$ — максимум функции $\tilde{u}_i(x)$ на множестве $\mathcal{A}$ Несложно также проверить, что, поскольку $v_i'(x)$, не убывает, эти предпочтения удовлетворяют условиям (b) и (c).

Заметим, что величину $\tilde{u}_i(\hat{x}_i) = v_i(\hat{x}_i) - \delta_i p \hat{x}_i$ можно интерпретировать как потребительский излишек, соответствующий индивидуализированной цене общественного блага $\delta_i p$.

Заметим, что если предельные издержки $v_i'(\cdot)$ являются непрерывной функцией, то $\hat{x}_i$ удовлетворяет соотношениям

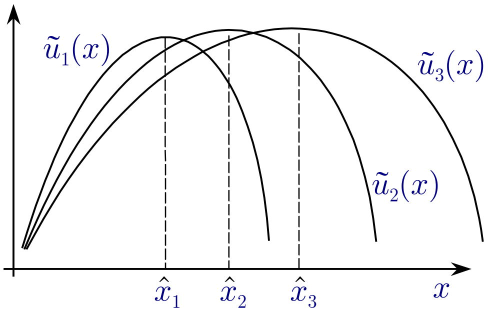
$$v_i'(\hat{x}_i) \leqslant \delta_i p,$$

причем, если $\hat{x}_i > 0$, то

$$v_i'(\hat{x}_i) = \delta_i p\,.$$

Эти уравнения задают равновесие.

Возможное поведение оценок $\tilde{u}_i(x_i)$ объемов общественного блага для случая, когда $m = 3$, приведено на диаграмме:



Заметим, что в случае, когда $m$ — нечетное число ($m = 2s+1$), равновесие при голосовании имеет особо простую структуру. В этом случае равновесной является медиана из объемов $\hat{x}_i$, то есть $(s+1)$-й по порядку возрастания объем. (Если все величины $\hat{x}_i$ разные, ровно $s = (m-1)/2$ потребителей предпочитает увеличить потребление общественного блага, а другие $s$ потребителей желали бы его уменьшить). В приведенном на диаграмме примере это альтернатива $\hat{x}_2$. Таким образом, равновесие при голосовании определяется предпочтениями **медианного потребителя**. Обозначим индекс такого потребителя через $i^*$. Заметим, что $i^*$, вообще говоря, зависит от цены общественного блага $p$, поскольку от $p$ зависят функции $\tilde{u}_i(x)$.

Учитывая сказанное, (внутреннее) равновесие на рынке общественного блага в состоянии равновесия с долевым финансированием и голосованием на основе правила простого большинства характеризуется следующим образом. Если $\bar{y}$ — равновесный объем, а $p$ — равновесная цена общественного блага, то

$$p = c'(\bar{y}) \quad \text{и} \quad \hat{x}_{i^*} = \bar{y},$$

где $i^*$ — медианный потребитель при цене $p$.

В общем случае при нахождении равновесия для нахождения медианного потребителя нужно знать равновесную цену, которая, в свою очередь, зависит от медианного потребителя (желаемого им объема потребления общественного блага).

Но если предельные издержки производства общественного блага постоянны, то (во внутреннем равновесии) равновесная цена известна заранее — она равна предельным издержкам и $i^*$ — медианный потребитель при этой цене.

В общем случае найти медианного потребителя при «правильной» цене можно на основе следующего приема.

Заметим сначала, что поскольку $p=c'(\hat{x}_{i^*})$, то величина $\hat{x}_{i^*}$ является решением одного из следующих $m$ уравнений

$$v_i'(x_i)=\delta_i c'(x_i).$$

Предположим, что $\overline{x}_{i^*}$ — медиана из рассматриваемых величин $\{\overline{x}_i\}$ — решений таких уравнений. Тогда $\overline{x}_{i^*}$ является предпочитаемым медианным потребителем объемом потребления общественного блага (то есть $\hat{x}_{i^*}=\overline{x}_{i^*}$), а величина $\overline{p}=c'(\overline{x}_{i^*})$ — равновесной ценой общественного блага.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что при цене $\overline{p}=c'(\overline{x}_{i^*})$ потребитель $i^*$ является медианным потребителем. Покажем это. Для каждого потребителя $i$, такого, что $\overline{x}_i\leqslant\overline{x}_{i^*}$, величина $c'(\overline{x}_i)$ не превышает величину равновесной цены $\overline{p}=c'(\overline{x}_{i^*})$. Поэтому предпочитаемое при цене $p$ потребителем $i$ количество общественного блага $\hat{x}_{i^*}$ — решение уравнения $v_i'(x_i)=\delta_i\overline{p}$ — не превышает величину $\overline{x}_i$. Таким образом $\hat{x}_i\leqslant\hat{x}_{i^*}$. Аналогичным образом показывается, что если $\overline{x}_i\geqslant\overline{x}_{i*}$, то $\hat{x}_i\geqslant\hat{x}_{i^*}$. А это и означает, что потребитель $i^*$ является медианным при ценах $\overline{p}=c'(\overline{x}_{i^*})$[145].

С другой стороны, если предельные полезности, деленные на доли, $v_i'(x_i)/\delta_i$, упорядочены одинаково вне зависимости от уровня общественного блага, то медианный потребитель не зависит от цены.

Сравним оптимальное количество общественного блага и его объем в равновесии при голосовании с долевым участием.

В особой ситуации, когда доли расходов равны предельным полезностям, соответствующим его оптимальному количеству, т.е. $\delta_i=v_i'(\hat{x})$, для всех участников выполнено соотношение: $\hat{x}_i=\hat{x}$, т.е. $\hat{x}$ предпочитается всеми потребителями (а не только более чем их половиной) любой другой альтернативе.

Но при определении «правильных» долей финансирования мы должны опираться на приватную информацию о предпочтениях потребителей, т.е. **решить проблему выявления предпочтений**, трудности решения которой мы уже обсуждали и будем обсуждать ниже.

В общем случае мы можем ожидать как недопроизводства общественного блага $(\hat{x}_{i^*},\hat{x})$, так и его перепроизводство.

Пусть, например, потребители финансируют общественное благо поровну, т.е. $\delta_i=\dfrac{1}{m}$, где число потребителей $m$ нечетное. Тогда в равновесии при голосовании объем потребления общественного блага $\hat{x}_{i^*}$ будет таким, что

$$v_{i^*}'(\hat{x}_{i^*})=\frac{1}{m}c'(\hat{x}_{i^*}).$$

---

[145] Величина $c(\overline{x}_{i^*})$ представляет собой равновесие при голосовании для величин общественных расходов (с индуцированными на множестве общественных расходов предпочтениями $\tilde{v}(r)=v_i(c^{-1}(r))$. Таким образом, медианные общественные расходы и общественные расходы в равновесии определяют одну и ту же величину общественного блага, хотя и разные расходы по его финансированию (так как величина

$$p\overline{x}_{i^*}=c'(\overline{x}_{i^*})\overline{x}_{i^*},$$

вообще говоря, отлична от величины $c(\overline{x}_{i^*})$).

С другой стороны, оптимальный (по Парето) объем потребления общественного блага есть величина $\hat{x}$, такая что

$$\frac{1}{m}\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) = \frac{1}{m}c'(\hat{x}).$$

Таким образом, объем производства общественного блага в равновесии при голосовании с равными долями финансирования $\hat{x}_{i^*}$ является оптимальным тогда и только тогда, когда средняя предельная полезность для этого количества равна предельной полезности медианного потребителя.

Легко придумать такой набор функций $v_i(x)$, что для любого объема потребления общественного блага $x$ средняя предельная полезность больше предельной полезности медианного потребителя. В этом случае (при убывающей отдаче) можно доказать, что $\hat{x} > \hat{x}_{i^*}$. Если бы $\hat{x} \leqslant \hat{x}_{i^*}$, то

$$\frac{1}{m}c'(\hat{x}) = \frac{1}{m}\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) > \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}) \geqslant \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}_{i^*}) = \frac{1}{m}\,c'(\hat{x}_{i^*}).$$

Наоборот, если для любого объема потребления общественного блага $x$ средняя предельная полезность меньше предельной полезности медианного потребителя, то $\hat{x} < \hat{x}_{i^*}$. Если бы $\hat{x} \geqslant \hat{x}_{i^*}$, то

$$\frac{1}{m}c'(\hat{x}) = \frac{1}{m}\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) < \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}) \leqslant \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}_{i^*}) = \frac{1}{m}\,c'(\hat{x}_{i^*}).$$

**Пример 4 (продолжение Примеров 2 и 3).**

В рассмотренном выше примере, когда

$$v_i(x_i) = 2\alpha_i \ln x_i \text{ и } c(y) = y^2,$$

имеем $\hat{x}_{i^*} = \sqrt{m\alpha_{i^*}}$ и $\hat{x} = \sqrt{m\bar{\alpha}}$, где $\bar{\alpha} = \sum_i \alpha_i / m$. Поэтому $\hat{x} \geqslant \hat{x}_{i^*}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha} \geqslant \alpha_{i^*}$.

Пусть, например, $\alpha_i = i$, и $m$ нечетно. Тогда

$$\bar{\alpha} = \alpha_{i^*} = i^* = \frac{m+1}{2},$$

и объем производства общественного блага в равновесии при голосовании совпадает с оптимальным.

Если $\alpha_i = i^2$, то

$$\bar{\alpha} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6} \quad \text{и} \quad \alpha_{i^*} = (i^*)^2 = \frac{(m+1)^2}{4}.$$

Поскольку $\bar{\alpha} > \alpha_{i^*}$ при $m > 1$, то $\hat{x}_i > \hat{x}_{i^*}$.

Если $\alpha_i = \exp(\gamma i)$, то $\bar{\alpha} > \alpha_{i^*}$ и $\hat{x}_i > \hat{x}_{i^*}$ при $\gamma > 0$ и $\bar{\alpha} < \alpha_{i^*}$ и $\hat{x}_i < \hat{x}_{i^*}$ при $\gamma < 0$.

$\Leftarrow$

## Долевое финансирование: равновесие с нерыночным (политическим) механизмом коллективного выбора

В этом параграфе мы охарактеризуем общие свойства равновесий с различными механизмами принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ (согласования предпочтений потребителей относительно этих количеств). Одним из примеров таких механизмов является рассмотренный выше механизм голосования по правилу простого большинства.

Мы будем использовать следующее (общее) представление механизма принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ.

❁ Потребители могут влиять на общественное решение путем выбора значений некоторых «политических» переменных. Поэтому каждый механизм характеризуется множеством возможных значений политических переменных $Z_i$ (произвольной природы, т.е. это не обязательно действительные числа), правилом выбора их значений $z_i \in Z_i$ каждым потребителем, а также процедурой принятия коллективного решения $G(z_1, \ldots, z_m)$ относительно объемов производства общественных благ. Объем производства общественных благ $\boldsymbol{x}^{(1)} \in X^{(1)}$ выбирается так, что

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = G(z_1, \ldots, z_m).$$

❁ На выбор потребителя в данных моделях, в свою очередь, влияет размер бремени финансирования общественного блага. Будем, как и выше, рассматривать долевое финансирование, с априорно устанавливаемыми долями потребителей в финансировании общественного блага $\delta_{ik}(x_k)$.

Будем предполагать, что выбор каждого определяется из решения следующей задачи

$$u_i(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}_i^{(1)}) \to \max_{(\boldsymbol{x}_i, z_i)}$$

$$\sum_{k\in K_1} \delta_{ik}(x_k) p_k x_k + \sum_{k\in K_2} p_k x_{ik} + \tau_i(z_1, \ldots, z_m) \leqslant \beta_i, \qquad (29)$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = G(z_1, \ldots, z_m),$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i,\ z_i \in Z_i.$$

Функция $\tau_i(z_1, \ldots, z_m)$ отражает расходы потребителя связанные с политической деятельностью. Например, это могут быть расходы на подкуп должностных лиц, взносы в фонды политических партий.[146]

**Определение 8.**

**Равновесие с долевым финансированием и процедурой принятия коллективного решения** $G(z_1, \ldots, z_m)$ есть набор $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$, такой что

# $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;

# для каждого потребителя пара $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и $\bar{z}_i$ является решением соответствующей задачи потребителя (29) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходах

$$\beta_i = \bar{\boldsymbol{p}}\omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{p}} \bar{\boldsymbol{y}}_j + S_i;$$

# каждая технология $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (26) при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$;

---

[146] Для упрощения изложения мы не учитываем здесь другие формы влияния политических переменных на поведение и благосостояние потребителей. Можно было, например, ввести зависимость полезности потребителей от $\boldsymbol{z}$.

# сумма расходов на политику равна сумме трансфертов:

$$\sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I} \tau_i(z_1, \ldots, z_m).$$

Пример подобной конструкции можно построить на основе равновесия с голосованием простым большинством, рассмотренного в предыдущем параграфе. В таком равновесии переменными $z_i$ могут служить функции $\tilde{u}_i(\cdot)$. При этом следует предположить, что потребители не обязательно правдиво сообщают эти функции.

Простейший политический механизм может состоять в том, что участники высказывают свои заявки $z_i \in \mathbb{R}_+$ на общественное благо, выраженные непосредственно в единицах этого блага, и действует какая-то схема «усреднения» этих заявок $G(z_1, \ldots, z_m)$, удовлетворяющая естественному требованию, состоящему в том, что если бы все подали одинаковые заявки, то был бы выбран соответствующий объем общественного блага:

$$G(\bar{z}, \ldots, \bar{z}) = \bar{z}.$$

Например, возможны такие схемы:

V1) среднее арифметическое: $G(\boldsymbol{z}) = \sum_{i\in I} z_i/m$,

V2) минимум: $G(\boldsymbol{z}) = \min_i z_i$ ,

V3) максимум: $G(\boldsymbol{z}) = \max_i z_i$,

V4) медиана: $G(\boldsymbol{z}) = \text{med}(z_1, \ldots, z_m)$, где функция $\text{med}(\cdot)$ принимает значение среднего из упорядоченных по возрастанию чисел $z_1,\ldots,z_m$, если же $m$ четно, то среднего арифметического из двух средних. Это правило, как мы уже видели выше, практически тождественно в данном случае голосованию простым большинством.

Заметим, что для первых трех из этих схем при $\tau_i(\boldsymbol{z}) = 0\ \forall \boldsymbol{z}$ естественно ожидать равновесия, в котором один из потребителей обеспечивает себе желаемый уровень общественного блага. Так, При схеме V1 в типичном равновесии все потребители называют $z_i = 0$, а один (тот, кто в сравнительно большей степени «любит» общественное благо) — $z_i = m x_i$, где $x_i$ — желательный для него объем общественного блага.

## Задачи

24. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{G} + x_1$ и $u_2 = 2\sqrt{G} + x_2$, где $G$ и $x_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся технология позволяет производить единицу общественного блага из $2$ единиц частного. Первый потребитель несет долю $\delta$ расходов на общественное благо, а второй — $1-\delta$.

(A) Вычислите долю $\delta$, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $G = \min(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка $i$-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра $\delta$.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

25. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \ln G + x_1$ и $u_2 = 2\ln G + x_2$, где $G$ и $x_i$ — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся техноло-

гия позволяет производить единицу общественного блага из единицы частного. Первый потребитель несет долю $\delta$ расходов на общественное благо, а второй — $1-\delta$.

(A) Вычислите долю $\delta$, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $M=\max(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка $i$-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра $\delta$.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

## *Механизм Гровса—Кларка*

В этом параграфе мы продолжим анализировать долевое финансирование общественного блага и механизмы коллективного выбора уровня общественного блага.

Оказывается, что в частном случае, когда целевые функции квазилинейны, можно построить процедуру, корректно выявляющую предпочтения и функцию спроса на общественное благо. Это **механизм Гровса—Кларка**.

Вначале мы предложим традиционный анализ механизма Гровса—Кларка, отступив от равновесного подхода, которого мы последовательно придерживались до сих пор. А именно, будем предполагать, что рассматриваемое сообщество непосредственно контролирует производство общественного блага. Потребители, соответственно, принимая решение о потреблении общественного блага в объеме $x$, должны, в соответствие с используемой технологией, затратить $c(x)$ единиц частного блага, а не величину $px$ — его рыночную цену.

Позже мы вернемся к предположению о конкурентном производстве общественных благ и покажем, как можно вписать процедуру Гровса—Кларка в рамки равновесной модели, рассмотренной в предыдущем параграфе.

### Механизм Гровса—Кларка

(**0**) Априорно устанавливаются доли финансирования общественного блага $\delta_i(x)$ для каждого возможного объема потребления общественного блага $x$ ($\sum_{i\in I}\delta_i(x)=1\ \forall x\in X$).

(**1**) Потребители сообщают функции $\varphi_i(\cdot)\in\Phi_i$ — их оценки общественного блага. Здесь $\Phi_i$ — множество возможных функций вида $\varphi_i(\cdot)\colon X\mapsto\mathbb{R}$.

По замыслу процедуры функции $\varphi_i(\cdot)$ должны отражать чистые полезности при данной схеме финансирования от каждого уровня общественного блага, т.е.

$$\varphi_i(x)=v_i(x)-\delta_i(x)c(x),$$

но, вообще говоря, могут не совпадать с ними. Потребители в принципе могут манипулировать этими оценками с целью увеличения своего благосостояния; задача предлагаемого механизма как раз и состоит в том, чтобы побуждать потребителей сообщать истинные оценки.

Предполагается, конечно, что $v_i(x)-\delta_i(x)c(x)\in\Phi_i$.

(**2**) Выбирается уровень блага, максимизирующий суммарную чистую объявленную полезность:

$$\bar{x}\in\operatorname{argmax}_x\sum_{i\in I}\varphi_i(x),$$

а также вычисляется максимальное значение суммарной чистой объявленной полезности, которая получается без учета мнения $i$-го потребителя:

$$V_{(i)} = \max_x \sum_{j \neq i} \varphi_j(x).$$

(**3**) Определяется **налог Кларка** на каждого потребителя за изменение коллективного выбора, равный убыткам остальных потребителей, рассчитанный на основе функций $\varphi_i(\cdot)$:

$$\tau_i = V_{(i)} - \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}).$$

Очевидно, что этот налог неотрицателен. Этот налог должен быть изъят из данной экономики.

В результате данной процедуры полезность $i$-го потребителя с точностью до константы определяется величиной

$$v_i(\bar{x}) - \delta_i(\bar{x})c(\bar{x}) - \tau_i.$$

В данной модели предполагается, что каждый потребитель максимизирует эту величину, выбирая сообщаемую функцию $\varphi_i(\cdot)$. При этом потребитель учитывает влияние этого выбора на выбранный объем общественного блага $\bar{x}$ и на величину налога Кларка $\tau_i$, которую он должен в результате выплатить. Однако предполагается, что потребитель не учитывает влияние выбора $\varphi_i(\cdot)$ на величину трансфертов, распределяющих налог Кларка. Мы будем предполагать, что это происходит по той причине, что таких трансфертов обратно рассматриваемым потребителям попросту не существует: налог Кларка выплачивается в частном благе и не перераспределяется, а должен быть изъят из данной экономики.

Можно заметить, что приведенное описание механизма Гровса—Кларка не является полным. Это, прежде всего, относится, к выбору уровня общественного блага. Во-первых, поскольку не задано никаких ограничений на функции $\varphi_i(\cdot)$, то величины $\operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$, $V_{(i)}$, значение которых фигурирует в спецификации механизма Гровса—Кларка, не обязательно существуют. Во-вторых, величина $\bar{x}$ не задана однозначно (максимум не обязательно достигается в единственной точке), поэтому истинные чистые полезности потребителей не заданы однозначно.

Поэтому специфицируем механизм Гровса—Кларка более детально, указав формальное представление данного механизма в виде класса игр. Чтобы задать механизм Гровса—Кларка как игру, нам следует указать соответствующие множество игроков, множество их стратегий и функции выигрышей.

1. Множество игроков игры, соответствующей данному механизму, совпадает с множеством потребителей

2. Стратегии каждого игрока — это сообщаемые им оценки $\varphi_i(\cdot)$. В случае, когда множество возможных вариантов производства общественного блага не является конечным, множества возможных стратегий $\Phi_i$ должны удовлетворять ограничениям, гарантирующим существование максимума суммы оценок, фигурирующих в описании механизма Гровса—Кларка. Например, в ситуации, когда $x \in \mathbb{R}_+$, достаточно потребовать, чтобы эти оценки были непрерывными функциями, которые могут принимать положительное значение лишь на компактном множестве $[0, M]$, причем $\varphi_i(0) = 0 \ \forall i$.

3. Поскольку условие $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ неоднозначно определяет объем общественного блага, а, следовательно, и возможные выигрыши участников, то для полноты специфика-

ции игры мы должны указать правило выбора объема общественного блага $\bar{x}=G(\{\varphi_i(\cdot)\}_i)$, такое, что

$$G(\{\varphi_i(\cdot)\}_i)\in\operatorname{argmax}_x\sum_{i\in I}\varphi_i(x).$$

Выигрыш $i$-го потребителя тогда рассчитывается по указанным выше формулам при $\bar{x}=G(\{\varphi_i(\cdot)\}_i)$.

**Теорема 4.**

Истинная функция чистой полезности

$$\varphi_i(x)=v_i(x)-\delta_i(x)c(x) \text{ —}$$

доминирующая стратегия для каждого потребителя в любой из игр, соответствующих механизму Гровса—Кларка.

***Доказательство***.

Пусть $\bar{x}$ — уровень общественного блага, который будет выбран, если потребитель сообщит истинную чистую полезность, т.е. назовет $\varphi_i(x)=v_i(x)-\delta_i(x)c(x)$, а $\tilde{x}$ — уровень общественного блага, который будет выбран, если потребитель сообщит некоторую другую возможную функцию $\tilde{\varphi}_i(\cdot)\in\Phi_i$.

В первом случае его выигрыш будет равен

$$v_i(\bar{x})-\delta_i(\bar{x})c(\bar{x})-V_{(i)}+\sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x}),$$

во втором случае —

$$v_i(\tilde{x})-\delta_i(\tilde{x})c(\tilde{x})-V_{(i)}+\sum_{j\neq i}\varphi_j(\tilde{x}).$$

Заметим, что значение $V_{(i)}$ не зависит от выбора потребителя $i$ и в обоих случаях одинаково.

Первая величина не может быть меньше второй, поскольку по определению величины $\bar{x}$ она выбирается так, что для любого $x$ выполнено

$$\varphi_i(\bar{x})+\sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x})\geqslant\varphi_i(x)+\sum_{j\neq i}\varphi_j(x),$$

где $\varphi_i(x)=v_i(x)-\delta_i(x)c(x)$, в том числе, это выполнено для $x=\tilde{x}$.

■

Заметим, что равновесие в доминирующих стратегиях является также равновесием в смысле Нэша.

Таким образом, механизм Гровса—Кларка оказывается **неманипулируемым** в том смысле, что потребители не заинтересованы искажать объявляемые оценки с целью повлиять на выбор объема общественного блага в благоприятном для себя направлении. Заметим, что тот же механизм без налогов Кларка является манипулируемым. Это происходит потому, что (как и в любой ситуации с экстерналиями), каждый потребитель не учитывает влияния своих решений на благосостояние других потребителей.

**Теорема 5.**

Если все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, т.е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)\, c(x).$$

то уровень потребления общественного блага, определенный посредством механизма Гровса—Кларка, Парето-оптимален, то есть максимизирует общественное благосостояние $W(y) = \sum_i v_i(y) - c(y)$.

Доказательство этого факта очевидно. Достаточно заметить, что если все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, то $W(y) = \sum_i \varphi_i(y)$.

Итак, естественно ожидать, что при использовании этой процедуры будет выбран оптимальный уровень общественного блага. Однако состояние такой экономики окажется неоптимальным в случае, когда хотя бы один потребитель выплачивает налог Кларка, поскольку такие налоги — чистые потери для данной экономики частного блага в размере, равной сумме налогов Кларка. При этом мы следуем интерпретации, что налоги изымаются, но не перераспределяются. (Если предположить, что налоги идут потребителям, которые не участвуют в процедуре и включить этих потребителей в вычисление благосостояния, то оптимум в смысле Парето все же будет иметь место).

В некоторых случаях, однако, можно гарантировать, что налоги Кларка равны нулю. Для случая бесконечно делимого общественного блага эти ситуации характеризует следующая теорема.

**Теорема 6.**

Пусть

- функции полезности и функция издержек дифференцируемы;
- функции полезности вогнуты, а функция издержек выпукла;
- доли финансирования общественного блага не зависят от объема его потребления и равны

$$\delta_i = \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_j v_j'(\hat{x})},$$

где $\hat{x}$ — Парето-оптимальный объем общественного блага;

- все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, т.е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i c(x).$$

Тогда налоги Кларка равны нулю.

***Доказательство.***

Покажем сначала, что максимум функций

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_j v_j'(\hat{x})} c(x),$$

достигается при $x = \hat{x}$. Действительно производная функции $\varphi_i(x)$ в точке $x = \hat{x}$ равна нулю:

$$\varphi_i'(\hat{x}) = v_i'(\hat{x}) - \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_j v_j'(\hat{x})} c'(\hat{x}) = 0.$$

Поскольку $\varphi_i(\cdot)$ — вогнутая функция, $c(\cdot)$ — выпуклая функция, а доли финансирования общественного блага не зависят от объема его потребления, то, значит, необходимые условия оптимальности здесь являются достаточными. Следовательно, при $x = \hat{x}$ функция достигает максимального значения, то есть

$$\hat{x} \in \operatorname{argmax}_x \varphi_i(x).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{x} \in \operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x).$$

Более того, несложно понять, что для любого $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ имеет место равенство $\varphi_i(\hat{x}) = \varphi_i(\bar{x})$[147], и поэтому

$$V_{(i)} = \sum_{j \neq i} \varphi_j(\hat{x}) = \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}).$$

Простое вычисление показывает, что $\tau_i = 0 \ \forall i$.

■

Имеет место и обратное утверждение о том, что если налоги Кларка оказались равными нулю, то это говорит о том, что доли финансирования были пропорциональны предельным полезностям.

**Теорема 7.**

Пусть

- функции полезности и функция издержек дифференцируемы;
- доли финансирования общественного блага не зависят от объема;
- все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, т.е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i c(x);$$

- был выбран уровень общественного блага $\bar{x}$, такой что

$$\bar{x} \in \operatorname{int}(X^{(1)});$$

- налоги Кларка равны нулю.

Тогда выполнено соотношение

$$\delta_i = \frac{v_i'(\bar{x})}{\sum_j v_j'(\bar{x})}.$$

***Доказательство***.

Равенство всех налогов Кларка нулю означает, что

$$\max_x \sum_{j \neq i} \varphi_j(x) = \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}) \ \forall i.$$

Это означает, что

---

[147] Читателю предлагается доказать этот факт самостоятельно.

$$\sum_{j\neq i}\varphi_j'(\bar{x})=0\ \forall i.$$

С другой стороны, из того, что $\bar{x}$ определяется из условия

$$\bar{x}\in \operatorname{argmax}_x \sum_{i\in I}\varphi_i(x)$$

следует, что

$$\sum_{j\in I}\varphi_j'(\bar{x})=0.$$

Таким образом,

$$\varphi_i'(\bar{x})=0\ \forall i.$$

т.е.

$$v_i'(\bar{x})=\delta_i c'(\bar{x})\ \forall i$$

или

$$\delta_i=\frac{v_i'(\bar{x})}{c'(\bar{x})}\ \forall i.$$

А это означает, что

$$\delta_i=\frac{v_i'(\bar{x})}{\sum_j v_j'(\bar{x})}\ \forall i.$$

■

В «достаточно большой» экономике влияние отдельного потребителя на результат работы механизма Гровса—Кларка незначителен, соответственно, можно ожидать, что в такой экономике размер налогов Кларка мал.

Проиллюстрируем это утверждение на примере, показав, что размер налогов Кларка убывает в «достаточно больших» экономиках, являющихся $t$-репликами исходной.

Чтобы исследовать влияние изменений только размера экономики на величину налога Кларка и элиминировать влияние изменений оценок общественного блага при росте числа потребителей, определим реплику следующим образом.

Будем называть экономику $t$-репликой исходной экономики, если в ней

— существует технология, позволяющая производить $x$ единиц общественного блага, затратив $tc(x)$ единиц частного;

— имеется $t-1$ «двойник» для каждого потребителя исходной экономики и таким образом $t$ потребителей каждого типа. Соответственно, доля каждого из них в финансировании общественного блага равна $\delta_i/t$. Поэтому чистая полезность $x$ единиц общественного блага у каждого такого потребителя есть величина

$$\varphi_i(x)=v_i(x)-\delta_i(x)c(x)$$

**Пример 5.**

Пусть опять

$$v_i(x)=2\alpha_i \ln x,\ c(y)=y^2,$$

и потребители финансируют общественное благо поровну, т.е. $\delta_i = 1/m$. В данном случае истинная оценка $i$-го потребителя равна

$$v_i(x) - c(x)/m = 2\alpha_i \ln x - x^2/m.$$

Если все потребители сообщат свои истинные оценки, то выбранный уровень общественного блага окажется равным

$$\bar{x} = \operatorname{argmax} \sum_{i\in I} \varphi_i(x) = \operatorname{argmax} \sum_{i\in I} (2\alpha_i \ln x - x^2/m),$$

откуда

$$\bar{x} = \operatorname{argmax}\,(2\sum_{i\in I}\alpha_i \ln x - x^2) = \sqrt{\sum_{i\in I}\alpha_i} = \sqrt{m\bar{\alpha}} = \hat{y}.$$

Далее,

$$V_{(i)} = \max \sum_{j\neq i}\varphi_j(x) = \max\,(2\sum_{j\neq i}\alpha_j \ln x - \frac{m-1}{m}x^2),$$

откуда

$$V_{(i)} = \sum_{j\neq i}\alpha_j \ln(\frac{m}{m-1}\sum_{j\neq i}\alpha_j) - \sum_{j\neq i}\alpha_j =$$
$$= (m\bar{\alpha} - \alpha_i)\ln(m\frac{m\bar{\alpha}-\alpha_i}{m-1}) - (m\bar{\alpha} - \alpha_i),$$

Поскольку

$$\sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x}) = \sum_{j\neq i}\alpha_j \ln(\sum_{i\in I}\alpha_i) - \frac{m-1}{m}\sum_{i\in I}\alpha_i =$$
$$= (m\bar{\alpha} - \alpha_i)\ln(m\bar{\alpha}) - (m-1)\bar{\alpha},$$

то налог Кларка для $i$-го потребителя равен

$$\tau_i = V_{(i)} - \sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x}) =$$
$$= (m\bar{\alpha} - \alpha_i)(\ln(m - \alpha_i/\bar{\alpha}) - \ln(m-1)) + \alpha_i - \bar{\alpha}.$$

Покажем, что если реплицировать эту экономику, то налоги Кларка в ней стремятся к нулю. В $t$-й реплике будет $mt$ потребителей, которых удобно нумеровать двумя индексами — $i$ и $t$, где индекс $i$ означает, что этот потребитель совпадает с $i$-м потребителем исходной экономики, т.е. $\alpha_{it} = \alpha_i$. Функция издержек в $t$-й реплике будет иметь вид

$$c^{[t]}(y) = tc(y) = ty^2.$$

Пусть опять потребители сообщают истинные оценки, равные

$$\varphi_{it}(x) = v_{it}(x) - c^{[t]}(x)/(mt) = 2\alpha_i \ln x - x^2/m.$$

Сумма этих оценок равна

$$\sum_t\sum_{i\in I}\varphi_{it}(x) = \sum_t\sum_{i\in I}(2\alpha_i \ln x - x^2/m) = t(2\sum_{i\in I}\alpha_i \ln x - x^2).$$

Отсюда

$$\bar{x}^{[t]} = \operatorname{argmax} \sum_t\sum_i \varphi_{it}(x) = \sqrt{m\bar{\alpha}},$$

то есть выбираемый уровень общественного блага остается таким же, как в исходной экономике. С другой стороны, для потребителя $is$

$$V_{(is)} = \max\,(\sum_t \sum_j \varphi_{jt}(x) - \sum_i \varphi_{is}(x)) =$$
$$= \max\,(2(t\sum_j \alpha_j - \alpha_i)\ln x - \frac{tm-1}{m}x^2) =$$
$$= (tm\bar{\alpha} - \alpha_i)(\ln(m\frac{tm\bar{\alpha}-\alpha_i}{tm-1}) - (tm\bar{\alpha} - \alpha_i),$$

и

$$\sum_t \sum_i \varphi_{jt}(\bar{x}) - \sum_i \varphi_{is}(\bar{x}) =$$
$$= (tm\bar{\alpha} - \alpha_i)\ln(m\bar{\alpha}) - (tm-1)\bar{\alpha},$$

откуда получаем налог Кларка

$$\tau_{is} = V_{(is)} - \sum_t \sum_i \varphi_{jt}(\bar{x}) + \sum_i \varphi_{is}(\bar{x}) =$$
$$= (tm\bar{\alpha} - \alpha_i)(\ln(1 - \alpha_i/(\bar{\alpha}tm)) - \ln(1 - 1/tm)) + \alpha_i - \bar{\alpha}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ получим $\tau_i \to 0$. Для этого надо воспользоваться тем, что $n\ln(1+1/n) \to 1$ при $n \to \infty$.

$\Leftarrow$

Рассмотрим частный случай, когда $x$ принимает два значения, $0$ и $1$ и доли $\delta_i$ постоянны. Считаем, что $v_i(0)=0\ \forall i \in I$ и $c(0)=0$. Величина $v_i = v_i(1) - v_i(0) = v_i(1)$ представляет собой резервную цену — максимальную цену, которую потребитель $i$ готов заплатить за данное благо, $c = c(1)$ — издержки на производство общественного блага. Чистая полезность для $i$-го потребителя при $x=1$ равна

$$v_i(1) - \delta_i c(1) = v_i - \delta_i c,$$

а при $x=0$ равна нулю ($v_i(0) - \delta_i c(0) = 0$).

Обозначим через $\varphi_i$ объявленные чистые полезности $\varphi_i(1)$ (считая, что действует ограничение $\varphi_i(0)=0$).

Согласно механизму Гровса—Кларка $\bar{y}=1$, если $\sum_i \varphi_i(1) > \sum_i \varphi_i(0)$, т.е. если $\sum_i \varphi_i > 0$, и $\bar{y}=0$, если $\sum_i \varphi_i < 0$. Заметим, что в случае, когда $\sum_i \varphi_i = 0$, потребителям безразлично, производить ли общественное благо. Для определенности будем считать, что в этом случае $\bar{y}=1$.

Если $\bar{y}=1$, а без $i$-го потребителя был бы выбран объем $y=0$, то $V_{(i)}=0$ и налог Кларка равен

$$\tau_i = \sum_{j \neq i} \varphi_j(0) - \sum_{j \neq i} \varphi_j(1) = V_{(i)} - \sum_{j \neq i} \varphi_j = -\sum_{j \neq i} \varphi_j.$$

Если же $\bar{y}=0$, а без $i$-го потребителя был бы выбран объем $y=1$, то

$$V_{(i)} = \sum_{j \neq i} \varphi_j(1) = \sum_{j \neq i} \varphi_j \geqslant 0.$$

и налог Кларка равен

$$\tau_i = \sum_{j \neq i} \varphi_j(1) - \sum_{j \neq i} \varphi_j(0) = V_{(i)} - 0 = \sum_{j \neq i} \varphi_j.$$

Выигрыш $i$-го потребителя равен

$$v_i - \delta_i c - \tau_i,$$

если будет принято решение о покупке телевизора и $0$ в противном случае.

В Таблице 3 представлены возможные варианты равновесия с точки зрения $s$-го потребителя.

Таблица 3.

| Случай | Выбор | Налог Кларка ($\tau_s$) | Выигрыш $s$-го потребителя |
|---|---|---|---|
| $\sum_{i \in I} \varphi_j \geqslant 0$ и $\sum_{i \neq s} \varphi_i \geqslant 0$ | $\bar{x} = 1,\ x_{(s)} = 1$ | $0$ | $v_s - \delta_s c$ |
| $\sum_{i \in I} \varphi_j \geqslant 0$ и $\sum_{i \neq s} \varphi_i < 0$ | $\bar{x} = 1,\ x_{(s)} = 0$ | $-\sum_{i \neq s} \varphi_i$ | $v_s - \delta_s c + \sum_{i \neq s} \varphi_i$ |
| $\sum_{i \in I} \varphi_j < 0$ и $\sum_{i \neq s} \varphi_i \geqslant 0$ | $\bar{x} = 0,\ x_{(s)} = 1$ | $\sum_{i \neq s} \varphi_i$ | $-\sum_{i \neq s} \varphi_i$ |
| $\sum_{i \in I} \varphi_j < 0$ и $\sum_{i \neq s} \varphi_i < 0$ | $\bar{x} = 0,\ x_{(s)} = 0$ | $0$ | $0$ |

**Пример 6** (расчет налога Кларка).

Покупка телевизора ценой 6000 руб. тремя соседями по комнате при равных долях финансирования, $\delta_i = 1/3$.

| | Взнос потребителя, $\delta_i c$ | Оценка полезности телевизора потребителем, $v_i$ | Полезность телевизора за вычетом взноса, $\varphi_i = v_i - \delta_i c$ | Налог Кларка, $\tau_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2000 | 1000 | −1000 | 0 |
| 2 | 2000 | 2000 | 0 | 0 |
| 3 | 2000 | 5000 | 3000 | 1000 |

⇐

Для рассматриваемой экономики с дискретным общественным благом можно формально доказать, что при реплицировании экономики налоги Кларка становятся равными нулю.

### Теорема 8.

Рассмотрим механизм Гровса—Кларка в случае дискретного общественного блага ($x$ принимает два значения, $0$ и $1$). Предположим, что потребители называют свои истинные чистые полезности, и что $\sum_{i \in I} v_i \neq c$. Тогда каковы бы ни были доли $\delta_i$, найдется номер реплики $\hat{t}$ такой, что для всех репликах $t \geqslant \hat{t}$, налоги Кларка равны нулю.

***Доказательство.***

Пусть потребитель $s$ платит налог Кларка. Тогда выполняется одно из условий:

$$(1)\ \sum_{i\in I}\varphi_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i\neq s}\varphi_i < 0$$

или

$$(2)\ \sum_{i\in I}\varphi_i < 0 \text{ и } \sum_{i\neq s}\varphi_i \geqslant 0,$$

где $\varphi_i = v_i - \delta_i c$. Рассмотрим первый случай (анализ второго оставляем читателю). Поскольку по предположению $\sum_{i\in I}\varphi_i = \sum_{i\in I} v_i - c \neq 0$, это означает, что $\sum_{i\in I}\varphi_i > 0$ и величина $\varphi_s$ отрицательная. Поэтому найдется $t_s$ такое, что $t_s\sum_{i\in I}\varphi_i - \varphi_s > 0$. Это означает, что налог Кларка для любого потребителя типа $i$ в реплике $t > t_s$ равен нулю. Справедливость утверждения следует тогда из того факта, что число потребителей в исходной экономике конечно.

■

Заметим, что если предположение $\sum_{i\in I} v_i \neq c$ не выполняется, это утверждение оказывается неверным. Действительно, в этом случае потребитель $s$, для которого выполняется соотношение $\sum_{i\in I}\varphi_i = 0$ и $\sum_{i\neq s}\varphi_i < 0$ (и любой его двойник) в любой реплике платит налог, равный величине $-\varphi_s$.

Рассмотрим теперь механизм Гровса—Кларка в контексте модели общего равновесия.

Если общественное благо приобретается на рынке в условиях совершенной конкуренции, то в процедуре Гровса—Кларка надо $c(x)$ заменить на $px$. Будем предполагать, в отличие от рассмотренного выше подхода, что налоги Кларка собираются в денежном выражении, и что в равновесии налог Кларка перераспределяется между потребителями посредством трансфертов. При этом трансферты фиксированы априорно и решения потребителей не влияют на их величину (точнее, потребители не учитывают это влияние).

Если $G(\{\varphi_i(\cdot)\}_i)$ — функция коллективного выбора, соответствующая механизму Гровса—Кларка, то спрос на общественное благо определяется на основе задач потребителя, которые в данном случае имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} v_i(x) - \delta_i(x)px - \tau_i(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_m(\cdot)) \to \max{}_{(x_i,\varphi_i(\cdot))} \\ x = G(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_m(\cdot)), \\ \varphi_i(\cdot) \in \Phi_i. \end{gathered} \tag{30}$$

Данная задача, фактически, является частным случаем задачи потребителя (29). Отличие заключается только в том, что мы, пользуясь квазилинейностью функции полезности, подставили бюджетное ограничение в целевую функцию.

Предложение общественного блага определяется на основе задачи производителя:

$$py - c(y) \to \max{}_y \tag{31}$$

Равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка — это равновесие с долевым финансированием и коллективным выбором на основе механизма $G(\{\varphi_i(\cdot)\}_i)$. Конкретизируем это определение для рассматриваемого случая.

**Определение 9.**

**Равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка** есть набор $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}, \{\varphi_i(\cdot)\}_i)$, такой что

# $\bar{x} = \bar{y}$;

# объем потребления общественного блага $\bar{x}$ и оценка $\varphi_i(\cdot)$ являются решениями задачи потребителя (30);

# объем производства общественного блага $\bar{y}$ является решением задачи производителя (31) при цене $\bar{p}$.

Для этого типа равновесия мы можем доказать аналог второй теоремы благосостояния.

**Теорема 9.**

Предположим, что в квазилинейной экономике с общественными благами функция издержек дифференцируема, и предельные издержки не убывают.

Пусть $\hat{x}$ — Парето-оптимальный объем общественного блага, и $\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)px$.

Тогда $(c'(\hat{x}), \hat{x}, \hat{x}, \{\varphi_i(\cdot)\}_i)$ — равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка.

***Доказательство*.**

Очевидно, что $\hat{x}$ и $\varphi_i(\cdot)$ — решение задачи потребителя. Доказательство, практически совпадает с доказательством Теоремы 4. Кроме того, поскольку $c'(y)$ не убывает, то $\hat{x}$ — решение задачи производителя при $p = c'(\hat{x})$.

■

Мы не можем гарантировать справедливость первой теоремы благосостояния для любого такого равновесия. Однако можно выделить класс равновесий, для которых этот результат имеет место. Это равновесия, в которых оценка $\varphi_i(\cdot)$ любого потребителя $i$ максимизирует его полезность при любых оценках, сообщаемых другими потребителями, то есть является аналогом равновесия в доминирующих стратегиях. Выполнение условий предыдущей теоремы гарантирует существование таких равновесий.

## Задачи

26. Отметьте верные из нижеприведенных утверждений, и заполните пробел. Если предпочтения потребителей ………………………, тогда механизм Гровса—Кларка приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех потребителями строго положительны;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики при отсутствии ключевых участников;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка ненулевые;

5) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка ненулевые;

6) к тому, что участники объявляют истинные предпочтения.

7) Все вышеприведенные утверждения неверны.

27. В процедуре Гровса—Кларка налоги Кларка...

а) идут на финансирование общественного блага;

б) распределяются пропорционально между участниками;

в) передаются участникам, пострадавшим от выбора того, с кого взят налог;

г) не передаются ни кому из участников.

28. Укажите, какие из свойств функций полезности (вогнутость, квазилинейность, непрерывность, дифференцируемость, локальная ненасыщаемость) и другие дополнительные характеристики механизма Гровса—Кларка являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы этот механизм

1) был применим: …

2) корректно выявлял предпочтения: …

3) обеспечивал эффективный уровень общественного блага: …

4) обеспечивал Парето-эффективное для голосующих состояние: …

29. Три соседа по дому решают, приобрести ли в складчину спутниковую антенну. В продаже имеются антенны двух типов — дорогие (ценой $3000$ руб.) и дешевые (ценой $1200$ руб.). Каждый из соседей определил лично для себя ценность антенны. Денежные выражения этих ценностей помещены в таблице:

| Имя | Полезность дорогой антенны, руб. | Полезность дешевой антенны, руб. |
|---|---|---|
| $A$ | $500$ | $150$ |
| $B$ | $900$ | $450$ |
| $C$ | $2000$ | $550$ |

Чтобы каждый из соседей правдиво сообщил свою оценку, используется механизм Гровса—Кларка, с равными долями финансирования. Какой из вариантов будет выбран: не покупать антенну, купить дешевую, купить дорогую? Укажите численные значения результирующих налогов Кларка. Какой вариант будет выбран при голосовании по правилу простого большинства? Какой выбор является Парето-оптимальным?

## *Задачи к главе*

30. Экономика состоит из трех соседей, потребляющих коллективное благо $y$ — внешний вид их общего двора. Каждый может затрачивать труд $h_i$ по уходу за двором, причем $y=h_1+h_2+h_3$. Каждый имеет неограниченный запас труда. Функции полезности имеют следующий вид:

$$u_i=-h_i^2+iy.$$

(а) Найдите нерегулируемое равновесие в данной экономике.

(б) Найдите равновесие с равно-долевым финансированием и голосованием по правилу простого большинства.

(в) Найдите равновесие Линдаля.

31. В квазилинейной экономике с общественным благом ($x$) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i+1-x)^2 + z_i$, а функция издержек имеет вид $c(y) = 12y$.

1) Найдите Парето-границу.

2) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

3) Найдите равновесие при финансировании равными долями и голосовании простым большинством.

4) Найдите доли финансирования, при которых налоги Кларка в процедуре Гровса—Кларка равны нулю.

32. В квазилинейной экономике с общественным благом ($x$) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i+4-x)^2 + z_i$, а функция издержек имеет вид $c(y) = 12y$.

1) Найдите Парето-границу.

2) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

3) Найдите условия на доли финансирования, которые гарантируют Парето-оптимальный исход голосования простым большинством.

33. Пусть три соседа по даче хотели ли бы подвести к имеющейся общей емкости водопровод с мощностью подачи $X$ тонн/сутки, стоимостью $4$ рубля за тонну/сутки, выбирая размер мощности. Функции полезности имеют вид

$$u_i(X, z_i) = (i+2)\ln X + z_i.$$

(1) Охарактеризуйте Парето-оптимум.

(2) Для каждого соседа определите, какую из трех возможных процедур общественного выбора он бы предпочел:

- равновесие с добровольным финансированием;
- равновесие Линдаля;
- долевое финансирование с равными долями и голосованием простым большинством;
- механизм Гровса—Кларка с долями $1/4$, $2/3$, $5/12$.

Аргументируйте ответ.

34. Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу простого большинства (при стандартных гипотезах) в экономике с квазилинейными функциями полезности с одним общественным и одним частным благом. Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех участников строго положительны;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если предпочитаемый медианным потребителем уровень общественного блага совпал с Парето-оптимальным;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники удовлетворены выбранным уровнем общественного блага (не желают его изменения при данных ценах и долях);

5) к такому же состоянию равновесия, как и механизм добровольного финансирования.

6) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

35. Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу усреднения заявок (при стандартных гипотезах). Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники проголосовали за одинаковый положительный уровень общественного блага;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если доли финансирования пропорциональны предельным нормам замещения общественного блага на частное;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если участники предложили уровни общественного блага, пропорциональные предельным нормам замещения общественного блага на частное;

5) к такому же состоянию равновесия, как и механизм Линдаля.

6) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

36. [Laffont] Рассмотрим квазилинейную экономику с $m$ потребителями и тремя благами: два частных и одно общественное (благо $1$). Потребитель $i$ описывается функцией полезности $u_i = \ln x_1 + 2\ln x_{i2} + z_i$, где $x_{i2}$ — его потребление $2$-го (частного) блага, а $x_1$ — потребление общественного блага. У потребителей имеются только запасы квазилинейного блага. Благо $2$ производится из квазилинейного блага в соответствии с функцией издержек $c_2(y_2) = y_2^2$. Благо $1$ (общественное) производится в соответствии с функцией издержек $c_1(y_1) = y_1$ ($y_1 \geqslant 0$).

(1) Найдите границу Парето. Вычислите соответствующий уровень благосостояния.

(2) Для финансирования общественного блага решено облагать налогом $t$ потребление блага $2$. Вычислите величину налога, которая позволит профинансировать объем общественного блага, найденный в пункте 1.

(3) Объясните, почему этот налог приводит к неоптимальному по Парето состоянию. Вычислите чистые потери благосостояния.

Получите тот же результат, используя концепцию излишка. Дайте графическое представление чистых потерь на графике спроса и предложения на рынке блага $2$.

(4) Пусть мы находимся в ситуации финансирования общественного блага через налогообложение потребления 2-го блага. Найдите оптимальный налог и оптимальное производство общественного блага (оптимум второго ранга). Объясните, почему в оптимуме второго ранга производство общественного блага отличается от полученного в первом пункте. Вычислите потери благосостояния для этого случая. Найдите выигрыш благосостояния, полученный благодаря оптимизации второго ранга (по сравнению с уровнем пункта 4).

37. [Laffont] (Выявление предпочтений в отношении общественных благ)

Рассмотрим квазилинейную экономику с $m$ потребителями, двумя частными благами и одним общественным благом. Функция полезности $i$-го потребителя имеет вид

$u_i = \theta_i(x_1 + \sqrt{x_{i2}}) + z$, где $x_1$ — потребление $1$-го (общественного) блага, $x_{i2}$ — потребление $i$-м потребителем $2$-го (частного) блага, $\theta_i$ — параметр вкуса, известный только потребителю $i$. У потребителей имеются только начальные запасы квазилинейного блага. Блага $1$ и $2$ производятся в соответствии с функциями издержек $c_1(y_1) = m z^2/2$ и $c_2(y_2) = y_2$ $(y_2 \geqslant 0)$. Бремя финансирования общественного блага делится поровну на всех потребителей, а благо $2$ производится конкурентно. При решении задачи абстрагируйтесь от проблемы банкротства.

(1) Определите оптимальный по Парето уровень потребления общественного блага.

(2) Предположим, что каждый участник заявляет свой параметр вкуса $\tilde{\theta}_i$ (некоторое действительное число, возможно не совпадающее с $\theta_i$), зная, что уровень производства общественного блага будет выбран в соответствии с правилом

$$y_1 = \frac{1}{m} \sum \tilde{\theta}_i.$$

Рассмотрите этот механизм как игру, вычислив для этого непрямые функции полезности потребителей $V_i(\theta_i, y_1)$. Покажите, что эта игра в общем случае не будет иметь равновесия по Нэшу.

(3) Предложите механизм со стимулирующими платежами, аналогичный механизму Гровса—Кларка, который позволил бы планирующему органу получить истинные оценки $\tilde{\theta}_i = \theta_i$ как доминирующие стратегии участников.

(4) Предположим, что планирующий орган получает оценки $\theta_i$ из наблюдений за потреблением блага $2$ и выбирает потребление общественного блага по приведенной выше формуле. Зная механизм принятия решений планирующим органом, участники приспосабливают к нему свое поведение и изменяют потребление блага $2$. Вычислите потери благосостояния, возникающие как следствие такого стратегического поведения, и покажите, что они стремятся к нулю при неограниченном росте $m$.

(5) Вычислите налог на потребление блага $2$, который нейтрализует поведение потребителей на рынке блага $2$, возникающее в предположениях предыдущего пункта. Сравните с результатом пункта 3.

(6) В рамках предположений пунктов 3 и 4 найдите равновесие, в котором доли финансирования общественного блага зависят от предпочтений потребителей по следующему правилу:

$$\delta_i = \tilde{\theta}_i / \sum \tilde{\theta}_j.$$

Покажите, что асимптотические результаты (при $m$ стремящемся к бесконечности) изменятся.

# 10. Рынки с асимметричной информацией

В этой главе мы продолжим обсуждать последствия невозможности заключить некоторые виды сделок. Рассмотренные в этой главе модели демонстрируют, как различная информированность продавцов и покупателей может приводить к неоптимальному объему торговли. Такие рынки получили название **рынков с асимметричной информацией**.

## *Асимметричная информация в случае двусторонней монополии. Теорема Майерсона—Саттертуэйта*

Проблему достижения соглашения в условиях двусторонней монополии одним из первых рассмотрел Фрэнсис Эджворт[148]. Анализ этой ситуации привел Эджворта к выводу, что процесс торга между сторонами должен в конце концов завершиться на контрактной кривой, то есть на подмножестве границы Парето, которое задается тем ограничением, что благосостояние сторон не должно ухудшиться по сравнению с исходным состоянием (статус-кво).[149]

С другой стороны, есть серьезные сомнения в справедливости вывода Эджворта. Так, например, Пол Самуэльсон[150] считал, что «...для многих типов монополий конечное равновесие может быть достигнуто за пределами контрактной кривой». Основной аргумент Самуэльсона состоял в том, что при двусторонней монополии нельзя однозначно предсказать, каким образом выгоды торговли будут разделены между участвующими сторонами. В стремлении «тянуть одеяло на себя», участники могут не достичь взаимовыгодного соглашения (т.е. такого, которое ведет к Парето-улучшению), в результате чего торг завершится вне контрактной кривой.

Аргумент Самуэльсона косвенным образом представляет собой критику так называемой «теоремы Коуза», поскольку экстерналии зачастую являются двусторонними и, следовательно, стороны, связанные экстерналиями, оказываются в ситуации двусторонней монополии. Поэтому, возражая критикам «теоремы Коуза», Рональд Коуз изложил свой взгляд и на критику Самуэльсоном Эджворта[151]. По мнению Коуза неоптимальный исход противоречит гипотезе о рациональности участников торга (является скорее исключением), просто потому, что он наносит ущерб участникам торга. Неопределенность того, как будут поделены выгоды, не связана с проблемой достижения соглашения, и сама по себе не может автоматически приводить к неоптимальности. С доводами Р. Коуза трудно не согласится, оставаясь в рамках стандартных предположений экономического анализа (рациональное поведение и симметричная информированность участников торга). Положение меняется при отказе от предположения о симметричной информированности.

В этом параграфе проводится анализ, который позволяет увидеть проблемы достижения оптимальных состояний в случае двухсторонней монополии в условиях асимметричной информированности сторон и дать строгое обоснование тезису Пола Самуэльсона, а также оценить (и уточнить) аргументы в дискуссии вокруг «теоремы Коуза».

---

[148] Francis Ysidro Edgeworth, *Mathematical Psychics*, London: Kegan Paul, 1881.

[149] Распространение этого анализа на случай более чем двух участников позволило сформулировать утверждение о том, что процесс торга должен завершиться в ядре рассматриваемой экономики, то есть в подмножестве эффективных состояний, для которых благосостояние любой группы участников должно быть не ниже того уровня, которых они способны достигнуть «самостоятельно».

[150] Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, 1947, p. 238.

[151] См. R. H. Coase, "Notes on the Problem of Social Cost," in: *The Firm, the Market and the Law*, The University of Chicago Press, 1988, 157-186 (рус. пер. Р. Коуз, Заметки к проблеме “социальных издержек”, в кн. Фирма, рынок и право. — М.: Дело, 1993).

Ключевым аспектом анализа ситуации двусторонней монополии оказывается неодинаковая информированность сторон. Во-первых, несложно придумать пример разумного механизма торга, который при асимметричной информированности приводит к неоптимальному результату. Во-вторых, как показывает теорема Майерсона—Саттертуэйта, существуют ситуации двусторонней монополии с асимметричной информированностью, в которых ни один механизм торга не может привести к оптимальному результату.

### Формулировка теоремы Майерсона—Саттертуэйта

Рассмотрим торговлю единицей неделимого блага. Продавец блага характеризуется издержками $c$ (возможно, это альтернативные издержки), а покупатель — оценкой $v$ (готовность платить). Продавец и покупатель могут либо вступить в сделку, либо остаться в исходном состоянии (то есть благо остается у продавца).

Предположим, что то, кому достается благо и сколько за него платится, определяется в результате некоторой игры. Такую игру принято называть **торгом**. В данном случае это двусторонний торг. Мы не будем конкретизировать структуру этой игры (процедуру торга), сделаем только предположения самого общего характера.

Будем предполагать, что это байесовская игра, в которой $c$ — это тип продавца, а $v$ — тип покупателя. Как обычно в байесовской игре, предполагается, что тип игрока известен только самому игроку (является приватной информацией), но не партнеру. Набор стратегий продавца и покупателя определяют для каждой пары параметров $c$ и $v$ происходит ли торговля, и по какой цене. Пусть $x(c,v)=1$, если торговля происходит и $x(c,v)=0$ в противном случае, и пусть $p(c,v)$ — плата покупателя продавцу[152]. Следует учитывать, что это не цена, а общая сумма. Плата, вообще говоря, может быть отрицательной, кроме того, механизм торга может подразумевать осуществление ненулевой платы даже в том случае, если товар не продается.

Как покупатель, так и продавец имеют квазилинейные функции выигрыша и нейтральны к риску. Выигрыш покупателя равен

$$u_v(c,v)=v\,x(c,v)-p(c,v),$$

а выигрыш продавца (прибыль) —

$$u_c(c,v)=p(c,v)-c\,x(c,v).$$

Будем предполагать, что каждый из игроков любого типа может обеспечить себе в игре неотрицательный ожидаемый выигрыш. Например, это условие будет выполнено, если у каждого игрока есть до начала собственно торга ход, состоящий в выборе — участвовать или не участвовать в торговле. При этом каждая из сторон может обеспечить себе по крайней мере нулевой резервный выигрыш, поэтому в равновесии игрок не участвует в торге, если его ожидаемый выигрыш от торга отрицательный.

Обозначим через $U_v(v)$ ожидаемый выигрыш от сделки покупателя с оценкой $v$ при условии, что эта оценка известна:

$$U_v(v)=\mathsf{E}[v\,x(\tilde{c},v)-p(\tilde{c},v)]=v\,\mathsf{E}x(\tilde{c},v)-\mathsf{E}p(\tilde{c},v),$$

Условие добровольности участия (или просто **условие участия**) для покупателя с оценкой $v$ означает, что $U_v(v)\geqslant 0$. Аналогично, для продавца с издержками $c$ ожидаемый выигрыш от сделки

---

[152] Можно рассмотреть и смешанные стратегии (торговля происходит с некоторой вероятностью), но при этом ситуация поменяется незначительно. Плату $p(c,v)$ тогда следует интерпретировать как ожидаемую, рассчитанную по плате в случае, если торговля происходит, и плате в случае, если она не происходит. Такой прием можно использовать, поскольку предполагается нейтральность к риску.

$$U_c(c)=\mathsf{E}[p(c,\tilde{v})-c\,x(c,\tilde{v})]=\mathsf{E}p(c,\tilde{v})-c\,\mathsf{E}x(c,\tilde{v}).$$

Условие добровольности участия для продавца с издержками $c$ означает, что $U_c(c)\geqslant 0$.

До начала торга (но после того, как игроки узнали, какого они типа) совокупная информация в рассматриваемой экономике эквивалентна полной информации. Действительно, продавец знает свой тип, а покупатель — свой, поэтому если «сложить» информацию, доступную обеим сторонам, то окажутся известными оба типа, $c$ и $v$. Следовательно, с точки зрения всей имеющейся в экономике информации Парето-оптимальный набор стратегий данной игры таков, что соответствующая ему функция $x(c,v)$ при любых $c$ и $v$ принимает значения, являющиеся решениями следующих задач:

$$(v-c)\,x\to\max_x.$$

Если $v>c$, то максимум здесь достигается при $\hat{x}=1$, а если $v<c$, то при $\hat{x}=0$ (в случае $v=c$ решение неоднозначно). Т.е. если выгода от торговли, $v-c$, положительна, то она осуществляется, а если отрицательна, то нет. Таким образом, торговля в этих условиях исчерпывает все возможные Парето-улучшения.

Существует общий результат[153] (**теорема Майерсона—Саттертуэйта**) о принципиальной невозможности достижения Парето-оптимума при *любой* процедуре торга, или, другими словами, в (байесовском) равновесии *любой* такой игры, если случайные величины $c=\tilde{c}$ и $v=\tilde{v}$ имеют непрерывное распределение, независимы, и нельзя заранее сказать, имеет ли место выгода от торговли (существует положительная вероятность того, что $\tilde{v}>\tilde{c}$ и того, что $\tilde{v}<\tilde{c}$).

Более точно, предположим, что издержки продавца, $\tilde{c}$, являются случайной величиной, имеющей распределение, характеризующееся функцией распределения $G(\cdot)$ с носителем $[c_1,c_2]$ и функцией плотности $g(\cdot)$, а оценка покупателя, $\tilde{v}$, является случайной величиной, с функцией распределения $F(\cdot)$, носителем $[v_1,v_2]$ и функцией плотности $f(\cdot)$. Носители распределений «перехлестываются», т.е. $v_1\leqslant c_2$ и $c_1\leqslant v_2$. Кроме того, предположим, что случайные величины $\tilde{c}$ и $\tilde{v}$ независимы (т.е. совместная функция распределения равна произведению $G(\cdot)$ и $F(\cdot)$, а плотность совместного распределения равна произведению плотностей).

Рассмотрим конкретное байесовское равновесие в анализируемой игре. Пусть $\bar{x}(c,v)$ — объем торговли в этом равновесии, и пусть $\bar{p}(c,v)$ — соответствующая этому равновесию оплата.

В равновесии ожидаемый выигрыш покупателя с оценкой $v$ от сделки равен

$$U_v(v)=v\,\mathsf{E}\bar{x}(\tilde{c},v)-\mathsf{E}\bar{p}(\tilde{c},v),$$

а выигрыш продавца с издержками $c$ —

$$U_c(c)=\mathsf{E}\bar{p}(c,\tilde{v})-c\,\mathsf{E}\bar{x}(c,\tilde{v}).$$

Для анализа рассматриваемой ситуации удобно ввести вспомогательную игру, в которой игроки выбирают не те стратегии, которые им доступны в исходной игре торга, а числа $v$ и $c$ соответственно, то есть объявляют (возможно, ложно), какого они типа. При этом, назвав $v$, покупатель с оценкой $\check{v}$ получает ожидаемый выигрыш

$$U_{\check{v}}(v)=\check{v}\,\mathsf{E}\bar{x}(\tilde{c},v)-\mathsf{E}\bar{p}(\tilde{c},v),$$

---

[153] Roger B. Myerson, and Mark A. Satterthwaite, "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading," *Journal of Economic Theory*, **29** (April 1983), 265-281.

а продавец с издержками $\check{c}$, назвав $c$, получает ожидаемый выигрыш

$$U_{\check{c}}(c) = \mathsf{E}\overline{p}(c, \tilde{v}) - \check{c}\,\mathsf{E}\overline{x}(c, \tilde{v}).$$

Смысл этого вспомогательного приема становится ясным, если учесть следующие рассуждения. Предположим, что в новой игре игроку типа $\check{\theta}$ выгоднее назвать тип $\theta$, а не свой истинный тип при том, что партнер называет свой тип правдиво. Но тогда в исходной игре ему было бы выгодно использовать не ту стратегию, которую он выбрал, а ту стратегию, которую выбрал игрок типа $\theta$, а это противоречит равновесности стратегий, на основе которых мы построили функции выигрыша в новой игре. Следовательно, каждому типу каждого игрока выгодно называть свой истинный тип[154]. Т.е. функция $U_{\check{v}}(v)$ достигает максимума при $v = \check{v}$, а функция $U_{\check{c}}(c)$ — при $\check{c} = c$. Эту характеристику равновесия можно назвать **условиями самовыявления** или условиями совместимости стимулов.

Теорема Майерсона—Саттертуэйта, фактически, утверждает, что несовместны следующие три условия:

- Парето-оптимальность равновесия,
- добровольность участия для участников всех типов,
- условия самовыявления для участников всех типов.

Доказательство этой теоремы приводится в Приложении к этой главе.

### Примеры торга при асимметричной информации

При полной информированности (когда обе стороны знают $v$ и $c$) торг эффективен. Пусть, например, продавец называет цену $p$, а покупатель либо соглашается, либо отказывается от торговли. Тогда продавец назовет цену $v$, и покупатель согласится[155]. Вся выгода от торговли достанется тогда продавцу, и будет достигнут Парето-оптимум.

С другой стороны, неполная информированность может привести к неэффективности торга. Рассмотрим следующую ситуацию: издержки известны обоим, а оценка покупателя $v$ известна только самому покупателю. Продавцу известно, что $\tilde{v}$ имеет распределение с носителем $[v_1, v_2]$, функцией распределения $F(\cdot)$ и плотностью $f(\cdot)$. Предположим, что, с одной стороны, торговля выгодна с ненулевой вероятностью, а с другой стороны, наличие выгоды не гарантировано, т.е. выполнено

$$v_1 < c < v_2.$$

Предположим, что переговорная сила полностью принадлежит продавцу, и осуществляется торг типа «не хочешь, не бери». Покупатель может согласиться на предложенную продавцом плату $p$ только если $v \geqslant p$. Следовательно, вероятность того, что при данной цене торговля состоится, равна $1 - F(p)$. Продавец назначает $p$ так, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш:

$$(p - c)(1 - F(p)) \to \max_p .$$

Оптимальная для продавца цена, $\overline{p}$, должна удовлетворять следующему условию первого порядка:

$$1 - F(p) = (p - c) f(p).$$

---

[154] Другими словами, во вспомогательной игре стратегии, состоящие в том, чтобы называть свой истинный тип, составляют (байесовское) равновесие.

[155] Можно считать, что продавец называет цену $v - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малой величиной.

Отметим, что условие первого порядка является достаточным, если отношение[156]

$$\frac{f(p)}{1-F(p)}.$$

возрастает в точке $\bar{p}$.

Из условия первого порядка следует, что $\bar{p}>c$. Такая ситуация не может быть эффективной, поскольку покупатель будет с ненулевой вероятностью отказываться от покупки, при том что с общественной точки зрения существуют выгоды от торговли. Это будет происходить, когда $c<v<\bar{p}$. Оптимальности по Парето можно было бы достичь только если бы была назначена цена $p=c$, поскольку при этом покупатель всегда бы выбирал оптимальный с общественной точки зрения объем торговли, но такая цена невыгодна продавцу. Таким образом, ожидаемый объем торговли неоптимально мал.

У этой модели есть прямая аналогия — модель недискриминирующей монополии с функцией спроса $D(p)=1-F(p)$. И в той, и в другой модели имеет место неоптимальность.

Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда плату предлагает покупатель, а продавец решает, продавать или нет. В этом случае продавец согласится продать благо, если $p\geqslant c$. Зная это, покупатель предложит $p=c$. Такой результат будет оптимален по Парето.

Из рассмотрения этих двух противоположных ситуаций следует вывод, что при асимметричной информированности эффективность торга может определяться распределением переговорной силы. *Желательно, чтобы право назначать плату принадлежало информированной стороне.*

Рассмотрим также ситуацию, аналогичную той, о которой речь идет в теореме Майерсона—Саттертуэйта, но отличающуюся тем, что типы продавца и покупателя однозначно связаны. Пусть например, если издержки продавца равны $c$, то оценка покупателя равна $\alpha c$, где $\alpha>1$, т.е. оценки покупателя и продавца жестко положительно коррелированы: $\tilde{v}=\alpha\tilde{c}$ (это можно интерпретировать так, что оценки покупателя и продавца зависят от характеристики, которая интересует обоих — качества товара). Здесь можно использовать стандартную процедуру торга: продавец предлагает цену, а покупатель при данной цене решает купить или нет. При этом продавец установит цену на уровне $\alpha c$, покупатель купит благо (предполагаем, что он ведет себя благожелательно по отношению к продавцу), и будет достигнут Парето-оптимум. На основе этого примера можно предположить, что условие независимости типов продавца и покупателя может быть существенным для справедливости теоремы Майерсона—Саттертуэйта. Заметим также, что этот пример близко связан с моделью Акерлова, рассматриваемой ниже, и соответствует случаю, когда качество товара известно как продавцу, так и покупателю (случаю полной информации).

С другой стороны, результат оказывается другим и при симметричной неинформированности; в этих условиях существует контракт, который приводит к Парето-эффективности, подобно симметричной полной информированности. Анализ этого случая приводится в следующем параграфе.

### Покров неведения и конституционный контракт

Рассмотрим следующую двухпериодную модель торга. В первом периоде $v$ и $c$ не известны ни той, но другой стороне — они симметрично неинформированы и знают только рас-

---

[156] Оно известно в статистике под названием «интенсивность отказов» (англ. *hazard rate*).

пределение величин $\tilde{v}$ и $\tilde{c}$. Во втором периоде ситуация с информированностью каким-то образом меняется.

Пусть, например, покупатель узнает свою оценку $v$, и оба узнают издержки $c$. Эффективный исход возникает, если в первом периоде заключен контракт следующего вида: во втором периоде право выбрать цену предоставляется покупателю, но продавец может отказаться от продажи по этой цене. За право устанавливать цену покупатель платит фиксированную цену, которая устанавливается в результате торга (на первом этапе). Вне зависимости от распределения переговорной силы в первом периоде эта процедура приводит к эффективному исходу. Т.е. симметричная неинформированность может приводить к оптимальности, подобно симметричной полной информированности.

В более общей ситуации, когда во втором периоде обе стороны асимметрично неинформированы, — каждый знает только свой тип — существует контракт, подписываемый в первом периоде (когда стороны еще симметрично неинформированы), такой что будет достигнут оптимум.

Этот контракт может, например, состоять в том, что стороны обязуются во втором периоде участвовать в следующей процедуре торга.

Продавец и покупатель одновременно объявляют свои оценки, $c'$ и $v'$ соответственно, которые, вообще говоря, могут не совпадать с их действительными оценками, $c$ и $v$. Если $c' \leqslant v'$, то товар передается покупателю. Другими словами, передаваемое количество блага определяется по формуле

$$x(c', v') = \begin{cases} 1, & \text{если } c' \leqslant v', \\ 0, & \text{если } c' > v'. \end{cases}$$

Кроме того, вне зависимости от того, передается товар или нет, покупатель выплачивает продавцу сумму, вычисляемую по формуле:

$$p(c', v') = \mathsf{E}[\tilde{c}\, x(\tilde{c}, v') + \tilde{v}\, x(c', \tilde{v})] + A,$$

где $A$ — некоторая константа.

Механизм построен таким образом, что стратегия, состоящая в том, чтобы сообщать свою истинную оценку, является (слабо) доминирующей. Рассмотрим, например, ожидаемый выигрыш продавца с издержками $c$, назвавшего $c'$:

$$U_c(c') = \mathsf{E} p(c', \tilde{v}') - c\, \mathsf{E} x(c', \tilde{v}').$$

Здесь $\tilde{v}'$ — это случайная величина, являющаяся результатом стратегии покупателя. А именно, если стратегия покупателя состоит в том, чтобы называть $v'(v)$, когда его оценка равна $v$, то $\tilde{v}' = v'(\tilde{v})$. Покажем, что вне зависимости от $\tilde{v}'$ ожидаемая полезность продавца с издержками $c$ будет такой, что $U_c(c') \leqslant U_c(c)\ \forall c'$. Подставляя в $U_c(c')$ плату $p(c', v')$ получим

$$U_c(c') = \mathsf{E}[\tilde{c}\, x(\tilde{c}, \tilde{v}') + \tilde{v}' x(c', \tilde{v}')] + A - c\, \mathsf{E} x(c', \tilde{v}') =$$
$$= \mathsf{E}[\tilde{c}\, x(\tilde{c}, \tilde{v}')] + \mathsf{E}[(\tilde{v}' - c)\, x(c', \tilde{v}')] + A.$$

Отсюда

$$U_c(c) - U_c(c') = \mathsf{E}[(\tilde{v}' - c)\, (x(c, \tilde{v}') - x(c', \tilde{v}'))].$$

Рассмотрев все возможные случаи взаимного положения величин $c$, $c'$ и $v$, убеждаемся, что выражение

$$(v - c)\, (x(c, v) - x(c', v)),$$

от которого здесь берется ожидание, всегда неотрицательно. Читатель может проделать это несложное упражнение самостоятельно.

Следовательно $U_c(c') \leqslant U_c(c)\ \forall c'$, т.е. называть свои истинные издержки — доминирующая стратегия продавца.

Аналогичным образом, для ожидаемого выигрыша покупателя,

$$U_v(v') = v\,\mathsf{E}x(\tilde{c}', v') - \mathsf{E}p(\tilde{c}', v'),$$

выполнено $U_v(v') \leqslant U_v(v)\ \ \forall v'$, т.е. называть свою истинную оценку — доминирующая стратегия покупателя.

При таком механизме продавец и покупатель будут правдиво сообщать свой тип, в результате чего будет достигнут оптимум. Это следует из того, что в этом механизме объем торговли $x(c', v')$ оптимален по Парето, когда $c'$ и $v'$ — истинные типы участников.

Если ожидаемые выгоды от торговли положительны, то можно подобрать константу $A$ так, чтобы обеим сторонам было выгодно подписать контракт. Более того, для любого неэффективного механизма торга можно подобрать константу $A$ так, чтобы предложенный эффективный механизм приводил к более высоким ожидаемым выигрышам обоих участников.

Данные рассуждения доказывают, что в теореме Майерсона—Саттертуэйта важную роль играет условие участия для *каждого* из типов продавца и покупателя. Если его заменить на условие участия *в среднем*, то теорема перестает быть верной, и асимметричность информации не приводит к неоптимальности.

Проведенный анализ двухэтапной процедуры торга демонстрирует важную роль так называемых *конституционных контрактов*.

Данная игра представляет собой пример двухэтапных «игр», являющихся инструментом анализа в политической философии[157] и теории общественного выбора[158].

На первом, конституционном, этапе игры, в так называемом «естественном состоянии» рациональные и свободные индивидуумы на основе единогласия и под покровом неведения (их будущие роли индивидуумам неизвестны) выбирают правила игры — «принципы устройства общества». Эта правила носят обязывающий характер и в дальнейшем, на втором этапе, эти индивидуумы живут именно по этим правилам.

## Задачи

1. Рассмотрите ситуацию двусторонней монополии с неделимым благом. Пусть издержки продавца могут принимать значение $c_1$ с вероятностью $\mu$ и значение $c_2$ с вероятностью $1-\mu$, а оценка покупателя может принимать значение $v_1$ с вероятностью $\nu$ и значение $v_2$ с вероятностью $1-\nu$, где $c_1 < v_1 < c_2 < v_2$, $0 < \mu < 1$, $0 < \nu < 1$.

(1) Какое условие теоремы Майерсона—Саттертуэйта (в том варианте, который изложен в тексте главы) здесь не выполняется?

(2) Запишите для этой ситуации условия добровольности участия и условия самовыявления.

---

[157] Например, эта конструкция лежит в основе анализа Джоном Роулзом концепции справедливости. См. John Rawls, *A Theory of Justice*. Harvard University Press, 1971. Рус. пер.: Дж. Роулз, Теория справедливости, Новосибирск, НГУ, 1997.

[158] См. James M. Buchanan, Gordon Tullock, *The Calculus of Consent*, Ann Arbor: University of Michigan Press, 1962. James M. Buchanan, Geoffrey Brennan, *The Reason of Rules*, Cambridge University Press, 1985.

(3)* Покажите, что теорема Майерсона—Саттертуэйта верна для рассматриваемой ситуации, т.е. указанные условия несовместны, если объем торговли оптимален.

2. В ситуации предыдущей задачи предложите «конституционный контракт», который стороны согласны были бы подписать «под покровом неведения», если (а) переговорная сила принадлежит продавцу, (б) переговорная сила принадлежит покупателю.

3. Рассмотрите ситуацию, о которой идет речь в теореме Майерсона—Саттертуэйта. Пусть торг между покупателем и продавцом происходит по следующей схеме. Продавец и покупатель одновременно объявляют свои оценки, $c'$ и $v'$ соответственно, которые, вообще говоря, могут не совпадать с их действительными оценками, $c$ и $v$. Если $c' \leqslant v'$, то товар передается покупателю, покупатель платит сумму $\max\{c', v_1\}$, а продавец получает сумму $\min\{c_2, v'\}$. Если $c' > v'$, то товар остается у продавца и никаких платежей не производится.

(1) Покажите, что условие добровольности участия в сделке выполнено. (Подсказка: воспользуйтесь доказательством теоремы Майерсона—Саттертуэйта).

(2)* Докажите, что сообщать свою истинную оценку — доминирующая стратегия продавца и покупателя.

(3) Пользуясь результатом пункта (2) объясните, почему в результате торга будет достигнут оптимум.

(4) Какому условию теоремы Майерсона—Саттертуэйта не удовлетворяет описанный механизм?

## Модели рынка с асимметричной информацией

Есть рынки (например, рынок подержанных автомобилей) на которых качество конкретного экземпляра товара покупатель может определить с трудом, зато оно неплохо известно продавцу. Рыночная цена едина и не зависит от качества. Чем больше доля некачественных товаров, тем ниже цена, а чем ниже цена, тем менее выгодно продавать качественные товары. Такой процесс может закончиться полным вытеснением качественных товаров с рынка. Разрушение рынка при несимметричной информированности называют **неблагоприятным отбором**.

Самая известная модель такого рода — **модель Акерлова**[159], модель так называемого рынка «лимонов». Эта модель существенно отличается от классических моделей рынка. В качестве промежуточного звена рассмотрим модификацию классических моделей, в которой имеет место неоптимальность, связанная с асимметричной информацией.

### Модификация классических моделей равновесия: равновесия с неотличимыми благами

Рассмотрим квазилинейную экономику с тремя благами, в которой имеется один репрезентативный потребитель с функцией полезности $v(x_1, x_2) + z$ и один репрезентативный производитель с функцией издержек $c(y_1, y_2)$. Пусть в этой экономике потребитель в момент покупки не может отличить благо 1 от блага 2, в то время как производитель может это делать. В связи с неотличимостью двух благ для потребителя, рыночная цена на них должна быть одинаковой. Потребитель максимизирует свою полезность исходя из рыноч-

---

[159] Akerlof, George "The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism," *Quarterly Journal of Economics*, 84 (1970), 488-500.

ных долей двух благ, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ ($\alpha_1+\alpha_2=1$), которые соответствуют объемам продаж этих благ.

Задача потребителя при данной цене $p$ и долях $\alpha_1$ и $\alpha_2$ имеет вид

$$v(\alpha_1 x, \alpha_2 x)-px \to \max_{x\geqslant 0},$$

где $x=x_1+x_2$ — это суммарный объем потребления двух неотличимых благ, причем $x_1=\alpha_1 x$ и $x_2=\alpha_2 x$. При дифференцируемости функции $v(\cdot)$ дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя имеет вид

$$\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x_2}=p.$$

Задача производителя обычная, только цены на два блага одинаковы: $p_1=p_2=p$:

$$p\,(y_1+y_2)-c(y_1,y_2)\to \max_{y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0}.$$

При дифференцируемости функции издержек дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи производителя имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial y_1}=p \text{ и } \frac{\partial c}{\partial y_2}=p.$$

Равновесие в данной модели — это такая цена $\bar{p}$, доли $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, объемы потребления $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и объемы производства $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Объемы потребления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ являются решением задачи потребителя при цене $\bar{p}$ и долях $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$.

2) Объемы производства $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ являются решением задачи производителя при цене $\bar{p}$.

3) Рынки сбалансированы, т.е. $\bar{x}_1=\bar{y}_1$ и $\bar{x}_2=\bar{y}_2$.

4) Доли $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ являются долями продаж соответствующих благ на рынке, т.е. $\bar{x}_1=\bar{\alpha}_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$ и $\bar{x}_2=\bar{\alpha}_2(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$.

Как известно, дифференциальная характеристика внутреннего Парето-оптимума имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial c}{\partial y_1} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{\partial c}{\partial y_2}.$$

Таким образом, для Парето-оптимальности внутреннего равновесия требуется выполнение условий

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial c}{\partial y_1}=\frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{\partial c}{\partial y_2}.$$

Ясно, что в общем случае нельзя ожидать выполнения этого условия.

В частности, предположим, что $v(x_1,x_2)=V(x_1+\beta x_2)$, где функция $V(\cdot)$ имеет положительную производную. Здесь единица 2-го блага заменяет для этого потребителя $\beta$ единиц 1-го. При этом

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=V' \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x_2}=\beta V'.$$

Если $\beta>1$, то равенство $\partial v/\partial x_1=\partial v/\partial x_2$ не может быть выполнено.

Покажем, что в равновесии недопроизводится «более ценное» второе благо. Для этого мы укажем Парето-улучшение в дифференциалах для состояния равновесия. Пусть производство и потребление 2-го блага меняется на величину $dx_2 = dy_2 > 0$, и суммарное производство двух благ не меняется, т.е. $dx_1 = dy_1 = -dx_2$. При этом в первом приближении издержки производства не меняются:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial c}{\partial y_2} dy_2 = p\, dy_1 + p\, dy_2 = 0.$$

Таким образом, затраты 3-го блага в производстве не меняются. Поэтому потребление 3-го блага не меняются ($dz = 0$).

Изменение полезности тогда составляет величину

$$du = \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 + dz = V'(-dx_2) + \beta V' dx_2 = (\beta - 1) V' dx_2 > 0.$$

### Модель Акерлова: классическая постановка

Следующий пример демонстрирует модель Акерлова для простого случая двух градаций качества. Назовем товар высокого качества «грушей», а плохого — «лимоном»[160]. Каждый продавец знает, лимон или грушу он продает, полезность в деньгах сохранения лимона у себя равна $c_1$, а груши — $c_2$ ($c_2 > c_1$). Полезность лимона для типичного покупателя равна $v_1 \geqslant c_1$, а груши — $v_2 \geqslant c_2$, причем покупатель узнает только в процессе использования, лимон или грушу он купил. Он знает только вероятность $\mu$ попадания лимона среди всех продаж. Соответственно, вероятность попадания груши есть $1 - \mu$. Предположим, что покупатель нейтрален к риску. Цена $p$, которую он заплатил бы за покупку не превышает $p' = \mu v_1 + (1 - \mu) v_2$. Если окажется, что эта цена не ниже резервной цены груши $c_2$, то можно ожидать, что в равновесии происходит торговля и лимонами и грушами. Если же $p' < c_2$, то никто из продавцов не вынесет на продажу груши, хотя их потенциальная полезность для покупателя выше. Это приводит к неоптимальности. Действительная вероятность $\mu' \neq \mu$ появления лимонов среди продаж станет выше. Когда покупатели узнают об этом по опыту, резервная цена покупателей еще более понизится. Такой рынок разрушается. Заметьте: если продавцы тоже не знают, лимон или грушу они продают, и являются, как и покупатели, нейтральными к риску, то торговля сохранится, и равновесие будет Парето-оптимальным, так что добавление информации (несимметричное) ухудшает положение!

На рынке, описываемом некоторым вариантом модели Акерлова ситуация меняется, если возможно *посредничество*. Пусть есть эксперты по грушам и лимонам, которые могут, затратив $c$ денежных единиц, отличить их. Посредники либо торгуют сами, либо дают платные советы. Если посредники дорожат *репутацией*, то оценивают товар достоверно. Перед потребителем выбор: покупать «кота в мешке» самому или заплатить за совет специалиста (либо покупать товары у посредников). Еще одним возможным решением проблемы асимметричности информации является *гарантия*. В момент совершения сделки покупатель не может определить качество товара, но это качество выявляется в процессе использования. Продавцу хорошего товара выгодно взять на себя обязательство замены или ремонта некачественного товара. Наличие гарантии служит сигналом для покупателя, что этот товар хороший. **Сигнализированием** называют действия владельцев лучшего товара, направленные на информирование покупателей о качестве товара. Сигнал должен быть такой, чтобы владельцам «лимонов» было бы трудно произвести его.

---

[160] В английском языке в одном из значений слово *lemon* — «некачественный товар».

В модели Акерлова перед владельцем товара стоит только выбор продавать или не продавать товар. Ситуация усложняется, если продавец сам является производителем товара и может повлиять на его качество. Здесь появляется другой эффект — **моральный риск** . Его можно также показать на примере гарантий. Фирме, дающей гарантию, трудно отличить, вызвано ли повреждение товара его плохим качеством при покупке или действиями покупателя. Покупатель поэтому, имея гарантию, может обращаться с товаром менее аккуратно.

Продемонстрируем влияние асимметричной информированности субъектов рыночных отношении на структуру рыночных сделок следуя оригинальному подходу Акерлова на примере рынка некоторого неделимого товара (например, подержанных автомобилей), которое может приобретаться в количестве, не превышающем 1.

Предположим, что существуют $n$ градаций качества этого блага, причем доля блага типа $s$ равна $\mu_s$ ($\mu_s>0$). По виду они неотличимы, отличаясь только по внутренним характеристикам. Оценки покупателей (продавцов) товара типа $s$ совпадают и равны $v_s$ (соответственно, $c_s$).

Покупатели и продавцы имеют квазилинейные предпочтения и нейтральны по отношению к риску, так что если благо типа $s$ продается по цене $p$, то покупатель получает выигрыш (потребительский излишек)

$$v_s-p,$$

а продавец — выигрыш

$$p-c_s.$$

В Парето-оптимальном состоянии экономики благо должно принадлежать тому, кто его больше ценит.

Если бы как продавцы, так и покупатели были полностью информированы (точнее, информация об оценках продавцов и покупателей *общеизвестна*), то в результате обменов (в равновесии) достигался бы Парето-оптимум. Цены блага разного качества, $p_s$, были бы, вообще говоря, различны и зависели бы от переговорной силы сторон:

$$p_s\geqslant c_s, \text{ если } c_s\geqslant v_s$$

и

$$c_s\leqslant p_s\leqslant v_s, \text{ если } c_s\leqslant v_s.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что продавцов меньше, чем покупателей, и им принадлежит переговорная сила. Следовательно, в равновесии $p_s=v_s$. По сути дела, рынок распадается на $n$ отдельных рынков, на каждом из которых установится своя цена.

