К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНИК

4-е издание, стереотипное

Под общей редакцией доктора экономических наук,
профессора К.В. Балдина

Рекомендовано Редакционно-издательским советом Российской академии образования к использованию в качестве учебника

Москва
Издательство «ФЛИНТА»
2015

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
Б20

Балдин К.В.

Б20 Методы оптимальных решений [Электронный ресурс]: учебник / К.В. Балдин,В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев; под общ. ред. К.В. Бал дина. – 4-е изд., стер. – М.: ФЛИНТА, 2015. – 328 с.

ISBN 978-5-9765-2068-4

Настоящий учебник подготовлен в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом. В учебнике рассматриваются теоретические основы исследования экономических операций с позиций методологии системного анализа. Представлены методы решения задач линейного, нелинейного и целочисленного программирования. Рассматриваются проблемы применения известных методов и моделей теории игр в разработке рациональных управленческих решений в детерминированных и неопределенных условиях. Представлены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям бакалавриата «Экономика», «Менеджмент».

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9765-2068-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач этого класса разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ. Линейное программирование представляет собой важнейшую часть математической дисциплины, занимающейся изучением решения экстремальных задач. В общем виде вербальная постановка задач линейного программирования состоит в нахождении наибольшего или наименьшего значения целевой функции при заданных ограничениях.

Цель данного учебника заключается в формировании у студентов навыков постановки задач оптимизации на вербальном и математическом уровне, а также решении задач предлагаемыми методами и соответствующей интерпретации полученных результатов. В книге использована единая общепризнанная терминология и система обозначений, что позволяет студентам применять методы оптимизации как средство обоснования управленческих решений.

Первые главы посвящены методологическим основам использования экономических операций, а также системному подходу к организации проведения комплексного экономического анализа управленческих решений. В последующих главах представлены методы решения задач линейного и целочисленного линейного программирования. С задачей ЛП можно сопоставить некоторую другую задачу, двойственную к исходной. В этой связи важное значение имеют методы решения двойственной задачи ЛП, а также анализ чувствительности задачи линейного программирования.

В последующих главах отражены методы решения специальных задач ЛП транспортного типа. Дальнейшее развитие получила концептуальная и математическая постановка оптимального планирования однопродуктовой и многопродуктовой транспортной задачи. Представлены методы и модели нелинейного программирования, сетевого планирования и управления, теории игр и системы массового обслуживания. Приведены технологии разработки и принятия эффективных управленческих решений в условиях определенности, а также в условиях вероятностной, поведенческой и природной неопределенностей.

Введение и главы: 1, 2, 9, 10 написаны К.В. Балдиным, а главы: 3, 4, 5, 6 – А.В. Рукосуевым. В.Н. Башлыковым написаны главы 7, 8, 11.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДЗЛП – двойственная задача линейного программирования
ЗЛП – задача линейного программирования
ДП – динамическое программирование
ИО – исследование операций
КЭА – комплексный экономический анализ
ЛП – линейное программирование
ЛПР – лицо принимающее решение
МТС – материально-технические средства
НДБР – начальное допустимое базисное решение
НЛП – нелинейное программирование
ОДР – область допустимых решений
ОФ – ограничивающая функция
ПЗЛП – прямая задача линейного программирования
ППП – пакет прикладных программ
ПЭВМ – персональная электронно-вычислительная машина
СМ – симплекс-метод
СПУ – сетевое планирование и управление
ТЗЛП – транспортная задача линейного программирования
ТПР – теория принятия решений
ТМО – теория массового обслуживания
ЦЛП – целочисленное линейное программирование
ЦФ – целевая функция
ЭВМ – электронно-вычислительная машина
ЭВТ – электронно-вычислительная техника
ЭИС – экономическая информационная система

1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

1.1. Цели, задачи и принципы исследования экономических операций

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации экономических операций, а также прогнозирования их результата при принятии руководством различных решений. Однако с течением времени стало очевидно, что подобные организационные задачи (согласования, упорядочения, распределения и др.) возникают и в других, самых различных сферах человеческой деятельности и имеют, несмотря на их качественное различие, сходные черты. Во-первых, во всех этих задачах рассматривается некоторая совокупность мероприятий (система действий), направленных на достижение конкретной цели. Во-вторых, считаются заданными некоторые фиксированные условия, характеризующие обстановку выполнения этих мероприятий и изменить которые не представляется возможным (например, отпущенные средства, располагаемые ресурсы, качественные характеристики используемых технических средств и др.). В-третьих, в рамках этих фиксированных условий необходимо принимать решения с тем, чтобы рассматриваемая совокупность мероприятий была в определенном смысле наиболее выгодной. Этой общности оказалось достаточно для построения единой системы методов, которые и стали называться «исследованием операций» (ИО).

Под операцией в данном случае понимается система действий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение определенной цели. Операция – это обобщенное понятие, охватывающее все те виды деятельности человека, непременным атрибутом которых является принятие решений. Примеры экономических операций: анализ финансово-хозяйственной деятельности предприятия, анализ эффективности привлекательности инвестиционного проекта.

Принятие решения по своей сути представляет собой выбор одного из множества возможных вариантов осуществления операции. Способность делать правильный выбор – ценное качество, которое присуще людям в разной степени. Высокопрофессиональные менеджеры, например, отличались и отличаются от своих коллег или конкурентов прежде всего умением делать наилучший выбор, т.е. принимать лучшие решения. Но всякое решение будет тем более разумным, чем более оно будет подкреплено количественными, математическими расчетами. Для проведения таких расчетов и служат методы исследования операций. Таким образом, в современном понимании *исследование операций – это научный метод, дающий в распоряжение руководителя количественные основания для принятия им решений, связанных с организацией и осуществлением операции.*

Объектом исследования операций является операция, а в качестве *предмета* исследования операций выступают закономерности, связывающие организацию и условия проведения операции с ее конечным результатом.

Необходимо подчеркнуть, что процедура непосредственного принятия решений выходит за рамки исследования операций, и процесс исследования завершается представлением руководителю рекомендаций, полученных на основе применения математических методов. Поэтому *цель исследования операций* заключается в выработке научно-обоснованных рекомендаций для принятия решений.

Операция, как правило, всегда проводится при фиксированных условиях, т.е. управление ею осуществляется в рамках имеющихся различного рода ограничений: социальных, экономических, технических, финансовых, материальных, людских и т.д. Исходя из этого основной *задачей исследования операций* можно считать выявление и количественное обоснование наилучших вариантов проведения операции в условиях существования различных ограничений.

Методологическую основу исследования операций составляет *системный анализ* как совокупность методологических средств, используемых для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам различного, в том числе и военного, характера. Системное представление любого объекта, в том числе и операции, требует рассмотреть этот объект в трех аспектах: как нечто целое (систему); как часть наиболее общей системы (надсистемы или более масштабной операции); как совокупность более мелких частей (элементов, подсистем, подопераций). Здесь уместно привести слова известного историка Л.Н. Гумилева о сути системного анализа: «Изучение любой системы целесообразно лишь в целом. Даже если нас интересует только какая-нибудь деталь, то все равно надо окинуть взором всю систему, найти место этой детали, установить ее соподчиненность в системной иерархии, взаимосвязи, а уж потом говорить о той части, которая заставила поставить проблему».

В следующем разделе будет рассмотрено применение системного подхода к организации комплексного экономического анализа управленческих решений.

Практическая реализация методологии системного анализа при проведении исследования конкретной операции заключается в том, чтобы придерживаться определенных принципов: цели, внешнего дополнения, декомпозиции, целостности. Принцип – это всякое основание, из которого надо исходить и которым необходимо руководствоваться в деятельности для достижения успеха.

Принцип цели является важнейшим принципом системного анализа, на основании которого происходит объединение экономических объектов и разрозненных действий людей по их использованию в единую целенаправленную деятельность, т.е. в экономическую операцию. Исходя из этого принципа необходимо в первую очередь определить цели предстоящей операции. До тех пор, пока цель не определена, нет смысла говорить вообще о какой-либо операции. Важность этого состоит еще и в том, что формулирование цели является исходным моментом всего последующего процесса исследования конкретной операции. Однако *выявление и формулирование цели операции не входит в рамки исследования операций,* и эти вопросы являются предметом изучения других наук, например теории принятия решений. Для операций экономического характера цель может быть представлена в форме задачи, поставленной вышестоящим руководителем, менеджером и т.д.

Принцип декомпозиции выступает как основание для снижения сложности процесса исследования операций. В соответствии с этим принципом процесс исследования операции может быть расчленен на три взаимосвязанных уровня: концептуальный, операциональный и детальный (так называемая вертикальная декомпозиция). Исследуемая операция фиксируется в этом случае на операциональном уровне, концептуальный уровень формируется для вскрытия целей операции, а с детального уровня привлекается информация о составе и структуре средств, используемых в операции. «Горизонтальная» декомпозиция предполагает разбиение операции, рассматриваемой в данном случае на операциональном уровне, на отдельные составляющие ее элементы и подпроцессы.

В качестве элементов рассматривают активные средства операции, условия и способы ее проведения, а среди процессов, сопровождающих операцию, выделяют целевые подпроцессы, непосредственно приводящие к требуемому результату, и функциональные, обеспечивающие целевые подпроцессы. Естественно, что исследовать отдельные элементы и подпроцессы операции несравненно легче, чем всю операцию в целом. Таким образом, процесс исследования операции носит иерархический характер («вертикальная» декомпозиция), т.е. осуществляется последовательное привлечение необходимой информации от выше- и нижележащих уровней исследования с детализацией ее на рассматриваемом уровне («горизонтальная» декомпозиция). Однако декомпозиция операции по ее элементам и подпроцессам в последующем требует их объединения с целью восстановления эмерджентных свойств, знание которых способствует выявлению наиболее рациональных способов проведения операции. Объединение элементов операции является отражением уже другого принципа – *принципа целостности*, следование которому требует выявления *эмерджентных* (от англ. *emergency* – внезапное появление) свойств операции. Эмерджентность проявляется в том, что свойства операции не выступают простой суммой свойств отдельных элементов операции.

В основе декомпозиции процесса исследования операции лежит важнейший общесистемный *принцип внешнего дополнения*. Руководствуясь этим принципом, необходимо выявить всю совокупность, систему проводимых или планируемых операций, определить масштаб исследуемой операции и ее место в этой системе, установить ее соподчиненность и взаимосвязи с другими операциями. Внешнее дополнение позволяет сформулировать цели исследуемой операции, согласовать их с целями других, более масштабных операций, а также ввести объективные критерии для оценки степени их достижения. Эти действия выполняются на концептуальном уровне, и, например, роль внешнего дополнения при исследовании операций экономического характера, как правило, играет вышестоящее руководство (см. принцип цели). На операциональном уровне роль внешнего дополнения принадлежит тому лицу, которое будет принимать решение, и именно оно определяет состав и структуру активных средств исследуемой операции, а также степень их участия в ней.

Содержанием исследования операций с теоретической точки зрения является математический анализ оптимизационных задач, т.е. задач, в которых осуществляется процесс поиска *оптимальных решений*, нахождение их, разработка новых и совершенствование существующих *методов оптимизации*. *Оптимальным* (от лат. *optimus* – наилучший) *называется такое решение, которое обеспечивает наибольшую в определенном смысле выгодность, полезность операции.* Поэтому исследование операций иногда называют теорией принятия оптимальных решений. Именно в интересах поиска оптимальных решений разрабатываются методы оптимизации.

Методы оптимизации – это методы построения алгоритмов нахождения экстремумов функций и точек, в которых они достигаются, при наличии ограничений и без них. Понятие «оптимум» является более содержательным, чем «экстремум».