Заметим, что если как покупатели, так и продавцы не знают качества, а только распределение, т.е. они одинаково (не)информированы, то в равновесии установится единая цена, и Парето-оптимум достигается и в этом случае: если ожидаемая оценка покупателя выше ожидаемой оценки продавца,

$$\mathsf{E}v(\tilde{s})>\mathsf{E}c(\tilde{s})$$

т.е.

$$\sum_{s=1}^{n}\mu_s v_s>\sum_{s=1}^{n}\mu_s c_s$$

то сделка происходит, а если ниже, то нет. При этом, если переговорная сила принадлежит продавцам, то в равновесии цена равна

$$p = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

При асимметричной информированности, когда покупатели не различают качества предложенных к продаже благ, то устанавливается единая рыночная цена. Наблюдая эту цену, рациональные покупатели, считая продавцов тоже рациональными, имеют основания ожидать, что предлагаются к продаже только товары, качество которых $s$ таково, что оценки продавцов $c_s$ не ниже этой цены. Будем предполагать, что если продавцу все равно (т.е. $p = c_s$), то он предлагает на продажу это благо. Каждый покупатель оценивает набор предложенных благ в соответствии с ожидаемой полезностью, т.е.

$$\mathsf{E}(v(\tilde{s}) \,|\, c(\tilde{s}) \leqslant p) = \sum_{s:\, c_s \leqslant p} \mu_s v_s \Big/ \sum_{s:\, c_s \leqslant p} \mu_s.$$

Если $c_s$ расположены в порядке возрастания, и продаются первые $m(p)$ типов (для них $c_s \leqslant p$), то ожидаемую полезность можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{m(p)} \mu_s v_s \Big/ \sum_{s=1}^{m(p)} \mu_s.$$

Введем обозначение

$$V_m = \sum_{s=1}^{m} \mu_s v_s \Big/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s.$$

Таким образом, благо приобретается, если величина $V_{m(p)}$ не превышает цену. При этом, если переговорная сила у продавца, то равновесная цена задается уравнением

$$p = V_{m(p)}.$$

Равновесное количество типов, которые продаются, $m = m(p)$, при этом должно удовлетворять соотношению

$$c_m \leqslant V_m < c_{m+1}.$$

Если $m(p) = n$, то второе неравенство здесь не требуется. Это будет равновесие, в котором продаются товары всех типов. Условие существования такого равновесия, таким образом, выглядит как

$$c_n \leqslant V_n = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

2. Когда ничего не продается.

Предположим, что $c_s < v_s \ \forall s$. Тогда такое равновесие существует. Докажем это на основе индукции. При $m = 1$, $V_1 = v_1$, поэтому если $V_1 < c_2$, то существует равновесие, в котором продаются только товары 1-го типа, поскольку $c_2 > V_1 = v_1 > c_1$. В противном случае $V_1 \geqslant c_2$. Пусть теперь выполнено соотношение $V_{m-1} \geqslant c_m$. Тогда либо

$$c_m < V_m < c_{m+1},$$

либо

$$V_m \geqslant c_{m+1}.$$

Для доказательства этого достаточно показать, что $c_m < V_m$. Действительно, $c_m \leqslant V_{m-1}$ и $c_m < v_m$, поэтому

$$V_m = \Big(\sum_{s=1}^{m-1} \mu_s v_s + \mu_m v_m\Big) \Big/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s = \Big(\sum_{s=1}^{m-1} \mu_s V_{m-1} + \mu_m v_m\Big) \Big/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s > c_m.$$

Первая ситуация соответствует равновесию, в котором продается $m$ типов благ. Наконец, если не равновесие не существует при $m = n-1$, то выполняется соотношение $c_n \leqslant V_{n-1}$, что соответствует равновесию, в котором продаются блага всех $n$ типов.

Нетрудно придумать ситуации, в которых равновесие неединственно, и в общем случае (без предположения о «хорошем» поведении последовательностей $c_s$ и $v_s$) равновесия следует искать полным перебором.

И наконец, рассмотрим условия оптимальности равновесия. Среди всех возможных равновесий при сделанном ранее предположении $c_s < v_s \ \forall s$ оптимальным является только такое, в котором продаются блага всех $n$ типов, т.е. Парето-оптимальное равновесие может существовать только если

$$c_n \leqslant V_n = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

Кроме того, в случае, когда равновесие не единственно, все возможные равновесия упорядочены по возрастанию благосостояния. Равновесия с более высоким $m(p)$ доминируют по Парето равновесия с низким $m(p)$.

**Пример 1.**

Проиллюстрируем сказанное в частном случае рынка со 100 типами благ (автомобилей), на котором $c_s = 300 + s$ и $v_s = 300 + b + s$, где $b > 0$ — различие в оценках продавцов и покупателей, не зависящее от типа автомобиля.

Если покупателей больше, чем продавцов, то равновесие оптимально, если все автомобили проданы ($m = 100$), поскольку выгоды от торговли положительны при каждой возможной сделке: $v_s - c_s = b > 0$.

Возможны разные случаи информированности и соответствующие равновесия.

(1) *Полная информированность продавцов и покупателей*. По сути дела, рынок распадается на $100$ отдельных рынков, на каждом из которых установится своя цена $p_s = v_s$. Все $100$ типов автомобилей будут продаваться, т.е. равновесие состояние Парето-оптимально.

При неполной информированности покупателей и/или продавцов равновесие зависит от относительной частоты разных типов автомобилей. Мы предположим, что автомобили всех типов имеются в одинаковом количестве.

(2) *Полная неинформированность продавцов и покупателей*. Ожидаемая оценка автомобиля продавцом будет равна

$$\mathsf{E}c(\tilde{s}) = \frac{1}{100} \sum_{s=1}^{100} c_s = \frac{301 + \ldots + 400}{100} = \frac{301 + 400}{2} = 350{,}5$$

покупателем —

$$\mathsf{E}v(\tilde{s}) = \frac{1}{100} \sum_{s=1}^{100} v_s = \frac{301 + b + \ldots + 400 + b}{100} = \frac{301 + b + 400 + b}{2} = 350{,}5 + b.$$

Цена установится на уровне ожидаемой оценки покупателя и будет равна $350{,}5 + b$. Как и в предыдущем случае полной информированности все $100$ типов автомобилей будут продаваться, т.е. равновесие Парето-оптимально.

(3а) Продавцы знают качество автомобилей, а покупатели — нет (несимметричная информированность). Если покупатели исходят из априорной гипотезы, что каждый из $100$ типов автомобилей будет продаваться с вероятностью $1/100$ (характеризуются близоруким поведением), то цена «кота в мешке» окажется равной

$$p=(301+b+400+b)/2=350{,}5+b.$$

При этой цене будут продаваться все те автомобили, для которых

$$300+s\leqslant 350{,}5+b.$$

Таким образом будет продаваться $m=[50{,}5+b]$ типов автомобилей. Величина $m$ не убывает с ростом $b$, и при $b\geqslant 40{,}5$ равна $100$. При $b<40{,}5$ равновесие не Парето-оптимально.

Предположение о близорукости покупателей несовместимо с предположением об их рациональности в случае, когда они знают структуру предложения.

(3b) *Продавцы знают качество автомобилей, а покупатели — нет* (несимметричная информированность). Покупатели ориентируются на текущую структуру предложения, и считают свою оценку исходя из данной информации ($m$ худших типов автомобилей будут продаваться с вероятностью $1/m$). Тогда при условии, что продаются автомобили $m$ типов, ожидаемая оценка равна

$$V_m=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}v_s=\frac{301+b+\ldots+300+m+b}{m}=$$
$$=\frac{301+b+300+m+b}{2}=300{,}5+\frac{m}{2}+b.$$

Тогда количество продаваемых типов для возможных равновесий задается соотношениями

$$c_m\leqslant V_m<c_{m+1}$$

или

$$300+m\leqslant 300{,}5+\frac{m}{2}+b<301+m,$$

т.е.

$$m\leqslant 1+2b<m+2.$$

Следовательно, равновесное количество типов характеризуется неравенствами

$$2b-1<m\leqslant 2b+1.$$

Равновесная цена равна $p=V_m=300{,}5+\dfrac{m}{2}+b.$

При $b<1/2$ существует единственное равновесие с $m=1$. При $b\geqslant 50$ равновесие также единственное с $m=n$, и Парето-оптимально. При $b\in[0{,}5;\,50)$ существует два равновесия, одно из которых заведомо не оптимально. Так при $b=20$ в одном из возможных равновесий $m=40$, а в другом — $m=41$, причем оба равновесия не оптимальны.

Сравнивая случаи (3a) и (3b), видим, что во втором случае неблагоприятный отбор проявляется сильнее (объемы продаж меньше) и цена ниже, чем в первом, так как в равновесии учитывается реакция продавцов на цену, кроме того, по той же причине разрушение рынка во втором случае происходит при меньших значениях $b$.

⇐

Неединственность равновесия в данном случае с «хорошим» поведением оценок покупателей и продавцов — следствие дискретности распределения типов. В предположении непрерывности распределения типов равновесие оказывается единственным. Более того, естественные предположения о оценках $v_s$ и $c_s$, не имеющие аналогов для дискретных распределений (например, непрерывность соответствующих зависимостей) делают модель с непрерывным распределением более простым инструментом анализа феноменов неблагоприятного отбора. Покажем это.

Предположим, что возможные типы блага, $s$, описываются интервалом числовой прямой $[s_1, s_2]$, и пусть $f(\cdot)$ — плотность распределения этих типов, известная покупателям, такая что $f(s)>0$ при $s \in (s_1, s_2)$. Как и в дискретном случае, оценки покупателей (продавцов) товара типа $s$ совпадают и равны $v(s)$ (соответственно, $c(s)$), покупатели и продавцы имеют квазилинейные предпочтения и нейтральны по отношению к риску. Будем предполагать, что функция $c(\cdot)$ является непрерывной и возрастающей, и $c(s)<v(s)\ \forall s$.

Если функция $c(s)$ возрастает, и продаются товары с качеством не выше $s$, то оценка покупателей при асимметричной информированности равна

$$V(s)=\mathsf{E}(v(\tilde{s})\,|\,\tilde{s}\leqslant s)=\int_0^s v(t)\,f(t)\,dt\,/\int_0^s f(t)\,dt.$$

По аналогии с дискретным случаем, граничное качество $\bar{s}$ в равновесии либо задается уравнением

$$c(\bar{s})=V(\bar{s}),$$

если это уравнение имеет решение, либо равно $\bar{s}=s_2$. Второй вид равновесия (когда продаются товары всех типов) возможен при выполнении условия $c(s_2)\leqslant V(s_2)$. Единая для всех типов блага равновесная цена $\bar{p}$ равна

$$\bar{p}=V(\bar{s}).$$

Если $c(s_2)>V(s_2)$, то существует решение уравнения $c(\bar{s})=V(\bar{s})$, поскольку $c(s_1)<V(s_1)=v(s_1)$, а функции $c(\cdot)$ и $V(\cdot)$ непрерывны. В этом случае существует равновесие, в котором имеет место неблагоприятный отбор. Если же $c(s_2)\leqslant V(s_2)$, то существует равновесие без неблагоприятного отбора. Таким образом, при сделанных предположениях хотя бы одно равновесие существует.

**Пример 2.**

Пусть, по аналогии с Примером **1**, качество $\tilde{s}$ имеет равномерное распределение на $[1;\ 100]$, $c(s)=300+s$, и $v(s)=300+b+s$, где $b>0$.

Найдем равновесие при несимметричной информированности. Ожидаемая оценка покупателя равна

$$V(s)=\int_1^s v(t)\frac{1}{s-1}dt=\frac{1}{s-1}\int_1^s(300+b+t)\,dt=300{,}5+b+\frac{s}{2}.$$

Граничное качество $\bar{s}$ в равновесии с неблагоприятным отбором задается уравнением

$$300+\bar{s}=300{,}5+b+\frac{\bar{s}}{2}.$$

Таким образом, $\bar{s}=2b+1$ и $\bar{p}=301+2b$. Такое равновесие существует при $2b+1<100$, т.е. при $b<49{,}5$. При $b\geqslant 49{,}5$ в равновесии продаются все типы блага и равновесная цена равна $\bar{p}=V(100)=350{,}5+b$.

Можно интерпретировать функцию $V^{-1}(p)$ как функцию спроса (которая, в отличие от привычной функции спроса, возрастает), а функцию, которая совпадает с $c^{-1}(p)$ при $s\in[c(1);c(100)]$ и равна $100$ при $p\geqslant c(100)$ — как функцию предложения. Точка пересечения соответствующих кривых определяет равновесие (см. Рис. 92).

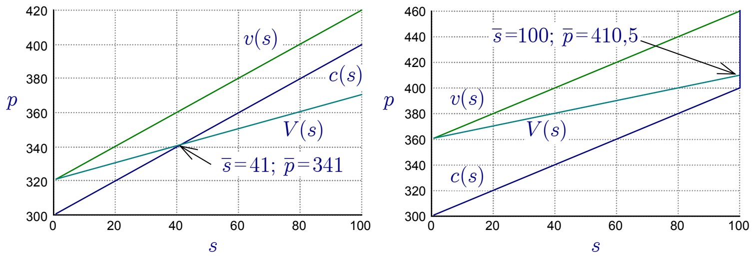


Рисунок 92. Равновесие при b=20 и b=60

⇐

Проведенный выше анализ феномена неблагоприятного отбора основывается на обобщении понятия (по Вальрасу) равновесия на случай асимметричной информации. Так как при этом не осуществляется полная спецификация соответствующей игры, с таким равновесием совместимы разные интерпретации поведения игроков и их информационных структур. Так, естественно предполагать, что покупатели, в дополнение в цене блага, знают, в каких пропорциях предлагаются товары разных типов; при этом в равновесии это знание согласуется с ценой, по которой благо продается. Можно также исходить из предположения, что априорное распределение типов благ и оценки продавцов общеизвестны; пропорции предложения разных типов блага вычисляются покупателем на основе этой информации с учетом рыночной цены блага.

Другой (более строгий) подход к анализу данной ситуации — специфицировать соответствующую игру, (т.е. описать возможные действия, последовательность ходов и ожидания игроков — покупателей и продавцов и т.д.) и охарактеризовать решение этой игры, что и будет проделано с следующем параграфе. Преимущество этого подхода состоит в том, что используется стандартное определение равновесия игры, т.е. нет необходимости заново определять равновесие. Это позволяет стандартным образом, специфицируя соответствующую модификацию игры, изучать различные аспекты неблагоприятного отбора и институты, регулирующие эти феномены (гарантии, сигнализирование, репутация).

### Модель Акерлова как динамическая игра

Рассмотрим вариант модели Акерлова, в котором рынок с асимметричной информацией моделируется как динамическая байесовская игра.

Благо дискретное. Предполагается, что каждый продавец либо предлагает единицу товара на продажу, либо нет ($y=0,1$). Каждый покупатель либо покупает единицу товара, либо нет ($x=0,1$).

Пусть $s$ — качество товара. Асимметричность информации состоит в том, что продавец знает качество своего товара, а покупатель — нет. Цену обозначим через $p$.

Если продавец продал товар по цене $p$, то его прибыль равна величине $\Pi=p-c(s)$, где $c(s)$ — его предельные издержки, при данном качестве. Будем предполагать, что функция $c(\cdot)$ является возрастающей. Как и в классической постановке модели, $c(s)$, можно интерпретировать как альтернативные издержки, т.е. выигрыш продавца от альтернативного использования товара. Если продавец не продал товар, то $\Pi=0$.

Будем предполагать, что предпочтения покупателя квазилинейны, т.е. его потребительский излишек при покупке товара по цене $p$ составляет величину $u=v(s)-p$. Оценка $v(\cdot)$ — возрастающая функция. Предполагается, что у всех покупателей одинаковые предпочтения. Если он не купил товар, его потребительский излишек равен нулю.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда покупатель знает качество товара. Тогда дерево игры в этой ситуации имеет вид, изображенный на Рис. 93.

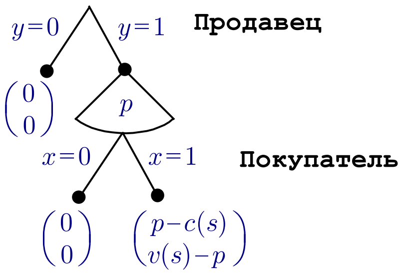


Рисунок 93. Дерево игры для модели Акерлова при полной информированности

Для поиска равновесия этой игры используем обратную индукцию. Рассмотрим решение покупателя. Если $v(s)>p$, то покупатель покупает, если $v(s)<p$, то нет. Будем также предполагать, что если покупателю безразлично, приобретать товар или нет, то он поступает благожелательно по отношению к продавцу и покупает товар. Учитывая это, при сворачивании дерева игры получаем следующие выигрыши продавца:

$$\Pi(p)=\begin{cases}0, & v(s)<p\\ p-c(s), & v(s)\geqslant p.\end{cases}$$

Если $v(s)\geqslant c(s)$, то есть в принципе есть смысл производить товар, то $p=v(s)$ дает максимум прибыли. Если $v(s)<c(s)$, то продавец не будет предлагать товар или же может назначить цену $p>v(s)$, с тем, чтобы покупатель его не купил.

Таким образом, в равновесии при всех уровнях качества $s$, таких что $v(s)\geqslant c(s)$, благо будет продаваться и цена будет $p= v(s)$, Т.о. любое равновесие является Парето-оптимальным.

Рассмотрим теперь модификацию этой игры, предположив, вслед за Акерловым, что продавцам известен их тип, а покупателям известна только статистическая информация о возможных типах продавца — распределение типов $s$, причем покупатели нейтральны по отношению к риску.

Формально можем рассматривать эту модель как динамическую байесовскую игру и найти в ней совершенное байесовское равновесие — совокупность согласованных стратегий и ожиданий. В игре «нулевой» ход делает природа — она выбирает тип продавца. Дальше при каждом $s$ дерево игры совпадает с деревом, изображенным на Рис. 93.

Найдем решение данной игры (совершенное байесовское равновесие). Напомним, что в совершенном байесовском равновесии ожидания определяются равновесными стратегиями игроков в соответствии с правилом Байеса, если это возможно, т.е. в ситуациях, возникающих в игре с ненулевой вероятностью. С другой стороны, при данных ожиданиях и данных стратегиях других игроков, стратегия каждого игрока является оптимальной.

Таким образом, чтобы охарактеризовать равновесие в данной игре, следует задать:

⊙ Стратегию продавца: для каждого типа $s$ продавать/не продавать и, если продавать, то по какой цене $p$.

⊙ Стратегию покупателя: покупать или не покупать при данной цене $p$.

⊙ Ожидания: покупатель, видя цену $p$, должен предложить, каким должно быть распределение качества. (Это распределение не обязательно совпадает с первоначальным).

Заметим прежде всего, что потребитель при данной цене $p$ решает задачу

$$\mathsf{E}u=\mathsf{E}(v(\tilde{s})-px)\to\max_{x=0,1}.$$

Отсюда следует, что покупатель покупает благо, если его ожидаемая полезность не меньше нуля.

Дальнейшее свертывание данной игры невозможно, поскольку стратегия продавца зависит от ожиданий покупателя, которые, в свою очередь, зависят от стратегии продавца.

Ясно, что товары не могут продаваться по разным ценам. Пусть $s'$ продается по $p'$, а $s''$ — по $p''$, причем $p' > p''$. Но раз товар покупают по $p'$, то продавец $s''$ мог назначить $p'$, а не $p''$. Следовательно, цены всех *продаваемых* товаров в равновесии должны быть одинаковы. Т.е. $p(s) = \overline{p}$ для товара любого качества $s$, которое продается.

Теперь посмотрим на решение продавать/не продавать по цене $\overline{p}$. Если $c(s) > \overline{p}$, то продавать невыгодно, а если $c(s) < \overline{p}$, то выгодно.

Будем предполагать, вслед за Акерловым, что множество возможных типов составляет замкнутый отрезок числовой прямой, т.е. множество $[a; b]$. Заметим, что если распределение непрерывное, то без потери общности можно считать, что это равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$, т.е. $\tilde{s} \sim \mathsf{U}[0; 1]$.

Заметим, что логически возможны ситуации равновесия, когда продаются товары любого качества, когда часть товаров продается, а часть нет и когда все товары не продаются.

Охарактеризуем последовательно все три типа равновесия и условия, при которых они существуют.

1. Предположим, сначала что существует равновесие, при котором продаются товары всех уровней качества.

Тогда ожидания потребителей относительно уровня качества совпадают с априорными, и товар покупается тогда и (в предположении благожелательности потребителя) только тогда, когда ожидаемый потребительский излишек неотрицателен, т.е.

$$\mathsf{E}u = \mathsf{E}(v(\tilde{s}) - px) \geqslant 0.$$

Таким образом, продавец, максимизируя прибыль, будет продавать по максимальной цене, удовлетворяющей этому условию, т.е. по цене

$$\overline{p} = \mathsf{E}v(\tilde{s}) = \int_0^1 v(s)ds.$$

Продавец любого типа заинтересован продавать благо по данной цене только если $\overline{p} \geqslant c(s)\ \forall s$, что эквивалентно условию $\overline{p} \geqslant c(1)$, поскольку функция $c(\cdot)$ возрастает (мы предполагаем здесь благожелательность продавца, т.е. что он будет продавать благо, даже если $\overline{p} = c(s)$). Следовательно, такое равновесие существует тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 v(s)ds \geqslant c(1).$$

2. Рассмотрим теперь равновесие, в котором часть благ продается, а часть — нет. Тогда в равновесии стратегии продавцов должны быть такими: существуют числа $(\overline{p}, \overline{s})$ такие, что продавец *не продает* при $s > \overline{s}$, и *назначает цену* $p = \overline{p}$, если *продает*. (Мы не будем рассматривать стратегии продавца следующего типа: если продавцу невыгодно продавать товар некоторого качества $s$ по цене $\overline{p}$, то он выставляет его на продажу и назначает цену такую, чтобы его не купили).

Значит, в равновесии если благо продается, то $s \leqslant c^{-1}(\overline{p})$.

Если потребителю предложен товар по цене $p = \overline{p} = c(\overline{s})$, то он ожидает, что не продаются товары с качеством $s > \overline{s}$ (потому что таковы стратегии продавцов). При этом $\overline{s} = c^{-1}(\overline{p})$.

Если потребителю предложен товар по цене $p = \bar p = c(\bar s)$, то он ожидает, что не продаются товары с качеством $s > \bar s$ (потому что таковы стратегии продавцов). Следовательно (по правилу Байеса), ожидания имеют вид $\tilde s \sim \mathrm{U}[0; \bar s]$. Поскольку концепция совершенного байесовского равновесия не предписывает никаких ограничений на формирование ожиданий в ситуации отклонения от равновесных стратегий, то ожидания покупателя в случае, если он наблюдал бы цену $p \neq \bar p$, могут быть любыми. Мы рассмотрим равновесие, в котором покупатель ожидает, что отклонение от равновесной стратегии $p \neq \bar p$ не влечет за собой отклонение от равновесной стратегии «продавать при $s \in \mathrm{U}[0; \bar s]$», т.е. его ожидания при цене $p \neq \bar p$ имеют вид $\tilde s \sim \mathrm{U}[0; \bar s]$.

При данных ожиданиях покупатель должен действовать оптимальным образом: если ожидаемая полезность неотрицательна, то он покупает благо. (Математическое ожидание здесь следует считать по ожиданиям, что $\tilde s \sim \mathrm{U}[0; \bar s]$. Плотность этого равномерного распределения равна $1/\bar s$). Таким образом,

$$\mathsf{E}(u \mid \tilde s \leqslant \bar s) = \mathsf{E}(v(\tilde s) - px \mid \tilde s \leqslant \bar s) = \int_0^{\bar s} v(s) \frac{1}{\bar s} ds\, x - px = (V(\bar s) - p)x,$$

где мы ввели обозначение

$$V(s) = \frac{1}{s} \int_0^s v(t)\, dt.$$

Если эта величина не меньше нуля, то благо покупается.

Продавцы максимизируя прибыль, назначат максимальную цену, при условии, что благо покупается, т.е. при условии, что

$$\mathsf{E}(u(1) \mid \tilde s \leqslant \bar s) = V(\bar s) - p \geqslant 0.$$

Т.е. в равновесии

$$\bar p = V(\bar s).$$

Получаем систему уравнений, для равновесных параметров $\bar p$ и $\bar s$:

$$\bar p = c(\bar s),$$
$$\bar p = V(\bar s).$$

Заметим, что такое равновесие существует тогда и только тогда, когда эта система уравнений имеет решение $(\bar p, \bar s)$, такое что $0 < \bar s < 1$.

3. Рассмотрим, наконец, равновесие, в котором товары любого качества не продаются. Тогда при любых ожиданиях покупателя его ожидаемая оценка блага не меньше, чем $v(0)$, поскольку $v(\cdot)$ возрастает. Таким образом, производитель мог бы выставить товар на продажу по цене не ниже $v(0)$, и такой что потребитель бы его купил. Если производитель этого не делает, то его издержки выше $v(0)$. Поскольку мы рассматриваем равновесие, в котором товары любого качества не продаются, то, в частности, издержки при качестве $s = 0$ выше, чем $v(0)$. Следовательно, если равновесие указанного типа существует, то $v(0) < c(0)$.

Наоборот, если условие $v(0) < c(0)$ выполняется, то существует равновесие, в котором товар любого качества не продается. Для того, чтобы это показать, следует указать ожидания покупателей, поддерживающих это равновесие.

Один из возможных вариантов таких ожиданий состоит в том, что $\tilde s \sim \mathrm{U}[0; \bar s]$, где $\bar s$ выбирается так что $p = V(\bar s)$, если

$$V(1)=\int_0^1 v(s)ds \leqslant p,$$

и $\tilde{s} \sim \mathrm{U}[0;1]$ в противном случае.

Равновесие может быть не единственным, причем разные равновесия могут отличаться с точки зрения объема продаж и ожидаемого уровня благосостояния.

Пусть, например, функции $v(\cdot)$ и $c(\cdot)$, таковы, что

$$v(0)<c(0), \ V(1) \geqslant c(1).$$

Тогда в модели имеется как минимум два вида равновесия: в одном из них товар не продается вне зависимости от качества, в другом — товар любого качества продается.

## Задачи

4. Сформулируйте модель Акерлова с двумя градациями качества благ и условия, когда блага низшего качества вытесняют блага высшего качества.

5. Автомобили трех градаций качества встречаются с одинаковой вероятностью. Оценки продавцов для этих трех типов автомобилей равны $1$, $3$ и $f$, а оценки покупателей $2$, $5$ и $8$ соответственно. Качество автомобилей известно только продавцам. Найдите максимальную величину $f$, при которой будет существовать равновесие, в котором продаются все три типа автомобилей.

6. Модель Акерлова для рынка «лимонов» с тремя градациями качества. Пусть резервные оценки продавцов для трех типов товара составляют $\$2000$, $\$2300$, $\$2600$, а оценки покупателей — $\$2000+\beta$, $\$2300+\beta$, $\$2600+\beta$ соответственно. Пусть частота существования в природе первого типа товара — $1/3$, второго — $1/3$, третьего — $1/3$. При каких параметрах $\beta$ существует равновесие, в котором продаются (а) все типы, (б) только два худших типа, (в) только самые плохие?

7. Рассмотрите в рамках модели Акерлова рынок товара, имеющего $5$ градаций качества. Цену назначает продавец (рынок продавца). Покупатели нейтральны к риску. Предпочтения продавцов и покупателей заданы следующей таблицей

| Вероятность (доля) | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Качество | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Оценка продавцов | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Оценка покупателей | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

При каком условии на вероятности $\pi_j$ на этом рынке может существовать равновесие, в котором будут продаваться только товары двух худших градаций качества?

8. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке

I) $[0;50]$, II) $[40;50]$.

Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) совпадает с параметром качества $s$, а оценка товара покупателем равна $\alpha s$ $(\alpha>1)$. При каких значениях параметра $\alpha$ будет происходить разрушение рынка лучших автомобилей (неблагоприятный отбор)? Как ведет себя равновесная доля продаваемых автомобилей при возрастании $\alpha$?

9. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[40;50]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) совпадает с параметром качества $s$, а оценка товара покупателем равна $s+\alpha$. Найдите равновесие как функцию параметра $\alpha$. Как ведет себя равновесная доля продаваемых автомобилей при возрастании $\alpha$?

10. Рассмотрите модель Акерлова, в которой товар с вероятностью $1-s$ может иметь дефект, из-за которого он негоден ($s$ — вероятность того, что товар годен). Все потребители ценят годный товар в $10$ у.е. , а негодный — в $0$ у.е. Тип продавца определяется величиной $s$. Тип $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$. Издержки продавцов: $c(s) = (s + 1)$ у.е. Найдите и опишите равновесие.

11. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[10;100]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $2s$, а оценка товара покупателем равна $3s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $\alpha>0$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\alpha$.

12. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[\beta, 200]$, $\beta>0$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $3s$, а оценка товара покупателем равна $5s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $100$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\beta$.

13. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[3, 50]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $4s-\gamma$, $\gamma>0$, а оценка товара покупателем равна $5s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $20$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\gamma$.

14. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества $s$ имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 10]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $3s$, а оценка товара покупателем равна $4s+\delta$, $\delta>0$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $3$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\delta$.

15. [Tirole] Рассмотрим рынок подержанных автомобилей с градациями качества $s\in[s_1, s_2]$. которые непрерывной случайной величиной, которая равномерно распределена на отрезке $[s^1, s^2]$. Продавец оценивает единицу товара качества $s$ как $s$, а покупатель — как $\alpha s$, где $\alpha$ — коэффициент *разный* для разных покупателей. Предполагаем, что $\alpha$ рас-

пределены равномерно на отрезке $[\alpha^1, \alpha^2]$. Покупатели нейтральны по отношению к риску (т.е. покупатель купит автомобиль с ожидаемым качеством $s^e$ тогда и только тогда, когда $\alpha s^e > p$.

(i) Найдите объем торговли в условиях полной информации.

(ii) Изобразите кривые спроса и предложения при асимметричной информации. Может ли быть так, что кривая спроса имеет положительный наклон?

(iii) Найдите конкурентное равновесие. Будет ли объем торговли больше или меньше Парето-оптимального?

(iv) Покажите, что на таком рынке равновесие может быть не единственным, и что равновесие с более высокой ценой доминирует по Парето равновесие с более низкой ценой.

(v) Государство вводит стандарт качества. Автомобили с качеством ниже $s_0$ продавать запрещено. Может ли это увеличить общее благосостояние (с точки зрения суммарного излишка)?

16. Рассмотрите модель Акерлова в предположении, что переговорная сила принадлежит покупателю (можно интерпретировать такой рынок как рынок труда). Покажите, что если $v(s) \geqslant c(s)\ \forall s$, то в одном из равновесий продавец назначает цену, равную предельным издержкам.

## Приложение: Доказательство теоремы Майерсона—Саттертуэйта

Введем обозначение для *ожидаемой платы* с точки зрения продавца:

$$P^c(c) = \mathsf{E}\bar{p}(c, \tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} \bar{p}(c, v) f(v)\, dv$$

и с точки зрения покупателя:

$$P^v(v) = \mathsf{E}\bar{p}(\tilde{c}, v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{p}(c, v) g(c)\, dc,$$

а также *ожидаемого объема торговли* с точки зрения продавца:

$$X^c(c) = \mathsf{E}\bar{x}(c, \tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} \bar{x}(c, v) f(v)\, dv$$

и с точки зрения покупателя:

$$X^v(v) = \mathsf{E}\bar{x}(\tilde{c}, v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c, v) g(c)\, dc.$$

В этих обозначениях

$$U_{\check{v}}(v) = \check{v} X^v(v) - P^v(v),$$

и

$$U_{\check{c}}(c) = P^c(c) - \check{c} X^c(c).$$

По условиям самовыявления для двух оценок покупателя, $v$ и $\check{v}$, мы можем записать следующие два неравенства:

$$U_v(v) \geqslant U_v(\check{v}) \ \text{ и } \ U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant U_{\check{v}}(v).$$

Из этих неравенств следует, что

$$U_v(v)-U_{\check{v}}(v) \geqslant U_v(v)-U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant U_v(\check{v})-U_{\check{v}}(\check{v})$$

или

$$(v-\check{v})\,X^v(v) \geqslant U_v(v)-U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant (v-\check{v})\,X^v(\check{v}).$$

Переходя к пределу в этих неравенствах ($\check{v} \to v$), получим, что

$$\frac{dU_v(v)}{dv} = X^v(v).$$

Отсюда, беря интеграл[161],

$$U_v(v)=U_{v_1}(v_1)+\int_{v_1}^{v} X^v(z)\,dz.$$

Поскольку ожидаемый объем торговли $X^v(z)$ неотрицателен, то коль скоро условие добровольности участия выполнено для покупателя с оценкой $v_1$, то оно выполнено для всех покупателей:

$$U_{v_1}(v_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow U_v(v) \geqslant 0 \ \forall v.$$

Применяя аналогичные рассуждения к поведению продавцов разных типов, получим, что

$$\frac{dU_c(c)}{dc} = -X^c(c),$$

откуда

$$U_c(c)=U_{c_2}(c_2)+\int_{c}^{c_2} X^c(z)\,dz.$$

Кроме того, коль скоро условие добровольности участия выполнено для продавца с издержками $c_2$, то оно выполнено для всех продавцов.

$$U_{c_2}(c_2) \geqslant 0 \Leftrightarrow U_c(c) \geqslant 0 \ \forall c.$$

Вспомним, что

$$U_v(v)=v\,X^v(v)-P^v(v),$$

и

$$U_c(c)=P^c(c)-c\,X^c(c).$$

Отсюда

$$P^v(v)=v\,X^v(v)-U_{v_1}(v_1)-\int_{v_1}^{v} X^v(z)\,dz$$

и

$$P^c(c)=c\,X^c(c)+U_{c_2}(c_2)+\int_{c}^{c_2} X^c(z)\,dz.$$

Предположим теперь, что равновесие является оптимальным по Парето, т.е. объем торговли в этом равновесии должен удовлетворять условиям $\bar{x}(c,v)=1$ при $v>c$ и $\bar{x}(c,v)=0$ при $v<c$.

---

[161] Из приведенных неравенств следует, что $X_v(v)$ — неубывающая функция. Отсюда следует, что она интегрируема.

Покажем, что справедливо следующее соотношение для ожидаемой платы в равновесии:

$$\mathsf{E}[\min\{c_2,\tilde{v}\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})] \leqslant \mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c},v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})].$$

Рассмотрим сначала покупателя и получим оценку сверху для ожидаемой платы в равновесии, т.е. $\mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c},v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})]$.

Поскольку $U_{v_1}(v_1) \geqslant 0$, то

$$P^v(v) \leqslant v\,X^v(v) - \int_{v_1}^{v} X^v(z)\,dz.$$

Подставляя $X^v(v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,v)g(c)\,dc$, получим, что величина в правой части неравенства равна

$$v\,X^v(v) - \int_{v_1}^{v} X^v(z)\,dz = v\int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,v)g(c)\,dc - \int_{v_1}^{v}\int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,z)g(c)\,dc\,dz =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} v\,\bar{x}(c,v)g(c)\,dc - \int_{c_1}^{c_2}\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz\,g(c)\,dc =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} [v\,\bar{x}(c,v) - \int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz]\,g(c)\,dc =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \max\{c,v_1\}\,\bar{x}(c,v)\,g(c)\,dc.$$

В последнем равенстве мы использовали, что в Парето-оптимальном равновесии выполнено

$$v\,\bar{x}(c,v) - \int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = \max\{c,v_1\}\,\bar{x}(c,v).$$

Это равенство можно установить на основе перебора возможных случаев:

Если $c=v$, то интеграл равен нулю и $\max\{c,v_1\}=v$.

Если $c>v$, то $\bar{x}(c,z)=0$ при $z\leqslant v$, и таким образом, обе части доказываемого равенства равны нулю.

Если $c<v$ и $c\leqslant v_1$, то $\bar{x}(c,z)=1$ при $z\in(v_1,v]$ и поэтому

$$\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = v-v_1 = (v-v_1)\,\bar{x}(c,v).$$

Если $c<v$ и $c\geqslant v_1$, то $\bar{x}(c,z)=1$ при $z\in(c,v]$ и поэтому

$$\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = v-c = (v-c)\,\bar{x}(c,v).$$

Учитывая это соотношение,

$$P^v(v) \leqslant \int_{c_1}^{c_2} \max\{c,v_1\}\,\bar{x}(c,v)\,g(c)\,dc.$$

Беря интеграл по $v$, получим оценку сверху для ожидаемой платы в оптимальном равновесии:

$$\mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) = \mathsf{E}P^v(\tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} P^v(v) f(v)\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \int_{v_1}^{v_2}\int_{c_1}^{c_2} \max\{c, v_1\}\,\bar{x}(c,v)\,g(c)\,dc f(v)\,dv$$

или

$$\mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})].$$

Для продавца рассуждения аналогичны. Из $U_{c_2}(c_2) \geqslant 0$ следует

$$P^c(c) \geqslant c\,X^c(c) + \int_c^{c_2} X^c(z)\,dz$$

или

$$P^c(c) \geqslant \int_{v_1}^{v_2} \min\{c_2, v\}\,\bar{x}(c,v) f(v)\,dv.$$

Отсюда получим оценку снизу для ожидаемой платы в оптимальном равновесии:

$$\mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) = \mathsf{E}P^c(\tilde{c}) = \int_{c_1}^{c_2} P^c(c) g(c)\,dc \geqslant$$

$$\geqslant \int_{v_1}^{v_2}\int_{c_1}^{c_2} \min\{c_2, v\}\,\bar{x}(c,v)\,g(c)\,dc f(v)\,dv$$

или

$$\mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) \geqslant \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})].$$

Окончательно получаем

$$\mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})] \leqslant \mathsf{E}p(\tilde{c},\tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})].$$

Для любой оценки покупателя $v \in [v_1, v_2]$ и любых издержках продавца $c \in [c_1, c_2]$, таких что $v > c$, выполнено $\min\{c_2, v\} > \max\{c, v_1\}$, поскольку $v_1 < c_2$. Кроме того, поскольку $c_1 < v_2$, то вероятность того, что $\tilde{v} > \tilde{c}$, т.е. того, что $\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v}) = 1$, не равна нулю. Отсюда следует

$$\mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})] < \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})].$$

Тем самым, получено противоречие, что и доказывает несовместимость трех условий: участия, самовыявления и эффективности.

Есть вариант этой теоремы для модели, в которой сумма, выплаченная покупателем, не обязательно равняется сумме, полученной продавцом. Данная модель позволяет рассматривать и такие механизмы торга, которые требуют издержек для своего осуществления, а также такие, которые предусматривают субсидии третьих лиц. Этот вариант теоремы Майерсона—Саттертуэйта утверждает, что несовместимы четыре условия. Четвертым условием является сбалансированность платежей: ожидаемая сумма, выплаченная покупателем, не меньше ожидаемой суммы, полученной продавцом. Это условие можно интерпретировать как отсутствие субсидий со стороны. Заметим, что имеются в виду субсидии не для каждой реализации типов $(\tilde{c},\tilde{v})$, а в среднем. (Т.е., неявно предполагается возможность воспользоваться услугами нейтрального к риску стороннего страховщика. Ясно, что это довольно слабое требование).

Действительно, если в приведенном доказательстве рассмотреть плату, которая может не совпадать для продавца и покупателя, т.е. $p^c(c,v)$ и $p^v(c,v)$, то, по аналогии с приведенным выше доказательством, можно получить неравенство

$$\mathsf{E}p^c(\tilde{c},\tilde{v}) \geqslant \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})] > \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\,\bar{x}(\tilde{c},\tilde{v})] \geqslant \mathsf{E}p^v(\tilde{c},\tilde{v}).$$

Таким образом, в такой модели двусторонней монополии Парето-оптимальность равновесия может иметь место только в играх торга с недобровольным участием или же с субсидиями.

# 11. Монополия

Как показывают теоремы благосостояния, мир совершенной конкуренции достаточно просто и хорошо устроен: каждое равновесие оказывается (при естественных предположениях) Парето-оптимальным и каждое оптимальное по Парето состояние экономики можно реализовать (при подходящем перераспределении начальных запасов, прав собственности, налогах и т.д.) как равновесие. Предположения совершенной конкуренции, однако, не всегда достаточно удовлетворительно описывают ситуации на существующих рынках. Так, с гипотезой рационального поведения несовместима предположение о том, что производитель рассматривает цену как «данную» в ситуации, когда у него нет конкурентов или их немного. В этой главе мы изучим, чем принципиально рынки, где отсутствуют условия совершенной конкуренции (так называемые несовершенные рынки), отличаются от совершенных рынков.

Анализ естественно начать с наиболее простого для анализа случая несовершенного рынка, когда имеется всего один производитель рассматриваемого продукта.

## Модель обычной монополии

**Монополией** называют фирму, которая является единственным производителем некоторого блага. Напомним классическую (статическую) модель поведения монополиста.

Предположим, что существует «много» потребителей данного блага, и поэтому условия совершенной конкуренции выполняются «на стороне потребителей». Мы предполагаем, таким образом, что потребители рассматривают условия покупки, предлагаемые монополистом, как данные.[162] Монополист предлагает всем потребителям производимое благо по одной и той же цене $p$. Исходя из этой цены, каждый потребитель предъявляет свой спрос на благо. Сумму индивидуальных функций спроса (функцию совокупного спроса) мы обозначим через $D(p)$. Будем считать также, что рассматриваемое благо — нормальное, т.е. функция спроса $D(p)$ не возрастает.

Предположим далее, что функция издержек монополиста равна $c(y)$. Обычно предполагается, что цель монополиста состоит в максимизации прибыли. Таким образом, объем производства монополиста $y^{\text{м}}$ находится как решение следующей задачи:[163]

$$\Pi(y) = p(y)\,y - c(y) \to \max_{y \geqslant 0},$$

где $p(y) = D^{-1}(y)$ — обратная функция спроса. Этот объем производства $y^{\text{м}}$ и соответствующий ему вектор цен $p^{\text{м}} = p(y^{\text{м}})$ называется **равновесием при монополии**[164].

### Существование равновесия при монополии

Заметим, что множество допустимых решений задачи монополиста ($y \geqslant 0$) неограниченно, и поэтому мы можем гарантировать существование равновесия лишь при некоторых

---

[162] Заметим, что модель монополии можно рассматривать как двухэтапную игру с почти совершенной информацией. На первом этапе монополия выбирает цену. На втором этапе потребители одновременно выбирают количества блага, которые они хотели бы приобрести при данной цене. Модель монополии является при такой интерпретации редуцированной игрой первого этапа для описанной динамической игры.

[163] Здесь и далее, если не оговорено противное, мы не накладываем ограничение на положительность прибыли. Предполагается, что производитель не может свернуть производство и уйти из отрасли.

[164] Равновесие при монополии можно рассматривать как исход, соответствующий совершенному в подыграх равновесию в описанной выше двухэтапной игре с почти совершенной информацией.

предположениях относительно поведения функций спроса и издержек. Приведенная ниже теорема существования указывает на такие условия.

Идея доказательства состоит в том, чтобы выделить множество «возможных» монопольных выпусков, показать его ограниченность (при данных предположениях относительно функций спроса и издержек), а затем использовать теорему Вейерштрасса о существовании экстремумов непрерывной функции на компактном множестве. Другими словами, мы доказываем, что при естественных условиях относительно функций издержек и спроса задача максимизации прибыли монополиста на $y \geqslant 0$, эквивалентна задаче максимизации на некотором отрезке действительной прямой (в том смысле, что множества решений этих двух задач совпадают). А для этого достаточно доказать, что прибыль вне этого отрезка ниже, чем в какой-либо точке, принадлежащей этому отрезку.

**Теорема 1.**

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция издержек, $c(y)$, дифференцируема на $[0, \infty)$,

2) обратная функция спроса $p(y)$ дифференцируема[165] и $p'(y) < 0$ при $[0, \infty)$,

3) существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $p(y) < c'(y)$ при $y \geqslant \tilde{y}$.

Тогда равновесие при монополии существует.

***<u>Доказательство.</u>***

Докажем, что при сделанных предположениях $\Pi(y) < \Pi(\tilde{y})$ при $y > \tilde{y}$. Действительно, при $y > \tilde{y}$

$$\Pi'(y) = p(y) - c'(y) + p'(y)\, y < 0.$$

Это неравенство следует из убывания обратной функции спроса и предположения 3) теоремы. Таким образом, прибыль в точке $\tilde{y}$ выше, чем в любой большей точке $y > \tilde{y}$, поэтому задача максимизации прибыли при $y \geqslant 0$ сводится к задаче максимизации прибыли на отрезке $[0, \tilde{y}]$.

Из предположений теоремы следует, что функция прибыли $\Pi(y)$ непрерывна. Непрерывная функция прибыли по теореме Вейерштрасса должна достигать максимума на компактном множестве $[0, \tilde{y}]$, откуда следует существование точки $y^{\text{м}}$, которая максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. ■

Заметим, что предположения теоремы можно ослабить, сделав предположения относительно поведения совокупного излишка, а не относительно его производной $p(y) - c'(y)$ (предположение 3) теоремы). Под совокупным излишком мы будем понимать

$$GS(y) = \int_0^y p(t)dt - [c(y) - c(0)].$$

При этом, если функция издержек дифференцируема, то

---

[165] Данное условие предполагает, в числе прочего, что функция $p(y)$ определена при $y = 0$, что, безусловно, является слишком ограничительным предположением. Так, оно не выполнено для функции $p(y) = 1/\sqrt{y}$. Тем не менее несложно доказать аналог данного утверждения для этой функции и ей подобных.

$$GS(y) = \int_0^y [p(t) - c'(t)]dt.$$

Другими словами, совокупный излишек равен площади фигуры заключенной между кривой спроса, кривой предельных издержек, осью ординат и параллельной ей прямой, проходящей через точку $(y, 0)$.

Нам достаточно предположить, что существует объем производства $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$. Поскольку совокупный излишек используется как показатель благосостояния, указанное условие означает, что нельзя увеличивать благосостояние простым увеличением выпуска одного блага.

**Теорема 2.**

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция издержек, $c(y)$, непрерывна на $[0, \infty)$,

2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает на $[0, \infty)$,

3) существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$.

Тогда равновесие при монополии существует.

***Доказательство.***

Представим функцию прибыли в следующем виде:

$$\Pi(y) = p(y)\,y - c(y) = p(y)\,y - \int_0^y p(t)dt + GS(y) - c(0).$$

Достаточно доказать, что при сделанных предположениях $\Pi(y) < \Pi(\tilde{y})$ при $y > \tilde{y}$. Разность прибылей равна

$$\Pi(y) - \Pi(\tilde{y}) = p(y)\,y - p(\tilde{y})\,\tilde{y} - \int_{\tilde{y}}^y p(t)dt + GS(y) - GS(\tilde{y}).$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y) < p(t)$ при $t < y$, и поэтому

$$\int_{\tilde{y}}^y p(t)dt > p(y)(y - \tilde{y}).$$

Воспользовавшись этой оценкой интеграла имеем:

$$\Pi(y) - \Pi(\tilde{y}) < [p(y) - p(\tilde{y})]\tilde{y} + GS(y) - GS(\tilde{y}) < 0.$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующей частью доказательства Теоремы 1. ■

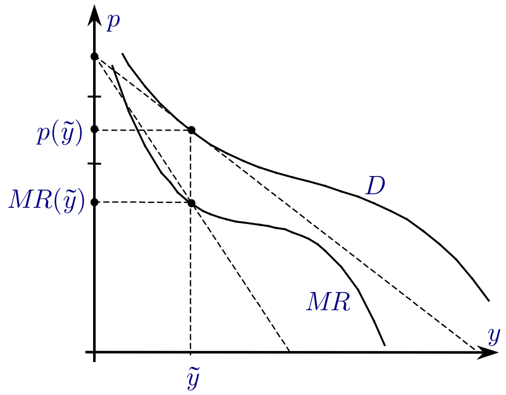


Рисунок 94

### Свойства монопольного равновесия

Если решение задачи существует и внутреннее ($y^{\text{м}} > 0$), то условие первого порядка имеет следующий вид:

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = c'(y^{\text{м}}),$$

где $y^{\text{м}}$ — выпуск, максимизирующий прибыль. Таким образом, так же, как и в условиях совершенной конкуренции предельная выручка равна предельным издержкам

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = MR(y^{\text{м}}) = MC(y^{\text{м}}) = c'(y^{\text{м}}).$$

Отличие состоит в том, что в ситуации монополии цена, по которой фирма-монополист может продать продукцию, $p(y)$, меняется в зависимости от количества, поэтому предельная выручка не равна цене.

Приведем стандартную графическую иллюстрацию равновесия при монополии. Укажем сначала простой способ построения на графике точек $MR(y)$. Проведем касательную к кривой спроса в точке, отвечающая объему производства $\tilde{y}$. Соответствующая объему производства $\tilde{y}$ точка кривой предельной выручки строится следующим образом: проекция точки $(\tilde{y}, p(\tilde{y}))$ на ось ординат отстоит от точки пересечения с этой осью касательной на в два раза большее расстояние, чем проекция самой этой точки $(\tilde{y}, MR(\tilde{y}))$ на кривую спроса (см. Рис. 94).[166]

Другими словами, точка предельной выручки для объема производства $\tilde{y}$ лежит на медиане треугольника, отсекаемого от положительного ортанта касательной к кривой спроса в той же точке $\tilde{y}$. В случае же линейной функции спроса кривая предельной выручки оказывается просто соответствующей медианой треугольника, гипотенуза которого — кривая спроса.

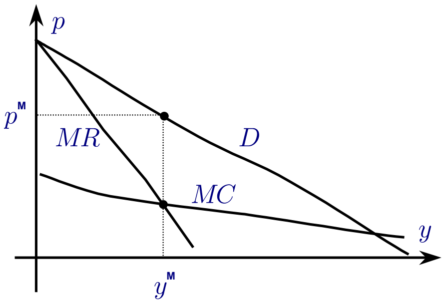


Рисунок 95

Для решения монополиста можно привести графическую иллюстрацию (Рис. 95). Здесь $MR(y) = p(y) + p'(y)\,y$ — кривая предельной выручки монополиста, а $MC(y) = c'(y)$ — кривая предельных издержек.

**Пример 1.**

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, и издержки заданы функцией $c(y) = cy$ ($a, b, c$ – константы). Тогда прибыль монополии равна

---

[166] Этот способ построения кривой предельного дохода основывается на определении и свойствах касательной в точке $\tilde{y}$ к кривой спроса.

$$\Pi(y) = y\,(a - by) - c\,y = (a - c)\,y - b\,y^2.$$

Максимум прибыли будет достигнут при

$$y^{\text{м}} = \frac{a - c}{2b} \quad \text{и} \quad p^{\text{м}} = \frac{a + c}{2}.$$

⇦

Условие равновесия при монополии можно представить в виде, где явно указывается зависимость монопольной цены от издержек производителя и эластичности спроса на его продукцию.

Напомним определение эластичности спроса по цене в заданной точке $p$:

$$\varepsilon(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)}.$$

С учетом наших предположений о функции спроса эластичность как функцию от объема производства можно записать как

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{p'(y)}\frac{p(y)}{y}.$$

Поскольку мы предполагаем, что функция спроса убывает, то эластичность отрицательна, и

$$|\varepsilon(y)| = -\,\varepsilon(y) = -\frac{1}{p'(y)}\frac{y}{p}.$$

Используя эластичность, условие первого порядка можно записать в виде

$$p(y^{\text{м}})\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(y^{\text{м}})|}\right] = c'(y^{\text{м}}).$$

Заметим, что из условий первого порядка при естественном предположении о положительности предельных издержек ($c'(y) > 0$) следует, что выбранный монополистом объем производства лежит на «эластичном» участке кривой спроса, т.е.

$$|\varepsilon(y^{\text{м}})| > 1.$$

Другая форма записи условия первого порядка максимума прибыли монополии имеет вид:

$$\frac{p(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}})}{p(y^{\text{м}})} = \frac{1}{|\varepsilon(y^{\text{м}})|}.$$

Выражение справа называется **индексом Лернера**.[167] Он измеряет степень монополизации отрасли (монопольную силу производителя) через относительную величину отклонения цены от предельных издержек. Заметим, что индекс Лернера принимает значения меньшие единицы и равен нулю в условиях, когда спрос на продукция данного производителя является совершенно эластичным (при монопольном выпуске $y^{\text{м}}$).

Если обратная функция спроса $p(\cdot)$ и функция издержек монополиста $c(\cdot)$ дважды дифференцируемы, то объем производства $y^{\text{м}}$ максимизирующий прибыль, удовлетворяет также и условию второго порядка:

---

[167] Абба Лернер — американский экономист российского происхождения. Он предложил использовать показатель монопольной силы, который впоследствии был назван по его имени, в статье A. P. Lerner, "The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power", *Review of Economics and Statistics*, Vol. **1** (1934), pp. 157-75.

$$2p'(y^{м}) + y^{м}p''(y^{м}) - c''(y^{м}) \leqslant 0.$$

Это условие можно также представить в виде

$$MR'(y^{м}) \leqslant MC'(y^{м}).$$

Данное соотношение означает, что тангенс угла наклона кривой предельной выручки не превышает тангенс угла наклона кривой предельных издержек в точке их пересечения $y^{м}$. Другими словами, кривая предельной выручки пересекает кривую предельных издержек сверху вниз. В дальнейшем будем считать, что условие второго порядка выполняется как строгое неравенство, т.е.

$$2p'(y^{м}) + y^{м}p''(y^{м}) - c''(y^{м}) < 0.$$

Это условие вместе с условием первого порядка гарантирует, что удовлетворяющий им объем производства $y^{м}$ отвечает точке локального максимума прибыли.

Докажем, что если $p(0) > c'(0)$, то выпуск монополии будет положительным. Выполнение этого условия необходимо, чтобы сделать анализ содержательным, так как при $p(0) \leqslant c'(0)$ предмет анализа — рынок — отсутствует, поскольку максимум прибыли как монополиста, так и производителя в условиях совершенной конкуренции достигается при нулевом объеме производства (предполагается убывающая отдача, т.е. возрастание функции предельных издержек).

**Теорема 3.**

Пусть функция издержек $c(y)$ и обратная функция спроса $p(y)$ дифференцируемы и $p(0) > c'(0)$. Тогда в равновесный выпуск при монополии положителен, т.е. $y^{м} > 0$.

***Доказательство.***

Объем производства $y^{м}$, являющийся решением задачи максимизации прибыли:

$$\Pi(y) = p(y)\,y - c(y) \to \max_{y \geqslant 0},$$

должен удовлетворять условию первого порядка

$$\Pi'(y^{м}) = p(y^{м}) + p'(y^{м})\,y^{м} - c'(y^{м}) \leqslant 0$$

(причем по условию дополняющей нежесткости $\Pi'(y^{м}) = 0$, если $y^{м} > 0$).

Максимум не может достигаться в нуле, так как если $y^{м} = 0$, то по условию оптимальности должно быть выполнено

$$\Pi'(0) = p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

что противоречит предположению $p(0) > c'(0)$. Таким образом, $y^{м} > 0$. ■

Поскольку монополия учитывает, что ее выпуск влияет на цену, то она при прочих равных условиях не может производить больше, чем фирма в условиях совершенной конкуренции, которая этого не учитывает.

**Теорема 4.**

Предположим, что (обратная) функция спроса убывает, $y^{\text{м}} > 0$ — объем производства, выбранный монополией, а $\bar{y}$ — объем производства, который был бы выбран фирмой с такой же функцией издержек при конкурентном поведении.[168] Тогда

1. $y^{\text{м}} \leqslant \bar{y}$.
2. Если, кроме того, функция спроса и функция издержек дифференцируемы и $p'(y^{\text{м}}) < 0$, то $y^{\text{м}} < \bar{y}$.

***Доказательство:***

По определению, $y^{\text{м}}$ максимизирует прибыль монополии. Поэтому

$$p(y^{\text{м}})\,y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}) \geqslant p(\bar{y})\,\bar{y} - c(\bar{y}).$$

С другой стороны, поскольку при конкурентном поведении фирма, выбирая выпуск $\bar{y}$, максимизирующий прибыль, рассматривает цену как данную, то

$$p(\bar{y})\,\bar{y} - c(\bar{y}) \geqslant p(\bar{y})\,y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}).$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$p(y^{\text{м}})\,y^{\text{м}} \geqslant p(\bar{y})\,y^{\text{м}}.$$

Поскольку, по предположению, $y^{\text{м}} > 0$, то $p(y^{\text{м}}) \geqslant p(\bar{y})$, откуда, при убывании обратной функции спроса, следует, что $y^{\text{м}} \leqslant \bar{y}$.

Докажем вторую часть теоремы. Так как $y^{\text{м}} > 0$, функции спроса и издержек дифференцируемы, то выполнено условие первого порядка в следующем виде:

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = c'(y^{\text{м}}).$$

Другими словами,

$$p(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}}) = -\,y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) > 0,$$

Выпуск $\bar{y}$ по определению максимизирует прибыль в условиях, когда производитель рассматривает цены $p(\bar{y})$ как данные. Так как $\bar{y}$ положителен ($\bar{y} \geqslant y^{\text{м}} > 0$), то выполнено соотношение

$$p(\bar{y}) - c'(\bar{y}) = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{y}$ не может совпадать с $y^{\text{м}}$, следовательно, $y^{\text{м}} < \bar{y}$. ■

Монотонности функции спроса, вообще говоря, недостаточно для справедливости второй части утверждения (т.е. условие $p'(y^{\text{м}}) < 0$ теоремы существенно), что показывает контрпример, показанный на Рис. 96, где $p(y) = (y - 1)^3 + 1$ и $c(y) = y^2/2$. В этом примере кривая предельной выручки касается кривой спроса в точке $y = 1$, и через ту же самую точку проходит кривая предельных издержек.

---

[168] Понятно, что «конкурентного» объема $\bar{y}$ может не существовать, если предельные издержки убывают.

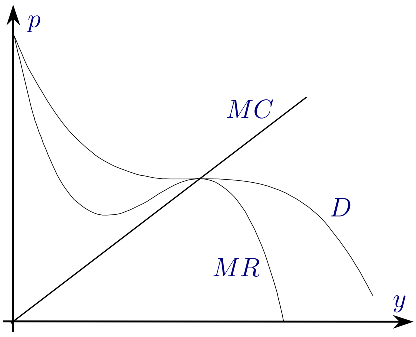


Рисунок 96

Помимо вышеприведенных свойств монопольного равновесия, представляет интерес поведение решения и его характеристик при изменении параметров модели, что составляет предмет сравнительной статики, рассматриваемой в следующем параграфе.

## Сравнительная статика

Сравнительная статика — это изучение поведения оптимального решения или равновесия при изменении экзогенных параметров. Мы рассмотрим здесь сравнительную статику равновесия при монополии. Связь монопольного равновесия с функцией издержек описывает следующее утверждение.

**Теорема 5.**

Пусть $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ — дифференцируемые функции издержек такие, что $c_1'(y) \leqslant c_2'(y)$ при всех $y \geqslant 0$, и пусть $y_1^{\text{м}} \geqslant 0$ дает максимум прибыли при издержках $c_1(\cdot)$, а $y_2^{\text{м}} \geqslant 0$ — при издержках $c_2(\cdot)$. Тогда $y_1^{\text{м}} \geqslant y_2^{\text{м}}$.[169]

***Доказательство.***

По условиям максимальности прибыли в обеих сравниваемых точках $y_1^{\text{м}}$ и $y_2^{\text{м}}$ имеем:

$$p(y_1^{\text{м}})\, y_1^{\text{м}} - c_1(y_1^{\text{м}}) \geqslant p(y_2^{\text{м}})\, y_2^{\text{м}} - c_1(y_2^{\text{м}}),$$

$$p(y_2^{\text{м}})\, y_2^{\text{м}} - c_2(y_2^{\text{м}}) \geqslant p(y_1^{\text{м}})\, y_1^{\text{м}} - c_2(y_1^{\text{м}}).$$

Складывая эти соотношения и приводя подобные члены, получим

$$[c_2(y_1^{\text{м}}) - c_1(y_1^{\text{м}})] - [c_2(y_2^{\text{м}}) - c_1(y_2^{\text{м}})] \geqslant 0,$$

т.е.

$$\int_{y_2^{\text{м}}}^{y_1^{\text{м}}} [c_2'(y) - c_1'(y)]\, dy \geqslant 0$$

Поскольку подынтегральное выражение положительно, то нижний предел интегрирования не может превышать верхний: $y_1^{\text{м}} \geqslant y_2^{\text{м}}$.

■

Доказанное утверждение можно проиллюстрировать с помощью рисунка, на котором кривая предельных издержек смещается вверх ($MC_1 \to MC_2$, см. Рис. 97).

---

[169] Отметим, что мы не предполагаем единственности решения задачи монополиста. В случае множественности *каждое* решение, соответствующее меньшим по величине издержкам, больше *каждого* решения, соответствующего большим по величине издержкам.

Для частного случая постоянных предельных издержек вышеприведенная теорема может быть получена непосредственным использованием условий первого и второго порядка.

Условие первого порядка для случая постоянных предельных издержек ($c'(y) = c$) имеет следующий вид:

$$y^{\text{м}}p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = c.$$

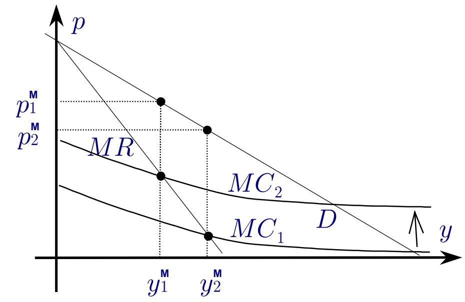


Рисунок 97

Оно задает в виде неявной функции зависимость объема производства, выбираемого монополистом, от величины предельных издержек $y^{\text{м}} = y(c)$. В предположении существования производных обратной функции спроса $p(y)$ и функции $y(c)$, продифференцируем по $c$ тождество

$$y(c)\, p'(y(c)) + p(y(c)) = c.$$

Получим соотношение

$$2\, p'(y(c))\, y'(c) + y(c)\, p''(y(c))\, y'(c) = 1,$$

$$y'(c) = \frac{1}{2\, p'(y(c)) + y(c)\, p''(y(c))}.$$

В знаменателе дроби стоит вторая производная прибыли, которая (по условиям второго порядка) неположительна. Отсюда следует, что $y(c)$ — убывающая функция.

По изменению выпуска можно найти изменение цен по следующей формуле.

$$\frac{dp}{dc} = p'(y(c))\, y'(c) = \frac{1}{2 + y(c)\, p''(y(c))/p'(y(c))} > 0.$$

Это соотношение показывает, что равновесная цена растет при росте издержек.

Приведенные соотношения можно применять для анализа влияния на монопольное равновесие изменения в величине издержек (шоков со стороны предложения). В качестве примера такого изменения можно рассмотреть введение налога с продаж. Так, при линейной функции спроса и постоянных средних издержках введение налога с единицы продукции при ставке $t$ приводит к росту цены на $t/2$. В случае же функции спроса с постоянной эластичностью $\varepsilon < 0$ (т.е., $y(p) = ap^{\varepsilon}$) введение такого налога приводит к росту цены на величину $t\,|\varepsilon|\,/(1+|\varepsilon|)$. (Справедливость этих утверждений проверьте самостоятельно.)

Приведенные свойства позволяют провести анализ потерь благосостояния, связанных с монопольной организацией рынка, что является основной задачей нашего анализа несовершенных рынков.

### Анализ благосостояния в условиях монополии

Предположим, что предпочтения потребителей описываются квазилинейной функцией полезности $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$, где $x_i$ — объем потребления потребителем $i$ блага, рынок которого мы рассматриваем, а $z_i$ — сумма денег, расходуемых им на приобретение прочих благ. Ниже, если не оговорено противное, предполагается, что функция полезности строго вогнута, функции $v_i(x_i)$ дифференцируемы, причем $v_i'(\cdot) > 0$.[170] По этим функциям полезности может быть построена функция совокупного спроса $D(p)$ на рассматриваемое благо. Тогда, как было показано ранее, при естественных условиях на функции $v_i(x_i)$ агрегированный спрос $D(p)$ порождается задачей максимизации полезности репрезентативного потребителя с некоторой квазилинейной функцией полезности вида, $u(x,\, z) = v(x) + z$, причем $v(x)$ вогнута и $v'(\cdot) > 0$. Свойства предпочтений гарантируют при этом, что рассматриваемое благо нормальное, т.е. функция спроса $D(p)$ убывает.

Как известно, если предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности, то в качестве индикатора благосостояния может использоваться величина

$$W(y) = v(y) - c(y).$$

При этом множество объемов, которые максимизируют индикатор благосостояния, является множеством Парето-оптимальных состояний.

Покажем, что выпуск при монополии не может превышать Парето-оптимальный объем производства данного блага. Более того, при естественных предположениях он оказывается не оптимальным, и поэтому меньше оптимального. Доказательство во многом похоже на доказательство Теоремы 4.

**Теорема 6.**

Если обратная функция спроса $p(y)$ порождается решением задачи репрезентативного потребителя и убывает, $y^{\text{м}}$ — объем производства, выбранный монополией, а $\hat{y} > 0$ — Парето-оптимальный объем производства, то[171]

1. $y^{\text{м}} \leqslant \hat{y}$.
2. Если, кроме того, функция спроса и функция издержек дифференцируемы и $p'(y^{\text{м}}) < 0$,[172] то $y^{\text{м}} < \hat{y}$.

***Доказательство:***

Пусть $v(y) + z$ — функция полезности рассматриваемого репрезентативного потребителя. Так как $p(y)$ — его обратная функция спроса, то должно выполняться неравенство

$$v(y^{\text{м}}) - p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} \geqslant v(\hat{y}) - p(y^{\text{м}})\, \hat{y}.$$

С другой стороны, по определению оптимума Парето

$$W(\hat{y}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) \geqslant v(y^{\text{м}}) - c(y^{\text{м}}) = W(y^{\text{м}}).$$

Сложим эти два неравенства:

$$p(y^{\text{м}})\, \hat{y} - c(\hat{y}) \geqslant p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}).$$

Поскольку $y^{\text{м}}$ максимизирует прибыль монополии, то

$$p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}) \geqslant p(\hat{y})\, \hat{y} - c(\hat{y}).$$

---

[170] Отметим, что фактически все утверждения, с известными модификациями, справедливы и при выполнении условия $v_i'(\cdot) \geqslant 0$. Читателю предлагается проверить это самостоятельно.

[171] В доказательстве не используется ни единственность монопольного равновесия, ни единственность оптимального с точки зрения общества объема выпуска. Результат теоремы следует понимать как соотношение между двумя любыми представителями соответствующих множеств.

[172] что можно гарантировать в условии, когда $v_i''(\cdot)$ существуют и отрицательны.

Таким образом, имеем

$$p(y^{\text{м}})\,\hat{y} - c(\hat{y}) \geqslant p(\hat{y})\,\hat{y} - c(\hat{y})$$

или

$$p(y^{\text{м}})\,\hat{y} \geqslant p(\hat{y})\,\hat{y}.$$

Поскольку, по предположению $\hat{y} > 0$, а $p(y)$ убывает, то $y^{\text{м}} \leqslant \hat{y}$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Предположим противное, т.е. $y^{\text{м}} = \hat{y}$.

Выбор монополиста при $y^{\text{м}} > 0$ должен удовлетворять условиям первого порядка:

$$p(y^{\text{м}}) + p'(y^{\text{м}})\,y^{\text{м}} - c'(y^{\text{м}}) = 0,$$

откуда $p(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}}) > 0$ (цена выше предельных издержек).

Рассматривая задачу репрезентативного потребителя для квазилинейной функции полезности легко получить, что обратная функция спроса $p(\cdot)$ задается формулой

$$p(y) = v'(y) \quad \forall y > 0,$$

поэтому, учитывая, что $y^{\text{м}} = \hat{y} > 0$,

$$v'(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}}) > 0.$$

Однако $v'(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}})$ есть значение производной функции благосостояния в точке $y^{\text{м}}$. Таким образом, $W(y)$ не достигает максимума в точке $y^{\text{м}}$. Мы получили противоречие. Значит, $y^{\text{м}} < \hat{y}$. ■

Отметим, что принимая во внимание первую теорему благосостояния, говорящую о Парето-оптимальности множества конкурентных равновесий, из только что доказанной теоремы следуют все результаты, доказанные нами ранее в Теореме 4.

В предположениях доказанной только что теоремы (пункт 2) мы имеем, что $W'(y^{\text{м}}) > 0$, $W'(\hat{y}) = 0$ и $y^{\text{м}} < \hat{y}$. Из этого следует, что уровень благосостояния в ситуации монополии ниже оптимального, т.е.

$$W(y^{\text{м}}) < W(\hat{y}).$$

Другими словами, при монополии возникают чистые потери благосостояния $(DL > 0)$, которые вычисляются по формуле:

$$DL = W(\hat{y}) - W(y^{\text{м}}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) - [v(y^{\text{м}}) - c(y^{\text{м}})] =$$

$$= [(v(\hat{y}) - p\hat{y}) - (v(y^{\text{м}}) - py^{\text{м}})] + [(p\hat{y} - c(\hat{y})) - (py^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}))] =$$

$$= \Delta CS + \Delta PS,$$

где $\Delta CS$ — изменение потребительского излишка, а $\Delta PS$ — изменение излишка производителя.

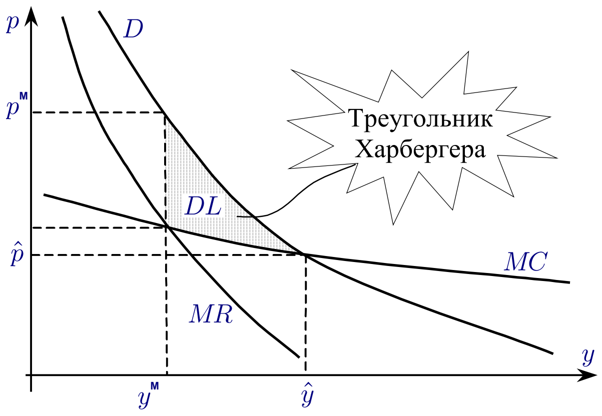


Рисунок 98

Напомним, что величины излишков потребителя и производителя можно рассчитать по формулам

$$CS(y) = \int_0^y [v'(t) - p(y)]\, dt = \int_0^y [p(t) - p(y)]\, dt.$$

и

$$PS(y) = \int_0^y [p(y) - c'(t)]\, dt.$$

Чистые потери от монополии также можно представить в виде интеграла:

$$DL = \int_{\hat{y}}^{y^{\text{м}}} [p(t) - c'(t)]\, dt.$$

Графически чистые потери благосостояния, которые несет общество от монополизации рынка, представляют собой площадь (криволинейного) «треугольника», называемого **треугольником Харбергера** (см. Рис. 98).[173]

**Пример 2 (продолжение Примера 1).**

Вычислим чистые потери от монополии в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек, т.е. когда $p(y) = a - by$ и $c'(y) = c$.

Оптимальный объем производства составит

$$\hat{y} = \frac{a - c}{b},$$

монополия же, как мы видели, будет производить

---

[173] По-видимому, впервые понятие чистых потерь было использовано французским инженером Жюлем Дюпюи (A. J. E. Dupuit (1844), "De la Mesure de l'Utilite des Travaux Publiques," *Annales des Ponts et Chaussees*. Рус. пер.: Ж. Дюпюи, «О мере полезности гражданских сооружений» // Сб. «Теория потребительского поведения и спроса», под ред. В.М.Гальперина. — СПб: Экономическая школа, 1993, стр.28-66. См. также статью Гарольда Хотеллинга: H. Hotelling, (1938) "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation of Railway and Utility Rates", *Econometrica*, **6** (No. 3), 242-269. Рус. пер.: Г.Хотеллинг, «Общее благосостояние в связи с проблемами налогообложения и установления железнодорожных тарифов и тарифов на коммунальные услуги» // Там же, стр.142-174.) Количественные измерения чистых потерь были популяризированы Арнольдом Харбергером (Harberger, A.C. (1964), "The measurement of waste," *American Economic Review*, **54** (3), 58-76).

$$y^{\text{м}} = \frac{a-c}{2b},$$

т.е. выпуск монополии в два раза меньше Парето-оптимального количества блага. Чистые потери от монополии составляют величину

$$DL = \int_{y^{\text{м}}}^{\hat{y}} [(a - bt) - c]\,dt = \frac{(a-c)^2}{8b}.$$

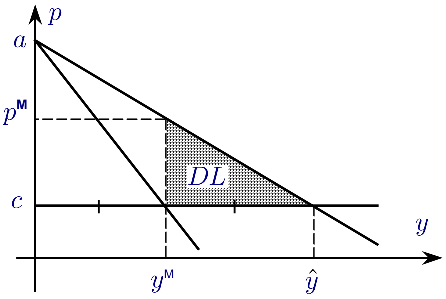


Рисунок 99

Таким образом, чистые потери от монополии в данном случае составляют четверть (исходного) потребительского излишка:

$$CS(\hat{y}) = \int_{0}^{\hat{y}} [(a - bt) - (a - b\hat{y})]\,dt = \frac{(a-c)^2}{2b}.$$

Рассматриваемый пример изображен на Рис. 99.

⇦

## Задачи

1. Пусть $D(p) = 10p^{-3}$, $c(y) = 2y$. Каковы оптимальный выпуск и цена устанавливаемые монополистом?

2. Обоснуйте предложенный в тексте (стр. 478) способ построения кривой предельного дохода по кривой спроса. (Подсказка приведена в сноске.)

3. Пусть спрос на монопольном рынке порожден двумя группами потребителей, функции спроса которых имеют вид:

$$p_1(y) = a_1 - b_1 y \quad \text{и} \quad p_2(y) = a_2 - b_2 y.$$

Какова общая функция спроса на продукцию данного монополиста? Какой объем производства окажется оптимальным для монополиста при разных значениях параметров?

4. Приведите пример, показывающий, что условия непрерывности функций спроса и издержек являются, вообще говоря, существенными для существования равновесия при монополии.

5. Приведите пример, показывающий, что условие:

«Существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $p(y) < c'(y)$ при $y \geqslant \tilde{y}$»

является существенными для существования равновесия при монополии.

6. Приведите пример, показывающий, что условие:

«Существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$»

является существенными для существования равновесия при монополии.

7. Вычислите индекс Лернера, если предельные издержки монополиста постоянны, а функция спроса на его продукцию имеет вид:

1) $p(y) = a - by$, 2) $p(y) = ay^{-b}$,

3) $p(y) = a - by^{d}$, 4) $p(y) = a - b\ln(y)$,

(Параметры должны быть такими, чтобы равновесие существовало.)

8. Вычислите в условиях предыдущей задачи как в первом приближении изменится цена, назначаемая монополистом, если его продукция облагается налогом по ставке $t$.

9. Покажите прямыми вычислениями, что в ситуациях, описанных в задаче 7, объем производства, оптимальный с точки зрения монополиста, меньше такого объема производства, при котором цена равна предельным издержкам.

10. Предположив, что, $p'(\cdot) < 0$, покажите, что дотация на продукцию монополии приведет к увеличению объема производства. Рассчитайте величину дотацию, обеспечивающую совпадение величин $y^{м}$ и $\hat{y}$?

Какой величины дотации обеспечивают совпадение величин $y^{м}$ и $\hat{y}$ в ситуациях, описанных в задаче 7?

11. При каких значениях параметров функций спроса и издержек, описанных в задаче 7, функция прибыли окажется вогнутой функцией объемов выпуска?

12. Приведите пример, показывающий, что условия убывания функция спроса $p(y)$, вообще говоря, недостаточно, чтобы гарантировать, что выпуск при монополии $y^{м}$ не является Парето-оптимальным.

### *Ценовая дискриминация*

Внутри треугольника Харбергера (см. Рис. 98) лежат сделки, которые являются взаимовыгодными для производителя и потребителя, т.е. любой точке внутри треугольника соответствует цена, по которой монополист готов произвести и продать, а потребитель — купить дополнительную единицу блага. Другими словами, чистые потери благосостояния представляют собой результат нереализованных взаимовыгодных сделок, но эти сделки можно осуществить только при более низких ценах, чем та, которая обеспечивает монопольную прибыль. Единственное, что сдерживает монополиста от предложения таких сделок — это то обстоятельство, что каждую единицу блага он должен продавать *по одной и той же цене*. От сделок внутри треугольника Харбергера он что-то выиграет за счет дополнительных продаж, но этот выигрыш будет более чем компенсирован потерями от снижения цены продажи $y^{\text{м}}$ единиц блага.

Однако, если бы монополист мог проводить **ценовую дискриминацию**, то есть продавать разные единицы блага по разным ценам, то он увеличил бы свою прибыль. И действительно, мир вокруг нас полон примеров ценовой дискриминации. Например, кинотеатры часто предлагают скидки для возрастных групп потребителей. Стоимость проезда на некоторых видах транспорта зависит от признаков, отделяющих бизнесменов от туристов, и др.

Ниже мы рассмотрим различные схемы ценовой дискриминации, обратив прежде всего внимание на влияние дискриминации на благосостояние потребителей (измеренное совокупным излишком).

Различают следующие три типичные вида ценовой дискриминации:

- **Дискриминация первого типа**, когда монополист может как назначать разные цены за разные проданные количества отдельному потребителю, так и проводить дискриминацию среди разных потребителей.

- **Дискриминация второго типа** — когда цена блага зависит от количество приобретаемых единиц данного блага. В качестве примера можно привести скидки для оптовых покупателей или зависимость тарифа на телефонные переговоры от их длительности. Если сравнивать этот тип дискриминации с дискриминацией первого типа, то при дискриминации второго типа с разных потребителей монополист берет *одинаковую* плату за одно и то же количество товара.

- **Дискриминация третьего типа**, по группам потребителей (сегментированным рынкам). В качестве примера можно привести скидки студентам и пенсионерам. Дискриминация третьего типа осуществляется монополистом относительно типов потребителей вне зависимости от количества приобретаемых благ.

Данная классификация была предложена английским экономистом Артуром Пигу в работе «Экономическая теория благосостояния» (1920).[174] Далее мы разберем эти три типа дискриминации более подробно.

Анализируя ценовую дискриминацию мы продолжаем исходить из предположения, что потребители рассматривают условия покупки, предлагаемые монополистом, как дан-

---

[174] Pigou, A.C. «The economics of welfare» 4–th ed., London, Macmillan (А. Пигу, «Экономическая теория благосостояния», М.: Прогресс, 1985).

> «Первый уровень выражается в назначении различных цен на все различные единицы товара, так что цена каждой из этих единиц равна соответствующей цене спроса, и у покупателя не остается какого-либо излишка для потребителя. Второй уровень предполагает, что монополист в состоянии установить $n$ различных цен, вот почему все единицы товара, на которые назначена цена спроса, превышающие $x$, продаются по цене $x$, а все единицы с ценой спроса меньше $x$, но превышающей $y$, продаются по цене $y$ и т.д. Третий уровень означает, что монополист в состоянии выделить среди своих покупателей $n$ различных групп, которые можно в большей или меньшей мере практически различать между собой, и монополист способен назначать свою монопольную цену покупателям из каждой группы» (т.I, стр. 348).

Как видно из приведенного отрывка, «второй уровень» дискриминации Пигу соответствует скорее неидеальной дискриминации первого типа в нашей терминологии. Мы следуем здесь сложившемуся на данный момент в экономической литературе толкованию этих терминов.

ные.[175] Заметим, что при этом возникают затруднения с интерпретацией дискриминации первого типа: монополист в этом случае имеет дело с каждым потребителем индивидуально, и поэтому ситуация может рассматриваться как двусторонняя монополия. Таким образом, наше предположение в этом случае эквивалентно тому, что «переговорная сила» принадлежит монополии.

### Дискриминация первого типа. Идеальная дискриминация

Как уже говорилось, особенность дискриминации первого типа состоит в том, что монополист может назначать разные цены в зависимости от того, какое количество блага и какому потребителю он продает. Таким образом, можно сказать, что при дискриминации первого типа каждая продаваемая единица блага имеет свою цену, в общем случае не совпадающую с ценой другой единицы блага.

В рамках дискриминации первого типа мы изучим так называемую **идеальную дискриминацию**. Под идеальной дискриминацией понимают ситуацию, при которой монополист выбирает *оптимальную* для себя схему ценообразования в условиях, когда

1) он знает индивидуальные функции спроса каждого потребителя;

2) может различать потребителей;

3) и невозможен так называемый **арбитраж** — перепродажа благ потребителями друг другу.[176]

Очевидно, что этот тип дискриминации имеет лишь теоретическое значение, как труднодостижимая идеальная для монополиста ситуация.

Пусть имеется $m$ потребителей, предпочтения которых представимы квазилинейными функциями полезности $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$. Мы будем предполагать, что функции полезности $u_i(x_i, z_i)$ — строго вогнута, дифференцируема и $v_i'(x_i) > 0$. Потребители обладают фиксированными доходами (запасами «квазилинейного» блага) $\omega_i$. О функции издержек монополиста, $c(\cdot)$, мы будем предполагать, что она выпукла, дифференцируема и $c'(y) > 0$.

Проанализируем сначала условную ситуацию, в которой монополист может назначить количество блага, $x_i$, которое купит у него каждый потребитель, а также ту сумму денег, $t_i$, которую заплатит ему потребитель за полученное количество блага. Единственное ограничение, которое мы наложим на выбор $x_i$ и $t_i$ состоит в том, что монополист не может назначить их такими, что

$$u_i(x_i, \omega_i - t_i) < u_i(0, \omega_i),$$

т.е. такими, что потребителю более выгодно «уйти с рынка», чем приобрести $x_i$, заплатив $t_i$. Таким образом, мы вводим ограничение

$$v_i(x_i) - t_i \geqslant v_i(0).$$

Это ограничение принято называть **условием участия**. С целью упрощения мы будем предполагать, что функции полезности нормированы так, что $v_i(0) = 0$. При этом условие участия принимает вид

$$v_i(x_i) \geqslant t_i.$$

---

[175] Если рассматривать модели дискриминации как динамические игры, то наше предположение состоит в том, что монополист делает ход первым.

[176] Если монополист не может различать потребителей, то одни потребители могли бы покупать те единицы блага, которые предназначены для других потребителей. Такую ситуацию можно назвать «персональным арбитражем».

Таким образом, мы рассмотрим сначала следующую оптимизационную задачу:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i - c(\sum_{i=1}^{m} x_i) \to \max_{t_i,\, x_i \geqslant 0}$$

$$v_i(x_i) \geqslant t_i,\ \forall i.$$

В оптимуме все ограничения участия выходят на равенство, поскольку монополисту выгодно установить плату для каждого потребителя как можно выше:

$$t_i = v_i(x_i),\ \forall i.$$

Подставляя эти равенства в целевую функцию, получаем эквивалентную задачу:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} v_i(x_i) - c(\sum_{i=1}^{m} x_i) \to \max_{x_1,\, \ldots,\, x_m \geqslant 0}.$$

Несложно заметить, что эта целевая функция в точности совпадает с индикатором благосостояния. Это означает, что решение данной задачи совпадает с Парето-оптимумом.

Будем предполагать, что такое «идеальное» решение $(x_i^*,\, t_i^*)$ существует.[177] Найдя решение этой задачи, мы покажем, что монополист, во-первых, не может получит более высокую прибыль, и во-вторых, может реализовать эти оптимальные сделки.

Предположим, что решение является внутренним: $x_i^* > 0\ \forall i$, т.е. каждый потребитель покупает положительное количество.[178] Внутреннее решение удовлетворяет условию первого порядка:

$$v_i'(x_i^*) = c'(\sum_{i=1}^{m} x_i^*),\ \forall i.$$

Из этого следует, в частности, равенство предельных норм замещения

$$v_i'(x_i^*) = v_j'(x_j^*)\ \forall i,\, j.$$

«Идеальная» плата $t_i^*$ находится по формуле:

$$t_i^* = CS_i(x_i^*) = v_i(x_i^*) = \int_0^{x_i^*} v_i'(x)dx,\ \forall i.$$

На графиках, представленных на Рис. 100 изображены две различные интерпретации нахождения «идеальной» пары $(x_i^*,\, t_i^*)$ монополистом. На рисунке (б) точка $x_i^*$ должна быть выбрана таким образом, чтобы в этой точке разность между кривыми $c(x_i + \sum_{j\neq i} x_j^*)$ и $v_i(x_i)$ была максимальной. В этой точке касательные обеих кривых должны иметь одинаковый наклон.

**Пример 3.**

Пусть функция полезности $i$-го потребителя имеет вид $u_i(x_i,\, z_i) = \sqrt{x_i} + z_i$ и функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда объем потребления этого потребителя, $x_i^*$, находится из уравнения

---

[177] При постоянных предельных издержках существование решения следует из непрерывности функций $v_i(\cdot)$ и того, что существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

[178] В случае, если предельные издержки не возрастают и $v_i'(0) > c'(0)\ \forall i$, то из существования оптимального решения следует положительность: $x_i^* > 0\ \forall i$.

$$c = \frac{1}{2\sqrt{x_i^*}},$$

и равен

$$x_i^* = \frac{1}{4c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо $t_i^*$ равна $\sqrt{x_i^*} = \sqrt{\frac{1}{4c^2}} = \frac{1}{2c}$. ⇦

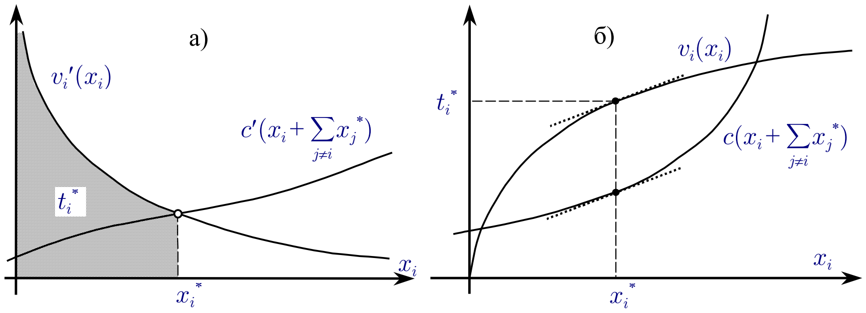


Рисунок 100

Мы рассмотрели, конечно, идеальную ситуацию, однако сконструированная система контрактов могла бы быть реализована монополистом, если бы (1) он знал функции $v_i(\cdot)$, и (2) то количество благо, которое монополист продает $i$-му потребителю, совпадало с тем количеством блага, $x_i$, которое тот реально потребляет (невозможен арбитраж). Более того, существует *бесконечно много* способов реализовать эти сделки.

В моделях дискриминации первого типа монополист может предложить каждому потребителю некоторую схему оплаты (схему ценообразования) — функцию $t_i(\cdot)$. Согласно схеме $t_i(\cdot)$ потребитель может приобрести количество $x$ за $t_i(x)$. Обычную схему ценообразования,

$$t_i(x_i) = px_i,$$

называют *линейной*. Ценообразование по любой другой схеме, в том числе схеме вида

$$t_i(x_i) = A + px_i,$$

которая будет рассмотрена ниже, принято называть **нелинейным ценообразованием**.

Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать функции $t_i(\cdot)$ таким образом, чтобы получить максимальную прибыль. Если при данной системе сделок потребители выбрали объемы покупок $x_i$, $i = 1, \ldots, n$, то прибыль монополиста составит

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i(x_i) - c\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big).$$

Конечно, эта формула верна только в случае, когда все потребители решают остаться на рынке. В противном случае $x_i = 0$ и соответствующее слагаемое, $t_i(x_i)$, в первой сумме отсутствует.

При выборе схемы оплаты монополист должен учитывать, как столкнувшись с ней будет действовать потребитель, которому она предназначена. Если потребитель не уходит с рынка, то его задача имеет вид:

$$v_i(x_i) + z_i \to \max_{x_i \geqslant 0}$$

$$t_i(x_i) + z_i \leqslant \omega_i$$

$$x_i \geqslant 0.$$

Кратко задачу потребителя можно переписать в виде

$$v_i(x_i) - t_i(x_i) \to \max_{x_i \geqslant 0}$$

Если значение целевой функции этой задачи в точке оптимума меньше нуля, то не выполнено ограничение участия, и потребителю выгоднее уйти с рынка. Заметим, что если потребитель уйдет с рынка, то монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель остается на рынке, но покупает нулевой объем $(x_i = 0)$ и ничего не платит $t_i(x_i) = 0$. Таким образом, ни при каком выборе схемы оплаты монополист не может получить больше, чем в «идеальном» случае $(x_i^*, t_i^*)$.

Заметим, что если условие участия выполняется как равенство, то сделка не увеличивает полезность потребителя. Тем не менее, мы предполагаем, что такие сделки совершаются, ведь у монополиста всегда есть возможность назначить плату немного ниже $t_i(x_i)$.

В дальнейшем мы для упрощения записи будем опускать индекс потребителя, $i$, поскольку в каждом случае будем рассматривать поведение одного потребителя. При сделанном нами предположениях, несложно найти схемы оплаты, которые позволяют реализовать оптимальный контракт $(x^*, t^*)$.

Самая простая схема оплаты заключается в том, что монополист предлагает потребителю приобрести количество $x$ за плату $t$. (Так называемый тип «не хочешь — не бери» (*take-it-ot-leave-it*)). Такую схему можно условно представить в виде следующей функции:

$$t(x) = \begin{cases} t^*, & x \leqslant x^*, \\ +\infty, & x > x^*. \end{cases}$$

Если потребитель столкнется с такой схемой оплаты, то его оптимальным выбором будет $x = x^*$. Рис. 101 иллюстрирует выбор потребителя при этой схеме оплаты.

**Пример 4 (продолжение Примера 3).**

Для рассмотренного выше примера схема оплаты «не хочешь — не бери» примет вид

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}, \; x \leqslant \dfrac{1}{4c^2}, \\ +\infty, \; x > \dfrac{1}{4c^2}. \end{cases}$$

⇦

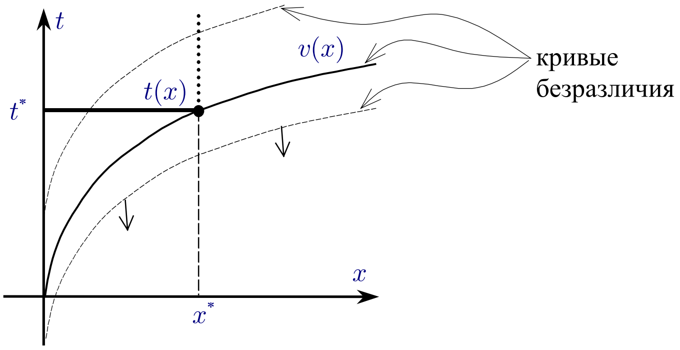


Рисунок 101

Идеальную дискриминацию можно проводить и в других формах. Наиболее известная из них — так называемый двухкомпонентный тариф: оплата состоит из двух частей: фиксированная сумма $A > 0$ за право приобретения (любого количества товара) и части, пропорциональной количеству приобретенного товара ($x$) — $p\,x$, т.е.

$$t(x) = A + p\,x.$$

Подобная практика, например, действует в увеселительных парках, где платят и за право входа, и за каждый аттракцион в отдельности. Для реализуемости схемы важно, что купивший право входа не может перепродать благо (вынести и перепродать аттракцион).

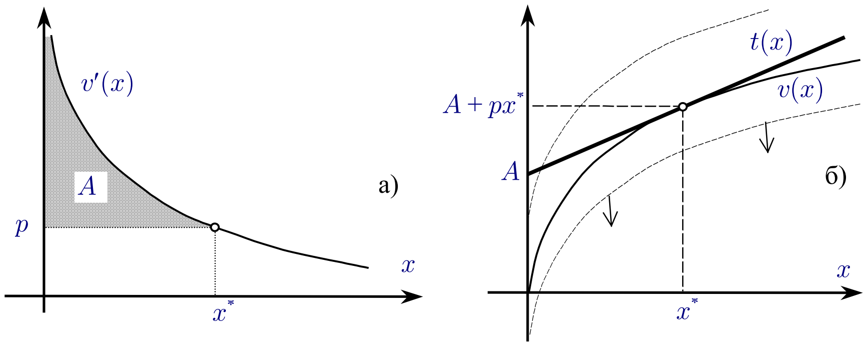


Рисунок 102

Идеальную схему дискриминации при двухкомпонентном тарифе можно реализовать, если установить цену единицы блага $p$ на уровне $v'(x^*)$, а $A$ выбрать равным (чистому) потребительскому излишку, соответствующему этому выпуску и этой цене (см. Рис. 102 а), т.е.

$$A = \int_p^\infty x(p')\,dp' = \int_0^{x^*} (v'(x) - p)\,dx = v(x^*) - px^*.$$

При такой схеме оплаты потребитель так же, как и в случае схемы «бери или уходи» выберет $x = x^*$ (при строгой вогнутости функции полезности) (см. Рис. 102 б).

**Пример 5 (продолжение Примера 3).**

Для рассмотренного выше примера в схеме оплаты по типу двухкомпонентного тарифа

$$A = \frac{1}{4c} \quad \text{и} \quad p = c.$$

Схема оплаты имеет вид

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4c} + c\,x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

⇦

Другая схема совершенной дискриминации состоит в установлении индивидуализированных цен за каждую «единицу» приобретаемого блага.

Пусть $\Delta x$ — (произвольная) единица блага, и $N$ таково, что $N\Delta x = x^*$. Зададим цену каждой $j$-й единицы товара по формуле:

$$p_j = v(j\,\Delta x) - v((j-1)\,\Delta x).$$

Покупая благо в количестве $x^*$, потребитель должен заплатить сумму $\sum_j p_j$, равную потребительскому излишку $v(x^*) - v(0) = v(x^*)$, в чем легко убедиться, сложив индивидуализированные цены.

Графическая иллюстрация данной схемы приведена на Рис. 103. Можно считать, что функция $t(\cdot)$ в рассматриваемом случае имеет ступенчатую форму (см. Рис. 103 б), так что размер «ступеньки» равен цене единицы блага.

В пределе, при $N \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) данная схема все больше приближается к схеме

$$t(x) = v(x).$$

**Пример 6 (продолжение Примера 3).**

Пусть $N = 4$. Тогда $\Delta x = \frac{1}{4}x_i^* = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4c^2} = \frac{1}{16c^2}$.

Поскольку $v(x) = \sqrt{x}$, то цены находятся по формуле

$$p_j = \sqrt{j\,\Delta x} - \sqrt{(j-1)\,\Delta x}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Т.е.

$$p_1 = 1/4c, \qquad p_2 = (\sqrt{2} - 1)/4c,$$

$$p_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2}\,)/4c, \quad p_4 = (2 - \sqrt{3}\,)/4c.$$ ⇦

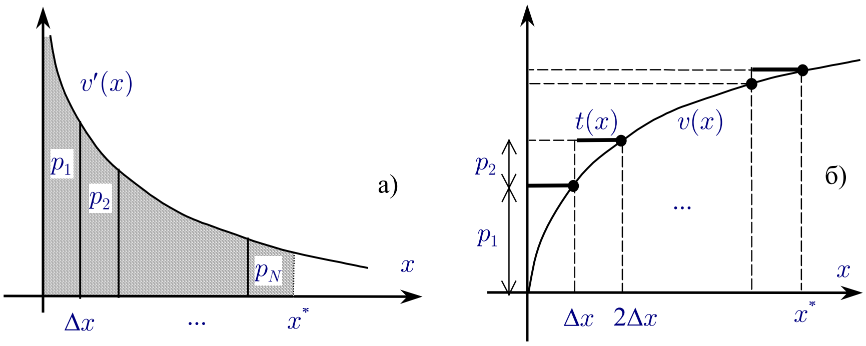


Рисунок 103

Мы рассмотрели три различные схемы, к которым может прибегнуть монополист. Но это не единственные возможные схемы. В общем случае нелинейная схема оплаты $t_i(\cdot)$ при идеальной дискриминации должна быть такой, чтобы соответствующая кривая всюду лежала выше кривой $v_i(\cdot)$, и касалась кривой $v_i(\cdot)$ в точке $x_i^*$. Первое требование соответствует тому, что потребитель должен добровольно выбрать $x_i = x_i^*$, второе требование соответствует тому, что потребитель должен добровольно участвовать в сделке — прирост его полезности в результате сделки должен равняться нулю. Графическая иллюстрация дана на Рис. 104.

Количество блага, покупаемое каждым потребителем, таково, что предельные полезности равны предельным издержкам. То есть ситуация с производством этого блага такая же, как при совершенной конкуренции, чего нельзя сказать о процессе распределения дохода от этой деятельности. В условиях совершенной конкуренции потребительский излишек остается у каждого потребителя, а здесь он целиком достается монополисту. Если нас не интересует проблема справедливости распределения доходов, например, если мы считаем, что ее можно решить в рамках эффективной системы налогов и трансфертов, то мы видим, что первая схема дискриминации в рассматриваемых условиях приводит к эффективным вариантам производственной деятельности монополиста. Т.о. проблема с неэффективностью монополии состоит не в том, что монополист получает «сверхприбыль», а в том, что он не может осуществлять идеальную дискриминацию, которая приводит к эффективности по Парето.

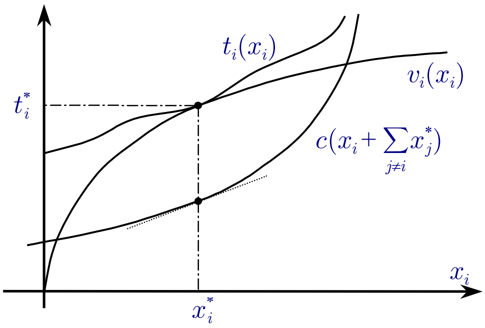


Рисунок 104

Что мешает монополисту осуществлять идеальную дискриминацию? Перечислим некоторые возможные причины.

1) *Существует вторичный рынок (арбитраж).* Те сделки, которые монополист сконструировал для каждого покупателя, вполне могут не реализоваться. Потребитель может купить не то количество $x_i^*$, которое ему предлагается, а большее количество, $x_i > x_i^*$, и перепродать $x_i - x_i^*$ по выгодной цене другому потребителю.

2) *Монополист должен знать слишком много*. Он должен знать функцию полезности каждого потребителя. Если он не знает функцию полезности каждого потребителя или не может различать потребителей, то он просто не может проводить идеальную дискриминацию.

3) По каким-то соображениям, например, по соображениям, связанным с обеспечением равенства доходов, *дискриминация первого типа может быть запрещена*.

Могут возникнуть и другие обстоятельства, которые способны помешать реализации данного варианта дискриминации. Любая дискриминация в реальных условиях не может быть идеальной. Эта схема является точкой отсчета для сравнения идеального, с точки зрения эффективности, с тем, что в реальности является возможным.

## Дискриминация второго типа (нелинейное ценообразование)

Предположим теперь, что монополист не имеет возможности предлагать разным потребителям разные сделки (либо потому, что не умеет их различать, либо потому, что ограничен законодательством в праве такой «персонифицированной» дискриминации).

Поскольку монополист не может различать потребителей, то он должен предложить общую для всех потребителей нелинейную схему оплаты $t(\cdot)$. Заметим, что если бы не было никаких препятствий для перепродаж, то любая схема оплаты свелась бы к обычной линейной схеме вида $t(x_i) = px_i$. Тем самым, анализ при наличие арбитража совпадает с анализом классической модели монополии, рассмотренной нами ранее. Как и ранее, мы будем предполагать отсутствие арбитража, что означает, что каждый потребитель потребляет то же самое количество блага, которое он купил.

Понятно, что, как и дискриминация первого типа, дискриминация второго типа может осуществляться различными способами. Однако, результаты дискриминации второго типа могут быть различными в зависимости от выбранной схемы. Ниже мы рассмотрим две простейшие схемы — пакетную дискриминацию и двухкомпонентный тариф.

В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что на рынке есть всего два типа потребителей. Типичного потребителя первого типа, назовем господином Low, а типичного потребителя второго типа — господином High.[179] В дальнейшем будем предполагать, что господин Low при любых количествах оценивает рассматриваемое благо ниже, чем господин High, т.е.

$$v_l'(x) < v_h'(x) \ \forall x,$$

что влечет за собой, при $v_i(0) = 0$ $(i = l, h)$ также и соотношение

$$v_l(x) < v_h(x) \ \forall x > 0.$$

### ДИСКРИМИНАЦИЯ ВТОРОГО ТИПА: ПАКЕТНАЯ ДИСКРИМИНАЦИЯ

В общем случае монополист может предложить потребителям на выбор $k$ пакетов: $(x_j, t_j)$, $j = 1, ..., k$. Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать пакеты так, чтобы получить наибольшую прибыль (от тех пакетов, которые ему удастся продать). Прежде всего, приведем модель к эквивалентному, но более простому виду.

Во-первых, отметим, что нам достаточно рассмотреть случай, когда монополист предлагает только два пакета ($k = 2$). (Читатель может сам провести рассуждения, доказывающие это.)

---

[179] Тот, кто не приемлет англицизмы, может заменить, например, имена на «Коротышку» и «Дылду».

Во-вторых, вспомним факт, упоминавшийся выше в контексте дискриминации первого типа, что если ограничение участия не выполнено, то потребитель уйдет с рынка, и монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель выбрал пакет вида $(x_i, t_i) = (0, 0)$. Поэтому можно ограничится рассмотрением только таких схем, при которых ни один потребитель не уйдет с рынка. Добавим это ограничение — *условие участия* — к задаче монополиста. Тем самым мы получим эквивалентную задачу (с точки зрения прибыли монополиста), но анализ упростится, так как целевая функция перестанет быть разрывной.

В-третьих, мы можем считать, что пакеты помечены индексом участников:

$$(x_l, t_l) \text{ и } (x_h, t_h).$$

Первый из пакетов предназначен для господина Low, а второй — для господина High. При этом в задачу монополиста добавляется ограничение, которое гарантирует, что ни одному потребителю не выгодно выбирать пакет, который ему не предназначен — так называемое **условие самовыявления**.

Для «господина Low» условие самовыявления имеет вид

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h,$$

а для «господина High» —

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l.$$

При добавлении этих ограничений задача остается эквивалентной исходной. Действительно, если потребители «поменяются пакетами», то можно просто поменять индексы пакетов. Если же все потребители выберут один и тот же пакет, то можно сделать другой пакет совпадающим с выбранным потребителями. В обоих случаях прибыль не изменится.

Таким образом, мы будем анализировать модель, в которой монополист выбирает сделки из семейства сделок $(x_l, t_l)$, $(x_h, t_h)$, задаваемого условиями участия и самовыявления. Если $x_l < x_h$, то соответствующая схема оплаты имеет вид

$$t(x) = \begin{cases} t_l, & x \leqslant x_l, \\ t_h, & x_l < x \leqslant x_h, \\ +\infty, & x > x_h. \end{cases}$$

Сначала покажем графически (см. Рис. 105), что те пакеты, которые монополист выбрал бы при идеальной дискриминации, в данном случае не являются оптимальными. При этом будем использовать дополнительное упрощающее предположение, что предельные издержки постоянны, $c > 0$. Каждому из типов потребителей при идеальной дискриминации будет предложена сделка

$$(x_i, t_i) = (x_i^*, t_i^*),$$

причем объем $x_i^*$ будет выбран так, чтобы выполнялось

$$v_i'(x_i^*) = c,$$

а плата $t_i^*$ будет выбрана равной потребительскому излишку.

На Рис. 105 плате господина Low, $t_l^*$, соответствует площадь $A + B + C$, а плате господина High, $t_h^*$, — площадь $A + B + C + D + E + F$.

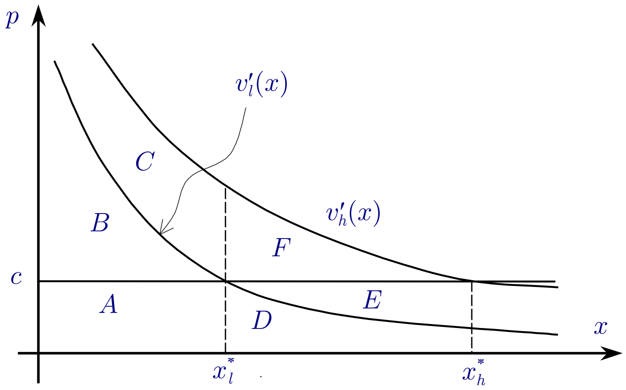


Рисунок 105. «Персонифицированная» дискриминация возможна

Если «персонифицированная» дискриминация неосуществима и потребители обоих типов могут выбирать любую из двух предложенных им сделок, то все они предпочтут сделку первого типа, $(x_l^*, t_l^*)$. Господин High предпочтет сделку первого типа, поскольку если он покупает $x_l^*$ блага по цене, равной площади $A + B$, то его излишек составит величину $C$, в то время как в случае, когда он соглашается на сделку второго типа, его излишек равен нулю.

Таким образом, производитель должен так сконструировать второй тип сделки, чтобы он кому-то был нужен. Для того, чтобы сделка второго типа для господина High оказалась не менее привлекательной, чем сделка первого типа, монополист должен уменьшить взимаемую с него плату на величина не меньшую, чем площадь фигуры $C$ (т.е. $v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)$). При этом господин High оказывается безразличным к выбору между сделкой первого и второго типа, но мы будем считать, как и ранее, что из каких-то внемодельных соображений он всегда будет предпочитать то, что ему предназначено, т.е. сделку второго типа. Таким образом, оптимальные сделки будут иметь вид

$$(x_l^*, v_l(x_l^*)) \quad \text{и} \quad (x_h, v_h(x_h^*) - [v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)]).$$

Эта система сделок удовлетворяет условию самовыявления: потребитель каждого типа предпочитает предназначенную для него сделку. На Рисунке 105 плата по сделкам второго типа равна площади $A + B + D + E + F$.

Хотя данная система сделок удовлетворяет условиям участия и самовыявления, она не оптимальна с точки зрения производителя, что проиллюстрировано на Рис. 106. Действительно, монополист может увеличить совокупную прибыль от этих сделок, понижая $x_l^*$ на $\Delta x_l$.

Если уменьшим $x_l^*$ на $\Delta x_l > 0$, тогда прибыль монополиста упадет от того, что он сокращает количество, предлагаемое для сделки первому потребителю на величину площади треугольника ② (раньше монополист получал всю площадь $B$, а сейчас — площадь $B$ за вычетом площади малого треугольника ②, т.е. площадь $B'$). При этом в первом приближении прибыль от каждой сделки первого типа уменьшится на величину, пропорциональную квадрату $\Delta x_l$ (при достаточно малом $\Delta x_l$ площадь треугольника ② величина того же порядка, что и $(\Delta x_l)^2$).

Напомним, что монополист вынужден обеспечить господину High некоторый излишек, для того, чтобы он не претендовал на сделку, предназначенную для господина Low. Прежнему количеству $x_l^*$ соответствовал излишек $C$. Сократив количество $x_l^*$, предлагаемое господину Low, на величину $\Delta x_l$, монополист должен обеспечить господину High излишек $C'$, который меньше $C$ на площадь трапеции ①. Площадь этой трапеции в первом приближении пропорциональна $\Delta x_l$.

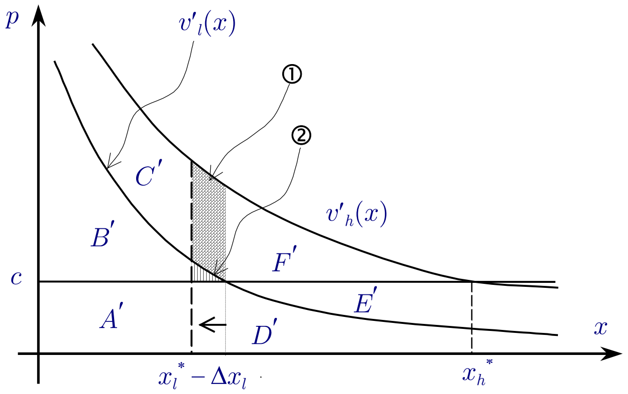


Рисунок 106. Данная система сделок не оптимальна с точки зрения монополиста

Таким образом при малых $\Delta x_l$ потери прибыли от сделки с господином Low будут компенсированы увеличением прибыли от сделки с господином High. Тем самым, прибыль монополиста вырастет.

Можно продолжать сокращать $x_l$. При некоторой величине $x_l$ прирост прибыли от сделки с господином High не будет покрывать падение прибыли от сделки с господином Low. По-видимому, должна существовать некоторая величина $x_l$, которая соответствует оптимальной системе сделок, дающей монополисту максимальную прибыль.

Проанализируем теперь задачу отыскания оптимальной системы сделок формально. Мы будем далее предполагать, что монополист имеет дело с $m_l > 0$ одинаковыми участниками типа «господин Low» и $m_h > 0$ одинаковыми участниками типа «господин High». Таким образом, оптимальная система сделок $\{(x_l^{\mathrm{P}}, t_l^{\mathrm{P}}), (x_h^{\mathrm{P}}, t_h^{\mathrm{P}})\}$ определяется решением следующей задачи:

$$\Pi = m_l t_l + m_h t_h - c(m_l x_l + m_h x_h) \to \max{}_{x_l,\, t_l,\, x_h,\, t_h \geqslant 0}.$$

при ограничениях:

$$t_l \leqslant v_l(x_l), \qquad (1l)$$

$$t_h \leqslant v_h(x_h), \qquad (1h)$$

(условия участия)

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h, \qquad (2l)$$

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l. \qquad (2h)$$

(условия самовыявления)

Поскольку монополист максимизирует прибыль, то по крайней мере одно из каждой пары ((1*l*), (2*l*)) или ((1*h*), (2*h*)) ограничений является существенным в точке максимума. В противном случае возможно увеличить прибыль, повысив, не нарушая ограничений, плату для того участника, для которого это не выполняется.

Покажем, что для господина Low активным окажется только первое из его ограничений (добровольность), а для господина High, наоборот, только второе (самовыявление).

Предположим противное. Пусть выполнено соотношение $t_h^{\mathrm{P}} = v_h(x_h^{\mathrm{P}})$. Подставляя данное соотношение в ограничение самовыявления этого же участника и произведя соответствующие упрощения, получим $t_l^{\mathrm{P}} \geqslant v_h(x_l^{\mathrm{P}})$.

И используя предположение, что $v_l(x) < v_h(x)\ \forall x > 0$, придем к соотношению $t_l^{\mathrm{P}} > v_l(x_l^{\mathrm{P}})$, которое противоречит ограничению добровольности (1*l*). Таким образом,

$$v_h(\overset{\mathrm{P}}{x_h}) - \overset{\mathrm{P}}{t_h} = v_h(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) - \overset{\mathrm{P}}{t_l}. \qquad (2h=)$$

Предположим теперь, что (2*l*) выполнено как равенство, т.е. имеет место соотношение $v_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) - \overset{\mathrm{P}}{t_l} = v_l(\overset{\mathrm{P}}{x_h}) - \overset{\mathrm{P}}{t_h}$. Сложив его с (2*h*=), получим

$$v_h(\overset{\mathrm{P}}{x_h}) - v_h(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) = v_l(\overset{\mathrm{P}}{x_h}) - v_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}).$$

Представим это соотношение в виде

$$\int_{\overset{\mathrm{P}}{x_l}}^{\overset{\mathrm{P}}{x_h}} v'_h(x)dx = \int_{\overset{\mathrm{P}}{x_l}}^{\overset{\mathrm{P}}{x_h}} v'_l(x)dx.$$

Это равенство противоречит условию, что $v'_l(x) < v'_h(x)\ \forall x > 0$, (подынтегральное выражение справа всегда меньше, чем подынтегральное выражение слева). Здесь предполагается, что $\overset{\mathrm{P}}{x_h} \neq \overset{\mathrm{P}}{x_l}$, что читателю предлагается установить самостоятельно. Таким образом, для решения задачи выполняется соотношение

$$\overset{\mathrm{P}}{t_l} = v_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}), \qquad (1l=)$$

Используя существенность ограничений (2*l*) и (1*l*), т.е. соотношения (2*l*=), (1*h*=), мы можем упростить задачу монополиста, сведя ее к следующей задаче безусловной максимизации:

$$m_l v_l(x_l) + m_h[v_h(x_h) - v_h(x_l) + v_l(x_l)] - c(m_l x_l + m_h x_h) \to \max_{x_l,\, x_h}$$

В предположении, что монополист предлагает сделки покупателям обоих типов, т.е. $\overset{\mathrm{P}}{x_l}$, $\overset{\mathrm{P}}{x_h}$ положительны, необходимым (и достаточным при данных предположениях о функциях полезности) условием оптимальности сделок является, равенство нулю первых производных максимизируемой функции, т.е. оптимум должен удовлетворять двум следующим соотношениям:

$$(m_l + m_h)\, v'_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) - m_h v'_h(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) = m_l c'(m_l\overset{\mathrm{P}}{x_l} + m_h\overset{\mathrm{P}}{x_h}),$$

$$v'_h(\overset{\mathrm{P}}{x_h}) = c'(m_l\overset{\mathrm{P}}{x_l} + m_h\overset{\mathrm{P}}{x_h}).$$

Итак, в сделке, предназначенной господину High, предлагаемое количество $\bar{x}_h$ совпадает с оптимальным количеством $x_h^{\ *}$, (которое он получил бы и при совершенной конкуренции, и при идеальной дискриминации). Но присутствие господина High оказывает отрицательное внешнее влияние на господина Low — в предлагаемой ему сделке количество блага ниже, чем при идеальной дискриминации (и в условиях совершенной конкуренции). Действительно, первое условие оптимальности, можно представить в виде

$$m_l\, v'_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) = m_l\, c'(m_l\overset{\mathrm{P}}{x_l} + m_h\overset{\mathrm{P}}{x_h}) + m_h[v'_h(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) - v'_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l})].$$

Откуда следует, что

$$v'_l(\overset{\mathrm{P}}{x_l}) > c'(m_l\overset{\mathrm{P}}{x_l} + m_h\overset{\mathrm{P}}{x_h}).$$

Поясним оптимальную систему сделок на графике в случае постоянных предельных издержек, $c'(y) = c$ (см. Рис. 107).

Отметим, что оптимальный контракт для господина Low характеризуется тем, что в точке $x_l = \overset{\mathrm{P}}{x_l}$ отношение расстояния между кривыми предельной полезности двух участников к расстоянию между кривой предельной полезности господина Low и кривой предельных издержек равно отношению количества участников типа господина Low к количеству участников типа господина High:

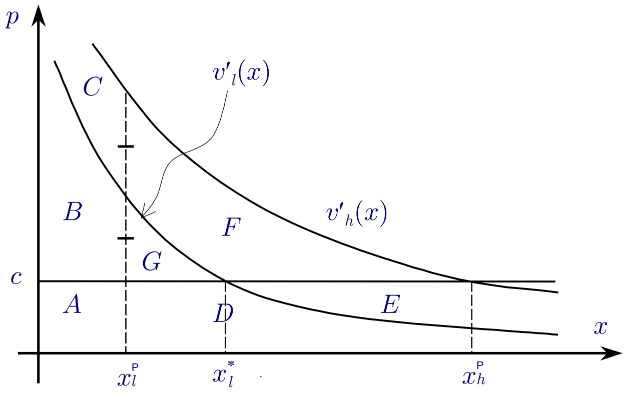


Рисунок 107

$$\frac{v'_h(x_l^{\mathrm{P}}) - v'_l(x_l^{\mathrm{P}})}{v'_l(x_l^{\mathrm{P}}) - c'(m_l x_l^{\mathrm{P}} + m_h x_h^{\mathrm{P}})} = \frac{v'_h(x_l^{\mathrm{P}}) - v'_l(x_l^{\mathrm{P}})}{v'_l(x_l^{\mathrm{P}}) - c} = \frac{m_l}{m_h}.$$

Когда количество потребителей каждого типа одинаково, соответствующие отрезки равны, что и изображено на графике.

Согласно оптимальной системе сделок господин High заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A + B + D + E + F + G$, а господин Low заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A + B$.

Приведем сравнение оптимальной пакетной дискриминации с идеальной в частном случае, когда предельные издержки постоянны. Напомним, что при идеальной дискриминации монополист предлагает два пакета $\{(x_l^*, t_l^*), (x_h^*, t_h^*)\}$, такие, что

$$v'_l(x_l^*) = c \quad \text{и} \quad v'_h(x_h^*) = c,$$

$$t_l^* = v_i(x_l^*) \quad \text{и} \quad t_h^* = v_i(x_h^*).$$

1. Поскольку $v'_h(x_h^{\mathrm{P}}) = c'(m_l x_l^{\mathrm{P}} + m_h x_h^{\mathrm{P}}) = c$, то $x_h^{\mathrm{P}} = x_h^*$, т.е. господин High приобретает то же количество благ. Однако он заплатит меньше, чем при идеальной дискриминации. Действительно плата господина High, $t_h^* = v_i(x_h^*)$, равна площади $A + B + C + D + E + F + G$, что больше, чем

$$t_h^{\mathrm{P}} = t_h^* + t_l^{\mathrm{P}} - v_h(x_l^{\mathrm{P}}) = t_h^* - [v_h(x_l^{\mathrm{P}}) - v_l(x_l^{\mathrm{P}})]$$

(см. равенство (2*h*=)), что равно площади $A + B + D + E + F + G$. Разница, $v_h(x_l^{\mathrm{P}}) - v_l(x_l^{\mathrm{P}})$, есть площадь фигуры $C$. Таким образом присутствие господина Low (и то обстоятельство, что монополист их не может различать) оказывает благоприятное влияние на уровень благосостояния господина High (тем большее, чем больше число участников первого типа).

2. При идеальной дискриминации если $v'_l(0) > c$ (и, следовательно, $v'_h(0) > 0$), то $x_l^* > 0$ и $x_h^* > 0$. При оптимальной пакетной дискриминации эти условия гарантируют лишь, что $x_h^{\mathrm{P}} > 0$ (вне зависимости от количества участников обоих типов, $m_l$ и $m_h$), т.е. любой участник типа «господин High» будет обслуживаться. Однако участники типа «господин Low» будут обслуживаться только если доля таких участников достаточно велика. (Докажите это самостоятельно.)

3. Если присутствует хотя бы один участник типа «господин High», объем потребления блага потребителями типа «господин Low» будет меньше, чем при идеальной дискриминации. Это означает, что будут иметь место потери благосостояния:

$$DL = m_l \cdot ([v_l(x_l^*) + v_h(x_h^*) - (x_l^* + x_h^*)c] - [v_l(x_l^{\mathrm{P}}) + v_h(x_h^{\mathrm{P}}) - (x_l^{\mathrm{P}} + x_h^{\mathrm{P}})c]) =$$

$$= m_l \cdot (v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{\mathrm{P}}) - (x_l^* - x_l^{\mathrm{P}})c) > 0.$$

Итак, от невозможности различения участников монополистом при пакетной дискриминации Low ничего не выиграл и не проиграл (он выплачивает весь свой потребительский излишек), хотя его уровень потребления изменился, выиграл High (получил выигрыш, равный площади $C$), а монополист проиграл (его прибыль уменьшилась на величину $m_h\cdot$ (площадь $C$) + $m_l\cdot$(площадь $G$)). В результате возникли чистые потери благосостояния, измеряемые величиной $m_l\cdot$(площадь $G$).

На Рис. 108 представлена оптимальная схема в другой системе координат. Поскольку у господина Low не остается потребительского излишка, то его кривая безразличия, проходящая через точку $(x_l^P,\ t_l^P)$, должна также проходить через начало координат (напомним, что мы приняли $v_l(0) = 0$). Господин High безразличен к выбору между пакетами, поэтому его кривая безразличия, проходящая через точку $(x_l^P,\ t_l^P)$, должна проходить также и через точку $(x_h^P,\ t_h^P)$.

**Пример 7.**

Пусть функции полезности господина Low и господина High имеют вид $u_l(x_l,\ z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h,\ z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$, соответственно, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда оптимальные объемы $x_i^P$, где $i = l,\ h$, для этих типов потребителей находятся из системы уравнений:

$$(m_l + m_h)\,\frac{1}{2\sqrt{x_l^P}} - m_h\frac{1}{\sqrt{x_l^P}} = m_l c,$$

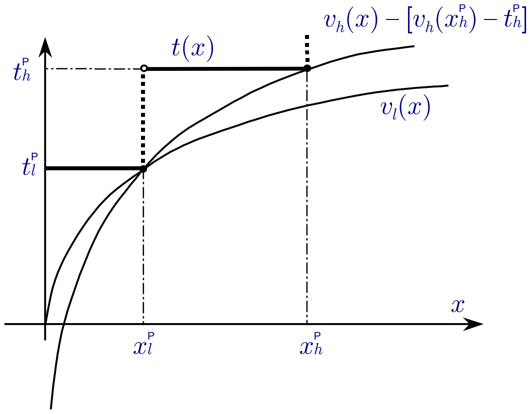


Рисунок 108

$$\frac{1}{\sqrt{x_h^P}} = c.$$

Если $m_l > m_h$, то решение этой системы уравнений существует (в противном случае будут предлагаться сделки только одного типа):

$$x_l^P = \left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2 \qquad x_h^P = \frac{1}{c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо будет равна:

$$t_l^P = v_l(x_l^P) = \frac{m_l - m_h}{2m_l c},$$

$$t_h^P = v_h(x_h^P) - v_h(x_l^P) + v_l(x_l^P) = \frac{3m_l + m_h}{2m_l c}.$$

В частном случае, когда $m_l$ относится к $m_h$ как 2 к 1, получим

$$x_l^P = \frac{1}{16c^2}, \qquad x_h^P = \frac{1}{c^2},$$

$$t_l^{P} = \frac{1}{4c}, \qquad t_h^{P} = \frac{7}{4c}.$$

Получается, что господин Low платит за единицу блага $4c$, а господин High — $\frac{7c}{4}$.

Найдем также чистые потери общественного благосостояния. Они равны:

$$DL = m_l \cdot (v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{P}) + c(x_l^{P} + x_h^{P}) - c(x_l^* + x_h^{P})) =$$

$$= m_l \cdot (v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{P}) + (x_l^{P} - x_l^*)c).$$

Напомним, что $x_l^* = \frac{1}{4c^2}$, поэтому

$$DL = m_l \cdot \left(\frac{1}{2c} - \frac{m_l - m_h}{2m_l c} + \left[\left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2}\right]c\right) = \frac{m_h^2}{4m_l c}.$$

Когда доля участников типа «господин High» пренебрежимо мала по сравнению с долей участников типа «господин Low», то схема оплаты приближается к схеме оплаты при идеальной дискриминации, и потери благосостояния близки к нулю. ⇦

### *ДИСКРИМИНАЦИЯ ВТОРОГО ТИПА: ДВУХКОМПОНЕНТНЫЙ ТАРИФ*

Вторая (по порядку, но не по значению) рассматриваемая нами схема реализации второго типа дискриминации – это двухкомпонентный тариф. Определение двухкомпонентного тарифа рассматривалось нами на стр. 494. Напомним, что схема реализации двухкомпонентного тарифа имеет вид: $t(x) = A + p\,x$. Тот факт, что потребители имеют возможность ничего не покупать на рынке, можно учесть в функции $t(x)$, так что она в результате приобретет вид:

$$t(x) = \begin{cases} A + p\,x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти характеристики оптимального двухкомпонентного тарифа $(A, p)$, необходимо прежде всего рассмотреть поведение потребителей, сталкивающихся с такой схемой оплаты. Если потребитель покупает благо в положительном количестве ($x_i > 0$), то из-за квазилинейного характера функции полезности величина $A$ не влияет на выбор $x_i$. По сути дела, бюджетное ограничение, при двухкомпонентном тарифе можно рассматривать как обычное бюджетное ограничение, соответствующее доходу $\omega_i - A$. Спрос потребителя при данной величине $p$ находится из условия первого порядка:

$$v'_i(x_i) = p.$$

При этом функция $v'_i(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса. В дальнейшем мы будем обозначать прямые функции спроса, задаваемые условиями первого порядка, через $D_h(p)$ и $D_l(p)$ для господина High и господина Low соответственно. В этих обозначениях совокупный спрос, с которым столкнется монополист, назначив цену $p$, будет равен

$$D(p) = m_h D_h(p) + m_l D_l(p).$$

Если оказывается, что $v_i(D_i(p)) - A - pD_i(p)$ меньше $v_i(0) = 0$, то потребителю выгодно выбрать $x_i = 0$, а не $x_i = D_i(p)$. Отсюда получим условие участия:

$$v_i(D_i(p)) - A - pD_i(p) \geqslant 0.$$

Мы в дальнейшем разберем только случай, когда оптимальное для монополиста решение внутреннее, в том смысле, что каждый потребитель покупает благо в положительном количестве, т.е. $x_i > 0$. Это подразумевает, что условие участия выполнено для каждого потребителя. (Очевидно, что если оптимальное решение не внутреннее, то оно должно иметь следующий вид: потребление потребителей типа «господин Low» равно нулю, а в отношении потребителей типа «господин High» монополист проводит идеальную дискриминацию по двухкомпонентной схеме. Читатель может доказать это самостоятельно.)

По крайней мере одно из условий участия в точке оптимума должно выполняться как равенство. В противном случае монополист мог бы увеличить прибыль, увеличив фиксированную плату $A$. Несложно показать, что оно должно быть выполнено как равенство для потребителей типа «господин Low». Действительно, пусть это не так, и для господина High выполнено

$$v_h(x_h) - A - px_h = 0.$$

Поскольку господин High выбрал $x_h$, а не $x_l$, то данное допущение влечет

$$v_h(x_l) - A - px_l \leqslant v_h(x_h) - A - px_h = 0.$$

По предположению, $v_h(x) > v_l(x)\ \forall x$, поэтому

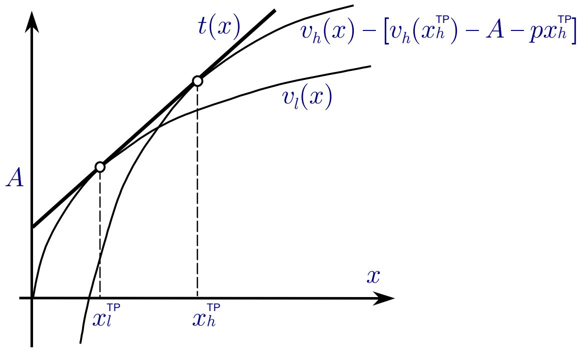


Рисунок 109

$$v_l(x_l) - A - px_l < v_h(x_l) - A - px_l \leqslant 0.$$

Но это означает невыполнение условия участия для господина Low, поэтому наше предположение не может быть верным. Значит, $v_h(x_h) - A - px_h > 0$ и

$$v_l(x_l) - A - px_l = 0.$$

Тем самым мы получили, что при данной цене $p$ монополисту выгодно назначить фиксированную плату на уровне потребительского излишка господина Low.

$$A(p) = v_l(D_l(p)) - pD_l(p).$$

Теперь мы можем представить прибыль монополиста как функцию цены $p$:

$$\Pi(p) = (m_l + m_h)[v_l(D_l(p)) - pD_l(p)] + pD(p) - c(D(p)).$$

Последние два слагаемых представляют собой прибыль монополии, которая не применяет ценовую дискриминацию. Обозначим ее через $\Pi^{\text{ND}}(p)$. В этих обозначениях

$$\Pi(p) = (m_l + m_h)[v_l(D_l(p)) - pD_l(p)] + \Pi^{\text{ND}}(p).$$

Продифференцировав по $p$, получим

$$\frac{d\Pi}{dp}(p) = (m_l + m_h)[(v_l'(D_l(p)) - p)\cdot D_l'(p) - D_l(p)] + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p).$$

Воспользуемся условием первого порядка для решения задачи потребителя:

$$v_l'(D_l(p)) = p.$$

Имеем

$$\frac{d\Pi}{dp}(p) = -(m_l + m_h)D_l(p) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p).$$

Если обозначить через $p^{\text{TP}}$ оптимальную цену, являющуюся решением задачи

$$\Pi(p) \to \max{}_{p \geqslant 0},$$

то

$$-(m_l + m_h)D_l(p^{\text{TP}}) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) \leqslant 0,$$

причем если решение внутреннее ($p^{\text{TP}} > 0$), то

$$-(m_l + m_h)D_l(p^{\text{TP}}) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) > 0$, откуда следует, что $p^{\text{TP}}$ не может совпадать с ценой $p^{\text{ND}}$, которую бы назначила недискриминирующая монополия. Покажем, что в действительности $p^{\text{TP}} < p^{\text{ND}}$.

Прибыль монополиста состоит из постоянной величины, «платы за вход», равной потребительскому излишку господина Low, и переменной части, зависящей от объема продаж. Переменная часть достигает максимума при $p = p^{\text{ND}}$, а постоянная часть убывает как функция цены. Формально:

$$p^{\text{ND}}D(p^{\text{ND}}) - c(D(p^{\text{ND}})) \geqslant pD(p) - c(D(p)) \ \ \forall p \geqslant 0.$$

С другой стороны, при $p \geqslant p^{\text{ND}}$

$$A(p^{\text{ND}}) = v_l(D_l(p^{\text{ND}})) - p^{\text{ND}}D_l(p^{\text{ND}}) \geqslant v_l(D_l(p)) - pD_l(p) = A(p),$$

откуда

$$(m_l + m_h)A(p^{\text{ND}}) + p^{\text{ND}}D(p^{\text{ND}}) - c(D(p^{\text{ND}})) \geqslant$$
$$\geqslant (m_l + m_h)A(p) + \ pD(p) - c(D(p)).$$

Это и означает, что прибыль монополиста при любом $p \geqslant p^{\text{ND}}$ не превышает прибыль при $p = p^{\text{ND}}$.

Таким образом, $p^{\text{TP}} < p^{\text{ND}}$. Из убывания функции спроса следует, что производимое количество блага при использовании двухкомпонентного тарифа, $y^{\text{TP}} = D(p^{\text{TP}})$, выше, чем без дискриминации: $y^{\text{TP}} > y^{\text{ND}}$.

С другой стороны, расписывая

$$\frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) = D(p^{\text{TP}}) + [p^{\text{TP}} - c'(D(p^{\text{TP}}))]\, D'(p^{\text{TP}}),$$

и подставляя

$$D(p^{\text{TP}}) = m_h D_h(p^{\text{TP}}) + m_l D_l(p^{\text{TP}})$$

получим, что

$$m_h[D_h(p^{\text{TP}}) - D_l(p^{\text{TP}})] + [p^{\text{TP}} - c'(D(p^{\text{TP}}))]\, D'(p^{\text{TP}}) = 0.$$

При сделанном нами предположении, что $v'_l(x) < v'_h(x)$, должно выполняться неравенство

$$D_l(p) < D_h(p),$$

поэтому

$$p^{\text{TP}} > c'(D(p^{\text{TP}})).$$

Отсюда следует, что правило оптимального ценообразования — равенство цены предельным издержкам — не выполнено, и производимое количество блага, $y^{TP} = D(p^{TP})$, меньше оптимального с общественной точки зрения количества, $\hat{y}$, которое должно удовлетворять условию

$$D(c'(\hat{y})) = \hat{y}.$$

Таким образом, при этой схеме ценообразования цена, которую каждый потребитель платит за единицу продукции ниже, чем при линейном тарифе. А поэтому величина потребительского излишка каждого потребителя, а значит и величина совокупного излишка, выше, чем при линейном (недискриминирующем) ценообразовании. Другими словами, использование двухкомпонентного тарифа уменьшает чистые потери благосостояния по сравнению с недискриминирующей монополией, хотя величина чистых потерь остается положительной.

**Пример 8.**

Пусть, как и в предыдущем примере, функции полезности господина Low и господина High имеют вид $u_l(x_l, z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h, z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$, соответственно, а функция издержек, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$.

Функции спроса имеют вид

$$D_l(p) = \frac{1}{4p^2} \quad \text{и} \quad D_h(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда функция совокупного спроса равна

$$D(p) = \frac{m_l + 4m_h}{4p^2},$$

а ее производная —

$$D'(p) = -\frac{m_l + 4m_h}{2p^3}.$$

Подставляя в условия первого порядка,

$$m_h[D_h(p^{TP}) - D_l(p^{TP})] + [p^{TP} - c'(D(p^{TP}))]\, D'(p^{TP}) = 0,$$

получим

$$\frac{3m_h}{4(p^{TP})^2} - [p^{TP} - c]\frac{m_l + 4m_h}{2(p^{TP})^3} = 0,$$

откуда

$$p^{TP} = \frac{2\,m_l + 8m_h}{2\,m_l + 5m_h}c > c.$$

Фиксированная плата равна

$$A = v_l(D_l(p^{TP})) - p^{TP} D_l(p^{TP}) = \frac{1}{2p^{TP}} - \frac{1}{4p^{TP}} = \frac{1}{4p^{TP}}.$$

Для того чтобы сравнить цену назначаемую дискриминирующим монополистом с ценой недискриминирующего рассмотрим условия первого порядка для недискриминирующей монополии:

$$D(p^{ND}) + [p^{ND} - c'(D(p^{ND}))]\, D'(p^{ND}) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{(p^{\text{ND}})^2}(m_l/4+m_h)-[p^{\text{ND}}-c]\frac{2}{(p^{\text{ND}})^3}(m_l/4+m_h)=0$$

и

$$p^{\text{ND}}=\ 2c>p^{\text{TP}}.$$

Теперь сравним результаты примененением двухкомпонентного тарифа и пакетной дискриминации как с точки зрения общества, так и с точки зрения монополиста. Для этого вычислим чистые потери благосостояния для двухкомпонентного тарифа (в случае пакетной дискриминации чистые потери были вычислены нами ранее) и прибыль монополиста в этих ситуациях. Чистые потери благосостояния в случае двухкомпонентного тарифа равны:

$$\begin{aligned}DL&=m_l\sqrt{D_l(c)}+m_h\cdot 2\sqrt{D_h(c)}-cD(c)-\\&-[m_l\sqrt{D_l(p^{\text{TP}})}+m_h\cdot 2\sqrt{D_h(p^{\text{TP}})}-cD(p^{\text{TP}})]=\\&=\frac{m_l+4m_h}{2c}-\frac{m_l+4m_h}{4c}-\frac{m_l+4m_h}{2p^{\text{TP}}}+c\frac{m_l+4m_h}{4(p^{\text{TP}})^2}=\\&=\frac{m_l+4m_h}{4c}(1-\frac{2c}{p^{\text{TP}}}+\frac{c^2}{(p^{\text{TP}})^2})=\frac{m_l+4m_h}{4c}(1-\frac{c}{p^{\text{TP}}})^2=\\&=\frac{m_l+4m_h}{4c}(1-\frac{2m_l+5m_h}{2m_l+8m_h})^2=\frac{9{m_h}^2}{16(m_l+4m_h)c}.\end{aligned}$$

С точки зрения благосостояния общества однозначного выбора между двумя схемами сделать невозможно. В зависимости от соотношения между $m_l$ и $m_h$ чистые потери могут быть меньше либо в том, либо в другом случае.

Прибыль монополиста в случае применения пакетной дискриминации равна $\frac{(m_l+m_h)^2}{4m_lc}$, а прибыль в случае применения двухкомпонентного тарифа равна $\frac{(2m_l+5m_h)^2}{16(m_l+4m_h)c}$. Легко проверить, что вне зависимости от соотношения между $m_l$ и $m_h$ монополист предпочтет использовать пакетную дискриминацию.

⇦

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ДИСКРИМИНАЦИИ ВТОРОГО ТИПА

Пакетная схема ценообразования является оптимальной для монополиста. Объясним, почему это так. Предположим, что в результате использования некоторой схемы ценообразования $t(\cdot)$ господин Low выберет сделку, при которой он приобретает $x_l$ блага и платит за него $t_l$, а господин High — $x_h$ и $t_h$ соответственно. Тогда монополист мог бы использовать пакетную дискриминацию, предложив потребителям «пакеты» $(x_l, t_l)$ и $(x_h, t_h)$, первый из которых предпочитает господин Low, а второй — господин High. Таким образом, пара $(x_l, t_l)$ и $(x_h, t_h)$ является допустимой в задаче выбора оптимальных пакетных сделок, и поэтому прибыль, получаемая монополистом при использовании любой другой схемы $t(\cdot)$ не может превышать прибыль, получаемую при использовании оптимальных пакетных сделок.

В частности, без использования дискриминации ($^{\text{ND}}$) и при использовании двухкомпонентного тарифа ($^{\text{TP}}$) монополист не может получить более высокую прибыль, чем при использовании оптимальных пакетных сделок ($^{\text{P}}$), т.е.

$$\Pi^{\text{ND}}\leqslant\Pi^{\text{P}}\quad\text{и}\quad\Pi^{\text{TP}}\leqslant\Pi^{\text{P}}.$$

Как было показано выше:

$$\Pi^{\text{ND}} < \Pi^{\text{TP}}$$

Покажем, что при сделанных предположениях справедливо также следующее строгое соотношение:

$$\Pi^{\text{TP}} < \Pi^{\text{P}}.$$

Для этого установим, что если $x_l^{\text{TP}}$ ($x_h^{\text{TP}}$) — объем покупок рассматриваемого блага потребителями первого типа (соответственно, потребителями второго типа) при двухкомпонентном тарифе, то для двух пакетных сделок ($x_l^{\text{TP}}$, $t_l^{\text{TP}}$), ($x_h^{\text{TP}}$, $t_h^{\text{TP}}$), где

$$t_l^{\text{TP}} = A(p^{\text{TP}}) + p^{\text{TP}} D_l(p^{\text{TP}}),$$

$$t_h^{\text{TP}} = A(p^{\text{TP}}) + p^{\text{TP}} D_h(p^{\text{TP}}).$$

построенных на их основе, справедливы утверждения:

1. Ограничения самовыявления не является связывающим и поэтому прибыль монополиста может быть увеличена за счет увеличения платы с каждого потребителя второго типа.

Действительно, функция $v_h(x) - A - px$ достигает максимальной величины при $x = x_h^{\text{TP}}$. Поэтому

$$v_h(x_h^{\text{TP}}) - A - px_h^{\text{TP}} \geqslant v_h(x_l^{\text{TP}}) - A - px_l^{\text{TP}}.$$

С другой стороны, $v'_h(x_l^{\text{TP}}) - p > 0$, и поэтому монополист может повысить $t_h$ по сравнению с $t_h^{\text{TP}}$, не нарушая условие самовыявления. Тем самым, его прибыль возрастет, что и доказывает, что неравенство в вышеприведенном соотношении строгое: $\Pi^{\text{TP}} < \Pi^{\text{P}}$.

2. Поскольку $\overline{p} > c'(D(\overline{p}))$, то количество  блага в сделке, предназначенной для покупателей второго типа, может быть увеличено, при соответствующем увеличении прибыли производителя, без нарушения условия самовыявления потребителей второго типа. Данное утверждение указывает еще один способ повышения прибыли — за счет увеличения $x_h$.

Сказанное иллюстрирует рисунок 110. Площадь фигуры $B$ на нижней части рисунка равна величине прироста платы за предлагаемое покупателю второго типа количество блага ($x_h^{\text{TP}}$), при котором он все еще предпочитает сделку ($x_h^{\text{TP}}$, $t_h^{\text{TP}} + B$) сделке ($x_l^{\text{TP}}$, $t_l^{\text{TP}}$) (точнее, эти сделки для него эквивалентны). На верхнем графике сделка ($x_h^{\text{TP}}$, $t_h^{\text{TP}} + B$) лежит на кривой безразличия (пунктирная линия), полученной сдвигом первоначальной кривой безразличия потребителя второго типа, влево до точки, представляющей сделку ($x_l^{\text{TP}}$, $t_l^{\text{TP}}$).

Площадь фигуры $C$ представляет величину прироста прибыли монополиста за счет *увеличения количества блага* в сделке, предназначенной для потребителя второго типа.

### 3-й тип ценовой дискриминации: «сегментация рынка»

Предположим теперь, что монополисту по каким-то причинам недоступны первые два типа дискриминации, но зато он имеет возможность продавать на $k$ *сегментах* рынка или *подрынках*. Мы будем предполагать, что арбитраж между подрынками отсутствует, а именно, (1) невозможна покупка на одном рынке и перепродажа на другом, (2) каждый потребитель может покупать на одном, и только на одном подрынке (отсутствует персональный арбитраж). В этом случае монополист может установить разные цены на разных подрынках при том, что в пределах одного подрынка все потребители покупают благо по одной и той же цене.

При отсутствии арбитража подрынки независимы, в том смысле, что спрос на благо на каждом подрынке зависит только от цены на этом подрынке:

$$D_i = D_i(p_i),\ \ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Покажем, что при дискриминации третьего типа *монополист установит цену выше на том рынке, где эластичность спроса по цене (точнее, ее абсолютная величина) меньше.*

Задача монополиста состоит в том, чтобы установить цены таким образом, чтобы получить максимальную прибыль:

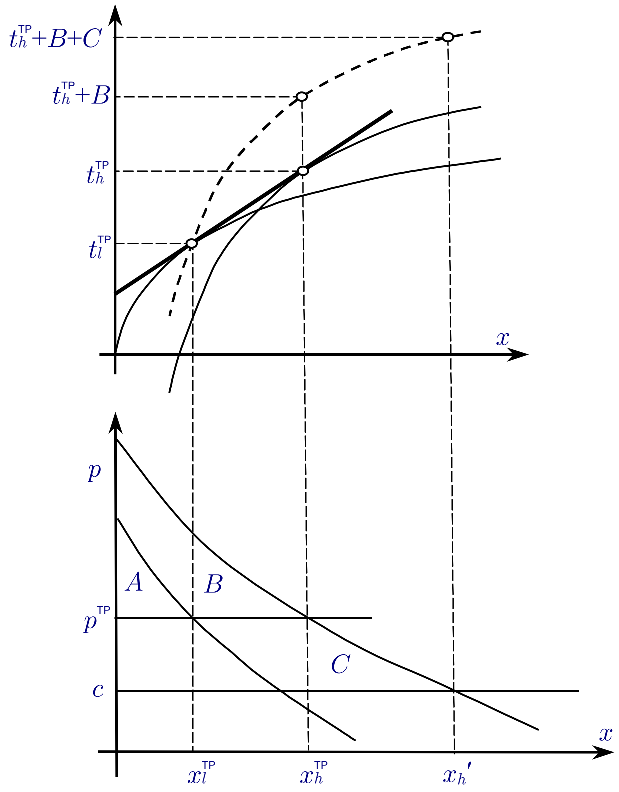


Рисунок 110

$$\sum_{i=1}^{k} p_i D_i(p_i) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(p_i)) \to \max{}_{p_i \geqslant 0}.$$

Из условия первого порядка при предположении $p_i > 0\ \forall i$ имеем

$$D_i(p_i) + p_i D_i'(p_i) = c'(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)) \cdot D_i'(p_i),\ \ \forall i.$$

Используя определение эластичности спроса на $i$–м подрынке,

$$\varepsilon_i(p_i) = D_i'(p_i)\frac{D_i(p_i)}{p_i},$$

получим

$$p_i\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}\right] = c'(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)),\ \ \forall i.$$

Поскольку правая часть во всех условиях первого порядка одинакова, то для любых двух подрынков, $i$, $s$, мы можем записать

$$\frac{p_i}{p_s} = \frac{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_s(p_s)|}}{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}}.$$

Поэтому, если в равновесии $|\varepsilon_i(p_i)| < |\varepsilon_s(p_s)|$, то $p_i > p_s$, что и требовалось доказать.

Понятно, что монополист не может проиграть от дискриминации, но выигрывает ли он за счет потребителя, или за счет уменьшения чистых потерь, которые существуют при недискриминирующей монополии? Оценим возможное влияние дискриминации третьего типа на благосостояние.

По тем же причинам, которые были рассмотрены ранее, мы можем анализировать влияние дискриминации третьего типа на благосостояние, считая, что спрос на каждом из подрынков порождается поведением репрезентативных потребителей, по одному на каждый подрынок, имеющих квазилинейные функции полезности:

$$u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i.$$

Поскольку репрезентативный потребитель покупает все на данном рынке ($x_i = y_i$), то в дальнейшем будем писать $y_i$.

Сравним рынок без дискриминации, на котором монополист устанавливает единую оптимальную цену $\bar{p}$, с рынком в условиях дискриминации третьего типа, когда на каждом из подрынков монополист устанавливает свою цену $\tilde{p}_i$.

Общая формула для индикатора благосостояния имеет вид:

$$W = \sum_{i=1}^{k} v_i(y_i) - c(\sum_{i=1}^{k} y_i).$$

Если подставить в эту формулу функции спроса, получим

$$W = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(p_i)) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(p_i)).$$

В ситуации без дискриминации $p_i = \bar{p}$

Мы должны сравнить

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(\bar{p})) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(\bar{p})),$$

с

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(\tilde{p}_i)) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(\tilde{p}_i)).$$

Предположим, что у каждого репрезентативного потребителя $v_i(\cdot)$ — строго вогнутая возрастающая функция.

Напомним, что вогнутая функция обладает тем свойством, что лежит ниже своей касательной. Для любой вогнутой дифференцируемой функции $f(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\nabla f(x^1)\,(x^1 - x^0) \leqslant f(x^1) - f(x^0) \leqslant \nabla f(x^0)\,(x^1 - x^0)$$

для любых $x^0, x^1$ из ее области определения. Применив это свойство к функции $v_i(\cdot)$, получим, что

$$v_i'(\tilde{y}_i)\,(\tilde{y}_i - \bar{y}_i) \leqslant v_i(\tilde{y}_i) - v_i(\bar{y}_i) \leqslant v_i'(\bar{y}_i)\,(\tilde{y}_i - \bar{y}_i),$$

или

$$v_i'(\tilde{y}_i)\,\Delta y_i \leqslant \Delta v_i \leqslant v_i'(\bar{y}_i)\,\Delta y_i,$$

где $\Delta v_i = v_i(\tilde{y}_i) - v_i(\bar{y}_i)$, $\Delta y_i = \tilde{y}_i - \bar{y}_i$.

Поскольку спрос порождается максимизацией квазилинейной функции полезности, то выполняются соотношения

$$\bar{p} = v_i'(\bar{y}_i);$$

$$\tilde{p}_i = v_i'(\tilde{y}_i).$$

Используя их можно переписать неравенство (4) в виде

$$\tilde{p}_i\,\Delta y_i \leqslant \Delta v_i \leqslant \bar{p}\,\Delta y_i.$$

Суммируя по всем подрынкам, получим:

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i\,\Delta y_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - \sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) \leqslant \bar{p} \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i \qquad (\#)$$

Мы рассмотрим только случай, когда монополист имеет постоянные предельные издержки, равные $c$:

$$c(\sum_{i=1}^{k} y_i) = \sum_{i=1}^{k} y_i\, c$$

где $c$ — некоторая константа. Вычитая из всех трех частей соотношения (#) изменение издержек при введении дискриминации,

$$c(\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i) - c(\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i) = (\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i)c - (\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i)c = \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c,$$

можно оценить изменение индикатора благосостояния $\Delta W = \tilde{W} - \bar{W}$:

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i\,\Delta y_i - \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - (\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i)c \; - \sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) - (\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i)c \leqslant$$

$$\leqslant \bar{p} \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{p}_i - c)\Delta y_i \leqslant \Delta W \leqslant (\bar{p} - c) \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i$$

Вторая часть последнего неравенства говорит нам, что в ситуации. когда суммарный объем продаж не изменится, т.е. $\sum \Delta y_i = 0$, то прирост совокупного излишка (в данном случае совокупного потребительского излишка, так как предельные издержки по предположению постоянны) при переходе к дискриминации благосостояние не может вырасти, $\Delta W \leqslant 0$. Таким образом, необходимым условием того, что совокупный потребительский излишек в результате дискриминации не упадет, является рост совокупных продаж. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 7.**

Пусть монополист перешел от единой цены ($\bar{p}$) к дискриминации по сегментам рынка. Пусть оба решения внутренние, функции полезности дифференцируемы, предельные издержки монополии постоянны. Тогда совокупное благосостояние общества может возрасти только в случае роста суммарного выпуска.

Заметим, что полученная оценка изменения благосостояния опирается только на анализ поведения потребителей, но не на анализ поведения монополии. Смысл утверждения в том, что дискриминация вносит искажения в предельные нормы замещения по подрынкам: без дискриминации они одинаковы, а в случае дискриминации 3-го типа в общем случае разные. Если отрицательный эффект этих искажений не перекрывается ростом общего потребления, то излишек потребителей, а, следовательно, и общее благосостояние не может вырасти.

Если судить по тем результатам которые были получены при анализе первого и второго типов дискриминации, то наблюдается тенденция к падению чистых потерь от монополии при использовании монополистом дискриминации. Однако в случае использования дискриминации второго типа чистые потери могут вырасти по сравнению с недискриминирующей монополией. Пример такой ситуации построить очень просто.

### Пример 9. («Теорема Дж. Робинсон и Р. Шмалензи»[180])

Предположим, что функции спроса линейны, а предельные издержки равны $c$. Обратные функции спроса также должны быть линейными. Пусть они имеют вид

$$p_i(y_i) = a_i - b_i y_i \ (a_i, b_i > 0).$$

Тогда недискриминирующий монополист, продающий на всех рынках, сталкивается на них со спросом при цене $p$:

$$y_i(p) = \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{b_i} p.$$

Мы предполагаем здесь, что цена не слишком велика, и спрос не равен нулю. Суммируя по подрынкам, получим функцию общего спроса

$$y(p) = \sum_{i=1}^{k} y_i(p) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} - \left( \sum_{i \in I} \frac{1}{b_i} \right) p.$$

Функция обратного спроса при этом имеет вид:

$$p(y) = \frac{\sum_{i \in I} a_i / b_i}{\sum_{i \in I} 1/b_i} - \frac{1}{\sum_{i \in I} 1/b_i} y,$$

и поэтому оптимальный объем продаж равен (см. Пример 1 на стр. 478)

$$y^* = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in I} \frac{a_i}{b_i} - c \sum_{i \in I} \frac{1}{b_i} \right)$$

При дискриминации по подрынкам монополист продает на $i$-м подрынке объем

$$\tilde{y}_i = \frac{a_i - c}{2b_i}.$$

Суммируя по подрынкам, получим

---

[180] Джоан Робинсон — британский экономист, в своей работе «Economics of imperfect competitions» (1933г.), London, Macmillan (Д. Робинсон «Экономическая теория несовершенной конкуренции» М., 1986) показала, что в случае линейных функций спроса и издержек суммарный выпуск монополии, не проводящей дискриминацию, совпадает с выпуском монополии, проводящей дискриминацию третьего типа. Американский экономист Ричард Шмалензи показал, что в случае линейных функций спроса и издержек благосостояние ниже при использовании дискриминации (Schmalensee, R. (1981), "Output and welfare implications of monopolistic third-degree price discrimination," *American Economic Review*, **71** (March), 242–247).

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i-c}{2b_i}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I}\frac{a_i}{b_i}-c\sum_{i\in I}\frac{1}{b_i}\right).$$

Поскольку объем продаж не меняется, то по Теореме 7 благосостояние не может возрасти, и, следовательно, чистые потери не могут уменьшиться. Более того, при том же объеме производства благосостояние при использовании дискриминации должно быть меньше, поскольку цены, а, следовательно, и предельные нормы замещения у разных потребителей оказываются разными. Совпадение чистых потерь возможно только при совпадении цен на всех подрынках, т.е. когда

$$p_i=\frac{a_i+c}{2}=p_s=\frac{a_s+c}{2}\quad\forall i,\, s$$

или

$$a_i=a_s\quad\forall i,\, s.$$

Можно также непосредственно вычислить чистые потери в двух ситуациях и затем сравнить их. Читатель может проделать это самостоятельно. Мы дадим лишь графическое сравнение в случае двух подрынков.

На Рис. 111 первый подрынок изображен в правой системе координат, а второй — в левой. Соответствующие функции спроса обозначены через $D_1$ и $D_2$. Предполагаем, что $a_1 > a_2$. Совокупный излишек на первом рынке равен площади фигур $A$ и $B$, а на втором рынке — площади фигуры $C$. Чистые потери составляют четверть этих площадей, поскольку можно рассматривать дискриминирующую монополию как недискриминирующую на каждом из подрынков (см. Пример 2 на стр. 486). Таким образом, если монополист дискриминирует по подрынкам, то чистые потери составляют $(A+B+C)/4$.

Если монополист не проводит дискриминацию, то он сталкивается со спросом $D_1(p)+D_2(p)$ при низких ценах и со спросом $D_1(p)$ при высоких (так как при $a_1 > p > a_2$ спрос на втором подрынке равен нулю, в то время как спрос на первом подрынке все еще остается положительным). Таким образом, кривая спроса представляет собой ломаную. Пусть параметры функций спроса и предельных издержек таковы, что в оптимуме монополист продает на обоих подрынках, и следовательно оптимальная цена $\overline{p}$ лежит на нижнем участке кривой спроса ($\overline{p} < a_2$). При нахождении чистых потерь (в этом случае) важна форма кривой спроса только при ценах не превышающих $\overline{p}$. Таким образом, можно считать, что в верхней части кривая спроса не изгибается, что показано на Рис. 111 пунктиром. При этом чистые потери должны составлять четверть треугольника, составленного из фигур $A$ и $C'$. Т.е. без дискриминации чистые потери составляют $(A+C')/4$.

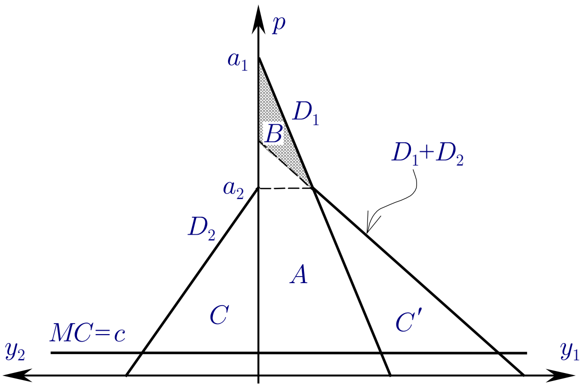


Рисунок 111

Заметим теперь, что площади треугольников $C$ и $C'$ равны, поскольку высоты и основания у них равны. Получаем, что без дискриминации чистые потери меньше на величину $B/4$. ⇦

## Задачи

13. Сравните рассмотренные схемы (поведение недискриминирующего монополиста или схему линейного тарифа, схему двухкомпонентного тарифа, пакетную дискриминацию и идеальную дискриминацию) в случае, когда предпочтения потребителей имеют следующий вид

$$u_i(y_i, w_i) = 0.5\theta_i\,[1-(1-y_i)^2] + w_i.$$

14. Докажите существование решения задачи идеальной дискриминации при следующих условиях:

♦ предельные издержки постоянны, $v_i(\cdot)$, $\forall i$ дифференцируемы;

♦ $v_i'(0) > c'(0)\ \forall i$;

♦ существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

15. Представьте проанализированные способы дискриминации в виде динамических игр. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным в подыграх равновесиям данных игр.

16. Представьте проанализированные схемы дискриминации второго типа в виде динамических байесовских игр в случае постоянных предельных издержек, рассматривая доли участников разных типов как вероятности. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным байесовским равновесиям данных игр.

17. Предположим, что функции спроса потребителей и функция издержек линейны, а число участников типа «господин Low» не превышает число участников типа «господин High». Покажите, что если при линейном тарифе монополисту невыгодно обслуживать потребителей типа «господин Low», то их оказывается невыгодным обсуживать и при пакетной дискриминации. Покажите, построив контрпример, что обратное неверно.

18. Проверьте, что когда функции спроса имеют вид $D(p_i) = \alpha_i(\beta - p)$, тогда монополисту не выгодно применять дискриминацию третьего типа.

19. Потребитель имеет функцию спроса $D(p) = 10 - p$. Предельные издержки монополии постоянны $MC = 5$. Какие сделки может предложить ему монополия, чтобы получить весь излишек (идеальная ценовая дискриминация). Для каждого вида сделок найти все параметры.

20. Фирма-монополист может разделить своих потребителей на $n$ непересекающихся групп. Функция спроса каждой группы $(i = 1,\ldots,n)$ от цены равна $y_i(p_i)$ $(y'_i > 0)$, общая функция издержек: $c(y)$, где $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ $(c'>0)$.

Пусть $n = 2$,

$$y_1 = (a_1 + a_2 + b_1) - b_1 p_1,$$

$$y_2 = (a_2 + b_1 + b_2) - (b_1 + b_2) p_2,$$

$$c(y) = y,$$

где $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ — положительные константы.

1) Возьмите конкретные числа $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ и найдите максимум прибыли при использовании дискриминации и без (когда цена одинакова). В каком случае объем производства выше?

2) Покажите, что при любом наборе констант цену для первой группы выгодно установить более высокую.

21. В той же ситуации взять $y_i = b_i p_i^{(1+1/ai)}$, $a_i$, $b_i > 0$. Доказать, при произвольном $n$, что отношения цен в равновесии не зависят от $c(.)$ и найти их.

22. Пусть монополист продает на двух независимых рынках, где эластичность спроса постоянна и составляет $\varepsilon_1$, на одном, $\varepsilon_2$ на другом. предельные издержки $c'(y) = c$ постоянны. Какие цены установятся на обоих рынках?

23. Как в ситуации Примера 9 (стр. 513) соотносятся цены на каждом из подрынков при дискриминации с ценой, назначаемой монополистом без применения дискриминации?

24. В ситуации Примера 9 (стр. 513), вычислив чистые потери благосостояния при дискриминации, проверьте, проведя соответствующие алгебраические преобразования, что они не меньше, чем потери без дискриминации. Для упрощения считайте, что предельные издержки нулевые. При доказательстве воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского:

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_k^2)(y_1^2 + \cdots + y_k^2).$$

25. Постройте пример, в котором при дискриминации третьего типа чистые потери были бы меньше, чем без дискриминации.

26. Пусть в случае дискриминации второго типа монополист сталкивается на каждом из подрынков с обратной функцией спроса $p_i$, которая зависит не только от объема продаж на данном подрынке, но и от объемов продаж на других подрынках, т.е. $p_i = p_i(y_i, y_{-i})$. Рассмотрите случай двух подрынков, когда емкость подрынка с меньшей эластичностью спроса (точнее, ее абсолютная величина) больше. Докажите, что монополист установит цену выше на том подрынке, где эластичность спроса по цене меньше.

27. Используя результаты Примеров 7 и 9 покажите, что предпочтение монополиста относительно применения конкретной схемы реализации дискриминации второго типа зависит от структуры рынка (количества потребителей каждого вида).

# 12. Олигополия

**Олигополией** называют ситуацию, когда на рынке несколько производителей, и каждый из них может влиять на цену. Если производителей двое, то такую олигополию называют **дуополией**.

В отличие от моделей монополии, где рассматривается принятие решений единственной фирмой — монополией, в моделях олигополии рассматривается принятие решений сразу несколькими экономическими агентами — олигополистами, причем результат функционирования каждого из них зависит не только от предпринимаемых им самим действий, но и от действий его конкурентов.[181] Таким образом мы сталкиваемся здесь с феноменом так называемого стратегического поведения — предмета теории игр. В связи с этим практически все модели олигополии представляют собой игры различного рода, и моделирование олигополистических рынков в существенной степени использует аппарат теории игр.

Мы будем предполагать здесь, если не оговорено иное, что общая структура олигополистической отрасли (технология, количество производителей, тип конкуренции и т.д.) заданы экзогенно. Логически возможны разные гипотезы о поведении участников олигополии. Участники могут демонстрировать либо некооперативное, либо кооперативное поведение (сговор, картель). Поэтому типы некооперативного поведения можно классифицировать по следующим признакам:

(I) Одновременное принятие решений.

(II) Последовательное принятие решений. Традиционно рассматриваемый — один из участников лидер, остальные подстраиваются к его решению. Возможны и более сложные цепочки ходов.

Нас прежде всего интересует некооперативное поведение олигополистов, хотя попутно мы будем рассматривать и кооперативное поведение (картель). Для каждой из этих гипотез о последовательности принятия решений можно, кроме того, предполагать, что стратегии всех участников (при одновременном принятии решений) или лидера (при последовательном принятии решений) сводятся к назначению либо цен, либо объемов выпуска. Таким образом, получаем четыре типа некооперативного поведения (см. Таблицу 4).

Таблица 4

| | Одновременно | Последовательно |
|---|---|---|
| Количество | Модель Курно | Модель Штакельберга |
| Цена | Модель Бертрана | Ценовое лидерство |

В дальнейшем будем считать, что некоторую однородную продукцию производят $n$ фирм, технологии которых представлены возрастающими функциями издержек $c_j(y_j)$, $j = 1, ..., n$, а спрос на продукцию задается убывающей обратной функцией спроса $p(Y)$. Областью определения для выпусков $y_j$ везде будем считать $[0, +\infty)$. Кроме того в дальнейшем мы не будем учитывать требование неотрицательности прибыли отдельного олигополиста. Под равновесием совершенной конкуренции будем понимать такое равновесие, которое уста-

---

[181] Нужно оговориться, что модели монополии, особенно модели дискриминации, все же включают в себя некоторые элементы теории игр, поскольку кроме решений монополиста рассматривается также реакция на них потребителей.

новилось бы, если бы производители игнорировали влияние своего объема выпуска на цену.[182]

## Модель Курно

В модели Курно производители принимают решение относительно объемов производства и принимают эти решения одновременно, исходя из своих предположений о решениях, принятых другими (их конкурентами).

Пусть $y^e_{ji}$ — ожидаемый (производителем $j$) объем производства производителя $i$, $\boldsymbol{y}^e_{-j}$ — составленный из этих ожиданий вектор $(y^e_{j1}, ..., y^e_{j,j-1}, y^e_{j,j+1}, ..., y^e_{jn})$. Тогда при выпуске $y_j$ его (ожидаемая) прибыль составит величину $\Pi^e_j(y_j, \boldsymbol{y}^e_{-j}) = p(y_j + \sum_{i\neq j} y^e_{ji}) \cdot y_j - c_j(y_j)$. Выпуск, максимизирующий прибыль при ограничении $y_j \geqslant 0$, зависит, таким образом, от ожидаемого объема производства других производителей. Если ожидаемые объемы производства совпадают с фактическими, то такое состояние можно назвать равновесием олигополии. Описанное понятие равновесия было введено в прошлом веке французом Антуаном Огюстеном Курно.[183] Это равновесие часто называют **равновесием Курно**. Следует отметить, однако, что было бы точнее говорить о *равновесии Нэша в модели Курно*.[184]

**Определение 1.**

Равновесие Курно — это совокупность выпусков $(y^*_1, ..., y^*_n)$ и ожиданий $(\boldsymbol{y}^e_{-1}, ..., \boldsymbol{y}^e_{-n})$, таких что выпуск любого производителя, $y^*_j$, максимизирует его прибыль на $[0, +\infty)$ при ожиданиях $\boldsymbol{y}^e_{-j}$, и ожидания всех производителей оправдываются, т.е. $\boldsymbol{y}^e_{-j} = \boldsymbol{y}^*_{-j}$, $j = 1, ..., n$.

Другими словами, $y^*_j$ является решением задачи

$$\Pi_j(y_j) = p(y_j + \sum_{i\neq j} y^*_i) \cdot y_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

Зависимость оптимального объема производства $y_j$ от $\sum_{i\neq j} y^e_i$ называют функцией отклика, если решение задачи единственно (отображением отклика в общем случае). Будем обозначать ее через $R_j(Y_{-j})$, где $Y_{-j} = \sum_{i\neq j} y_i$ — (ожидаемый) суммарный объем производства блага всеми другими производителями. Если оптимальный отклик однозначен, то равновесие Курно $(y^*_1, ..., y^*_n)$ является решением следующей системы уравнений:[185]

$$y^*_j = R_j(\sum_{i\neq j} y^*_i),\ j = 1, ..., n.$$

Пусть $(y^*_1, ..., y^*_n)$ — равновесие Курно. Тогда выполняются следующие соотношения (условия первого порядка):

$$\Pi'_j(y^*_j) = p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y^*_j - c'_j(y^*_j) \leqslant 0,$$

---

[182] То есть, были бы, пользуясь английским термином, price-taker'ами.

[183] Cournot, A. A. (1838), «Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses».

[184] Часто равновесие в рассмотренной модели называют также равновесием по Нэшу-Курно.

[185] Если отклики неоднозначны, то нужно решить аналогичную систему включений.

где $Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$, причем

$$\Pi_j'(y_j^*) = 0, \quad \text{если } y_j^* > 0.$$

Данные соотношения — необходимые условия первого порядка, представляют дифференциальную характеристику равновесия Курно.

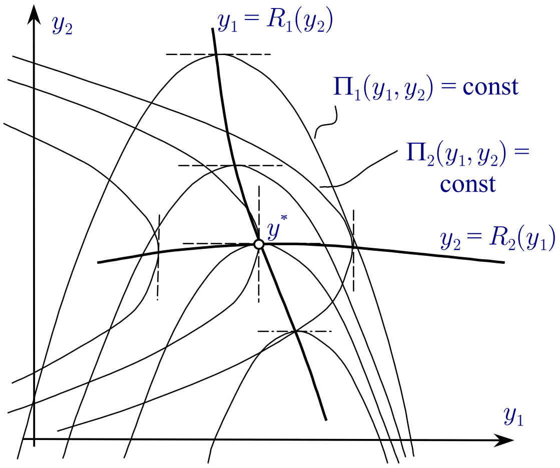


Рисунок 112

Проиллюстрируем с помощью графика равновесие Курно для случая двух фирм (дуополии) (Рис. 112). На рисунке изображены кривые постоянной прибыли ($\Pi_1(y_1,y_2) = const$ и $\Pi_2(y_1,y_2) = const$) и кривые отклика ($y_1 = R_1(y_2)$ и $y_2 = R_2(y_1)$), которые можно определить как множество точек, где касательные к кривым равной прибыли параллельны соответствующим осям координат. Точка пересечения кривых отклика является равновесием Нэша-Курно ($\boldsymbol{y}^*$).

## Свойства равновесия Курно в случае постоянных и одинаковых предельных издержек

Проведем анализ модели Курно в упрощенном варианте, предположив, что предельные издержки постоянны и совпадают у всех производителей, т.е. $c_j'(y_j) = c$. Кроме того будем предполагать выполнение условий:

(C$_1$) $p(0) > c$,

(C$_2$) существует $\tilde{Y}$, такой что $p(\tilde{Y}) < c$,

(C$_3$) функция $p(\cdot)$ дифференцируема и $p'(y) < 0 \ \forall y > 0$.

### *СИММЕТРИЧНОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ВЫПУСКОВ*

Докажем, что объемы производства у всех олигополистов совпадают. Пусть это не так, и существуют два производителя, $j$ и $k$, такие что $y_j^* > y_k^*$. Запишем условия первого порядка, учитывая, что выпуск $y_j^*$ положителен, а $y_k^*$ может быть равен нулю:

$$p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_j^* - c = 0$$

и

$$p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_k^* - c \leqslant 0.$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим

$$p'(Y^*) \, (y_k^* - y_j^*) \leqslant 0.$$

Поскольку $p'(Y^*) < 0$, то $y_k^* \geqslant y_j^*$. Получили противоречие. Таким образом, объем производства у каждой фирмы в равновесии Курно одинаков: $y_j^* = \dfrac{Y^*}{n}\ \forall j = 1, ..., n$,

а условия первого порядка совпадают и приобретают вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c \leqslant 0,$$

причем неравенство заменяется на равенство, если суммарный выпуск $Y^*$ положителен.

Если $p(0) > c$, то в равновесии Курно суммарный выпуск не может быть нулевым, поскольку, подставляя $Y^* = 0$ в условия первого порядка, получаем

$$p(0) - c \leqslant 0.$$

### Существование и единственность равновесия

Таким образом, при $p(0) > c$, выпуск общий положителен и условия первого порядка имеют вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0,$$

Заметим, что существование корня этого уравнения можно гарантировать, если выполнены условия $C_1$–$C_3$ и, кроме того, функция $p(\cdot)$ *непрерывно* дифференцируема, поскольку в этих условиях непрерывная функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ принимает значения разных знаков на концах интервала $[0, \tilde{Y}\,]$.

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $p(y + y')\cdot y$ была вогнута по $y$ при любом $y' \geqslant 0$, то можно утверждать, что $(\dfrac{Y^*}{n}, ..., \dfrac{Y^*}{n})$ — равновесие Курно (выполнено условие второго порядка).

Заметим при этом, что поскольку при сделанном предположении функция $p(y)\,y$ вогнута, то равновесие Курно единственно, поскольку условие первого порядка выполнено в одной точке.

Действительно, функцию $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ можно представить в виде

$$\frac{1}{n}[p(Y) + p'(Y)Y] + p(Y)\frac{n-1}{n} - c.$$

Первое слагаемое здесь не возрастает, а второе убывает при $n > 1$, поэтому функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ убывает и может быть равной нулю не более чем в одной точке.

В точке $Y = 0$ (в которой условие первого порядка может не выполняться как равенство) равновесия быть не может, поскольку, как мы предположили, $p(0) > c$.

### Сравнение равновесия Курно с равновесиями при монополии и совершенной конкуренции

Следует отметить три характеристики равновесия Курно:

1. Объем выпуска $Y^*$ в равновесии Курно выше, чем объем выпуска $y^м$ при монополии (или картеле, когда производители выбирают выпуск, максимизирующий суммарную прибыль).

2. Объем выпуска $Y^*$ в равновесии по Курно ниже, чем объем выпуска $\bar{Y}$ в условиях совершенной конкуренции (ситуации, когда производители рассматривают цены как данные).

3. При росте числа участников объем выпуска в равновесии Курно приближается к равновесию при совершенной конкуренции.