С практической точки зрения содержание исследования операций состоит в составлении оптимизационных задач и в нахождении их оптимальных решений.

Основным *методом исследования операций* является математическое моделирование как метод исследования целенаправленных процессов путем построения и изучения их моделей. Разработка математических моделей требует привлечения определенного математического аппарата, составляющего математическую основу исследования операций. Это те разделы математики, которые были созданы независимо от исследования операций, но аппарат которых систематически употребляется для решения задач исследования операций. В настоящее время математическую основу исследования операций составляют математический анализ (вместе с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационным исчислением), теория вероятностей, линейная алгебра и др.

Основными *средствами исследования операций* следует считать математические модели и методы. *Математическая модель* является основным теоретическим инструментом, позволяющим рассматривать операцию как единое целое, и *представляет собой записанную в математических символах абстракцию реального явления, конструируемую так, чтобы ее анализ давал возможность проникнуть в сущность яв-*

ления. Конечной целью разработки математических моделей является выработка рекомендаций по принятию решения, прогноз результатов проведения операции и определение возможных воздействий на ход ее проведения. Математическими методами исследования операций принято называть те разделы математики, которые специально разработаны для решения задач исследования операций. В настоящее время их основу составляют *методы оптимизации.*

1.2. Основные понятия исследования операций

Главным субъектом всякого решения выступает лицо, принимающее решение (ЛПР). Это собирательный образ, за которым может стоять либо одно лицо (например, руководитель), либо группа лиц (например, совет директоров, совет учредителей и т.д.), вырабатывающих в этом случае коллективное решение. ЛПР выполняет основную роль при принятии решения, оно облечено властью, имеет в своем распоряжении различного рода силы и средства (располагает возможностями), обеспечено необходимой информацией и несет ответственность за принимаемые решения. Исследование операций всегда проводится только в интересах ЛПР.

Однако учесть все особенности исследуемой операции, глубоко разобраться в целях операции, способах их достижения и иных обстоятельствах, связанных с выбором решения, одному человеку, пусть даже и подготовленному, зачастую очень трудно. В этом случае для помощи ЛПР привлекается исследователь (или группа исследователей) – специалист в области исследования операций. Задача исследователя заключается в том, чтобы с использованием математических моделей и методов обосновать рациональные способы использования ресурсов, обеспечивающие достижение установленных целей. Он не принимает ответственных решений, а только помогает ЛПР в этом, выдавая ему рекомендации, необходимые для принятия таких решений. По сути, исследователь, обладая необходимыми знаниями и навыками в рассматриваемой предметной области, несет на себе основную нагрузку исследования, и весь процесс исследования операции проводится им исходя из той информации, которую ему предоставляет ЛПР.

Процесс исследования операций начинается с того момента, когда ЛПР четко и однозначно сформулирует исследователю цель операции.

Под целью операции обычно понимают некоторый требуемый результат деятельности, моделирующий «желательное» для ЛПР состояние. Это «желательное» состояние может быть намечено самим ЛПР исходя из решаемой задачи, исходной обстановки и будущего развития ситуации, либо может быть задано внешне (например, в форме задачи, поставленной вышестоящим руководителем). Цель операции формулируется вербально.

Любую операцию следует рассматривать как целенаправленный процесс преобразования различных видов ресурсов в требуемый результат. Для осуществления такого преобразования необходимы активные средства, к которым в операциях экономического характера относятся *экономические информационные системы* (ЭИС) и *ресурсы*. *Экономические информационные системы – это совокупность взаимосвязанных технически программных объектов и персонала, объединенных для решения задач экономического характера. Под ресурсами обычно понимаются источники, запасы материальных, технических, денежных, энергетических и других средств, а также внутренние резервы и возможности ЭИС.*

Допустимые способы использования активных средств являются стратегиями (альтернативами, вариантами решения) ЛПР в данной операции. Множество допустимых стратегий обозначим через $U = \{u\}$. Слово «допустимые» в данном выше определении следует понимать как не выходящие за пределы технических, экономических, физических возможностей (ограничений). Среди допустимых стратегий U обычно находятся и оптимальные стратегии $u^* \in U^* \in U$, превосходящие остальные по каким-либо признакам. *Под способами обычно понимаются порядок и приемы использования активных средств.* Порядок определяется либо последовательностью выполнения мероприятий, в которых задействуются активные средства, либо установлением количественных соотношений между распределяемыми ресурсами. Содержательно различающихся друг от друга способов может быть немного, а вот способов, отличающихся лишь количественными параметрами, может быть бесконечное множество. Принятие решения – это волевой акт, совершаемый ЛПР и заключающийся в выборе им наилучшей, по его представлениям, стратегии проведения операции. Примерами стратегий могут быть: принятая последовательность выхода предприятия из состояния банкротства, количество привлекаемых инвестиций, методы проведения анализа финансового предприятия и т.д.

Всякая операция представляет собой процесс, осуществляемый во времени, проходящий различные этапы развития и завершающийся получением конечного *результата*. *Результат операции – это полученные посредством деятельности характеристики итогового состояния операции, в том числе и не предусмотренные сознанием в виде цели деятельности. Вербальное описание конечного результата операции называется ее исходом (конечным итогом).* Между стратегией проведения операции и ее исходом существует некоторая взаимосвязь, условно называемая «механизмом ситуации». Различают два типа этих «механизмов»: детерминистский (условия определенности) и неопределенный (условия неопределенности). Условия определенности характеризуются тем, что ЛПР (и исследователь) имеют ясное представление о том, к какому конкретному исходу операции приведет та или иная стратегия ее проведения. Для условий неопределенности подобная ясность отсутствует. *Методы оптимизации* применимы, как правило, в рамках детерминистского «механизма ситуации».

Исход операции зависит от множества различных по своей природе *факторов*, характеризующих качество, способы и условия использования активных средств, задействуемых ЛПР в операции. *Под факторами операции понимаются объективные условия и обстоятельства, определяющие ее особенности и непосредственно влияющие на ее исход.* Из множества факторов выделяются подмножества управляемых и неуправляемых факторов. К управляемым относятся те факторы, на которые ЛПР способно влиять по своему усмотрению в интересах достижения цели операции. Отнесение тех или иных факторов к управляемым или неуправляемым определяется постановкой задачи исследования. Стратегия как установленный порядок использования активных средств может характеризоваться набором величин, или вектором, $X = (x_1, x_2,...,x_n)^{т}$, являющихся формальным отображением множества управляемых факторов.

Принятие решения представляет собой выбор ЛПР одной или нескольких наилучших стратегий из множества *допустимых*. Формальное представление множества допустимых стратегий U производится заданием ограничений на значения компонент вектора $X = (x_1, x_2,...,x_n)^{т}$, которые, как правило, имеют вид уравнений или неравенств:

$$g(X) \leq 0;\ h(X) = 0,$$

где $g(X)$ и $h(X)$ – векторы: $g(X) = (g_1(X), g_2(X),...,g_k(X))^{т}$ и $h(X) = (h_{k+1}(X), h_{k+2}(X),...,h_m(X))^{т}$.

Для осуществления такого выбора должен быть разработан способ сравнения стратегий между собой и определения, с точки зрения ЛПР, наиболее предпочтительных. Существо этого способа в том, что каждую отдельную стратегию $u \in U$ оценивают конкретным показателем, и сравнение стратегий, таким образом, сводится к сравнению соответствующих им показателей. *Показатель – это специальная числовая функция, заданная на множестве стратегий и позволяющая различать стратегии по предпочтительности.* Показатель может быть скалярным и векторным. В той части теории исследования операций, которая связана с применением рассматриваемых в настоящем учебнике *методов оптимизации*, показатель всегда является скалярным и носит название целевой функции $y(u)$. Те числовые значения, которые эта функция принимает, называются *оценками* целевой функции.

Выбор конкретной наилучшей стратегии осуществляется по определенным правилам, называемым критериями. Критерий выбирается на основе *принципов рационального поведения*. Рациональность в поведении ЛПР означает, что он стремится выбирать и реализовывать лишь те стратегии, которые приведут его к наиболее предпочтительным для него исходам. *Под принципами рационального поведения понимаются некоторые основания, по которым те или иные стратегии ЛПР квалифицирует как наиболее предпочтительные.* Различают два принципа рационального поведения: пригодности и оптимальности.

В соответствии с принципом пригодности рациональной $u^{п} \in U$ будет считаться такая стратегия проведения операции, для которой оценка показателя выбора $y(u)$ будет превышать некоторое наперед заданное (требуемое) значение $y_{тр}$, т.е. $u^{п}$: $y(u) \geq y_{тр}$. Критерий выбора, основанный на принципе пригодности, приводит, как правило, к отбору не самой лучшей стратегии проведения операции.

В *принципе оптимальности* находят отражение черты интуитивного понимания любым человеком наиболее выгодного, разумного, справедливого. Как правило, человека чаще всего устраивает только наилучший из всех возможных вариантов событий. Принцип оптимальности является *ведущим* в теории исследования операций. Критерий, выбранный на основе этого принципа, предусматривает выбор таких стратегий, которые характеризуются экстремальным значением целевой функции, т.е.

$$u^* = \underset{u \in U}{arg\ extr}\ y(u),$$

где $extr = \{max, min\}$.

Критерий и показатель выбора стратегий являются математической моделью цели операции. Это означает, что при заданном критерии именно по количественному значению целевой функции ЛПР может судить о степени достижения цели операции.

Формально задача исследования операций сводится к заданию в явном виде связей между характеристиками управляемых факторов X стратегий $u \in U$, характеристиками детерминированных неуправляемых факторов и значениями целевой функции $y(u)$ и формулировке ее как оптимизационной:

определить $u^* = \underset{u \in U}{arg\ extr}\ y(u)$,

где $y(u) = f(X)$, $U = \{u = (x_1, x_2, .., x_n) \mid g(X) \le 0; h(X) = 0\}$.

Решение, связанное с выбранной математической моделью, составляют:

1) конкретный набор значений управляемых параметров, характеризующих оптимальную стратегию, т.е. $u^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$;

2) значение целевой функции $y(u^*) = f(X^*)$.

Оптимизация – это мощное средство решения проблем, но использовать его следует все более осторожно по мере возрастания их сложности. Методы оптимизации, как и любые другие, имеют определенные недостатки:

1) «хрупкость» оптимального решения: незначительные на первый взгляд изменения в условиях задачи (исходных данных) могут привести к выбору существенно различающихся стратегий;

2) нахождение оптимального значения целевой функции в соответствии с принятым критерием часто отождествляется с целью, а на самом деле цель операции и целевая функция с критерием оптимальности относятся друг к другу как модель и оригинал;

3) методы оптимизации не позволяют учитывать психологические особенности ЛПР, и именно с этим связаны самые большие неудачи исследования операций. Целевая функция и критерий оптимальности лишь косвенно, приближенно характеризуют цель, формулируемую ЛПР вербально в соответствии со своими представлениями о способах

разрешения проблемы. Человек в задачах ИО выступает как «механический» элемент, придаток сложных систем.

1.3. Классификация методов оптимизации и их краткая характеристика

Классификация – распределение предметов какого-либо рода на классы согласно наиболее существенным признакам, присущим предметам данного рода и отличающим их от предметов других родов, при этом каждый класс занимает в получившейся системе определенное постоянное место и делится на подклассы.