### Теорема 1.

Пусть $(y_1^*, ..., y_n^*)$ — равновесие Курно, и $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$ — равновесие при совершенной конкуренции, $y^м$ — равновесие при монополии.[186] Предположим, что выполнены условия C₁–C₃. Тогда

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i > Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* > y^м$$

***Доказательство.***

Как было показано выше, равновесие Курно удовлетворяет условию

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0.$$

Как было доказано в главе о монополии, выполнение C₁–C₃ гарантирует, что $y^м > 0$, поэтому $y^м$ удовлетворяет условию первого порядка

$$p(y^м) + p'(y^м)y^м - c = 0.$$

С другой стороны, при совершенной конкуренции, как известно, цена равна предельным издержкам:

$$p(\bar{Y}) - c = 0.$$

Вычитая из третьего соотношения первое, получим

$$p(\bar{Y}) - p(Y^*) = p'(Y^*)\frac{Y^*}{n}.$$

Поскольку правая часть соотношения отрицательна, а функция $p(\cdot)$ убывает, то

$$Y^* > \bar{Y}.$$

Предположим, что $y^м > Y^*$. Тогда увеличение выпуска одного из производителей (например, первого) на величину $Y^* - y^м$ приводит к росту суммарной прибыли (до монопольно высокой). Поскольку при этом прибыль остальных производителей может только уменьшиться, прибыль первого возрастает, что противоречит предположению о том, что $Y^*$ — совокупный выпуск в равновесии Курно. ■

## РОСТ ВЫПУСКА С РОСТОМ ЧИСЛА УЧАСТНИКОВ

### Теорема 2.

Предположим, что выполнены условия C₁–C₃ и, кроме того, функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Пусть $Y_n^*$ — суммарный выпуск в равновесие Курно с $n$ участниками. Тогда

$$lim_{n\to\infty} Y_n^* = \bar{Y}.$$

---

[186] Как нетрудно показать, тот же самый объем производства будет выбран, если олигополисты образуют картель (см. ниже).

***Доказательство:***

Для любого $Y_n^*$ выполняются соотношения (условия первого порядка)

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} - c \ = 0.$$

Предыдущая теорема гарантирует ограниченность последовательности $Y_n^*$ ($Y_n^* \in (0, \bar{Y})$). Так как функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то из этого следует ограниченность $p'(Y_n^*)Y_n^*$. Отсюда

$$lim_{n\to\infty}[p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n}] = 0.$$

Следовательно,

$$lim_{n\to\infty}\, p(Y_n^*) = c. \qquad \blacksquare$$

## Свойства равновесия Курно в случае функций издержек общего вида

Вышеприведенные результаты получены при достаточно сильном предположении о функции издержек. Ниже будут приведены естественные обобщения полученных результатов при отказе от этого предположения.

### СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Прежде обсудим условия на функции издержек и функции спроса, при которых равновесие Курно существует.

**Теорема 3**.

Предположим, что в модели Курно выполнены следующие условия:

1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы при всех возможных объемах выпуска (неотрицательных $y$),

2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает при всех неотрицательных $y$,

3) функция $p(y+y')\cdot y$ вогнута по $y$ при любом $y' \geqslant 0$,

4) функции издержек $c_j(y)$ выпуклы (функции предельных издержек не убывают)[187],

5) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, ..., n$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.

Тогда равновесие Курно $(y_1^*, ..., y_n^*)$ существует, причем $0 \leqslant y_j^* < \tilde{y}_j \ \forall j$.[188]

---

[187] Обычно условия 3) и 4) теоремы существования заменяют следующие условия Хана: $p'(Y) + p''(Y)\, y_j < 0$ и $p'(Y) - c_j''(y_j) < 0 \ \forall \ j, Y, y_j$ (Hahn, F. (1962) "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution," *Review of Economic Studies*, **29**, 329-31). Заметим, что они также гарантирует строгую вогнутость функции прибыли и, таким образом, вместе с другими условиями теоремы — существование равновесия Курно. Анализ поведения олигополии в ситуации, когда выполнено условие Хана, оказывается достаточно простым и приводится в задачах. Условие 5) заменяет условие: существуют $\tilde{Y}$ такое, что $p(Y) = 0$ для всех $Y \geqslant \tilde{Y}$. В приводимых ниже доказательствах существования и свойств равновесия Курно акцент делается на свойствах равновесия и рационального поведения, которые можно рассматривать как аналоги выявленных предпочтений.

[188] Условия данной теоремы гарантируют нам существование равновесия Нэша-Курно в чистых стратегиях. Если мы откажемся от предположений 3)-4), то, применяя теорему Гликсберга:

> «Пусть $\langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle$ — игра $m$ лиц в нормальной форме. Если для каждого $i$ $X_i$ — компактное выпуклое подмножество метрического пространства, а $u_i$ — непрерывная функция, тогда в этой игре существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях» —

***Доказательство.***

Доказательство оставляется в качестве упражнения. Ниже приводится возможная схема такого доказательства.

1) Докажите, что при любых (разумных) ожиданиях относительно выпуска конкурентов ни одному из производителей не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_j$. Тем самым, выбор каждого участника может быть ограничен компактным множеством. Можно использовать тот же способ доказательства, что и для монополии. При этом аналогом совокупного излишка будут функции $\int_0^y p(t)dt - c_j(y) - c_j(0)$. При доказательстве удобно учитывать, что для каждой фирмы $j$ суммарный выпуск других фирм $Y_{-j}$ есть константа, поэтому задача максимизации прибыли по $y_j$ сводится к максимизации прибыли по $Y$при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.

2) Докажите непрерывность и вогнутость функции прибыли каждого участника при любых ожиданиях относительно выбора других.

3) Воспользуйтесь теоремой Нэша. ■

Сам факт существования равновесия, хоть и повышает доверие к модели Курно, но мало полезен для анализа олигополистического рынка. Без информации, характеризующей равновесие, модель Курно, как и любая модель, оказывалась бы мало пригодной. Следующие далее утверждения позволяют сравнить равновесие Курно с монопольным равновесием и равновесием в ситуации совершенной конкуренции.

### СРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ КУРНО С РАВНОВЕСИЕМ ПРИ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Нижеследующие результаты дают сравнительную характеристику объемов производства в отрасли при разных типах ее организации.

**Теорема 4**.

(1) Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, ..., y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$, существуют, и обратная функция спроса $p(y)$ убывает. Тогда суммарный выпуск в равновесии Курно, $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, не превышает суммарный выпуск в условиях совершенной конкуренции, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$.

(2) Если, кроме того, выполнены следующие условия:

- обратная функция спроса, $p(y)$, и функции издержек, $c_j(y)$, $j = 1, ..., n$ дифференцируемы при всех неотрицательных $y$, причем $p'(Y^*) < 0$;

- $\exists j$: $p(0) > c_j'(0)$;

- предельные издержки, $c_j'(y)$, неубывают (невозрастающая отдача),

---

(См. Glicksberg, I.L. (1952), "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **38**,170-174, Рус. пер: И. Л. Гликсберг, «Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша», в сб. «Бесконечные антагонистические игры», под ред. Н. Н. Воробьева, Гос. изд. физ.-мат. лит-ры., М. 1963, стр. 493-503), можно доказать существование равновесия в смешанных стратегиях. При этом поменяется только вторая этап доказательства теоремы.

то $Y^*$ меньше $\bar{Y}$.

***<u>Доказательство:</u>***

(1) Поскольку выпуск $y_j^*$ максимизирует прибыль $j$-ого производителя в предположении, что суммарный объем производства остальных равен $Y_{-j}^*$, то должно выполнятся неравенство

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j).$$

С другой стороны, $\bar{y}_j$ дает $j$-му производителю максимум прибыли в предположении, что цена неизменна и равна $p(\bar{Y})$, поэтому

$$p(\bar{Y})\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j) \geqslant p(\bar{Y})\,y_j^* - c_j(y_j^*).$$

Если сложить эти два неравенства, то получается

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*. \quad (*)$$

Предположим, что существует такая фирма $j$, которая в равновесии Курно производила бы больше, чем в конкурентном равновесии:

$$y_j^* > \bar{y}_j.$$

При убывающей функции спроса из этого неравенства следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j) > p(Y^*).$$

Поскольку $\bar{y}_j \geqslant 0$, то из этого следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j.$$

Сложив это неравенство с неравенством (*), получим

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*$$

или

$$[p(Y^*) - p(\bar{Y})]\,(y_j^* - \bar{y}_j) \geqslant 0.$$

Поскольку мы предположили, что $y_j^* > \bar{y}_j$, то

$$p(Y^*) \geqslant p(\bar{Y}).$$

В силу убывания функции спроса это означает, что

$$Y^* \leqslant \bar{Y}.$$

С другой стороны, пусть наше предположение неверно, и для всех фирм выполнено $y_j^* \leqslant \bar{y}_j$. Суммируя по $j$, получаем, что $Y^* \leqslant \bar{Y}$.

(2) Докажем, использовав дополнительные условия, что неравенство здесь строгое. Предположим, что это не так, и суммарные выпуски совпадают, т.е. $Y^* = \bar{Y}$.

Может быть только два случая: либо $y_j^* = \bar{y}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, либо $\bar{y}_j < y_j^*$ для некоторого $j$. И в том и в другом случае существует производитель $j$, для которого $y_j^* > 0$ и $\bar{y}_j \leqslant y_j^*$.

Для этого производителя дифференциальная характеристика равновесия Курно имеет вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,y_j^* = c_j'(y_j^*).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что

$$c'_j(\bar{y}_j) \leqslant c'_j(y_j^*).$$

Таким образом

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\, y_j^* \geqslant c'_j(\bar{y}_j) = p(\bar{Y}).$$

С учетом того, что $Y^* = \bar{Y}$, имеем $p(Y^*) = p(\bar{Y})$, откуда

$$p'(Y^*)\, y_j^* \geqslant 0,$$

что противоречит условию $p'(Y^*) < 0$. Таким образом, $Y^* < \bar{Y}$.

■

### *СИММЕТРИЧНОСТЬ РАВНОВЕСИЯ, ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ВЫПУСКОВ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ*

В частном случае, когда издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$, можно доказать, что в равновесии выпуски всех производителей одинаковы (равновесие будет симметричным), и положительны. Кроме того, в предположении одинаковости издержек несложно доказать единственность равновесия.

**Теорема 5**.

Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует и выполнены следующие условия:

1) издержки у всех производителей одинаковы, $c_j(y) = c(y)$, $j = 1, \ldots, n$, причем предельные издержки $c'(y)$ неубывают;

2) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, дифференцируемы;

3) $p(0) > c'(0)$;

4) $p'(y) < 0 \ \forall y \geqslant 0$.

Тогда верно следующее:

(i) Равновесие симметрично:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

и каждая фирма выпускает в равновесии положительное количество продукции, т.е.

$$y_j^* > 0, \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

(ii) Если, кроме того, функция $p(y)y$ вогнута, то равновесие единственно.

***<u>Доказательство:</u>***

(i) Покажем, что если функции издержек одинаковы, то каждый производитель в равновесии Курно выпускает одинаковое количество продукции. Действительно, предположим, что существуют производители $j$ и $k$, такие что $y_j^* > y_k^*$. Тогда из условий первого порядка следует, что

$$p'(Y^*)\,(y_k^* - y_j^*) \leqslant c'(y_k^*) - c'(y_j^*).$$

Но левая часть данного соотношения положительна, а правая — неположительна. Таким образом, выпуски всех производителей совпадают:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} \ \forall j.$$

Суммарный выпуск отрасли, $Y^*$, не может быть равным нулю. В противном случае из условия первого порядка любого из участников следует, что

$$p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

а это противоречит условию теоремы. Таким образом, $y_j^* > 0, \forall\, j$.

(ii) Дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

или

$$\frac{n{-}1}{n}p(Y^*) + \frac{1}{n}[p(Y^*) + p'(Y^*)Y^*] - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная $p(y) + p'(y)y$ не возрастает. Аналогичным образом, из выпуклости функции $c(y)$ следует неубывание предельных издержек. Учитывая убывание обратной функции спроса $p(y)$, получаем, что выражение в левой части дифференциальной характеристики убывает. Отсюда следует единственность объема $Y^*$, удовлетворяющего данному уравнению. ■

Нижеприведенный пример показывает, что в случае, если функции издержек олигополистов не совпадают, то нельзя гарантировать симметричность равновесия и положительность выпусков; объемы выпуска в модели Курно у некоторых участников могут быть и нулевыми.

**Пример 1.**

Пусть в дуопольной отрасли $p(y) = 4 - 4y$, $c_1(y_1) = 2y_1^2$, $c_2(y_2) = 2y_2^2 + 3y_1$. Легко проверить, что равновесием Курно в этом случае будет точка $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$. ⇦

Еще один пример показывает, что условие дифференцируемости функции спроса важно для симметричности и единственности равновесия Курно.

**Пример 2.**

Пусть в дуопольной отрасли

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{7-y}{6}, & y \leqslant 1, \\ 7 - 6y, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

и $c_j(y) = y^2/4$, $j = 1, 2$. В такой отрасли помимо симметричного равновесия, ($1/2, 1/2$), существует бесконечно много асимметричных равновесий, в которых суммарное производство равно $1$, например, ($1/3, 2/3$).[189] ⇦

---

[189] Заметим, что если выполнены условия теоремы существования (Теорема 3), то при одинаковости функций издержек *всегда* существует симметричное равновесие. В силу симметричности задач олигополистов мы имеем одинаковые отображения отклика $R(y_1, ..., y_{i\text{-}1}, y_{i+1}, y_n)$. Предположим, что $y_k = y_s$, где $k, s \neq i$ и рассмотрим отображение $R(y, ..., y, y, y)$. Оно по теореме Какутани (с помощью которой доказывается теорема Нэша) имеет неподвижную точку, что и доказывает существование симметричного равновесия.

### ПОВЕДЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ КУРНО ПРИ РОСТЕ КОЛИЧЕСТВА ФИРМ

Тот, кто изучал начальный курс микроэкономики, мог встретить неформальное утверждение о том, что если в отрасли достаточно много примерно одинаковых предприятий, так что доля отдельного предприятия в общем выпуске отрасли мала, то каждое предприятие можно рассматривать как не обладающего рыночной властью (принимающего цены как данные[190]), и ситуация в отрасли может быть довольно точно описана моделью совершенной конкуренции. Смысл утверждения состоит в том, что с ростом количества участников олигополии отрасль в некотором смысле все более приближается к конкурентной. Докажем вариант этого утверждения в частном случае, когда в модели Курно издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$.

**Теорема 6**.

Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, ..., y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$, существуют при любом $n \geqslant 2$, и выполнены следующие условия:

1) $c_j(y) = c(y)$, $j = 1, ..., n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;

2) обратная функция спроса $p(y)$ строго убывает, а функция $p(y)\,y$ вогнута[191];

3) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, непрерывно дифференцируемы при всех неотрицательных $y$,

4) $c'(0) > 0$, $p(0) > c'(0)$ и существует величина $Y^\circ$ такая, что $p(Y^\circ) = c'(0)$.

Тогда

(i) суммарный выпуск в равновесии Курно с $n$ участниками, $Y_n^*$, растет с ростом $n$ и меньше величины $Y^\circ$;

(ii) выпуск отдельного участника, $Y_n^*/n$, падает с ростом $n$, причем $lim_{\,n\to\infty} Y_n^*/n = 0$;

(iii) прибыль отдельного участника, $p(Y_n^*)\dfrac{Y_n^*}{n} - c(\dfrac{Y_n^*}{n})$, падает с ростом $n$;

(iv) $lim_{\,n\to\infty} Y_n^* = lim_{\,n\to\infty} \bar{Y}_n = Y^\circ$,

где $\bar{Y}_n$ — суммарный выпуск тех же предприятий в условиях совершенной конкуренции.

***<u>Доказательство:</u>***

Как доказано выше, при сделанных предположениях каждый из участников в равновесии Курно будет выпускать положительное и одинаковое количество продукции:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j,$$

и дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} = c'(\frac{Y^*}{n}).$$

Решение этого уравнение будет единственным (по Теореме 5) равновесием Курно.

(i) Учитывая это соотношение, запишем дифференциальные характеристики равновесий Курно в ситуации с $n+1$ и $n$ олигополистами:

---

[190] англ. *price-taker*

[191] Эта величина равна суммарной выручке предприятий отрасли от продажи продукции в объеме $y$.

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} = c'(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}).$$

и

$$p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} = c'(\frac{Y^*_n}{n}).$$

Используя эти соотношения, мы можем показать, что суммарное выпуск в олигополистической отрасли возрастает с ростом числа олигополистов.

Предположим, обратное: существует такое $n$, что $Y^*_{n+1} \leqslant Y^*_n$. При этом из убывания обратной функции спроса следует, что

$$np(Y^*_{n+1}) \geqslant np(Y^*_n) \quad \text{и} \quad 0 > p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n}.$$

Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е.

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} \geqslant p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Сложив три последние неравенства, получим

$$np(Y^*_{n+1}) + p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} >$$
$$np(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

или

$$(n+1)[p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}] > (n+1)[p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n}].$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой левые части условий первого порядка для $Y^*_{n+1}$ и $Y^*_n$ соответственно, поэтому

$$c'(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}) > c'(\frac{Y^*_n}{n}).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что предельные издержки растут, поэтому данное неравенство может быть выполнено только если

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} > \frac{Y^*_n}{n},$$

но это противоречит исходному предположению о том, что $Y^*_{n+1} \leqslant Y^*_n$. Таким образом, мы доказали, что последовательность объемов производства $Y^*_n$ возрастает по $n$.[192]

Чтобы доказать, что $Y^*_n < Y^\circ$ достаточно доказать, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$, поскольку, согласно Теореме 4, $Y^*_n < \bar{Y}_n$.

Воспользовавшись дифференциальной характеристикой конкурентного равновесия, возрастанием предельных издержек и определением величины $Y^\circ$, запишем

$$p(\bar{Y}_n) = c'(\frac{\bar{Y}_n}{n}) \geqslant c'(0) = p(Y^\circ).$$

---

[192] Величина $Y^*_1$ представляет собой монопольный выпуск, т.е. $Y^*_1 = y^м$. Из доказанного следует, что $Y^*_n > y^м$ при всех $n \geqslant 1$.

Поскольку, по предположению, обратная функция спроса убывает, это означает, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$.

(ii) Мы хотим доказать, что $Y^*_n/n$ является убывающей последовательностью.

Поскольку $p(y)\,y$ — вогнутая функция, то она лежит под своей касательной. Поэтому

$$p(Y^*_{n+1})Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n)Y^*_n + [p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)Y^*_n](Y^*_{n+1} - Y^*_n)$$

или

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]Y^*_{n+1} \leqslant p'(Y^*_n)Y^*_n(Y^*_{n+1} - Y^*_n).$$

Поскольку суммарный выпуск положителен, то это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant (n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}}\,p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n}. \qquad (*)$$

Пусть доказываемое неверно и для какого-то $n$ выполнено

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} \geqslant \frac{Y^*_n}{n},$$

т.е.

$$(n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}} \geqslant 1.$$

Из (*) и последнего неравенства следует в силу того, что $p'(Y^*_n) < 0$, что

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n},$$

поскольку $p'(Y^*_n) < 0$.

Так как $Y^*_{n+1} > Y^*_n$, то из убывания обратной функции спроса при $n \geqslant 2$ следует, что

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)](n - \frac{n+1}{n}) < 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е. при $Y^*_{n+1} > Y^*_n$ выполнено

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Складывая три последние неравенства, получим, что

$$np(Y^*_{n+1}) + p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} <$$

$$np(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Приводя подобные и разделив на $n+1$, получим

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n}.$$

Учитывая дифференциальные характеристики равновесия Курно, это означает, что

$$c'\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}\right) < c'\left(\frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Из выпуклости функции издержек получаем требуемое

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < \frac{Y^*_n}{n}.$$

Далее, убывание выпуска отдельного участника до нуля, т.е.

$$lim_{\,n\to\infty} \frac{Y_n^*}{n} = 0,$$

следует из того, что суммарный выпуск $Y_n^*$ ограничен сверху величиной $Y^\circ$.

(iii) Так как спрос убывает, то при $Y_{n+1}^* > Y_n^*$

$$p(Y_{n+1}^*)\, Y_{n+1}^* < p(Y_n^*)\, Y_{n+1}^*.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$p(Y_{n+1}^*) \frac{Y_{n+1}^*}{n+1} < p(Y_n^*) \frac{Y_n^*}{n} + p(Y_n^*) \left(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} - \frac{Y_n^*}{n}\right).$$

С другой стороны, функция издержек, как выпуклая функция, должна лежать выше своей касательной, поэтому

$$c(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}) \geqslant c(\frac{Y_n^*}{n}) + c'(\frac{Y_n^*}{n}) \left(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} - \frac{Y_n^*}{n}\right).$$

Комбинируя два неравенства, получим, что

$$\Pi_{n+1} < \Pi_n - \left(c'(\frac{Y_n^*}{n}) - p(Y_n^*)\right)\left(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} - \frac{Y_n^*}{n}\right),$$

где мы обозначили через $\Pi_n$ прибыль отдельного участника в отрасли с $n$ фирмами в точке равновесия Курно:

$$\Pi_n = p(Y_n^*) \frac{Y_n^*}{n} - c(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Из условий первого порядка

$$c'(\frac{Y_n^*}{n}) - p(Y_n^*) = p'(Y_n^*) \frac{Y_n^*}{n} < 0.$$

Поскольку $\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} < \frac{Y_n^*}{n}$, то $\Pi_{n+1} < \Pi_n$.

(iv) Запишем еще раз дифференциальную характеристику равновесия Курно:

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*) \frac{Y_n^*}{n} = c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Здесь $Y_n^*$ лежит в интервале $[0, Y^\circ]$. Так как производная обратной функции спроса непрерывна, то первый сомножитель во втором слагаемом — величина ограниченная, на этом интервале она достигает своего максимального значения. Делая оценки, мы можем первый сомножитель заменить его максимальным значением. Второй сомножитель представляет собой величину, которая убывает до нуля при $n \to \infty$. Поэтому

$$lim_{\,n\to\infty}\, p'(Y_n^*) \frac{Y_n^*}{n} = 0.$$ [193]

Так как $Y_n^*/\, n$ стремится к нулю, то в силу непрерывной дифференцируемости функции издержек

---

[193] Т.о. мы видим, что при большом количестве олигополистов, $p(Y_n^*) \approx c'(Y_n^*/n)$, т.е. цена, по которой они продают продукцию, близка к предельным издержкам.

$$c'(\frac{Y_n^*}{n}) \to c'(0).$$

Таким образом,

$$p(Y_n^*) \to c'(0)$$

Вспоминая, что $c'(0) = p(Y^\circ)$, получим из непрерывности и убывания обратной функции спроса, что

$$Y_n^* \to Y^\circ.$$

Поскольку конкурентный объем производства, $\bar{Y}_n$, лежит между $Y_n^*$ и $Y^\circ$, то он стремится к тому же пределу:

$$\bar{Y}_n \to Y^\circ.$$

■

Уменьшение монопольной власти при росте числа конкурентов — это довольно реалистическая, согласующаяся с нашим представлением о монопольной власти картина. Когда производителей много, то каждый из них оказывает малое влияние на рынок, на цену, по которой может продаваться продукция, и поэтому сама модель Курно как модель, описывающая феномен несовершенной конкуренции, оказывается привлекательной.

Следующий пример иллюстрирует приведенные выше утверждения в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек.

**Пример 3**.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j \ (j = 1,..,n)$, так что каждая фирма максимизирует

$$\Pi_j = (a - bY)\, y_j - cy_j.$$

Условия первого порядка максимума прибыли имеет вид

$$a - bY^* - by_j = c.$$

Просуммировав по $j$, получим

$$na - nbY^* - bY^* = nc.$$

Таким образом, равновесный объем выпуска равен

$$Y^* = \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b}.$$

В частности, при дуополии

$$Y^* = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

Равновесная цена равна

$$p^* = a - b\frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a+n\,c}{n+1} = c + \frac{b \quad a - \ c}{n+1 \quad b}$$

Выпуск в случае совершенной конкуренции был бы равен

$$\bar{Y} = \frac{a-c}{b}.$$

То есть, как и следует из теории, $Y^* \leqslant \bar{Y}$. При увеличении количества фирм в олигополии суммарный объем производства все больше сближается с объемом при совершенной конкуренции:

$$lim_{n\to\infty} \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a-c}{b},$$

а цена стремится к предельным издержкам:

$$lim_{n\to\infty} \frac{a+n\,c}{n+1} = c. \qquad \Leftarrow$$

## Равновесие Курно и благосостояние

Рассмотрим олигопольную отрасль, характеристики которой удовлетворяют условиям Теоремы 5, в том числе, все фирмы имеют одинаковые функции издержек, $c(\cdot)$. Как было доказано в Теореме 5, в такой отрасли существует симметричное равновесие Курно, причем объем производства положителен:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} > 0 \;\forall j.$$

Проанализируем это равновесие с точки зрения благосостояния общества.

Предположим, что спрос на продукцию олигополистов в модели Курно получается как результат выбора репрезентативного потребителя с квазилинейной функцией полезности:

$$u(x,\,z) = v(x) + z.$$

Напомним, что в этом случае для положительных $x$ выполнено соотношение (при отсутствии ограничений на знак $z$ или достаточно больших доходах потребителя)

$$p(x) = v'(x).$$

Индикатор благосостояния имеет вид

$$W(Y) = v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n}),$$

а ее производная равна

$$W'(Y) = v'(Y) - c'(\frac{Y}{n}) = p(Y) - c'(\frac{Y}{n}).$$

В равновесии Курно

$$p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} + p(Y^*) \; - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

откуда видна его неоптимальность с точки зрения благосостояния:

$$W'(Y^*) = -p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} > 0.$$

Отсюда следует, что если немного увеличить суммарный выпуск по сравнению с $Y^*$, то благосостояние общества возрастет.

Рассмотрим функцию

$$\breve{W}(Y,n) = \frac{1}{n}\,(p(Y)Y - n\,c(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n})).$$

Ее можно проинтерпретировать, как взвешенное среднее совокупной прибыли и индикатора благосостояния.[194] Покажем, что равновесный объем продаж олигополистического рынка в модели Курно максимизирует данную функцию. Производная этой функции равна

$$\breve{W}'(Y,n) = \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v'(Y) \ - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}\,(p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= p'(Y)\frac{Y}{n} + p(Y) \ - c'(\frac{Y}{n}).$$

Как мы видели, в равновесии Курно ($Y = Y^*$) данная величина равна нулю. Если предположить, как и ранее, вогнутость функции $p(Y)Y$, убывание функции спроса и выпуклость издержек, то производная функции $\breve{W}(Y,\, n)$ убывает по $Y$, поэтому $\breve{W}(Y,\, n)$ строго вогнута по $Y$, откуда следует, что в точке $Y^*$ достигается ее (единственный) максимум.

При $n \to \infty$ доля первого слагаемого в функции $\breve{W}$ стремиться к нулю, а доля второго слагаемого — к единице, так что функция $\breve{W}$ все больше сближается с индикатором благосостояния. Этим определяется тот факт, что при большом количестве фирм равновесие Курно становится похожим на конкурентное равновесие, в котором, как мы знаем, при некоторых условиях индикатор благосостояния достигает максимума.

### Модель Курно и количество фирм в отрасли

Выше, рассматривая поведение выпуска как олигополистического рынка в целом, так и отдельных олигополистов, мы не касались вопроса положительности прибыли, и по этой причине наш анализ поведения этих характеристик нельзя считать вполне удовлетворительным. Возможно, он приемлем для краткосрочной перспективы, но в долгосрочной перспективе анализ должен быть пересмотрен. Любой олигополист сталкивающийся с отрицательной прибылью на некотором рынке при оптимальном поведении вероятнее всего будет рассматривать вопрос об уходе с этого рынка. Аналогично, любой потенциальный производитель решающий вопрос о входе в олигополистическую отрасль, оценивает возможность получения им положительной (неотрицательной) прибыли в случае его входа в отрасль. Как нетрудно догадаться, эти вопросы имеют одну и ту же природу и в простейшей модели, рассматриваемой нами далее, тесно связаны с величиной постоянных (фиксированных) издержек и количеством фирм уже вошедших и действующих в отрасли.

Рассмотрим олигопольную отрасль, в которой у всех олигополистов одинаковые функции издержек. Мы будем предполагать, что выполнены все условия Теоремы 6. Удобно представить издержки каждой фирмы как сумму постоянных издержек, $f > 0$, и переменных издержек, $\tilde{c}(y)$, где $\tilde{c}(0) = 0$:

$$c(y) = f + \tilde{c}(y).$$

Пусть $y^{м}$ максимизирует прибыль монополиста. Мы должны предположить, что постоянные издержки таковы, что монополист действуя на этом рынке, получит неотрицательную прибыль

$$\Pi(y^{м}) \geqslant 0.$$

---

[194] Эта интерпретация предложена в статье Bergstrom, T.C., and H. Varian (1985) "Two Remarks on Cournot Equilibria," *Economic Letters*, **19**, 5-8. К сожалению, данная интерпретация не распространяется на случай неодинаковых функций издержек.

Другими словами, постоянные издержки должны быть не слишком высоки: они не должны превышать прибыль монополиста без учета постоянных издержек:

$$f \leqslant \tilde{\Pi}(y^{м}),$$

где $\tilde{\Pi}(y) = \Pi(y) - f$. (Если это условие не выполнено, то рынок не может существовать, то есть не найдется производителей, желающих производить продукцию на этом рынке.)

Через $\Pi_n$ будем, как и ранее, обозначать прибыль, получаемую отдельной фирмой в отрасли, состоящей из $n$ фирм, а через $\tilde{\Pi}_n$ — прибыль без учета постоянных издержек. При этом $\tilde{\Pi}_1$ — прибыль монополии без учета постоянных издержек.

Как мы доказали ранее, $\Pi_n$ (а, следовательно, и $\tilde{\Pi}_n$) представляет собой убывающую последовательность. При сделанных нами ранее предположениях прибыль $\tilde{\Pi}_n$ положительна (в том числе, $\tilde{\Pi}_1 > 0$) и при увеличении $n$ стремится к $0$ ($\tilde{\Pi}_n \to 0$). Читателю предлагается установить этот факт самостоятельно.

Из убывания и стремления к нулю очевидно, что при $0 < f \leqslant \tilde{\Pi}_1$ существует единственное целое количество фирм в отрасли $n(f)$ такое, что

$$\tilde{\Pi}_{n(f)} \geqslant f > \tilde{\Pi}_{n(f)+1}$$

или

$$\Pi_{n(f)} \geqslant 0 > \Pi_{n(f)+1}.$$

Отметим, что это число единственно в силу строгого убывания прибыли при росте числа олигополистов. Таким образом, для каждого $f$ из промежутка $(0, \tilde{\Pi}_1]$ определена функция $n(f)$. Эта функция сопоставляет каждому значению постоянных издержек максимально возможное число фирм, при котором каждая из них получает неотрицательную прибыль.

Докажем, что эта функция не возрастает по $f$ и не ограничена сверху. Пусть $f' > f''$. Тогда по определению функции $n(f)$ мы имеем, что $\tilde{\Pi}_{n(f')} \geqslant f' > f'' > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$, т.е. $\tilde{\Pi}_{n(f')} > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$ из убывания прибыли по $n$ мы имеем, что $n(f'') +1 > n(f')$ или $n(f'') \geqslant n(f')$. Неограниченность сверху следует из того факта, что $n(\tilde{\Pi}_N) = N$. Сопоставляя эти два свойства функции $n(\cdot)$, получим, что

$$lim_{f \to 0}\, n(f) = \infty.$$

Таким образом, чем меньше постоянные издержки, тем больше фирм может войти в отрасль, и в пределе функционирование отрасли все более приближается к ситуации совершенной конкуренции (в силу Теоремы 6).

Мы представили количество олигополистов на рынке как функцию от постоянных издержек. Естественно также рассмотреть вопрос об оптимальном с точки зрения общества числе олигополистов.[195] Это число должно максимизировать совокупный излишек

$$W(n) = \int_0^{Y_n^*} p(x)dx - nc(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Пусть $\hat{n}$ — оптимальное с точки зрения благосостояния количество фирм в олигополистической отрасли.

---

[195] Следующий далее анализ основывается на статье Mankiw, N.G., M.D. Whinston (1986) "Free Entry and Social Inefficiency," *Rand Journal of Economics*, **17**, 48-58.

Следующие рассуждения показывают, что $n(f) > \hat{n} - 1$. По определению $\hat{n}$ мы имеем, что $W(\hat{n}) \geqslant W(\hat{n} - 1)$, или

$$\int_0^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) \geqslant \int_0^{Y^*_{\hat{n}-1}} p(x)dx - (\hat{n} - 1)c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1})$$

или

$$-\,c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) \geqslant -\int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})].$$

Прибавив к обеим частям $p(Y^*_{\hat{n}-1})\,\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}$, получим

$$\Pi_{\hat{n}-1} \geqslant p(Y^*_{\hat{n}-1})\,\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})).$$

Так как обратная функция спроса убывает, то

$$\int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx \; < \int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(Y^*_{\hat{n}-1})dx = p(Y^*_{\hat{n}-1})(Y^*_{\hat{n}} - Y^*_{\hat{n}-1})$$

Таким образом, имеем

$$\Pi_{\hat{n}-1} > p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - Y^*_{\hat{n}} + Y^*_{\hat{n}-1}) - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})] =$$

$$= \hat{n}\,p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})].$$

В силу выпуклости функции издержек $c(\cdot)$ имеем, что

$$c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) \leqslant c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}).$$

Воспользовавшись этим неравенством, получим

$$\Pi_{\hat{n}-1} > \hat{n}\,p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) - \hat{n}\,c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) =$$

$$= \hat{n}\,(p(Y^*_{\hat{n}-1}) - c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}))(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}).$$

Из условий первого порядка

$$\Pi_{\hat{n}-1} > -\,\hat{n}\,p'(Y^*_{\hat{n}-1})\,\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) > 0.$$

Таким образом мы получили, что

$$\Pi_{\hat{n}-1} > 0.$$

Пусть, как и выше, $n(f)$ — количество фирм в отрасли при постоянных издержках $f$. По определению $0 > \Pi_{n(f)+1}$.

Таким образом, $\Pi_{\hat{n}-1} > \Pi_{n(f)+1}$. В силу строгого убывания прибыли по числу фирм, имеем

$$\hat{n} - 1 < n(f) + 1$$

или

$$n(f) \geqslant \hat{n} - 1.$$

Это означает, что число фирм в отрасли, $n(f)$, не может быть меньше оптимального числа фирм, $\hat{n}$, более чем на 1 фирму. Приведенный ниже пример иллюстрирует случай, когда оптимальное с точки зрения общественного благосостояния количество фирм в отрасли больше, чем при свободном входе для модели Курно.

**Пример 4 (продолжение Примера 3)**.

Для рассмотренного случая, как не трудно получить, прибыль каждого олигополиста равна

$$\Pi_j\,(n) = \frac{(a-c)^2}{b} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} - F.$$

Индикатор благосостояния в зависимости от $n$ равен

$$W(n) = \frac{(a-c)^2}{2b} - \frac{1}{2(n+1)^2} \frac{(a-c)^2}{b} - nF.$$

Легко проверить, что для данного примера $n(F) = \left[\frac{a-c}{\sqrt{bF}}\right] - 1$, где $[\cdot]$ – оператор взятия целой части. В случае если $a = 28$, $b = 10$, $c = 10$, $F = 10$ легко проверить что $n(F) = 0.$ Для этих значений параметров значение индикатора благосостояния при $n$ принимающих значения от $0$ до $2$ равны соответственно $W(0) = 0$, $W(1) = \frac{172}{80}$, $W(2) = -\frac{56}{10}$. Откуда следует, что $\hat{n} = 1$ – точка локального максимума. Непосредственным рассмотрением графика функции $W(n)$ убеждаемся, что $\hat{n} = 1$ – будет глобальным максимумом этой функции (после $n = 2$ эта функция начинает убывать).

⇦

## Задачи

1. Покажите, что в случае внутреннего равновесия

а) индекс Лернера для отдельного олигополиста,

$$\frac{p - c'_j}{p},$$

прямо пропорционален его доле ($\delta_j$) в суммарном выпуске и обратно пропорционален эластичности спроса;

б) средневзвешенный (с весами $\delta_j$) индекс Лернера прямо пропорционален индексу Герфиндаля и обратно пропорционален эластичности спроса.

Индекс концентрации Герфиндаля определяется как

$$H = \sum \delta_j^2.$$

в) Докажите, что при данном количестве фирм в отрасли индекс Герфиндаля минимален в симметричном равновесии.

г) Рассмотрите симметричные равновесия в «симметричной» отрасли с постоянной эластичностью спроса. Объясните, почему средний индекс Лернера обратно пропорционален количеству олигополистов.

2. Докажите, что в равновесии Курно прибыль любой фирмы ниже, чем в случае, когда эта фирма является монополистом на том же рынке. (Имеется в виду нетривиальное равновесие Курно, когда хотя бы одна другая фирма имеет ненулевой объем производства.)

3. Докажите существование равновесия в модели Курно, используя приведенные в тексте указания.

4. Докажите, что если функция спроса убывает и вогнута, а функция издержек выпукла, обе они дважды непрерывно дифференцируемы, то выполняется следующее условие (условие Хана)

$$p'(Y) + p''(Y)\,y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c''_j(y_j) < 0 \ \forall\ j, Y, y_j.$$

5. Докажите, что если обратная функция спроса убывает и вогнута, то отображение отклика каждого производителя не возрастает, т.е. если $Y^1_{-j} < Y^2_{-j}$, то для любых $y^1_j \in R_j(Y^1_{-j})$ и $y^2_j \in R_j(Y^2_{-j})$ выполнено $y^1_j \geqslant y^2_j$.

*Указание*. Воспользуйтесь тем, что

$$\Pi_j(Y^1_{-j}, y^1_j) \geqslant \Pi_j(Y^1_{-j}, y^2_j) \text{ и } \Pi_j(Y^2_{-j}, y^2_j) \geqslant \Pi_j(Y^2_{-j}, y^1_j).$$

Предположите противное ($y^1_j < y^2_j$) и используйте определение вогнутости функции.

6. Предположим, что обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c_j(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию:

$$p'(Y) + p''(Y)\,y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c''_j(y_j) < 0 \ \forall\ j, Y, y_j. \qquad (*)$$

Докажите что при этих предположениях существует единственное равновесие Курно, а если, кроме того, функции издержек всех производителей одинаковы, это равновесие симметрично, т.е. $y^*_j = y^*_i \ \forall\ j, i$

*Указание*. Рассмотрите функции двух переменных

$$T_j(Y, y_j) = p(Y) + p'(Y)\,y_j$$

Заметим, что если $(y^*_1,\ldots, y^*_n)$ — равновесие Курно, то

$$T_j(Y^*, y^*_j) \leqslant 0,$$

причем

$$T_j(Y^*, y^*_j) = 0, \text{ если } y^*_j > 0,$$

где $Y^* = \sum_j y^*_j$.

(1) Покажите, что в условиях (*) функции $T_j(Y^*, y^*_j)$ монотонно убывают по обеим переменным. Обозначим это предположение (**).

(2) Пусть существуют два равновесия Курно, такие что для суммарных объемов производства выполнено $Y^1 \geqslant Y^2$. Докажите от противного, используя (**), что $y_j^1 \leqslant y_j^2 \ \forall j$. Таким образом, суммарный объем производства в двух равновесиях Курно должен совпадать. Рассмотрите случай $Y^1 = Y^2$ и докажите, что $y_j^1 = y_j^2 \ \forall j$.

(3) Докажите симметричность равновесия.

7. Пусть так же, как и в предыдущей задаче, выполнено предположение (**). Рассмотрите внутренние равновесия Курно при $n$ и $n{+}1$ участниках. Покажите, что $\overset{*}{Y}_{n+1} > \overset{*}{Y}_n$ и $\overset{*}{y}_{j,n+1} < \overset{*}{y}_{j,n}$.

8. Предположим, что предельные издержки у всех производителей постоянны и выполнено предположение (**).

Покажите, что если предельные издержки одного из производителей сокращаются при неизменных предельных издержках других производителей, то их выпуск в равновесии Курно сокращается, а совокупный выпуск возрастает.

9. Предположим, что выполнено условие (*), функции издержек олигополистов одинаковы и средние издержки не убывают. Тогда благосостояние (измеряемое величиной совокупного излишка) возрастает при росте числа фирм в отрасли.

10. Покажите, что если в дуополии Курно предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то в равновесии первый производит меньше, чем второй.

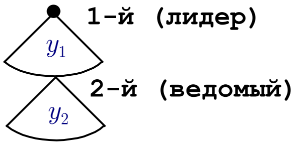
11. Пусть издержки олигополистов в модели Курно постоянны $c_j(y_j) = C_j$, а обратная функция спроса равна

$$p(y) = \exp(-y).$$

Показать, что у игроков есть доминирующие стратегии, и найти их. Как будет изменяться суммарный выпуск отрасли с увеличением числа продавцов?

12. Докажите, что если постоянные издержки олигополистов равны $0$, а переменные издержки одинаковы, то прибыль олигополистов положительна и при росте числа олигополистов стремится к $0$.

## Модель дуополии Штакельберга



$$\begin{pmatrix} \Pi_1 = y_1 p(y_1 + y_2) - c_1(y_1) \\ \Pi_2 = y_2 p(y_1 + y_2) - c_2(y_2) \end{pmatrix}$$

Рисунок 113. Дуополия Штакельберга

В модели дуополии, предложенной Генрихом фон Штакельбергом,[196] первый участник выбирает производимое количество, $y_1$, и является **лидером**. Под этим мы подразумеваем то, что второй участник (**ведомый**) рассматривает объем производства, выбранный первым участником, как данный. Другими словами, второй участник сталкивается с остаточным спросом, который получается вычитанием из исходного спроса величины $y_1$. Ориентируясь на этот остаточный спрос, второй участник выбирает свой объем производства, $y_2$ (или цену, что в данном случае одно и то же). Лидер «просчитывает» действия ведомого, определяет, какая цена устанавливается на рынке при каждом $y_1$, и исходя из этого максимизирует свою прибыль. В остальном модель повторяет модель Курно.

Эта модель приложима, например, к ситуации, когда в новой отрасли лидирующая фирма выбирает размер строящегося завода (мощность) и решает «работать на полную мощность». Считается, что она хорошо описывает рыночную ситуацию в случае, когда фирма-лидер, занимает значительную долю рынка. Так или иначе, ситуации, представленные в модели не столь и редки на реальных рынках. С точки зрения теории игр модель Штакельберга представляет собой динамическую игру с совершенной информацией, в которой лидер делает ход первым. Дерево игры изображено на Рис. 113.

Выпуски $(y_1^S,\ y_2^S)$, соответствующие совершенному в подыграх равновесию этой модели принято называть **равновесием Штакельберга**. Вектор выпусков не есть собственно совершенное в подыграх равновесие. По определению совершенное в подыграх равновесие — это набор стратегий, $(y_1^S,\ r_2^S(\cdot))$, где $r_2^S(\cdot)$ — равновесная стратегия ведомого игрока. (Стратегия ведомого игрока должна быть функцией $r_2(y_1)$, которая сопоставляет каждому ходу лидера некоторый отклик.)

**Определение 2.**

Вектор выпусков $(y_1^S,\ y_2^S)$, называется равновесием Штакельберга, если существует функция (представляющая равновесную стратегию ведомого)

$$r_2^S(\cdot)\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+,$$

такая, что выполнены два условия:

1) Выпуск $y_2 = r_2^S(y_1)$ максимизирует прибыль ведомого на $[0,\ +\infty)$ при любом выпуске лидера, $y_1 \geqslant 0$.

2) Выпуск $y_1^S$ является решением следующей задачи максимизации прибыли лидера:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max{}_{y_1 \geqslant 0}.$$

Равновесие Штакельберга находят с помощью обратной индукции. Лидер, назначая выпуск, рассчитывает отклик ведомого, $R_2(y_1)$. Отклик будет таким же, как в модели Курно. Вообще говоря, отклик может быть неоднозначным. Тогда различные функции $r_2(y_1)$, удовлетворяющие условию:

$$r_2(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1$$

могут задавать различные равновесия.

---

[196] Von Stackelberg, H. *Marktform und Gleichgewicht*. Wien: Springer, 1934.

Мы будем далее предполагать, если не оговорено противное, что оптимальный отклик однозначен, т.е. $R_2(y_1)$ — функция[197]. Задача лидера в этом случае имеет вид:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + R_2(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max\nolimits_{y_1 \geqslant 0}.$$

Если решением этой задачи является $y_1^S$, и $y_2^S = R_2(y_1^S)$, то $(y_1^S,\, y_2^S)$ — равновесие Штакельберга.

Дуополию Штакельберга можно представить графически (см. Рис. 114). Разницу между равновесиями в моделях Курно и Штакельберга иллюстрирует Рисунок 115. Лидер выбирает точку на кривой отклика, которая бы максимизировала его прибыль. В равновесии кривая равной прибыли лидера касается кривой отклика.

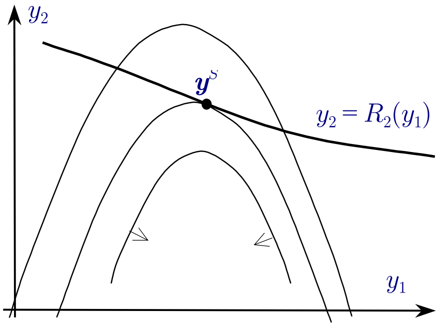


Рисунок 114

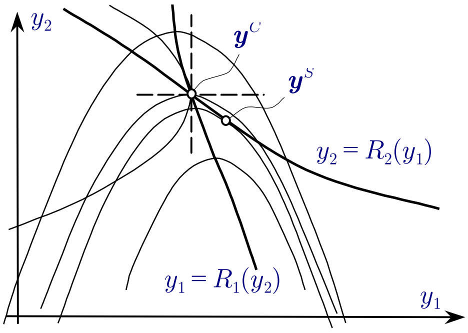


Рисунок 115

## Существование равновесия Штакельберга

Докажем теперь теорему существования равновесия в модели Штакельберга.

**Теорема 7**.

Предположим, что в модели Штакельберга выполнены следующие условия:

1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы,

2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает,

3) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, 2$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.

Тогда равновесие Штакельберга $(y_1^S,\, y_2^S)$ существует, причем $0 \leqslant y_j^S < \overline{y}_j$.

---

[197] Однозначность отклика можно, например, гарантировать, если выполнено условие Хана (см. сноску 187).

***Доказательство.***

Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство существования равновесия при монополии.

1) Докажем, что при любых ожиданиях относительно выпуска лидера ведомому не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_2$, в том смысле, что $\Pi_2(y_1, y_2) < \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2)$ $\forall y_1$ при $y_2 > \tilde{y}_2$. Рассмотрим разность прибылей:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) = p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - (c_2(y_2) - c_2(\tilde{y}_2)).$$

Эту разность можно преобразовать следующим образом:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) =$$

$$= p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} p(y_1 + t)dt + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(y_1 + t) - c_2'(t)]dt.$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y_1 + y_2) < p(y_1 + t)$ при $t < y_2$ и $p(y_1 + t) \leqslant p(t)$ при $y_1 \geqslant 0$, поэтому

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) <$$

$$< p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - p(y_1 + y_2)(y_2 - \tilde{y}_2) + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt =$$

$$= (p(y_1 + y_2) - p(y_1 + \tilde{y}_2))\, \tilde{y}_2 + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt < 0.$$

Таким образом, прибыль ведомого при $y_2 = \tilde{y}_2$ выше, чем при выпуске любого большего количества. Тем самым, исходная задача выбора ведомого (при любом наперед заданном $y_1 \geqslant 0$) эквивалентна задаче выбора на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Другими словами, отображение отклика исходной задачи совпадает с отображением отклика в задаче максимизации прибыли ведомого на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Обозначим множество решений модифицированной задачи при данном $y_1$ через $\tilde{R}_2(y_1)$. Тем самым определено отображение отклика $\tilde{R}_2$: $\mathbb{R}_+ \mapsto [0, \tilde{y}_2]$. Мы доказали, что $\tilde{R}_2(y_1) = R_2(y_1)$ $\forall y_1$.

По Теореме 9 из Приложения (стр. 547) для любого $y$ множество решений $\tilde{R}_2(y)$ непусто и компактно, и, кроме того, отображение $\tilde{R}_2(\cdot)$ полунепрерывно сверху. (Читателю предоставляется проверить самостоятельно, что эта теорема применима в данном случае.) В силу совпадения $\tilde{R}_2(\cdot)$ и $R_2(\cdot)$ теми же свойствами будет обладать и $R_2(\cdot)$.

2) Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\Pi_1(y_1, y_2) = y_1 p(y_1 + y_2)\, y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1, y_2 \geqslant 0}. \qquad (\bullet)$$

$$y_2 \in R_2(y_1).$$

Докажем, что решение этой задачи существует.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и для функции прибыли ведомого, можно показать, что при любом наперед заданном $y_2 \geqslant 0$ прибыль лидера в точке $y_1 = \tilde{y}_1$ больше, чем во всех точках $y_1 > \tilde{y}_1$. Таким образом, множество решений задачи (•) не изменится, если в нее дополнительно включить ограничение $y_1 \leqslant \tilde{y}_1$.

Таким образом, нам требуется, чтобы существовало решение задачи максимизации прибыли лидера по $y_1$ и $y_2$ на множестве

$$\mathcal{R} = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in [0, \tilde{y}_1], y_2 \in R_2(y_1) \subset [0, \tilde{y}_2]\}.$$

Из доказанных свойств отображения $R_2(\cdot)$ следует, что множество $\mathcal{R}$непусто, замкнуто и ограничено. Существование решения такой задачи следует из теоремы Вейерштрасса.

3) Пусть $(y_1^S, y_2^S)$ — некоторое решение задачи (•). Теперь выбрав любую функцию $r_2^S(y_1)$, график которой проходит через точку $(y_1^S, y_2^S)$, и такую что

$$r_2^S(y_1) \in R_2(y_1) \ \forall y_1,$$

увидим, что выпуск $y_1^S$ является решением задачи лидера

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max{}_{y_1 \geqslant 0}.$$

Действительно, этот выпуск максимизирует цели лидера на всем допустимом множестве задачи (•), а значит — и на множестве, суженном дополнительным ограничением $y_2 \in r_2^S(y_1)$. Тем самым пара $y_1^S, r_2^S(\cdot)$ удовлетворяет определению равновесия Штакельберга. ■

## Равновесие Штакельберга и равновесие Курно

Представляется интересным сравнить объемы производства в модели Курно и в модели Штакельберга. Результат сравнения для ведомого однозначен: в модели Штакельберга он производит меньше. Покажем это.

Пусть $y_1^C$ и $y_2^C$ — объемы производства в модели Курно.

Лидер в модели Штакельберга в предположении однозначности отклика ведомого всегда может обеспечить себе такую же прибыль, как в модели Курно, назначив $y_1 = y_1^C$, поэтому

$$p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S)\, y_1^S - c_1(y_1^S).$$[198]

Поскольку $y_1^C$ максимизирует прибыль лидера при $y_2 = y_2^C$, то

$$p(y_1^S + y_2^C)\, y_1^S - c_1(y_1^S) \leqslant p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C).$$

Если $y_1^S > 0$, то из этих двух неравенств следует, что

$$p(y_1^S + y_2^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S).$$

Из убывания спроса имеем, что

$$y_2^C \geqslant y_2^S.$$

Результат сравнения между объемами производства лидера в двух ситуациях зависит от наклона кривой отклика. В случае, если $R_2(\cdot)$ убывает (на достаточно большом интервале, который должен заведомо включать, как $y_2^C$ так и $y_2^S$), имеем

$$y_1^C \leqslant y_1^S.$$

Если же $R_2(\cdot)$ возрастает, то, наоборот,

---

[198] Данное неравенство получено как сравнение прибылей лидера при выборе им объемов выпуска $y_1^S$ и $y_1^C$. Отметим, что при этом оптимальным откликом ведомого на $y_1^S$ будет $y_2^S$, а на $y_1^C$ – $y_2^C$.

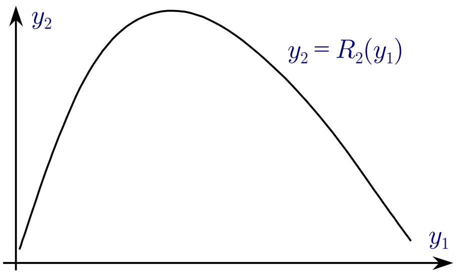


Рисунок 116

$$y_1^C \geqslant y_1^S.$$

Функция $R_2(\cdot)$ убывает, например, в случае линейного спроса и постоянных предельных издержек. Пример возрастающей функции отклика построить достаточно трудно. На Рис. 116 показана кривая отклика, соответствующая обратной функции спроса $p(y) = 1/y^2$ при постоянных предельных издержках. При малых объемах производства лидера она возрастает, а при больших — убывает. Для более общего случая рассмотрим теорему.

**Теорема 8**.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c_2(y)$, дважды дифференцируемы,

2) обратная функция спроса имеет отрицательную производную: $p'(y) < 0$, $\forall y \geqslant 0$,

3) $p'(y_1 + y_2) - c_2''(y_2) < 0$ при любых $y_1$ и $y_2$,

4) отклик $R_2(y_1)$ является дифференцируемой функцией.[199]

Тогда в тех точках $y_1$, где $R_2(y_1) > 0$, наклон функции отклика $R_2(y_1)$, удовлетворяет условию

$$-1 < R_2'(y_1)\ ,$$

то есть суммарный выпуск $R_2(y_1) + y_1$, возрастает.

Дополнительное условие[200]

$$p'(y_1 + y_2) + p''(y_1 + y_2)\,y_2 < 0 \quad \forall y_1, y_1$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $R_2'(y_1) < 0$.

***<u>Доказательство.</u>***

При принятых предположениях докажем, что суммарный выпуск дуополии, $y_1 + R_2(y_1)$, возрастает по $y_1$. Функция $R_2(y_1)$ при всех $y_1$ таких, что $R_2(y_1) > 0$ удовлетворяет условию первого порядка — равенству

$$p(y_1 + R_2(y_1)) + p'(y_1 + R_2(y_1))\cdot R_2(y_1) = c_2'(R_2(y_1)).$$

Дифференцируя это соотношение по $y_1$, получим

$$p'(y_1 + R_2(y_1))\cdot(1 + R_2'(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1))R_2(y_1)\cdot(1 + R_2'(y_1)) +$$
$$+ p'(y_1 + R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1) = c_2''(R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1).$$

Отсюда

---

[199] Однозначность и дифференцируемость отклика рассмотрены в Приложении.

[200] Это условие, в частности, следует из строгой выпуклости функции потребительского излишка. Напомним, что это одно упоминавшихся ранее условий Хана.

$$(1+R_2'(y_1))\cdot[2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))]=$$
$$=p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1)).$$

По условию второго порядка

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\leqslant 0.$$

С другой стороны, по предположению

$$p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))\ <0.$$

Это гарантирует, что

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\neq 0$$

Получаем, что

$$1+R_2'(y_1)=$$
$$=\frac{p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))},\qquad (*)$$

откуда $1+R_2'(y_1)>0$ или $R'_2(y_1)>-1$ .

Докажем теперь неубывание функции отклика $R_2(y_1)$. Условие (*) можно переписать в виде

$$R_2'(y_1)=-\frac{p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))}.$$

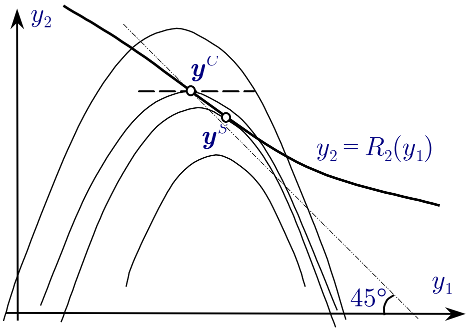


Рисунок 117

В этой дроби знаменатель отрицателен, поэтому условие $R_2'(y_1)<0$ эквивалентно отрицательности числителя, что и требовалось. ■

Пользуясь полученным ранее результатом, получим, что если $R_2(\cdot)$ убывает, то

$$y_1^C+y_2^C\leqslant y_1^S+y_2^S,$$

а если возрастает, то

$$y_1^C+y_2^C\geqslant y_1^S+y_2^S.$$

В первом случае равновесная цена в равновесии Штакельберга не превышает равновесную цену в равновесии Курно, во втором — наоборот.

Иллюстрация полученных соотношений для случая убывающей кривой отклика представлена на Рис. 117. Из рисунка видно, что поскольку точка равновесия в модели Штакельберга лежит ниже кривой равной прибыли, проходящей через точка равновесия в модели Курно, то объем $y_2^C$ должен быть выше $y_2^S$. Из-за убывания функции отклика объем $y_1^C$ оказывается ниже $y_1^S$. Штрих-пунктирная линия, проходящая под углом 45° показывает расположение точек, в которых суммарный выпуск одинаков. Поскольку кривая отклика более пологая, то $y_1^C + y_2^C$ оказывается меньше $y_1^S + y_2^S$.

Можно сравнить также прибыли участников в двух ситуациях. Как уже упоминалось ранее, по очевидным причинам прибыль лидера в модели Штакельберга выше. Читателю предлагается доказать самостоятельно простой факт, что прибыль ведомого в модели Штакельберга выше в случае возрастающей функции отклика, и ниже в случае убывающей функции отклика.

**Пример 5.**

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек дуополистов имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1{,}2)$. Функция отклика второго равна

$$R_2(y_1) = \frac{a-c-by_1}{2b}.$$

Подставив ее в прибыль лидера, получим

$$\Pi_1 = \frac{a-c}{2} y_1 - \frac{b}{2}(y_1)^2.$$

Максимум достигается при

$$y_1^S = \frac{a-c}{2b}.$$

Кроме того, в равновесии

$$y_2^S = \frac{a-c}{4b}.$$

Суммарный выпуск равен

$$y_1^S + y_2^S = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$$

Это больше, чем выпуск в модели Курно, но меньше, чем выпуск при совершенной конкуренции, то есть имеется неоптимальность. ⇦

## Приложение

Рассмотрим параметрическую задачу условной максимизации:

$$f\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \max{}_y$$

$$\boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}), \qquad \text{(P)}$$

где $\boldsymbol{x} \in S \subset \mathbb{R}^m$, $\beta(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $m(\boldsymbol{x})$ значение целевой функции в максимуме:

$$m(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x})\},$$

а через $r(\boldsymbol{x})$ — множество оптимальных решений при параметрах $x$:

$$r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = m(\boldsymbol{x})\}.$$

Относительно решений этой задачи верна следующая теорема:[201]

**Теорема 9**.

Пусть отображение $\beta(\boldsymbol{x})$ компактнозначно и непрерывно, а $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — непрерывная функция. Тогда

а) функция $m(\boldsymbol{x})$ непрерывна;

б) для любого $\boldsymbol{x} \in S$ множество $r(\boldsymbol{x})$ не пусто и компактно, причем $r(\cdot)$ полунепрерывно сверху.

Условия существования и дифференцируемости функции отклика могут быть получены на основе следующей теоремы.

**Теорема 10.**

Рассмотрим задачу (P) с постоянным отображением $\beta(x) = \beta$. Предположим, что существует пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такая что $\bar{\boldsymbol{y}} \in r(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{y}} \in int(\beta)$. Предположим, кроме того, что функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута по $\boldsymbol{y}$ в некоторой окрестности точки $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, и $|\nabla^2_{yy} f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})| \neq 0$. Тогда решение задачи (P) существует и единственно при любых $\boldsymbol{x}$ из некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, причем функция $r(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

***Доказательство.***

По условию $\bar{\boldsymbol{y}}$ — внутренняя точка в задаче (P) при $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$. Это означает, что пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ удовлетворяет условиям первого порядка:

$$\nabla_y f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0.$$

Условия теоремы гарантируют выполнение всех предположений теоремы о неявной функции относительно соотношения

$$\nabla_y f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

и поэтому существует удовлетворяющая этому соотношению функция $\boldsymbol{y} = \bar{r}(\boldsymbol{x})$, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ и непрерывно дифференцируемая в этой окрестности. Из непрерывности $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ следует, что существует окрестность точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, в которой $\bar{r}(\boldsymbol{x}) \in \beta$.

Поскольку $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям первого порядка и функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ строго вогнута по $\boldsymbol{y}$, то $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ является единственным решением задачи (P) при данном $\boldsymbol{x}$. ■

## Задачи

13. Две фирмы, конкурируя на рынке, выбирают объемы производства. Известно, что для этих фирм равновесный объем производства в модели Курно совпадает с равновесным объемом производства в модели Штакельберга. Каков наклон кривых отклика в этой общей точке равновесия? Пояснить графически с использованием кривых отклика и кривых равной прибыли.

---

[201] См. В. Гильденбранд, «Ядро и равновесие в большой экономике». — М.: Наука, 1986, с. 31.

14. Рассмотрим отрасль с двумя фирмами. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{1}{Y},$$

и обе фирмы имеют постоянные предельные издержки $c_j$ ($0 < c_j < 1$). При каких условиях равновесие в модели Штакельберга совпадает с равновесием в модели Курно? Изобразите эту ситуацию на диаграмме (в том числе поведение функций отклика).

15. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки равные $2$. Предполагается, что они конкурируют как в модели Штакельберга. Спрос в отрасли задан обратной функцией спроса $P(Y) = 16 - 0.5Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

16. Рассмотрим дуополию, в которой у $1$-й фирмы предельные издержки нулевые, а функция издержек $2$-й фирмы равна

$$c_2(y) = \alpha y^2,$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Обратная функция спроса в отрасли равна

$$P(Y) = 1 - Y.$$

Покажите, что при $\alpha \to \infty$ равновесие Курно сходится к равновесию Штакельберга в том смысле, что

$$\frac{y_1^S(\alpha)}{y_1^C(\alpha)} \to 1, \qquad \frac{y_2^S(\alpha)}{y_2^C(\alpha)} \to 1.$$

17. Докажите Теорему 7 (стр. 541), воспользовавшись указаниями, приведенными в тексте.

18. Докажите, что прибыль ведомого в модели Штакельберга при прочих равных условиях выше, чем в модели Курно, в случае возрастающей функции отклика и ниже в случае убывающей функции отклика.

19. Два олигополиста продают свою продукцию на рынках близких благ, выбирая объемы производства. Их обратные функции спроса равны $p_1 = 2 - y_1 + y_2$ и $p_2 = 3 - y_2 + y_1$, а предельные издержки равны $1$ и $2$ соответственно. Найти равновесие при одновременном и при последовательном выборе объемов производства.

## Картель и сговор

В этом параграфе мы сравним результаты некооперативного поведения фирм в отрасли в соответствии с моделью Курно с результатами кооперативного поведения. Как известно, если количество фирм в отрасли мало, то они могут заключить между собой соглашение с целью ослабления конкуренции и увеличения прибыли. Мы начнем с анализа, который показывает, что у фирм, конкурирующих по Курно, есть потенциал для взаимовыгодного соглашения, а затем перейдем рассмотрению двух вариантов таких соглашений.

### Неоптимальность равновесия Курно с точки зрения олигополистов

В равновесии Курно объем производства с точки зрения олигополистов неоптимален. Другими словами, если любая из фирм (немного) снизит свой выпуск, то общая прибыль вырастет. Этого уже достаточно, чтобы показать неоптимальность, ведь прирост прибыли можно перераспределить между олигополистами так, чтобы в конечном счете ни у кого из них прибыль бы не уменьшилась. Можно, однако, доказать более сильный факт: если по крайней мере два олигополиста уменьшат свой объем производства (на достаточно малую величину), то прибыль у всех олигополистов вырастет. Т.е. в данном случае не нужно никакого перераспределения прибыли, чтобы улучшить положение всех производителей.

Предположим, что объемы производства изменились на $dy_j \leqslant 0$, причем хотя бы для двух участников неравенство здесь строгое. Как при этом изменится прибыль $j$-го участника? Напомним, что прибыль $j$-го участника равна

$$\Pi_j(y_j) = p(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot y_j - c_j(y_j).$$

Беря полный дифференциал в точке равновесия Курно, получим

$$d\Pi_j = p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i=1}^{n} dy_i) + p(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot dy_j - c_j'(y_j^*) \cdot dy_j =$$

$$= p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i\neq j} dy_i) + \left(p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* + p(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) - c_j'(y_j^*)\right) \cdot dy_j.$$

Из условия первого порядка следует, что второе слагаемое равно нулю. Поскольку по крайней мере два олигополиста уменьшили свой объем производства, то $\sum_{i\neq j} dy_i < 0$. При естественных предположениях, что функция спроса строго убывает и у всех монополистов объемы производства в равновесии Курно положительны, получим, что $d\Pi_j > 0$.[202]

Проиллюстрировать ситуацию и показать, что олигополия Курно выпускает больше оптимального количества продукции (с точки зрения ее участников) для случая дуополии можно графически (Рис. 118). Поскольку, в любой точке любой кривой отклика касательная к кривой равной прибыли параллельны осям, то в точке равновесия Курно касательные к кривым равной прибыли перпендикулярны друг другу, и поэтому возможен сдвиг, который увеличивает прибыль обоих олигополистов (на рисунке показан стрелкой).

### Сговор

Рассматривая возможности соглашений между олигополистами относительно объемов выпуска (квот на производство продукции) будем различать два случая — картель и сговор.

---

[202] Заметим, что поскольку дифференциалы прибыли всех участников отрицательны, то прибыль возрастает при достаточно небольшом (конечном) сокращении выпусков. Поэтому приведенное доказательство утверждения можно легко обобщить на случай конечных сокращений выпусков.

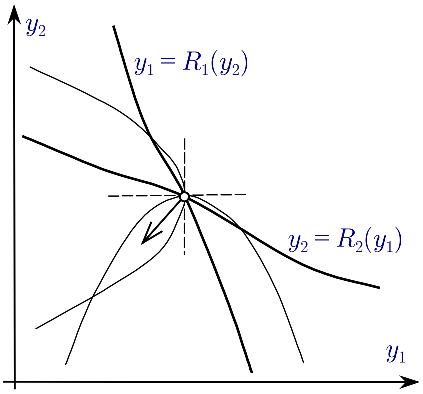


Рисунок 118

Если допустимо перераспределение прибыли между олигополистами, то им выгодно выбирать объемы производства, максимизирующие суммарную прибыль. Мы будем называть такое объединение **картелем**. [203]

Напротив, если такое перераспределение по каким-то причинам неосуществимо, то будем называть такой тип соглашений **сговором** о квотах выпуска.

Сначала мы рассмотрим модель сговора. Определим возможную точку сговора как точку $\check{y}_1, ..., \check{y}_n \geqslant 0$, которая удовлетворяет двум условиям:

1) Каждый участник в точке сговора получает прибыль не меньшую, чем его прибыль в равновесии Курно:

$$\Pi_j(\check{y}_1, ..., \check{y}_n) \geqslant \Pi_j(\overset{*}{y_1}, ..., \overset{*}{y_n}), \forall j.$$

2) точка сговора является эффективной (лежит на границе Парето[204] игры без перераспределения прибыли), то есть не существует другой точки $y_1, ..., y_n \geqslant 0$, дающей всем не меньшую прибыль, а по крайней мере одной из фирм — большую.

Как правило, таких точек может быть много (см. отрезок $AB$ на Рис. 119). Назовем соответствующее множество **переговорным множеством**. Какая именно точка будет выбрана, зависит от процедуры переговоров и переговорной силы участников. Процедуру переговоров (торг) можно представлять как некоторую некооперативную игру, но эта игра остается за рамками модели.

Заметим также, что поскольку, вообще говоря, равновесий Курно может быть несколько, то переговорное множество зависит от того, какое из равновесий Курно участники считают за исходную точку (точку угрозы).

---

[203] В терминах кооперативной теории игр картель является точкой ядра в игре с трансферабельностью выигрышей. Имеется в виду ядро только с точки зрения целевых функций олигополистов.

[204] Имеется в виду Парето-граница олигополии, но не экономики в целом.

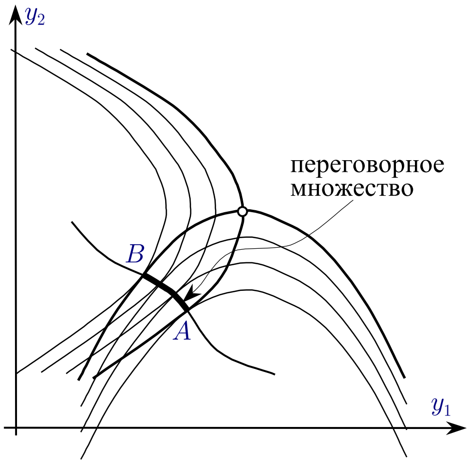


Рисунок 119

Как правило, сговор состоит в том, что участники договариваются о квотах выпуска для того, чтобы уменьшить суммарный выпуск и поднять рыночную цену. На Рис. 119 видно, что суммарный выпуск во всех точках переговорного множества ниже, чем в равновесии Курно: если через точку равновесия Курно провести прямую $y_1 + y_2 = y_1^* + y_2^*$, то переговорное множество будет лежать ниже этой прямой. Следующее утверждение формализует эту идею.

**Теорема 11.**

Пусть при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0\ \forall j$, и обратная функция спроса убывает. Тогда суммарный выпуск при сговоре не превышает суммарный выпуск в соответствующем равновесии Курно:

$$\check{Y} \leqslant Y^*,$$

а равновесная цена при сговоре не меньше цены в соответствующем равновесии Курно:

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y^*).$$

***Доказательство.***

По определению сговора, прибыль каждого участника не ниже, чем в равновесии Курно:

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j) \geqslant p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*)$$

С другой стороны, при выборе $y_j = y_j^*$ участник $j$ должен получить не меньшую прибыль, чем при выборе $y_j = \check{y}_j$, если суммарный выпуск остальных такой же, как в равновесии Курно ($Y_{-j}^*$):

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j.$$

Мы предположили, что $\check{y}_j > 0$, поэтому

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}).$$

Из убывания функции спроса $\check{Y}_{-j} \leqslant Y_{-j}^*$. Это неравенство верно для всех $j$. Суммируя эти неравенства и деля на $n - 1$, получаем $\check{Y} \leqslant Y^*$. ■

Дифференциальная характеристика точки сговора может быть получена из задачи поиска Парето-оптимума без перераспределения прибыли.[205] Точка $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$ Парето-оптимальна, если для любого $j$ она является решением задачи

$$\Pi_j(y_1, \ldots, y_n) \to \max$$

$$\Pi_i(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \Pi_i(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n),\ i \neq j.$$

$$y_1, \ldots, y_n \geqslant 0.$$

По теореме Куна-Таккера[206] для внутреннего решения $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n > 0$ существуют множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, где $\lambda_j > 0$, такие что выполнены условия первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = 0\ \forall k.$$

В случае двух фирм эта дифференциальная характеристика означает, что кривые равной прибыли касаются друг друга (см. Рис. 119). Дифференциальную характеристику можно переписать в виде:

$$p'(\check{Y})\cdot\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \check{y}_i + \lambda_k [p(\check{Y}) - c'_k(\check{y}_k)] = 0\ \ \forall k.$$

Поскольку $\lambda_j > 0$, то из $p'(y) < 0$ следует, что первое слагаемое не равно нулю, и что все множители Лагранжа положительны.

Пользуясь этими соотношениями, докажем, что сговор неустойчив, если нет каких-то механизмов, принуждающих к выполнению соглашений. Конкретнее, подразумевается, что если в точке сговора любая фирма немного увеличит свой выпуск, то ее прибыль возрастет.

**Теорема 12.**

Пусть

1) при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0$ $\forall j$,

2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема, причем $p'(\check{Y}) < 0$;

3) функции издержек дифференцируемы,

4) функции прибыли вогнуты.

Тогда в точке сговора

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) > 0\ \forall k.$$

***<u>Доказательство</u>.***

Пользуясь дифференциальной характеристикой внутренней точки сговора и положительностью всех множителей Лагранжа, получим

---

[205] Условие, что каждый участник получает прибыль не меньшую, чем в равновесии Курно здесь не учитывается.

[206] Если функции прибыли вогнуты, и выпуск $\check{y}_j > 0$ то возможно уменьшить его, увеличив тем самым прибыль прочих участников. Это означает, что выполнено условие Слейтера и теорема Куна-Таккера применима.

$$\lambda_k \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -\sum_{i\neq k}\lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -p'(\check{Y})\cdot\sum_{i\neq k}\lambda_i \check{y}_i > 0 \ \forall k.$$

■

## Картель

Рассмотрим теперь модель картеля. Поскольку фирмы могут перераспределять прибыль и целевые функции олигополистов квазилинейны по деньгам, то максимум суммарной прибыли есть Парето-оптимум олигополии. Фактически, картель действует как монополия, однако, следует несколько изменить модель, по сравнению со случаем обычной монополии, поскольку у каждой из входящих в картель фирм своя функция издержек. Суммарная прибыль равна

$$\sum_{j=1}^{n}\Pi_j = p(Y)\ Y - \sum_{j=1}^{n} c_j(y_j),$$

где $Y = y_1 + \ldots + y_n$ — суммарный объем производства. Продифференцировав по выпускам всех фирм, получим дифференциальную характеристику равновесия картеля:

$$p(Y^{к}) + p'(Y^{к})Y^{к} \leqslant c_j'(y_j^{к}),$$

$$p(Y^{к}) + p'(Y^{к})Y^{к} = c_j'(y_j^{к}), \text{ если } y_j^{к} > 0.$$

Как видим, картель так распределит объемы производства между предприятиями при положительных объемах выпуска, чтобы предельные издержки были равными.[207] Так, если $c_j'(y_j) = c_j$, то совокупный выпуск отрасли совпадает с равновесием при монополии, когда предельные издержки монополиста равны

$$c = \min_j c_j.$$

**Пример 6**.

Пусть как и в Примере 3 обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$. Объем производства картеля определяется соотношением

$$p(Y^{к}) + p'(Y^{к})Y^{к} = a - bY^{к} - bY^{к} = c = c_j'(y_j^{к}).$$

Таким образом, он равен

$$Y^{к} = \frac{a-c}{2b},$$

а прибыль картеля равна

$$(a - bY^{к})Y^{к} - c\,Y^{к} = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$

В равновесии Курно, как мы показали в Примере 3, суммарный объем производства равен

$$Y^{*} = \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b}$$

а суммарная прибыль, как несложно рассчитать, равна

---

[207] Отметим, что это также означает такое распределение выпуска среди участников картеля, которое минимизирует суммарные издержки.

$$\frac{n\,(a-c)^2}{(n+1)^2 b},$$

откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с точки зрения производителей. Они могли бы получать больше прибыли, если бы производили меньше. ⇦

Используя ту же логику доказательства, как в Теоремах 5 и 6, можно показать, что олигополисты будут производить меньше, если объединятся в картель, чем если они будут конкурировать по Курно (здесь, как и ранее, мы предполагаем равенство функций издержек у всех олигополистов). Доказательство соответствующей теоремы оставляется читателю в качестве упражнения. Аналогичное утверждение верно и без требования равенства функций издержек, но с сильными предположениями о функции выручки.[208]

**Теорема 13.**

Пусть

1) равновесия в модели Курно и модели картеля существуют и все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^{к} > 0$, $y_j^* > 0\ \forall j$,

2) обратная функция спроса дифференцируема и $p'(y)$ убывает, функция выручки $p(y)y$ вогнута,

3) функции издержек $c_j(\cdot)$ дифференцируемы и $c_j'(y_j)$ неубывают,

Тогда в точке картеля суммарный выпуск меньше, чем в равновесии Курно:

$$Y^* > Y^{к}.$$

В общем случае ничего определенного относительно соотношения между объемом выпуска картеля и выпуском в равновесии Курно сказать нельзя. Ниже приводится пример, когда картель выпускает больший объем продукции, чем в одном из (трех) равновесий Курно.

**Пример 7.**

Пусть в отрасли функция обратного спроса равна

$$p(y) = 9 - y$$

и есть два производителя с одинаковыми функциями издержек

$$c(y) = \begin{cases} 6\,y - \frac{3}{4}y^2, & y \leqslant 4, \\ 12, & y \geqslant 4. \end{cases}$$

В этой отрасли есть 3 равновесия Курно: $(2, 2)$, $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Максимум прибыли картеля достигается в точках $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Видно, что в симметричном равновесии $(2, 2)$ выпуск меньше, чем у картеля. ⇦

Заметим, что хотя в данном примере функция издержек недифференцируема, ее легко модифицировать, сгладив в окрестности точки $y = 4$. По-видимому, основная причина полученного результата состоит в том, что в этом примере имеет место возрастающая отдача.

---

[208] См. Elmar Wolfstetter, "Oligopoly and industrial organization," *Humboldt-Discussion Paper*, August 1995.

Ясно, что так же как и рассмотренный ранее сговор, картель является неустойчивым, если нет способа гарантировать выполнение соглашения между фирмами.

**Теорема 14.**

Пусть

1) в картеле все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^к > 0\ \forall j$,

2) обратная функция спроса дифференцируема и $p'(y)$ убывает,

3) функции издержек дифференцируемы.

Тогда в точке картеля

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^к, \ldots, y_n^к) > 0\ \forall j,$$

т.е. каждая фирма может повысить свою прибыль, увеличив свой выпуск.

***Доказательство.***

Производная функции прибыли $j$-го участника по своему выпуску равна

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j} = p(Y) + p'(Y)\, y_j - c_j'(y_j).$$

Учитывая дифференциальную характеристику точки $(y_1^к, \ldots, y_n^к)$,

$$p(Y^к) + p'(Y^к)Y^к = c_j'(y_j^к),$$

имеем

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^к, \ldots, y_n^к) = -p'(Y^к)(Y^к - y_j^к) > 0.$$

Таким образом, если достигнуто соглашение о квотах выпуска ($y_j = y_j^к$), максимизирующих суммарную прибыль, то каждой фирме выгодно (по крайней мере локально) производить больше своей квоты. ■

## Задачи

20. Докажите, что если во внутреннем равновесии Курно один из олигополистов немного уменьшит объем производства, то суммарная прибыль возрастет.

21. Сформулируйте и докажите теорему о существовании равновесия в случае картеля. (Подсказка: воспользуйтесь аналогичной теоремой в главе о монополии. Пусть существуют $\tilde{y}_j > 0\ \ j = 1, \ldots, n$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$. Докажите, что при любых выбранных выпусках всех производителей, кроме $j$-го, картелю не выгодно $j$-му производителю назначать выпуск больше $\tilde{y}_j$, поскольку суммарная прибыль тогда будет строго меньше, чем при выпуске $y_j = \tilde{y}_j$. При этом удобно рассматривать выбор суммарного объема производства, $Y$, при фиксированном $Y_{-j}$, при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.)

22. Докажите аналог Теоремы 6 для модели картеля с одинаковыми функциями издержек.

23. Покажите, что если в дуополии предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то при объединении в картель первый производит меньше, чем второй.

24. Рассмотрите дуопольную отрасль. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{4}{1+Y},$$

а функции издержек у обоих производителей линейны:

$$c_j(y_j) = y_j.$$

Показать, что в равновесии Курно участники будут выпускать в сумме больше, чем при объединении в картель, и получать меньшую общую прибыль.

25. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки, равные $1$, и конкурируют как в модели Курно. Спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(Y) = 5 - 2Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

26. Пусть на олигополистическом рынке функционируют три олигополиста с функциями издержек $c_1(y_1) = \frac{y_1^2}{2}$, $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{4}$ и $c_3(y_3) = \frac{y_3^2}{6}$. Обратная функция спроса на продукцию олигополистов имеет вид $p(Y) = 1 - Y$. Найдите равновесие Курно и покажите, что это равновесие не оптимально, подобрав такие изменения выпусков олигополистов, чтобы прибыль каждого выросла. Покажите, что картельное соглашение между этими участниками неустойчиво, то есть каждый участник нарушив его получит большую прибыль.

27. Докажите Теорему 13.

## Модель Бертрана

Модель Курно часто критиковали за то, что ее посылки (решение об объемах производства, а не о ценах) плохо согласуются с каждодневными наблюдениями.

Некоторые ранние критики этой модели говорили, что эту реалистичную картину убывания олигополистической власти (или рыночной власти) олигополистов модель Курно дает по ложным причинам, т.к. естественным состоянием олигополистической отрасли является состояние **ценовой конкуренции**. На реальных олигополистических рынках производители в основном конкурируют, используя в качестве инструментов цены, по которым они продают свою продукцию. Исходя из этого, естественной альтернативой модели Курно для описания конкуренции на олигополистическом рынке должна быть модель описывающая состояние и динамику рынка в терминах ценовой конкуренции. Такая модель была предложена Жозе́фом Бертраном. В ней производители принимают (одновременно) решения о ценах продаж.[209]

---

[209] Bertrand, J. (1883). “Theorie mathematique de la richesse sociale”. *Journal de Savants*, **67**, 499-508.

В **модели Бертрана** предполагается, что олигополисты производят однородную продукцию с постоянными предельными издержками, одинаковыми для всех производителей. Стратегиями участников являются назначаемые цены $p_j$. Поскольку при ценах ниже предельных издержек любой производитель несет убытки при любом положительном объеме продаж, естественно предполагать, что выбираемые им цены $p_j$ удовлетворяют ограничению $p_j \geqslant c$.

Когда речь идет о ценовой конкуренции, то удобно бывает рассматривать функцию спроса на продукцию отдельной фирмы, которая в данном случае зависит как от собственной цены, $p_j$, так и от цен, назначенных другими, $\boldsymbol{p}_{-j}$:

$$y_j = D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j}),\, p_j \geqslant c.$$

При этом предполагается (что представляется естественным при анализе рынков однородной продукции), что:

1) Если цена, назначенная фирмой, выше цены любого другого участника, то фирма столкнется с нулевым спросом и не сможет продать свою продукцию: $y_j = 0$ (происходит полное переключение спроса).

2) Группа из $k$ фирм, назначившая минимальную цену ($p_{min}$), обслужит весь спрос и разделит рынок поровну[210]

$$y_j = \frac{D(p_{min})}{k},$$

где $D(\cdot)$ — функция спроса. В том числе, если такая фирма одна, то $y_j = D(p_{min})$.

3) Предельные издержки всех олигополистов одинаковы и не зависят от объема производства:

$$c_j'(y) = c,\ \forall j,\ \forall y \geqslant 0.$$

Как и ранее, считаем фиксированные издержки уже сделанными и невозвратимыми (это отражено дифференцируемостью $c$ в нуле).

Используя вышеприведенные предположения, получим характеристики равновесия для олигополистического рынка, соответствующие модели (гипотезам) Бертрана.

**Теорема 15.**

Состояние, в котором хотя бы два олигополиста установят цены на уровне предельных издержек ($p_j = c$),[211] является равновесием Нэша (в чистых стратегиях) в модели Бертрана.

Если функция спроса $D(p)$ не возрастает, непрерывна в окрестности $c$, и $D(c) > 0$, тогда других равновесий нет.

***Доказательство.***

Легко проверить, что описанное выше состояние является равновесием.

Докажем единственность. Рассмотрим решение какого-либо олигополиста.

---

[210] Нижеприведенный результат, остается справедлив при любой схеме разделения рынка с одним лишь ограничением: спрос на продукцию каждой из этих фирм не равен нулю.

[211] По существу, это конкурентное равновесие. Назначившие большую цену выпускают ноль.

Докажем, что равновесие не может установиться ни в какой другой точке. Предположим, что в равновесии у всех производителей $p_j > c$. Рассмотрим, хотя бы одного из тех олигополистов, которые обслуживали не весь рынок (а такие найдутся). Найдется $\hat{p} \in [c, p_{min}]$, такое что если он понизит цену до этой величины, то есть оставляя цену выше предельных издержек $c$, но ниже $p_{min}$, то он сразу же получит весь объем спроса, скачкообразно увеличив объем. У него прибыль в результате вырастет (объем окажется положителен при некоторой цене $\hat{p} \geqslant c$ при наших предположениях). Таким образом это не равновесие. Следовательно, в равновесии хотя бы один из олигополистов установит цену, равную предельным издержкам.

Докажем теперь, что в равновесии по крайней мере два олигополиста установят цену на уровне предельных издержек. Пусть это не так. Тогда тот, кто установил $p_j = c$, может увеличить свою прибыль, немного повысив цену, так, чтобы ему все еще доставался весь спрос. Итак, иных равновесий, кроме названных в начале параграфа, быть не может. ■

Мы видим, что в равновесии Бертрана цена, по которой продается продукция, равна предельным издержкам, что соответствует ситуации конкурентного равновесия. Как следует из этого, присутствие по крайней мере двух производителей достаточно для того, чтобы отрасль функционировала в режиме совершенной конкуренции и равновесие было Парето-оптимальным. Таким образом, если верить модели, монопольная власть – редкий феномен и встречается только в ситуации, когда есть всего один производитель продукции. По-видимому, этот вывод не согласуется с действительностью. Кроме того, крайне интенсивная ценовая конкуренция приводящая олигополистический рынок к ситуации равновесия эквивалентного равновесию совершенной конкуренции в целом -- также представляется не слишком реалистичной. Поэтому выводы, следующие из анализа вышеприведенной модели, получили название **парадокса Бертрана**.

В силу этого парадокса попытку Бертрана переосмыслить концепцию олигополистического равновесия трудно признать полностью удавшейся. Поэтому были предприняты серьезные попытки модифицировать модель Бертрана так, чтобы выводы из нее более соответствовали реальными наблюдениям, т.е. с тем, что монопольная власть на рынке не исчезала бы при наличии всего двух конкурентов в отрасли.

Заметим, что наиболее существенными недостатками модели Бертрана являются:

- В модели Бертрана предполагается, что производится и продается однородная продукция. Поэтому возникает жесткость олигополистической конкуренции.