Классификация методов оптимизации может осуществляться по различным признакам. По признаку наличия или отсутствия ограничений в сформированных задачах исследования операций все методы оптимизации делятся на два класса – условной и безусловной оптимизации. Методы безусловной оптимизации предназначены для поиска оптимального значения целевой функции при отсутствии ограничений, накладываемых на управляемые переменные. Методы же условной оптимизации, напротив, ориентированы на нахождение оптимального значения целевой функции при наличии ограничений.

По способам нахождения экстремумов целевой функции методы как условной, так и безусловной оптимизации делятся на численные и аналитические. Классификация методов оптимизации приведена в табл. 1.1. Аналитические методы безусловной оптимизации рассматриваются, как правило, в курсе дифференциального и интегрального исчисления.

К численным методам безусловной оптимизации относятся методы решения задач нелинейного программирования без ограничений. Эти методы делятся на две группы: методы, использующие в процессе поиска производные, и методы, не использующие производные (методы поиска). Численные методы условной оптимизации рассматриваются в рамках методов математического программирования. В настоящее время математическое программирование – это самостоятельная математическая дисциплина, посвященная теории и методам нахождения экстремума функций многих переменных при наличии ограничений на эти переменные в форме уравнений или неравенств.

К аналитическим методам условной оптимизации следует отнести лишь один метод – множителей Лагранжа. Применение этого метода сопряжено с определенными трудностями: во-первых, он применим лишь к задачам, содержащим ограничения в виде уравнений, и, во-вторых, не всякая целевая функция может иметь производные, удобные для работы с ними.

Таблица 1.1

Классификация методов оптимизации

<table>
<tr><td colspan="4">Методы оптимизации</td></tr>
<tr><td colspan="2">Методы безусловной оптимизации</td><td colspan="2">Методы условной оптимизации</td></tr>
<tr><td>Аналитические</td><td colspan="2">Численные</td><td>Аналитические</td></tr>
<tr><td>Классические методы поиска экстремума функций одной или нескольких переменных</td><td>Методы поиска; методы, использующие производные</td><td>Методы математического программирования (линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, стохастическое программирование и др.)</td><td>Метод множителей Лагранжа</td></tr>
</table>

Методика составления и решения задач исследования операций обусловлена некоторыми характерными для таких задач чертами. Во-первых, задачи ИО в подавляющем большинстве случаев не поддаются аналитическому решению и должны решаться численными методами. Во-вторых, численное решение задач ИО возможно только с использованием ЭВТ.

Помимо перечисленных методов существуют и другие, которые эффективно применяются при решении задач оптимизации. К ним относятся *графические методы,* основанные на графическом изображении функции, подлежащей максимизации или минимизации, в зависимости от одной или нескольких переменных. Преимущество этих методов в том, что они просты и сразу показывают, существует ли решение. Однако и применимость этих методов ограничена функциями одной или двух переменных. Другую группу составляют *экспериментальные* *методы*. Существо в том, что экстремум целевой функции ищется в непосредственных экспериментах с реальными переменными вместо использования для этих целей математических моделей.

1.4. Методика проведения исследования операций

Всякое деление процессов на этапы носит условный характер и определяется целями такого деления. Приводимое ниже выделение этапов исследования операций проводится с целью установления логически обоснованной последовательности действий при решении конкретных задач. Условность деления заключается в том, что строгое следование от одного этапа к другому не всегда выполнимо и на некоторых этапах возникает необходимость возвращения к уже пройденным этапам или отдельным элементарным операциям. Тем не менее последовательное выполнение приводимых ниже этапов позволяет облегчить процедуру решения задачи исследования операций.

Этап 1. Вербальная (содержательная) постановка задачи.

Цель этапа – систематизация всех сведений и данных, содержащихся в исходной задаче. Здесь возможны наиболее интенсивные контакты между исследователем и ЛПР, заинтересованным в решении поставленной задачи. От того, насколько качественно будет выполнен первый этап, зависит успешность всего процесса исследования операций.

На этом этапе выполняются следующие действия:

1) формулирование цели операции в виде ответов на вопросы: что сделать? где сделать? к какому сроку?, а также уяснение содержания операции;

2) определение цели моделирования;

3) определение присущих операции условий ее проведения, что выражается в установлении активных средств и обстановки;

4) выявление возможных стратегий проведения операции, т.е. установление порядка использования активных средств. Этап завершается вербальной (содержательной) формулировкой цели проведения операции, что необходимо для лучшего понимания сущности поставленной задачи.

Этап 2. Формализация задачи, или построение математической модели.

Общих способов построения математических моделей до сих пор не существует, и в каждом конкретном случае модель строится, исходя из целевой направленности операции и задачи научного исследования с учетом требуемой точности решения, а также точности, с какой могут быть известны исходные данные. Иными словами, составление математических моделей есть искусство, и опыт в этом деле может быть приобретен лишь постепенно.

На этом этапе выполняются:

1) определение размерности задачи. Размерность задачи, как правило, связана с конкретными видами деятельности или способами использования активных средств;

2) введение необходимых обозначений, при этом вводятся символы и идентификаторы, обозначающие элементы исходной задачи. Здесь же, по возможности, осуществляется и классификация принятых обозначений в соответствии с разделением факторов на управляемые и неуправляемые;

3) выбор характеристик операции, обозначающих результаты. На этом этапе четко формулируются результаты операции, строится, по возможности, целевая функция $y(u)$ и устанавливаются направления предпочтения на них, т.е. формируется и критерий выбора наилучшей стратегии;

4) формулирование ограничений задачи, при этом записывается система уравнений и неравенств, моделирующих условия достижения цели и действие объективных законов. Система уравнений и неравенств может быть построена на основе :

- аналитических выражений, вытекающих из объективных физических законов;
- эмпирических выражений, вытекающих из результатов экспериментов;
- нормативных соотношений, устанавливаемых директивными документами;

5) установление «временного горизонта», т.е. определение того интервала времени, в течение которого (или на который) будут справедливы полученные решения;

6) формулировка задачи математического программирования. Формулирование задачи выполняется на математическом языке без привяз-

ки к условиям конкретной задачи исследования операций, например: *определить значения управляемых переменных* $X = (x_1, x_2,...,x_n)^{т}$, *доставляющих экстремум заданной целевой функции* $y(u)$ *на заданном множестве стратегий* $U = \{u\}$.

Этап 3. Установление типа математической модели и решение поставленной задачи с использованием соответствующего метода оптимизации.

Результат решения поставленной задачи, как было отмечено ранее, включает в себя два основных элемента:

1) оптимальную стратегию, характеризуемую вектором значений управляемых переменных: $u^* = (x_1, x_2,...,x_n)$;

2) оптимальное значение целевой функции $y(u^*)$.

Эти элементы составляют формальное решение и используются затем при выработке рекомендаций ЛПР для принятия им принципиального (ответственного) решения.

Этап 4. Проверка модели на непротиворечивость, чувствительность, реалистичность и работоспособность.

При проверке модели на непротиворечивость выясняется, не дает ли модель результаты, противоречащие логике при изменении некоторых важнейших параметров, особенно вблизи их граничных значений.

Проверка модели на чувствительность имеет своей целью выявить, как реагируют и реагируют ли вообще выходные данные модели на изменения входных данных.

Проверка на реалистичность позволяет установить соответствие модели частным случаям, для которых уже имеются фактические данные.

Основная цель проверки модели на работоспособность состоит в выяснении возможности получать результаты в сжатые сроки, а также в установлении величины затрат и ресурсов на ее эксплуатацию.

Этап 5. Реализация результатов исследования операций. Для исследователя реализация результатов исследования операции заключается в выработке рекомендаций ЛПР для принятия им обоснованных решений. Эти рекомендации по проведению операции могут содержать несколько последовательно излагаемых (письменно или устно) сообщений:

1) краткое повторение условий исходной задачи;

2) изложение полученных рекомендаций и их краткое обоснование;

3) соображения по границам их применимости;

4) соображения по возможному влиянию различных способов использования активных средств на результат операции;

5) рекомендации для конкретного действия.

Как правило, для исследования операции привлекается группа исследователей, в которую включаются специалисты из различных областей знаний. Поэтому выполнение всех перечисленных этапов исследования операций должно происходить при условии четкой координации и слаженности работы всех членов исследовательской группы.

2. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ОРГАНИЗАЦИИ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

2.1. Ключевые понятия системного подхода

Реакция всякого субъекта на проекты, подобные организации проведения комплексного экономического анализа управленческих решений, чаще всего выражается таким понятием, как сложность. Сложным мы называем все то, что не охватывается сознанием как нечто целое и обозримое в своих границах. В этом суждении отражается существо проблемы сложности: она напрямую связана с свойством субъекта. Чем мощнее способности удержания целого, тем реже явления осознаются как сложные. Но каким бы развитым ни было сознание, существуют объективные ограничения на свойство удержания целого там, где имеет место большое разнообразие компонентов наблюдаемого.

Именно по отношению к таким ситуациям с 50-х годов XX в. разрабатывается и в основном разработана технология исследования сложных явлений (объектов) посредством расчленения их на простые, доступные осмыслению и связанные части. Она получила название «системная технология по этимологическому значению ее основной идеи – идеи системы» .

Использование для исследования сложного объекта его представления в виде системы (греч. *systema* – целое, составленное из частей), т.е. его метафизического образа, позволяет упростить сложность при сохранении существенного в исследуемом объекте. Технология исследований в целом – подход к исследованию объектов, основанный на представлении их в виде систем, получил название системного подхода. Таким образом, происхождение системного подхода следует рассматривать как реакцию исследователей на феномен возрастающей сложности мира.

Центральным понятием системного подхода является *система* и связанные с ней близкие понятия – *сложная система*, *большая система*, *открытая система* и т.д. (рис. 2.1).

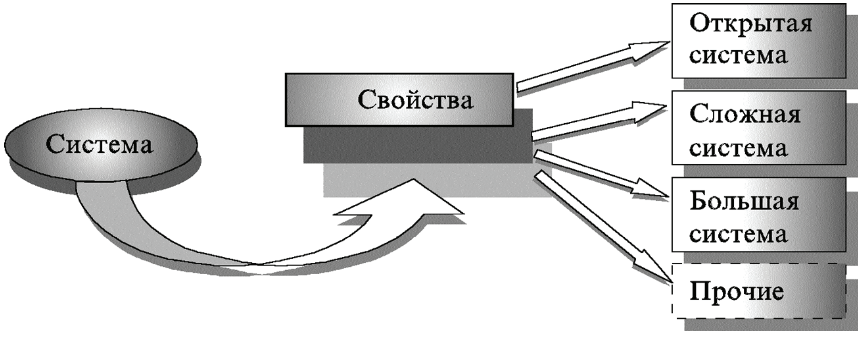


Рис. 2.1. Схема формирования ключевых понятий системного подхода

Именно вокруг этих понятий концентрируется системное движение в современной науке. Рассмотрим более подробно каждое из них и попытаемся выявить те свойства системы, которые, с одной стороны, определяют ее значимость в решении широкого класса задач, а с другой – являются основаниями для выделения ключевых понятий системного подхода в отдельные классы.

Рассуждая о сложных объектах как о системах, нельзя избежать влияния традиционного и не совсем правильного именования системами всего того, что представляется малопонятным. Введем некоторое представление о системе, которое далее будет утверждаться.

Систем в проявленной природе не существует – мир устроен целостно и неделимо. Разделение его и его видимых объектов на части условно и осуществляется человеком, во-первых, по привычке, во-вторых, из-за отсутствия правильного видения мира и, в-третьих, ради вполне определенных целей. Все в природе взаимосвязано и подчиняется единым законам.

Это утверждение не является методологическим приемом, а отражает известную издревле и подтверждаемую современной наукой идею. То, что отдельность предметов друг от друга условна, можно доказать различными способами.

В современной литературе понятие «система» получило самое широкое толкование. Известно свыше десятка определений системы. Причем со временем это понятие менялось не только по форме, но по мере продвижения вперед в исследовании систем и по содержанию.

Общее в современных определениях:

во-первых, система строится исследователем с некоторой значимой для него точки зрения;

во-вторых, состоит из нескольких компонентов (более чем одного);

в-третьих, эти компоненты взаимодействуют между собой ради достижения общей цели;

в-четвертых, система как единое целое строит свои отношения с окружающей средой.

Термин «система» возникает и используется там, где человеку удобно понимать и разъяснять мир, представляя его поделенным на части, которые связаны друг с другом, т.е. образуют целостность. Каждая система одного и того же объекта выражает лишь определенную грань его сущности. Рассмотрение объектов в качестве систем является одним из способов представления объектов наряду с другими (несистемными).

Естественное стремление человека, постигая мир, делить его на части возникает от ограниченности его сознания, которое до известной поры «не умеет работать» с миром как с бесконечностью. Мы постигаем бесконечное посредством ограниченных форм, доступных осмыслению. Мы делим бесконечный объект на части, которые связываем в своем сознании разнообразными отношениями. Можно сказать, что сложность определяется количеством систем, которые следует приписать объекту для достижения необходимой степени его понимания. Получается, что сложность – категория эпистемологическая, т.е. познавательная, субъективная, зависящая от исследовательской задачи и способности «познавателя». Сложность не является свойством исследуемых объектов.

Любая система «открывается» с некоторой точки зрения исследователя, которая является по отношению к системе причиной. Во всяком системном представлении объекта должна быть разъяснена принимаемая точка зрения, иначе ее системный облик не убедителен ни для кого. Без ясного понимания точки зрения на объект его системное описание теряет смысл. Смена точек зрения сопровождается сменой системных представлений. Например, с точки зрения изменений некоторая организация может быть представлена в виде системы процессов преобразования компетентности персонала, навыков менеджеров, ролей в командах и других аспектов организации. С точки зрения состава организации она может быть представлена системой из совокупности отделов, связанных отношениями подчинения или взаимодействия. С других точек зрения могут быть выражены другие грани организации.

Представление объектов как систем отличается от других представлений тем, что оно производится посредством мысленного выделения некоторых элементов объекта и отношений между ними, т.е. структуры. Этой процедуре может быть подвергнута любая часть объекта или элемент структуры системы. Переход исследовательского внимания от общей структуры к частной сопровождается детализацией, разделением сущности объекта. С точки зрения формальной логики это линия конкретизации понятия об объекте. Обратная линия рассмотрения более общих структур системы – абстрагирование (рис. 2.2).

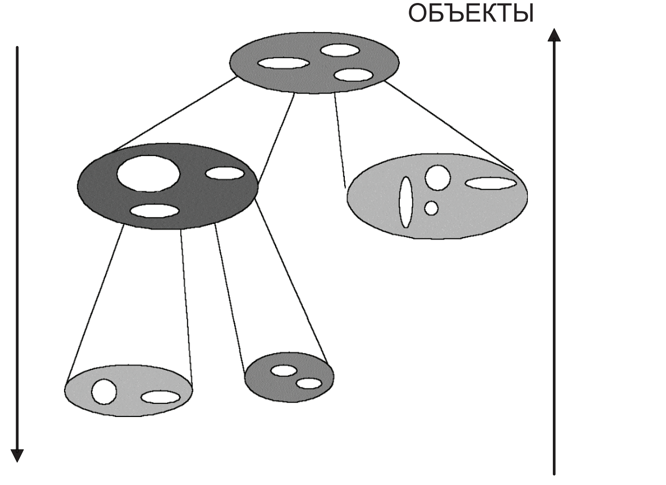


Рис. 2.2. Представление объектов

Так, исследование организации может проходить от представления ее самой как целостности к системному представлению ее частей как целостностей. Такая линия конкретизации «проникает» в объект, в отдельные его части. Сохранение в ходе такого исследования цепи рассмотрения систем позволяет восстанавливать все целостное представление, удерживая одновременно и частные детали, и единый облик организации.

Следуя одному из фундаментальных принципов мироздания – принципу двойственности (или полярности), в любом объекте или явлении можно выделить два полюса, две противоположные по какому-либо признаку грани: плюс – минус, простота – сложность, бесконечное – конечное и др. Такого рода полюсами в системах являются неизменное – изменяющееся (неподвижное – подвижное, постоянное – переменное). Неизменное выражается структурами, а изменяющееся – функциями. В структурах исследователь пытается «удержать» нечто постоянное в объекте, в функциях – выразить изменяющееся.

Это обстоятельство лежит в основании разделения всего потока системных исследований на два русла: структурные и функциональные. В первом предметом исследования являются составы, конфигурации, топологии и т.д. систем, во втором – динамические характеристики, устойчивость, эффективность, т.е. все то, что при неизменной структуре системы зависит от свойств ее элементов и отношений.

Можно сказать, что функциональные исследования следуют за структурными. Сначала объект представляется с некоторой точки зрения как целостность, разделенная на взаимосвязанные части. Затем выраженная таким образом структура объекта как системы может исследоваться функционально. При этом представляются разнообразные воздействия на объект и исследуются его реакции на них, т.е. исследуется функция системы.

Все приведенные суждения о системах как об инструментах познания свидетельствуют об их идеальной сущности. Можно сказать, что системы есть особенные идеи объектов. Всякое системное исследование представляет собой движение сознания как бы в сторону от объекта, от реальности. Это движение словно образует новый мир – идей, сущностей, мир, «заключенный в скобки». Работа в этом мире находится на грани научных и ненаучных способов познания. Общим для них и особенно важным остается необходимость обоснованности утверждений.

В современной науке нет однозначного понимания существа и меры обоснованности знаний. В области системных знаний это обстоятельство является настоящей проблемой, поскольку для обоснования системологических утверждений, т.е. трансцендентальных, абстрактных конструкций самих по себе, должны применяться еще более абстрактные сущности. Это зачастую выводит исследователя за границу традиционно принятых представлений о «вещах». По этой причине обоснованность передаваемого знания становится зависимой от уровня сознания принимающего его, от степени его собственного доверия основаниям.

Здесь особое значение имеет процедура интерпретации конструкций, используемых в качестве оснований системологических постулатов и самих постулатов. Разъяснение метафизических конструкций – чрезвычайно сложная концептуальная работа. Она нуждается в особенном инструментарии. Речь идет об инструментарии представления и исследования систем.

Обращение к системному облику некоторого конкретного объекта тотчас же вводит в круг исследований новые объекты. Одна и та же система может быть сопоставлена с различными по природе объектами. Например, система, представляющая строение объекта, т.е. выражающая отношение между элементами типа «состоять из...», может быть одной и той же для экономического объекта, для бухгалтерии, для коллектива людей и для языкового предложения. «Восстановление» объектов по системе осуществляется в виде интерпретации, т.е. сопоставления компонентам системы (элементам и отношениям) компонентов объектов, что открывает свободу в выборе примеров для пояснения системных конструкций, в выборе интерпретационной области рассуждений. При этом критерием выбора во всех случаях разъяснения системных построений должна служить ясность.

Существенные особенности систем наиболее полно и кратко учтены в определении «системой называется организованное сложное целое» работы. Такое определение не зависит от характера природы системы и выявляет три основных ее свойства: организованность, сложность, целостность.

Организованность как свойство системы может быть рассмотрена в двух смыслах:

• организованность как упорядоченность компонентов системы;

• организованность как порядок представления объекта в виде системы: выделение элементов, установление связей и отношений между ними, подчинение системы целевому назначению, выявление отношений системы с окружающей средой.

Исходя из этих взглядов на организованность системы, ее признаками являются: иерархичность структуры; отношения между различными уровнями иерархии; порядок подчинения низших уровней высшим. И сама организованность как свойство позволяет статическим системам сохранять свое постоянство во времени и в пространстве на различных этапах рассмотрения объекта исследования, а динамическим – осуществлять целенаправленное саморегулирование.

Организованность как свойство систем в ряде работ рассматривается основанием для их классификации. В частности, по уровню организованности системы выделяются классы плохо организованных и хорошо организованных систем. В работе эти классы дополняются классом самоорганизующихся систем, объединяющим саморегулирующиеся, саморазвивающиеся, самообучаемые и другие системы. Уровень организованности системы тем выше, чем сильнее свойства целого отличаются от простой суммы свойств его частей.

Понятие «**сложность**» по сути многоаспектное и в различных работах, в соответствии с целями исследования, используется по-разному. В частности, определение сложной системы напрямую связывается с целями введения этого понятия и его использования при исследовании систем. Так, рассматриваются:

• гносеологический характер целей, направленных на получение знаний о системе и на преодоление сложности получения этих знаний;

• онтологический характер, связанный с сущностью системы, наличием таких ее свойств, как структурная сложность, сложность поведения, сложность выбора поведения, сложность развития и т.д.

С учетом этих взглядов определение сложной системы уместно представить в следующем виде: система называется сложной с гносеологических позиций, если ее познание требует совместного привлечения многих теорий и моделей, а в некоторых случаях – многих научных дисциплин (организации междисциплинарного исследования) и реализации в модельных представлениях установки на глубокий учет неопределенностей вероятностного и детерминированного характера.

Система называется сложной с онтологических позиций, если в реальной деятельности существенно проявляется один или несколько следующих видов ее сложности:

• структурная сложность, определяемая по числу элементов системы, числу и разнообразию связей между ними, количеству иерархических уровней и общему числу подсистем, входящих в состав системы;

• сложность функционирования (поведения), определяемая характеристиками множества состояний, правилами перехода из состояния в состояние, характеристиками воздействия среды на систему и обратного воздействия системы на среду, степенью неопределенности перечисленных характеристик и правил;

• сложность выбора поведения в многоальтернативных ситуациях, который определяется характеристиками целенаправленности системы, гибкостью ее реакции на заранее неизвестные воздействия среды;

• сложность развития, определяемая характеристиками соответствующих эволюционных и скачкообразных процессов.

Содержательный анализ выделенных признаков системы показывает, что в основе ее сложности лежат факторы неопределенности в различных своих проявлениях. В частности, привлечение для познания системы «многих моделей, многих теорий, а в некоторых случаях – и многих научных дисциплин» вследствие узкоаспектного характера каждой из них может быть сопряжено с неопределенностями различных видов:

• лингвистическая неопределенность – неопределенность, имеющая непосредственное отражение в нечеткости, неоднозначности слов и фраз естественного языка, его синтаксической и семантической нечеткости выражения понятий в различных предметных областях;

• поссибилистическая неопределенность – неопределенность, порождающая неточность оценки возможностей различных моделей, теорий, научных дисциплин, самих систем при выполнении различных действий;

• аксиологическая неопределенность – неопределенность, связанная с проведением оценок полезности тех или иных альтернативных вариантов формирования систем;

• мультикритериальная неопределенность – неопределенность, сопутствующая многоцелевому подходу к оценке обстановки и вызывающая необходимость поиска компромисса между различными критериями при принятии решений;

• структурная неопределенность – неопределенность, связанная со сложностью, неясностью, нечеткостью представления структур систем в мышлении человека, решением так называемых плохо структурированных проблем системного анализа;

• логическая неопределенность – неопределенность (многозначность, нечеткость) оценки истинности знаний, их неполнота и противоречивость, а также неопределенность логического вывода.