- Второе специфическое свойство модели Бертрана — это предположение об отсутствии ограничений на объемы производства, или в более слабом виде: специфическое предположение о независимости предельных издержек любого производителя от объемов производства. Как только мы вводим предположение о зависимости предельных издержек от объемов производства, то мы не получаем изящный результат о том, что единственное состояние равновесия — это равновесие, при котором цены равны предельным издержкам.

- Модель Бертрана в классической постановке, имеет статический характер. Принятие во внимание некоторых стратегических соображений, связанных с конкуренцией в различные интервалы времени (точнее с нетривиальными последовательностями ходов конкурентов), приводит к ослаблению выводов о жесткости конкуренции в модели Бертрана.

Для преодоления этих недостатков рассмотрим ниже следующие модификации традиционной модели Бертрана:

1. Продуктовая дифференциация (ослабляющая ценовую конкуренцию).

2. Нелинейность издержек, делающая для олигополиста невыгодным производить продукцию в объеме спроса, с которым он сталкивается.

3. Динамические модели, принимающие во внимание многоходовые соображения производителей.

### Продуктовая дифференциация и ценовая конкуренция

Мы рассмотрели модели олигополии, в которых фирмы производили один и тот же товар. Теперь рассмотрим более распространенный случай, когда продукция фирм не вполне взаимозаменяема, т.е. случай так называемых **дифференцированных благ**.[212] Это означает, что производители действуют на взаимосвязанных рынках близких продуктов, которые различаются хотя бы по упаковке и потребитель способен покупать их по разным ценам $p_j$. В этой модели следует ввести отдельную функцию спроса на продукцию каждой фирмы $y_j = D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})$, которая зависит от собственной цены $p_j$ и от цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-j}$. Естественно предположить, что эластичность спроса по собственной цене отрицательна ($\varepsilon_{jj} < 0$), а по ценам конкурентов положительна ($\varepsilon_{ij} = \dfrac{dD_i}{dp_j}\dfrac{p_j}{y_i} > 0$ при $i \neq j$, т.е. блага взаимозаменяемые)[213]. Предположим по-прежнему, что каждый потребитель имеет функцию издержек вида $c(y) = c\,y$.

Доказательство *существования* равновесия в этой модели в целом сходно с доказательством существования равновесия в модели Курно и читателю предлагается сформулировать и доказать этот результат самостоятельно в Задаче **Ошибка! Источник ссылки не найден.** (стр. **Ошибка! Закладка не определена.**).

Отличие рассматриваемой модели от классической модели Бертрана заключается в том, что спрос переключается к понижающему цену конкуренту не с бесконечной эластичностью. Поскольку участники не учитывают, как их действия влияют на других, то их поведение соответствует модели простой монополии, и *дифференциальная характеристика* внутреннего равновесия имеет такой же вид:

$$D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j}) + \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\, p_j = \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\, c$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) p_j = c.$$

Из этих условий следует, что в рассматриваемой модели равновесные цены превышают предельные издержки, несмотря на то, что, как и в обычной модели Бертрана, предельные издержки предполагаются равными между собой и постоянными.

С другой стороны, при росте эластичности индивидуального спроса достающегося каждой фирме, равновесие в данной модели приближается к равновесию в модели Бертрана, и в пределе они совпадают. Таким образом, модель Бертрана можно рассматривать как крайний случай рассмотренной модели.

Дуополию такого вида можно изобразить на диаграмме, аналогичной Рис. 112 для дуополии Курно. Только по осям должны стоять не объемы производства, а цены, и кривые равной прибыли будут развернуты в противоположную сторону. Равновесием будет точка пересечения кривых отклика (см. Рис. 120). Вообще, аналогия с моделью Курно очень

---

[212] Chemberlin, E.H. (1933) *The Theory of Monopolistic Competition*.

[213] Эта же модель подходит и когда фирмы производят не взаимозаменяемые (субституты), а взаимодополняющие (комплементы) блага.

близкая, отличие в более сложной, чем в модели Курно, зависимости прибылей от действий конкурентов.

Если бы каждая фирма немного повысила свою цену, то общая прибыль возросла бы. Поэтому равновесие при монополистической конкуренции не оптимально с точки зрения олигополистов. Они могли бы объединиться в картель, и такой картель по сути являлся бы дискриминирующей монополией. В отличие от рассмотренного ранее случая перекрестные эластичности не равны нулю, поэтому максимум прибыли достигается при выполнении условий

$$D_j(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{dD_i}{dp_j}(\boldsymbol{p})\,(p_i - c) = 0.$$

или, в терминах эластичностей

$$p_j\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) - \sum_{i\neq j}(p_i - c)\frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon_{jj}|}\frac{D_i(\boldsymbol{p})}{D_j(\boldsymbol{p})} = c.$$

Из сравнения дифференциальных характеристик очевидно (при естественных предположениях) несовпадение некооперативного равновесия и картельного решения. Установить, больше ли все цены картеля тех цен, которые установятся при некооперативном поведении — нетривиальная задача.

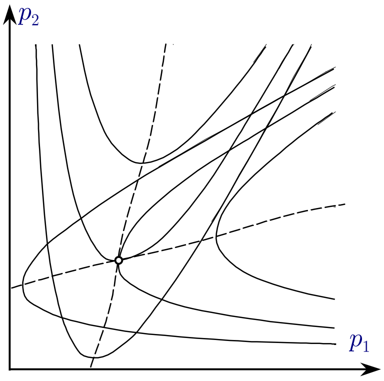


Рисунок 120

## Пример 8.

В ситуации ценовой конкуренции двух производителей (например, Кока-колы и Пепси-колы) спрос на товар первого равен

$$y_1(p_1, p_2) = \frac{{p_2}^{\beta}}{{p_1}^{\alpha+1}},$$

спрос на товар второго

$$y_2(p_1, p_2) = \frac{{p_1}^{\beta}}{{p_2}^{\alpha+1}},$$

затраты обоих линейны $c_j(y_j) = cy_j$ ($\alpha,\ \beta,\ c > 0,\ \ \beta < \alpha$). Эти функции спроса характеризуются постоянными эластичностями:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -(\alpha + 1).$$

Подставив эти эластичности в условия первого порядка равновесия, получим решение

$$p_1 = p_2 = \frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}.$$

Видим, что в данном примере предприятия имеют доминирующие стратегии — назначить цену на уровне $(\alpha+1)\,c/\alpha$ вне зависимости от выбора конкурента. При этом равновесные объемы производства будут равны

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}\right)^{\alpha+1-\beta}.$$

Функции отклика, соответствующие доминирующим стратегиям, на рисунке будут выглядеть как прямые, параллельные осям.

Если предприятия объединятся в картель, то, учитывая, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta$, из дифференциальной характеристики равновесия картеля найдем, что этот картель установил бы более высокие цены

$$p_j = \frac{(\alpha+1-\beta)\,c}{\alpha-\beta},$$

при более низких объемах производства

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1-\beta)\,c}\right)^{\alpha+1-\beta}. \Leftarrow$$

## Модель Бертрана при возрастающих предельных издержках

Рассмотрим теперь, что произойдет, если мы откажемся от предположения о постоянстве предельных издержек при анализе ценовой конкуренции. Будем исходить из стандартного предположения об убывающей отдаче от масштаба, то есть предполагать, что предельные издержки возрастают и положительны. Кроме того, для упрощения будем предполагать, что предельные издержки возрастают неограниченно. Аналог равновесия Бертрана для случая растущих предельных издержек был бы таков: продукция продавалась бы всеми фирмами по одной и той же цене, и цена равнялась бы предельным издержкам. Мы покажем здесь однако, что при сделанных предположениях о функциях издержек описанное состояние не может соответствовать равновесию в модели ценовой конкуренции.

### ОБСУЖДЕНИЕ ГИПОТЕЗ МОДЕЛИ

Согласно предположениям Бертрана, если некоторая фирма устанавливает самую низкую цену, то все желают купить у нее. Эффективный спрос, с которым она сталкивается, совпадает с совокупным спросом. В модели Бертрана, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, и выше, чем предельные издержки, то в ее интересах и возможностях *полностью* удовлетворить спрос при данной цене. В случае же растущих предельных издержек фирма с минимальной ценой не обязательно удовлетворяет весь рыночный спрос.

Как известно, если фирма $j$ с возрастающими предельными издержками сталкивается с фиксированной ценой $p_j$ $(p_j \geqslant c_j'(0))$ за производимую ею продукцию, то ей выгодно выбрать такой объем производства $y_j$, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

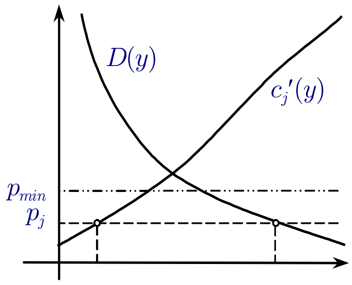


Рисунок 121

Таким образом, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, то ей может оказаться невыгодным производить продукцию в количестве, равном емкости рынка при данной цене. Такая ситуация изображена на Рис. 121, где через $p_{min}$ обозначена минимальная из цен конкурентов. Если не предполагать, что олигополист, устанавливая цену, обязуется продать по данной цене любое количество блага, на которое будет предъявлен спрос, то помимо решения о выборе *цены* следует также рассмотреть вопрос о выборе производимого *количества* блага. В этом состоит принципиальное отличие от стандартной модели Бертрана, в которой выбор количества не рассматривается, поскольку в рамках этой модели всегда выгодно производить столько, сколько можно продать.

С точки зрения теории игр можно рассматривать модель Бертрана как редуцированную игру. Исходная игра при этом является динамической, и в ней олигополисты сначала выбирают цены, а затем количества, причем фирма с минимальной ценой осуществляет выбор первой, поскольку потребители в первую очередь обращаются к ней. В случае постоянных предельных издержек можно было ограничится анализом редуцированной игры, в рассматриваемом же случае приходится анализировать полную динамическую игру.

В рассматриваемой нами модели, если участник, назначивший наименьшую цену, сочтет невыгодным полностью удовлетворять весь предъявляемый при этой цене спрос, то на рынке останется неудовлетворенный (остаточный) спрос. Величина его зависит от того, какие потребители приобретут продукцию производителя, назначившего наименьшую цену, т.е. от выбранной этим производителем **схемы рационирования**.[214] Данную проблему можно назвать *проблемой рационирования*. Процесс рационирования может осуществляться разными способами. Очевидно, что равновесие, в общем случае, должно зависеть от схемы рационирования. В то же время, на прибыль олигополиста назначившего наименьшую цену, не влияет то, какую схему он будет использовать, хотя выбранная им схема определяет величину остаточного спроса и, тем самым, величину прибыли других олигополистов.

В этом параграфе мы не рассматриваем подробно характеристики равновесия в данной ситуации. Наша цель здесь продемонстрировать, что вне зависимости от схемы рационирования ценообразование по предельным издержкам не может быть равновесием.

Для упрощения мы будем проводить анализ для случая двух фирм. При большем количестве фирм выводы не изменятся, но рассуждения станут более сложными. Предположим, что первая фирма установила более низкую цену ($p_1 < p_2$) и продала $y_1$ единиц блага. При этом вторая фирма сталкивается с неким остаточным спросом, который мы обозначим через $D_2$. Этот остаточный спрос зависит как от количества блага, проданного первой фирмой, так и от назначенных цен: $D_2 = D_2(p_2, y_1, p_1)$. Конкретный вид функции $D_2$ определяется предполагаемой схемой рационирования.

---

[214] Сам термин «рационирование» не очень удачен. Здесь скорее имеется в виду структура распределения проданного количества блага между потребителями — какое количество потребит в конечном итоге каждый потребитель.

Будем считать, что функция остаточного спроса $D_2(p_2, y_1, p_1)$ определена при всех неотрицательных значениях $p_1$, $p_2$ и $y_1$ (а не только при $p_1 < p_2$). Естественными требованиями к функции остаточного спроса являются ее невозрастание по $p_2$[215] и условие

$$D_2(p, y_1, p) = D(p) - y_1.$$

Ниже приводится описание двух наиболее простых и естественных вариантов рационирования — пропорционального и эффективного рационирования.

При **пропорциональном рационировании** остаточный спрос при каждой цене составляет одну и ту же долю исходного спроса:

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = \frac{D(p_1) - y_1}{D(p_1)} D(p_2).$$

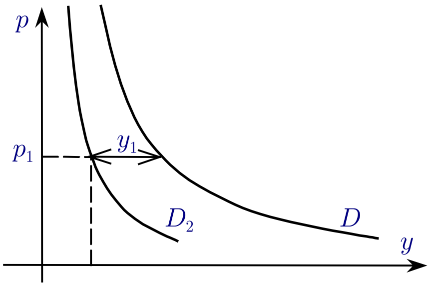


Рисунок 122

Такое рационирование может быть результатом того, что все потребители с одинаковой вероятностью попадают в число тех, кто смог купить товар у первой фирмы. При этом дополнительно предполагается, либо что предпочтения у всех одинаковые, либо что благо неделимое, и все потребители потребляют не более единицы. Потребителей должно быть «достаточно много».[216] Кроме того, следует учитывать, что такая схема рационирования возможна только в том случае, если потребители по каким-либо причинам не перепродают друг другу товары (отсутствует арбитраж)[217].

Рис. 122 иллюстрирует случай такого «справедливого» рационирования. График остаточного спроса получается из графика исходного спроса пропорциональным сжатием по горизонтали в направлении оси.

При **эффективном рационировании** продукцию по более низким ценам покупают те, кто более высоко ее ценит. В этом случае остаточный спрос получается параллельным сдвигом кривой спроса на величину $y_1$. Эту схему легко проиллюстрировать в ситуации, когда каждый потребитель хотел бы купить единицу блага. Тогда, если у нас есть $15$ покупателей, а первая фирма производит только $5$ единиц, то эти $5$ единиц покупают те $5$ из них, которые ценят данное благо выше, чем каждый из остальных десяти потребителей.

Хотя описанное ранее пропорциональное рационирование кажется на первый взгляд более правдоподобным, однако эффективное рационирование тоже можно обосновать. Этот способ рационирования хорошо отражает положение дел в ситуации, когда без издержек можно перепродать благо (возможен арбитраж). Тогда, если это благо случайно купил потребитель, который ценит его ниже $p_2$, он перепродаст ее тем, кому оно не досталась, но кто готов предложить за нее более высокую цену. Таким образом, при наличии арбитража

---

[215] Это требование довольно естественно, если предположить невозрастание функции спроса $D(p)$ по $p$.

[216] Строго говоря, должен быть усредненным спросом бесконечного множества (континуума) потребителей.

[217] При наличие арбитража зависимость остаточного спроса от выпуска производителя в общем случае не может описываться вышеприведенной формулой.

(без дополнительных затрат на сделки) любой другой способ рационирования должен в конечном итоге свестись к эффективному рационированию.

Как несложно понять, при таком способе рационирования остаточный спрос с которым сталкивается вторая фирма, будет равен (при $D(p_2) \geqslant y_1$)

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = D(p_2) - y_1$$

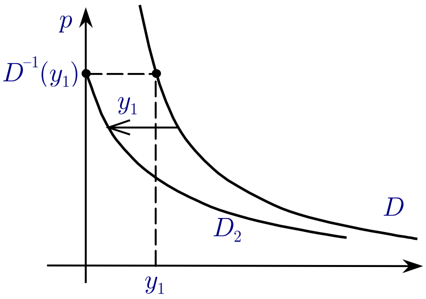


Рисунок 123

Из совокупного спроса $D(p_2)$ мы вычитаем то количество, которое продала первая фирма, и получаем остаточный спрос, с которым сталкивается вторая фирма. Эта формула подходит только если второй назначит такую цену, что $D(p_2) \geqslant y_1$. Если же $D(p_2) < y_1$, то величина остаточного спроса окажется равной нулю, поскольку по предположению те потребители, которые ценят товар выше $D^{-1}(y_1)$, уже приобрели товар. Таким образом, остаточная функция спроса имеет следующий вид:

$$D_2(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - y_1, & \text{если } p_2 \leqslant D^{-1}(y_1), \\ 0, & \text{если } p_2 \geqslant D^{-1}(y_1). \end{cases}$$

Нахождение остаточного спроса при эффективном рационировании иллюстрирует Рис. 123. Остаточный спрос получается из общего спроса параллельным горизонтальным сдвигом на величину $y_1$.

С точки зрения благосостояния эффективное рационирование — это такое рационирование, при котором среди всех возможных вариантов рационирования (распределения между потребителями количества $y_1$) благосостояние совокупности потребителей максимально (отсюда сам термин).

### Модель

В случае двух производителей, имеющих возрастающие предельные издержки, получаем модель, последовательность ходов в которой можно описать следующим образом:

1) Участники одновременно выбирают цены, $p_1$ и $p_2$.

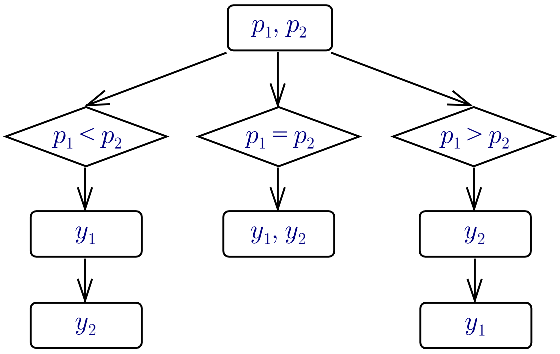


Рисунок 124

2) Если один из участников, например первый, назначает более низкую цену ($p_1 < p_2$), то этот участник выбирает объем производства, $y_1$. Другой участник тогда сталкивается с остаточным спросом, соответствующим имеющейся схеме рационирования. Учитывая этот остаточный спрос, он выбирает объем производства $y_2$. Если же выбранные цены совпадают ($p_1 = p_2 = p$), то участники одновременно выбирают объемы производства, $y_1$ и $y_2$. При этом если суммарный объем производства оказался превышающим спрос при данной цене ($y_1 + y_2 > D(p)$), то спрос распределяется поровну между участниками.

Схема игры представлена на Рис. 124. Это не полное дерево игры, а только условное описание последовательности ходов.

Стратегией каждого участника является описание его действий в зависимости от предыстории игры. В данном случае стратегией $j$-го участника является набор

$$(p_j, \mathcal{Y}_j^{<}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{=}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{>}(p_j, p_{-j}, y_{-j})),$$

где первая компонента — выбранная цена, а остальные представляют собой функции (не обязательно оптимального) отклика на предшествующие действия свои и партнера. Здесь $\mathcal{Y}_j^{<}$ обозначает количество, которое выбирает фирма, если ее цена оказывается ниже цены конкурента, $\mathcal{Y}_j^{>}$ — если ниже, $\mathcal{Y}_j^{=}$ — в случае совпадения цен.

Как обычно, в качестве концепции решения мы рассматриваем совершенное в подыграх равновесие, то есть такую пару стратегий, которая порождает равновесие Нэша в каждой подыгре. Выигрыш участника определяется некоторой функцией $\Pi_j$, которая зависит от четырех аргументов — цен и объемов, выбранных участниками в ходе игры. Мы не будем приводить функцию $\Pi_j(p_1, p_2, y_1, y_2)$ в явном виде; ее несложно построить по описанию модели.

С целью упрощения анализа модели ее удобно редуцировать, заменив $\mathcal{Y}_j^{<}(\cdot)$, $\mathcal{Y}_j^{=}(\cdot)$ и $\mathcal{Y}_j^{>}(\cdot)$ на соответствующие функции оптимального отклика, которые можно обозначить через $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$. Эти функции показывают объем производства, который производителю выгодно выбрать при данной предыстории игры. Редуцированная модель будет статической игрой, в которой участники выбирают только цены $p_1$ и $p_2$.

### Сравнение с равновесием Бертрана

Рассмотрим вектор цен и выпусков $(\bar{p}, \bar{p}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, такой что предельные издержки у обоих олигополистов равны цене:

$$c_1'(\bar{y}_1) = \bar{p} \quad \text{и} \quad c_2'(\bar{y}_2) = \bar{p},$$

а суммарное производство полностью удовлетворяет спрос при этих ценах:

$$D(\bar{p}) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

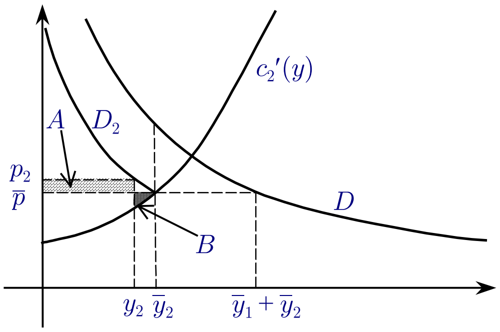


Рисунок 125

Этот исход естественно считать аналогом равновесия Бертрана.

Мы хотим показать, что набор стратегий $(\bar p,\ \bar p)$ не может соответствовать равновесию в редуцированной модели. Причина этого заключается в том, что каждый производитель заинтересован увеличить цену, уменьшив объем продаж. Сокращение прибыли от уменьшения объема продаж в первом приближении перекрывается эффектом увеличения цены.

Графическая иллюстрация этих рассуждений приведена на Рис. 125. Прибыль второй фирмы равна площади между кривой ее предельных издержек и ценой (плюс постоянные издержки $c_2(0)$). Если вторая фирма немного повысит свою цену с $\bar p$ до $p_2$, то ее прибыль, с одной стороны, вырастет за счет этого на величину прямоугольника $A$, а, с другой стороны, упадет за счет сокращения объема продаж на величину треугольника $B$. При малом изменении цены первый эффект превышает второй, что и видно из графика.

Теперь докажем более формально, что стратегии $(\bar p,\ \bar p,\ \bar y_1,\ \bar y_2)$ не может соответствовать состоянию равновесия при ценовой конкуренции. Пусть второй производитель ожидает, что первый производитель назначил цену $\bar p$. Нам достаточно показать, что в этом случае второму выгодно назначить цену $p_2$ выше $\bar p$.

Обозначим тот объем производства, который второй олигополист выберет в том случае, если будут назначены цены $(\bar p,\ p_2)$, где $p_2 \geqslant \bar p$, через $\bar R_2(p_2)$, т.е.

$$\bar R_2(p_2) = R_2^{>}(\bar p,\ p_2,\ R_1^{<}(\bar p,\ p_2)) \text{ при } p_2 > \bar p$$

и

$$\bar R_2(\bar p) = R_2^{=}(\bar p,\ \bar p),$$

где $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$ — введенные выше функции оптимального отклика. Мы не будем полностью анализировать, какой вид имеют функции отклика (читатель может проделать такой анализ самостоятельно). Нам потребуется только несколько фактов относительно этих функций. При данной цене $p_j$, если нет ограничений на сбыт продукции, $j$-му производителю выгодно выбрать такой объем производства $y_j$, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Отсюда следует, что $R_1^{<}(\bar p,\ p_2)) = \bar y_1$ и $R_2^{=}(\bar p,\ \bar p) = \bar R_2(\bar p) = \bar y_2$.

Если первый производитель продает $\bar y_1$ по цене $\bar p$, то при $p_2 > \bar p$ второму производителю не удается продать столько, сколько он бы хотел, поэтому ему выгодно выбрать выпуск в точности на уровне остаточного спроса. (Докажите это.) Таким образом, при $p_2 > \bar p$

$$\bar R_2(p_2) = R_2^{>}(\bar p,\ p_2,\ \bar y_1) = D_2(p_2,\ \bar y_1,\ \bar p).$$

Если выполнено естественное предположение о функции остаточного спроса:

$$D_2(\bar{p}, \bar{y}_1, \bar{p}) = D(\bar{p}) - \bar{y}_1,$$

то $D_2(\bar{p}, \bar{y}_1, \bar{p}) = \bar{y}_2 = \bar{R}_2(\bar{p})$.

Таким образом, при всех $p_2 \geqslant \bar{p}$ выполнено

$$\bar{R}_2(p_2) = D_2(p_2, \bar{y}_1, \bar{p}).$$

Если предполагать, что исходная функция остаточного спроса, $D_2(\cdot)$, дифференцируема по $p_2$ (по крайней мере, при $p_2 \geqslant \bar{p}$), то $\bar{R}_2(p_2)$ также дифференцируема.

При $y_2 = \bar{R}_2(p_2)$ прибыль второго производителя будет равна

$$\Pi_2(p_2) = \bar{R}_2(p_2)\, p_2 - c_2(\bar{R}_2(p_2)), \;\; p_2 \geqslant \bar{p}.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что производная прибыли в точке $p_2 = \bar{p}$ положительна. Действительно, при $p_2 \geqslant \bar{p}$

$$\Pi_2'(p_2) = \bar{R}_2(p_2) + [p_2 - c_2'(\bar{R}_2(p_2))] \cdot \bar{R}_2'(p_2).$$

При $p_2 = \bar{p}$, учитывая, что $\bar{R}_2(\bar{p}) = \bar{y}_2$, получим

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2 + [\bar{p} - c_2'(\bar{y}_2)] \cdot \bar{R}_2'(\bar{p}).$$

Поскольку по определению $\bar{p} = c_2'(\bar{y}_2)$, то

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2.$$

Таким образом, при $\bar{y}_2 > 0$ выполнено $\Pi_2'(\bar{p}) > 0$.

Мы не задаемся здесь достаточно сложным вопросом об условиях существования равновесия. Однако ясно, что если в ценовой конкуренции и существует равновесие, то продажи не осуществляются по ценам, равным предельным издержкам. Таким образом, анализ показывает, что как только мы изменяем предположение об одинаковости и постоянстве предельных издержек, то получаем, что вывод модели Бертрана неверен.

## Динамический вариант модели Бертрана (повторяющиеся взаимодействия)

Наиболее простой динамический вариант модели Бертрана — две фирмы с постоянными и одинаковыми предельными издержками $c$, участвующие в ценовой конкуренции в течение (бесконечного) числа периодов времени. Каждая фирма максимизирует приведенную прибыль,

$$\Pi_j = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \Pi_{jt},$$

где $\Pi_{jt}$ — прибыль фирмы $i$ в период $t$, а $\delta \in (0; 1)$ — дисконтирующий множитель.

В этой динамической игре Бертрана стратегия фирмы $j$ определяет цену $p_{jt}$, которую взимает фирма в период $t$ как функцию от всей «предыстории» ценовой конкуренции $H_{t-1} = \{\bar{p}_{1\tau}, \bar{p}_{2\tau}{}_{\tau=1}^{t-1}\}$.

Общий интерес представляют стратегии следующего вида

$$\bar{p}_{j\tau} = \begin{cases} p^{м}, & \text{если } \bar{p}_{i\tau} = \bar{p}^{м} \text{ для всех } i,\, \tau,\, 1 \leqslant \tau \leqslant t-1 \\ c & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $p^{м}$ — монопольная цена. Согласно этой стратегии каждая фирма в период $1$ назначает монопольную цену за свою продукцию. Затем, в каждый последующий период она назначает цену $p^{м}$, если во все предыдущие периоды обе фирмы назначали цену $p^{м}$, и цену, равную ее предельным издержкам, в противном случае. Заметим, что если обе фирмы, используют указанные стратегии, то в результате они взимают в каждый период монопольно высокие цены $p^{м}$.

Можно рассматривать назначение монопольной цены как неявное соглашение между олигополистами. В этих терминах каждая из фирм придерживается соглашения, если в предшествующие периоды обе фирмы не нарушали его, и нарушает соглашение, если другая фирма (или она сама) в прошлом нарушила соглашение.

При некоторых предположениях о дисконтирующих множителях указанные стратегии составляют равновесие. Заметим, что этот результат верен только для бесконечной игры. В бесконечной игре единственным равновесием будет такой набор стратегий, согласно которому каждая фирма в каждом из периодов назначает цену на уровне предельных издержек. Таким образом, в конечной игре описанный Бертраном исход реализуется в каждом из периодов. Действительно, используя обратную индукцию, рассмотрим последний период. Поскольку выигрыши в нем не зависят от действий игроков в предыдущие периоды, то фактически соответствующая игра представляет собой обычную модель Бертрана. Продолжая эти рассуждения, мы получим равновесие Бертрана в каждом из периодов.

**Теорема 16.**

Пусть функция спроса является непрерывной и строго убывает Указанные выше стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие рассматриваемой динамической модели Бертрана тогда и только тогда, когда $\delta \geqslant 1/2$.

***Доказательство.***

Докажем прежде всего, что указанные стратегии составляют равновесие Нэша. Для этого нужно доказать, что ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей стратегии.

Если оба игрока будут придерживаться своих равновесных стратегий, то прибыль каждого из них за один период составит

$$\frac{1}{2}\Pi^{м} = \frac{1}{2}(p^{м} - c)D(p^{м})$$

Совокупная прибыль за все периоды будет в этом случае равна

$$\Pi_j = \frac{1}{2}\Pi^{м}\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1} = \frac{1}{2}\frac{\Pi^{м}}{1-\delta}.$$

Предположим, что один из игроков в первом периоде назначил цену отличную от монопольной:

$$p < p^{м}.$$

(Если игрок в первом периоде назначит цену выше монопольной, то его общая прибыль будет равна нулю, поэтому ему не выгодно назначать такую цену.)

Этот игрок в первом периоде получит весь спрос целиком и его прибыль составит

$$(p - c)D(p).$$

Во все последующие периоды его прибыль будет нулевая, поскольку другой игрок, придерживаясь своей стратегии, будет наказывать его за отклонение от соглашения: будет держать цену на уровне предельных издержек. Отклонение от стратегии в первом периоде будет выгодным, если

$$(p-c)D(p) > \frac{1}{2}\frac{\Pi^{м}}{1-\delta}.$$

При непрерывной кривой спроса игрок может сделать прибыль $(p-c)D(p)$ сколь угодно близкой к монопольной прибыли $\Pi^{м} = (p^{м}-c)D(p^{м})$. Таким образом, чтобы рассматриваемый набор стратегий мог быть равновесным, требуется чтобы

$$1 \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1-\delta}$$

или

$$\delta \geqslant \frac{1}{2}.$$

Мы доказали, что в первом периоде при $\delta \geqslant 1/2$ игроку нет смысла отклоняться от своей стратегии. При $\delta < 1/2$ выгодно отклоняться, т.е. это не равновесие Нэша.

Выгодно ли ему делать это в последующие периоды? Нет, поскольку ситуация будет той же — прибыли останутся теми же с точностью до возрастающего линейного преобразования (считая дисконтирование и прибыль в периоды до нарушения соглашения).

Таким образом, доказано, что рассматриваемый набор стратегий является равновесием Нэша. Нам осталось доказать, что он будет равновесием Нэша в каждой подыгре. Для этого достаточно понять, что с точностью до возрастающего линейного преобразования выигрышей каждая подыгра повторяет исходную игру. ■

Таким образом, доказано, что в рассмотренной бесконечной повторяющейся игре существует Парето-оптимальное (с точки зрения олигополистов) равновесие. Фактически же это равновесие не будет единственным. Можно придумать бесконечно много различных пар стратегий, составляющих совершенное в подыграх равновесие, и среди этих равновесий есть не Парето-оптимальные.

### Задачи

28. Найдите равновесие в модели Бертрана в случае неодинаковых (но постоянных) предельных издержек.

29. Сформулируйте и докажите существование равновесия в модели с дифференцированными продуктами. (Предположите, что для каждого из олигополистов вне зависимости от цен остальных олигополистов существует цена выше которой спрос равен нулю. Остальные условия сходны с условиями использованными при доказательстве существования в модели Курно. Воспользуйтесь теоремой Нэша.)

30. На рынке действуют две одинаковые фирмы. Спрос на продукцию $j$-й фирмы зависит от собственной цены $p_j$ и цены конкурента $p_{-j}$:

$$y_j = \alpha^2 - \alpha p_j + (\alpha-1)p_{-j} \quad (\alpha > 1).$$

Предельные издержки равны $1$. Рассчитать равновесие при ценовой конкуренции фирм. Сравнить с картелем.

31. Пусть есть две фирмы, выпускающих два разных, но связанных в потреблении товара, выбирают цены $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ которые влияют на объемы их спроса. Функции спроса заданы уравнениями:

$$y_1(p_1, p_2) = 6 - 2p_1 + p_2,$$

$$y_2(p_1, p_2) = 10 - 3p_2 + p_1.$$

Найти равновесные цены, если издержки у обеих фирм нулевые.

## Модель олигополии с ценовым лидерством

В модели **олигополии с ценовым лидерством** лидер (фирма с номером 1) назначает цену $p$, а остальные ($j = 2, ..., n$) выбирают выпуск, считая цену фиксированной. С точки зрения теории игр, модель представляет собой динамическую игру с почти совершенной информацией, состоящую из двух этапов. В определенном смысле, модель олигополии с ценовым лидерством находится в том же отношении к модели Бертрана что и модель Штакельберга к модели Курно. Ее анализ фактически повторяет анализ модели Штакельберга и ниже будет приведен в упрощенном и схематичном виде.

Опишем способ нахождения равновесия с помощью обратной индукции. Сначала следует рассмотреть второй этап игры. На втором этапе участники, отличные от лидера, одновременно выбирают свои объемы производства. Таким образом формируются отклики $R_j(p)$, которые являются решением соответствующих задач:

$$py_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

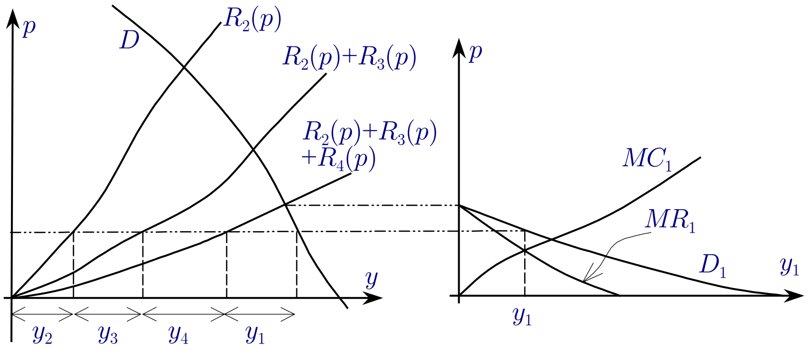


Рисунок 126

(Мы будем предполагать, что отклики однозначны, и $R_j(p)$ являются функциями, определенными при всех неотрицательных ценах.) Эти задачи, очевидно, совпадают с задачами фирм при совершенной конкуренции, а функции отклика $R_j(p)$ являются соответствующими функциями предложения. При соответствующих предположениях функции отклика удовлетворяют условиям первого порядка:

$$c'_j(R_j(p)) = p,$$

то есть функции $R_j(p)$ являются обратными к функциям предельных издержек $c'_j(y_j)$[218]. Обычно предполагают, что функции издержек характеризуются убывающей отдачей, так что функции предельных издержек возрастают и поэтому являются обратимыми.

В свою очередь, лидер выбирает цену, ориентируясь на функции отклика. Для каждого уровня цены, выбранной лидером, можно определить остаточный спрос:

---

[218] Предполагается, что уравнение имеет решение при всех $p \geqslant 0$.

$$D_1(p) = D(p) - \sum_{j=2}^{n} R_j(p).$$

Фактически, лидера можно рассматривать как монополиста, сталкивающегося с функцией спроса $D_1(p)$. Таким образом, лидер решает задачу

$$\Pi_1 = D_1(p)p - c_1(D_1(p)) \to \max_p.$$

На Рис. 126 дана иллюстрация равновесия олигополии с ценовым лидерством для случая $n = 4$.

## Задачи

32. Сформулируйте и докажите теорему существования равновесия в модели ценового лидерства. (*Подсказка*: В качестве образца возьмите доказательство существования равновесия в модели Штакельберга.)

33. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функция издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = c\,y_1$ и $c_2(y_2) = y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = a - b\,p$. Показать, что суммарный выпуск будет больше, чем в равновесии Курно, но меньше, чем Парето-оптимальный. Показать равновесие графически.

34. Двое олигополистов конкурируют по типу модели ценового лидерства. Лидер имеет нулевые предельные издержки, а ведомый имеет квадратичную функцию издержек: $c_2(y_2) = y_2^2/2$. Спрос в отрасли описывается функцией $D(p) = 8 - p$. Сколько суммарной прибыли выиграли бы олигополисты, если бы сумели объединиться в одну фирму (картель)?

# 13. Модели найма

Модели с неполной и неодинаковой информированностью экономических субъектов о характере сделки, свойствах обмениваемых благ, их воздействиях друг с другом и др. довольно многообразны. В этой главе мы разберем ситуацию взаимодействия двух экономических субъектов: нанимателя (заказчика, владельца, начальника), и нанимаемого работника (подрядчика, менеджера, подчиненного), известную под названием "Principal-Agent problem".

## Модель с полной информацией

Рассмотрим сначала модель найма, в которой участники сделки полностью информированы обо всех ее характеристиках (ее условиях, результатах).

В этой модели наниматель владеет неким «фактором производства», позволяющим получать доход (добавленную стоимость) величиной $y=y(x)$, если уровень усилий работника составляет величину $x\in X$, где $X$ — множество возможных усилий (действий). Обычно предполагается, что функция $y(\cdot)$ является возрастающей и вогнутой, что означает, что доход возрастает с уровнем усилий, но с «убывающей отдачей». В предположении дифференцируемости функции $y(\cdot)$ это означает, что $y'(x)>0$, $\forall x\in X$ и $y'(\cdot)$ убывает.

Для стимулирования усилий работника наниматель выбирает схему оплаты $w(\cdot)$ в зависимости от некоторого наблюдаемого им сигнала о величине таких усилий. Схему оплаты $w(\cdot)$ называют также **контрактом**.

При этом, выбирая контракт, наниматель максимизирует остаточный доход, то есть разность между создаваемым работником доходом $y$ и вознаграждением $w$. Будем называть эту величину прибылью нанимателя:

$$\Pi=y(x)-w.$$

Естественно предполагать, что полезность работника в результате работы по найму зависит от уровня усилий и от величины оплаты, т.е. $u=u(x,w)$. Для упрощения анализа будем предполагать, что эта функция является сепарабельной:

$$u(x,w)=v(w)-c(x),$$

где $v(w)$ — полезность от зарплаты $w$, а $c(x)$ — тягость усилий $x$. Будем предполагать, что $v(\cdot)$ — возрастающая вогнутая функция, $c(\cdot)$ — возрастающая выпуклая функция. Если эти функции дифференцируемы, то приведенные условия модифицируются следующим образом: $v'(x)>0$, $v'(\cdot)$ убывает (убывающая предельная полезность), $c'(x)>0$ и $c'(\cdot)$ возрастает (возрастающая предельная тягость усилий).

Предположим сначала, что работник характеризуется резервной полезностью $u_0$. Это полезность альтернативной занятости, и работник не согласится на работу по контракту, если его полезность окажется меньше $u_0$. (Мы будем предполагать, что когда $u=u_0$, работник соглашается на данную работу).

Предполагают, что наниматель, выбирая схему оплаты (контракт) знает функцию полезности и резервную полезность работника, а работник принимает контракт как данный.

Можно рассматривать данную модель как динамическую игру. В ней стратегия нанимателя — контракт $w(\cdot)$. Мы рассмотрим один из вариантов модели, в которой контракт — это функция от усилий $x$: $w=w(x)$.

1. Наниматель выбирает функцию $w(\cdot)$ — контракт.

2. Работник выбирает, работать ему или нет (заключать или не заключать контракт).

3. Работник, если он подписал контракт, выбирает уровень усилий $x$.

Можно изобразить эту игру в виде дерева.

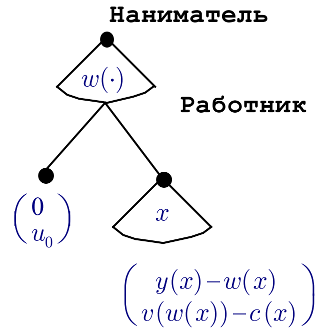


Рисунок 127. Представление модели наниматель-работник в виде дерева

Для полного описания игры необходимо задать множество допустимых выборов нанимателя — множество возможных контрактов $\{w(\cdot)\}$. В случае, если множество усилий не является конечным, решение описанной игры существует не для всех множеств возможных контрактов: задача работника (выбор усилий $x$) имеет решение далеко не для всех типов контрактов $w(\cdot)$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что наниматель может выбрать любой контракт, при котором задача работника имеет решение.

Это ситуация полной информации — всем все известно (о технологии, предпочтениях и производимых усилиях). Равновесие можно найти с помощью обратной индукции. При данном контракте $w(\cdot)$ работник решает задачу

$$u=v(w(x))-c(x) \to \max_{x\in X},$$

и выбирает соответствующие усилия $x^*$:

$$x^* \in \operatorname{argmax}_{x\in X}(v(w(x))-c(x)),$$

(ясно, что решение может быть и не единственное). При дифференцируемости функций

$$v'(w(x^*))w'(x^*)=c'(x^*)$$

для внутреннего решения.

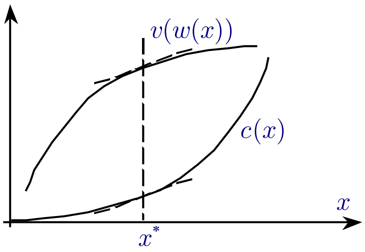


Рисунок 128. Выбор работником оптимальных действий

Далее, работник выбирает, подписывать ли ему контракт, зная оптимальное решение. Он сравнивает величины $u_0$ и $\max_{x\in X}(v(w(x))-c(x))$. Если $\max_{x\in X}(v(w(x))-c(x))<u_0$, работник отказывается подписывать контракт и выигрыш предпринимателя оказывается равным нулю. Если $u_0$ оказывается выше, то работник не подписывает контракт. Напомним, что если полезность одинакова при обоих вариантах его поведения, то мы предполагаем, что работник принимает решение подписать контракт.

Таким образом, в этой ситуации решение работника зависит от предлагаемого ему контракта — $w(\cdot)$. С другой стороны, от решения работника $x^*$ зависит величина прибыли $\Pi=y(x^*)-w(x^*)$. Наниматель предлагает контракт, дающий ему максимальную прибыль с учетом предсказуемого решения работника[219].

Эти рассуждения позволяют сформулировать следующую задачу, с помощью которой можно найти решения игры:

$$\Pi=y(x^*)-w(x^*)\to \max{}_{w(\cdot)}$$

$$x^* \in \operatorname{argmax}_{x\in X}(v(w(x))-c(x)), \qquad (1)$$

$$v(w(x^*))-c(x^*)\geqslant u_0. \qquad (2)$$

Ограничение (1) называют **ограничением совместимости стимулов**. Ограничение (2) называют **ограничением участия**. Ограничение участия исключает из анализа случай $v(w(x^*))-c(x^*)<u_0$, для которого выигрыши участников известны, упрощая анализ (в противном случае требовалось бы искать максимум, вообще говоря, разрывной функции выигрыша нанимателя). Если в полученном решении прибыль нанимателя отрицательна, то он предложит работнику такой контракт, который тот не подпишет; при этом наниматель получит более высокую прибыль (нулевую).[220]

Если решение задачи работника $x^*$ не единственно, то будем считать, что работник делает выбор, благоприятный для нанимателя. Поэтому можно предполагать, что наниматель сам выбирает $x^*$ при тех же ограничениях. Т.е. он выбирает как $w(\cdot)$, так и $x^*$, решая следующую задачу:

$$\Pi=y(x^*)-w(x^*)\to \max{}_{x^*,\, w(\cdot)}$$

$$v(w(x^*))-c(x^*)\geqslant v(w(x))-c(x),\ \forall x\in X,$$

$$v(w(x^*))-c(x^*)\geqslant u_0.$$

(Заметьте, что здесь ограничение совместимости стимулов записано несколько в другом виде).

Решение этой задачи нанимателя включает в себя *максимизацию по функции*, причем обычно решение является не единственным. Для нахождения решения удобно рассмотреть сначала вспомогательную задачу, без ограничения совместимости стимулов

$$\Pi=y(x^*)-w(x^*)\to \max{}_{x^*,\, w(\cdot)}$$

$$v(w(x^*))-c(x^*)\geqslant u_0.$$

Вводя обозначения $w=w(x^*)$, $x=x^*$, приходим к следующей задаче:

$$\Pi=y(x)-w\to \max{}_{x,\, w}$$

$$v(w)-c(x)\geqslant u_0.$$

В этой задаче выбираются оптимальные для нанимателя значения $x$ и $w$ при учете только ограничения участия. Поэтому уровень прибыли, соответствующий решению этой задачи, не может быть ниже ее уровня, соответствующего оптимальному контракту. В дальнейшем мы покажем, что в действительности они совпадают.

---

[219] Фактически, рассматривается решение игры в виде совершенного в подыграх равновесия.

[220] Можно было бы добавить еще один ход нанимателя: предлагать контракт или нет. Тогда в рассматриваемом «невыгодном» случае нанимателю достаточно не предлагать работнику никакого контракта.

Обозначим решение этой вспомогательной задачи через $(\hat{x}, \hat{w})$.

С учетом ограничения участия (которое в точке решения выполняется как равенство) ее можно свести к следующей задаче безусловной оптимизации по уровню усилий $x$:

$$\Pi = y(x) - v^{-1}(c(x) + u_0) \to \max_x$$

Для данного уровня усилий $\hat{x}$, в котором достигается максимум, плата должна быть равна $\hat{w} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0)$.

При дифференцируемости функций внутреннее решение характеризуется соотношением

$$y'(\hat{x}) = \frac{c'(\hat{x})}{v'(\hat{w})}.$$

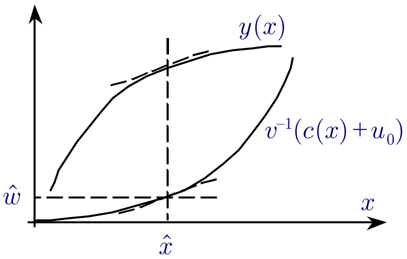


Рисунок 129. Идеальная для нанимателя ситуация, выбор $\hat{x}$ и $\hat{w}$

Это будет Парето-оптимум с точки зрения целевых функций $\Pi$ и $u$, (элемент переговорного множества, наиболее предпочитаемый нанимателем: наниматель получит весь излишек от сделки), см. Рис??.

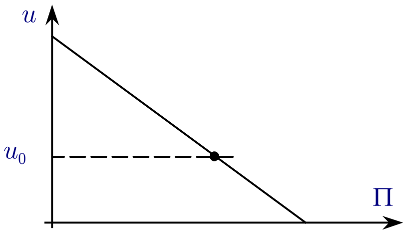


Рисунок 130. Идеальная для нанимателя ситуация на Парето-границе

Может ли наниматель достичь этой идеальной для себя ситуации?

Если нет ограничений на возможные контракты, то да, причем несколькими способами. Действительно, для этого следует выбрать контракт $w(\cdot)$ таким образом, чтобы решение задачи работника

$$v(w(x)) - c(x) \to \max_{x \in X}$$

достигалось в требуемой точке $\hat{x}$ и работник получал в этой точке требуемую оплату $\hat{w} = w(\hat{x})$. Графически это означает, что кривая $v(w(x))$ лежит под кривой $c(x) + u_0$ и совпадает с ней в точке $(\hat{x}, \hat{w})$. Если $c(\cdot)$ и $y(\cdot)$ дифференцируемы и ищется дифференцируемая функция $w(\cdot)$, то для внутреннего решения должно быть выполнено

$$w'(\hat{x}) = \frac{c'(\hat{x})}{v'(\hat{w})} \; (= y'(\hat{x})).$$

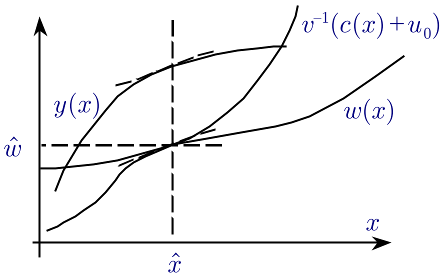


Рисунок 131. Подбор схемы оплаты, реализующей идеальную для нанимателя ситуацию

Таким образом, если стратегии нанимателя и работника составляют равновесие, причем в равновесии выполнено ограничение участия, то они обладают следующими характеристиками:

Усилия работника в равновесии равны $x=\hat{x}$, а равновесный контракт $w(\cdot)$ удовлетворяет условиям $w(x) \leqslant v^{-1}(c(x)+u_0)$ $\forall x \in X$ и $w(\hat{x})=\hat{w}$. Если работник сталкивается с произвольным (в том числе неравновесным) контрактом $w(\cdot)$, то он выбирает уровень усилий $x=x^*(w(\cdot))$, который максимизирует полезность работника $v(w(x))-c(x)$.

Верно и обратное: если существует уровень усилий $x$, при котором прибыль $y(x)-v^{-1}(c(x)+u_0)$ неотрицательна, то любые стратегии, удовлетворяющие этим условиям, составляют равновесие рассматриваемой игры.

Опишем несколько простейших контрактов, при использовании которых достигается идеальная для нанимателя ситуация.

1) **Пакетный контракт** («не хочешь, не бери», "take-it-or-leave-it"). Простейший контракт обуславливает положительную оплату только для уровня усилий $\hat{x}$, например,

$$w(x)=\begin{cases} 0, & x \neq \bar{x}, \\ \bar{w}, & x=\bar{x}. \end{cases}$$

Контракт

$$w(x)=\begin{cases} 0, & x < \bar{x}, \\ \bar{w}, & x \geqslant \bar{x}. \end{cases}$$

также будем называть пакетным (см. Рис. ??).

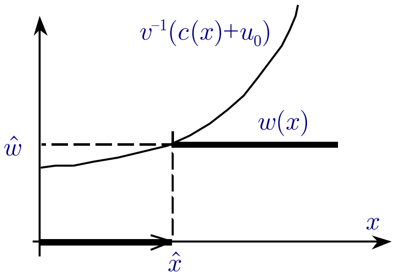


Рисунок 132. Оптимальный пакетный контракт

Очевидно, что для оптимальности пакетного контракта его параметры $\bar{x}$ и $\bar{w}$ следует выбрать следующим образом:

$$\bar{x}=\hat{x} \text{ и } \bar{w}=\hat{w}.$$

2) Линейный по усилиям контракт:

$$w(x)=a+bx.$$

Найдем его параметры. Из условия $w'(\hat{x}) = y'(\hat{x})$ получаем, что

$$b = y'(\hat{x}).$$

Из условия $v(w(\hat{x})) = v(\hat{w}) = c(\hat{x}) + u_0$ получаем, что

$$a = \hat{w} - b\hat{x} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0) - b\hat{x},$$

Т.е. если $\hat{x}$ — оптимальные усилия, а $\hat{w}$ — соответствующая оплата то

$$w(x) = \hat{w} + y'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

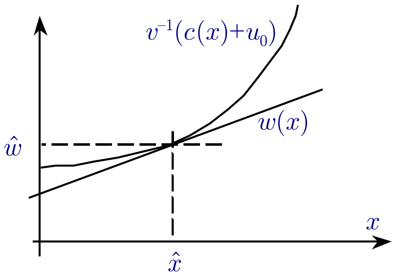


Рисунок 133. Оптимальный линейный по действиям контракт

3) Линейный по результатам контракт:

$$w(x) = a + by(x).$$

Для того, чтобы выполнялось $w'(\hat{x}) = y'(\hat{x})$, требуется, чтобы $b = 1$. Таким образом, это должен быть **контракт с полной ответственностью** — все прибыли и убытки берет на себя работник. Наниматель же получает фиксированную сумму $A = -a$ ($\Pi = A$). Т.е.

$$w(x) = y(x) - A.$$

Для того, чтобы этот контракт был оптимальным для нанимателя, следует выбрать

$$A = y(\hat{x}) - \hat{w}.$$

Контракт с полной ответственностью заставляет работника, по сути дела, самому решать задачу нанимателя, которая была сформулирована нами ранее.

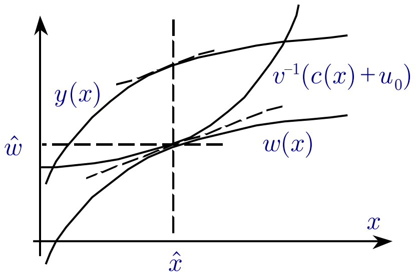


Рисунок 134. Оптимальный линейный по результатам контракт

Мы рассмотрели модель с полной информацией. Далее рассмотрим модели с неполной и, прежде всего, асимметричной информацией, в которых работник владеет некоторой информацией, а наниматель — нет.

## Задачи

1. Барин выбирает, какую долю $\tau \in [0; 1]$ стоимости урожая $y$ забирать у крестьянина в виде издольщины. При этом он максимизирует свой ожидаемый доход $\tau y$. Крестьянин максимизирует по $y \geqslant 0$ функцию $(1 - \tau)\, y - y^2$, то есть прибыль при квадратичной функции тягости усилий.

(1) Найти оптимальную для барина долю $\tau$.

(2) Что будет, если дополнительно к издольщине барин может использовать фиксированный оброк ($r$)? Какими данными следует дополнить задачу, чтобы она имела решение? Введите соответствующие обозначения, запишите целевые функции и найдите решение.

2. [Varian] Профессор $P$ наняла преподавателя-ассистента мистера $A$. Профессора интересует, сколько часов мистер $A$ будет преподавать, а также то, сколько она должна ему заплатить. Профессор $P$ желает максимизировать свою функцию заработной платы $x-w$, где $x$ — количество часов, преподаваемых мистером $A$, а $w$ — заработная плата, которую она ему платит. Если мистер $A$ преподает $x$ часов и получает $w$, то его полезность равна $w-x^2/2$. Резервная полезность мистера $A$ равна нулю.

(a) Если профессор $P$ выбирает $x$ и $w$, максимизируя свою полезность при ограничении, что мистер $A$ готов на нее работать, то сколько часов будет преподавать мистер $A$ и сколько ему придется заплатить?

(b) Предположим, что профессор $P$ устанавливает схему заработной платы в форме $w(x)=ax+b$ и позволяет мистеру $A$ выбирать количество часов $x$. Какие значения $a$ и $b$ следует выбрать профессору $P$? Удалось бы профессору $P$ достичь более высокого уровня заработной платы, если бы она использовала схему $w(x)$ более общей функциональной формы?

## Модель с ненаблюдаемыми действиями

Рассмотрим модель, в которой скрытыми являются действия работника, то есть наниматель не знает, какие усилия произвел работник, он наблюдает только их результат, и в этих условиях нанимателю нужно стимулировать работника выбрать уровень усилий, который бы максимизировал ожидаемую прибыль.

Примером такой ситуации является рынок страховых услуг. Если условия страхования актуарно справедливы, страхователю выгодно заключить контракт на величину, равную потенциальным потерям. Однако, застраховав имущество, многие начинают использовать его менее аккуратно, тем самым увеличивая риск его потери или порчи, то есть риск наступления страхового случая. Это связано с ненаблюдаемостью усилий по сохранению имущества и невозможностью обусловить плату уровнем этих усилий. Подобные ситуации известны в экономической теории под названием **моральный риск**. Ясно, что страховой компании выгодно стимулировать своих клиентов относиться к застрахованному имуществу более бережно, однако, как правило, это можно сделать только за счет неполного страхования.

### Формулировка модели и общие свойства

Пусть действия работника, $x$, ненаблюдаемы. Результат же действий (доход), $\tilde{y}$, есть (нетривиальная) случайная величина, распределение которой зависит от $x$:

$$\tilde{y} \sim F_x.$$

Здесь $\{F_x\}$ — это семейство распределений с параметром $x$. Через $F_x(\cdot)$ обозначим соответствующую функцию распределения.

(В соответствии с моделью принятия решений при риске, можно предположить, что $\tilde{y}$ — это случайная величина, заданная на состояниях мира $s \in S$).

Для простоты мы в дальнейшем будем предполагать, что носитель этого распределения (область значений, принимаемых величиной $\tilde{y}$) не зависит от $x$. Содержательно это означает, что по наблюдаемым значениям $\tilde{y}$ нельзя однозначно определить, какие действия работник выбрал (или не мог выбрать). Такое предположение позволяет избавиться от многих технических сложностей.

Кроме того, естественно предположить, что чем больше усилия, тем более высоким должен быть результат. Поэтому будем предполагать, что распределение $F_x(\cdot)$ «сдвигается вправо» при росте $x$, т.е.

$$F_{x_1}(y) > F_{x_2}(y) \text{ при } x_1 < x_2.$$

Это означает[221], что $F_{x_2}$ **стохастически доминирует** $F_{x_1}$ при $x_1 < x_2$. Из этого свойства следует, что чем больше усилия, тем больше ожидаемый доход:

$$\mathsf{E}_{x_1}\tilde{y} < \mathsf{E}_{x_2}\tilde{y} \text{ при } x_1 < x_2.$$

Математическое ожидание берется по распределению $F_x$, следовательно, оно зависит от того, какие действия $x$ выбрал работник. Соответственно, оператор математического ожидания мы будем писать в виде $\mathsf{E}_x$. Предполагают, что наниматель нейтрален к риску, т.е. его функция выигрыша — ожидаемая прибыль. Т.е. наниматель стремиться максимизировать величину

$$\mathsf{E}_x\Pi = \mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{w}),$$

где $\tilde{w}$ — оплата по контракту, которая, вообще говоря, является случайной величиной.

Работник максимизирует $U = \mathsf{E}_x u$ — математическое ожидание элементарной функции полезности $u(x, w)$, которая, как и раньше, зависит от объема усилий $x$ и от вознаграждения $w$.

Условие участия, по аналогии со случаем полной информации, состоит в том, что работник соглашается на работу по контракту только в том случае, если его ожидаемая полезность при этом не меньше, чем его резервная полезность $u_0$:

$$\mathsf{E}_x u \geqslant u_0.$$

Для упрощения анализа чаще всего рассматривают частные случаи, когда функция $u(x, w)$ имеет простой вид. Две самых популярных спецификации функции полезности работника имеют следующий вид:

$$u(x, w) = v(w - c(x))$$

и

$$u(x, w) = v(w) - c(x),$$

где $v(\cdot)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c(\cdot)$ — возрастающая выпуклая функция.

Оба типа функции сепарабельны по $w$ и $x$ (первая в каком-то смысле еще и квазилинейна по зарплате $w$), и включают функцию $v(\cdot)$, позволяющую моделировать отношение работника к риску (риск может быть связан с тем, что получаемая им оплата $w$ является случайной величиной). Нейтральный к риску работник будет иметь линейную возрастающую функцию $v(\cdot)$, которую без потери общности можно считать равной $v(z) = z$. Поэтому мы будем называть работника нейтральным к риску, если

$$u(x, w) = w - c(x).$$

---

[221] Более точно, речь идет о стохастическом доминировании первого порядка.

Как правило, предполагается, что работник не склонен к риску, то есть функция $v(\cdot)$ вогнута[222]. Работник является рискофобом, если функция $v(\cdot)$ строго вогнута. При этом, если $v(\cdot)$ дифференцируема, то она имеет положительную убывающую производную.

Поскольку действия $x$ ненаблюдаемы, то оплата по контракту не может быть обусловлена предпринимаемыми работником действиями (усилиями) $x$. В предположении, что наблюдаемыми являются результаты $\tilde{y}$ этих усилий, рассмотрим модель контрактных отношений, при которых оплата по контракту обуславливается полученными результатами (как сигналами относительно уровня усилий). Поэтому в рассматриваемой модели с ненаблюдаемыми действиями контракт — это функция вида $w=w(y)$.

Как и ранее, мы будем предполагать, что наниматель, выбирая контракт, знает функцию полезности и резервную полезность работника, а работник принимает контракт как данный. Таким образом, модель представляет собой динамическую игру. Последовательность ходов в этой игре следующая:

1. Наниматель предлагает контракт $w(\cdot)$.
2. Работник выбирает, работать ему или нет.
3. Работник, если он подписал контракт, выбирает уровень усилий $x$.
4. «Природа» при данном $x$ по распределению $F_x$ случайным образом «генерирует» $\tilde{y}$.

Контракт представляет собой дележ дохода $y$ между нанимателем и работником, и, тем самым, задает их выигрыши.

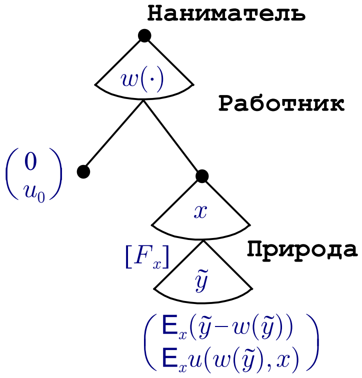


Рисунок 135. Представление модели наниматель-работник с ненаблюдаемыми действиями в виде дерева

Для поиска решения этой модели можно воспользоваться обратной индукцией. При заданном контракте $w(\cdot)$ оптимальный для работника уровень усилий является решением следующей задачи:

$$U=\mathsf{E}_x u(w(\tilde{y}),x) \to \max{}_{x\in X}\,.$$

Учитывая это, задача поиска оптимального для нанимателя контракта имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}_{x^*}\Pi=\mathsf{E}_{x^*}(\tilde{y}-w(\tilde{y}))\to \max{}_{x^*,\,w(\cdot)}$$

$$\mathsf{E}_{x^*}u(w(\tilde{y}),x^*)\geqslant \mathsf{E}_x u(w(\tilde{y}),x),\ \forall\, x\in X$$

(ограничение совместимости стимулов),

---

[222] Ясно, что функция $v(\cdot)$ моделирует отношение к риску только с точки зрения, $w$, но не с точки зрения $x$. Но для нас это несущественно, поскольку в данной модели усилия $x$ не являются случайными.

$$\mathsf{E}_{x^*} u(w(\tilde{y}), x^*) \geqslant u_0$$

(ограничение участия).

Объяснение того, почему задача нанимателя включает выбор усилий $x^*$, такое же, как для модели с наблюдаемыми действиями: работник предполагается «благожелательным» по отношению к нанимателю, в том смысле, что из равновыгодных для себя действий готов выбрать выгодные для нанимателя[223].

Проанализируем сначала случай с наблюдаемыми действиями, но со случайными результатами. Это даст нам «идеальную» точку отсчета для анализа модели с ненаблюдаемыми действиями. При этом, как и выше (в ситуации, когда результат однозначно определяется выбором уровня усилий), рассмотрим вспомогательную задачу, в которой определятся оптимальные для нанимателя значения $x$ и $w$ при ограничении участия:

$$\mathsf{E}_x(\tilde{y} - w) \to \max_{x,\, w}$$

$$\mathsf{E}_x u(w, x) \geqslant u_0.$$

Поскольку здесь как $w$, так и $x$ — детерминированные величины, то $u(w, x)$ — тоже детерминированная. Таким образом, задача сводится к следующей:

$$\mathsf{E}_x \tilde{y} - w \to \max_{x,\, w}$$

$$u(w, x) \geqslant u_0. \tag{♋}$$

При

$$u(x, w) = v(w) - c(x),$$

выражая $w$ из ограничения участия, получаем следующую задачу:

$$\mathsf{E}_x \tilde{y} - v^{-1}(c(x) + u_0) \to \max_x. \tag{♌}$$

Как и раньше, обозначим соответствующую «идеальную» ситуацию $(\hat{x}, \hat{w})$. Если из задачи (♌) найден эффективный уровень усилий $\hat{x}$, то соответствующая плата должна быть равна

$$\hat{w} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0).$$

Как и при однозначности результата, эту идеальную ситуацию можно реализовать бесконечным числом способов в виде контракта $w(\cdot)$, зависящего от усилий $x$. (Например, можно использовать пакетный контракт). Кривая $w(x)$ должна лежать под кривой $v^{-1}(c(x) + u_0)$ и касаться ее в точке $(\hat{x}, \hat{w})$. При этом достигается Парето-оптимум с точки зрения соответствующих целевых функций: ожидаемой прибыли $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{w})$ и ожидаемой полезности $\mathsf{E}_x v(\tilde{w}) - c(x)$.

Действительно, если от произвольной оплаты $\tilde{w}$, перейти к фиксированной оплате $\mathsf{E}_x \tilde{w}$, то ожидаемая прибыль не изменится, а ожидаемая полезность не уменьшится (поскольку работник не склонен к риску). Поэтому достаточно рассматривать только случаи, когда плата не случайная. При этом, как несложно понять, записанная выше задача (♋) представляет собой задачу, характеризующую Парето-оптимальные состояния.

Предположим теперь, что действия (усилия) ненаблюдаемы. Поскольку оплату по контракту можно обуславливать только наблюдаемыми величинами, то приходится обуславливать величина оплаты в данной ситуации может зависеть только от результата $y$. Таким

---

[223] Это предположение базируется на том, что наниматель может простимулировать благожелательные действия работника (доплатить ему).

образом, из всех рассмотренных выше контрактов (для модели с наблюдаемыми действиями) можно реализовать только линейный по результатам контракт:

$$w(y) = a + by.$$

который является оптимальным по Парето в случае, если это контракт с полной ответственностью:

$$w(y) = y - A.$$

Покажем, что наилучший для нанимателя контракт вида $w(y)$ является оптимальным по Парето лишь при ограничительных предположениях относительно отношения к риску работника. Об этом свидетельствуют следующие два утверждения.

### Теорема 1

Если работник нейтрален к риску, то наилучший для нанимателя контракт с полной ответственностью является Парето-оптимальным и эквивалентен с точки зрения ожидаемой прибыли и ожидаемой полезности эффективному состоянию $(\hat{x}, \hat{w})$.

***Доказательство.***

Ожидаемая прибыль в данной ситуации равна $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{y} - A) = A$, а ожидаемая полезность равна $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - A) - c(x) = \mathsf{E}_x\tilde{y} - A - c(x)$.

Задача максимизации ожидаемой полезности по $x$ эквивалентна задаче (♌), учитывая, что при нейтральности к риску $v^{-1}(w) = w$. Таким образом, работник выберет эффективные усилия. Параметр наилучшего для нанимателя контракта с полной ответственностью находится из условия участия:

$$A = \mathsf{E}_x\tilde{y} - c(x) - u_0.$$

При этом ожидаемая полезность равна $u_0$, а ожидаемая прибыль равна $\mathsf{E}_x\tilde{y} - c(x) - u_0$ (где $x$ — эффективные усилия), то есть она такая же, какая достигается в задаче (♌).

■

Очевидно, что описанный в теореме контракт[224] является не только оптимальным по Парето, но и оптимальным для нанимателя среди всех возможных контрактов, и факт ненаблюдаемости усилий в данном случае несущественен, поскольку этот контракт решает задачу максимизации ожидаемой прибыли при единственном ограничении — ограничении участия. (Это Парето-оптимальное состояние, в котором один из игроков получает минимальный выигрыш. Следовательно, другой игрок получает максимально возможный выигрыш). Фактически при нейтральности работника к риску модель сводится к модели с наблюдаемыми действиями. Но по существу это единственная содержательно интересная ситуация, когда ненаблюдаемость усилий не имеет значения, что и показывает следующее утверждение.

### Теорема 2

Если работник — рискофоб, и допустимый контракт $w(\cdot)$ таков, что $\tilde{w} = w(\tilde{y})$ — нетривиальная случайная величина, то соответствующая ситуация не является оптимальной по

---

[224] Ясно, что то же самое верно и для любого другого контракта, который приводит к тем же ожидаемым выигрышам.

Парето, поскольку можно увеличить ожидаемую прибыль, не уменьшая ожидаемой полезности.

***Доказательство.***

Действительно, в данной ситуации можно случайную оплату $\tilde{w}$ заменить на ее безрисковый эквивалент. При этом по определению ожидаемая полезность работника не изменится, ожидаемая же прибыль вырастет (у рискофоба безрисковый эквивалент нетривиальной случайной оплаты строго меньше математического ожидания такой оплаты).

■

Из этого утверждения следует, что *контракт с полной ответственностью в случае работника — рискофоба не будет Парето-оптимальным*, поскольку $\tilde{w}=\tilde{y}-A$ — нетривиальная случайная величина. Это связано с тем, что наниматель заинтересован в известной степени застраховать такого работника.

Другое следствие состоит в том, что если при ненаблюдаемости действий работник является рискофобом, то Парето-оптимальность достижима только в случае, когда плата $w(\tilde{y})$ детерминированная. Ясно, что такой контракт не является стимулирующим и работник, работая по нему, будет делать наименьшие возможные усилия $x=\min(X)$ (если соответствующий минимум существует). Следовательно, *Парето-оптимальность достижима только если среди эффективных контрактов есть контракты с минимальными возможными усилиями*, то есть только в содержательно неинтересном случае, когда нанимателю нет смысла стимулировать работника, достаточно дать ему минимальную плату, обеспечивающую резервную полезность. В этом случае наниматель заинтересован полностью застраховать работника.

В общем случае, как мы увидим далее, оптимальный контракт — это компромисс между двумя противоположными целями, которые преследует наниматель: целью *стимулирования* работника выполнять выгодные для нанимателя действия и целью *страхования* работника от риска.

Заметим, что предположение о том, что носитель распределения $\tilde{y}$ не зависит от величины усилий $x$ является существенным для проводимого здесь анализа. Так, в крайнем случае зависимости носителя распределения $\tilde{y}$ от усилий — когда эти носители при разных действиях не пересекаются — по результату можно однозначно установить, предпринимал ли работник те или иные усилия. В этом случае усилия оказывается наблюдаемыми косвенным образом, и оптимальный контракт оказывается тем же, что и в случае наблюдаемых усилий.

## Дискретный вариант модели со скрытыми действиями

Рассмотрим модель в дискретном случае: конечное число возможных действий ($x_a$, $a=1,\ldots,k$) и конечное число возможных результатов ($y_s$, $s=1,\ldots,m$). Поскольку сам по себе уровень $x$ не имеет значения, то вместо $x$ мы будем использовать $a$ и обозначим $c(x_a)=c_a$, предполагая, что усилия $x_a$ растут с ростом индекса $a$. Каждое значение выбранных работником усилий $a$ приводит к случайному результату $\tilde{y}$, который описывается следующим дискретным распределением:

| | | |
|---|---|---|
| $y_1$ | $\cdots$ | $y_m$ |
| $\mu_{a1}$ | $\cdots$ | $\mu_{am}$ |

Здесь $\mu_{as}>0$ — вероятность $s$-го результата в случае, когда работник выбрал усилия $a$. По определению вероятностей $\sum_s \mu_{as}=1$. Мы будем предполагать, что все $y_s$ различны и возрастают по $s$. По предположению, распределение сдвигается вправо при росте усилий (вероятность более высоких результатов возрастает с ростом усилий), т.е.

$$\sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{as} > \sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{bs}, \ \forall \bar{s} = 1, ..., m-1, \ \forall a < b.$$

Исходные данные для дискретной модели (возможные уровни усилий, уровни результатов и вероятности) можно представить в виде следующей таблицы:

| | $y_1$ | $\cdots$ | $y_m$ | |
|---|---|---|---|---|
| $a=1$ | $\mu_{11}$ | $\cdots$ | $\mu_{1m}$ | $c_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\{\mu_{as}\}$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a=k$ | $\mu_{k1}$ | $\cdots$ | $\mu_{km}$ | $c_k$ |

Ниже мы будем предполагать, что элементарная функция полезности имеет вид[225]:

$$u(a, w) = v(w) - c_a.$$

Контракт задается величинами $w_s = w(y_s)$ — каждому возможному результату $y_s$ контракт сопоставляет уровень оплаты $w_s$. Таким образом, контракт представляет собой вектор $\boldsymbol{w} = \{w_s\}$. С другой стороны, это дискретная случайная величина $\tilde{w}$.

При этом ожидаемая полезность (как функция от $a$) равна

$$U(a, \boldsymbol{w}) = \mathsf{E}_a[v(w) - c_a] = \sum\nolimits_s \mu_{as} v(w_s) - c_a,$$

а ожидаемая прибыль —

$$\Pi^e(a, \boldsymbol{w}) = \mathsf{E}_a \Pi = \mathsf{E}_a(\tilde{y} - \tilde{w}) = \sum\nolimits_s \mu_{as}(y_s - w_s).$$

Задача нанимателя имеет вид:

$$\Pi^e(a^*, \boldsymbol{w}) \to \max\nolimits_{a^*, \boldsymbol{w}}$$

$$U(a^*, \boldsymbol{w}) \geqslant U(a, \boldsymbol{w}), \ \forall a = 1, ..., k,$$

(ограничение совместимости стимулов),

$$U(a^*, \boldsymbol{w}) \geqslant u_0$$

(ограничение участия).

Поскольку число возможных усилий конечно, то эту задачу вообще говоря, можно решать перебором. Для этого, задавшись конкретным $a^*$, следует найти контракт $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(a^*)$, минимизирующий ожидаемый уровень оплаты при условии, что при данной оплате работник предпочтет (выберет) уровень усилий $a^*$. Обозначим ожидаемый уровень оплаты

$$w^e(a, \boldsymbol{w}) = \mathsf{E}_a \tilde{w} = \sum\nolimits_s \mu_{as} w_s.$$

Тогда соответствующая вспомогательная задача имеет следующий вид:

$$w^e(a^*, \boldsymbol{w}) \to \min\nolimits_{\boldsymbol{w}}$$

$$U(a^*, \boldsymbol{w}) \geqslant U(a, \boldsymbol{w}), \ \forall a = 1, ..., k,$$

$$U(a^*, \boldsymbol{w}) \geqslant u_0.$$

---

[225] Некоторые альтернативные модели найма представлены в задачах

В этой задаче искомыми переменными являются только уровни оплаты для различных результатов, т.е. величины $w_s$. Соответствующее максимальное значение ожидаемой прибыли равно $\Pi^e(a^*, \boldsymbol{w}(a^*))$. Вычислив для каждого возможного уровня усилий $a^*=1, ..., k$ соответствующие значения прибыли, можно найти такое усилие, при котором ожидаемая прибыль ($\Pi^e(a^*, \boldsymbol{w}(a^*))$ достигает максимума. Если вспомогательная задача не имеет допустимых решений, то не существует контрактов, обеспечивающих такой уровень усилий, т.е. усилия оказываются нереализуемыми. Поэтому оптимум ищется только по реализуемым усилиям, множество которых всегда не пусто (усилия с минимальными издержками всегда реализуемы).

Поскольку элементарная функция полезности имеет специальный вид

$$u(a, w) = v(w) - c_a,$$

то эту задачу можно свести к задаче выпуклого программирования (минимизация выпуклой функции на выпуклом многогранном множестве) путем замены переменных $v_s = v(w_s)$. Как ограничение участия, так и ограничение совместимости стимулов будут в новых переменных линейными, а ожидаемая прибыль — вогнутой функцией переменных $v_s$:

$$\Pi^e(a, \boldsymbol{v}) = \sum_s \mu_{as}(y_s - f(v_s)),$$

где через $f(\cdot)$ мы обозначили $v^{-1}(\cdot)$. (Так как $v(\cdot)$ вогнута, то $f(\cdot)$ выпукла, а $-f(\cdot)$ вогнута). Область определения переменных $v_s$ совпадает с областью значений функции $v(\cdot)$ и ее описание должно в явном виде присутствовать в формулировке соответствующей задачи. В дальнейшем мы будем предполагать, что решения рассматриваемых задач являются внутренними.

### *Дискретный вариант модели найма с двумя возможными уровнями усилий*

Предположим, что работнику доступны только два действия (два уровня усилий). Обозначим их через $H$ и $L$ (высокий и низкий уровень усилий соответственно). По предположению о том, что распределение сдвигается вправо при росте усилий, имеем:

$$\sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{Ls} > \sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{Hs}, \ \forall \bar{s} = 1, ..., m-1.$$

Напомним, что при конструировании оптимального контракта предварительно определятся величины $\Pi^e(L, \boldsymbol{w}(L))$, $\Pi^e(H, \boldsymbol{w}(H))$. Далее выбирается усилие (и соответствующий ему контракт), при котором величина $\Pi^e(a, \boldsymbol{w}(a))$, $a =$ $L$, $H$ является максимальной.

Охарактеризуем оптимальный контракт $a$ ($a = L$, $H$), обеспечивающий нанимателю ожидаемую прибыль $\Pi^e(a, \boldsymbol{w}(a))$ (решение вспомогательной задачи с уровнем усилий $a$).

Если работник совершает действия $a$, то ожидаемая прибыль нанимателя равна

$$\sum_s \mu_{as}(y_s - w_s).$$

Будем предполагать, что работник является рискофобом, а наниматель нейтрален к риску.

Ожидаемая полезность работника в случае, когда он выбирает действие $a$, будет равна

$$\sum_s \mu_{as} v(w_s) - c_L,$$

Тогда, в случае, если $a = L$, условие совместимости стимулов имеет следующий вид:

$$\sum_s \mu_{Ls} v(w_s) - c_L \geqslant \sum_s \mu_{Hs} v(w_s) - c_H,$$

а условие участия:

$$\sum_s \mu_{Ls} v(w_s) - c_L \geqslant u_0,$$

Соответствующая вспомогательная задача — минимизировать ожидаемую оплату по контракту (максимизировать ожидаемую прибыль)

$$\sum_s \mu_{Ls} w_s \to \min{}_w$$

(соответственно, $\sum_s \mu_{Ls}(y_s - w_s) \to \max{}_w$) при указанных условиях совместимости стимулов и участия.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда возможны всего два результата (исхода): $y_1$, $y_2$. Мы предполагаем, что для вероятностей выполнено $\mu_{H1} < \mu_{L1}$, и, следовательно, $\mu_{H2} > \mu_{L2}$ (более высокие усилия способствуют более высокому результату).

Пусть наниматель хочет побудить работника выбрать низкие усилия $L$. Тогда условие совместимости стимулов имеет вид

$$\mu_{L1}v_1 + \mu_{L2}v_2 - c_L \geqslant \mu_{H1}v_1 + \mu_{H2}v_2 - c_H.$$

Учитывая, что $\mu_{H2} > \mu_{L2}$:

$$v_2 \leqslant \frac{\mu_{L1} - \mu_{H1}}{\mu_{H2} - \mu_{L2}} v_1 + \frac{c_H - c_L}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}.$$

Поскольку сумма вероятностей равна единице ($\mu_{L1} + \mu_{L2} = 1$, $\mu_{H1} + \mu_{H2} = 1$), то

$$v_2 \leqslant v_1 + \frac{c_H - c_L}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}.$$

Второе слагаемое здесь положительно при $c_L < c_H$. Таким образом, линия совместимости стимулов в координатах $(v_1, v_2)$ — это прямая, параллельная биссектрисе и проходящая выше нее. Допустимые точки лежат ниже этой линии.

Ограничение участия

$$\mu_{L1}v_1 + \mu_{L2}v_2 - c_L \geqslant u_0,$$

можно записать в виде

$$v_2 \geqslant \frac{u_0 + c_L - \mu_{L1}v_1}{\mu_{L2}}.$$

Оно задается прямой, наклон которой равен $-\mu_{L1}/\mu_{L2}$. Допустимые точки лежат выше этой прямой. Это одна из линий безразличия работника. (Все линии безразличия работника имеют одинаковый наклон $-\mu_{L1}/\mu_{L2}$).

Чтобы записать задачу нанимателя в терминах полезности обозначим через $f(\cdot)$ функцию, обратную к $v(\cdot)$, то есть $f(v_s) = w_s$:

$$\mathsf{E}_L\tilde{\Pi} = \mu_{L1}(y_1 - f(v_1)) + \mu_{L2}(y_2 - f(v_2)).$$

Соответствующие кривые безразличия выпуклы вправо вверх, множество лучших точек лежит под кривой безразличия.

Наклон кривой безразличия нанимателя определяется следующим образом:

$$\frac{\partial(\mathsf{E}_L\tilde{\Pi})/\partial v_1}{\partial(\mathsf{E}_L\tilde{\Pi})/\partial v_2} = -\frac{\mu_{L1}f'(v_1)}{\mu_{L2}f'(v_2)} = -\frac{\mu_{L1}v'(w_2)}{\mu_{L2}v'(w_1)}.$$

Кривая безразличия нанимателя касается прямой, определяемой условием участия, в точке, где

$$-\frac{\mu_{L1}v'(w_2)}{\mu_{L2}v'(w_1)}=-\frac{\mu_{L1}}{\mu_{L2}}.$$

Т.е. $v'(w_1)=v'(w_2)$, что при убывании $v'(\cdot)$, означает, что точка касания соответствует фиксированной оплате $w_1=w_2$, то есть лежит на биссектрисе.

Поскольку в случае, когда $a = L$, линия, соответствующая ограничению совместимости стимулов, лежит выше биссектрисы, то ограничение совместимости стимулов неактивно. Следовательно, на диаграмме в координатах $(v_1, v_2)$ оптимальное решение лежит на биссектрисе $v_1=v_2$.

Таким образом, при $a=L$ оплата по контракту должна быть фиксированной: $w_1=w_2=\overline{w}$ (контракт с полным страхованием работника).

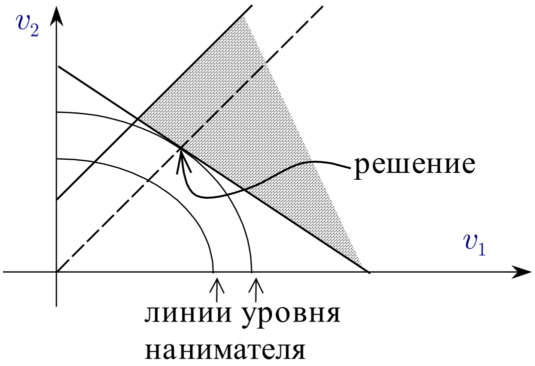


Рисунок 136

Аналогичным образом можно показать, что $w_1=w_2=\overline{w}$ и в случае, когда $c_L=c_H$. Обратно, если оплата по контракту не зависит от результатов, из условия совместимости стимулов следует, что

$$\overline{v}-c_L\geqslant\overline{v}-c_H,$$

или

$$c_H\geqslant c_L,$$

Из этого можно сделать вывод, что оплата по контракту, принуждающему к действиям $L$, будет фиксированной в тех и только в тех случаях, когда действия типа $L$ требуют от работника меньших затрат, чем действия типа $H$, то есть являются для него выгодными сами по себе.

Таким образом, для низких усилий линия совместимости стимулов лежит выше биссектрисы, контракт должен изображаться точкой на биссектрисе, и активным является только ограничение участия.

Проанализируем теперь случай, когда наниматель хочет побудить работника выбрать высокий уровень усилий $H$. Условие совместимости стимулов в этом случае записывается в виде

$$\mu_{H1}v_1+\mu_{H2}v_2-c_H\geqslant\mu_{L1}v_1+\mu_{L2}v_2-c_L.$$

Множество допустимых по этому условию контрактов имеет ту же границу, что и при $L$ (она параллельна биссектрисе и лежит выше ее), но допустимые точки лежат выше границы:

$$v_2\geqslant v_1+\frac{c_H-c_L}{\mu_{H2}-\mu_{L2}}.$$

Ограничение участия

$$\mu_{H1}v_1+\mu_{H2}v_2-c_H \geqslant u_0,$$

задается прямой

$$v_2=\frac{u_0+c_H-\mu_{H1}v_1}{\mu_{H2}}.$$

Ее наклон равен $-\mu_{H1}/\mu_{H2}$. Поскольку точка касания соответствующих кривых безразличия работника и нанимателя лежит на биссектрисе и поэтому в данном случае не принадлежит множеству допустимых контрактов, ограничение совместимости стимулов оказывается активным.

В предположении, что активным является и ограничение участия, решение представляется точкой пересечения двух соответствующих прямых (см. Рис.???). Линии уровня нанимателя в точке пересечения с биссектрисой имеют тот же наклон $-\mu_{H1}/\mu_{H2}$, что и линия участия (это проверяется так же, как для $L$).

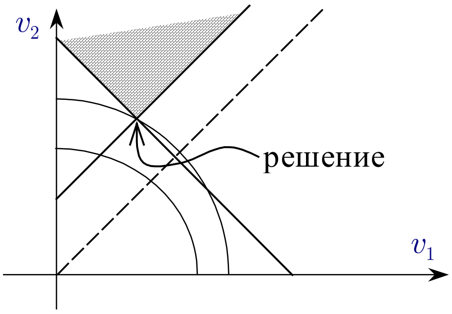


Рисунок 137

Оптимальное для нанимателя решение не является оптимальным по Парето. Оптимальное решение находится в точке $A$, которая лежит на пересечении линии совместимости стимулов $h$, и линии участия $i$. Оно не оптимально по Парето, так как точка $B$ лежит на той же кривой безразличия нанимателя, а для работника она дает большую ожидаемую полезность, чем $A$ (лежит на более высокой линии безразличия работника $i'$). Точка $B$ является Парето-оптимальной (кривые безразличия касаются), но ее нельзя реализовать как равновесие из-за условия совместимости стимулов. Если же наниматель изменит контракт так, что работнику станет доступна точка $B$, то работнику будет выгодно изменить свои действия с $H$ на $L$. Действительно, на диагонали выполняется неравенство

$$\mu_{L1}v+\mu_{L2}v-c_L>\mu_{H1}v+\mu_{H2}v-c_H.$$

При переходе от $H$ к $L$ карта кривых безразличия работника в координатах $(v_1,v_2)$ меняется, так как меняются вероятности. Соответствующей точке $B$ линией безразличия будет $i''$. В то же время

$$\mathsf{E}_L\tilde{\Pi}=\mu_{L1}(y_1-f(v))+\mu_{L2}(y_2-f(v))\mathsf{E}_H\tilde{\Pi}=\mu_{L1}(y_1-f(v))+\mu_{L2}(y_2-f(v)).$$

Наниматель должен ограничивать полезность работника, чтобы тот не выбрал еще большую в ущерб интересам нанимателя.