Таким образом, свойство сложности системы придает исследованию различных граней объекта субъективную окраску, поскольку в значительной степени полнота представления факторов неопределенности при исследовании различных систем зависит от уровня мышления исследователя, его знаний, опыта, способности к обобщению. И то, что для одного исследователя кажется простым, обыденным, естественным, для другого представляется нерешаемой проблемой.

Обобщение и анализ направлений и результатов исследований проблемы сохранения **целостности** дают возможность выделить, по крайней мере, три важнейших ее аспекта.

1. Целостность как совокупность абстрактных свойств объектов, которые выделяют их как системы среди других объектов (несистем) благодаря наличию в них «связности» на различных уровнях. Целостность в этом смысле выражает специфическую точку зрения на предмет исследования. В ее ракурсе системы рассматриваются как бы в различных «фокусах». При максимальном «фокусе» должна различаться граница системы, через которую осуществляется ее взаимодействие со средой (коммуникативная грань объекта). При этом внутренняя структура подсистем неразличима, и предмет исследования видится целиком в своей функциональной самостоятельности. Минимальный «фокус» позволяет различить структуру системы на самом высоком уровне детализации (элементный, структурный, модельный аспекты объекта). Переходы между «фокусами» должны сопровождаться различением уровней организации. Каждому новому уровню должен соответствовать свой уровень связанности между подсистемами, свой тип причинно-следственных отношений между ними. Проявляя это свойство целостности, переходы по линии «элемент – подсистема – система» осуществляются в виде процессов конкретизации или абстрагирования конструкций, задающих систему. При этом к «целостным» относятся только такие приращения конкретного (абстрактного), при которых проявляются новые организационные структуры.

2. Целостность как совокупность специфических требований к исследованию систем, обеспечивающих сохранение их системных свойств. Предметом исследования с позиций целостности является

структура, «Минимальной» структурой системы или ее подсистем, подлежащих рассмотрению, следует считать такую, дальнейшая конкретизация которой не выявляет новой организации. Под организацией здесь понимается свойство системы, которое характеризует ее способность предопределять свое будущее и позволяет предсказывать ее поведение во времени (аспект развития объекта).

Анализ систем должен исключать рассмотрение их в абсолютной самостоятельности. Всякая подсистема должна представляться как объект с «входами» и «выходами», через которые он включен в систему.

Следует различать части объекта, выступающие как бы ступенями в одной иерархической лестнице организационных структур, т.е. подсистемами от тех частей, которые, несмотря на конструктивную принадлежность к объекту, не связаны причинно-следственными или иными отношениями. Речь идет о различении системы от суммы систем.

3. Целостность как формальное свойство связанности элементов системы, присущей организованной системе, способной к сохранению и развитию, обладающей структурой. В этом смысле целостность характеризует степень участия элементов (подсистем) во взаимодействии. Если установить гипотетически крайние «значения» целостности от абсолютной, когда во взаимодействии находятся все элементы системы на рассматриваемом уровне детализации, до нулевой, когда элементы независимы друг от друга, то движение от абсолютной целостности к нулевой есть движение от системы к несистеме.

Для развивающихся и самоорганизующихся систем, т.е. систем с эволюционирующей организацией, целостность как формальное свойство характеризует мгновенное положение уровня их организованности. Для них целостность динамична (заметим, что динамика целостности обнаруживается в рамках другой целостности более высокого порядка).

Таким образом, формально целостность характеризует степень зависимости поведения системы от поведения ее элементов и от структуры, упорядочивает организацию самой системы.

Процесс представления объектов в виде систем, формирование систем на различных этапах их рассмотрения подчиняются принципам системного подхода.

2.2. Принципы и аспекты системного подхода

Под принципами (лат. *principium* – основа, начало) понимаются основные идеи, правила представления объекта в виде систем и раскрытия их основных свойств. Сформированные в настоящее время принципы в своей совокупности имеют цель создания концептуальных основ для объединения методов исследования и описания систем на различных этапах рассмотрения – от абстрактного образа до физического воплощения в едином понятийном (возможно, математическом) аппарате.

При всем многообразии разработанных принципов в современной литературе отсутствует единое понимание общих принципов системного подхода. Этот феномен объясняется, с одной стороны, различием природы объектов, исследуемых с помощью систем, понятийного аппарата описания таких объектов, а с другой – многоаспектностью самого системного подхода и различием во взглядах исследователей, использующих его в своей практике.

Не претендуя на полноту представления принципов, выделим основные из них:

✓ *принцип целостности* является отображением одного из основных свойств системы и определяет необходимость рассмотрения системы как единого целого, что означает не сведение свойств элементов и частей системы к их простой сумме, а глубокое исследование этих свойств, их влияние на свойства всей системы, составляющих ее элементов и частей. При этом большое значение имеет исследование отношений как внутри системы, так и системы в целом, ее элементов и частей с окружающей средой;

✓ *принцип иерархичности* определяет многоуровневую структуру построения систем, позволяющую снизить степень неопределенности и формировать разнообразие альтернативных вариантов представления систем. При этом рассмотрение систем на каждом уровне иерархии подчиняется требованию сохранения их целостности. В соответствии с этим принципом исследуемая система является элементом системы более высокого порядка, а элементы исследуемой системы выступают как системы более низкого порядка;

✓ *принцип коммуникативности* определяет связи (отношения) системы с окружающей средой. Сама среда рассматривается как сложное, неоднородное, многоуровневое образование, задающее требования и ограничения к системе, ее элементам и частям;

✓ *принцип альтернативности* определяет необходимость формирования разнообразия альтернативного представления систем в целях охвата всего разнообразия проблем, решаемых с их помощью, с одной стороны, и выбора наиболее рациональных вариантов систем – с другой;

✓ *принцип целенаправленности* – система строится в соответствии с желаемым результатом (целью) исследования объектов. Причем главная цель имеет иерархическую структуру, представляющую собой многоуровневую совокупность частных целей. Уровни иерархии целей определяются этапами рассмотрения объектов, организованностью, сложностью и размерами систем, представляющих эти объекты. Формулировка или другие способы представления целей отражают их активную роль в познании и реалистичность. Цели согласовываются между собой как на одном уровне, так и на межуровневом рассмотрении, при этом учитываются зависимость целей от внешних и внутренних факторов. Основные положения принципа целенаправленности подчиняются принципу целостности;

✓ *принцип открытости* – система строится таким образом, чтобы на различных этапах ее рассмотрения имелась возможность дополнять ее структуру элементами, связями и отношениями, а сама система была доступной для изменения и развития по различным компонентам;

✓ *принцип адаптивности* – система ориентирована на существование в условиях изменения внутренних и внешних факторов.

При детальном анализе представленных принципов нетрудно заметить, что системный подход позволяет раскрыть большинство граней исследуемых объектов, представить внутренние и внешние факторы в виде интегрированного целого, отобразить все многообразие альтернатив исследования, обеспечить необходимый уровень организованности как самого объекта, так и процесса его исследования.

Исследование современных сложных систем основано на **системном подходе** – методологии исследования объединений элементов в природе и обществе как систем. При этом под методологией понимается учение о структуре, организации, методах и средствах деятельности. Несмотря на развитие этого метода познания (системного подхода), до недавнего времени традиционным подходом к исследованию системных объектов было стремление к разложению их на отдельные части, в результате чего исчезала специфика системы.

Именно системный подход является основой методологической установки исследования систем вооружения, который реализуется посредством системного анализа. Под **системным анализом** понимаются методы обоснования решений по сложным проблемам политического, социального, военного, экономического, научного и технического характера.

Процесс системного анализа включает:

а) постановку задачи на проведение исследования;

б) сбор необходимых исходных данных;

в) построение модели, отображающей взаимосвязи реальной сложной системы;

г) расчет и сравнение различных вариантов;

д) выработку прогнозов и предложений;

е) экспериментальную проверку полученных результатов.

Системный анализ опирается на ряд прикладных математических дисциплин и современных методов управления. Техническая основа системного анализа – ЭВМ и информационные системы. Системный анализ, таким образом, является методологическим основанием подготовки и обоснования решений по сложным проблемам научного, экономического, технического и военного характера. Использование методологии системного анализа в процессе производства систем вооружений невозможно без применения системотехники.

Системотехника – научно-техническое направление, охватывающее решение комплекса теоретических и практических задач, возникающих при планировании, проектировании и разработке сложных систем вооружения, например таких, как ракетные комплексы и системы.

Одним из разделов системотехники является синтез сложных технических систем – научная дисциплина, разрабатывающая методы синтеза систем на основе изучения объективных закономерностей процессов функционирования систем. Синтез систем опирается на математическое моделирование и ряд прикладных математических дисциплин, в первую очередь на математическое программирование.

Анализом системы иногда называют раздел системотехники, охватывающий комплекс теоретических и практических задач, решаемых при планировании сложных систем.

Системный подход содержит ряд аспектов, изучение единства и взаимосвязи которых дает о нем правильное представление. Рассмотрим основные аспекты системного подхода.

1. Системно-компонентный аспект отражает изучение состава системы на основе выделения ее основных элементов, взаимодействие которых обеспечивает присущие только системе в целом новые качественные особенности. Принципы выделения составных элементов системы определяются объектом и задачей исследования, а также охватом учитываемых аспектов.

2. Системно-структурный аспект предполагает изучение внутренних связей и взаимодействие элементов системы. Структура – это внутренняя форма системы, определяющая способ взаимодействия составляющих ее компонентов. Она зависит от параметров элементов системы, связывает и преобразует их, придавая целостность системе, и обусловливает возникновение новых качеств, не присущих ни одному из элементов системы. Определение связей элементов системы и их изучение является одним из основных вопросов оценки эффективности, так как на этой основе определяются технические решения по системной увязке элементов. Структурные свойства систем определяются характером и устойчивостью взаимосвязей между элементами. Различают структуры детерминированные, характеризующиеся либо неизменными взаимосвязями, либо меняющимися по некоторому закону; вероятностные, если взаимосвязи описываются законами теории вероятностей; хаотические, если взаимосвязи элементов непредсказуемы.

3. Системно-функциональный аспект отражает изучение функциональных зависимостей между элементами системы. Функции системы представляют собой интегрированный результат функционирования образующих систему компонентов. Функциональная зависимость имеет место между компонентами данной системы, между компонентами и системой в целом, между системой в целом и другой системой, в состав которой она входит.

В зависимости от характера взаимодействия с другими системами функции систем можно распределить в порядке возрастания следующим образом:

1) пассивное существование (материал для других систем);
2) обслуживание систем более высокого порядка;
3) противостояние другим системам;
4) поглощение других систем;
5) преобразование других систем.

Функции компонентов по отношению к системе должны носить целесообразный характер и согласовываться по времени и в пространстве, формируя систему как единое целое. Функциональное описание компонентов иерархично. Обычно выделяют координацию и субординацию функции: координация – согласование функций компонентов системы по горизонтали и субординация – согласование функций компонентов по вертикали. Субординация определяет подчиненность функций одних компонентов другим, указывает специфическое место и неодинаковое значение каждого из компонентов в осуществлении функций системы.

4. <u>Системно-интегральный аспект</u> предусматривает изучение системообразующих механизмов, присущих данной системе. Этот аспект характеризует факторы системности и свойства, обеспечивающие сохранение качественной специфики системы, ее функционирование и развитие. Здесь выясняются новые качества, присущие системе в целом и не присущие каждому компоненту в отдельности. Для технических систем это связано с выявлением новых дополнительных возможностей системы, получаемых за счет правильного объединения отдельных ее элементов.

Представленные четыре аспекта системного подхода в совокупности характеризуют внутреннее изучение системы.

5. <u>Системно-коммуникационный аспект</u> предполагает изучение системы во взаимодействии с окружающей средой и выделение возмущающих факторов. Всякая система существует в определенной взаимосвязи с другими системами. Эти внешние по от-

ношению к данной системе образования, с которыми она связана сетью коммуникаций, составляют ее среду, или окружение.

6. Системно-исторический аспект направлен на изучение ретроспективы и перспективы развития системы, т.е. требует представления системы в непрерывном развитии. Каждая техническая система проходит этапы разработки, эксплуатации и последующего совершенствования на новом уровне.

Для разработки систем необходимо знать, как возникла данная система, какие этапы совершенствования проходила в своем развитии, какой она стала в настоящее время и какие перспективы развития имеет в будущем. Всякая система для своего формирования черпает материал из предшествующих и существующих систем. Новая система возникает на основе разрозненных сначала компонентов других систем с учетом опыта их создания. Это позволяет использовать все лучшее, что накоплено в технике за время создания подобных систем. Вместе с тем уже на этапе разработки системы необходимо исследовать перспективу ее развития, т.е. предусмотреть возможность модернизации элементов. Это необходимо в связи с быстрым моральным старением некоторых элементов, а также существенным различием гарантируемых сроков эксплуатации элементов различного типа.

Следует отметить, что исследование сложных систем – творческий процесс. При этом те или иные аспекты системного подхода могут использоваться не полностью, может быть усилен какой-нибудь один или несколько аспектов, однако всестороннее исследование предполагает только совокупное использование всех аспектов системного подхода.

Потенциальные возможности системного подхода постоянно побуждают исследователей, с одной стороны, к обобщению этого подхода, построению общих научных основ исследования объектов любой природы и созданию «общей теории систем» (системологии), а с другой – к поиску технологий его практической реализации. Результатами этих работ стало появление таких научных дисциплин, как системный анализ и системотехника, а также широкая интеграция этих дисциплин с кибернетическими и информационными отраслями знаний.

Выделение системного анализа и системотехники (системного анализа экономических систем) в самостоятельные направления системного подхода явилось реакцией на феномен невозможности полной формализации задач исследования сложных, плохо структурированных систем и возникающих при этом проблем, т.е. с геделевской трудностью о неполноте формальных систем. Поэтому в системном анализе акцентируется внимание на трудностях формулировок задач и способах преодоления этих трудностей, на поиске приемов расчленения сложной исходной проблемы на подпроблемы, на разработке формализованных приемов разделения системы на подсистемы, целей на подцели, больших неопределенностей на маленькие, на поиске возможности работы в условиях неполной информации, ограниченности ресурсов и дефицита времени.

2.3. Системный подход к управлению методами решения задач комплексного экономического анализа

Решение задач КЭА связано с последовательным уменьшением неопределенности, вызванной, как правило, сложностью объектов и предметов и существующей в наибольшей степени в начале анализа. Поэтому процесс постановки задач анализа, в ходе которого происходит наиболее существенное уменьшение неопределенности, играет центральную роль в последующем выборе методов их решения и, как следствие, в качестве результатов анализа.

2.3.1. Методы решения задач

Многообразие задач КЭА, поставленных правильным способом, образует особенное пространство. Это пространство должно быть упорядочено для того, чтобы в нем можно было идентифицировать конкретную задачу и сопоставить ей соответствующие методы решения для достижения конкретной цели КЭА. В этой связи возникает необходимость разработки подхода к такой классификации задач, которая бы помогала выбору методов. Тогда выбор методов решения задач можно рассматривать как процесс управления этими методами. С позиций системного подхода к прояснению этого вопроса необходимо построить некоторую структуру задач и структуру методов и построить структуру системы управления выбором методов.

Пространство задач следует построить на основе анализа пары понятий «сложность – размер» и формировать таким образом, чтобы наиболее полно разграничить задачи по этим признакам. Под «сложной» понимается задача, для решения которой требуется совместное привлечение многих моделей, многих теорий, а в некоторых случаях – многих научных дисциплин (организации междисциплинарного исследования), и реализация модельных представлений ориентирована на глубокий учет неопределенности различного рода, т.е. в основу понятия «сложность» положены факторы неопределенности в различных проявлениях.

Под большими задачами понимаются задачи (простые или сложные), число подсистем (элементов) которых велико, но в ходе решения задач требуется сохранение их целостности. То есть учет «размеров» задач при их классификации подчиняется требованию сохранения сложности при формировании структуры исследуемой задачи, создании модельных представлений, а также при получении и обработке результатов исследований.

Многообразие задач, основанных на различении их по этим признакам, представляется в виде пространства (строго говоря, поля) на двумерной модели: по оси абсцисс расположен уровень неопределенности задачи, которая выражает ее «сложность», а по оси ординат – целостность как требование к задаче, которое конструктивно выражает ее «размер» (рис. 2.3).

В этом пространстве выделяются особенные области.

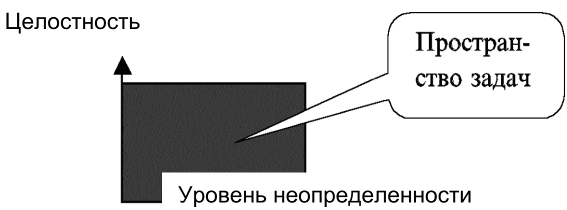


Рис. 2.3. Обобщенная схема конструктивной классификации задач

Рассмотрим крайние значения каждого свойства задач как некоторые полюса, между которыми располагается континуум действительных свойств. Тогда, следуя диалектическим представлениям о единстве противоположностей и гармоничному сочетанию полярных свойств в естественных объектах, выделим на этих континуумах особенные области. Это будут области некоторых «гармоничных» соотношений полярных свойств и «негармоничных», т.е. таких, где свойства одного из полюсов преобладают над свойствами другого полюса. Это можно сделать на основе принципа «золотого сечения» (рис. 2.4).

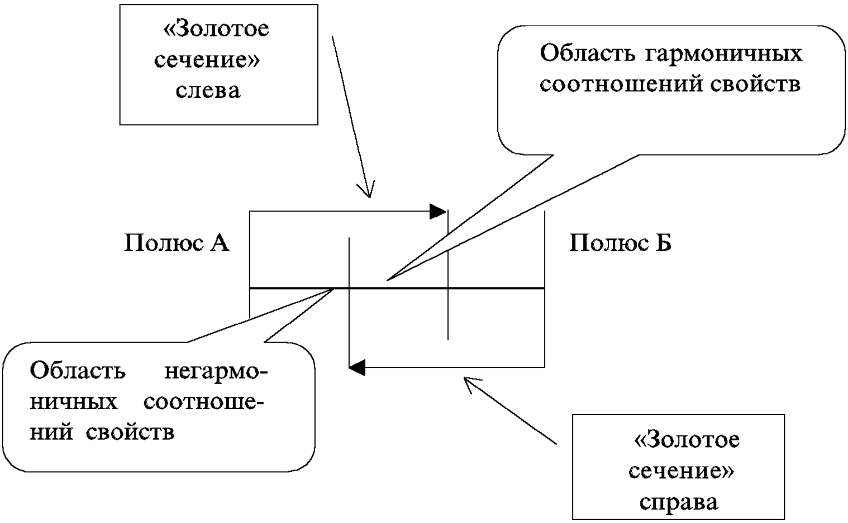


Рис. 2.4. Области свойств в диалектической паре

Поскольку каждая из областей на такой диалектической шкале отличается от соседних по свойствам, то становится легче рассуждать о тех задачах, которые «попадают» в эти области; с учетом данной идеи пространство задач может быть представлено более конструктивно (рис. 2.5).

На схеме теперь можно выделить характерные области, где располагаются задачи с близкими соотношениями свойств целостности и неопределенности. На рисунке светлые области – области относительно умеренных значений этих свойств, а затемненные – области с ярко выраженным преобладанием свойств того или иного значения. В этих крайних позициях модели расположены зоны «рискованных» задач, решение которых возможно лишь с использованием специальных методов (зоны 1, 3, 7, 9). Рассмотрим эти области подробнее.

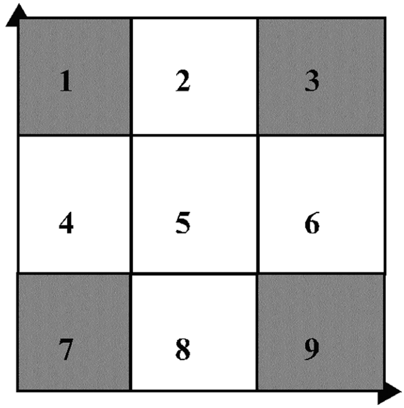


Рис. 2.5. Схема конструктивной классификации задачи.

Область 1. Тривиальные задачи. В данном случае анализ не требует высокоэффективных методов решения задач. При этом существует риск израсходовать ресурс без получения новых, актуальных, значимых результатов.

Область 3. Это задачи, не требующие построения комплексных моделей анализа, но связанные с глубоким исследованием факторов, образующих частные задачи. Существует риск упрощения задач, что может привести к упрощенным решениям, снижающим значимость результатов анализа. В этих случаях требуется привлечение качественных методов исследования и решения задач.

Область 7. Чаще всего это задачи, требующие тщательной структуризации для решения, но не сложные с расчетной точки зрения. Здесь же могут быть задачи со слабо исследованным содержанием.

Область 9. Это задачи повышенной сложности. Их решение связано с глубокими исследованиями разнообразных и многочисленных факторов, построением многих моделей. Здесь существует риск не получить результатов.

Остальные области (2, 4, 5, 6, 8) содержат задачи, по отношению к которым могут быть применены методы из более широкой сферы инструментария, чем к задачам из областей риска.

Задачи, сформулированные и идентифицированные в соответствии с этими методическими положениями, можно считать приспособленными к поиску методов их решения.

2.3.2. Типология методов решения задач

Для построения системы методов решения задач КЭА необходимо множество методов рассматривать сквозь призму пары понятий «объект решений – глубина решений».

Первое понятие связано со множеством тех особенностей задач, для которых предназначены методы. Это задачи, связанные либо со структурами предметов, либо с функциями. Структура и функции, как два полюса, находятся в диалектическом единстве, которое выражается в том, что они дополняют друг друга и одновременно противоположны друг другу по свойствам. Методы решения задач, отражающих структурные проблемы, и задач, отражающих проблемы функциональные, имеют различные основания для применения. В первом случае объектом исследования являются составы, конфигурации, топологии и т.д. предмета КЭА, а во втором – динамические характеристики, устойчивость, эффективность, экономические показатели, т.е. все то, чем богат предмет, что при заданной структуре зависит от свойств его элементов, связей и отношений между ними.

Второе понятие пары («глубина решений») связано с особенностями ожидаемых решений задач КЭА со шкалой качественных и количественных решений. Качественные (концептуальные) решения применяются с пользой там, где велика степень неопределенности представлений. Там продвижение в понимании свойств происходит за счет выделения и сопоставления сущностей, свойств, построения качественных моделей предметной области. Там, где качества сопоставлены, где появляется ясность в понимании объектов, уместны количественные методы и модели. Они позволяют получать и исследовать конкретные характеристики объектов.

На основании этих суждений классификационная «сетка» методов может быть построена по аналогии с пространством задач в виде поля, на котором обозначены особенные области (рис. 2.6).

На схеме можно выделить следующие характерные области методов решения задач:

Область 1. Это в основном методы исследования количественных характеристик; методы теории эффективности, надежности, исследования динамических характеристик объектов, оптимизации и подобные им.