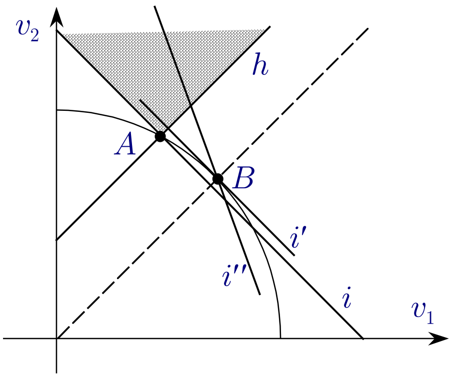


Рисунок 138

Проведем теперь анализ задачи в общем случае $m$ исходов при двух уровнях усилий, $L$ и $H$. Поскольку решение вспомогательной задачи минимизации ожидаемой платы при уровне усилий $L$ нам известно (оно такое же, как при наблюдаемых действиях), то проанализируем вспомогательную задачу, соответствующую уровню усилий $H$: требуется минимизировать ожидаемую оплату при ограничениях участия и совместимости стимулов для уровня усилий $H$. Лагранжиан этой задачи имеет вид

$$L=-\sum_s \mu_{Hs} w_s+\gamma\left(\sum_s \mu_{Hs} v(w_s)-c_H-\sum_s \mu_{Ls} v(w_s)+c_L\right)+$$
$$+\lambda\left(\sum_s \mu_{Hs} v(w_s)-c_H-u_0\right).$$

Дифференцируя по плате, соответствующей $s$-му результату:

$$\frac{\partial L}{\partial w_s}=-\mu_{Hs}+\gamma\left(\mu_{Hs}-\mu_{Ls}\right) v'(w_s)+\lambda\mu_{Hs} v'(w_s),$$

получим следующее условие первого порядка:

$$\frac{1}{v'(w_s)}=\lambda+\gamma\left(1-\frac{\mu_{Ls}}{\mu_{Hs}}\right).$$

Из него следует, что если ограничение совместимости стимулов несущественно, т.е. множитель Лагранжа $\gamma$ равен нулю $0$, то $v'(w_s)=1/\lambda$, $\forall s$, то есть плата не зависит от результата:

$$w_s=\bar{w}=\text{const},\ \forall s.$$

Это может быть только при низком уровне усилий, $L$. Поэтому $\gamma>0$ и ограничение совместимости стимулов выполняется как равенство.

Покажем, что условие участия также существенно, т.е. множитель Лагранжа $\lambda$ тоже положителен. Умножим условия первого порядка на соответствующие $\mu_{Hs}$:

$$\frac{\mu_{Hs}}{v'(w_s)}=\lambda\mu_{Hs}+\gamma\left(\mu_{Hs}-\mu_{Ls}\right).$$

и сложим для всех значений $s$:

$$\sum_s \frac{\mu_{Hs}}{v'(w_s)}=\lambda\sum_s \mu_{Hs}+\gamma\sum_s(\mu_{Hs}-\mu_{Ls})=\lambda.$$

Поскольку $\mu_{Hs}>0\ \forall s$ и $v'(w)>0\ \forall w$, то $\lambda>0$.

Обозначим через $w_0$ уровень заработной платы, являющийся решением уравнения

$$\frac{1}{v'(w_0)}=\lambda,$$

где множитель Лагранжа $\lambda$, соответствует решению вспомогательной задачи. Используя это обозначение, оплату по контракту можно охарактеризовать следующим образом. Если вероятность получения результата $s$ при высоком уровне усилий выше, чем при низком ($\mu_{Hs} > \mu_{Ls}$), то работник получает надбавку к базовой плате $w_0$, т.е. $w_s - w_0 > 0$, причем эта надбавка тем выше, чем выше отношение $\mu_{Hs}/\mu_{Ls}$, т.е. чем выше относительная вероятность получения результата $s$ при уровне усилий $H$. Это отношение в статистике называют **отношением правдоподобия**.

В том случае, если вероятность получения результата $s$ при высоком уровне усилий ниже, чем при низком, контракт предусматривает вычет из базовой платы $w_0$, т.е. $w_s - w_0 < 0$.

Если отношение правдоподобия $\mu_{Hs}/\mu_{Ls}$ монотонно возрастает, то оплата по контракту оказывается возрастающей функцией результата. В частном случае двух результатов это свойство эквивалентно предположению о стохастическом доминировании: $\mu_{H1} < \mu_{L1}$. В случае трех и более возможных результатов монотонность отношения правдоподобия — более сильное свойство. Хотя из монотонности отношения правдоподобия следует стохастическое доминирование, но обратное, вообще говоря, неверно.

Приведем пример оптимального контракта с немонотонной оплатой.

**Пример 1.**

Пусть $v(w) = \sqrt{w}$, $u_0 = 0$. Возможны два уровня усилий и три результата с вероятностями, доходами и издержками, заданными таблицей:

| | $y_1 = 0$ | $y_2 = 10$ | $y_3 = 20$ | |
|---|---|---|---|---|
| $a = L$ | 0,2 | 0,7 | 0,1 | $c_L = 1$ |
| $a = H$ | 0,1 | 0,1 | 0,8 | $c_H = 2$ |

Найдем оптимальный контракт.

Если наниматель стремиться обеспечить высокий уровень усилий, то условия совместимости стимулов и участия выполняются как равенства, поэтому, используя обозначение $v_s = \sqrt{w_s}$, можно записать

$$0{,}1v_1 + 0{,}1v_2 + 0{,}8v_3 - 2 = 0{,}2v_1 + 0{,}7v_2 + 0{,}1v_3 - 1 = 0.$$

Выражая отсюда $v_1$ через $v_2$ и $v_3$, получим

$$v_2 = \frac{12 - 3v_1}{11},\ v_3 = \frac{26 - v_1}{11}.$$

Ожидаемая плата равна

$$\mathsf{E}_H \tilde{\boldsymbol{w}} = 0{,}1v_1^2 + 0{,}1v_2^2 + 0{,}8v_3^2 =$$
$$= \frac{0{,}1}{121}(121v_1^2 + (12 - 3v_1)^2 + 8(23 - v_1)^2).$$

Минимизируя по $v_1$, получим

$$v_1 = \frac{122}{69},$$

откуда

$$v_2 = \frac{42}{69},\ v_3 = \frac{152}{69}.$$

Ожидаемая плата равна примерно $4{,}23$.

Если наниматель стремиться обеспечить уровень низкий усилий, то плата не зависит от результата и находится из условия $v(w)-c_L=u_0$. Следовательно, эта фиксированная плата равна $1$.

Ожидаемый доход равен $9$ при низких усилиях и $17$ при высоких. Таким образом, ожидаемая прибыль выше при стимулировании высоких усилий.

Видим, что плата по оптимальному контракту немонотонна. Это связано с тем, что отношение правдоподобия $\mu_{Hs}/\mu_{Ls}$ немонотонно ($1/2>1/7<8$).

⇐

### *Рента, связанная с ограниченной ответственностью*

Как известно, водитель дорогого грузовика получает зарплату заметно большую, чем другие водители той же квалификации, но на менее дорогой технике. Как объяснить этот феномен?

Одно из возможных объяснений состоит в том, что более высокая заработная плата возмещает большую тягость усилий. Альтернативное объяснение состоит в том, что возможные контракты должны удовлетворять дополнительным ограничениям. Так, в описываемом случае хозяин грузовика — наниматель данного водителя — не может в случае поломки грузовика возложить полную материальную ответственность на водителя (условие **ограниченной ответственности**).

Таким образом, для анализа таких ситуаций следует включить в модель найма дополнительные ограничения.

Проиллюстрируем сказанное примером.

**Пример 2.**

Предположим, что работник нейтрален по отношению к риску, т.е. $v(w)=w$, и его резервная полезность $u_0$ равна $1$. Остальные параметры модели приводятся в таблице.

| | $y_1=0$ | $y_2=10$ | |
|---|---|---|---|
| $a=L$ | 3/4 | 1/4 | $c_L=0$ |
| $a=H$ | 1/4 | 3/4 | $c_H=10$ |

Контракт должен удовлетворять ограничению участия

$$1/4w_1+3/4w_2-10\geqslant 1$$

и совместимости стимулов

$$1/4w_1+3/4w_2-10\geqslant 3/4w_1+1/4w_2.$$

В оптимуме при стимулировании высоких усилий оба ограничения выполняются как равенства. Отсюда, решая систему уравнений, получим

$$w_2=w_1+20,$$

$$1/4w_1+3/4(w_1+20)-10=1,$$

т.е. $w_1=-4$ и $w_2=16$.

Модифицируем задачу найма, включив в нее дополнительное ограничение положительности выплат (условие ограниченной ответственности), т.е.

$$w_s\geqslant 0\ \forall s.$$

Решением модифицированной задачи является контракт $w_1=0$ и $w_2=20$. При этом работник получает ожидаемую полезность

$$\mathsf{E}_H\tilde{w}-c_H=5,$$

которая выше его резервной полезности.

Таким образом, здесь можно говорить о ренте (точнее, квазиренте), связанной с ограниченной ответственностью, подразумевая под ней превышение ожидаемой полезности работника от контракта над его резервной полезностью.

С формальной тоски зрения причина этого эффекта в том, что в рассмотренной выше задаче выбора оптимального контракта ограничение участия не активно. Вместо него (в комбинации с ограничением совместимости стимулов) оказывается активным ограничение положительности выплат (или, в других постановках, положительности полезности при любом состоянии мира).

## Задачи

3. Количество производимой работником продукции ($y$) зависит от его усилий ($x$) и случайного фактора ($\xi$), принимающего значения $0$ и $100$ с равной вероятностью, причем $y=x+\xi$. Произведенная продукция дает предприятию прибыль в размере $2y-w$, где $w$ — плата работнику. Работник имеет элементарную функцию полезности $u(w,x)=w-x^2/100$, а его резервная полезность равна $0$. Предприятие назначает плату пропорционально усилиям ($w(x)=\alpha x$), либо пропорционально произведенной продукции ($w(y)=\alpha y$) (если усилия ненаблюдаемы).

(A) Сравните эти два вида контрактов.

(B) Будут ли они Парето-оптимальными?

(C)* Каким будет оптимальный контракт в каждой из ситуаций, если на вид функции $w(y)$ нет ограничений?

4. Предположим, что число возможных результатов в дискретном варианте модели найма со скрытыми действиями больше двух ($m>2$). Покажите, что из монотонности отношения правдоподобия $\mu_{Hs}/\mu_{Ls}$ следует стохастическое доминирование.

5. Предположим, что в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(a,w)=\sqrt{w}-a^2$ где, где $w$ — плата, $a$ — усилия ($a=1$ или $2$). Доход, приносимый работником, зависит от усилий $a$ и случайного фактора (состояния мира) $\xi$: $\tilde{y}=y(a,\xi)$. Случайный фактор $\xi$ может принимать три значения, $(1,0,-1)$, с вероятностями, указанными в таблице. В таблице также указана прибыль в каждом возможном случае.

| $\xi$ | $a=1$ | $a=2$ | Вероятность |
|---|---|---|---|
| $1$ | $100$ | $100$ | $(1-\mu)/2$ |
| $0$ | $100$ | $1$ | $\mu$ |
| $-1$ | $1$ | $1$ | $(1-\mu)/2$ |

Пусть резервная полезность работника $u_0=2{,}5$, вероятность $\mu=0{,}5$. Известно, что наниматель установил оплату за прибыль $100$ равной $w(100)=64$. При какой плате $w(1)$ выполняется условие участия?

6. Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(R,x)=\sqrt{R}-x$, где $R=R(s)$ — это плата, зависящая от уровня выручки $s$. Усилия $x$ могут принимать значения $1$ или $4$. Функция выручки $s(x,\xi)$ зависит от усилий $x$ и случайного фактора $\xi$, который может принимать три значения, $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, с вероятностями $(1/3,1/3,1/3)$. Результат действий работника (выручка $s$) задается таблицей

| $\xi$ | $x=1$ | $x=4$ | Вероятность |
|---|---|---|---|
| $\xi_1$ | $120$ | $120$ | $1/3$ |
| $\xi_2$ | $1$ | $120$ | $1/3$ |
| $\xi_3$ | $1$ | $1$ | $1/3$ |

Пусть резервная полезность работника $u_0=0{,}2$. Найдите оптимальный контракт: пару выплат $R_1,R_{120}\geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $s=1$ или $120$.

7. Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(r,a)=\sqrt{r}-a$, где $r=r(h)$ — это плата, зависящая от уровня выручки $h$. Усилия $a$ могут принимать значения $1$ или $4$. Функция выручки $h(a,\xi)$ зависит от усилий $a$ и случайного фактора $\xi$, который может принимать три значения, $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, с вероятностями $(1/6,2/3,1/6)$. Результат действий работника (выручка $h$) задается таблицей

| $\xi$ | $a=1$ | $a=4$ | Вероятность |
|---|---|---|---|
| $\xi_1$ | $60$ | $60$ | $1/6$ |
| $\xi_2$ | $1$ | $60$ | $2/3$ |
| $\xi_3$ | $1$ | $1$ | $1/6$ |

Пусть резервная полезность работника$u_0=0{,}3$. Найдите оптимальный контракт: пару выплат $r_1,r_{60}\geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $h=1$ или $60$.

8. Хозяин нанимает работника. Результат работы (то есть доход хозяина) зависит от ненаблюдаемой хозяином величины усилий работника, $x$, а также от ненаблюдаемых случайных событий (состояний мира). Эта зависимость описывается таблицей:

| | Событие «не везет» | Событие «как всегда» | Событие «везет» |
|---|---|---|---|
| | $1/3$ | $1/3$ | $1/3$ |
| $x=1$ | $60$ | $60$ | $120$ |
| $x=3$ | $60$ | $120$ | $120$ |

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x,w)=3\sqrt{w}-x$. Резервный уровень полезности работника равен $u_0=0$. Найдите оптимальный контракт, где денежные выплаты $w$ обусловлены величиной дохода, полученного хозяином.

9. В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий $x$, зависит также от состояний мира ($\xi = 1, 2, 3$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в таблице

| | $\xi=1$ | $\xi=2$ | $\xi=3$ |
|---|---|---|---|
| Вероятность | $1/3$ | $1/3$ | $1/3$ |
| $x=1$ | 0 | 100 | 200 |
| $x=2$ | 100 | 200 | 300 |

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x, w) = -120/w - x.$$

Резервная полезность работника равна $u_0 = -4$. Найдите оптимальный контракт. Покажите, что результат будет таким же, как и при наблюдаемости действий.

10. В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий $x$, зависит также от состояний мира ($\xi = 1, 2, 3, 4$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в таблице

| | $\xi=1$ | $\xi=2$ | $\xi=3$ | $\xi=4$ |
|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ |
| $x=1$ | 0 | 100 | 100 | 200 |
| $x=2$ | 100 | 100 | 100 | 200 |
| $x=4$ | 100 | 200 | 200 | 200 |

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x, w) = \sqrt{w} - x.$$

Резервная полезность работника равна $u_0 = 8$. Найдите оптимальный контракт.

11. Рассмотрите дискретную модель найма со скрытыми действиями работника. При усилии $a$ ($a = 1, \ldots, k$) вероятность получения результата $y_s$ ($s = 1, \ldots, m$) равна $\mu_{as}$. Резервная полезность для работника равна $u_0$, а его элементарная функция полезности имеет вид $v(w) - c_a$, где $w$ — оплата усилий работника, а $c_a$ — издержки, которые для работника сопряжены с усилиями $a$.

(1) Покажите, что если оплата, обусловленная контрактом, не зависит от результатов ($w(y) = const$), то работник выбирает усилие, минимизирующее его издержки.

(2) Предположим, что работник — рискофоб, т.е. $v'(w)$ убывает. Покажите, что если издержки не зависят от усилий ($c_a = const$), то оплата по (оптимальному) контракту не зависит от результатов.

(3) Предположим, что возможны всего два результата и два уровня усилий, причем $y_2 > y_1$ и $\mu_{b2} > \mu_{a2}$ $\forall a, b$. Опишите оптимальный контракт, если (a) $c_a > c_b$, (b) $c_a < c_b$.

12. Страхователь с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln x$ может вероятностью $\mu$ потерять актив ценностью $K$ рублей, и обладает богатством $\omega$ (включая актив). Пусть своими усилиями $x$ по обереганию актива страхователь может оказать влияние на вероят-

ность страхового случая. Функция $\mu(x)$ убывает, а тягость усилий для страхователя равна $c(x)=x^2$. Возможны два действия $x=0$ или $x=1$.

Каким окажется выбранный страховой контракт, если ...

1) на рынке страховых услуг условия совершенной конкуренции;

2) на рынке только одна страховая компания.

3) При каких условиях страховой контракт гарантирует полное возмещение убытков?

13. Отметьте такие условия, каждое из которых, независимо от прочих, гарантирует, что оптимальный для нанимателя контракт в модели найма со скрытыми действиями Парето-оптимален:

а) работник — рискофил, а оплата его труда зависит от результата;

б) работник (как и наниматель) нейтрален к риску;

в) действия не оказывают влияния на распределение результата;

г) действия могут быть однозначно вычислены по наблюдаемому результату;

д) резервная полезность для работника равна нулю;

е) действия не сопряжены с издержками для работника;

ё) работник — рикофоб, а оплата его труда зависит от результата;

ж) ожидаемый доход не зависит от усилий;

з) действия, дающие наибольший ожидаемый доход, сопряжены с наименьшими издержками для работника;

и) действия дающие наибольшую прибыль (не обязательно наибольший доход) не могут давать доход, равный доходу от прочих действий;

й) резервная ожидаемая полезность для работника отрицательна и меньше по модулю максимального ожидаемого дохода.

По возможности объясните свой ответ.

14. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Утверждение: если плата работника не зависит от результатов деятельности работника, то работник выберет такие действия (усилия) $x$, при которых его издержки усилий $c(x)$ минимальны. Сформулируйте модель и гипотезы утверждения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

15. Модель найма со скрытыми действиями. Утверждение: если работник нейтрален к риску, то выбранный начальником контракт окажется Парето-оптимальным. Сформулируйте модель и предположения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

16. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: если схема выплаты работнику, $w_s$, (контракт) *зависит* от результатов ($w_s \neq w_t \ \forall s \neq t$), то работник выберет такие действия (усилия) $b$, что $c(b) > \min_{x \in X} c(x)$? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

17. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: пусть издержки работника не зависят от действий (усилий), тогда выбранный начальником контракт окажется Парето-оптимальным? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

18. Рассмотрим модель найма с тремя уровнями усилий и двумя результатами. Резервная полезность равна $1$. Вероятности результатов, доходы и издержки задаются следующей таблицей.

| | $y_1 = 0$ | $y_2 = 50$ | |
|---|---|---|---|
| $a = L$ | 3/4 | 1/4 | $c_L = 1$ |
| $a = M$ | 1/2 | 1/2 | $c_M = 3$ |
| $a = H$ | 1/4 | 3/4 | $c_H = 4$ |

(A) Покажите, что один из уровней усилий нереализуем в случае, когда усилия ненаблюдаемы (не существует контракта, при котором он выгоден работнику).

(B) Найдите оптимальный контракт при наблюдаемых и ненаблюдаемых усилиях.

19. Предположим, что в модели найма при наблюдаемых усилиях нанимателю оказывается выгодным минимальный уровень усилий. Может ли при ненаблюдаемых усилиях быть выгоден другой уровень усилий?

20. Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и с двумя результатами. Опишите все возможные оптимальные контракты в предположении, что усилия ненаблюдаемы, и работник является нейтральным к риску. Продемонстрируйте, что все они являются оптимальными по Парето, и наниматель получает такую же ожидаемую прибыль, как и при наблюдаемых усилиях.

21. Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и с двумя результатами, в которой усилия ненаблюдаемы, работник является нейтральным к риску, и допустимые контракты ограничены условием ограниченной ответственности $w_s \geqslant \underline{w}$. Покажите, что существует граница $w^*$, такая что для контракта, обеспечивающего высокий уровень усилий, рента, связанная с ограниченной ответственностью, положительна в том и только в том случае, если $\underline{w} > w^*$.

22. Рассмотрите в модели найма с ненаблюдаемыми действиями с двумя уровнями усилий и с двумя результатами контракты типа издольщины, когда нейтральный к риску работник получает плату в виде фиксированной доли от создаваемого им дохода. Найдите оптимальные контракты и сравните с оптимальными контрактами при наблюдаемых действиях.

23. Объясните, почему контракт типа издольщины не может быть эффективным по Парето.

24. [Tirole] Работник может выбрать два уровня усилий: высокий ($H$) и низкий ($L$). Полезность работника в случае низких усилий равна $v(w)$, а в случае высоких — $v(w-c)$, где $w$ — заработная плата, $c$ — издержки, связанные с высокими усилиями. Функция $v(\cdot)$ возрастающая и строго вогнутая (работник — рискофоб). Резервная заработная плата работника равна $w_0$ (так что резервная полезность равна $v(w_0)$).

Пусть доход нанимателя может принимать два значения, $y_1$ и $y_2$, причем $y_1<y_2$. Если работник выберет высокий уровень усилий, то доход будет равен $y_2$ с вероятностью $\mu_H$ и $y_1$ с вероятностью $1-\mu_H$. Если же он выберет низкий уровень усилий, то доход будет равен $y_2$ с вероятностью $\mu_L$ и $y_1$ с вероятностью $1-\mu_L$, причем $\mu_L<\mu_H$.

(A) Рассмотрите сначала случай, когда усилия работника наблюдаемы. Объясните, почему, если наниматель требует от работника выбрать низкий уровень усилий, то он должен назначить оплату $w_1=w_2=w_0$, а если высокий, то $w_1=w_2=w_0+c$.

(B) Покажите, что в ситуации пункта (A) нанимателю выгодно требовать от работника высокого уровня усилий в том и только в том случае, если $(\mu_H-\mu_L)(y_2-y_1)>0$.

(C) Рассмотрите теперь случай, когда усилия работника ненаблюдаемы, и наниматель хочет побудить работника выбрать высокий уровень усилий. Запишите условие совместимости стимулов и условие участия.

(D) Покажите, что из условия совместимости стимулов следует, что $w_2>w_1$.

(E) Объясните, почему нанимателю выгодно назначить такую оплату, что оба ограничения выходят на равенство.

(F) Пользуясь тем, что работник — рискофоб, покажите, что ожидаемая зарплата работника выше, а ожидаемая прибыль нанимателя ниже, чем при наблюдаемости усилий (предполагаем, что в обоих случаях нанимателю выгодно побуждать работника выбрать высокий уровень усилий).

(G) Найдите оплату при нейтральности работника к риску.

(H) Найдите оплату в случае, когда нанимателю выгодно побуждать работника выбрать низкий уровень усилий.

25. [Tirole] Акционеры решают, какое жалование $w$ назначить менеджеру компании. Прибыль без учета этого жалования $y$ зависит от усилий менеджера $x$ и случайного фактора («возмущения») $\xi$: $y=x+\xi$. Предполагаем, что $\xi$ — случайная величина, распределение которой не зависит от $x$, с носителем $(-\infty,+\infty)$, имеющая нулевое математическое ожидание: $\mathsf{E}(\xi)=0$. Акционеры нейтральны к риску и максимизируют ожидаемую прибыль $\mathsf{E}(x+\xi-w)$. Менеджер имеет целевую функцию типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности вида $u(x,w)=v(w-\gamma x^2)$, где $\gamma$ — постоянный коэффициент, функция $v(\cdot)$ имеет положительную невозрастающую производную. Менеджер может найти себе работу преподавателя в бизнес-школе, где практически без усилий и риска ему гарантирована заработная плата $w_0$.

(i) Если акционеры наблюдают уровень усилий менеджера, то они могут найти такую схему оплаты, что менеджер выберет именно тот уровень усилий, какой им требуется. Предложите вариант такого контракта. Найдите оптимальный уровень усилий, то есть такой, который дает максимум ожидаемой прибыли, и при этом менеджер не откажется от контракта.

(ii) Пусть акционеры не могут наблюдать уровень усилий, им известна только величина прибыли $y$. Предположим, что используется линейная схема оплаты $w(y)=a+by$. Покажите, что уровень усилий, который выберет менеджер не зависит от вида функции $v(\cdot)$. Найдите его как функцию коэффициентов $a$ и $b$. (Поскольку носитель распределения ошибки не зависит от усилий менеджера, то производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной). Покажите, что если менеджеру остается вся прибыль за исключением некоторой постоянной величины, то есть $b=1$, то он выберет тот уровень усилий, который оптимален в ситуации (i).

(iii) Запишите функцию Лагранжа и найдите условия первого порядка для задачи выбора оптимального линейного контракта. Покажите, что если менеджер нейтрален к риску, то акционеры выберут $b=1$. Докажите, что если производная функции $v(\cdot)$ убывает (т.е. менеджер является рискофобом), то в оптимальном контракте $0<b<1$, то есть это нечто среднее между ситуацией, когда весь риск берут на себя акционеры ($b=0$) и ситуацией, когда весь риск берет на себя менеджер ($b=1$). (Подсказка: Воспользуйтесь тем, что если $f(\cdot)$ — возрастающая функция $\xi$, то ковариация $\mathsf{Cov}(f(\xi),\xi)=\mathsf{E}(f(\xi)\,\xi)$ неотрицательна, и наоборот, если $f(\cdot)$ — убывающая функция $\xi$, то эта ковариация неположительна).

## Модель найма со скрытой информацией

В этом параграфе мы будем предполагать, что уровень усилий является наблюдаемой величиной. То есть мы будем рассматривать ситуации найма, когда возможные проблемы в определении контракта связаны с тем, что нанимателю могут быть неизвестны некоторые характеристики работника (полезность оплаты по контракту, продуктивность усилий, издержки разных усилий, резервная полезность и т.д.). Поскольку усилия наблюдаемы, оплата по контракту $w(\cdot)$ может быть обусловлена уровнем усилий, что и предполагается в дальнейшем в этом параграфе.

Будем предполагать, что на рынке труда представлены работники нескольких типов $\theta \in \Theta$, причем наниматель не может их различить. При этом на множестве $\Theta$ задано (тем или иным способом) распределение вероятностей, известного потенциальным нанимателям. В случае, если множество $\Theta$ конечно, это распределение можно характеризовать перечислением вероятностей $\mu_\theta$ встретить работника типа $\theta$. В дальнейшем будем считать, что при этом $\mu_\theta>0\ \forall\theta$.

Предположим, что результат усилий $x\in X$ работника — доход $y(x)$, монотонно возрастающая вогнутая функция уровня усилий. Наниматель максимизирует свою прибыль

$$y(x)-w(x),$$

где $w(x)$ — оплата уровня усилий $x$ работника. Поскольку доход $y(x)$ — монотонная функция усилий, то можно измерять уровень усилий непосредственно величиной ожидаемого дохода. Таким образом, без ограничения общности будем считать, что уровень усилий измеряется величиной ожидаемого дохода, т.е. $y(x)=x$.

Если работник типа $\theta$ осуществляет усилия $x_\theta$, то с точки зрения нанимателя усилия — это случайная величина, принимающая значение $x_\theta$ с вероятностью $\mu_\theta$. Таким образом, ожидаемая прибыль нанимателя равна:

$$\mathsf{E}(x_\theta-w(x_\theta)),$$

где ожидание берется по распределению типов. В частном случае конечного числа ($n$) типов она считается по формуле

$$\sum_{\theta=1}^{n}(x_\theta-w(x_\theta)),$$

Предполагаем, что функция полезности работника любого типа сепарабельна по деньгам и усилиям:

$$u_\theta(x,w)=v_\theta(w)-c_\theta(x),$$

где, как и ранее, $v_\theta(w)$ — полезность оплаты $w$, а $c_\theta(x)$ — тягость усилий $x$ для работника типа $\theta$. Мы будем предполагать, что $v_\theta(w)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c_\theta(x)$ — возрастающая выпуклая функция. Разные типы работников характеризуются разной формой функций $v_\theta(w)$ и $c_\theta(x)$.

Предположим, что $v_\theta(w)=w$.

Пусть $x_\theta$ — усилия, которые, как планирует наниматель, должен осуществлять работник типа $\theta$, а $w_\theta$ — соответствующая зарплата. Пары $(x_\theta, w_\theta)$ будем называть **пакетами**. Удобно начать изучение модели найма со скрытой информацией с задачи поиска оптимальных пакетов, по одному на каждый тип работника, а не с анализа нахождения оптимального контракта $w(x)$, который бы специфицировал плату при каждом возможном уровне усилий работника. Оказывается, и мы это покажем в дальнейшем, что при таком упрощении модели мы, фактически, ничего не теряем.

## Модель найма со скрытой информацией при монопольном положении нанимателя: характеристики оптимальных пакетных контрактов

Рассмотрим сначала случай найма с единственным нанимателем. При этом предположим, что каждый тип работников характеризуется уровнем резервной полезности $u_{0\theta}$, заданной экзогенно. (Если предложенный ему контракт обеспечивает полезность ниже величины $u_{0\theta}$ , работник отказывается его подписывать). Нормируя функции издержек (добавляя к "первоначальным" функциям величины $u_{0\theta}$), будем считать, что все $u_{0\theta}$ равны нулю.

Модель найма со скрытой информацией можно представить как динамическую игру с неполной информацией. Опишем последовательность ходов в этой игре:

0. «Природа» выбирает тип работника $\theta \in \Theta$.

1. Наниматель, не зная типа, предлагает контракты — пакеты $(x_\theta, w_\theta)$, $\theta \in \Theta$.

2. Работник (зная свой тип) выбирает одну из возможных альтернатив: либо не подписывать контракт, либо подписать контракт, выбрав какой-то из предложенных пакетов выбрать.

Мы, как обычно, будем предполагать благожелательное поведение работника по отношению к хозяину. Будем предполагать также, что пакеты правильно маркированы: $(x_\theta, w_\theta)$ — пакет, который добровольно выбирает работник типа $\theta$. Это позволяет описать выбор оптимальных пакетов задачей максимизации ожидаемой прибыли нанимателя при ограничениях двух типов, следующих из предположения о рациональном поведении работников: (1) работнику каждого из типов должно быть выгодно подписать контракт (условия участия), (2) работнику типа $\theta$ должно быть выгодно выбрать предназначенный для него пакет (условия совместимости стимулов). Условия совместимости стимулов, называют в данном случае также **условиями самовыявления**(, поскольку они фактически требуют, чтобы пакеты были выбраны так, чтобы происходило добровольное выявление типа работника.

Таким образом, следует рассмотреть следующую задачу:

$$\mathsf{E}\Pi=\mathsf{E}(x_\theta-w_\theta)\to \max_{\{w_\theta,\, x_\theta\}}$$

$$w_\theta-c_\theta(x_\theta)\geqslant w_\varphi-c_\theta(x_\varphi),\ \forall\theta,\varphi\in\Theta,$$

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0,\ \forall\theta \in \Theta.$$

Поскольку в оптимальном решении некоторые из типов работников могут не подписать контракт, то работников таких типов следует исключить из рассмотрения, дополнив указанную задачу ограничениями неучастия. Следует провести перебор по подмножествам множества типов работников, разделяя их на тех, кто подписывает контракт, и тех, кто его не подписывает, и выбрать тот вариант, который дает наибольшую ожидаемую прибыль.

### *МОДЕЛЬ НАЙМА СО СКРЫТОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ ПРИ ДВУХ ТИПАХ РАБОТНИКОВ*

Прежде, чем анализировать более общие случаи, проведем анализ простого частного случая, когда встречаются только работники двух типов: $\theta = 1, 2$. Вероятность появления работника 1-го типа на рынке труда равна $\mu_1$, а 2-го — $\mu_2$. Будем предполагать, что работник первого типа более способный, т.е. один и тот же объем работ он выполняет с меньшими усилиями и, кроме того, производство дополнительной единицы продукции требует от него меньших издержек:

$$c_2(x) \geqslant c_1(x)$$

и

$$c_2'(x) > c_1'(x)\ \forall x.$$

Последнее неравенство означает, что разность $d(x) = c_2(x) - c_1(x)$ возрастает по $x$. Заметим, что для справедливости приведенных ниже результатов достаточно выполнения этого условия (а не условия на производные этих функций).

Для каждой из категорий работников $\theta \in \{1, 2\}$ предназначается своя пара усилия — зарплата, т.е. пакет $(x_\theta, w_\theta)$.

Если бы наниматель мог различать работников, тогда он выбрал бы «идеальные» пакеты $(\hat{x}_\theta, \hat{w}_\theta)$, которые рассматривались выше для случая полной информации.

«Идеальные» уровни усилий $\hat{x}_\theta$ находились бы из условия максимизации прибыли, соответствующей сделке с работником каждого типа. При этом единственным ограничением для нанимателя было бы условие участия. В оптимуме это ограничение должно выполняться как равенство: $w_\theta = c_\theta(x_\theta)$. Подставим это равенство в функцию прибыли:

$$x - c_\theta(x) \to \max{}_{x \in X}$$

Сделанные выше предположения относительно функций издержек гарантируют, что $\hat{x}_1 \geqslant \hat{x}_2$. Покажем это. Из того, что $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ являются решениями соответствующих задач, следует, что

$$\hat{x}_1 - c_1(\hat{x}_1) \geqslant \hat{x}_2 - c_1(\hat{x}_2)$$

и

$$\hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) \geqslant \hat{x}_1 - c_2(\hat{x}_1).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$c_2(\hat{x}_1) - c_1(\hat{x}_1) \geqslant c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2),$$

и

$$d(\hat{x}_1) \geqslant d(\hat{x}_2).$$

Неравенство $\hat{x}_1 \geqslant \hat{x}_2$ следует из возрастания функции $d(x)$. Выполнение строгого неравенства можно гарантировать при дифференцируемости функций издержек в предположении, что $c_2'(x) > c_1'(x)\ \forall x$.

Если функции издержек дифференцируемы, то условие первого порядка внутреннего максимума выглядит следующим образом (см. Рис. 139):

$$c_\theta'(\hat{x}_\theta) = 1.$$

Оплата $\hat{w}_i$ выбирается так, чтобы в точности компенсировать работнику издержки его усилий, т.е.

$$\hat{w}_\theta = c_\theta(\hat{x}_\theta).$$

Сказанное иллюстрирует Рис. 139. Оплата $\hat{w}_1$ работника 1-го типа равна сумме площадей фигур $A$ и $B$ и величины $c_1(0)$, а оплата $\hat{w}_2$ работника 2-го типа — $A + C + c_2(0)$.

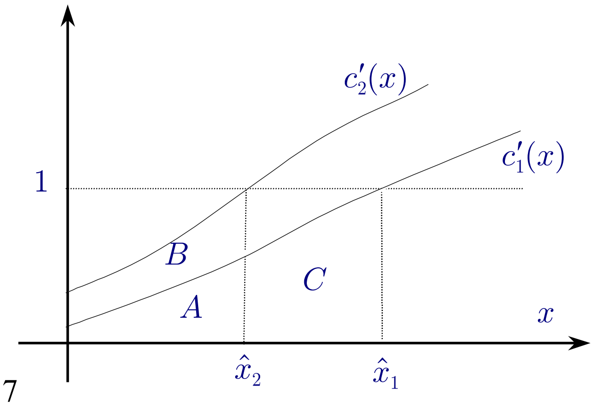


Рисунок 139. Идеальная оплата при полной информации

Поскольку наниматель не может отличать тип работников, то требуется, чтобы произошло их самовыявление, то есть, чтобы работник каждого типа выбрал именно тот пакет, который для него предназначен. Таким образом, задача нанимателя имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}\Pi = \mathsf{E}(x_\theta - w_\theta) = \mu_1(x_1 - w_1) + \mu_2(x_2 - w_2) \to \max_{w_1,\, x_1,\, w_2,\, x_2}$$

$$w_1 - c_1(x_1) \geqslant w_2 - c_1(x_2)$$

(условие самовыявления работника 1-го типа),

$$w_2 - c_2(x_2) \geqslant w_1 - c_2(x_1)$$

(условие самовыявления работника 2-го типа),

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0,\ \forall \theta = 1, 2$$

(условия участия).

Заметим, что для любых допустимых в этой задаче пакетов (а значит и для оптимальных) выполнены условия монотонности (упорядоченности) усилий и соответствующих уровней оплат. Действительно, сложив два условия самовыявления, получим

$$c_2(x_1) - c_1(x_1) \geqslant c_2(x_2) - c_1(x_2),$$

или

$$d(x_1) \geqslant d(x_2),$$

откуда при возрастании функции $d(x)$ следует, что $x_1 \geqslant x_2$. Из условия самовыявления работника 1-го типа при возрастании функции $c_1(x)$ следует, что

$$w_1 - w_2 \geqslant c_1(x_1) - c_1(x_2) \geqslant 0,$$

т.е. $w_1 \geqslant w_2$.

Рассматриваемую задачу можно существенно упростить, используя сделанные выше предположения относительно функций издержек.

Покажем, что два из четырех условий выполняются в решении задачи как равенство. Анализ проведем в несколько шагов.

1. Покажем сначала, что условие участия для работника первого типа является следствием указанных двух условий, т.е. избыточно. Действительно, из условия самовыявления работника 1-го типа и условия участия работника 2-го типа, учитывая, что $c_2(x) \geqslant c_1(x)$ $\forall x$, получим, что выполняется и условие участия для работника первого типа:

$$w_1 - c_1(x_1) \geqslant w_2 - c_1(x_2) \geqslant w_2 - c_2(x_2) \geqslant 0.$$

2. Далее, условие самовыявления для работника 1-го типа в решении обращается в равенство (для него оба пакета должны оказаться эквивалентными). Действительно, если это не так, то возможно уменьшить величину $w_1$, не нарушая ограничения задачи, что противоречит оптимальности рассматриваемых пакетов. (Ограничение участия для работника 1-го типа не нарушается, коль скоро не нарушается ограничение самовыявления работника 1-го типа, а ограничение участия для работника 2-го типа остается без изменений).

3. Наконец, условие участия для работника второго типа в решении обращается в равенство. Действительно, если это не так, то оба условия участия выполняются как строгие неравенства. Но тогда можно уменьшить оплату работников обоих типов на одну и ту же величину, не нарушив эти условия. При этом по прежнему выполняются ограничения самовыявления, а прибыль нанимателя увеличивается (на величину уменьшения оплаты), что противоречит предположению об оптимальности пакетов.

Мы показали, что в оптимальном решении $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ выполнены равенства

$$\bar{w}_1 - c_1(\bar{x}_1) = \bar{w}_2 - c_1(\bar{x}_2)$$

$$\bar{w}_2 - c_2(\bar{x}_2) = 0,$$

откуда $\bar{w}_2 = c_2(\bar{x}_2)$, $\bar{w}_1 = c_1(\bar{x}_1) + c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2)$,

Подставляя эти значения в ограничение участия для работника второго типа, получим

$$c_2(\bar{x}_2) - c_2(\bar{x}_2) \geqslant c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2) + c_1(\bar{x}_1) - c_2(\bar{x}_1),$$

или

$$d(\bar{x}_1) \geqslant d(\bar{x}_2).$$

Выполнение последнего неравенства гарантируют предположения относительно функций издержек ($d(x)$ — возрастающая функция) и установленное выше соотношение $x_1 \geqslant x_2$. Таким образом, в оптимальном решении задачи выполнение условия участия работников 2-го типа является следствием двух полученных выше равенств.

Подставив $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ в целевую функцию задачи, получим следующую задачу для выбора $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$:

$$\mu_1(x_1 - c_2(x_2) + c_1(x_2) - c_1(x_1)) + \mu_2(x_2 - c_2(x_2)) \rightarrow \max_{x_1,\, x_2 \in X}$$

$$x_1 \geqslant x_2.$$

Сначала мы найдем решение соответствующей задачи безусловной оптимизации (не учитывая ограничения $x_1 \geqslant x_2$), а затем покажем, что это ограничение выполняется в полученном решении, и поэтому несущественно.

Поскольку $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, то без ограничения монотонности уровней усилий, $x_1 \geqslant x_2$, задача, фактически, распадается на две задачи, одна — для выбора $\overline{x}_1$, другая — для выбора $\overline{x}_2$

$$x_1 - c_1(x_1) \to \max{}_{x_1 \in X}.$$

$$x_2 - c_2(x_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(x_2) - c_1(x_2)) \to \max{}_{x_2 \in X}.$$

Первая задача имеет тот же вид, что и задача определения оптимального уровня усилий ($\hat{x}_1$) в условиях, когда типы работников наблюдаемы. Следовательно, множества решений этих двух задач совпадают. Для 2-го типа задача отличается от задачи поиска $\hat{x}_2$ тем, что к функции издержек добавляется неотрицательная возрастающая функция $\frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(x_2) - c_1(x_2))$. Поэтому решения двух задач, вообще говоря, различны, причем если $\hat{x}_2$ и $\overline{x}_2$ — решения этих задач, то $\hat{x}_2 \geqslant \overline{x}_2$. Действительно, по определению $\hat{x}_2$

$$\hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) \geqslant \overline{x}_2 - c_2(\overline{x}_2),$$

а по определению $\overline{x}_2$

$$\overline{x}_2 - c_2(\overline{x}_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(\overline{x}_2) - c_1(\overline{x}_2)) \geqslant \hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2)).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2) \geqslant c_2(\overline{x}_2) - c_1(\overline{x}_2)$$

или

$$d(\hat{x}_2) \geqslant d(\overline{x}_2),$$

откуда следует требуемое неравенство.

Таким образом, если $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\hat{x}_2$ — решения соответствующих задач, то имеет место неравенство $\overline{x}_1 \geqslant \hat{x}_2 \geqslant \overline{x}_2$. Таким образом, ограничение $x_1 \geqslant x_2$ выполняется для любого решения задачи и поэтому несущественно.

Заметим, что при дифференцируемости функций для любой пары внутренних оптимальных пакетов выполнено строгое неравенство $\overline{x}_1 > \overline{x}_2$ при условии, что $c_2'(x) > c_1'(x)\ \forall x$. Мы покажем это ниже.

Условия первого порядка для внутренних решений $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ при дифференцируемости функций издержек имеют вид:

$$c_1'(\overline{x}_1) = 1,$$

$$c_2'(\overline{x}_2) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}[c_2'(\overline{x}_2) - c_1'(\overline{x}_2)].$$

Поскольку $c_2'(x) > c_1'(x)$, то $c_2'(\overline{x}_2) < 1$. Это означает, что $\overline{x}_2 \neq \hat{x}_2$, где $\hat{x}_2$ — оптимальный уровень усилий для работника 2-го типа. Поскольку $\overline{x}_2 \leqslant \hat{x}_2$, то это означает, что усилия, осуществляемые работником 2-го типа, неоптимально низки ($\overline{x}_2 < \hat{x}_2$).

Поскольку $\overline{x}_1$ — оптимальный уровень усилий для работника 1-го типа, то $\overline{x}_1 > \hat{x}_2$, где если $\hat{x}_2$ — оптимальный уровень усилий для работника 2-го типа. Получаем цепочку неравенств $\overline{x}_1 > \hat{x}_2 > \overline{x}_2$.

Заметим, что строгая выпуклость функций издержек $c_\theta(\cdot)$ гарантирует единственность решений задач определения оптимальных уровней усилий $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ в ситуации симметричной информированности и достаточность условий первого порядка. То же самое справедливо и для задачи определения величины оптимального уровня усилий $\overline{x}_1$ для случая асимметричной информированности. Аналогичные свойства задачи определения уровня усилий $\overline{x}_2$ можно гарантировать лишь при дополнительных условиях, например, при выпуклости функции $c_2(x) - c_1(x)$ (монотонности функции $c_2'(x) - c_1'(x)$). При этом

$$\hat{x}_1 = \overline{x}_1 > \hat{x}_2 > \overline{x}_2.$$

Таким образом, для работника 2-го типа приходится планировать меньшую величину усилий, чтобы понизить оплату работника 1-го типа.

Рис. 140 иллюстрирует сделанные нами выводы.

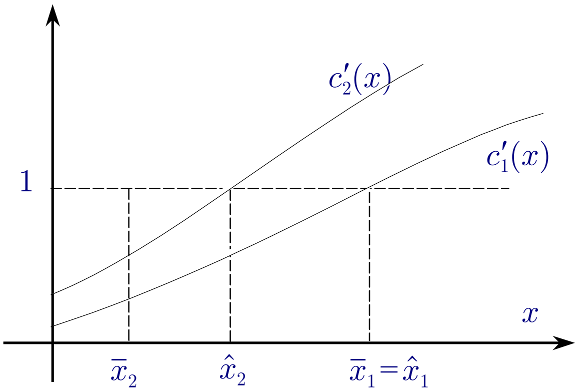


Рисунок 140.

Поскольку, как мы предполагаем, решение внутреннее, то $c_2(\overline{x}_2) > c_1(\overline{x}_2)$, откуда

$$\overline{w}_1 - c_1(\overline{x}_1) = \overline{w}_2 - c_1(\overline{x}_2) > \overline{w}_2 - c_2(\overline{x}_2) = 0$$

Таким образом, работник 2-го типа при этом всегда получает лишь резервную полезность (его излишек равен нулю), а первый — несколько больше своей резервной полезности. То есть наличие на рынке менее производительных работников и невозможность их отличить приводит к тому, что более производительный работник при условии, что выгодно нанимать работников 2-го типа, получает так называемую **информационную ренту** (квазиренту). Т.е. здесь имеет место отрицательная экстерналия.

Проиллюстрируем это графически (Рис. 141). На рисунке $OA$ — прибыль от контракта с работником 2-го типа, $OB$ — прибыль от идеального контракта с работником 2-го типа, $OC$ — прибыль от контракта с работником 1-го типа, $OD$ — прибыль от идеального контракта с работником 1-го типа.

Заштрихованная область соответствует пакетам $(x_2, w_2)$, обеспечивающим Парето-улучшение. Пакеты в этой области не могут быть реализованы из-за необходимости обеспечить выполнение условия самовыявления для работников 1-го типа.

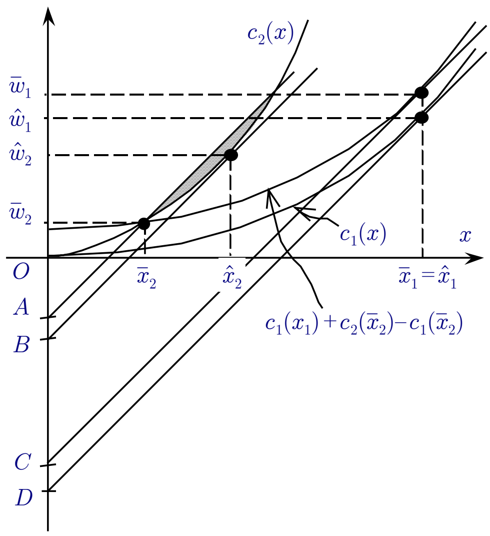


Рисунок 141

**Пример 3.**

Для функций издержек

$$c_1(x) = 0{,}5\,x^2,\ \ c_2(x) = x^2,$$

и множества возможных усилий $X = \mathbb{R}_+$ решая задачу

$$\mu_1(x_1 - x_2^2 + 0{,}5\,x_2^2 - 0{,}5\,x_1^2) + \mu_2(x_2 - x_2^2) \rightarrow \max_{x_1,\,x_2}.$$

получим

$$\overline{x}_1 = 1,\ \overline{x}_2 = \frac{1}{2 + \mu_1/\mu_2}.$$

При этом уровни оплаты будут равны:

$$\overline{w}_1 = 0{,}5\,\overline{x}_2^2 + 0{,}5\,\overline{x}_1^2 = \frac{1}{2(2 + \mu_1/\mu_2)^2} + 0{,}5,$$

$$\overline{w}_2 = \overline{x}_2^2 = \frac{1}{(2 + \mu_1/\mu_2)^2}.$$

Работник второго типа будет производить меньше эффективного уровня $\hat{x}_2 = 0{,}5$. Совпадение возможно только если $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1$.

Информационная рента работника 1-го типа равна

$$\overline{w}_1 - 0{,}5\,\overline{x}_1{}^2 = \frac{1}{2(2 + \mu_1/\mu_2)^2} > 0.$$

$\Leftarrow$

Проделанный анализ характеризует оптимальные с точки зрения нанимателя условия найма работников обоих типов. Как было указано выше, это решение следует сравнить с решением, полученным при условии, что нанимаются только работники первого типа. Напоминаем, что, как и прежде, мы предполагаем, что если два варианта поведения приносят работнику одинаковую полезность, то он выбирает поведение, выгодное нанимателю. Поэтому условия неучастия запишем в виде нестрогого неравенства. Выбор оптимального пакета для случая, когда нанимаются только работники 1-го типа, характеризуется следующей задачей:

$$x - w \rightarrow \max_{w,\,x}$$

$$w - c_1(x) \geqslant 0$$

(условия участия работника 1-го типа).

$$w - c_2(x) \leqslant 0$$

(условия неучастия работника 2-го типа).

Для решения $(\bar{x},\ \bar{w})$ этой задачи выполнено $\bar{w} = c_1(\bar{x})$, т.е. ограничение участия работника 1-го типа выходит на равенство. При этом ограничение неучастия работника 2-го типа является несущественным, поскольку $c_1(x) \leqslant c_2(x)$. Таким образом, задача совпадает с задачей выбора оптимального пакета $(\hat{x}_1,\ \hat{w}_1)$ для работника 1-го типа в условиях полной информации.

В этом простом случае, разрабатывая стратегию найма, наниматель сравнивает минимальное значение ожидаемой информационной ренты с максимальным значением ожидаемого дохода от занятости работника второго типа. В случае, когда первая величина превышает вторую, предлагаются пакеты для работников обоих типов. В случае, когда доход от занятости работников второго типа относительно низкий, предлагается только один пакет $(\hat{x}_1, \hat{w}_1)$.

### *Модель найма со скрытой информацией при конечном количестве типов работников. Цепное правило*

Пусть теперь на рынке труда присутствуют $n$ различных типов работников, т.е. $\Theta = \{1, \ldots, n\}$.

Предположим, относительно функций издержек что

$$c_\theta(x) \geqslant c_\varphi(x)\ (\forall x \in X) \Leftrightarrow \theta \geqslant \varphi,$$

и разности $c_\theta(x) - c_\varphi(x)$ возрастают по $x$ при $\theta > \varphi$.

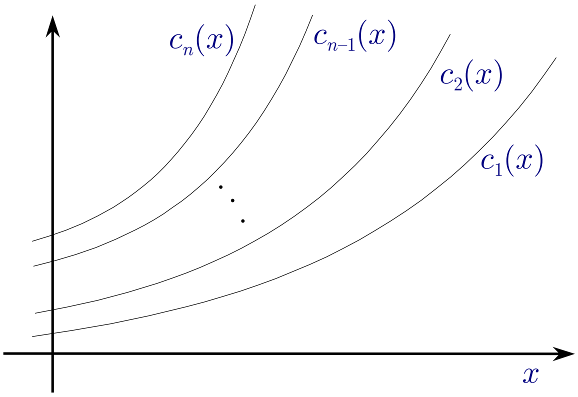


Рисунок 142

Напомним, что составление оптимального контракта сводится к решению следующей задачи

$$\sum_{\theta \in \Theta} \mu_\theta (x_\theta - w_\theta) \to \max_{\{w_\theta,\ x_\theta\}}$$

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi),\ \forall \theta, \varphi \in \Theta, \qquad (♉)$$

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0,\ \forall \theta \in \Theta.$$

Если указанные условия упорядоченности издержек выполнены, то можно доказать важный результат: **цепное правило**. Он состоит в том, что можно заменить задачу (♉) эквивалентной задачей:

$$\sum_{\theta\in\Theta}\mu_\theta(x_\theta - w_\theta) \to \max_{\{w_\theta,\, x_\theta\}}$$

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) = w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1}),\ \forall\theta < n, \qquad (♈)$$

$$w_n - c_n(x_n) = 0,$$

$$x_\theta \geqslant x_{\theta+1},\ \forall\theta < n.$$

Это означает, что наниматель выберет контракт, обладающий следующими свойствами:

1) Чем большей производительностью отличается работник, тем большие он осуществляет усилия (условие упорядоченности уровней усилий $x_\theta$).

2) Не требуется следить, чтобы работник типа $\theta$ ($\theta < n$) не выбирал пакет, предназначенный для работника типа $\theta + k$ при $k > 1$, достаточно гарантировать, чтобы это было выполнено для $k = 1$. Ограничение участия достаточно обеспечить для работника типа $\theta = n$.

3) При максимизации прибыли указанные ограничения следует вывести на равенство. А именно, работник типа $\theta$ ($\theta < n$) должен быть безразличен при выборе между пакетом $(w_\theta, x_\theta)$ и пакетом $(w_{\theta+1}, x_{\theta+1})$, а работник типа $\theta = n$ должен быть безразличен при решении о подписании контракта.

В следующей теореме мы последовательно покажем, что оптимальные пакеты характеризуются этими свойствами, и, тем самым, покажем эквивалентность двух задач.

### Теорема 3.

Если выполнено условие упорядоченности издержек, то задача (♉) эквивалентна задаче (♈).

***Доказательство***.

1) Пусть пакеты $\{w_\theta, x_\theta\}$ удовлетворяют ограничениям задачи (♉). Покажем, что уровни усилий упорядочены.

Рассмотрим два произвольных типа $\theta, \varphi \in \Theta$, таких что $\theta > \varphi$. Для этих типов выполнены условия самовыявления:

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi),$$

$$w_\varphi - c_\varphi(x_\varphi) \geqslant w_\theta - c_\varphi(x_\theta).$$

Сложив два неравенства, получим

$$c_\theta(x_\varphi) - c_\varphi(x_\varphi) \geqslant c_\theta(x_\theta) - c_\varphi(x_\theta).$$

Поскольку $c_\theta(x) - c_\varphi(x)$ возрастает, то отсюда следует, что $x_\varphi \geqslant x_\theta$.

2) Докажем, что если для работника любого типа $\theta < n$ пакет $(w_\theta, x_\theta)$ не хуже, чем пакет $(w_{\theta+1}, x_{\theta+1})$, то, как следствие, для работника любого типа $\theta < n$ пакет $(w_\theta, x_\theta)$ не хуже, чем любой пакет $(w_{\theta+k}, x_{\theta+k})$, $k \geqslant 1$ $(k \leqslant n - \theta)$.

Докажем это утверждение по индукции. При $k = 1$ оно верно по предположению. Предположим теперь, что оно верно для некоторого фиксированного $k$ и покажем, что оно также верно и для $k + 1$.

Поскольку

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\theta+k} - c_\theta(x_{\theta+k}),$$

и

$$w_{\theta+k}-c_{\theta+k}(x_{\theta+k})\geqslant w_{\theta+k+1}-c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1}),$$

откуда

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\theta+k+1}-c_{\theta}(x_{\theta+k})+c_{\theta+k}(x_{\theta+k})-c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1}).$$

Поскольку, как мы только что доказали, $x_{\theta+k}\geqslant x_{\theta+k+1}$, а функция $c_{\theta+k}(x)-c_{\theta}(x)$ возрастает, то

$$c_{\theta+k}(x_{\theta+k})-c_{\theta}(x_{\theta+k})\geqslant c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1})-c_{\theta}(x_{\theta+k+1}),$$

и, следовательно,

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\theta+k+1}-c_{\theta}(x_{\theta+k+1})$$

Мы показали, что часть ограничений самовыявления избыточна. Покажем теперь, что из ограничения самовыявления для $\theta$ и $\theta+1$ и ограничения участия для $\theta=n$ следуют ограничения участия для $\theta<n$, поэтому они также избыточны. Действительно, из

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\theta+1}-c_{\theta}(x_{\theta+1}),$$

и

$$w_{\theta+1}-c_{\theta+1}(x_{\theta+1})\geqslant 0,$$

при выполнении предположения об упорядоченности издержек следует

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant 0.$$

3) В решении задачи (♉) строгое неравенство

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})>w_{\theta+1}-c_{\theta}(x_{\theta+1}),\ \forall\theta<n,$$

невозможно. Если бы выполнялось такое неравенство, то, как следует из только что доказанного, мы могли бы уменьшить все $w_{\varphi}$, $\varphi\geqslant\theta$, на величину соответствующей невязки, не нарушая ни одного ограничения задачи (все ограничения, которые могли бы быть нарушены при таком сдвиге, являются избыточными, то есть выполняются автоматически). Но тем самым, мы увеличили бы прибыль, что невозможно.

Аналогично, если бы

$$w_{n}-c_{n}(x_{n})>0,$$

то возможно было бы уменьшить $w_n$ до $c_n(x_n)$, не нарушая ни одного ограничения задачи.

Таким образом, оптимальное решение задачи (♉) удовлетворяет всем ограничениям задачи (♈).

4) Для доказательства теоремы осталось показать, что если пакеты $\{w_{\theta},x_{\theta}\}$ удовлетворяет ограничениям задачи (♈), то они удовлетворяют всем ограничениям задачи (♉).

Достаточно проверить ограничения самовыявления для $\theta,\varphi$ при $\theta>\varphi$ и ограничение участия для $n$, поскольку, как мы уже показали, остальные ограничения избыточны. Ограничение участия для работника типа $n$ в задаче (♈) выполнено.

Докажем выполнение указанных ограничений самовыявления по индукции. Зафиксируем $\theta$. При $\theta=\varphi$ ограничение выполнено. Пусть оно выполнено при некотором заданном $\varphi$ ($\theta>\varphi$). Докажем, что оно выполнено и при $\varphi-1$.

Из предположения индукции

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\varphi}-c_{\theta}(x_{\varphi})$$

и ограничения задачи (♈)

$$w_{\varphi-1}-c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1})=w_{\varphi}-c_{\varphi-1}(x_{\varphi})$$

следует, что

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\varphi-1}-c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1})+c_{\varphi-1}(x_{\varphi})-c_{\theta}(x_{\varphi}).$$

Поскольку из ограничения задачи (♈) $x_{\varphi-1}\geqslant x_{\varphi}$, а функция $c_{\theta}(x)-c_{\varphi-1}(x)$ возрастает, то

$$c_{\theta}(x_{\varphi-1})-c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1})\geqslant c_{\theta}(x_{\varphi})-c_{\varphi-1}(x_{\varphi}),$$

откуда

$$w_{\theta}-c_{\theta}(x_{\theta})\geqslant w_{\varphi-1}-c_{\theta}(x_{\varphi-1}).$$

■

Данная теорема (цепное правило) позволяет получить ряд свойств системы оптимальных пакетов. В частности, из ограничений задачи (♈)

$$\bar{w}_{\theta}-c_{\theta}(\bar{x}_{\theta})=\bar{w}_{\theta+1}-c_{\theta}(\bar{x}_{\theta+1})$$

и монотонности усилий

$$\bar{x}_{\theta}\geqslant\bar{x}_{\theta+1}.$$

следует, что $\bar{w}_{\theta}\leqslant\bar{w}_{\theta+1}$, то есть плата монотонна (не убывает по типу).

Напомним, что излишек, получаемый работником, называют информационной рентой. Для работника типа $\theta$ она равна

$$\bar{w}_{\theta}-c_{\theta}(\bar{x}_{\theta})\ (\geqslant 0).$$

Эта рента не возрастает по $\theta$, поскольку

$$\bar{w}_{\theta}-c_{\theta}(\bar{x}_{\theta})=\bar{w}_{\theta+1}-c_{\theta}(\bar{x}_{\theta+1})\geqslant\bar{w}_{\theta+1}-c_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}).$$

Если для какого-то из типов информационная рента положительна, то для всех предыдущих типов она тоже положительна. Для работника $n$-го типа информационная рента равна нулю. Рента нужна, чтобы работник не стал «притворяться», что его тип более высокий, чем на самом деле (в обратную сторону претворяться не имеет смысла).

Можем выразить $\{\bar{w}_{\theta}\}$ через $\{\bar{x}_{\theta}\}$ следующим образом:

$$\bar{w}_{n}=c_{n}(\bar{x}_{n}),$$

$$\bar{w}_{n-1}=\bar{w}_{n}-c_{n-1}(\bar{x}_{n})+c_{n-1}(\bar{x}_{n-1})=c_{n}(\bar{x}_{n})-c_{n-1}(\bar{x}_{n})+c_{n-1}(\bar{x}_{n-1}),$$

и т.д. Получим зависимость $\bar{w}_{\theta}=\bar{w}_{\theta}(\bar{x}_{\theta},\ldots,\bar{x}_{n})$. Общая формула имеет следующий вид

$$\bar{w}_{\theta}(x_{\theta},\ldots,x_{n})=\sum_{k=\theta+1}^{n}(c_{k}(x_{k})-c_{k-1}(x_{k}))+c_{\theta}(x_{\theta}).$$

Таким образом, задача (♈) сводится к следующей:

$$\sum_{\theta\in\Theta}\mu_{\theta}(x_{\theta}-\bar{w}_{\theta}(x_{\theta},\ldots,x_{n}))\to\max_{\{x_{\theta}\}}$$

$$x_{\theta}\geqslant x_{\theta+1},\ \forall\theta<n.$$

Объединяя слагаемые, являющиеся функциями от $x_{\theta}$, получим эквивалентную запись этой задачи:

$$\sum_{\theta\in\Theta}[\mu_\theta(x_\theta-c_\theta(x_\theta))-M_{\theta-1}(c_\theta(x_\theta)-c_{\theta-1}(x_\theta))]\to\max_{\{x_\theta\}}$$

$$x_\theta\geqslant x_{\theta+1},\ \forall\theta<n.$$

где мы ввели обозначение

$$M_\theta=\mu_1+\ldots+\mu_\theta.$$

Поскольку целевая функция задачи сепарабельна по $\{x_\theta\}$, то в ситуации, когда ограничения монотонности усилий по типу $x_\theta\geqslant x_{\theta+1}$ несущественны, ее решение распадается на $n$ независимых друг от друга задач:

$$x-c_\theta(x)-\frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}(c_\theta(x)-c_{\theta-1}(x))\to\max_{x\in X}.$$

Как мы видели, для случая 2 типов решения соответствующих задач $\bar{x}_1,\bar{x}_2$ всегда удовлетворяют условию $\bar{x}_1\geqslant\bar{x}_2$, однако в общем случае такого распадения задачи может не быть. Следующий пример показывает, что в случае 3 типов работников ограничение $x_\theta\geqslant x_{\theta+1}$ может стать активным.

**Пример 4.**

Пусть на рынке труда, в дополнение к 2 типам работников, рассмотренным в Примере **3**, с функциями издержек

$$c_1(x)=0{,}5\,x^2,\ \ c_2(x)=x^2,$$

имеются также работники 3-го типа с функцией издержек

$$c_3(x)=1{,}5\,x^2.$$

Решение задачи

$$x-c_3(x)-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_3}(c_3(x)-c_2(x))\to\max$$

имеет вид:

$$\bar{x}_3=\frac{1}{3+(\mu_1+\mu_2)/\mu_3}.$$

Если доля работников 2-го типа, $\mu_2$, мала, то решение аналогичной задачи для работника 2-го типа может оказаться ниже:

$$\frac{1}{2+\mu_1/\mu_2}<\frac{1}{3+(\mu_1+\mu_2)/\mu_3},$$

то есть разделяющий контракт не будет оптимальным. Это происходит при $\mu_2<\mu_1\mu_3$. Например, при $\mu_1=3/8$, $\mu_2=1/8$, $\mu_3=1/2$ получим $\bar{x}_2=1/5$ и $\bar{x}_3=1/4$.

Чтобы получить уровни усилий, которые определяют оптимальный контракт в этом случае, следует решить задачу

$$\mu_2(x-c_2(x))-\mu_1(c_2(x)-c_1(x))+$$
$$+\mu_3(x-c_3(x))-(\mu_1+\mu_2)(c_3(x)-c_2(x))\to\max$$

или

$$(\mu_2+\mu_3)\,x-(2+\mu_2+\mu_3)\frac{x^2}{2}\to\max$$

откуда получаем следующие параметры объединяющего контракта:

$$\bar{x}_2=\bar{x}_3=\frac{\mu_2+\mu_3}{2+\mu_2+\mu_3},$$

$$\bar{w}_2=\bar{w}_3=c_3(\bar{x}_3)=1{,}5\left(\frac{\mu_2+\mu_3}{2+\mu_2+\mu_3}\right)^2 .$$

Как и в Примере **3** $\bar{x}_1=1$, однако оплата будет другая:

$$\bar{w}_1=\bar{w}_2+c_1(\bar{x}_1)-c_1(\bar{x}_2)=0{,}5+\left(\frac{\mu_2+\mu_3}{2+\mu_2+\mu_3}\right)^2 .$$

При $\mu_1=3/8$, $\mu_2=1/8$, $\mu_3=1/2$ получим $\bar{x}_2=\bar{x}_3=5/21$.

Записав для полной задачи, включающей ограничение $x_2\geqslant x_3$, функцию Лагранжа и приравняв к нулю ее производные в найденном решении, можно убедится, что множитель Лагранжа для данного ограничения равен

$$\frac{\mu_3\mu_1-\mu_2}{2+\mu_2+\mu_3}.$$

Таким образом, ограничение активно при $\mu_2<\mu_1\mu_3$.

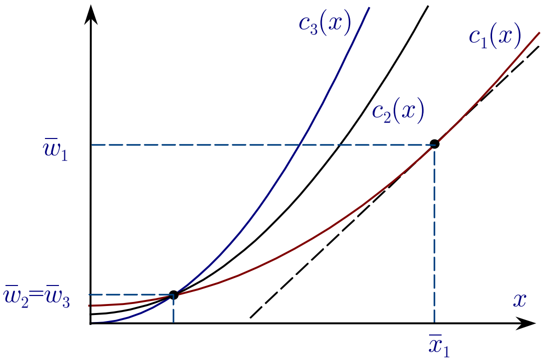


Рисунок 143. Пакеты, соответствующие объединяющему контракту для 3 типов работников

⇐

Оптимальные контракты можно разделить на два класса:

**Разделяющие контракты**: $\bar{x}_\theta>\bar{x}_{\theta+1}\ \forall\theta$ — все типы себя выявляют.

**Объединяющие контракты**: $\exists\theta$: $\bar{x}_\theta=\bar{x}_{\theta+1}$, $\bar{w}_\theta=\bar{w}_{\theta+1}$ — существуют кластеры (эффект группирования типов (bunching) ). Работники нескольких разных типов делают одинаковые усилия и получают одинаковую зарплату. Таким образом, рассмотренный пример описывает случай группирования второго и третьего типа, т.е. случай (частично) объединяющего контракта.

При дополнительных предположениях о поведении функций издержек в зависимости от типа и усилий работника, а также формы функции распределения типов можно гарантировать, что оптимальный контракт является разделяющим.

Обозначим, как и выше,

$$d_\theta(x)=c_{\theta+1}(x)-c_\theta(x).$$

Мы предположили, что $d_\theta(x)$ — возрастающие функции. Предположим дополнительно, что $d_{\theta+1}(x)-d_\theta(x)$ — тоже возрастающие функции.

В этом случае задача (♈) эквивалентна следующей (получаемой из нее удалением ограничений монотонности усилий $x_\theta \geqslant x_{\theta+1}$):

$$\sum_{\theta\in\Theta}\mu_\theta(x_\theta - w_\theta)\to\max_{\{w_\theta,\, x_\theta\}}$$

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) = w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1}),\ \forall\theta<n, \qquad (\text{♌})$$

$$w_n - c_n(x_n) = 0.$$

Таким образом, в этом случае задача составления оптимальных пакетов сводится к решению последовательности $n$ независимых задач.

**Теорема 4.**

Предположим, что $d_\theta(x)$ и $d_{\theta+1}(x)-d_\theta(x)$ возрастают по $x$ $\forall\theta$ и $\frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}$ возрастает по $\theta$. Тогда задачи (♌) и (♈) эквивалентны.

***Доказательство***.

Для доказательства утверждения достаточно показать, что решения $\{\bar{x}_\theta\}$ задач

$$\Pi_\theta(x) = x - c_\theta(x) - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta} d_{\theta-1}(x) \to \max_{x\in X}.$$

удовлетворяют опущенным ограничениям (монотонности).

Поскольку $\bar{x}_\theta$ максимизирует $\Pi_\theta(x)$, а $\bar{x}_{\theta+1}$ максимизирует $\Pi_{\theta+1}(x)$, то выполняются неравенства

$$\Pi_\theta(\bar{x}_\theta) \geqslant \Pi_\theta(\bar{x}_{\theta+1})$$

и

$$\Pi_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) \geqslant \Pi_{\theta+1}(\bar{x}_\theta).$$

Сложив эти неравенства, после преобразований получим:

$$\frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(\bar{x}_\theta) - d_{\theta-1}(\bar{x}_\theta)] + \left(1 + \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(\bar{x}_\theta) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(\bar{x}_{\theta+1}) - d_{\theta-1}(\bar{x}_{\theta+1})] + \left(1 + \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(\bar{x}_{\theta+1}).$$

Поскольку в предположениях теоремы функция

$$\frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(x) - d_{\theta-1}(x)] + \left(1 + \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(x)$$

является возрастающей, то $\bar{x}_\theta \geqslant \bar{x}_{\theta+1}$.

■

Если к сделанным предположением добавить предположение о дифференцируемости функций, то можно доказать, что $\bar{x}_\theta > \bar{x}_{\theta+1}$ для внутренних решений. По условиям первого порядка

$$\Pi'_\theta(\bar{x}_\theta) = 1 - c'_\theta(\bar{x}_\theta) - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta} d'_{\theta-1}(\bar{x}_\theta) = 0.$$

$$\Pi'_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) = 1 - c'_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) - \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} d'_\theta(\bar{x}_{\theta+1}) = 0.$$

Пусть $\bar{x}_\theta = \bar{x}_{\theta+1} = \bar{x}$. Тогда

$$\Pi'_{\theta+1}(\bar{x}) - \Pi'_\theta(\bar{x}) = c'_{\theta+1}(\bar{x}) - c'_\theta(\bar{x}) + \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} d'_\theta(\bar{x}) - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta} d'_{\theta-1}(\bar{x}) = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d'_\theta(\bar{x}) + \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}\left(d'_\theta(\bar{x}) - d'_{\theta-1}(\bar{x})\right) = 0.$$

Поскольку $\frac{M_\theta}{\mu_{\theta+1}} > \frac{M_{\theta-1}}{\mu_\theta}$, $d'_\theta(\bar{x}) > 0$, и $d'_\theta(\bar{x}) - d'_{\theta-1}(\bar{x}) \geqslant 0$, то левая часть положительна. Получили противоречие, т.е. $\bar{x}_\theta \neq \bar{x}_{\theta+1}$.

## Модель найма с асимметричной информацией при монопольном положении нанимателя: общий случай

Предположим, что результат усилий $x \in X$ работника — доход $\tilde{y}(x)$, представляющий собой случайную величину, распределение которой ($F_x$) зависит от $x$, но не зависит от типа ($F_{x\theta} = F_x \ \forall\theta$). Будем считать, что ожидаемый доход $y(x) = \mathsf{E}_x \tilde{y}(x)$ — монотонно возрастающая вогнутая функция уровня усилий, причем $y(0) = 0$.

Предположение о независимости распределения дохода от типа существенно упрощает анализ, поскольку в этом случае величина дохода не дает нанимателю информации о типе работника. При этом предположении естественно считать, что контракт — это функция только от усилий, но не от $\tilde{y}$: $w = w(x)$.

Наниматель имеет право претендовать на весь доход (за вычетом оплаты по контракту). Поэтому при данном уровне усилий $x$ нейтральный к риску наниматель максимизирует ожидаемую прибыль

$$\mathsf{E}_x(\tilde{y}(x) - w(x)) = y(x) - w(x),$$

где $w(x)$ — оплата уровня усилий $x$ работника.

Пусть задано распределение вероятностей для типов работников. Например, в дискретном случае, описанном выше, оно определяется указанием вероятности $\mu_\theta$ для работника каждого типа $\theta$. Если работник типа $\theta$ осуществляет усилия $x_\theta$, то с точки зрения нанимателя усилия — это случайная величина. (В дискретном случае — это дискретная случайная величина, принимающая значение $x_\theta$ с вероятностью $\mu_\theta$). Таким образом, выигрыш нанимателя равен следующей величине:

$$\mathsf{E}_\theta[\mathsf{E}_{x_\theta}(\tilde{y}(x_\theta) - w(x_\theta))]$$

или, учитывая предположение независимости функции распределения дохода от типа работника,

$$\mathsf{E}_\theta[y(x_\theta) - w(x_\theta)].$$

Предполагаем, что функция полезности работника любого типа сепарабельна по деньгам и усилиям:

$$u_\theta(x, w) = v_\theta(w) - c_\theta(x),$$

где, как и выше, $v_\theta(w)$ — полезность оплаты $w$, а $c_\theta(x)$ — тягость усилий $x$ для работника типа $\theta$. Мы будем предполагать, что $v_\theta(w)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c_\theta(x)$ — возрастающая выпуклая функция.

Разные типы работников характеризуются разной формой функций $v_\theta(w)$ и $c_\theta(x)$. Каждый тип работников характеризуется уровнем резервной полезности $u_{0\theta}$, заданной экзогенно.

Модель найма со скрытой информацией можно представить как динамическую игру с неполной информацией. Последовательность ходов в этой игре следующая:

0. «Природа» выбирает тип работника.

1. Наниматель, не зная типа, предлагает контракт $w(\cdot)$.

2. Работник (зная свой тип) решает, подписывать контракт или нет.

3. Если работник подписывает контракт, то он (зная свой тип) выбирает уровень усилий $x$.

4. «Природа» при данном $x$ по распределению $F_x$ случайным образом «генерирует» $\tilde{y}(x)$.

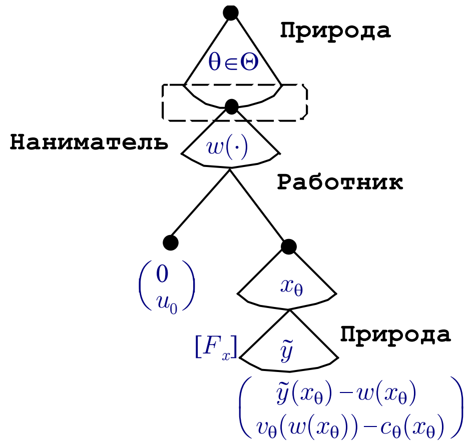


Рисунок 144. Представление модели найма со скрытой информацией в виде дерева

Будем анализировать эту игру, используя обратную индукцию.

Уровень усилий $\overset{*}{x}_\theta$, выбираемый работником типа $\theta$, является решением задачи

$$v_\theta(w(x)) - c_\theta(x) \to \max_{x \in X}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что наниматель может выбирать только такие контракты, для которых эта задача имеет решение.

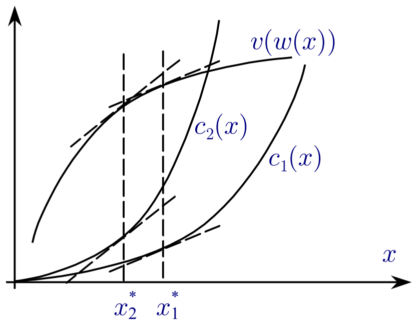


Рисунок 145. Выбор оптимальных действий работниками двух разных типов

Далее работник типа $\theta$ сравнивает значение этой задачи — уровень полезности, которую ему обеспечивает данный контракт, своей резервной полезностью и решает, подписывать ли ему контракт. Работник подписывает контракт, если

$$\max_{x \in X} v_\theta(w(x)) - c_\theta(x) \geqslant u_{0\theta}.$$

Предположим, что $v_\theta(w) = w$[226].

Это условие позволяют записать задачу работника в более простом виде:

$$w(x) - c_\theta(x) \to \max_{x \in X},$$

где $c_\theta(x)$ теперь обозначает величину $c_\theta(x) + u_{0\theta}$.

Поскольку ожидаемый доход $y(x)$ — монотонная функция усилий, то можно измерять уровень усилий непосредственно величиной ожидаемого дохода. Таким образом, без ограничения общности будем считать, что уровень усилий измеряется величиной ожидаемого дохода, т.е. $y(x) = x$.

Обозначим через $I_\theta(\cdot)$ индикаторную функцию, которая принимает значение $1$, если условие в скобках выполнено, и $0$ в противном случае.

В этих обозначениях задача нанимателя по выбору оптимального контракта имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}\Pi = \mathsf{E}[I(w(x) - c_\theta(x) \geqslant 0)(\overset{*}{x}_\theta - w(\overset{*}{x}_\theta))] \to \max_{w(\cdot)}$$
$$w(\overset{*}{x}_\theta) - c_\theta(\overset{*}{x}_\theta) \geqslant w(x) - c_\theta(x),\ \forall x \in X,\ \forall \theta \in \Theta,$$

В случае, если существует конечное число типов работников, можно решать эту задачу перебором. При этом выделяется подмножество типов работников, для которых выполнено ограничение участия. Для каждого такого подмножества решается эта задача, дополненная соответствующими ограничениями участия/неучастия и находится значение ожидаемой прибыли в максимуме. Затем находится то подмножество, для которого такая ожидаемая прибыль максимальна.

Если для рассматриваемых работников выполнено условие возрастания издержек по $\theta$, —

$$c_\theta(x) \geqslant c_\varphi(x)\ (\forall x \in X) \Leftrightarrow \theta \geqslant \varphi, \text{—}$$

то перебор можно сократить, поскольку условия найма, выгодные для работников типа $\theta$, окажутся таковыми и для работника типа $\varphi$ при $\varphi < \theta$, т.е.

---

[226] Анализ в общем случае мы предлагаем читателю проделать самостоятельно.

Его можно провести двумя способами: несколько модифицировать анализ, проведенный в тексте или произвести соответствующую замену переменных.

$$w(x)-c_\theta(x)\geqslant 0 \Rightarrow w(x)-c_\varphi(x)\geqslant 0.$$

Кроме того, из того, что работнику типа $\theta$ безразлично, подписывать контракт или нет, следует, что выполняется ограничение неучастия для работника типа $\varphi$ при $\varphi>\theta$, т.е.

$$w(x)-c_\theta(x)=0 \text{ и } \varphi>\theta \Rightarrow w(x)-c_\varphi(x)\leqslant 0.$$

Из этих рассуждений следует, что можно рассматривать задачи, в которых подписывают контракт только работники с $\theta$ меньше некоторого порогового значения, причем ограничения неучастия для остальных типов работников можно не учитывать. Это позволяет без потери общности ограничится анализом случая, когда наниматель предлагает контракт, который выгодно подписать работнику любого типа, т.е. когда подмножество типов работников, для которых выполнено ограничение участия, совпадает со всем множеством $\Theta$.

Проанализируем такой случай. Ему соответствует следующая задача:

$$\mathsf{E}\Pi=\mathsf{E}(x_\theta^*-w(x_\theta^*))\to \max_{w(\cdot)}$$
$$w(x_\theta^*)-c_\theta(x_\theta^*)\geqslant w(x)-c_\theta(x),\ \forall x\in X,\ \forall\theta\in\Theta,$$
$$w(x_\theta^*)-c_\theta(x_\theta^*)\geqslant 0\ ,\ \forall\theta\in\Theta.$$

Как и в модели с наблюдаемыми действиями, мы предполагаем, что работник выбирает те действия, которые выгодны нанимателю, поэтому можно считать, что наниматель сам выбирает усилия $x_\theta^*$:

$$\mathsf{E}\Pi=\mathsf{E}(x_\theta^*-w(x_\theta^*))\to \max_{w(\cdot),\ \{x_\theta^*\}}$$
$$w(x_\theta^*)-c_\theta(x_\theta^*)\geqslant w(x)-c_\theta(x),\ \forall x\in X,\ \forall\theta\in\Theta, \qquad (♎)$$
$$w(x_\theta^*)-c_\theta(x_\theta^*)\geqslant 0,\ \forall\theta\in\Theta.$$

Эта задача имеет бесконечно много решений. Для того чтобы охарактеризовать все ее решения, мы воспользуемся вспомогательной задачей, в которой рассматриваются только точки $\{x_\theta^*\}_\Theta$ и значения функции $w(\cdot)$ в этих точках. При этом в ограничении совместимости стимулов множество всех возможных действий $X$ заменяется на множество $\{x_\theta^*\}_\Theta$. Упростим обозначения: пусть $x_\theta$ — усилия, которые, как планирует наниматель, должен осуществлять работник типа $\theta$, а $w_\theta$ — соответствующая зарплата. Пары $(x_\theta, w_\theta)$ будем называть, как и выше, пакетами. Получаем следующую вспомогательную задачу поиска оптимальных пакетов:

$$\mathsf{E}\Pi=\mathsf{E}(x_\theta-w_\theta)\to \max_{\{w_\theta,\ x_\theta\}}$$
$$w_\theta-c_\theta(x_\theta)\geqslant w_\varphi-c_\theta(x_\varphi),\ \forall\theta,\varphi\in\Theta,$$
$$w_\theta-c_\theta(x_\theta)\geqslant 0,\ \forall\theta\in\Theta.$$

Выше мы проанализировали данную задачу.

Если издержки от усилий $c_\theta(\cdot)$ ведут себя неким регулярным образом в зависимости от $\theta$, то рассматривая эту упрощенную задачу мы не теряем существенную информацию относительно оптимальных контрактов. На основе любого ее решение можно построить функцию $w(\cdot)$ так, что $w_\theta=w(x_\theta)$, $\forall\theta\in\Theta$, причем $w(\cdot)$, $\{x_\theta\}_\Theta$ составляют оптимальный контракт (обеспечивают максимум в задаче (♎) ). И наоборот, если $w(\cdot)$, $\{x_\theta\}_\Theta$ — оптимальный контракт (решение задачи (♎) ), то соответствующие пары $(w(x_\theta),\ x_\theta)$ являются решениями вспомогательной задачи.

Покажем, что любой набор оптимальных пакетов $\{\overline{w}_\theta, \overline{x}_\theta\}$ можно реализовать как контракт (обуславливающий выбор работниками всех типов уровней усилий, соответствующих заданиям «их» пакета). Простейший способ сделать это — реализовать данный набор пакетов как пакетный контракт, т.е. контракт следующего вида:

$$w(x)=\begin{cases} \overline{w}, & x<\overline{x}_n, \\ \overline{w}_\theta, & x\in[\overline{x}_\theta, \overline{x}_{\theta-1}),\ \theta>1, \\ \overline{w}_1, & x\geqslant\overline{x}_1. \end{cases}$$

где $\overline{w}$ — достаточно малое число.

Заметим, что работнику типа $\theta$ при таком контракте выгодно выбрать усилия $\overline{x}_\theta$, гарантирующие оплату $\overline{w}_\theta$: любому $x\in(\overline{x}_\varphi, \overline{x}_{\varphi-1})$ он предпочитает $x=\overline{x}_\varphi$, а $\overline{x}_\theta$ для него не хуже $\overline{x}_\varphi$.

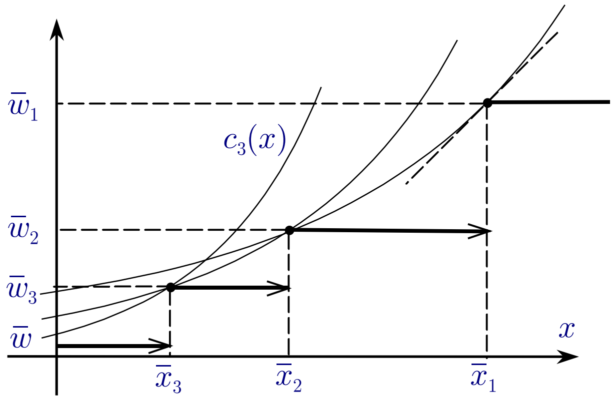


Рисунок 146. Оптимальный пакетный контракт для 3 типов работников

Покажем, что этот контракт оптимален. Пусть это не так, то есть существует другой допустимый контракт $\tilde{w}(\cdot)$, который обеспечивает нанимателю более высокую прибыль. Пусть при этом контракте работник типа $\theta$ выбирает усилия $\tilde{x}_\theta$. Тогда пакеты $\{\tilde{w}_\theta, \tilde{x}_\theta\}$, где $\tilde{w}_\theta=\tilde{w}(\tilde{x}_\theta)$, являются допустимыми в задаче нахождения оптимальных пакетов (♉). Это противоречит оптимальности пакетов $\{\overline{w}_\theta, \overline{x}_\theta\}$.

Наоборот, любой оптимальный контракт $w(\cdot)$ и соответствующие ему уровни усилий

$$x_\theta^*\in\operatorname{argmax}\{w(x)-c_\theta(x)\}$$

определяют набор оптимальных пакетов $\{w(x_\theta^*), x_\theta^*\}$. Действительно, если эти пакеты неоптимальны, то существуют другие допустимые в задаче (♉) пакеты, обеспечивающие нанимателю большую прибыль. Однако эти альтернативные пакеты можно реализовать как пакетный контракт.

Вообще говоря, по данному набору оптимальных пакетов оптимальный контракт $w(\cdot)$ можно построить бесконечным числом способов. Требуется, чтобы функция $w(\cdot)$ проходила через точки $(x_\theta, w_\theta)$, но не пересекала бы соответствующие кривые безразличия работников (лежала выше их).