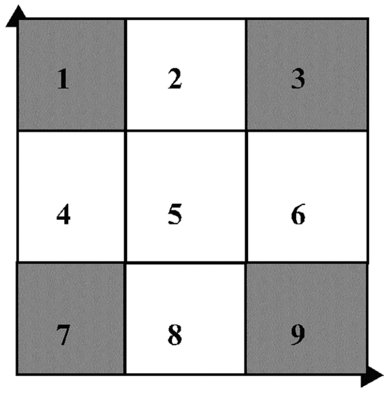


Рис. 2.6. Схема пространства методов решения задач комплексного экономического анализа

Область 3. Методы качественных решений: методы теории вероятностей, многозначной, вероятностной и индуктивной логики, исследования операций, теории алгоритмов и т.д.

Область 7. Методы количественного исследования свойств структур предмета; методы функционального анализа, теории множеств, сигнальных графов, математической информатики и т.д.

Область 9. Методы качественного исследования структур предмета; методы теории родов структур, топологии, морфологические методы, методы типа дерева целей, «Дельфи» и т.д.

В остальных областях (2, 4, 5, 6, 8) сосредоточены методы широкого назначения – такие, которые могут быть применены для задач широкого спектра.

В целом представленная классификация методов упорядочивает их множество таким образом, что оно оказывается приспособленным для установления соответствия между ними и видами задач.

2.3.3. Управление методами решения задач

Управление методами решения задач КЭА как управление инструментальной базой КЭА должно осуществляться ради поддержания качества анализа экономических систем. Качество собственно КЭА – совокупность свойств деятельностей, образующих собственно КЭА, и результатов этих деятельностей, обусловливающая их соответствие целям КЭА.

Рациональный выбор методов для решения задач следует организовать как управление отношением $G \subseteq Z \times M$ между множеством типов задач Z и множеством методов их решения M в целях. При этом следует иметь в виду, что любая задача может быть решена не одним, а несколькими методами. Такого рода управление можно рассматривать как управление инструментальной базой КЭА.

Для организации управления инструментальной базой необходимо иметь в виду следующие особенности этого процесса.

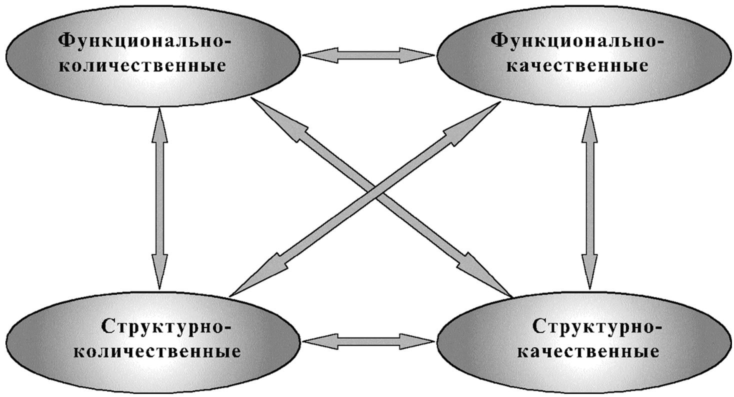


Рис. 2.7. Схема противоречий в пространстве методов решения задач комплексного экономического анализа

1. В области методов решения задач M существуют естественные противоречия. Например, между методами исследования структур и методами исследования функций, количественными и качественными методами. В соответствии с приведенной на схеме классификацией методов (рис.2.7) таких противоречий несколько.

2. Управление отношением G между задачами Z и методами их разрешения M – это управление противоречиями между методами M ради поддержания гармоничных значений G. Эта задача из области гомеостатики. В ней установление рационального соответствия G достигается за счет представления задачи в виде той или иной структуры (классификации) и на основании облика этой структуры – выбора соответствующих методов их решения.

3. Правило выбора методов решения сложных задач содержится в отношении между типами задач и методами их исследования. Представленные пространства типов задач (см. рис. 2.5) и методов их решения (см. рис. 2.6) могут быть использованы в качестве такого правила. В них каждой области из пространства *S* соответствуют аналогичные области из пространства *M* (рис. 2.8).

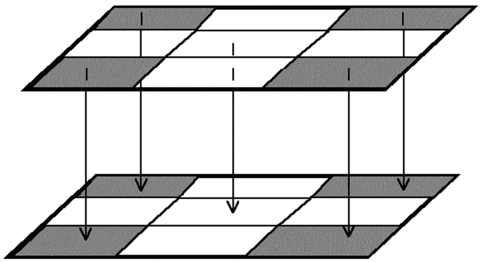


Рис. 2.8. Схема отношений между классификационными пространствами задач *Z* и методами их решения *M*

4. Конструктивное воплощение правила выбора методов для задач определяется следующими принципами:

- методы выбираются исходя из задач, а не из возможностей субъекта;
- эффективность использования методов должна быть выше затрат на их реализацию;
- обеспечение практической применимости методов (соответствия методов условиям и ограничениям их использования при решении задач);
- результаты реализации методов должны отражать одно из следующих свойств: эффективность решения задач; точность решения задач; соотношение эффективности и точности решения задач;
- обеспечение достоверности результатов при реализации методов;
- обеспечение стабильности и устойчивости решений при использовании методов;
- сбалансированность методов решения общей и частной задач.

Принципы реализации методов в своей основе противоречивы, поэтому стратегия выбора методов прежде всего должна обеспечивать их применимость и сбалансированность при решении задач, а остальные принципы реализуются как некоторый компромисс, обеспечивающий цели решения задач.

5. Выбор методов решения задач с использованием описанного подхода целесообразно выстраивать как некоторый гомеостатический механизм управления соответствием между типами задач и методами их решения в целях поддержания постоянства высокого значения качества КЭА. Это постоянство может быть достигнуто управлением противоречием между некоторыми стратегиями использования методов решения. Под стратегиями использования методов решения задач КЭА понимается некоторая обоснованная и упорядоченная последовательность применения тех или иных методов решения задач. Поскольку использование каждой стратегии влечет за собой конкретное значение качества решения задачи, то выбор стратегии применения методов может позволить выбрать стратегию с более высоким значением качества.

Структура такого управления как управления инструментальной базой КЭА может быть представлена в виде гомеостатической системы (рис.2.9).

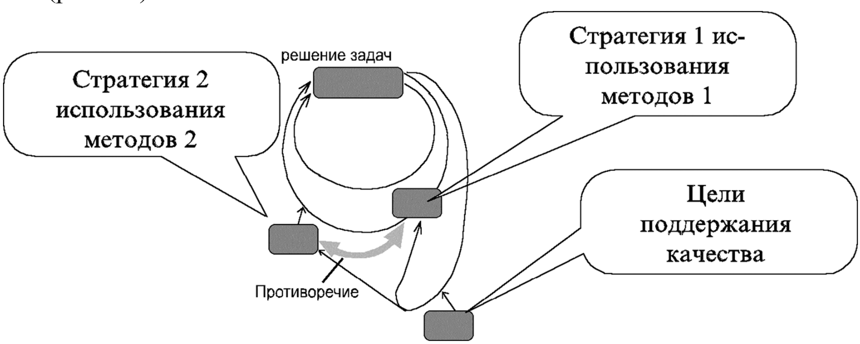


Рис. 2.9. Структура управления инструментальной базой КЭА

В этом механизме главное значение приобретают процедуры оценки качества решения задач КЭА и выработки решений относительно выбора той или иной стратегии применения методов. Эти процедуры должны осуществляться в контуре управления, отвечающем за качество решения задач. Такой механизм управления инструментальной базой КЭА в организационном плане может быть построен на конкурсной основе.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Постановка задачи ЛП

Задача линейного программирования (ЛП) ассоциируется с задачей распределительного типа, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам деятельности. Интерпретация задачи ЛП в этом случае состоит в следующем. Моделируемая ЭИС характеризуется наличием нескольких видов деятельности j (j = 1,.., n), для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные ресурсы b_i, (i = 1,.., m). Интенсивность расходования каждого из ресурсов на каждый из видов деятельности ЭИС известна и равна a_{ij}. Результативность или ценность каждого j-го вида деятельности ЭИС характеризуется величиной c_j. Цель построения модели заключается в определении уровней каждого вида деятельности ЭИС x_j, при которых оптимизируется общий результат деятельности ЭИС в целом при выполнении ограничений, накладываемых на использование ресурсов, т.е. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, $i = 1,..,m$. Структура целевой функции $y(u)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ отражает вклад каждого вида деятельности ЭИС в общий результат. При максимизации c_j представляет собой «полезность» j-го вида деятельности (ущерб, наносимый конкуренту по бизнесу; предотвращенный ущерб), а в случае минимизации характеризует затраты (потери собственные; расход материальных средств).

Линейность модели выявляется или принимается в качестве допущения на этапе формализации задачи. Линейность предполагает наличие двух свойств – пропорциональности и аддитивности, присущих как целевой функции, так и ограничениям. *Пропорциональность целевой функции* означает, что вклад каждой управляемой переменной в целевую функцию пропорционален величине этой переменной. *Аддитивность* же *целевой функции* заключается в том, что целевая функция представляет собой сумму вкладов от различных управляемых переменных. *Пропорциональность ограничений* проявляется в том, что общий объем потребляемых ресурсов прямо пропорционален величинам управляемых переменных. *Аддитивность ограничений* состоит в том, что величина ресурса должна представлять собой сумму расходов по видам деятельности, каждое слагаемое которой пропорционально величине соответствующей управляемой переменной.

В формализованном виде задачу ЛП можно представить следующим образом:

определить $u^* = \underset{u \in U}{arg\ extr}\ y(u)$,

где $y(u) = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$, $U = \{u = (x_1, x_2,..,x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (3.1)
$(\leq, = \text{или} \geq)\ b_i,\ i = 1,..,m;\ x_j \geq 0\}$.

Условие неотрицательности, накладываемое на переменные x_j, означает, что ни одному виду деятельности ЭИС не может быть приписан отрицательный уровень.

Ограничение типа ≥ нельзя рассматривать как ограничение в буквальном смысле этого слова. Наличие такого неравенства предполагает необходимость обязательного выполнения каких-либо планов, заданий, нормативов.

Математическая формулировка задачи ЛП выглядит следующим образом: *необходимо определить значения управляемых переменных x_j, доставляющих экстремум целевой функции y(u) на всем множестве стратегий U = {u} и удовлетворяющих всем имеющимся в задаче ограничениям.* Этой формулировкой задача ЛП считается поставленной математически, что позволяет осуществлять поиск ее оптимального решения известными математическими методами.

Формальную постановку задачи ЛП (3.1) для удобства можно представить в упрощенном виде:

определить *max* (или *min*) $W(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ при ограничениях: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$
$(\leq, = \text{или} \geq)\ b_i,\ i = 1,..,m;\ x_j \geq 0$,

где $W(x)$ – новое обозначение ЦФ, т.е. $W(x) = y(u) = f(x)$.

Для решения задач ЛП разработано множество методов, но наиболее популярными из них являются графический и симплексный методы, позволяющие получить гораздо больше информации, нежели просто найденное оптимальное решение.

3.2. Графический метод решения задач ЛП

Графический метод решения задач ЛП основан на их геометрической интерпретации и применяется для задач, имеющих две переменные. В случае трех переменных графическое решение задачи ЛП становится менее наглядным, а при большем числе переменных вообще невозможным.

Графическим методом решение получают в результате последовательно выполняемых шагов, содержание которых составляют: 1) построение области допустимых решений (ОДР), 2) поиск точки ОДР; соответствующей оптимальному решению; и 3) определение координат этой точки.