Заметим, что функция $w(\cdot)$ будет иметь достаточно сложный вид. Например, если функции издержек дифференцируемы, то оптимальные пакеты нельзя реализовать в виде линейного контракта $w(x)=a+bx$: точки $(x_\theta, w_\theta)$ могут не лежать на одной прямой, кроме того, при строгой выпуклости функций издержек кривые безразличия будут пересекать прямую, проходящую через эти точки даже и в том случае, если они лежат на одной прямой. Более того, как правило, оптимальный контракт не может быть гладкой функцией.

## Задачи

26. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов выбирает уровень усилий более низкий, чем в случае, когда типы наблюдаемы?

27. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов получит излишек полезности по сравнению с резервной полезностью?

28. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов выбирает уровень усилий такой же, как и в случае, когда типы наблюдаемы?

29. В модели найма со скрытой информацией предположим, что издержки усилий работника типа $t$ равны $c_t(x)=tx^2$, где $t=1,2$, и $\pi_1=\pi_2$, где $\pi_t$ — доля работников типа $t$.

Определите характеристики контракта по найму этих двух типов работников (оптимальный уровень усилий, обусловленное контрактом вознаграждение для каждого типа работников).

30. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=\alpha x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы.

Определите характеристики оптимального контракта.

31. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=2x^2$.

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа.

32. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=2x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы.

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от резервной полезности работников 1-го типа, в предположении, что резервная полезность работников 2-го типа равна нулю.

33. Заказчик нанимает подрядчика для производства некоторого блага. Ценность каждой единицы этого блага для заказчика равна $8$. Подрядчик с вероятностью $1/3$ может оказать-

ся имеющим функцию полезности $u_1=\sqrt{12+w}-Q$, и с вероятностью $2/3$ — имеющим функцию полезности $u_2=\sqrt{5+w}-Q$, где $w$ — величина денежного дохода подрядчика, а $Q$ — это стоимость произведенных благ. Резервный уровень полезности подрядчика любого типа равен $u_0=1$.

Найдите оптимальный контракт вида $\{(Q_1,w_1),\,(Q_2,w_2)\}$ в условиях асимметричной информации (заказчик не различает подрядчиков).

34. В модели найма со скрытой информацией с $n$ типами работников ($\theta=1,\ldots,n$) покажите, что если $\mu_\theta=\frac{1}{n}$, и $c_\theta(x)=\theta c(x)$, где $c(x)$ — возрастающая выпуклая функция, то ограничение монотонности усилий несущественно, т.е. задача определения оптимального контракта распадается на $n$ независимых задач.

35. Пусть в модели найма со скрытой информацией $c_\theta(x)=\theta x$, функция дохода $y(x)$ такова, что предельный доход положителен и убывает. Предположим, что решение задачи поиска оптимальных пакетов ($\bar{x}_\theta$, $\bar{w}_\theta$) является внутренним, причем все типы работников подписывают контракт.

(A) Покажите, что если имеется два типа работников, $\theta_1$ и $\theta_2$, причем $\theta_1<\theta_2$, то уровни усилий удовлетворяют соотношениям

$$y'(\bar{x}_2)=\theta_2+\frac{\mu_1}{\mu_2}(\theta_1-\theta_2),$$

а

$$y'(\bar{x}_2)=\theta_1.$$

(B) Покажите, что если имеется три типа работников, $\theta_1,\theta_2$ и $\theta_3$, причем $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2>0$, то ограничение монотонности усилий является существенным тогда и только тогда, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$. Вычислите оптимальные пакеты для случая, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$ и $\mu_2\geqslant\mu_1\mu_3$.

(C) Покажите, что если имеются $n$ типов работников, причем

$$\theta_i-\theta_{i-1}=\theta_{i+1}-\theta_i>0,$$

то достаточным условием несущественности ограничения монотонности усилий является неубывание отношения

$$\frac{\mu_1+\ldots+\mu_{i-1}}{\mu_i}.$$

Покажите, что это достаточное условие, вообще говоря, не является необходимым.

36. Пусть в модели найма со скрытой информацией допустимые усилия задаются условием $x\geqslant 0$, функция дохода $y(x)$ обладает следующими свойствами:

(1) $y'(x)\to\infty$ при $x\to 0$;

(2) $y'(x)x\to 0$ при $x\to 0$,

и существуют работники двух типов, издержки усилий которых линейны ($c_\theta(x)=\theta x$). Докажите, что наниматель наймет работников обоих типов, т.е. $\bar{x}_\theta>0\ \forall\theta$.

37. Рассмотрим ситуацию ценовой дискриминации следующего типа Единственный производитель и продавец частного блага, производство которого характеризуется постоянными издержками. сталкивается с двумя типами покупателей этого блага, оценками которых имеют вид

$$v_\theta(x)=\theta\sqrt{x}\,,\ \theta=1,2.$$

Покупатели двух типов встречаются с вероятностями $\mu$ и $1-\mu$ соответственно. Проинтерпретируйте эту модель как модель найма и найдите оптимальный контракт. Проделайте то же самое для трех типов покупателей.

38. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=0{,}5\,x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=x^2$. Пусть контракт ищется среди линейных по усилиям схем (базовая заработная плата плюс премия за усилия, пропорциональная величине усилий).

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа. Сравните с оптимальным пакетным контрактом.

39. На рынке страховых услуг имеются два типа страхователей — с низкой или высокой вероятностью $\mu_\theta$ наступления страхового случая — потери актива ценностью $K$ рублей. Во всех других аспектах они одинаковы — каждый обладает каждый богатством $W$ (включая рассматриваемый актив) и его предпочтения характеризуются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией $v(w)=\ln(w)$.

На рынке страховых услуг имеется только одна страховая компания

(А) Сформулируйте задачу страховой компании и проинтерпретируйте ее как модели найма со скрытыми типами.

(Б) Каким окажется выбранный страховой контракт, в случае симметричной информации, т.е. в условиях, когда страховая знает тип страхователя?

(В) Каким окажется выбранный страховой контракт, в случае асимметричной информации, т.е. в условиях, когда страховая знает только распределение вероятностей типов страхователя?

(Г) Предположим, что на рынке существует несколько страховых компаний. Какие страховые контракты предложат в этом случае страховые фирмы?

## *Модель найма со скрытой информацией: конкуренция среди нанимателей*

В этом параграфе мы откажется от сделанного ранее предположения о монопольном положении нанимателя и будем считать, что существует по крайней мере два нанимателя, предлагающие контракты работникам, тип которых они не наблюдают.

Будем считать, что другие характеристики ситуации найма остаются без изменения. В частности, как и раньше, будем предполагать, что результат усилий работника не зависит от его типа. Это предположение позволяет рассматривать контракты, обуславливаемые только уровнем усилий (но не результата).

В этой случае игра имеет вид:

0. «Природа» выбирает тип работника.

1. Наниматель $j$, не зная типа, предлагает ему контракт $w_j(\cdot)$, причем все наниматели выбирают контракт одновременно.

2. Работник (зная свой тип) решает, подписывать ли ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из двух.

3. Если работник подписывает $j$-й контракт, то он (зная свой тип) выбирает уровень усилий $x$.

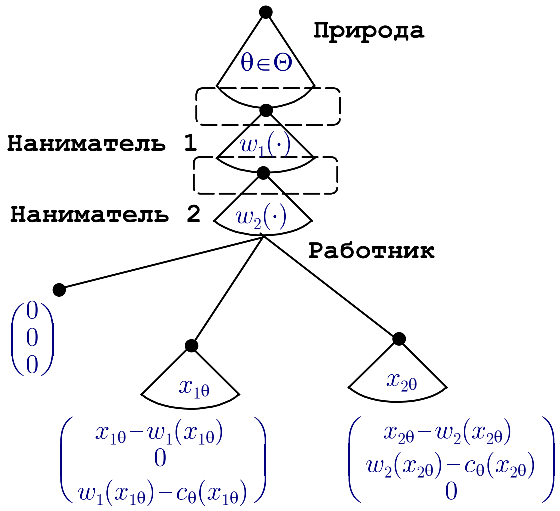


Рисунок 147. Представление модели найма со скрытой информацией при конкуренции нанимателей в виде дерева

Охарактеризуем возможные равновесия данной игры — равновесные контракты модели найма при конкуренции нанимателей, — ограничившись характеристикой равновесных пакетов.

Полную игру для целей анализа заменим следующей упрощенной игрой:

0. «Природа» выбирает тип работника.

1. Наниматели одновременно предлагают работнику пакеты $(w_{j\theta}, x_{j\theta})$.

2. Работник решает, подписывать ли ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из пакетов выбрать.

Мы опускаем формальное доказательство того, что описанные игры в определенном смысле эквивалентны. Такое доказательство можно построить, пользуясь идеями предыдущего параграфа.

Будем предполагать в дальнейшем, что равновесие в игре таково, что в нем работник обязательно подписывает один из предложенных контрактов (ограничение участия выполнено).

Анализируя такую игру с использованием обратной индукции, получим, что равновесные пакеты $(\bar{x}_{j\theta}, \bar{w}_{j\theta})$ характеризуются следующими свойствами:

♦ Работник выбирает (из всех пакетов всех нанимателей) пакет $(w_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$, дающий ему максимальную полезность:

$$\bar{w}_{j\theta} - c_\theta(\bar{x}_{j\theta}) \geqslant \bar{w}_{i\varphi} - c_\theta(\bar{x}_{i\varphi}),\ \forall\theta,\varphi\in\Theta,\ \forall i=1,2.$$

При использовании обратной индукции в этом месте возникает неоднозначность в случае, когда работнику безразлично, пакет какого нанимателя выбрать. Сделаем предположение (аналогичное предположению модели Бертрана), что в этом случае работник использует смешанную стратегию, выбирая нанимателей с одинаковой вероятностью.

♦ Наниматель $j$ предлагает набор пакетов $(\bar{w}_{j\theta},\, \bar{x}_{j\theta})$, дающий ему максимальную ожидаемую прибыль при данном наборе пакетов конкурента.

Для того чтобы упростить анализ, будем предполагать, что функции издержек строго выпуклы.

Прежде, чем рассмотреть модель с ненаблюдаемыми типами, проанализируем ситуацию, когда тип работника известен работодателю. Покажем, что в этом случае решение игры (равновесные пакеты $(\bar{w}_{j\theta},\, \bar{x}_{j\theta})$) имеет вид:

$$\bar{x}_{j\theta} = \bar{x}_\theta = \hat{x}_\theta,$$

$$\bar{w}_{j\theta} = \bar{w}_\theta = \bar{x}_\theta,$$

где

$$\hat{x}_\theta = \text{argmax}\{x - c_\theta(x)\},$$

Доказательство этого факта проведем в 2 этапа. Во-первых, покажем, что прибыль каждого нанимателя от найма работника любого типа равна нулю. Пусть это не так, и существует наниматель (например, $j=1$) и тип работника, такие что от сделки с этим работником этот наниматель получает положительную прибыль ($\Pi_1 > 0$). Здесь может быть два случая: (1) 2-й наниматель предлагает невыгодный работнику контракт и, следовательно, получает нулевую прибыль и (2) работник безразличен между предлагаемыми двумя контрактами. Во втором случае оба нанимателя получают одинаковую положительную прибыль ($\Pi_1 = \Pi_2 > 0$).

Тогда 2-й наниматель мог бы предложить этому работнику пакет с тем же уровнем усилий, но несколько более высокой оплатой. Работник тогда выбрал бы пакет, предлагаемый 2-м нанимателем, который получил бы при этом прирост прибыли. В случае (1) в первом приближении прибыль станет равной $\Pi_1$, а в случае (2) — $2\Pi_1 = 2\Pi_2$.

Таким образом, в исследуемом равновесии прибыль каждого нанимателя от найма работника любого типа равна нулю, и, следовательно, оплата усилий равна производимому работником доходу:

$$\bar{w}_{j\theta} = \bar{x}_{j\theta}.$$

Во-вторых, покажем, что наниматели предлагают работнику типа $\theta$ пакет, обуславливающий уровень усилий

$$\bar{x}_{j\theta} = \bar{x}_\theta = \hat{x}_\theta.$$

Действительно, если это не так и, например, первый наниматель предлагает пакет $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$ такой, что

$$\Delta = (\hat{x}_\theta - c_\theta(\hat{x}_\theta)) - \bar{x}_{j\theta} - c_\theta(\bar{x}_{j\theta}) > 0.$$

Но тогда пакет $(\hat{x}_\theta - \Delta/2,\, \hat{x}_\theta)$ предпочитается работником типа $\theta$ и дает предложившему ему нанимателю более высокую прибыль, чем $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$. Но такая ситуация не может возникнуть при равновесии.

Поскольку каждая из рассматриваемых задач имеет единственное решение при строгой выпуклости издержек, то в равновесии все фирмы предлагают работнику каждого из типов $\theta$ одинаковые контракты: $\bar{x}_{j\theta} = \hat{x}_\theta \ \forall j$.

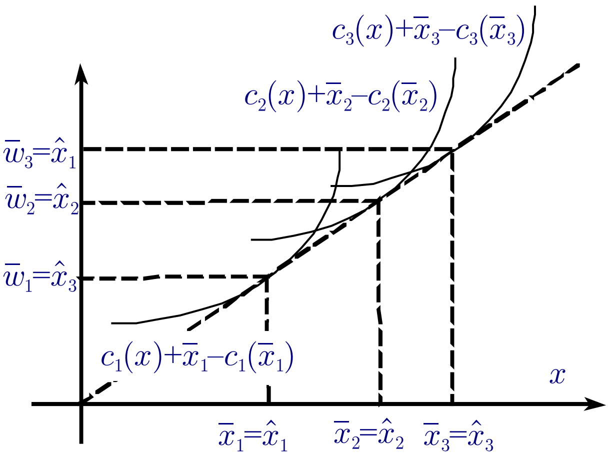


Рисунок 148. Равновесные пакеты при наблюдаемости типов, 3 типа работников

Сравнивая это решение с монопольным случаем, отметим, что равновесные пакеты в данном случае характеризуются тем же объемом усилий, но более высокими уровнями оплаты. Мы предполагаем здесь, что рассматривается случай, когда оптимальный «монопольный» пакет дает нанимателю положительную прибыль.

Равновесие оказывается оптимальным по Парето, поскольку благосостояние

$$W=\sum_{\theta\in\Theta}\mu_\theta(x_\theta-c_\theta(x_\theta))$$

в нем достигает максимума.

Покажем, что эти же пакеты $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$ составляют единственное равновесие при ненаблюдаемости типов. Докажем, что это равновесие. Во-первых, для этих контрактов выполнены условия совместимости стимулов, т.е.

$$\bar{w}_\theta-c_\theta(\bar{x}_\theta)\geqslant\bar{w}_\varphi-c_\theta(\bar{x}_\varphi),\ \forall\theta,\varphi\in\Theta,$$

поскольку в данном случае они имеют вид

$$\hat{x}_\theta-c_\theta(\hat{x}_\theta)\geqslant\hat{x}_\varphi-c_\theta(\hat{x}_\varphi),\ \forall\theta,\varphi\in\Theta.$$

Справедливость неравенства следует из определения $\hat{x}_\theta$.

Во-вторых, ни одна из фирм не может предложить систему пакетов, которая дала бы ей положительную ожидаемую прибыль. Пусть это не так. Тогда эта альтернативная система пакетов содержит пакет, для которого прибыль положительна, и работник одного из типов, например $\theta$, получает от этого пакета более высокую полезность, чем от пакета $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$. Этого быть не может, поскольку сумма прибыли фирмы и полезности работника этого типа от любого пакета $(w, x)$ составляет величину $x-c_\theta(x)$, не превышающую $\hat{x}_\theta-c_\theta(\hat{x}_\theta)$ по определению $\hat{x}_\theta$.

Осталось показать, что других равновесий нет.

Ограничимся анализом ситуации с двумя типами работников и двумя нанимателями.

Как и в ситуации с единственным нанимателем, мыслимы два типа равновесий: разделяющие равновесия и объединяющие равновесия. Таким образом, мы должны показать, что в данной ситуации объединяющих равновесий не существует, а любое разделяющее равновесие совпадает с описанным равновесием (равновесием при наблюдаемости типов).

Установим сначала ряд свойств равновесий в ситуации с ненаблюдаемыми типами.

♣ Если пакеты $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$ являются равновесными, то ожидаемая прибыль каждого нанимателя равна нулю.

Во-первых, в равновесии ожидаемая прибыль каждого нанимателя неотрицательна, поскольку он всегда может предложить непривлекательные пакеты и получить по крайней мере нулевую прибыль.

Во-вторых, все выбираемые любым типом работников $\theta$ пакеты равнопривлекательны как для этих работников, так и для предложивших их нанимателей. То, что они равнопривлекательны для работников очевидно. Равнопривлекательность для нанимателей следует из того, что если один из нанимателей получает более низкую прибыль от сделок с работниками типа $\theta$, чем другой, то он мог бы предложить работникам этого типа пакеты своего конкурента. При этом условия самовыявления не нарушаются, поскольку для работников других типов предпочтительны другие пакеты.

Пусть один из нанимателей, например первый, получает положительную прибыль $\Pi_1$, причем $\Pi_1 \geqslant \Pi_2$. Обозначим через $(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)$ — пакет (один из пакетов, если их несколько), который выбирают работники типа $\theta$. Тогда 2-й наниматель может предложить пакеты $(\bar{w}_\theta + \varepsilon, \bar{x}_\theta)$, где $\varepsilon > 0$. Каждый из них более привлекателен для работника соответствующего типа $\theta$, чем $(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)$, причем ограничения самовыявления не нарушаются. Этот набор пакетов при достаточно малом $\varepsilon$ дает нанимателю 2 типа более высокую прибыль (близкую к $\Pi_1 + \Pi_2$). Следовательно, такие пакеты не могут быть равновесными.

♣ В равновесии прибыль каждого нанимателя от сделки с каждым работником равна нулю, т.е. для любого пакета, который выбирается работниками выполнено $\bar{w}_{j\theta} = \bar{x}_{j\theta}$. Предположим, что это не выполнено для одного из нанимателей. Тогда существует хотя бы один пакет, дающий этому нанимателю положительную прибыль. В этом случае этот наниматель мог бы заменить все пакеты на этот и получить положительную прибыль.

Используя полученные свойства равновесия докажем сформулированное выше утверждение о единственности равновесия. Пусть это не так и существует равновесие, такое что

$$\bar{x}_{j\theta} \neq \hat{x}_\theta.$$

где, как и в случае наблюдаемости типов,

$$\hat{x}_\theta = \operatorname{argmax}\{x - c_\theta(x)\}.$$

Обозначим

$$\Delta = \hat{x}_\theta - c_\theta(\hat{x}_\theta) - (\bar{x}_{j\theta} - c_\theta(\bar{x}_{j\theta})).$$

Тогда $\Delta > 0$ и пакет $(\hat{x}_\theta - \Delta/2, \hat{x}_\theta)$ более предпочтителен для работника типа $\theta$, и дает нанимателю $j$ положительную прибыль. При этом прибыль от сделок с любыми другими работниками не может уменьшиться, поскольку в равновесии прибыль от любого пакета равна нулю.

Таким образом, равновесные пакеты имеют вид $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$, ненаблюдаемость типов в этом простом случае не влияет на структуру равновесия. Это равновесие будет Парето-оптимальным.

Отметим близкую аналогию данной модели и свойств равновесия с моделью олигополистической конкуренции Бертрана.

Заметим также, что фактически наниматели в данном случае используют линейный контракт вида $w(x) = x$, т.е. работник получает полностью доход, который он производит.

## Задачи

40. Пусть в модели найма со скрытой информацией имеется два нанимателя и $n$ типов работников с функциями издержек $c_\theta(x) = \theta x^2$. Вычислите равновесные пакеты.

41. Пусть в модели найма со скрытой информацией имеется более двух нанимателей. Охарактеризуйте все равновесия.

42. Пусть в модели найма со скрытой информацией имеется два нанимателя и два типа работников с функциями издержек $c_\theta(x) = \theta x^2$ и производительностями $y(x) = x/\theta$.

(1) Покажите, что в равновесии любого типа прибыль от сделки любого нанимателя с работником любого типа равна нулю.

(2) Покажите, что не существует объединяющих равновесий.

(3) Покажите, что если существует разделяющее равновесие, то пакет для работников $\theta = 2$ совпадает с его пакетом при наблюдаемости типов, а для $\theta = 1$ определяется условием самовыявления и равенством нулю прибыли от сделки с ними.

(4) При каких условиях на доли работников разных типов равновесие существует. Вычислите равновесные пакеты, когда эти условия выполнены.

(5) При каких условиях равновесие будет Парето-оптимальным?

# Приложение: Элементы теории некооперативных игр

## Введение

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами (называемыми, в соответствии с установившейся традицией, игроками) в ситуациях, когда на результат этих решений оказывают влияние действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть **играми**.

В настоящее время теория игр проникла практически во все области экономической теории — в экономику общественного сектора, экономику труда, в теорию отраслевых рынков, международную экономику, макроэкономику и т.д. Как оказалось, исследователи, занимавшиеся моделированием экономических и социальных явлений, предлагали решения, которые совпадают с теми или иными концепциями равновесия современной теории игр, еще до того, как эти концепции были сформулированы в явном виде и вошли в инструментарий теории игр. Приведем лишь несколько примеров: модели олигополии (А. Курно, Ж. Бертран, Г. Штакельберг), модель рынка «лимонов» (Дж. Акерлов), модель сигнализирования на рынке труда (М. Спенс), анализ аукционов в условиях неполной информации (У. Викри). Это совпадение не является чем-то случайным. Фактически предлагаемые решения оказывались естественным обобщением лежащих в основе современной неоклассической теории понятия *рационального поведения*.

Неоклассическая экономическая теория опирается на логику, которой руководствуются люди, осуществляя выбор в самых разных ситуациях повседневной жизни. Покупая те или иные товары, поступая учиться в университет, голосуя за ту или иную партию, решая вступить в брак и даже совершая преступления люди выбирают из двух или более альтернатив исходя из своих предпочтений. Другими словами, в основе неоклассической экономической теории лежит убеждение,[227] что любой феномен общественной жизни следует рассматривать как итог взаимодействия рациональных индивидуумов, выбирающих наилучшие (с их точки зрения) альтернативы из тех, которые для них доступны в данной ситуации.

Как правило, последствия решений, принимаемых одним экономическим субъектом, зависят от того, какие решения приняли, принимают или будут принимать другие. В ситуациях, когда эти решения (влияющие на положение экономического субъекта) ему неизвестны,[228] естественно считать, что он делает предположения (формирует ожидания) относительно того, какими эти решения могут быть. Тогда естественное обобщение рационального поведения — это оптимальные выборы экономических субъектов при данных ожиданиях.

Однако предположений о рациональности в общем случае оказывается недостаточным для того, чтобы предсказать, какие действия будут выбраны. Необходимо, таким образом, сделать какие-то предположения относительно ожиданий. Следуя сложившейся в экономической теории практике, мы будем здесь анализировать *равновесные* ситуации — ситуации, при которых ожидания экономических субъектов оказываются оправдавшимися, т.е. ожидаемые ими действия других экономических субъектов совпадают с фактически выбранными. Такой подход позволяет существенным образом сузить область возможных решений.

---

[227] так называемый методологический индивидуализм

[228] например, решения остальных олигополистов в моделях Курно и Бертрана

Мы не стремились представить здесь сколько-нибудь развернутое изложение теории игр, какой она сложилась к настоящему моменту.[229] Цель раздела скорее в том, чтобы дать понятие об идеях и продемонстрировать возможности теории игр в моделировании ситуаций, включающих стратегическое взаимодействие экономических субъектов.

## *Статические игры с полной информацией*

Под **статической игрой** понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что участники принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе одновременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми с **полной информацией** понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.[230]

### Нормальная форма игры

Альтернативные действия, которые может предпринять игрок, в контексте статических игр с полной информацией, совпадают с тем, что в теории игр называется **стратегиями**, по причинам, которые станут ясны из дальнейшего.

Приведем пример статической игры с полной информацией.

**Игра 1.**[231] *«Выбор компьютера»*

Двое знакомых одновременно выбирают, компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в $a$ ($a > 0$) некоторых условных единиц, а второй — в $b$ ($b > 0$) условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду ($c > 0$), если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым. ⇦

Таблица 5

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | IBM | Mac |
| **Игрок 1** | IBM | $c$<br>$a+c$ | $b$<br>$a$ |
| | Mac | $0$<br>$0$ | $b+c$<br>$c$ |

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть «Игрок 1» и «Игрок 2») имеет две стратегии, которые можно условно назвать «IBM» и «Mac». Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) $2 \times 2$. В игре имеется четыре исхода: (IBM, IBM), (IBM, Mac) (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши участников.[232] Игры такого

---

[229] В частности, мы не касаемся тем, относящимся к кооперативной теории игр.

[230] Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

[231] Игра представляет собой вариант известной игры «Battle of sexes» — «Борьба полов».

[232] Мы будем использовать следующее соглашение при изображении матричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы и его выигрыши записываются *в левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы и его выигрыши записываются *в*

рода, то есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число стратегий, принято называть матричными[233] играми двух лиц.

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:

✦ множество игроков,

✦ множество стратегий, которые могут выбрать игроки,

✦ выигрыши игроков.

И в общем случае, чтобы задать статическую игру с полной информацией, требуется указать перечисленные элементы. Описание игры в виде такого набора называется **нормальной формой** игры.[234] Можно сказать, предваряя дальнейшее, что это тот минимум, который необходим для описания *любой* игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т.д.

В дальнейшем, описывая общую статическую игру $m$ лиц с полной информацией, будем использовать следующие формальные обозначения для указанных элементов.

Множество **игроков** (множество участников) будем обозначать $I$:

$$I = \{1,...,m\}.$$

Множество возможных стратегий $i$-го игрока — или просто **множество стратегий** $i$-го игрока — будем обозначать через $X_i$. Отдельную стратегию $i$-го игрока будем, как правило, обозначать через $x_i$. Совокупность стратегий всех игроков будем называть **исходом** игры. Т.е. исход игры — это набор

$$\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m), \text{ где } \boldsymbol{x} \in X_1 \times \cdots \times X_m = X.$$

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция (в экономической теории ее называют функцией полезности). Обозначим целевую функцию $i$-го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры она сопоставляет некоторое действительное число — **выигрыш**. Таким образом, в описании игры следует задать для каждого игрока $i \in I$ функцию вида

$$u_i : X \mapsto \mathbb{R}.$$

Нормальная форма игры, в соответствии со сказанным выше, представляет собой набор

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

---

*правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять где чья стратегия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем выигрыш партнера.

[233] точнее биматричными

[234] Ее также называют стратегической формой игры. Впервые явная формулировка нормальной формы игры была дана в основополагающей статье Джона фон Неймана (Von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," *Mathematische Annalen*, **100**, 295-320. Рус. пер. Дж. фон Нейман, К теории стратегических игр, в сборн. "Матричные игры", под ред. Н. Н. Воробьева, М.: Физматгиз, 1961, 173-204. См. также von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton*. Princeton University Press. Рус. пер. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970.)

В некоторых играх есть элемент случайности. Если на вероятности случайных событий не влияют выборы, сделанные игроками, то принято говорить о **случайных ходах природы**. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.

### Игра 2.

В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (А) и не проявлять осторожности (В). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист собьет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность происшествия равна $1/2$, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна $1/10$, а если оба осторожны, то вероятность равна $1/100$.

В случае, если произойдет столкновение, то ущерб пешехода составит 1000 у.е.,[235] а ущерб автомобилиста — 200 у.е. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками в 100 у.е. ⇦

Таблица 6

| | | **Автомобилист** | |
|---|---|---|---|
| | | А | В |
| **Пешеход** | А | −102<br>−110 | −20<br>−200 |
| | В | −120<br>−100 | −100<br>−500 |

На примере Игры 2 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший **ожидаемый выигрыш**.[236] Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, то есть реализовался исход (А, А). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит (–1100), а выигрыш водителя — (–300). В противном случае выигрыш пешехода составит (–100), а выигрыш водителя — (–100). Ожидаемые выигрыши равны в этом случае:

$$\frac{1}{100}\cdot(-1100)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-110 \quad \text{— для пешехода,}$$

$$\frac{1}{100}\cdot(-300)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-102 \quad \text{— для автомобилиста.}$$

---

[235] условных единиц

[236] Здесь, как это обычно делается в экономической теории, предполагается, что определенные на лотереях предпочтения каждого игрока удовлетворяют условиям, которые гарантируют существование представляющей их линейной функции полезности (имеется в виду линейность по вероятностям). См. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970, П. Фишберн, "Теория игр для принятия решений". М.: Наука, 1978.

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице 6.

Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информацию о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих случайных выигрышах.

## Концепция доминирования

Задача теории игр — по данному описанию игры, предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален.

Пусть в Игре 1 (стр. 627) выгода от совместимости программного обеспечения сравнительно мала, например, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ (Таблица 7).

Таблица 7

|  |  | **Игрок 2** |  |
|---|---|---|---|
|  |  | IBM | Mac |
| **Игрок 1** | IBM | 1<br>3 | 3<br>2 |
|  | Mac | 0<br>0 | 4<br>1 |

Тогда вне зависимости от того, какой компьютер выберет 2-й игрок, 1-му игроку выгодно выбрать компьютер IBM PC, поскольку $3 > 0$ и $2 > 1$. Аналогично, 2-й игрок предпочтет Макинтош, поскольку $3 > 1$ и $4 > 0$. В обоих случаях имеет место так называемое строгое доминирование двух указанных стратегий: если стратегия A при любых действиях других игроков дает больший выигрыш, чем стратегия B, то принято говорить, что стратегия A **строго доминирует** стратегию B.

Дадим формальное определение строгого доминирования. Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение $\boldsymbol{x}_{-i}$, что означает «все элементы вектора $\boldsymbol{x}$, кроме $i$-го», т.е.

$$\boldsymbol{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n).$$

При этом будем считать, что $(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$.— это то же самое, что $\boldsymbol{x}$.

**Определение 1.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ строго доминирует стратегию $y_i \in X_i$, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

где $X_{-i} = \mathop{\times}\limits_{j \neq i} X_j$.

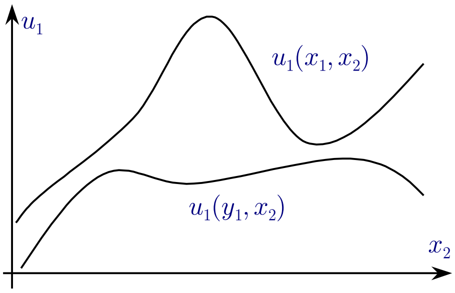


Рисунок 149. Стратегия $\boldsymbol{x}_1$ строго доминирует стратегию $\boldsymbol{y}_1$.

Определение строгого доминирования можно наглядно проиллюстрировать в случае двух игроков, множества стратегий одного из которых — действительная прямая (см. Рис 149). На рисунке стратегия $x_1$ первого игрока строго доминирует стратегию $y_1$. Это выражается в том, что график функции полезности этого игрока по стратегии $x_2$ второго, соответствующий $x_1$, лежит ниже графика, соответствующего $y_1$.

Стратегия называется строго доминирующей, если она строго доминирует любую другую стратегию.

### Определение 2.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ является его **строго доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она дает игроку $i$ больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $y_i \in X_i$, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\ \forall y_i \in X_i\colon y_i \neq x_i.$$

В соответствие с данным определением не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определения (слабого) доминирования.

### Определение 3.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ (слабо) **доминирует** стратегию $y_i \in X_i$ (или, другими словами, стратегия $y_i$ доминируется стратегией $x_i$), если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}'_{-i} \in X_{-i}$, такой что

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}'_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}'_{-i}).$$

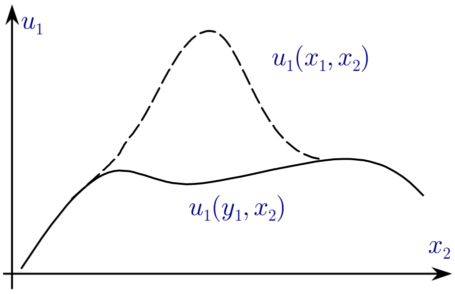


Рисунок 150. Стратегия $\boldsymbol{x}_1$ (слабо) доминирует стратегию $\boldsymbol{y}_1$.

Слабое доминирование можно проиллюстрировать на графике, аналогичном тому, который мы использовали для иллюстрации строгого доминирования. Стратегия $x_1$ первого игрока слабо, но не строго доминирует его стратегию $y_1$ (см. Рис. 150), поскольку график функции полезности для $x_1$ не везде строго выше, чем для $y_1$.

**Определение 4.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ является его (слабо) **доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она доминирует любую другую его стратегию, $y_i \in X_i$, либо эквивалентна ей, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\ \forall y_i \in X_i.$$

Из определения следует, что если стратегия $x_i$ *строго доминирует* стратегию $y_i$, то стратегия $x_i$ *доминирует* стратегию $y_i$. Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

**Определение 5.**

Исход игры $\boldsymbol{x}^* \in X$ является **равновесием в доминирующих стратегиях**, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией.

Естественно ожидать, что если в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, то именно оно будет реализовавшимся исходом игры. Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

### Игра 3. «*Парламентское голосование*»

Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные». В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получат выигрыш $1$, а белые — $-1$, в противном случае все получат $0$. ⇦

Таблица 8

|  |  | **Красные** |  |
|---|---|---|---|
| (*A*) **Белые:** за |  | За | против |
| **Зеленые** | за | −1 1<br>1 | −1 1<br>1 |
|  | против | −1 1<br>1 | 0 0<br>0 |

|  |  | **Красные** |  |
|---|---|---|---|
| (*B*) **Белые:** против |  | За | против |
| **Зеленые** | за | −1 1<br>1 | 0 0<br>0 |
|  | против | 0 0<br>0 | 0 0<br>0 |

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц А и Б (см. Таблицу 8). Белые выбирают между таблицей А и таблицей Б. Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют за, то вектор их выигрышей будет

(1 (за, за), 1 (за, против), 1 (против, за), 0 (против, против)).

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют против, то вектор выигрышей будет

(1 (за, за), 0 (за, против), 0 (против, за), 0 (против, против)).

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том как голосуют другие фракции):

за $(-1, -1, -1, 0)$,

против $(-1,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Таким образом, голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым, в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

Приведем теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в который есть равновесие в доминирующих стратегиях.

### Игра 4. «*Аукцион Ви́кри*».[237]

Некий предмет продается с аукциона по следующим правилам. Каждый из участников аукциона ($i = 1, ..., n$) подает в тайне от других свою заявку — предлагаемую им цену $p_i$. Побеждает участник, предложивший самую высокую цену, но платит он следующую по порядку убывания цену. Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием. Если $i$-й участник окажется победителем, то

---

[237] W. Vickrey (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, **16**, 8-37. Уильям Викри стал Нобелевским лауреатом по экономике за 1996г.

его выигрыш составит $v_i - p$, где $v_i$ — ценность для него данного предмета, $p$ — цена, которую он должен заплатить; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. ⇦

Особенность аукциона Викри состоит в том, что «правдивая» стратегия является доминирующей стратегией для каждого участника. Под «правдивой» стратегией понимается стратегия, заключающаяся в том, что участник называет цену, совпадающую с ценностью для него данного предмета, ($p_i = v_i$). Проверим это. Проанализируем данную игру при $n = 2$. (При большем количестве участников рассуждения будут аналогичными). Поскольку участники входят в данную игру симметрично, то достаточно рассмотреть мотивацию только одного из них, например, 1-го.

Вычислим сначала выигрыши 1-го игрока при разных исходах. Если 1-й участник назовет более высокую цену, чем 2-й ($p_1 > p_2$), то он выиграет аукцион и заплатит $p_2$. При этом его выигрыш составит $v_1 - p_2$. Если 1-й участник назовет более низкую цену, чем 2-й ($p_1 < p_2$), то он проиграет аукцион и получит выигрыш $0$. Если цены совпадут ($p_1 = p_2$), то с вероятностью 1/2 1-й участник выиграет и получит выигрыш $v_1 - p_2$, а с вероятностью 1/2 он проиграет и получит выигрыш $0$. Таким образом, его ожидаемый выигрыш составит $(v_1 - p_2)/2$. Окончательно запишем функцию выигрыша 1-го участника:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} v_1 - p_2, & \text{если } p_1 > p_2 \\ \dfrac{v_1 - p_2}{2}, & \text{если } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{если } p_1 < p_2 . \end{cases}$$

Чтобы показать, что «правдивая» стратегия, $p_1 = v_1$, является доминирующей, нужно показать, что она дает не меньший выигрыш, чем любая другая стратегия. Следует рассмотреть 3 случая: $p_2 > v_1$, $p_2 = v_1$ и $p_2 < v_1$.

[$p_2 > v_1$] Если 2-й участник назовет цену, превышающую $v_i$, то 1-му участнику не выгодно выигрывать аукцион; его выигрыш (полезность) в этом случае был бы отрицательный, а в случае проигрыша он получит $0$. Поскольку в рассматриваемом случае при выборе «правдивой» стратегии 1-й участник проиграет аукцион, то «правдивая» стратегия является одной из оптимальных.

[$p_2 = v_1$] Если 2-й участник назовет цену, совпадающую с $v_i$, то 1-й участник при любом выборе получит $0$. Значит, «правдивая» стратегия даст ему выигрыш не меньший, чем любая другая.

[$p_2 < v_1$] Если 2-й участник назовет цену, меньшую $v_i$, то для 1-го участника выгодно выиграть аукцион, поскольку в этом случае его выигрыш будет положительным. «Правдивая» стратегия обеспечивает ему победу на аукционе, и приносит максимальный выигрыш, $v_1 - p_2$.

Мы видим, что «правдивая» стратегия в самом деле является доминирующей для 1-го участника. Более того, как несложно увидеть, это единственная доминирующая стратегия. Если он назовет цену ниже или выше своей оценки $v_1$, то можно подобрать такую цену 2-го участника, что 1-й участник потеряет по сравнению с $p_1 = v_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для 2-го участника, мы сделаем вывод, что в этой игре существует (единственное) равновесие в доминирующих стратегиях:

$$p_1 = v_1, \qquad p_2 = v_2.$$

### Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже просто доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Рассмотрим в Игре 1 случай, когда $a < c < b$. Пусть, к примеру, $a = 1$, $c = 2$, $b = 3$.

Если 2-й игрок выберет IBM, то 1-му игроку тоже выгодно выбрать IBM. Если же 2-й игрок выберет Макинтош, то 1-му игроку будет выгодно выбрать Макинтош. Эти оптимальные решения выделены в Таблице 9 подчеркиванием соответствующих выигрышей. Здесь оптимальное для 1-го игрока решение будет зависеть от того, какое решение примет 2-й игрок.

Таблица 9

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | **Игрок 2** | |
| | | IBM | Mac |
| **Игрок 1** | IBM | 2<br>3 | 3<br>1 |
| | Mac | 0<br>0 | 5<br>2 |

В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут выбрать другие игроки. Не специфицируя механизма формирования ожиданий, мы можем исходить из того, что все такие механизмы не противоречат рациональности игроков. Наиболее очевидное требование можно сформулировать следующим образом:

«*Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию*».

**Определение 6**.

Стратегия $y_i \in X_i$ игрока $i$ называется строго доминируемой, если существует стратегия $x_i \in X_i$, которая ее строго доминирует, т.е.

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) < u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}.$$

Проанализируем ситуацию, в которой структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, мы рассмотрим ситуацию, в которой все это *общеизвестно*,[238] то есть не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности.

В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На этой основе строится метод получения решения игры путем отбрасывания строго доминируемых стратегий. Если в результате последовательности шагов, состоящих в вычеркивании строго доминируемых стратегий получился «остаток», в котором у каждого иг-

---

[238] англ. *common knowledge*

рока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Можно отметить, что в данном случае предполагается не только рациональность игроков, но и их способность провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть достаточно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю…).

Таблица 10

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| I | 3<br>2 | 0<br>3 | 1<br>2 |
| II | 4<br>1 | 6<br>2 | 2<br>4 |
| III | 7<br>0 | 2<br>1 | 8<br>3 |

В Таблице 10 и таблицах на Рис. 151 показан пример процесса отбрасывания строго доминируемых стратегий. В исходной игре 3×3 (Таблица 10) стратегия II строго доминирует стратегию III, поэтому стратегию III следует вычеркнуть (игрок выбирающий строки, не станет выбирать эту стратегию). Отбрасываемая стратегия обведена двойной волнистой рамкой. Остается игра 2×3 (Рис. 151 а) ), в которой стратегия A строго доминирует стратегию C. Стратегию C вычеркиваем (поскольку игрок, выбирающий столбцы, прогнозируя действия игрока, выбирающего строки, не станет ее выбирать). В получившейся игре 2×2 (Рис. 151 б) ) стратегия I строго доминирует стратегию II. В получившейся после отбрасывания стратегии II игре (Рис. 151 в) ) у игрока, выбирающего строки, осталась только одна стратегия. Для игрока, выбирающего столбцы, стратегия A строго лучше стратегии B, поэтому стратегия B вычеркивается. Остается игра (Рис. 151 г) ), в которой каждый игрок имеет только по одной стратегии: (I, A). На основании этого можно сделать вывод, что в исходной игре 3×3 должен реализоваться исход (I, A).

а)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| I | 3<br>2 | 0<br>3 | 1<br>2 |
| II | 4<br>1 | 6<br>2 | 2<br>4 |

б)

| | A | B |
|---|---|---|
| I | 3<br>2 | 0<br>3 |
| II | 4<br>1 | 6<br>2 |

в)

| | A | B |
|---|---|---|
| I | 3<br>2 | 0<br>3 |

г)

| | A |
|---|---|
| I | 3<br>2 |

Рисунок 151.

Если общеизвестно, что игроки рациональны, и после последовательного вычеркивания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стратегия (как в приведенной выше игре), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно.[239]

---

[239] Остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существенен.

Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то по крайней мере можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному «остатку».

Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Соответствующий пример игры представлен в Таблице 11.

Второй игрок выберет стратегию A, если предполагает, что первый выберет стратегию Z; в то же время стратегия B для него предпочтительнее в случае, если первый выберет Y.

Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какими будут выборы других. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

Таблица 11

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| X | $\underline{3}$<br>2 | 0<br>2 | 1<br>$\underline{3}$ |
| Y | 4<br>1 | $\underline{6}$<br>$\underline{4}$ | 2<br>2 |
| Z | 7<br>$\underline{3}$ | 2<br>1 | $\underline{8}$<br>3 |

## Равновесие по Нэшу

Кроме ситуаций, рассмотренных в предыдущем разделе, бывают ситуации,[240] которые естественно моделировать, исходя из следующих предположений:

- игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия партнеров;
- ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными партнерами действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой **равновесием Нэша**. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания.

Формально равновесие Нэша определяется следующим образом.

**Определение 7**.

Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша,[241] если:

1) стратегия $x_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^e$:

---

[240] Можно представить себе популяцию игроков типа А (скажем, кошки) и игроков типа Б (скажем, мышки). Игрок типа А при встрече с игроком типа Б имеет оправданные своим или чужим опытом ожидания относительно поведения партнера типа Б, и заранее на них ориентируется (и наоборот). Однако это не единственный тип ситуаций, в которых рассматриваемый подход является адекватным.

[241] Американский математик Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике в 1994 г. вместе с Дж. Харшаньи и Р. Зельтеном «за новаторский анализ равновесий в теории некооперативных игр». Концепция равновесия была предложена в следующих статьях: Nash, J. F. (1950) "Equilibrium Points in N-Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36, 48-49. Nash, J. F. (1951) "Non-Cooperative Games," *Annals of Mathematics*, **54**, 286-295.

Следует оговориться, что сам Нэш не вводил в определение ожиданий. Исходное определение Нэша совпадает с тем свойством, о котором говорится далее.

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^e) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^e) \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n;$$

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\boldsymbol{x}_{-i}^e = \boldsymbol{x}_{-i}^* \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать, и т.д., отходят на второй план. Способ формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания являются равновесными.

Но если при анализе равновесия Нэша не важно, знает ли игрок цели других игроков, то может возникнуть сомнение в правомерности рассмотрения концепции Нэша в контексте игр с *полной информацией*. Все дело в том, что термин «полная информация» в теории игр имеет довольно узкое значение. Он фактически подразумевает только полноту сведений о типах партнеров (термин «тип игрока», разъясняется в параграфе, посвященном байесовским играм).

Как легко видеть, приведенное определение равновесия Нэша эквивалентно следующему свойству, которое обычно и используется в качестве определения:

> Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если стратегия $x_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^*$:
>
> $$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*) \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Это свойство можно также записать в терминах так называемых функций (отображений) отклика.

**Определение 8**.

**Отображение отклика** $i$-го игрока,

$$R_i\colon X_{-i} \mapsto X_i,$$

сопоставляет каждому набору стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, множество стратегий $i$-го игрока, каждая из которых является наилучшим откликом на $\boldsymbol{x}_{-i}$. Другими словами,

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \quad \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}, \forall y_i \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Введение отображений отклика позволяет записать определение равновесия Нэша более компактно: набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений:

$$x_i^* = R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

В Таблице 11 отображения отклика игроков изображены подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — клетка (B, Y), поскольку выигрыши обоих игроков в ней подчеркнуты.

Проиллюстрируем использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют континуум стратегий.

### Игра 5. «*Международнаяторговля*»

Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин, $\tau_i$. Объем торговли между странами, $x$,[242] зависит от установленных пошлин как

$$x = 1 - \tau_1 - \tau_2.$$

Цель каждой страны — максимизировать доходы:

$$u_i = \tau_i x \to \max.$$

⇦

Максимизируем выигрыш 1-й страны,

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2),$$

по $\tau_1$ считая фиксированным уровень пошлины, установленный 2-й страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Поскольку максимизируемая функция строго вогнута, то условие первого порядка соответствует глобальному максимуму.

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша 2-й страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик 1-й страны на уровень таможенной пошлины, установленной 2-й страной описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1 - \tau_2}{2}.$$

Аналогично, функция отклика 2-й страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1 - \tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

---

[242] В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

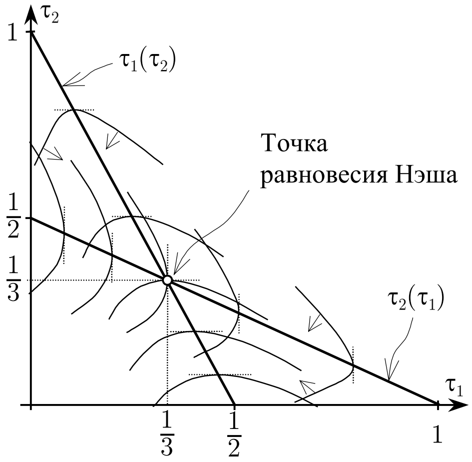


Рисунок 152. Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан не Рис. 152. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(\boldsymbol{x}) = const$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция может показаться более спорной, поскольку опирается на сильные предположения о поведении игроков.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

**Теорема 1**.

Если $\boldsymbol{x}^* = (\overset{*}{x}_1, ..., \overset{*}{x}_m)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Обратная теорема верна в случае единственности.

**Теорема 2**.

Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, $\overset{*}{x}_i$, то $\boldsymbol{x}^* = (\overset{*}{x}_1, ..., \overset{*}{x}_m)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Доказательства этих двух утверждений даны в Приложении B (стр. 646). Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеями рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

По-видимому, естественно считать, что разумно определенное равновесие, не может быть отброшено при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий. Первую из теорем можно рассматривать как подтверждение того, что концепция Нэша достаточно разумна. Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями (см. напр. Таблицу 16 на стр. 658).

### Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра представляет пример такой ситуации.

**Игра 6.** «*Инспекция*»

В этой игре первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором — платить или не платить подоходный налог. Второй — налоговой инспектор, решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взимает в него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его издержки; в случае же проверки «исправного» налогоплательщика, инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в таблице 12.

Таблица 12

| | | **Инспектор** | |
|---|---|---|---|
| | | проверять | не проверять |
| **Проверяемый** | нарушать | $\underline{1}$<br>–1 | 0<br>$\underline{1}$ |
| | не нарушать | –1<br>$\underline{0}$ | $\underline{0}$<br>0 |

⇦

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогичным образом, если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору не выгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей. Очевидно, что ни одна из клеток не может быть равновесием Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша.

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы его партнер не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достигнуть, внеся в выбор стратегии элемент неопределенности.

Те стратегии, которые мы рассматривали раньше, принято называть **чистыми стратегиями**. Чистые стратегии в статических играх по сути дела совпадают с действиями игроков. Но в некоторых играх естественно ввести в рассмотрение также смешанные стратегии. Под **смешанной стратегией** понимают распределение вероятностей на чистых стратегиях. В частном случае, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно,

$$X_i = \{x_i^1, ..., x_i^{n_i}\},$$

(соответствующая игра называется **конечной**,), смешанная стратегия представляется вектором вероятностей соответствующих чистых стратегий:

$$\mu_i = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{n_i}).$$

Обозначим множество смешанных стратегий $i$-го игрока через $\mathrm{M}_i$:

$$\mathrm{M}_i = \{\mu_i \mid \mu_i^k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots n_i;\ \mu_i^1 + \ldots + \mu_i^{n_i} = 1\}.$$

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр (как и экономической теории) состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш. Ожидаемый выигрыш $i$-го игрока, соответствующий набору смешанных стратегий всех игроков, $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, вычисляется по формуле

$$U(\mu_i, \mu_{-i}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \mu_1^{k_1} \cdots \mu_m^{k_m}\, u_i(x_1^{k_1}, \ldots, x_m^{k_m}).$$

Ожидание рассчитывается в предположении, что игроки выбирают стратегии независимо (в статистическом смысле).

Смешанные стратегии можно представить как результат **рандомизации** игроком своих действий, то есть как результат их случайного выбора. Например, чтобы выбирать каждую из двух возможных стратегий с одинаковой вероятностью, игрок может подбрасывать монету. Эта интерпретация подразумевает, что выбор стратегии зависит от некоторого *сигнала*, который сам игрок может наблюдать, а его партнеры — нет.[243] Например, игрок может выбирать стратегию в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал.[244]

**Определение 9**.

Набор смешанных стратегий $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ является **равновесием Нэша в смешанных стратегиях**, если:

1) стратегия $\mu_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\mu_{-i}^e$:

$$U(\mu_i^*, \mu_{-i}^e) = \max_{\mu_i \in \mathrm{M}_i} U(\mu_i, \mu_{-i}^e) \quad \forall i = 1, \ldots, n;$$

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mu_{-i}^e = \mu_{-i}^* \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т.е. игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 6.

Обозначим через $\mu$ вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через $\nu$ — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика.

В этих обозначениях ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

---

[243] Если сигналы , наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции *коррелированного равновесия*.

[244] Впоследствии мы рассмотрим, как можно достигнуть эффекта рандомизации в рамках байесовского равновесия.

$$U_1(\mu, \nu) = \mu\,[\nu\cdot(-1) + (1-\nu)\cdot 1] + (1-\mu)\,[\nu\cdot 0 + (1-\nu)\cdot 0] = \\ = \mu\,(1-2\nu),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(\mu, \nu) = \nu\,[\mu\cdot 1 + (1-\mu)\cdot(-1)] + (1-\mu)\,[\mu\cdot 0 + (1-\mu)\cdot 0] = \\ = \nu\,(2\mu-1).$$

Если вероятность проверки мала ($\nu < 1/2$), то налогоплательщику выгодно не платить налог, т.е. выбрать $\mu = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т.е. выбрать $\mu = 0$. Если же $\nu = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет, он может выбрать любую вероятность $\mu$ из интервала $[0, 1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \nu = 1/2 \\ 0, & \text{если } \nu > 1/2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик налогового инспектора:

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \mu = 1/2 \\ 1, & \text{если } \mu > 1/2. \end{cases}$$

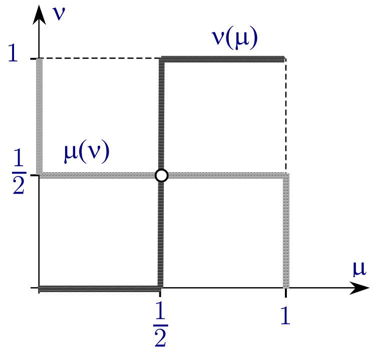


Рисунок 153. Отображения отклика в игре «Инспекция»

Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. 153. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности ($\nu$ и $\mu$ соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях. В этом равновесии, как это всегда бывает в равновесиях с *невырожденными* смешенными стратегиями (то есть в таких равновесиях, в которых ни одна из стратегий не выбирается с вероятностью $1$), каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей его партнера, что может вызвать известные трудности с интерпретацией данного решения.

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда,[245] что является следствием следующего общего утверждения.

**Теорема 3.**

Предположим, что в игре $G = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий $X_i$ непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по $x_i$ и непрерывна. Тогда в игре $G$ существует равновесие Нэша (в чистых стратегиях).

---

[245] Этот результат был доказан Нэшем в статье 1950-го года, цитируемой в сноске 241.

Существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в играх с конечным числом чистых стратегий является следствием того, что равновесие в смешанных стратегиях является равновесием в чистых стратегиях в смешанном расширении игры.

**Следствие** (Теорема Нэша).

Равновесие Нэша в смешанных стратегиях существует в любой конечной игре.

Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 1 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т.е. $a < c$ и $b < c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим $\mu$ и $\nu$ вероятности выбора компьютера IBM PC первым и вторым игроком соответственно. Ожидаемый выигрыш 1-го игрока равен

$$\begin{aligned} U_1(\mu, \nu) &= \mu\,[\nu\cdot(a+c) + (1-\nu)\cdot a] + (1-\mu)\,[\nu\cdot 0 + (1-\nu)\cdot c] = \\ &= \mu\,[\nu\cdot 2c - (c-a)] + (1-\nu)\,c, \end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu < (c-a)/2c \\ [0,\,1], & \text{если } \nu = (c-a)/2c \\ 1, & \text{если } \nu > (c-a)/2c\,. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш 2-го игрока равен

$$\begin{aligned} U_2(\mu, \nu) &= \nu\,[\mu\cdot c + (1-\mu)\cdot 0] + (1-\nu)\,[\mu\cdot b + (1-\mu)\cdot(b+c)] = \\ &= \nu\,[\mu\cdot 2c - (b+c)] + b + (1-\mu)\,c, \end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < (b+c)/2c \\ [0,\,1], & \text{если } \mu = (b+c)/2c \\ 1, & \text{если } \mu > (b+c)/2c\,. \end{cases}$$

Графики отображений отклика и точки, соответствующие трем равновесиям изображены на Рис.154. Как видно, в рассматриваемой игре кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$\mu = \frac{b+c}{2c} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{c-a}{2c}.$$

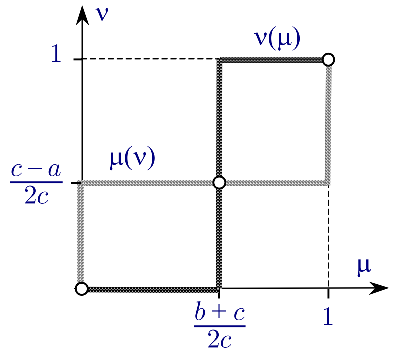


Рисунок 154. Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях

## Приложение А

**Теорема**.

Предположим, что в игре $G = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_{i0}\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий $X_i$ непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по $x_i$ и непрерывна. Тогда существует равновесие Нэша.

***Доказательство***.

Докажем, что отображение отклика, $R_i(\cdot)$, каждого игрока полунепрерывно сверху и его значение при каждом $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ непусто и выпукло. Непустота следует из теоремы Вейерштрасса (непрерывная функция на компакте достигает максимума).

Докажем выпуклость. Пусть $z', z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i})$. Очевидно, что $u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i})$. Из вогнутости по $x_i$ функции $u_i(\cdot)$ следует, что при $\alpha \in [0, 1]$

$$u(\alpha z' + (1-\alpha)z'', \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant \alpha u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\alpha)u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}) =$$

$$= u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}).$$

Поскольку функция $u_i(\cdot)$ достигает максимума в точках $z'$ и $z''$, то строгое неравенство здесь невозможно. Таким образом,

$$\alpha z' + (1-\alpha)z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Докажем теперь полунепрерывность сверху отображения $R_i(\cdot)$. Рассмотрим последовательность $x_i^n$ сходящуюся к $\bar{x}_i$ и последовательность $\boldsymbol{x}_{-i}^n$сходящуюся к $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$, причем $x_i^n \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^n)$. Заметим, что в силу компактности множеств $X_j$ $\bar{x}_i \in X_i$ и $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i} \in X_{-i}$. Нам нужно доказать, что $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$. По определению отображения отклика

$$u(x_i^n, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \geqslant u(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \quad \forall x_i \in X_i, \forall n.$$

Из непрерывности функции $u_i(\cdot)$ следует, что

$$u(\bar{x}_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \geqslant u(x_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \quad \forall x_i \in X_i.$$

Тем самым, по введенному выше определению отображения отклика, $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$.

Опираясь на доказанные только что свойства отображения $R_i(\cdot)$ и на теорему Какутани, докажем существование равновесия по Нэшу, то есть такого набора стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$, для которого выполнено

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Определим отображение $R(\cdot)$ из $X$ в $X$ следующим образом:

$$R(\boldsymbol{x}) = R_1(\boldsymbol{x}_{-1}) \times \ldots \times R_n(\boldsymbol{x}_{-n}).$$

Отметим, что это отображение удовлетворяет тем же свойствам, что и каждое из отображений $R_i(\cdot)$, так как является их декартовым произведением.

Отображение $R(\cdot)$ и множество $X$ удовлетворяют свойствам, которые необходимы для выполнения теоремы Какутани. Таким образом, существует неподвижная точка отображения $R(\cdot)$:

$$\boldsymbol{x}^* \in R(\boldsymbol{x}^*).$$

Очевидно, что точка $\boldsymbol{x}^*$ есть равновесие по Нэшу. ■

## Приложение B

В этом приложении мы формально докажем утверждения о связи между равновесием Нэша и процедурой последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Сначала определим формально процедуру последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий. Пусть исходная игра задана как

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

Определим последовательность игр $\{G^{[t]}\}_{t=0,1,2,\ldots}$, каждая из которых получается из последующей игры отбрасыванием строго доминируемых стратегий. Игры отличаются друг от друга множествами допустимых стратегий:

$$G^{[t]} = \langle I, \{X_i^{[t]}\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

Процедура начинается с $G^{[0]} = G$.

Множество допустимых стратегий $i$–го игрока на шаге $t$+1 рассматриваемой процедуры берется равным множеству не доминируемых строго стратегий $i$–го игрока в игре $t$-го шага. Множества не доминируемых строго стратегий будем обозначать через $ND_i$ (см. определение строго доминируемых стратегий (Определение 6, стр. 635)). Формально

$$ND_i = \{x_i \in X_i \mid \neg\, \exists\, y_i \in X_i : u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\}.$$

Таким образом, можно записать шаг рассматриваемой процедуры следующим образом:

$$X_i^{[t+1]} = ND_i^{[t]},$$

где $ND_i^{[t]}$ — множество не доминируемых строго стратегий в игре $G^{[t]}$.

Приведем теперь доказательства Теорем 1 и 2 (стр. 640). Теорема 1 утверждает следующее:

> Если $\boldsymbol{x}^* = (\overset{*}{x_1}, \ldots, \overset{*}{x_m})$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если использовать только что введенные обозначения, то Теорема 1 утверждает, что если $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша в исходной игре $G$, то на любом шаге $t$ выполнено

$$x_i^* \in X_i^{[t]},\ \forall\, i \in I,\ \forall\, t = 1, 2, \ldots$$

или

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]},\ \ \forall\, t = 1, 2, \ldots\,.$$

***<u>Доказательство Теоремы</u>** <u>1</u>*:

Пусть есть такой шаг $\tau$, что на нем должна быть отброшена стратегия $x_i^*$ некоторого игрока $i{\in}I$. Предполагается, что на предыдущих шагах ни одна из стратегий не была отброшена:

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]}, \forall t = 1, \ldots, \tau.$$

По определению строгого доминирования существует другая стратегия игрока $i$, $x_i' \in X_i^{[\tau]}$, которая дает этому игроку в игре $G^{[\tau]}$ более высокий выигрыш при любых выборах других игроков:

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i}{\in}X_{-i}^{[\tau]}.$$

В том числе, это соотношение должно быть выполнено для $\boldsymbol{x}_{-i}^*$, поскольку мы предположили, что стратегии $\boldsymbol{x}_{-i}^*$ не были отброшены на предыдущих шагах процедуры ($\boldsymbol{x}_{-i}^*{\in}X_{-i}^{[\tau]}$). Значит,

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Однако это неравенство противоречит тому, что $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша. ■

Докажем теперь Теорему 2. Напомним ее формулировку:

> Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, $x_i^*$, то $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Данная теорема относится к случаю, когда в процессе отбрасывания строго доминируемых стратегий начиная с некоторого шага $\bar{t}$ остается единственный набор стратегий, $\boldsymbol{x}^*$, т.е.

$$X_i^{[t]} = \{x_i^*\}\ ,\ \ \forall\, i{\in}I, \forall t = 1, \ldots, \bar{t}.$$

Теорема утверждает, что $\boldsymbol{x}^*$ является единственным равновесием Нэша исходной игры.

***<u>Доказательство Теоремы</u>** <u>2</u>*:

Поскольку, согласно доказанной только что теореме, ни одно из равновесий Нэша не может быть отброшено, нам остается только доказать, что указанный набор стратегий $\boldsymbol{x}^*$ является равновесием Нэша. Предположим, что это не так. Это означает, что существует стратегия $\tilde{x}_i$ некоторого игрока $i$, такая что

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) < u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

По предположению, стратегия $\tilde{x}_i$ была отброшена на некотором шаге $\tau$, поскольку она не совпадает с $x_i^*$. Таким образом, существует некоторая строго доминирующая ее стратегия $x_i'{\in}X_i^{[\tau]}$, так что

$$u_i(x'_i,\, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i,\, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X^{[\tau]}_{-i}.$$

В том числе это неравенство выполнено при $\boldsymbol{x}_{-i} = \boldsymbol{x}^*_{-i}$:

$$u_i(x'_i,\, \boldsymbol{x}^*_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i,\, \boldsymbol{x}^*_{-i}).$$

Стратегия $x'_i$ не может совпадать со стратегией $x^*_i$, поскольку в этом случае вышеприведенные неравенства противоречат друг другу. В свою очередь, из этого следует, что должна существовать стратегия $x''_i$, которая доминирует стратегию $x'_i$ на некотором шаге $\tau' > \tau$, т.е.

$$u_i(x''_i,\, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x'_i,\, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X^{[\tau']}_{-i}.$$

В том числе

$$u_i(x''_i,\, \boldsymbol{x}^*_{-i}) > u_i(x'_i,\, \boldsymbol{x}^*_{-i}).$$

Можно опять утверждать, что стратегия $x''_i$ не может совпадать со стратегией $x^*_i$, иначе вышеприведенные неравенства противоречили бы друг другу.

Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность шагов $\tau < \tau' < \tau'' < \ldots$ и соответствующих допустимых стратегий $x'_i$, $x''_i$, $x'''_i$, ..., не совпадающих с $x^*_i$. Это противоречит существованию шага $\bar{t}$, начиная с которого множества допустимых стратегий состоят только из $x^*_i$. ■

## Задачи

1. Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, то есть выбирают его координаты $(x, y)$. Игрок 1 находится в точке $(x_1, y_1)$, а игрок 2 — в точке $(x_2, y_2)$. Игрок 1 выбирает координату $x$, а игрок 2 — координату $y$. Каждый стремиться, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Покажите, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

2. Докажите, что если в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия, то эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

3. Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях, и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

*Найдите в следующих играх все равновесия Нэша.*

4. Игра 2 (стр. 629), выигрыши которой представлены в Таблице 13.

5. «Орехи»

Два игрока делят между собой $4$ ореха. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 1,\, 2$ или $3$. Если $x_1 + x_2 \leqslant 4$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего.

6. Два преподавателя экономического факультета пишут учебник. Качество учебника ($q$) зависит от их усилий ($e_1$ и $e_2$ соответственно) по функции

$$q = 2(e_1 + e_2).$$

Целевая функция каждого имеет вид

$$u_i = q - e_i$$

— качество минус усилия. Можно выбрать усилия на уровне $1$, $2$ или $3$.

7. «Третий лишний»

Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орёл» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю.

8. Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: $A$, $B$ или $C$. Альтернатива выбирается голосованием большинством голосов. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если ни одна из альтернатив не наберет большинство, то будет выбрана альтернатива $A$. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$$u_1(A) = 2,\ u_1(B) = 1,\ u_1(C) = 0,$$
$$u_2(A) = 0,\ u_2(B) = 2,\ u_2(C) = 1,$$
$$u_3(A) = 1,\ u_3(B) = 0,\ u_3(C) = 2.$$

9. Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левая» (L), «правая» (R) и «экологическая» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов.

10. Два игрока размещают точку на плоскости. Один игрок выбирает абсциссу, другой — ординату. Их выигрыши заданы функциями:

а) $u_x(x,y) = -x^2 + x\,(y + a) + y^2,\ u_y(x,y) = -y^2 + y\,(x + b) + x^2,$

б) $u_x(x,y) = -x^2 - 2ax\,(y + 1) + y^2,\ u_y(x,y) = -y^2 + 2by\,(x + 1) + x^2,$

в) $u_x(x,y) = -x - y/x + 1/2\,y^2,\ u_y(x,y) = -y - x/y + 1/2\,x^2,$

($a$, $b$ – коэффициенты).

11. «Мороженщики на пляже»

Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т.е. выбирают координату $x_i \in [0,\ 1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживают $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1 - (x_1 + x_2)/2$. Будем считать, что в случае, если они расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремиться обслуживать как можно большую долю пляжа.

12. «Аукцион»

Рассмотрите аукцион, подобный описанному в Игре 4, при условии, что выигравший аукцион игрок платит названную им цену.

13. Проанализируйте Игру 1 «Выбор компьютера» (стр. 627) и найдите ответы на следующие вопросы:

а) При каких условиях на параметры $a,\ b$ и $c$ будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях? Каким будет это равновесие?

б) При каких условиях на параметры будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?

14. Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a > 0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b > 0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c > 0$. При каких соотношениях между $a,\ b$ и $c$ в игре сложатся равновесия вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают.

15. Предположим, что в некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, существует единственное равновесие Нэша. Покажите, что в этой игре хотя бы у одного из игроков есть доминирующая стратегия.

16. Каждый из двух игроков $(i = 1, 2)$ имеет по 3 стратегии: $a, b, c$ и $x, y, z$ соответственно. Взяв свое имя как бесконечную последовательность символов типа *иваниваниван*..., задайте выигрыши первого игрока так: $u_1(a, x)$ = «и», $u_1(a, y)$ = «в», $u_1(a, z)$ = «а», $u_1(b, x)$ = «н», $u_1(b, y)$ = «и», $u_1(b, z)$ = «в», $u_1(c, x)$ = «а», $u_1(c, y)$ = «н», $u_1(c, z)$ = «и». Подставьте вместо каждой буквы имени ее номер в алфавите, для чего воспользуйтесь Таблицей 14. Аналогично используя фамилию, задайте выигрыши второго игрока, $u_2(.)$.

1) Есть ли в Вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?

2) Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?

3) Найдите равновесия Нэша этой игры.

Таблица 14

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | а | б | в | г | д | е | ё | ж | з |
| 1 | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с |
| 2 | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы |
| 3 | ь | э | ю | я | | | | | | |

17. Составьте по имени, фамилии и отчеству матричную игру трех игроков, у каждого из которых по 2 стратегии. Ответьте на вопросы предыдущей задачи.

18. Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре…

(0) не было ни одного равновесия Нэша,

(1) было одно равновесие Нэша,

(2) было два равновесия Нэша,

(3) было три равновесия Нэша,

(4) было четыре равновесия Нэша.

Таблица 15

| | |
|---|---|
| 1<br>? | ?<br>2 |
| ?<br>4 | 0<br>? |

19. 1) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш $i$-го игрока не может быть меньше, чем

$$\min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

2) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш $i$-го игрока не может быть меньше, чем

$$\max_{x_i \in X_i} \min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

20. Задача относится к свойствам **антагонистических игр двух лиц**. Антагонистической игрой двух лиц называется игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков постоянна:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = C.$$

(В частном случае, когда $C = 0$, такая игра называется **игрой с нулевой суммой**.)

Объясните, почему множество седловых точек функции $u_1(x_1, x_2)$ в антагонистической игре двух лиц совпадает с множеством равновесий Нэша.

(Напомним, что **седловой точкой** функции $u_1(x_1, x_2)$, называют такую точку $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, что для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ выполнено

$u_1(x_1, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2)$.)

Проверьте, что в следующих играх нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

21. Докажите, основываясь на результатах двух предыдущих задач, что в антагонистической игре двух лиц равновесие Нэша (в чистых стратегиях) существует тогда и только тогда, когда

$$\min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2).$$

22. «Орел или решка»

Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль.

23. «Камень - ножницы – бумага»

Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, выигрывает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, выигрывает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, выигрывает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает $1$, проигравший получает $-1$. Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает $0$.

24. Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат $1$, а красные — $-2$. Если синие не займут город, то выигрыши составят $-1$ и $1$ соответственно.

25. В некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, у каждого из игроков все выигрыши различны, и существует ровно два равновесия Нэша. Покажите, что в этой игре есть еще равновесие в невырожденных смешанных стратегиях.

## Динамические игры с совершенной информацией

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и действуют, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, каждый игрок располагает определенной информацией о решениях, принятых другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (ходов).

**Динамической** будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Приведем пример динамической игры.

## Игра 7. *«Террорист»*

В самолет, который должен лететь из Майами в Нью-Йорк, сел террорист. Террорист требует, чтобы пилот летел на Кубу, угрожая в противном случае взорвать самолет. Предположим, что террорист не может определить, куда действительно летит самолет. Первый ход в этой игре тогда делает пилот. Он может лететь либо на Кубу, либо в Нью-Йорк. Если пилот посадит самолет на Кубе, то его выигрыш составит –1, а выигрыш террориста составит 1. Если же самолет сядет в Нью-Йорке, то делает свой ход террорист. Он может либо взорвать бомбу, либо не взрывать. Если бомба взорвется, то выигрыши обоих игроков составят –100, в противном случае выигрыш пилота составит 1, а выигрыш террориста составит –1. ⇦

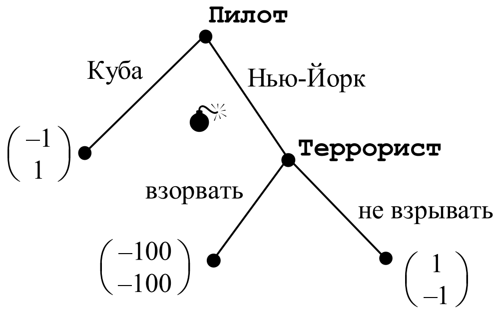


Рисунок 155. Игра «Террорист»

Данную игру удобно представить в виде диаграммы, изображающей **дерево игры** (см. Рис. 155).[246]

Решение игры можно найти, в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеизвестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом **обратной индукции**.

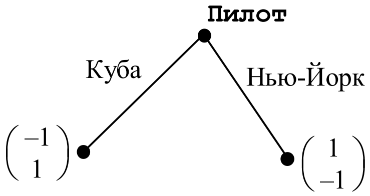


Рисунок 156. Ситуация выбора пилота

В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. Рассмотрим последнюю вершину игры, в которой один из игроков делает выбор. В данном случае нам надо спрогнозировать как поступит террорист, оказавшись в Нью-Йорке. От решения террориста в этой ситуации (вершине) зависит исход игры, поскольку пилот уже сделал свой ход, и не

---

[246] Нам удобнее изображать дерево «кроной вниз». Сам термин *дерево* взят из теории графов.

может «взять обратно». Если террорист рационален, то он примет решение не взрывать бомбу, поскольку –1 больше –100. Таким образом, действия террориста можно однозначно предсказать.

Поскольку, как мы предположили, рациональность террориста является общим знанием, то пилот может «просчитать» действия террориста и, тем самым, будет знать, что случиться, если он прилетит в Нью-Йорк.

Чтобы было более понятно, какой выбор стоит перед пилотом, удобно частично «свернуть» дерево игры, учитывая то, что действия террориста в Нью-Йорке известны. Полученная усеченная (редуцированная) игра показана на Рис. 156.

В этой игре действия пилота несложно предсказать — он полетит в Нью-Йорк, поскольку предпочитает выигрыш 1 выигрышу –1. Таким образом, исход игры однозначен: пилот посадит самолет в Нью-Йорке, а террорист не станет взрывать бомбу.

Изобразим полученное решение на дереве (см. Рис. 157). Те действия, которые были выбраны соответствующим игроком в каждой из вершин, изобразим двойными линиями. Исход игры определяется траекторией, состоящей из выбранных действий, и идущей из начальной вершины в одну из конечных вершин.[247]

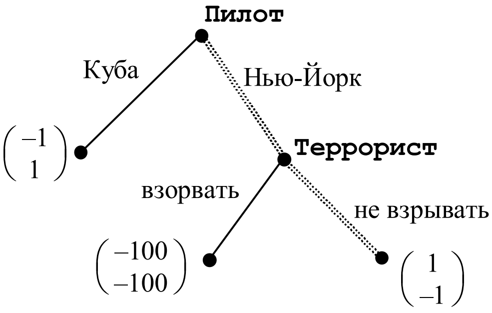


Рисунок 157. Решение игры «Террорист»

В данном случае мы рассмотрели **игру с совершенной информацией**, то есть такую игру, в которой каждый игрок, делая выбор, знает всю предыдущую историю игры, или, если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, каждый игрок знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

Представление игры в виде дерева соответствует **развернутой форме** игры.[248] В дальнейшем мы увидим, как можно представить динамическую игру в нормальной форме. А сейчас перечислим, что должно включать описание динамической игры (с совершенной информацией) в развернутой форме:

✦ множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;

✦ для каждой вершины, кроме начальной, — единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом не должно быть циклов, то есть цепь предшествую-

---

[247] Предсказанный исход игры кажется довольно странным. Ведь вполне естественно, что пилот будет опасаться, что террорист все-таки взорвет самолет. Данный исход, однако, полностью соответствует описанию игры, а также сделанным предположениям. Можно сделать игру более реалистичной, если добавить возможность того, что может встретиться террорист, которому в соответствии с его целевой функции будет выгодно взорвать бомбу. Такую игру мы рассмотрим в дальнейшем, в параграфе, посвященном так называемым *байесовским* динамическим играм.

[248] Как и нормальная форма игры, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом (См. ссылки в сноске 234). См также Kuhn, H. W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information," pp. 193-216 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume II (*Annals of Mathematics Studies*, **28**) (H.W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press.

щих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в том числе, отсутствие циклов);

✦ множество игроков;

✦ для каждой вершины, кроме конечных, — единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;

✦ для каждой конечной вершины, то есть такой, которая не предшествует ни одной другой вершине, — вектор выигрышей всех игроков.

(Если в игре есть случайные ходы природы, то следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов природы.)

Первые два пункта здесь соответствуют описанию дерева игры.

Действие в этой конструкции однозначно задается парой непосредственно следующих одна за другой вершин. Для каждой вершины можно определить множество действий, которые можно осуществить, находясь в данной вершине. Множество возможных действий связано однозначным соответствием с множеством вершин, которые непосредственно следуют за данной вершиной (т.е. которым непосредственно предшествует данная вершина), то есть каждое выбранное действие приводит в одну и только в одну вершину.

Каждой вершине в игре с совершенной информацией соответствует единственная **предыстория** — то есть последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину.

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока, и игра происходит в 2 этапа, то обратную индукцию удобно провести на основе функции отклика 2-го игрока на действия 1-го. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема.

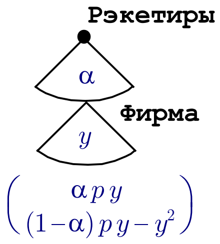


Рисунок 158. Игра «Рэкет»

**Игра 8.** «*Рэкет*»[249]

Рэкетиры выбирают, какую долю $\alpha$ ($\alpha \in [0,1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где $p$ — цена, $y$ — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1-\alpha) p y - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. ⇦

На Рисунке 158 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал [0, 1] ∈ $\mathbb{R}$), то на рисунке они изображены в виде секторов. При этом каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору $\alpha$, начинается некий сектор, соответствующий выбору $y$. На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

---

[249] Можно интерпретировать игру несколько по другому: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

Рэкетиры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприируемой доли выручки этой фирмы. Для того, чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыли по $y$ при заданном $\alpha$. Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1-\alpha)\,p \,-\, 2y = 0.$$

Если $\alpha < 1$, то $y > 0$. Поскольку функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т.е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha = 1$ получаем решение $y = 0$. Таким образом, рэкетиры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли $\alpha$:

$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)\,p}{2}.$$

Зная эту функцию отклика, рэкетиры максимизируют свою целевую функцию,[250] т.е. решают следующую задачу

$$\alpha\, p\, y(\alpha) \to \max_{\alpha\in[0,1]}.$$

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2}\cdot(1-\alpha)\,\alpha \to \max_{\alpha\in[0,1]}.$$

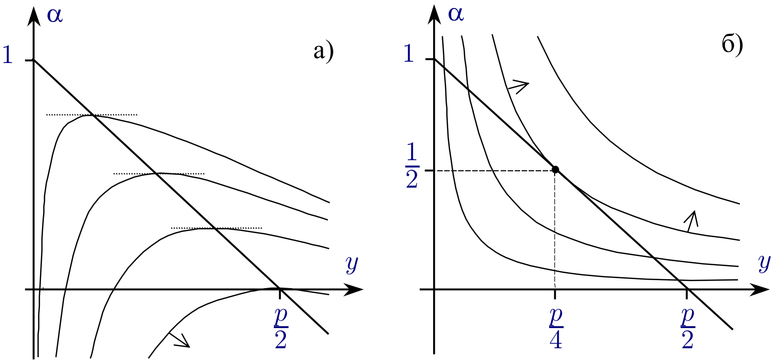


Рисунок 159. (а) Получение функции отклика фирмы. (б) Выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, то есть рэкетиры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. 159.

Мы рассмотрели здесь примеры игр, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единственен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рисунке 160 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: $(L_1, R_2)$ и $(L_2, R_1)$.

---

[250] В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p\, y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

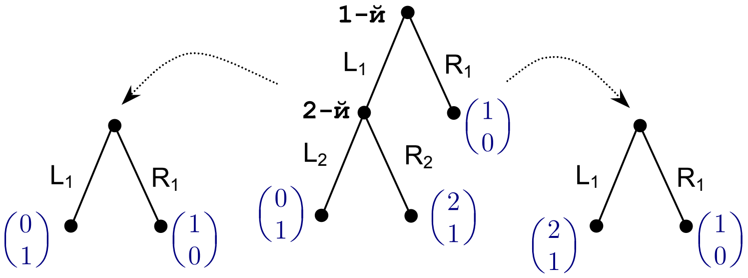


Рисунок 160. Разветвление решения при использовании обратной индукции

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначности при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

**Теорема 4**.

В конечной игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.

Если, кроме того, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то такое решение единственно.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что задача оптимизации на конечном множестве альтернатив всегда имеет хотя бы одно решение; если же целевая функция принимает различные значения на множестве альтернатив, то решение этой задачи единственно. Кроме того, каждая из редуцированных игр, получаемых с помощью обратной индукции, будет конечной и с различными выигрышами, если выигрыши были различными в исходной игре.

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции. Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же, как мы применяли ее к статическим играм.

Для того, чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания (1) множества игроков, (2) множества стратегий каждого игрока и (3) функции выигрыша каждого игрока на множестве исходов.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

В игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока: что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, то есть в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину. То есть это должен быть настолько полный план, что доверенное лицо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока.

Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить себе следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этой конечной вершине. При такой интерпретации мы, по сути дела, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью описанного только что алгоритма.

Проиллюстрируем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 1 «Выбор компьютера» (стр. 627). Предположим, что 1-й игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рисунке 161.

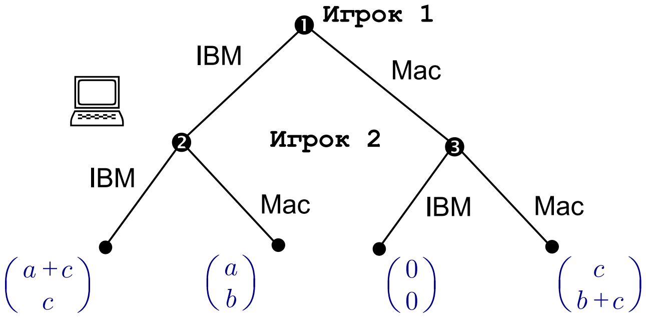


Рисунок 161. Динамический вариант игры «Выбор компьютера»

Вершины на дереве пронумерованы для удобства обозначения альтернатив в разных вершинах. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине ❶. Игрок 2 имеет 4 стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: ❷ и ❸. Таким образом, 2-го игрок имеет следующие стратегии: (❷IBM, ❸IBM), (❷IBM, ❸Mac), (❷Mac, ❸IBM), (❷Mac, ❸Mac). В Таблице 16 представлена та же игра в нормальной форме.

Таблица 16

| | | **Игрок 2** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ❷IBM ❸IBM | ❷IBM ❸Mac | ❷Mac ❸IBM | ❷Mac ❸Mac |
| **Игрок 1** | ❶IBM | $\underline{c}$<br>$\underline{a+c}$ | $\underline{c}$<br>$\underline{a+c}$ | $b$<br>$\underline{a}$ | $b$<br>$a$ |
| | ❶Mac | $0$<br>$0$ | $\underline{b+c}$<br>$c$ | $0$<br>$0$ | $\underline{b+c}$<br>$\underline{c}$ |

План, соответствующий, например, второй из указанный стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: я выберу IBM, если первый игрок выберет IBM и Mac, если первый игрок выберет Mac.

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу 5). В игре с тремя типами компьютеров у 2-го игрока было бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков — бесконечное множество стратегий.

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Сравним равновесия Нэша с результатом применения метода обратной индукции. По видимому, содержательно наиболее интересен случай, когда $a < c$ и $b < c$.

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что 2-й игрок в вершине ❷ выберет IBM, поскольку $c < b$ (он совместимость ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ❸ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В редуцированной игре 1-й игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и $c$ (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

1-й — ❶IBM,

2-й — (❷IBM, ❸Mac).

В Таблице 16 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть 3 равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т.е. решение, полученное методом обратной индукции всегда является равновесием по Нэшу, что показывает следующая теорема.

**Теорема 5**.

В игре с совершенной информацией (и конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукцией, является равновесием по Нэшу.

Опишем идею доказательства данной теоремы. В доказательстве мы используем следующий очевидный факт:

Пусть дан некоторый набор стратегий. Если делать ходы на основе этих стратегий, то каждой вершине соответствует одна и только одна траектория (цепь ходов), соединяющая ее с одной из конечных вершин. Можно сопоставить любой вершине единственный набор выигрышей, взяв его из той конечной вершины, в которой заканчивается соответствующая ей траектория.

Предположим, что набор стратегий, полученный обратной индукцией, $(s_1, ..., s_m)$, не является равновесием Нэша. Это означает, что у некоторого игрока $i$ существует стратегия $\tilde{s}_i \neq s_i$, которая может дать ему более высокий выигрыш при тех же стратегиях других игроков, $s_{-i}$. Набору стратегий $(\tilde{s}_i, s_{-i})$ соответствует некоторая альтернативная траектория игры, идущая из начальной вершины. Можно рассмотреть эту траекторию, начиная с конечной вершины. В какой-то из вершин на данной траектории выигрыш $i$-го игрока, соответствующий стратегиям $(s_i, s_{-i})$, должен оказаться ниже выигрыша, соответствующего стратегиям $(\tilde{s}_i, s_{-i})$. Это не может случиться впервые в вершине, где ход принадлежит какому-либо другому игроку, поскольку стратегии остальных игроков не меняются. Но если ход в такой вершине принадлежит $i$-му игроку, то он должен был в этой вершине сделать выбор соответствующий стратегии $\tilde{s}_i$, а не выбор, соответствующий стратегии $s_i$, поскольку это ему более выгодно. Это противоречит рациональности, заложенной в алгоритме обратной индукции.

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) (Рис. 161, стр. 658). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: 2-й игрок угрожает 1-му игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы 1-й игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции. Действительно, если 2-й игрок окажется в точке ❷, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку 1-й игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие, ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM), не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности.

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, не совместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Как уже было сказано, это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания:

★ При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и информации, доступной игрокам на каждом ходе.[251]

★ Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, заключает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления.[252]

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться невыгодно игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки зрения естественным представляется требование динамической согласованности:

*Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.*

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют подыгрой.

### Определение 10.

**Подыгра** игры $G$, где $G$ — игра с совершенной информацией в развернутой форме, — это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит любая вершина исходной игры, кроме конечных. В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

**Собственная подыгра** — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры.

В рассматриваемой игре есть 3 подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ❷ и ❸.

Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

### Определение 11.

**Совершенным в подыграх равновесием**[253] называется набор стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры.

---

[251] В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

[252] По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют refinement — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. 658, стр. 658). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ❷ в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ❷IBM и ❷Mac. Матрица игры представлена в Таблице 17.

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем 2-й игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ❷ выбор IBM. Набор стратегий ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ❸, в равновесии Нэша 2-й игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ❶IBM и (❷IBM, ❸Mac) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным, как показывает следующая теорема.

**Теорема 6**.

В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Таблица 17

| | **Игрок 2** | |
|---|---|---|
| | ❷IBM | ❷Mac |
| **Игрок 1** | $\underline{c}$<br>$\underline{a+c}$ | $b$<br>$\underline{a}$ |

Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предыдущей теоремы (Теоремы 5), позволяют показать, что решение, полученное обратной индукцией, составляет равновесие Нэша в каждой подыгре, то есть оно является совершенным в подыграх равновесием.

Докажем, обратное: любое совершенное в подыграх равновесие может быть получено обратной индукцией. Предположим, что это не так. Рассматривая игру, начиная с конечных вершин, мы в таком случае найдем некоторую вершину, в которой впервые выбор одного из игроков не соответствует алгоритму обратной индукции. Это означало бы, что выбор, соответствующий равновесной стратегии этого игрока, не является оптимальным. Значит, заменив его на выбор, соответствующий обратной индукции, этот игрок мог бы получить в данной подыгре более высокий выигрыш. Другими словами, если бы сделанное предположение было верным, то у игрока нашлась бы в данной подыгре альтернативная стратегия, которая гарантирует ему более высокий выигрыш при неизменных стратегиях других игроков, что противоречит предположению о том, что стратегия является оптимальным откликом игрока.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование приведенной только что теоремы позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равнове-

---

[253] Немецкий экономист Рейнгард Зельтен предложил концепцию совершенного в подыграх равновесия в статье, посвященной моделям олигополий (R. Selten (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit," *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, **121**, 301-24, 667-89).

сий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней $\alpha$, т.е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу по существу включает максимизацию в функциональном пространстве. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по край ней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует решение, известен уже давно, однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с применением компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень реалистичным предсказанием результата игры.

В сочетании с Теоремой 4 Теоремы 5 и 6 гарантируют существование совершенного в подыграх равновесия в конечных играх с совершенной информацией. Если выигрыши различны, то имеет место и единственность совершенного в подыграх равновесия.

## Задачи

*В следующих играх найдите решение, используя обратную индукцию.*

26. Два школьника играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из 6 камней, берет по очереди один или два камня. Проигрывает тот, кто взял последний камень.

27. Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы следующей матрицей (Таблица 18), где $a, b, c, d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

Таблица 18

| | | **муж** | |
|---|---|---|---|
| | | дома | у друзей |
| **жена** | дома | $b$<br>$a$ | $c$<br>$0$ |
| | у друзей | $0$<br>$d$ | $c$<br>$d$ |

28. Барин выбирает, какую долю $\tau$ стоимости $y$ урожая забирать у крестьянина в виде издольщины. Он при этом максимизирует функцию вида

$$\tau y - \tau^2,$$

то есть желает побольше получить, но не желает прослыть жадным, что возможно при слишком большом $\tau$ ($\tau \in [0,1]$). Крестьянин имеет целевую функцию $(1-\tau)\, y - y^2$, то есть максимизирует прибыль по $y$ ($y \geqslant 0$) при квадратичной функции затрат.

29. Предположите, что в играх, представленных в задаче 10 предыдущего параграфа (стр. 649) игрок, выбирающий абсциссу, ходит первым.

30. «Трудовое соглашение» (В. Леонтьев)

Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной платы ($w \geqslant 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы.

Фирма в течении срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($l \geqslant 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w,l) = wl - 2l^2,$$

где $2l^2$ — издержки работы для членов профсоюза.

Фирма максимизирует свою прибыль:

$$\pi(w,l) = 2\sqrt{l} - wl.$$

31. «Справедливый дележ пирога»

В игре участвуют $n$ игроков. Нужно разделить пирог между игроками, то есть выбрать вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером $1$ режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается $1$-му игроку.

(1) Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.

(2) Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

32. Дополните дерево, изображенное на Рис. 162 выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. задачу 16 на стр. 650). Найдите все совершенные в подыграх равновесия в получившейся игре .

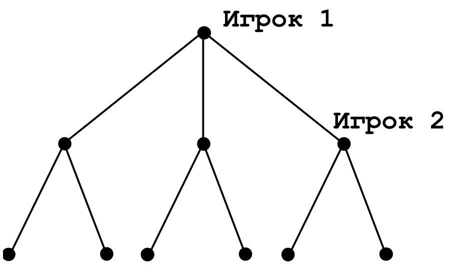


Рисунок 162

33. Рассмотрите динамическую игру, сконструированную на основе статической антагонистической игры двух лиц (см. определение в Задаче 20 предыдущего параграфа, стр. 651), так что игроки делают ходы по очереди (например, сначала первый, потом второй), и тот, кто ходит вторым, знает, какое решение принял тот, кто ходит первым. Пусть $(x_1^*, x_2^*)$ — седловая точка функции полезности первого игрока, $u_1(x_1, x_2)$. Докажите, что набор стратегий $(x_1^*, x_2^*)$ является совершенным в подыграх равновесием в этой игре вне зависимости от порядка ходов.

34. Пусть, как и в предыдущей задаче, на основе статической антагонистической игры двух лиц строится динамическая игра. Докажите, что делать ход вторым в общем случае (при отсутствии седловой точки) более выгодно. Предполагается, что соответствующие совершенные в подыграх равновесия существуют.

## *Динамические игры с несовершенной информацией*

Особенность рассматриваемых в предыдущем разделе игр — каждый игрок, перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — выборы, сделанные ранее им и другими игроками. Другими словами игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом разделе мы рассмотрим класс игр, называемых **играми с несовершенной информацией**,[254] в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е., осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого **информационного множества**).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества, как это сделано ниже для Игры 1 (стр. 627) «Выбор компьютера» (см. Рис. 163).

---

[254] Мы используем кальку с английского термина *games of imperfect information*. В русскоязычной литературе использовался термин «игры с неполной информацией», но его предпочтительнее использовать для обозначения игр, которые по-английски называются *games of incomplete information*.

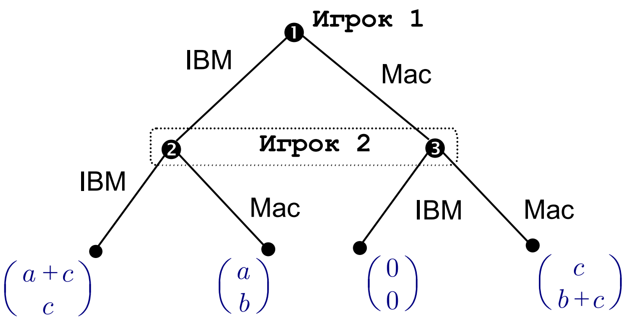


Рисунок 163. Представление статической игры «Выбор компьютера» в виде дерева

Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит 2-му игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Как видим, развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией. Дополнительно к тем составляющим, которые были указаны в прежнем определении, требуется также перечислить информационные множества, которые задают разбиение множества вершин (кроме конечных). Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них. Кроме того, по смыслу определения информационного множества, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Дополнительно следует потребовать, чтобы множество возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества были одинаковыми. В противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится. Дерево игры, представленное на Рис. 163 удовлетворяет этому требованию — и в вершине ❷, и в вершине ❸ 2-й игрок выбирает между IBM и Mac.

Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной информацией: в играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина.[255]

В приложениях теории игр чаще всего рассматривают так называемые **игры с идеальной памятью**, то есть такие игры, в которых игроки не забывают ту информацию, которой они обладали на предыдущих ходах. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. 164).

---

[255] Это определение, по-видимому, не годится в контексте игр с неполной информацией (но это зависит от способа интерпретации).

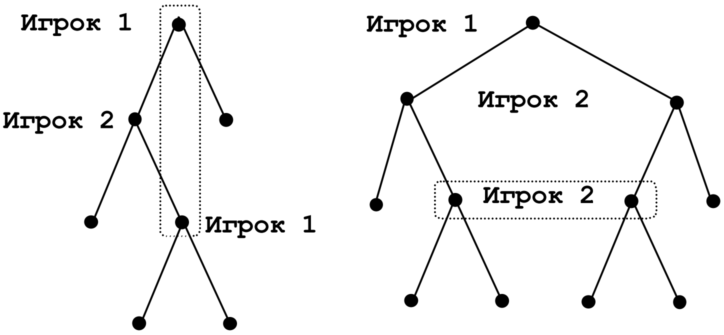


Рисунок 164. Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью

Таким образом, существуют два представления любой игры — представление в нормальной и развернутой форме. Выше мы показали, как динамическую игру с совершенной информацией представить в нормальной форме, а статическую игру — в развернутой форме. Таким образом, любую динамическую игру с совершенной информацией можно представить в нормальной форме, а затем, — на основе этой нормальной формы — построить развернутую форму соответствующей игры. Приведем пример такого построения.

Если мы представим игру на Рис. 165 в нормальной форме, то получим Таблицу 19 (для упрощения выигрыши не указаны).

Таблица 19

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | $L_2$ | $R_2$ |
| **Игрок 1** | $L_1$ | | |
| | $R_1$ | | |

Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. 166. Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме. Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма.

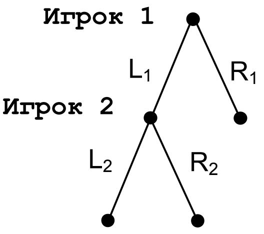


Рисунок 165

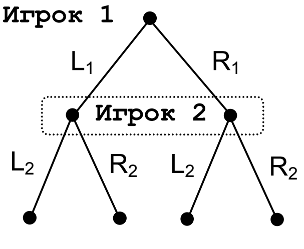


Рисунок 166

Таким образом, нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С помощью нее можно представлять корректно только статические игры. Если операцию «двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить со статической игрой, представленной на Рис. 163, то дерево игры не поменяется (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно).

Использование нормальной формы  для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

Уточним понятие стратегии для рассматриваемого класса игр.

Стратегия игрока в играх с несовершенной информацией должна, указывать, какие этот игрок выберет действия, если окажется в данном информационном множестве. Поскольку в играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, то такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением. Пользуясь понятием стратегии, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от ранее данного.

Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако, в играх с несовершенной информацией следует дать несколько другое определение подыгры. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Следует потребовать, чтобы если некоторая вершина содержалась в подыгре, то в этой же подыгре содержалось и все информационное множество, содержащее данную вершину. Например в игре, дерево которой показано на Рис. 167, в вершины ❷, ❸ и ❹ не являются начальными вершинами подыгр. Таким образом, в этой игре нет *собственных* подыгр.

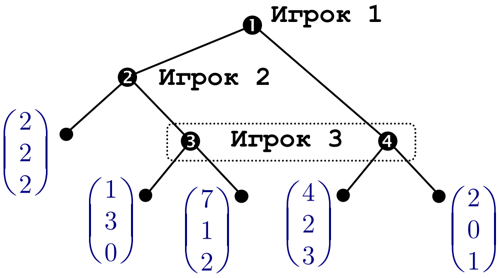


Рисунок 167.

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. 167 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

Здесь мы рассмотрим лишь класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать **играми с почти совершенной информацией**. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями. Такие игры можно разбить на несколько этапов: $t = 1, ..., T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. В рамках $t$-го этапа игроки одновременно выбирают действия, причем каждый игрок знает всю предысторию, т.е. какие действия выбрали другие игроки на предыдущих этапах $(1, ..., t-1)$; более того, предыстория игры является *общеизвестной*. Пример такой игры — повторяющаяся конечное число раз статическая игра. Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в этих статических играх могут быть пустыми (как, например, на первом этапе игры, представленной на Рис. 169).

Сначала при использовании обратной индукции последнем, $T$-м, этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем, каждая их этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T–1$ этапом, и т.д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из подыгр. Этапы можно рассматривать последовательно, а это фактически и означает, что в них не возникает трудностей с использованием обратной индукции.

Рассмотрим пример игры с почти полной информацией и использования обратной индукции для поиска решения в таких играх.

### Игра 9. «Набеги на банки»

Два инвестора вложили в банк одинаковые денежные суммы (например, по 2 рубля). Банк обещает им вернуть через 3 месяца по 3 рубля. Они могут взять деньги из банка через 1, 2 или 3 месяца, однако банк сможет вернуть только половину общей суммы сделанных инвестиций, если вкладчики потребуют деньги раньше срока (через 1 или 2 месяца). При этом если оба потребуют деньги, то получат по 1 рублю, а если деньги потребует только один, то он получит 2 рубля, а другой вкладчик не сможет получить ничего. ⇦

Таблица 20. Игра «Набеги на банки» на втором этапе

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | L$_4$ | R$_4$ |
| **Игрок 1** | L$_3$ | $\underline{3}$<br>$\underline{3}$ | 2<br>0 |
| | R$_3$ | 0<br>2 | $\underline{1}$<br>$\underline{1}$ |

Дерево игры показано на Рис. 168. R обозначает «забрать деньги», L — «не забирать». Игра происходит в 2 этапа, на каждом из которых вкладчики одновременно решают, забирать ли деньги. Первый этап происходит по прошествии 1 месяца после вложения денег, второй — по прошествии 2 месяцев.

В Таблице 20 изображена статическая игра, соответствующая второму этапу. В игре имеется два равновесия по Нэшу. Применяя обратную индукцию, мы используем выигрыши, соответствующие этим равновесиям, чтобы сформулировать статическую игру, соответствующую первому этапу.

Получающаяся редуцированная игра представлена в Таблице 21. В ней выигрыши второго этапа обозначены через $v_1$ и $v_2$ соответственно.

Таблица 21. Редуцированная игра «Набеги на банки» на первом этапе

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | L$_2$ | R$_2$ |
| **Игрок 1** | L$_1$ | $v_2$<br>$v_1$ | 2<br>0 |
| | R$_1$ | 0<br>2 | 1<br>1 |

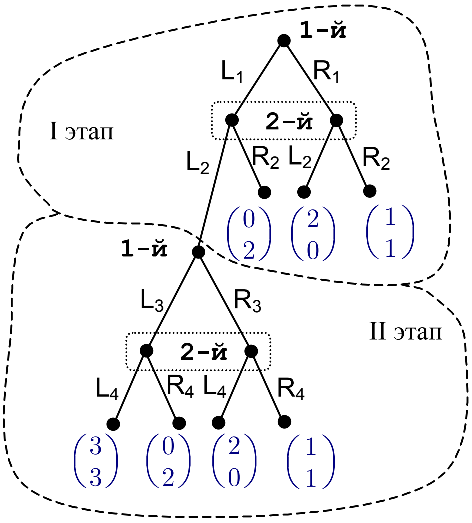


Рисунок 168. Дерево игры «Набеги на банки»

Множество равновесий Нэша в редуцированной игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1, v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша, поскольку $v_1, v_2 = 3 > 2$: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапе соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша $(3, 3)$.

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них выполнен вариант Теоремы 6.

**Теорема 6′**.

В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

В отличие от игр с совершенной информацией, в играх с почти совершенной информацией решения в чистых стратегиях может не существовать (как, например в игре на Рис. 169). Выход из положения состоит в том, чтобы ввести в поведение игроков элемент рандомизации, по аналогии со смешанными стратегиями, которые мы рассмотрели в случае статических игр.

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нормальной форме. Согласно такой интерпретации, *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии. Однако более предпочтительной кажется другая концепция: игроки рандомизируют действия. Эта концепция лучше соответствует идеологии динамических игр.

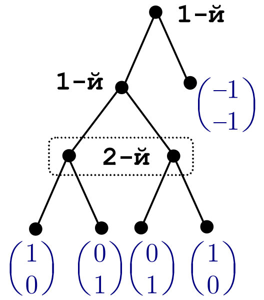


Рисунок 169. Игра, в которой нет равновесия в чистых стратегиях

Стратегию с рандомизацией действий принято называть **поведенческой стратегией**. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве. При этом предполагается, что распределения вероятностей в разных информационных множествах статистически независимы.

Фундаментальный результат, принадлежащий Куну, состоит в том, что в играх с идеальной памятью использование поведенческих стратегий эквивалентно использованию смешанных стратегий (со случайным выбором чистых стратегий). Мы понимаем под эквивалентностью двух наборов стратегий то, что они порождают одно и то же распределение вероятностей на множестве конечных вершин (или, что то же самое, на множестве всех траекторий игры, начинающихся в начальной вершине). Несложно понять, что каждый набор смешанных стратегий однозначно порождает набор поведенческих стратегий, при этом оба они порождают одно и то же распределение на множестве конечных вершин. Обратное утверждение состоит в том, что для любого набора поведенческих стратегий найдется хотя бы один набор смешанных стратегий, который его порождает. В дальнейшем мы везде будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Алгоритм обратной индукции можно естественных образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная обратная индукция. Смешанные стратегии в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 9 «Набеги на банки» (стр. 668). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре кроме того существуют равновесия в смешанных стратегиях.

Обозначим через $\mu_1$ вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L₁), а через $\nu_1$ — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L₂). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим $\mu_2$ и $\nu_2$ (вероятности выбора L₃ и L₄ соответственно).

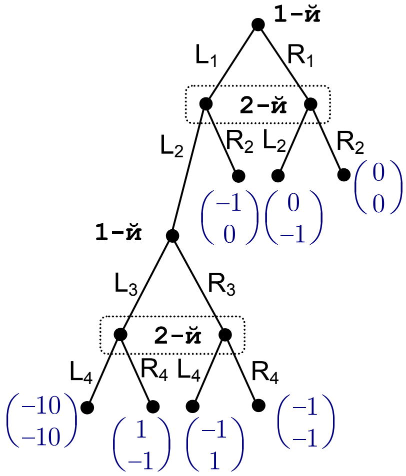


Рисунок 171

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. 170). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $\nu_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по $3/2$. Структура равновесий в редуцированной игре 1-го этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в редуцированной игре при $v_1$, $v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $\nu_1 = 1/2$.

## Задачи

35. «Раз-два-три»

Каждый из двух игроков одновременно называет одно из трех чисел: $1$, $2$ или $3$. При совпадении второй игрок дает первому названное и совпавшее число (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которые они оценивают в $1/2$. Какую сумму $z$ первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

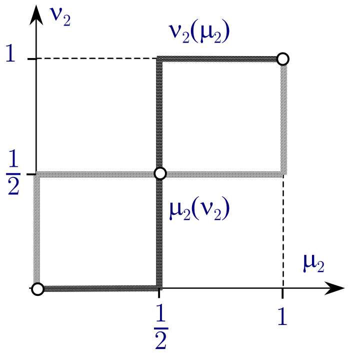


Рисунок 170. Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»

36. В игре участвуют 2 игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит $1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся $2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой обо игрока оценивают выше, чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих

— отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. 171. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

37. Найдите равновесие в смешанных стратегиях для игры, изображенной на Рис. 169 (стр. 669).

38. 50 пиратов делят добычу в 100 дукатов. Правило дележа следующее. В порядке старшинства каждый пират предлагает свою схему дележа. Если большинство пиратов (не менее половины, включая пирата, который предлагает дележ) принимает предложение, то оно выполняется и процедура дележа заканчивается. Пираты голосуют одновременно. Если предложение отвергается, то пират, который его сделал, исключается из числа участвующих в дележе, и тогда настает очередь следующего по старшинству пирата предложить схему дележа между оставшимися пиратами.

Объясните, почему описанная игра является игрой с почти совершенной информацией. Как будет поделена добыча? Будет ли равновесие единственным?

## *Статические игры с неполной информацией*

Рассматривая статические игры, мы предполагали, что игроки в равной степени информированы о структуре игры, так что каждый из игроков знает множества возможных действий и целевые функции других игроков (более того, мы предполагали, что все это общеизвестно). На самом деле экономические субъекты всегда бывают в разной степени информированы или, другими словами, *асимметрично* информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Формально это учитывается с помощью введения понятия **типа** игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип. Можно считать, что первый ход делает природа, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют **играми с неполной информацией** (**байесовскими играми**).

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной, и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией, которые были рассмотрены нами выше. Например, характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

В этом параграфе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящен следующий параграф.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры).

Как и раньше, $I = \{1,...,m\}$ — множество игроков. В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов, $\theta_i \in \Theta_i$, где $\Theta_i$ — множество типов $i$-го игрока (не обязательно конечное или счетное). Предполагается, что появление того или иного типа — случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве

$$\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_m.$$

Если множества типов $\Theta_i$ конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов $(\theta_1, ..., \theta_m) \in \Theta$, т.е. функцию

$$\pi(\cdot) : \Theta \mapsto \mathbb{R}_+,$$

для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательны и их сумма должна равняться единице.

В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что имеет место независимость появления типов у разных игроков (для краткости будем называть это *независимостью типов*). В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, то есть $m$ функций

$$\pi_i(\cdot) : \Theta_i \mapsto \mathbb{R}_+, \quad i = 1, ..., m,$$

таких что $\pi_i(\theta)$ — вероятность появления типа $\theta \in \Theta_i$ игрока $i$. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы — это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов, $F(\theta_1, ..., \theta_m)$. Независимость типов в данном контексте означает, что функцию распределения можно представить как произведение функций распределения типов отдельных игроков

$$F(\theta_1, ..., \theta_m) = \bigcap_{i=1}^{m} F_i(\theta_i).$$

Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые множества действий $X_i$.[256] Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками действий, $(x_1, ..., x_m) \in X$, но и от того, какие именно типы, $(\theta_1, ..., \theta_m) \in \Theta$, участвуют в игре. Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей:

$$u_i : X \times \Theta \mapsto \mathbb{R},$$

где $X = X_1 \times \cdots \times X_m$.

Таким образом, описание статической байесовской игры должно включать в себя следующие составляющие:

- множество игроков;
- для каждого игрока — множество типов;
- распределение вероятностей на множествах типов;
- для каждого игрока — множество возможных действий;
- для каждого игрока — функции выигрышей.

В частном случае, когда множества типов конечны, статическая байесовская игра есть набор

$$\langle I, \{\Theta_i\}_I, \pi, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

---

[256] Если моделируется ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий запретительно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.

Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией, стратегия игрока описывает действия *каждого* из типов этого игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу $\theta \in \Theta_i$ некоторые действия $s_i(\theta) \in X_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков.[257] Поскольку игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие»). Ожидаемый выигрыш игрока $i$, имеющего тип $\theta$ и выбравшего действия $x_i$, в предположении, что остальные игроки выбрали стратегии

$$\boldsymbol{s}_{-i}(\cdot) = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_m(\cdot)),$$

равен

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}) \mid \theta_i = \theta),$$

где $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$ — типы остальных игроков.

Если имеет место независимость типов, то условное по типу мат. ожидание совпадает с безусловным, т.е.

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i})).$$

Если множества типов конечны и типы независимы, то ожидаемый выигрыш рассчитывается по формуле

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \sum_{\boldsymbol{\theta}_{-i} \in \boldsymbol{\Theta}_{-i}} \pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i})\, u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}),$$

где мы обозначили

$$\boldsymbol{\Theta}_{-i} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \ldots, \Theta_m)$$

и

$$\pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}) = \bigcap_{j \neq i} \pi_j(\theta_j)$$

(вероятность того, что типы остальных игроков окажутся равными $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$).

Для байесовских игр предложена концепция равновесия,[258] аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией.

**Определение 12**.

---

[257] Можно задать целевые функции не для типов, а для игроков. В таком случае игрок максимизирует ожидаемую полезность, исходя из вероятности того, что он окажется того или иного типа. Оба подхода совпадают при естественном предположении, что вероятность появления любого типа не равна нулю.

[258] Концепция байесовского равновесия предложена американским экономистом венгерского происхождения Джоном Харшаньи. (Harsanyi, J. C. (1967-8), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players," Parts I, II and III, *Management Science*, **14**, 159-182, 320-334, 486-502.

Набор стратегий $(\bar{s}_1(\cdot), \ldots, \bar{s}_m(\cdot))$ является **равновесием Нэша-Байеса** (байесовским равновесием) в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta \in \Theta_i$ каждого игрока $i$ действия $\bar{s}_i(\theta)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии:

$$U_i(\theta, \bar{s}_i(\theta), \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot)) = \max_{x_i \in X_i} U_i(\theta, x_i, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot))$$

Для того, чтобы введенные определения стали более понятными, проиллюстрируем их на условном примере.

### Игра 10. «Выборкомпьютера»

В игре участвуют два игрока, использующие в работе компьютеры. Каждый игрок может быть двух типов — предпочитает работать либо на IBM PC, либо на Макинтоше, причем любители IBM PC попадаются с вероятностью $\pi$ (для обоих игроков). Каждый из игроков выбирает либо IBM PC, либо Макинтош. Лишь после того, как игрок выбрал тип компьютера, он узнает, с партнером какого типа ему предстоит работать, и какой тот выбрал себе компьютер. Каждый из типов каждого из игроков оценивает пользование компьютером любимой разновидности в $1$ у.е., а пользование другим компьютером в $0$ у.е. Игроки получают дополнительный выигрыш в $2$ у.е., если выберут компьютеры одной и той же разновидности. ⇦

Игра представлена в Таблице 22.

Мы не будем полностью решать эту игру. Найдем только условия для параметра $\pi$, при которых набор стратегий «если игрок любит IBM, то оно выбирает IBM; если игрок любит Mac, то он выбирает Mac», т.е. ((IBM, Mac), (IBM, Mac)), будет равновесием Нэша-Байеса.

Рассмотрим выбор 1-го игрока, если он предпочитает IBM PC. Если он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1$,

Mac: $\pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2$.

Первый игрок такого типа выберет IBM PC, если выполнено условие

$$\pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1 \geqslant \pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2$$

или

$$\pi \geqslant 1/4.$$

Таблица 22

| Игрок 1 | | Игрок 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Любит** IBM | | **Любит** Mac | | |
| | | IBM | Mac | IBM | Mac | |
| **Любит** IBM | IBM | 3<br>3 | 0<br>1 | 2<br>3 | 1<br>1 | [π] |
| | Mac | 1<br>0 | 2<br>2 | 0<br>0 | 3<br>2 | |
| **Любит** Mac | IBM | 3<br>2 | 0<br>0 | 2<br>2 | 1<br>0 | [1–π] |
| | Mac | 1<br>1 | 2<br>3 | 0<br>1 | 3<br>3 | |
| | | [π] | | [1–π] | | |

Рассмотрим теперь выбор 1-го игрока, если он предпочитает Макинтош. Поскольку в равновесии он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0$,

Mac: $\pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3$.

Первый игрок такого типа выберет Макинтош, если выполнено условие

$$\pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0 \leqslant \pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3$$

или

$$\pi \leqslant 3/4.$$

Для второго игрока рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям, поскольку игроки одинаковы. Таким образом, условие

$$1/4 \leqslant \pi \leqslant 3/4$$

гарантирует, что набор стратегий ((IBM, Mac), (IBM, Mac)) будет байесовским равновесием.

Следующий пример не является полноценной игрой, поскольку выбор в нем делает только один игрок, однако он включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Этот пример показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над примером позволяет «сломать» некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры.

### **Игра 11.** «*Вахтер*»

На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать $A$ и $B$). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть 2 типа вахтера (обозначим их соответственно $a$ и $b$). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом, если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит $-1$, а если чужим, то $1$. ⇦

Таблица 23

**Посетитель**

| | | | A | | B | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Вахтер** | **a** | проверять | $-1$ | $\pi_{Aa}$ | $1$ | $\pi_{Ba}$ |
| | | не проверять | $0$ | | $0$ | |
| | **b** | проверять | $-1$ | $\pi_{Ab}$ | $1$ | $\pi_{Bb}$ |
| | | не проверять | $0$ | | $0$ | |

Матрица игры приведена в Таблице 23. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена $\pi_{Aa}$ и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.

Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $\pi_{Aa}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой, если он кажется своим, равна $\pi_{Ba}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа **a**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Aa}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Ba}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то $0$. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа **b**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Ab}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Bb}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то $0$.

Если вахтер опытен, то вероятность $\pi_{Aa}$ велика по сравнению с вероятностью $\pi_{Ba}$, а вероятность $\pi_{Ab}$ велика по сравнению с вероятностью $\pi_{Bb}$, и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у тех, кто ему кажется чужими и не будет проверять документы у тех, кто ему кажется своими.

Разберем также пример, в котором множества типов являются континуумами.

### Игра 12. «Аукцион с заявками в запечатанных конвертах»

Некий предмет продается с аукциона. Участники аукциона ($i=1, \ldots, n$), подают свои заявки, $p_i \geqslant 0$, в запечатанных конвертах. Побеждает тот, кто предложит самую высокую цену. (Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием.) Победивший участник платит заявленную цену и получает предмет. Если $i$-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p_i$, где $v_i$ — ценность для него данного предмета; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. Известно, что оценки $v_i$ распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$ и независимы. ⇦

В данном случае можно считать, что множество типов каждого игрока совпадает с отрезком $[0, 1]$. Удобно рассматривать стратегию $i$–го игрока как функцию, ставящую в соответствие типу $v$ цену, которую он предложит, $p_i(v)$:

$$p_i(\cdot)\colon\ [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

По смыслу задачи естественно искать симметричное равновесие, то есть такое равновесие, в котором игроки выбирают одинаковые стратегии:

$$p_i(v) \equiv p_0(v) \ \ \forall i,$$

Кроме того, предположим, что одинаковая для всех стратегия $p_0(\cdot)$ является возрастающей дифференцируемой функцией. Найдем, исходя из этих предположений, оптимальный отклик $i$–го игрока. Если этот игрок выберет цену $p$, то вероятность того, что другой игрок, $j$, предложил более низкую цену равна

$$\mathsf{Prob}(p_0(v_j) < p) = \mathsf{Prob}(v_j < \overset{-1}{p_0}(p)) = \overset{-1}{p_0}(p) = \varphi(p),$$

где мы воспользовались тем, что оценка $v_j$ равномерно распределена на $[0, 1]$, и обозначили через $\varphi(p)$ функцию, обратную к $p_0(\cdot)$. Поскольку по предположению $v_j$ распределены независимо, то события $p_0(v_j) < p$ независимы, и вероятность того, что $i$–й игрок выиграет аукцион, заявив цену $p$, равна $\varphi(p)^{n\text{-}1}$. (Здесь мы пользуемся тем, что, поскольку $p_0(\cdot)$ — возрастающая функция, то вероятность события $p_0(v_j) = p$ равна нулю.) Таким образом, ожидаемый выигрыш $i$–го игрока с оценкой $v$, предложившего цену $p$, в предположении, что все остальные игроки выбрали стратегии $p_0(\cdot)$, равен

$$\varphi(p)^{n\text{-}1}\cdot(v-p) + (1-\varphi(p)^{n\text{-}1})\cdot 0 = (v-p)\varphi(p)^{n\text{-}1}.$$

Условия первого порядка для задачи максимизации ожидаемого выигрыша имеют вид

$$(n–1)(v-p)\,\varphi(p)^{n\text{-}2}\,\varphi'(p) - \varphi(p)^{n\text{-}1} = 0$$

или

$$(n–1)(v-p)\varphi'(p) - \varphi(p) = 0.$$

В равновесии игрок, имеющий оценку $v$, должен предлагать цену $p = p_0(v)$. Подставив это в условия первого порядка, получаем:

$$(n–1)(v-p_0(v))\,\varphi'(p_0(v)) - \varphi(p_0(v)) = 0.$$

Поскольку $\varphi(\cdot)$ — функция, обратная к $p_0(\cdot)$, то

$$\varphi(p_0(v)) = v \qquad \text{и} \qquad \varphi'(p_0(v)) = \frac{1}{p_0'(v)}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$(n–1)\,[v-p_0(v)] - p_0'(v)\,v = 0.$$

Решением этого уравнения, как несложно проверить, является

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{C}{v^{n-1}},$$

где $C$ — константа интегрирования. Найдем эту константу. По смыслу игры $p_0(v)$ не должна превышать $v$. С другой стороны, по условию заявленная цена не может быть отрицательной. Поэтому должно выполняться граничное условие $p_0(0) = 0$, откуда $C = 0$. Таким образом, наши рассуждения приводят к стратегиям вида

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

В самом деле, при таких стратегиях других игроков ожидаемый выигрыш игрока с оценкой $v$,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n–1}(v-p)\,p^{n\text{-}1},$$

достигает глобального максимума на $\mathbb{R}_+$ при $p = \frac{n-1}{n}v$, то есть условия первого порядка дали нам правильное решение. Заметим, что хотя мы нашли равновесие, но не можем быть уверены, что полученное нами решение единственно.

Если в аукционе участвуют 2 игрока, то в равновесии каждый предложит цену на уровне половины своей оценки. С ростом количества участников равновесные стратегии все больше приближаются к «правдивым» стратегиям $p_i(v) = v$.

Выше уже упоминалось, что равновесие в смешанных стратегиях в играх с полной информацией можно представить как байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в играх с неполной информацией. Рассмотрим в качестве примера Игру 6 «Инспекция».

С помощью байесовского равновесия можно имитировать эффект смешанных стратегий при использовании только чистых стратегий. Рассмотрим, как это можно сделать на примере Игры 6 «Инспекция» (стр. 641). Предположим, что оба игрока могут быть разных типов. Для упрощения предположим, что множество типов у каждого из игроков — отрезок $[0, 1]$. При этом предполагаем, что разные типы одного и того же игрока имеют одинаковые предпочтения (те, что заданны Таблицей 12). Несложно проверить, что следующий набор стратегий является байесовским равновесием расширенной игры: налогоплательщик платит налог, если его тип удовлетворяет условию $\theta_1 \leqslant 1/2$, в противном случае он налог не платит; аналогично налоговый инспектор проверяет, если его тип удовлетворяет условию $\theta_2 \leqslant 1/2$. Это байесовское равновесие полностью воспроизводит равновесие в смешанных стратегиях исходной игры: в половине случаев налогоплательщик платит налог, и в половине случаев налоговый инспектор проверяет налогоплательщика. Рандомизирует при этом не игрок, а природа, когда выбирает тот или иной тип игрока.

Конечно, в расширенной игре существует не одно, а бесконечно много байесовских равновесий. Для получения другого байесовского равновесия требуется только произвольным образом разбить множество типов каждого игрока на две части, вероятности попадания в которые равны вероятностям использования чистых стратегий в исходном равновесии в смешанных стратегиях.

Можно также имитировать равновесие в смешанных стратегиях с помощью слегка измененной игры, в которой к выигрышам добавляются малые случайные возмущения, зависящие от типов игроков. Такой подход позволяет избавится от множественности байесовских равновесий, о котором только что говорилось. При этом равновесие в смешанных стратегиях будет пределом байесовских равновесий в «возмущенных» играх. (См. Задачу 41).

## Задачи

39. Как представить Игру 2 (стр. 629) в виде байесовской игры?

40. Богатство отца составляет $\$3$ с вероятностью $1/5$, $\$6$ с вероятностью $1/5{\cdot}4/5$, $\$12$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^2$, и т.д. (то есть, $\$3{\times}2^k$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^k$ для каждого $k \geqslant 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln(w)$. [Подсказка: $3^9 > 2^{14}$].

(A) Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом каждый из братьев говорит «Да» или «Нет» (одновременно). Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

(i) Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом тип каждого брата — это элемент множества $\{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ ...\}$. Каково распределение вероятностей по типам?

(ii) Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.

(iii) Опишите равновесие (Байеса-Нэша) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие. Существует ли в этой игре другое равновесие?

(B) Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $\$3{\times}2^K$ (для некоторого $K \geqslant 1$). Охарактеризуйте равновесия Байеса-Нэша в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

41. В Таблице 24 показана «возмущенная» игра «Инспекция». В ней $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — случайные возмущения, соответствующие типу 1-го и 2-го игрока соответственно, причем $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ равномерно распределены на отрезке $[0,\ \delta]$ $(\delta > 0)$ и независимы между собой.[259] Найдите байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в этой игре. Докажите, что при $\delta \to 0$ найденное байесовское равновесие стремится к равновесию в смешанных стратегиях исходной игры (Игра 6 на стр. 641).

Таблица 24

| | | **Инспектор** | |
|---|---|---|---|
| | | проверять | Не проверять |
| **Проверяемый** | нарушать | $\underline{1+\varepsilon_2}$<br>$-1$ | $0$<br>$\underline{1+\varepsilon_1}$ |
| | не нарушать | $-1$<br>$\underline{0}$ | $\underline{0}$<br>$0$ |

[*Указание*: Подскажем, равновесие какого вида здесь искать. Каждый игрок выбирает некоторый пороговый уровень, $\bar{\varepsilon}_i$. Равновесные стратегии выглядят следующим образом: если $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$, то первый игрок выбирает стратегию «нарушать», а если $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1$ — то стратегию «не нарушать» (вероятность того, что $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ равна нулю, поэтому этот случай можно не рассматривать); аналогичным образом второй игрок выбирает стратегию «проверять», если $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$ и стратегию «не проверять», если $\varepsilon_2 > \bar{\varepsilon}_2$.]

## Динамические байесовские игры. Совершенное байесовское равновесие

В этом параграфе мы рассмотрим разновидность игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статических игр с полной информацией, т.е. динамические байесовские игры (динамические игры с неполной информацией).

---

[259] Равномерное распределение выбрано нами только из соображений удобства. В данном случае подошло бы любое разумное непрерывное распределение.

В качестве примера динамической байесовской игры рассмотрим модификацию Игры 7 «Террорист» (стр. 653).

### Игра 13. «*Террорист*»

Ситуация в данной игре такая же, как в Игре 7, однако террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший». Нормальный террорист так же, как и в Игре 7, получает выигрыш $-100$ в случае, если взорвет бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист получает в этом случае выигрыш $0$. Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна $\pi$. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. ⇦

Игра схематически показана на Рисунке 172. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок, природа.[260] Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста. Природа не имеет никакой целевой функции, поэтому на схеме показаны только выигрыши двух исходных игроков.

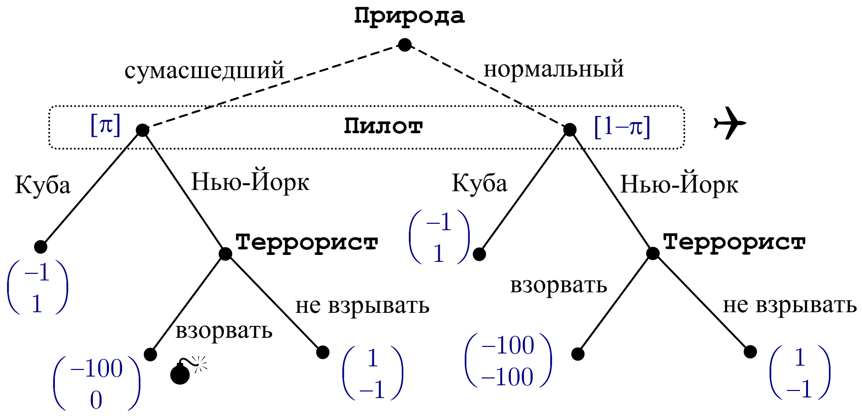


Рисунок 172. Игра «Террорист»

Первый ход делает природа. С вероятностью $\pi$ природа создает сумасшедшего террориста и с вероятностью $1 - \pi$ — нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста.

Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов. Нормальный террорист, как мы видели раньше в Игре 7, не будет взрывать бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист, наоборот, предпочтет взорвать бомбу (так как $0$ больше $-1$). В результате этих рассуждений (которые, как предполагается, должен проводить рациональный пилот) получим свернутую игру, которая показана на Рисунке 173.

---

[260] Отметим, что можно рассматривать байесовские игры (игры с неполной информацией) как игры с несовершенной информацией, в которых одним из игроков является *природа*.

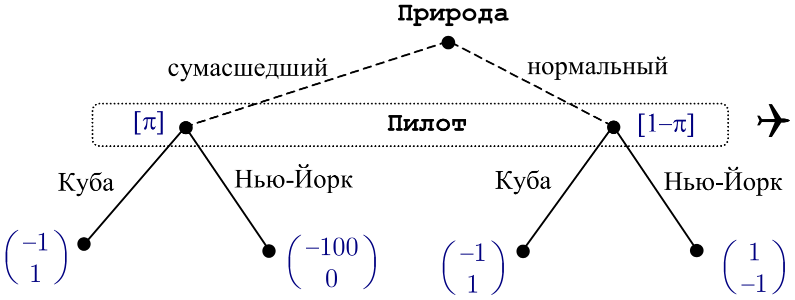


Рисунок 173.

Если пилот выберет Кубу, то в любом случае поучит $-1$. Если же пилот выберет Нью-Йорк, то с вероятностью $\pi$ он получит $-100$, а с вероятностью $1-\pi$ получит $1$, то есть его ожидаемый выигрыш составит

$$\pi\cdot(-100) + (1-\pi)\cdot 1 = 1 - 101\pi.$$

Пилот должен сравнить выигрыш $-1$ с выигрышем $1 - 101\pi$ и выбрать максимальный. Таким образом, вид решения будет зависеть от параметра $\pi$. Если вероятность встретить сумасшедшего террориста мала, т.е. $\pi < 2/101$, то пилот полетит в Нью-Йорк, а если эта вероятность велика, т.е. $\pi > 2/101$, то он предпочтет полететь на Кубу. При $\pi = 2/101$ пилоту все равно, куда лететь.

Заметим, что в рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, поскольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией. В подобных ситуациях, коль скоро игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины, то ему приходится делать некоторые предположения относительно того, с какой вероятностью он может оказаться в той или иной вершине. Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию **совершенного байесовского равновесия**.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

✦ набор стратегий $(s_1, ..., s_m)$ всех игроков;

✦ для каждого игрока $i$ — набор ожидаемых им стратегий остальных игроков, $\boldsymbol{s}^e_{-i}$;

✦ для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, — ожидаемое им распределение, заданное на вершинах этого информационного множества.

Для того, чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо выполнение следующих условий:

1) Ожидания любого игрока согласованы: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока $i$ соответствует выбранной игроком стратегии $(s_i)$ и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки $(\boldsymbol{s}^e_{-i})$.

2) Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, то есть выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$.

3) Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $\mathbf{s}^e_{-i} = \mathbf{s}_{-i}$.

Первое условие требует специального пояснения. Поясним сначала это условие для случая чистых стратегий. Рассмотрим некоторого игрока $i$ и информационное множество, в котором этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая набору стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$ и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. В таком случае, если игрок рационален, то он должен ожидать, что будет находиться именно в этой вершине, коль скоро игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор.

В качестве примера рассмотрим статическую игру, изображенную на Рис. 174. Если второй игрок ожидает, что первый игрок выберет правую стратегию, то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

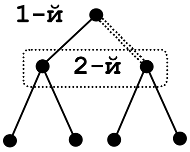


Рисунок 174

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть похожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$. Тогда ожидаемая вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т.е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило не применимо.) Описанный способ вычисления вероятностей соответствует классическому правилу Байеса для условных вероятностей.

Напомним, что правило Байеса применимо к событиям $A$ и $B_j$ $(j=1,...,m)$, таким что:

(1) $B_j$ $(j=1,...,m)$ — несовместные события, т.е.

$$B_j \cap B_k = \varnothing, \ \forall j,k=1,...,m;$$

(2) тот факт, что произошло одно из событий $B_j$ гарантирует, что произошло также событие $A$, т.е.

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

При этом верна следующая формула Байеса:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{\sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}P\{A \mid B_k\}} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{P\{A\}}.$$

В этой формуле $P\{B_j\}$ — вероятность события $B_j$, $P\{B_j \mid A\}$ — вероятность события $B_j$ при условии, что произошло событие $A$, $P\{A\}$ — вероятность события $A$, $P\{A \mid B_j\}$ —

вероятность события $A$ при условии, что произошло событие $B_j$. В знаменателе первой дроби стоит формула полной вероятности для $P\{A\}$. Чтобы можно было применить правило Байеса, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($P\{A\} \neq 0$).

В применении к рассматриваемой проблеме можно считать, что событие $B_j$ означает, что процесс игры привел в определенную вершину, а событие — $A$, что процесс игры привел в данное информационное множество. Если брать только такие вершины, которые содержатся в рассматриваемом информационном множестве, то $P\{A \mid B_j\} = 1$ и формула упрощается:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}}{P\{A\}},$$

где $P\{A\} = \sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}$.

Поясним сказанное на примере игры, изображенной на Рис. 175. Если 3-й игрок считает, что 1-й игрок выбирает левую сторону с вероятностью $0.4$, и что 2-й игрок выбирает левую и правую сторону с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина ❸ будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0.4 \cdot 0.5 = 0.2$, а вершина ❹ — с вероятностью $0.6$. Таким образом, он должен сопоставить вершине ❸ вероятность

$0.2/(0.2 + 0.6) = 0.25$,

а вершине ❹ — вероятность

$0.6/(0.2 + 0.6) = 0.75$.

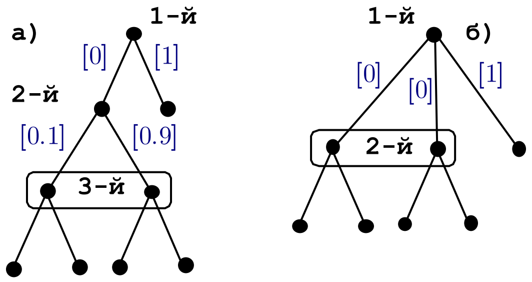


Рисунок 176

Это только одно из требований. Даже если при наборе стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$ процесс игры никогда не может привести в некоторое информационное множество, ожидания игрока в данном информационном множестве должны соответствовать $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$. Так в игре изображенной на Рис. 176 (а), при указанных ожиданиях относительно стратегий 1-го и 2-го игроков 3-й игрок должен ожидать, что может оказаться в левой вершине с вероятностью $0.1$, а в правой вершине с вероятностью $0.9$, хотя вероятность достижения информационного множества равна нулю. Ограничимся только этими пояснениями и не станем давать более точного определения. Заметим, что не всегда можно по данному набору стратегий сформировать ожидания. Например, в игре изображенной на Рис. 176 (б), при указанных ожиданиях о стратегии 1-го игрока 2-й игрок не может сформировать ожиданий в своем информационном множестве. Второй игрок может получить ход только в результате ошибки первого игрока и трудно судить, какая из ошибок более вероятна. В та-

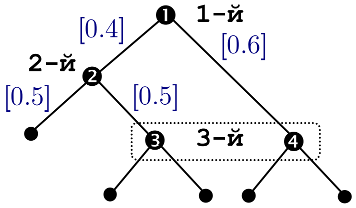


Рисунок 175

ких случаях мы будем только требовать, чтобы у игрока были *некоторые* ожидания, и он выбирал стратегию на основе этих ожиданий.[261]

Отличительной особенностью совершенного байесовского равновесия является то, что для его поиска в общем случае невозможно использовать обратную индукцию, кроме случая игр с почти совершенной информацией. Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы уравнений: ожидаемые распределения на вершинах информационных множеств находятся в соответствии с равновесным набором стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе предположений об ожидаемых распределениях на вершинах информационных множеств.

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры 13 (стр. 680) с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит $0$, и выигрыш пилота составит $0$. Дерево игры показано на Рис. 177. Как и прежде, первый элемент вектора — выигрыш пилота. Поскольку выбор террориста в Нью-Йорке можно предсказать однозначно, то будем рассматривать «частично свернутую» игру. Совершенное байесовское равновесие должно состоять из следующих величин:

1) вероятность, с которой сумасшедший террорист проводит операцию, $\mu_1 \in [0, 1]$;

2) вероятность, с которой нормальный террорист проводит операцию, $\mu_2 \in [0, 1]$;

3) вероятность, с которой пилот ожидает встретить сумасшедшего террориста, $\alpha \in [0, 1]$;

4) вероятность, с которой пилот летит в Нью-Йорк, $\mu_3 \in [0, 1]$.

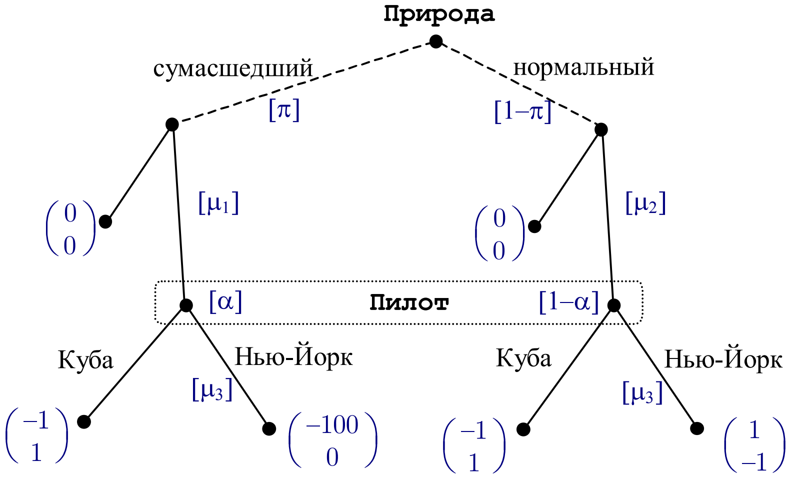


Рисунок 177.

Этого достаточно для описания равновесия. Все остальные вероятности очевидным образом рассчитываются как функции указанных.

Рассмотрим сначала поведение пилота при ожиданиях, заданных параметром $\alpha$. Ожидаемые выигрыши пилота от двух возможных действий равны:

---

[261] Для таких случаев в теории игр к настоящему времени разработано насколько различных концепций решений. Однако все они являются в той или иной степени спорными. Интересующийся читатель, владеющий английским языком, может обратиться к соответствующей литературе.

| | |
|---|---|
| Куба: | $-1$ |
| Нью-Йорк: | $\alpha\cdot(-100) + (1-\alpha)\cdot 1$ |

Таким образом, если $-1 < \alpha\cdot(-100) + (1-\alpha)\cdot 1$, т.е. $\alpha < 2/101$, то пилот предпочтет полететь в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$), если $\alpha > 2/101$, то на Кубу ($\mu_3 = 0$), а в случае, когда $\alpha = 2/101$, ему все равно, куда лететь ($\mu_3$ любое). Т.е. зависимость стратегии от ожидания имеет вид:

$$\mu_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 2/101, \\ [0,\,1], & \text{если } \alpha = 2/101, \\ \;0, & \text{если } \alpha > 2/101. \end{cases}$$

Далее рассмотрим, какими должны быть ожидания пилота, $\alpha$, в зависимости от вероятностей $\mu_1$ и $\mu_2$. Если $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$, то можно использовать формулу Байеса. В рассматриваемой игре можно считать, что события следующие: $B_1$ — террорист сумасшедший, $B_2$ — террорист нормальный, $A$ — в процессе игры пилот получил ход и должен выбирать, куда ему лететь. (Проверьте, что эти события удовлетворяют требованиям, необходимым для использования правила Байеса). При этом, используя введенные обозначения,

$$P\{B_1\} = \pi, \quad P\{B_2\} = 1-\pi, \quad P\{B_1 \mid A\} = \alpha,$$

$$P\{A \mid B_1\} = \mu_1, \quad P\{A \mid B_2\} = \mu_2.$$

Получаем по формуле Байеса, что

$$\alpha(\mu_1,\, \mu_2) = \frac{\pi\,\mu_1}{\pi\,\mu_1 + (1-\pi)\,\mu_2}.$$

при $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$. Если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то, согласно принятому нами определению байесовского равновесия, ожидания пилота $\alpha$ могут быть любыми: $\alpha(\mu_1,\, \mu_2) = [0,\, 1]$.

Рассмотрим теперь выбор каждого из типов террориста. Если террорист сумасшедший, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции при стратегии пилота, заданной вероятностью $\mu_3$, равен

$$(1-\mu_3)\cdot 1 + \mu_3\cdot 0 = 1-\mu_3.$$

Он сравнивает этот выигрыш с $0$. Таким образом,

$$\mu_1(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1, \\ [0,\,1], & \text{если } \mu_3 = 1. \end{cases}$$

Если террорист нормальный, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции равен $1-2\mu_3$. Он тоже сравнивает этот выигрыш с $0$, т.е.

$$\mu_2(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1/2, \\ [0,\,1], & \text{если } \mu_3 = 1/2, \\ 0, & \text{если } \mu_3 > 1/2. \end{cases}$$

Набор вероятностей $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \alpha^*)$, задает совершенное байесовское равновесие, если выполнены четыре условия:

$$\mu_3^* \in \mu_3(\alpha^*), \qquad \alpha^* \in \alpha(\mu_1^*, \mu_2^*),$$

$$\mu_1^* \in \mu_1(\mu_3^*), \qquad \mu_2^* \in \mu_2(\mu_3^*).$$

Для того, чтобы найти решения этой системы, следует разобрать несколько случаев. По-видимому, проще всего проанализировать по отдельности следующие три возможности:

(1) нормальный террорист не проводит операцию ($\mu_2 = 0$);

(2) нормальный террорист проводит операцию ($\mu_2 = 1$);

(3) у нормального террориста невырожденная смешанная стратегия ($\mu_2 \in (0, 1)$).

(1) Рассмотрим случай, когда $\mu_2 = 0$. Предположим, что при этом $\mu_1 \neq 0$. Тогда пилот наверняка будет знать, что он может иметь дело только с сумасшедшим террористом ($\alpha = 1$). Зная это, пилот выберет Кубу ($\mu_3 = 0$). Но в таком случае нормальному террористу тоже выгодно проводить операцию. Мы пришли к противоречию. Значит, единственная возможность состоит в том, что сумасшедший террорист не проводит операцию ($\mu_1 = 0$). Но такое может быть только если он знает, что пилот полетит в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$). Однако, такое поведение пилота возможно только в том случае, если вероятность того, что он имеет дело с сумасшедшим террористом мала ($\alpha \leqslant 2/101$).

Мы нашли в рассматриваемой игре одно из равновесий (точнее, множество равновесий определенного вида):

$$\mu_3^* = 1, \qquad \alpha^* \in [0,\ 2/101],$$

$$\mu_1^* = 0, \qquad \mu_2^* = 0.$$

Это равновесие поддерживается уверенностью пилота, что вероятность встречи с сумасшедшим террористом мала. Заметим, что эти ожидания ни на чем не основаны, ведь в рассматриваемом равновесии пилот не может сформировать свои ожидания на основе правила Байеса.

(2) Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_2 = 1$. Такое поведение нормального террориста возможно только, если пилот с достаточно большой вероятностью полетит на Кубу, а именно, если $\mu_3 \leqslant 1/2$. При такой стратегии пилота сумасшедшему террористу выгодно проводить операцию ($\mu_1 = 1$). Но если оба террориста проводят операцию, то для пилота вероятность встретить сумасшедшего террориста совпадает с вероятностью, с которой такие террористы встречаются вообще, т.е. $\alpha = \pi$. Пилот может выбрать $\mu_3 \leqslant 1/2$ только если $\alpha \geqslant 2/101$. Таким образом, равновесие может достигаться только при $\pi \geqslant 2/101$. При $\pi > 2/101$, имеем $\mu_3 = 0$. Таким образом, если сумасшедшие террористы встречаются на свете достаточно часто, т.е. если $\pi > 2/101$, то в рассматриваемой игре может иметь место следующее равновесие:

$$\mu_3^* = 0, \qquad \alpha^* = \pi,$$

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1.$$

В вырожденном случае, когда $\pi = 2/101$, получаем, следующее множество равновесий:

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1,$$

$$\mu_3^* \in [0,\ 1/2], \quad \alpha^* = \pi = 2/101.$$

(3) И, наконец, рассмотрим случай, когда нормальный террорист использует невырожденную смешанную стратегию ($\mu_2 \in (0, 1)$). Условием использования такой стратегии является то, что обе альтернативы дают ему одинаковую полезность, то есть то, что пилот летит в Нью-Йорк с вероятностью $1/2$ ($\mu_3 = 1/2$). Такая стратегия пилота может поддерживаться только ожиданиями $\alpha = 2/101$. Учитывая, что сумасшедшему террористу выгодно участвовать в акции ($\mu_1 = 1$), из формулы Байеса получим следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{2}{101} = \frac{\pi}{\pi + (1 - \pi)\,\mu_2}.$$

Значит, пилот может сформировать такие ожидания только если

$$\mu_2 = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку вероятность $\mu_2$ должна быть меньше единицы, то вероятность, с которой природа порождает сумасшедших террористов должна быть достаточно мала: $\pi < 2/101$.

Таким образом, при $\pi < 2/101$ следующая точка является равновесием:

$$\mu_3^* = \frac{1}{2}, \qquad \alpha^* = \frac{2}{101},$$

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку проанализированы все три возможных случая, то мы нашли все возможные равновесия игры.

### Задачи

42. Найдите совершенные байесовские равновесия в игре, изображенной на Рис. 167.

43. «Карточный блеф»

В начале игры игроки ($A$ и $B$) вносят по 1 д.е. После этого с равной вероятностью игрок $A$ получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее игрок может $A$ повысить ставку, добавив 2 д.е. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает игрок $B$. Если $A$ повышает, то делает ход игрок $B$. Он либо уравнивает, добавляя 2 д.е., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает игрок $A$, если карта старшая, и игрок $B$, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает игрок $A$.

Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях. Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто игрок $A$ будет блефовать, т.е. повышать, имея младшую карту? Как часто игрок $B$ будет уравнивать?

## *Игры и Парето-оптимальность*

В этой главе мы приведем укажем на условия, гарантирующие Парето-оптимальность решений некоторых игр, рассматриваемых в книге.

Пусть задана игра с полной информацией в нормальной форме:

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

Напомним определение Парето-оптимальности.

**Определение 13.**

Исход $\boldsymbol{y} \in X$ **доминирует по Парето** исход $\boldsymbol{x} \in X$ (является **Парето-улучшением** по сравнению с $\boldsymbol{x}$) , если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе $\boldsymbol{x}$, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в $\boldsymbol{x}$, т.е.

$$u_i(y_i) \geqslant u_i(x_i) \quad \forall\, i \in I,$$

и

$$\exists\, j \in I: \quad u_j(y_i) > u_j(x_i).$$

Исход $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ называется **Парето-оптимальным**, если не существует другого исхода $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$, такого что он доминирует $\hat{\boldsymbol{x}}$ по Парето.

Множество всех Парето-оптимальных точек называют **границей Парето**.

Рассмотренные выше решения (равновесия) не являются в общем случае Парето-оптимальными, что, в частности, показывает следующая игра.

### Игра 14. «Игра Ауманна»[262]

Перед двумя участниками игры стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы организатор игры дал сто долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал один доллар ему самому. Участники одновременно и независимо делают выбор, после чего организатор игры исполняет их требования. ⇦

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (см. Таблицу 25).

Таблица 25

| | | **Второй игрок** | |
|---|---|---|---|
| | | $100 другому | $1 ему |
| **Первый игрок** | $100 другому | 100<br>100 | 101<br>0 |
| | $1 ему | 0<br>101 | 1<br>1 |

В этой игре у каждого игрока существует строго доминирующая стратегия — потребовать 1 доллар себе. Соответствующий исход является и равновесием в доминирующих стратегиях, и равновесием Нэша. Примечательным является то, что этот исход является единственным не Парето-оптимальным исходом. Так, исход, в котором оба игрока требуют отдать сто долларов другому строго доминирует его по Парето.

## Сотрудничество в повторяющихся играх

Ситуации, аналогичные той, которая описана в игре Ауманна, являются примерами фиаско координации. Одно из объяснений этого фиаско состоит в том, что в игре Ауманна игроки только один раз должны сделать выбор. В ситуациях, когда игра повторяется и игроки, играя в игру, «помнят» всю все принятые ими ранее решения (предысторию игры), между ними вполне может возникнуть сотрудничество.

Чтобы проанализировать эту догадку формально, введем понятие **повторяющейся игры**. Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конеч-

---

[262] Эта игра представляет собой вариант известнейшей игры «Дилемма заключенных». Сюжет «Дилеммы заключенных» следующий. Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Судья предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года. (Цифры у разных авторов разные.)

ной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. 178 показывает как это сделать на примере игры Ауманна.

Аналогично, чтобы получить дерево $n$ раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине $n$–1 раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр, в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если $u_{ij}$ — выигрыш, полученный $i$-м игроком в результате $j$-го повторения игры (на $j$-м «раунде»), то общий выигрыш в $n$ раз повторяющейся игре составит

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0, 1)$ — дисконтирующий множитель $i$-го игрока для $j$-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}.$$

Будем считать в дальнейшем, что $\delta_{ij} = \delta_i$, т.е. дисконтирующий множитель не зависит от раунда.

Как нетрудно заметить, повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие в них можно находить обратной индукцией.

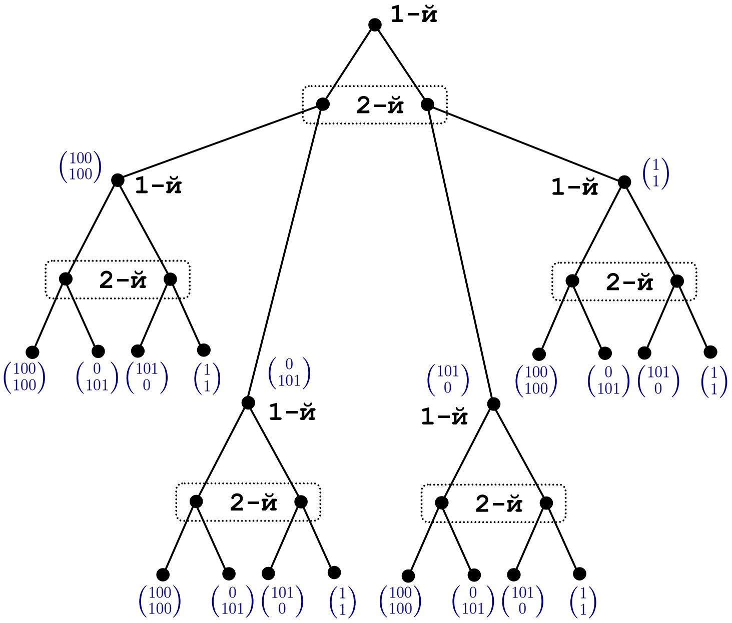


Рисунок 178. Дважды повторяющаяся игра Ауманна

Проанализируем повторяющуюся игру Ауманна. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым, все сводится к анализу однократно повторенной игры Ауманна, равновесие которой нам известно: каждый игрок попросит 1 доллар себе.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в редуцированной игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это $1$ для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая редуцировать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой $n$ раз повторенное равновесие обычной игры Ауманна. Догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре в данном случае не подтверждается.

Можно сформулировать общую теорему для повторяющихся игр.

### Теорема 7.

Пусть в игре $G$ с совершенной информацией (и конечным числом ходов) существует единственное совершенное в подыграх равновесие. Тогда в повторенной $n$ раз игре $G$, $G^n$,существует единственное совершенное в подыграх равновесие, причем равновесные стратегии в игре $G^n$ являются повторениями равновесных стратегий в игре $G$.

Мы не будем приводить формальное доказательство. Доказательство очевидным образом конструируется по схеме, которую мы применили, анализируя повторяющуюся игру Ауманна.

То, что гипотеза о возникновении сотрудничества не подтверждается может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на $n$-м ходу. И в самом деле, если бы игра Ауманна повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в **бесконечно повторяющейся игре** рассчитывается по формуле[263]

$$u_i = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} u_{ij}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений, в бесконечно повторяющейся игре Ауманна возможно возникновение сотрудничества. Рассмотрим стратегии следующего вида:

- Сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе, в первом раунде тоже сотрудничать).
- Не сотрудничать, если хотя бы на одном из предыдущих раундов другой игрок взял 1 доллар себе.

Такую стратегию называют **триггерной**.

Если дисконтирующие множители $\delta_1$, $\delta_2$ достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие.

---

[263] Поскольку $\delta_i \in (0, 1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того, как игрок взял 1 доллар себе, его партнер во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшемуся от сотрудничества игроку будет выгодно брать 1 доллар себе во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в $k$-м раунде, то игрок не может получить больше, чем

$$\sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 + (\delta_i)^{k-1}\cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1.$$

Если же не один из игроков не будет отклонятся от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100.$$

Таким образом, чтобы отклоняться было не выгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 \geqslant \sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 + (\delta_i)^{k-1}\cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1$$

или

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 99 \geqslant (\delta_i)^{k-1}\cdot 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{99\,\delta_i}{1-\delta_i} \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 99\,\delta_i \geqslant 1-\delta_i \;\Leftrightarrow\; \delta_i \geqslant \frac{1}{100}.$$

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклонится от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся игре Ауманна. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии в которых независимо от предыстории игроки всегда берут 1 доллар себе тоже составляют равновесие.

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в каком-либо равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный выигрыш.[264]

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоремы можно сделать вывод, что

---

[264] См. Friedman, J. (1971), "A Noncooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies*, **28**, 1-12. Fudenberg, D., and E. Maskin (1986), "The Folk Theorem for Repeated Games with Discounting and Incomplete Information," *Econometrica*, **54**, 533-54.

в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в игре Ауманна.

## Игры торга

Теперь мы рассмотрим важный класс игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые **игры торга**. В таких играх в условиях полной информации решения всегда Парето-оптимальны.

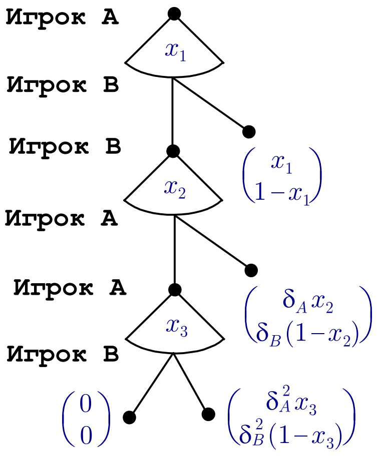


Рисунок 179

### Игра 15. «*Торг*»[265]

Два игрока ($A$ и $B$) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно $1$. Дележ можно задать долей, $x \in [0, 1]$, достающейся игроку $A$. Если игрок $A$ получает $x$, то игрок $B$, соответственно, получает $1 - x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ $x_j$, где $j$ — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j, 1 - x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок $A$ предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок $B$ — в раундах с четными номерами. Если за $n$ раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает $0$.

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается на дисконтирующий множитель, то есть если игроки договорятся на $j$–м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1} x_j$ и $\delta_B^{j-1}(1 - x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0, 1)$ — дисконтирующие множители. ⇦

Рассмотрим эту игру при $n = 3$. На Рис. 179 показано дерево игры.

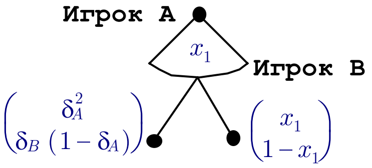


Рисунок 180

Проанализируем эту игру, используя обратную индукцию. В последнем раунде игрок $B$ заведомо примет предложение игрока $A$, если $\delta_B^2(1 - x_3) > 0$, т.е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку $B$ все равно, принять или отклонить предложение. Игроку $A$ выгодно назвать $x_3$ как можно бо́льшим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок $A$ тогда мог бы немного увеличить $x_3$, не изменив выбора игрока $B$, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок $B$ должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к $A$, то есть принять его предложение; в противном случае игрок $A$ мог бы предложить $x_3$ меньше $1$ и увеличить при этом свой выигрыш.

Анализ 3-го раунда показывает, что игрок $A$ должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок $B$ должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив 3-й раунд на конечный узел с выигрышами $\delta_A^2$ и $0$.

---

[265] Rubinstein, A. (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model," *Econometrica*, **50**, 97-109.

Во 2-м раунде игрок $A$ выбирает между $\delta_A^2$ (если отклоняет предложение) и $\delta_A\, x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку $A$ все равно, какой выбор сделать. Игрок $B$ предпочтет получить выигрыш $\delta_B\,(1 - x_2)$, а не $0$, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок $B$ в этом случае может уменьшить $x_2$, не меняя выбора игрока $A$, и, тем самым, увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок $A$ принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.[266]

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получат $\delta_A^2$ и $\delta_B\,(1 - \delta_A)$, если не придут к соглашению (см. Рис 180). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок $B$ примет дележ $x_1 = 1 - \delta_B\,(1 - \delta_A)$, предложенный игроком $A$. Выигрыши при этом составят $1 - \delta_B\,(1 - \delta_A)$ и $\delta_B\,(1 - \delta_A)$.

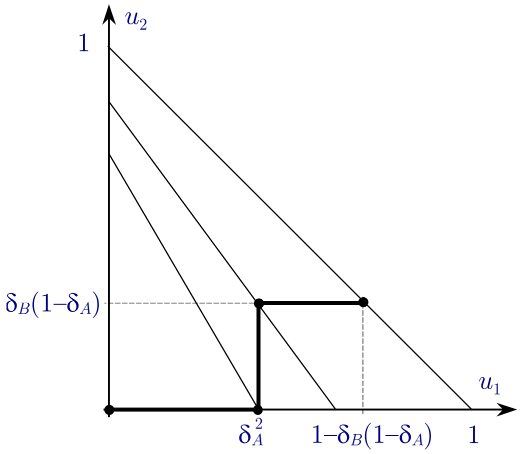


Рисунок 181

О торге в условиях полной информации можно сделать два замечания:

1) *Торг заканчивается на первом раунде.*

2) *Равновесный исход Парето-оптимален.*

Рис. 181 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n = 3$. На этом графике видно, как изменяется граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен толстой кривой, выходящей из начала координат.

## Задачи

44. Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в задаче 16 на стр. 650. Найдите в этой игре границу Парето. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

45. Объясните, почему в антагонистической игре (игре, в которой сумма выигрышей игроков — постоянная величина) любой исход является Парето-оптимальным.

46. Объясните, в чем состоит аналогия между аукционом, в котором игрок платит названную им цену, и игрой Ауманна (дилеммой заключенных). Представьте аукцион с двумя участниками как игру и сравните множество равновесий Нэша с границей Парето.

---

[266] Это довольно естественно, если взглянуть на ситуацию с той точки зрения, что игрок $B$ всегда может предложить игроку $A$ дележ $x_2 = \delta_A - \varepsilon$, где $\varepsilon$ — малое положительное число, тем самым гарантируя, что $A$ примет дележ. Число $\varepsilon$ здесь можно выбрать произвольно малым.

47. Рассчитайте общие выигрыши (в каждой из конечных вершин) в повторяющейся дважды игре Ауманна, изображенной на Рис. 178, считая, что дисконтирующие множители обоих игроков равны $1/2$.

48. При каких значениях дисконтирующих множителей пара стратегий следующего вида будет совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре Ауманна: «В первом раунде сотрудничать; в остальных раундах поступать так же, как другой игрок в предыдущем раунде»?[267]

49. Найдите совершенное в подыграх равновесие в бесконечно продолжающемся торге. Решение может опираться на тот факт, что через каждые два раунда подыгра, начинающаяся с текущей вершины, повторяет исходную игру с точностью до дисконтирования. Таким образом, естественно искать стационарное равновесие. Найдите такое равновесие и покажите, что оно является совершенным в подыграх равновесием. Будет ли это равновесие оптимальным по Парето?

---

[267] По-английски эту стратегию называют *tit-for-tat*, что может означать как «око за око», так и «услуга за услугу».

# Математическое приложение

## Свойства однородных функций

Напомним, что функция $\varphi(\boldsymbol{x})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется однородной степени $\alpha$, если для любого положительного числа $t$ выполнено

$$\varphi(t\boldsymbol{x}) = t^{\alpha}\varphi(\boldsymbol{x}).$$

**Теорема 1**. Дифференцируемая функция $\varphi(.)$ является однородной степени $\alpha$ тогда и только тогда, когда выполняется тождество (формула Эйлера)

$$\sum x_i \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha\,\varphi(\boldsymbol{x}).$$

**Теорема 2**. Если дифференцируемая функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ однородна степени $\alpha$, то ее производная $\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ $\forall i$ однородна степени $\alpha - 1$.

## Теорема Юнга

**Теорема 3**. (теорема Юнга)

Пусть функция $f$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

## Теоремы о неподвижной точке

**Теорема 4**. (теорема Брауэра)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и функция $f$: $A \to A$ непрерывна на $A$. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

**Теорема 5**. (теорема Какутани)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и $f$: $A \to A$ — полунепрерывное сверху отображение, такое что $f(\boldsymbol{x})$ — непустое выпуклое множество для любой точки $\boldsymbol{x} \in A$. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

## Теоремы отделимости

**Теорема 6**. (теорема Минковского)

Пусть имеются непустое замкнутое выпуклое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, не принадлежащая $C$. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и два числа $b_1$, $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 > b_2$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \geqslant b_1$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, y_i \leqslant b_2 \quad \forall \boldsymbol{y} \in C.$$

Пусть имеются непустое замкнутое выпуклое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, не принадлежащая $C$. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и число $b \in \mathbb{R}$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i > b$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, y_i \leqslant b \quad \forall \boldsymbol{y} \in C.$$

**Теорема 7**.

Пусть имеются два непустых выпуклых множества $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ не имеющие общих точек. Тогда найдется вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, и число $b \in \mathbb{R}$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \geqslant b \quad \forall x \in C_1.$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, y_i \leqslant b \quad \forall y \in C_2.$$

## Теорема об огибающей

В микроэкономическом анализе широко используется класс утверждений (называемых **теоремами об огибающей**) следующего типа:

Рассмотрим класс задач, зависящих от параметра $a$.

$$\phi(x_1, ..., x_n, a) \to \max$$

$$\psi_j(x_1, ..., x_n, a) = 0, j = 1, ..., m. \qquad (**)$$

**Теорема 8**.

Пусть $x(a)$ — решение задачи (**), $\lambda(a)$ — множители Лагранжа, соответствующие решению, и $l(a) = \phi(x(a), a)$.

Предположим, что в точке $a_0$ выполнены следующие свойства:

♣ функции $\phi(.)$ и $\psi_j(.)$ вогнуты и дифференцируемы,

♣ решение задачи существует и единственно и функция $x(.)$ дифференцируема, Тогда выполняется соотношение

$$\frac{dl}{da}(a_0) = \frac{\partial\phi}{\partial a}(x(a_0), a_0) + \sum_j \lambda_j(a_0)\frac{\partial\psi_i}{\partial a}(x(a_0), a_0).$$

## Теоремы о непрерывности выпуклой функции (на внутренности ее множества определения)

**Теорема 9**. Выпуклая (вогнутая) функция непрерывна на внутренности ее множества определения.

## Теоремы о дифференцируемости значения экстремальной задачи

Рассмотрим класс задач, зависящих от параметра $\boldsymbol{p} \subseteq \mathbb{R}^m$.

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \to \max_{\boldsymbol{x}} \qquad (***)$$

$$\boldsymbol{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Предположим, что эта задача имеет решение при всех $\boldsymbol{p} \in P$. а функция $\phi(\cdot)$ дифференцируема. Обозначим $l(\boldsymbol{p}) = \phi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \in P$.

**Теорема 10**.

Функция $l(\boldsymbol{p})$ имеет производную в точке $\boldsymbol{p} \in \operatorname{int} P$ тогда и только тогда, когда решение задачи $x(a)$ единственно.

## Теоремы о непрерывности решений задачи оптимизации

**Теорема 11**.

Пусть $x\,(p)$ – множество решений задачи

$u(x) \to \max_x$

$p\,x \leqslant \beta(p)$,

$x \in X$,

где $p \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $X$–замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $0 \in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на $X$.

Если функция $\beta(p)$ непрерывна и положительна при $p = \bar{p}$, , то функция $x\,(p)$ непрерывна в окрестности точки $\bar{p}$.

**Теорема 12**.

Пусть $x(p)$ — множество решений задачи

$u(x) \to \max_x$

$p\,x \leqslant \beta(p)$,

$x \in X$,

где $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $X$–замкнутое, выпуклое множество и $0 \in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на $X$.

Если функция $\beta(p)$ непрерывна и положительна при $p = \bar{p}$, , то функция $x\,(p)$ непрерывна в окрестности точки $\bar{p}$.

### Теорема 13.

Пусть $x\,(p)$ – множество решений задачи

$u(x)\to\max_x$

$p\,x \leqslant \beta(p)$,

$x \in X$,

где $p\in\mathbb{R}^n_+$, $X\subset\mathbb{R}^n$, $X$–замкнутое, выуклое и ограниченное множество и $0\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на $X$.

Если функция $\beta(p)$ непрерывна и положительна при $p = \bar{p}$, , то выпуклозначное отображение $x\,(p)$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{p}$.

### Теорема 14.

Пусть $x\,(p)$ – множество решений задачи

$u(x)\to\max_x$

$p\,x \leqslant \beta(p)$,

$x \in X$,

где $p\in\mathbb{R}^n_{++}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, $X$–замкнутое, выпуклое и множество и $0\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на $X$.

Если функция $\beta(p)$ непрерывна и положительна при $p = \bar{p}$, , то выпуклозначное отображение $x\,(p)$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{p}$.

Все эти теоремы являются вариантами известного утверждения Бержа:

### Теорема 15.

(Многозначное) отображение, которое ставит в соответствие параметру $\lambda$ множество точек, которые являются решениями следующей экстремальной задачи:

$$u(x, \lambda)\to\max_x$$

$$x \in X(\lambda)$$

является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, если отображение $X(\lambda)$, и функция $u(x, \lambda)$ непрерывны в окрестности этой точки.

В качестве следствия данной теоремы можно получить утверждение о том, что если это отображение однозначно в окрестности данной точки, т.е. является функцией, то такая функция является непрерывной в этой точке.

Напомним, что непрерывность многозначного отображения является следующим обобщением непрерывности функции: отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\varepsilon$-окрестность множества $X(\bar{\lambda})$ содержит множества $X(\lambda)$ для всех $\lambda$ из $\delta$-окрестности $\bar{\lambda}$; отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным снизу в точке $\bar{\lambda}$, для всякого ε>0 существует δ>0 такое, что для всех λ из δ-окрестности $\bar{\lambda}$ ε-окрестность множеств $X(\lambda)$ содержит $X(\bar{\lambda})$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно сверху и снизу одновременно.

Заметим, что поскольку постоянное отображение непрерывно, непрерывность (полунепрепрерывность сверху) функции (отображения) предложения гарантируется при существовании решения задачи потребителя (поскольку функция прибыли непрерывна как функция цен).

## Теоремы Куна — Таккера

Теоремы Куна — Таккера —родовое название для утверждений, представляющих собой обобщение теоремы Лагранжа на случай задач оптимизации с ограничениями в виде неравенств, т.е. задач следующего типа:

Пусть

$$\begin{gathered}\phi(\boldsymbol{x})\to\max\\ \psi_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ j=1,\dots,m,\\ \boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in X.\end{gathered}\qquad(*)$$

Здесь $\phi\colon X\mapsto\mathbb{R}$ — (в соответствие с установившейся терминологией) целевая функция, $\psi_r\colon X\mapsto\mathbb{R}$, $r=1,\dots,m$, функции ограничений $X\subseteq\mathbb{R}^n$.

Мы приведем эти утверждения для случая, когда функции $\phi$, $\psi_r$ дифференцируемы (теоремы Куна-Таккера в дифференциальной форме).

Напомним, что функция

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\lambda_0\phi(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\psi_j(\boldsymbol{x})$$

называется функцией Лагранжа (лагранжианом) этой задачи, а коэффициенты $\lambda_j$ — множителями Лагранжа.

Имеет место следующее утверждение.

### Теорема Джона.

Пусть функции $\phi(\cdot)$, $\psi_1(\cdot),\dots,\psi_n(\cdot)$ дифференцируемы, и $\bar{\boldsymbol{x}}$ — решение задачи (*), такое что $\bar{\boldsymbol{x}}\in\operatorname{int}(X)$.

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_j\geqslant 0$, $j=0,\dots,m$, не все равные нулю, такие что выполнены следующие соотношения (условия Куна — Таккера):

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i}=0,\ i=1,\dots,n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_j}\lambda_j=0$$

(условия дополняющей нежесткости).

Отметим, что условия дополняющей нежесткости можно записать в виде

$$\psi_j(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_j=0,\ j=1,\dots,m.$$

Из этих условий следует, что если множитель Лагранжа положителен ($\lambda_j > 0$), то соответствующее ограничение в решении задачи (при для $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$) выполняется как равенство (т.е. $\psi_j(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$). Другими словами, это ограничение активно. С другой стороны, в случае, когда $\psi_j(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$, то соответствующий множитель Лагранжа $\lambda_j$ равен нулю.

Если в задаче (*) часть ограничений имеет вид ограничений на неотрицательность некоторых $x_i$, то для них можно не вводить множители Лагранжа, записав такие ограничения отдельно:

$$\begin{gathered} \phi(\boldsymbol{x}) \to \max \\ \psi_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, m, \\ \boldsymbol{x} \in X, \\ x_i \geqslant 0,\ i \in P \subseteq \{1, \ldots, n\}. \end{gathered} \qquad (**)$$

Условия первого порядка для $i \in P$ тогда будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \leqslant 0.$$

Для $i \notin P$ здесь, как и в случае представления задачи в виде (*), производная функции Лагранжа по той переменной будет иметь вид $\dfrac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0.$

Кроме того, выполнены также условия дополняющей нежесткости

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \bar{x}_i = 0.$$

Из второго из этих условий следует, что при $\bar{x}_i > 0$

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0.$$

С другой стороны, если $\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}) / \partial x_i < 0$, то $\bar{x}_i$ должен быть равен нулю.

Другая модификация теоремы связана с наличием в задаче ограничений в виде равенств. Обозначим множество соответствующих индексов через $E$. Задача принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} \phi(\boldsymbol{x}) \to \max \\ \psi_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ j \in \{1, \ldots, m\} \backslash E, \\ \psi_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j \in E, \\ \boldsymbol{x} \in X, \\ x_i \geqslant 0,\ i \in P \subseteq \{1, \ldots, n\}. \end{gathered} \qquad (***)$$

При этом в теореме Джона снимается условие, что все множители Лагранжа неотрицательны — множители Лагранжа $\lambda_j$ при $j \in E$ могут иметь произвольный знак.

Теорема Джона не гарантирует, что множитель Лагранжа целевой функции, $\lambda_0$, отличен от нуля. Однако если $\lambda_0 = 0$, то условия Куна-Таккера характеризуют не решение рассматриваемой задачи, а структуру множества ограничений в точке $\bar{x}$ и теорема не имеет непосредственной связи с интересующей нас задачей максимизации функции $\phi(\cdot)$, поскольку градиент самой функции $\phi(\cdot)$ «пропадает» из условий Куна — Таккера. Поэтому важно охарактеризовать условия, которые гарантируют, что $\lambda_0 > 0$. Такие условия называются условиями регулярности.

Одно из условий регулярности формулируется следующим образом: градиенты активных ограничений в точке $\bar{\boldsymbol{x}}$ линейно независимы.

Обозначим через $A$ множество индексов тех ограничений, которые в точке оптимума $\bar{\boldsymbol{x}}$ активны, т.е.

$$\psi_j(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \Leftrightarrow j \in A.$$

Тогда если градиенты ограничений — векторы

$$\{\nabla \psi_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}_{j \in A}$$

линейно независимы, то $\lambda_0 > 0$.

Заметим, что если $\lambda_0 > 0$, то без потери общности можно считать $\lambda_0 = 1$, что обычно и делается. Соответствующую теорему и называют собственно (прямой) теоремой Куна — Таккера.

**Прямая теорема Куна — Таккера** (необходимое условие оптимальности)

Пусть функции $\phi(\cdot),\ \psi_1(\cdot), \ldots, \psi_n(\cdot)$ дифференцируемы, и $\bar{\boldsymbol{x}}$ — решение задачи (*), такое что $\bar{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{int}(X)$ и выполнено условие регулярности указанного типа.

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие что при $\lambda_0 = 1$ выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,\ i=1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0.$$

Несложно переформулировать эту теорему для задач (**) и (***). Здесь требуются такие же модификации условий Куна — Таккера, как и в теореме Джона.

Условие

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,\ i=1, \ldots, n$$

можно переписать в виде:

$$\nabla \phi(\bar{\boldsymbol{x}}) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla \psi_j(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

Это соотношение показывает, что в точке оптимума градиент целевой функции является линейной комбинацией градиентов ограничений, причем все коэффициенты этой линейной комбинации неположительны.

Один из вариантов обратной теорема Куна — Таккера утверждает, что при вогнутости функций $\phi(\cdot),\ \{\psi_k(\cdot)\}$ выполнение этих условий в допустимом решении $\bar{\boldsymbol{x}}$ (т.е. точке, удовлетворяющей ограничениям) при некоторых множителях Лагранжа, удовлетворяющих требованиям прямой теоремы, гарантирует, что $\bar{\boldsymbol{x}}$ является решением задачи.

**Обратная теорема Куна–Таккера** (достаточное условие оптимальности)

Пусть функции $\phi(\cdot), \psi_1(\cdot), \ldots, \psi_n(\cdot)$ дифференцируемы и вогнуты, множество $X$ выпукло и точка $\bar{\boldsymbol{x}}$ допустима в задаче (*), причем $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{int}(X)$.

Пусть, кроме того, существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j=1, \ldots, m$, такие что при $\lambda_0 = 1$ выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, \; i=1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0.$$

Тогда $\bar{\boldsymbol{x}}$ — решение задачи (*).

Теорему можно очевидным образом переформулировать для задач (**) и (***).