1. Построение области допустимых решений. Область допустимых решений представляет собой часть плоскости (в многомерном случае – часть гиперпространства), все точки которой удовлетворяют всем ограничениям, имеющимся в данной задаче ЛП. Условие неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ограничивает область их допустимых значений первым квадрантом. Другие границы ОДР на плоскости $x_1 0 x_2$ изображаются прямыми линиями, построенными на основе ограничений при замене в них знаков неравенства знаками равенства. Каждая линия определяет на плоскости две области: в одной из них все точки удовлетворяют заданным ограничениям, в другой – нет. Ту область, в которой выполняются ограничения в виде неравенств, указывают стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Кроме того, для удобства восприятия возле каждой линии проставляют номер соответствующего ограничения.

В каждой точке ОДР, принадлежащей внутренней области или границе образовавшегося выпуклого многоугольника, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются *допустимыми*. С содержательной точки зрения каждая точка ОДР представляет собой конкретную стратегию проведения операции $u = (x_1, x_2)$, а множество всех точек ОДР – множество всех возможных стратегий $U = \{u\}$.

2. Поиск оптимальной точки ОДР. Построенная ОДР представляет собой выпуклый многоугольник. В теории линейного программирования доказывается, что своего оптимального значения ЦФ достигает в *угловой* (или *экстремальной*) точке выпуклого многоугольника решений. Если ЦФ задавать некоторые фиксированные возрастающие значения $W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = const$, то полученные уравнения на плоскости определят семейство параллельных прямых линий. Вектор $C = (c_1, c_2)^т$, перпендикулярный этим линиям, указывает направление наискорейшего возрастания ЦФ, т.е. является вектором *градиента* ЦФ. Соответственно направление, противоположное направлению, указываемому вектором градиента, характеризует направление убывания ЦФ (при решении задач ее минимизации).

Для практического осуществления поиска оптимальной точки ОДР необходимо:

1) определить вектор градиента ЦФ $\nabla\ W(x) = (\partial W(x)/\partial x_1;\ \partial W(x)/\partial x_2)^т = (c_1,\ c_2)^т$. Длина вектора градиента не связана со значением ЦФ, поэтому достаточно указать лишь его направление;

2) построить прямую, перпендикулярную вектору градиента;

3) перемещая эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора градиента дойти до угловой точки ОДР, где ЦФ достигает максимального допустимого значения.

3. Определение значений управляемых переменных. Решение задачи ЛП составляют координаты $(x_1,\ x_2)$ угловой точки ОДР, через которую проходит линия, соответствующая уравнению ЦФ. Числовые значения этих переменных получают из решения системы линейных уравнений, которым на графике соответствуют пересекающиеся линии.

Пример 3.1. Определить *max* $W(x) = x_1 + 4x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 3.1.

Решение задачи составляют:

1) значение целевой функции $W(x) = 13$;
2) координаты экстремальной точки $u = \{x_1 = 1, x_2 = 3\}$.

Нахождение решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

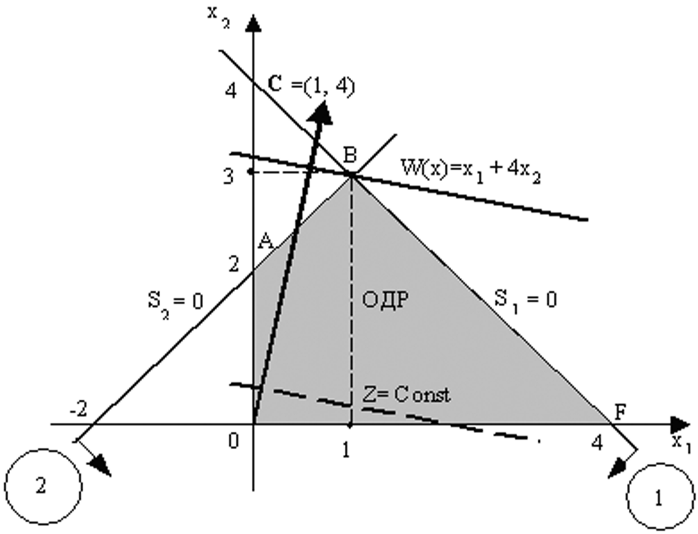


Рис. 3.1. Графическое решение задачи ЛП

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор $C=(c_1;c_2)^T$.
5. Строят прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$, проходящую через многоугольник решений.
6. Передвигают прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$ в направлении вектора C, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 3.2. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 3.1. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 3.1

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 12x_1+4x_2\le 300, \\ 4x_1+4x_2\le 120, \\ 3x_1+12x_2\le 252, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит $W(x)=30x_1+40x_2$.

Таким образом, мы переходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств следует найти такое, при котором функция $W(x)$ принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1+4x_2=300, \text{ (I)} \\ 4x_1+4x_2=120, \text{ (II)} \\ 3x_1+12x_2=252, \text{ (III)} \\ x_1=0, \text{ (I}V\text{)} \\ x_2=0. \text{ (}V\text{)} \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 3.2.

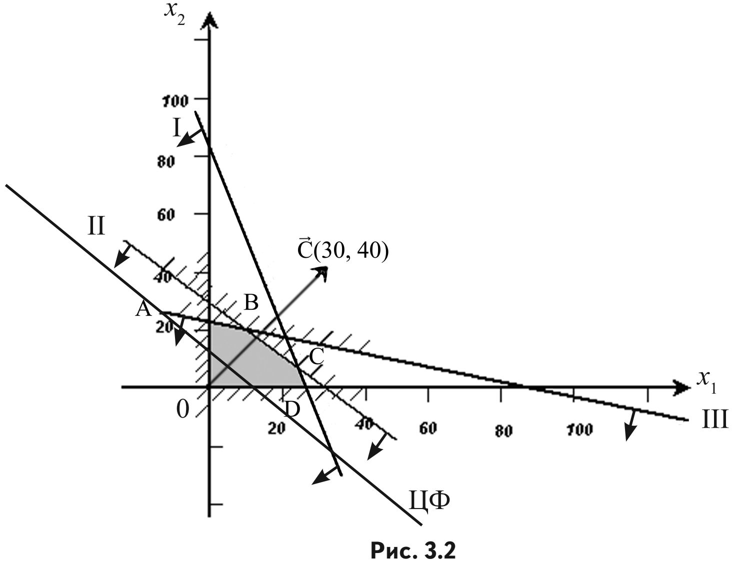


Рис. 3.2

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1+4x_2 \leq 300$. Для этого, построив прямую $12x_1+4x_2=300$ (I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух плоскостей, например точку O (0;0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0+4 \cdot 0<300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O (0;0), определяется неравенством $12x_1+4x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 3.2.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как показано на рис. 3.2, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция $W(x)$ принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $C = (30;40)$ и прямую $30x_1+40x_2=h$, где h – некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1+40x_2=h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h=480$ и построим прямую $30x_1+40x_2=480$.

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1+40x_2=480$ в направлении вектора C, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 4x_1+4x_2=120, \\ 3x_1+12x_2=252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим x_1=12, x_2=18. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида А и 18 изделий вида В, то оно получит максимальную прибыль, равную $W(x)_{max}$=30·12+40·18=1080 руб.

Содержательная интерпретация полученных результатов приводит к следующим выводам:

1) изделий первого вида должно быть произведено 12 единиц; изделий второго вида – 18 единиц;
2) на производство изделий задействовано полностью сырье 3-го и 2-го вида; при этом будет сэкономлено 216 единиц сырья 1-го вида;
3) выручка, соответствующая оптимальной организации производства, составит 1080 у.д.е.

Примеры для решения задач ЛП графическим методом представлены в приложении 2.

3.3. Симплекс-метод решения задач ЛП

3.3.1. Стандартная форма задач ЛП

Симплекс-метод (СМ) решения задач ЛП относится к числу *итерационных* методов, а это означает, что в процессе поиска оптимального решения однотипные вычислительные процедуры, выполняемые в определенной последовательности, повторяются до тех пор, пока это решение не будет получено.

В основе построения СМ лежит положение о том, что оптимальному решению всегда соответствует одна из *угловых* (или *экстремальных*) точек области допустимых решений. Исходя из этого в вычислительной процедуре СМ реализуется упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой *начальной допустимой* угловой точки, осуществляются переходы от одной *допустимой* угловой точки ОДР к другой. Каждый очередной переход осуществляется только в смежную (соседнюю) точку, при этом переход к предшествующей, уже пройденной экстремальной точке производиться не может. Перед каждым очередным переходом в смежную точку выполняется проверка на *опти-*

мальность той точки, которая в данный момент достигнута процедурой поиска оптимального решения СМ.

Одна из главных трудностей, возникающих при организации поиска СМ, заключается в определении *начальной допустимой* точки. С целью уменьшения этой трудности задачу ЛП приводят к стандартной форме, которая предполагает следующее:

а) Все ограничения-неравенства представляются в виде уравнений с *неотрицательной* правой частью. Для приведения ограничений, записанных в виде неравенств типа $\leq$ или $\geq$, к уравнениям необходимо прибавить остаточную переменную к левой части ограничения типа $\leq$ или вычесть избыточную переменную из левой части ограничения типа $\geq$. С содержательной точки зрения *остаточная* переменная представляет собой остаток, неизрасходованную часть какого-то ресурса, а *избыточная* переменная – превышение результатов деятельности над нормативными или плановыми заданиями. И на *остаточные*, и на *избыточные* переменные также накладывается условие неотрицательности.

Правые части сформированных таким образом равенств всегда можно сделать неотрицательными, умножив обе части равенств на (–1).

Пример 3.3. Даны ограничения-неравенства задачи ЛП:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq -b_3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Результатом приведения к стандартному виду является следующая система линейных равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - s_2 = b_2, \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - s_3 = b_3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

б) На значения всех переменных задачи накладывается условие *неотрицательности*. Если какая-либо из переменных не имеет ограничения в знаке, то ее представляют в виде разности двух неотрицательных переменных: $x_i = x_i' - x_i''$, где $x_i', x_i'' \geq 0$. Представленную таким образом переменную подставляют во все ограничения и в целевую функцию.

Пример 3.4. Дана задача ЛП: найти $max\ W(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge. b_2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, x_2 – не ограничена в знаке.

Выполнение условия неотрицательности всех переменных приводит к следующей задаче: найти $max\ W(x) = c_1x_1 + c_2x'_2 - c_2x''_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x'_2 - a_{12}x''_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x'_2 - a_{22}x''_2 \ge. b_2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x'_{2,}\ x''_2 \ge 0.$

в) Целевая функция задачи ЛП, представленной в стандартной форме, может подлежать как максимизации, так и минимизации. Исходную ЦФ в ряде случаев можно изменить: максимизация некоторой ЦФ эквивалентна минимизации той же ЦФ, взятой с противоположным знаком, и наоборот. Например, задача максимизации ЦФ $W(x) = x_1 + 4x_2$ эквивалентна задаче минимизации ЦФ $(-W(x)) = (-1)x_1 + (-4)x_2$.

3.3.2. Основные понятия симплекс-метода

Если задача ЛП имеет ограничения только типа ≤, трудностей в получении начального допустимого решения не возникает. В результате приведения задачи ЛП к стандартной форме ограничения образуют систему линейных уравнений с n неизвестными, образующими векторное пространство, размерность которого m определяется количеством ограничений исходной задачи. При $m = n$ система уравнений имеет единственное решение, при $m > n$ в задаче ЛП возникает избыточность (часть уравнений оказывается лишней), при $m < n$ задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений. Именно этот последний случай и рассматривается в теории линейного программирования.

Пример 3.5. Задача ЛП из примера 3.1 после приведения к стандартной форме приобретает вид:

найти $max\ W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$
при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 4, \\ -x_1 + x_2 + s_2 = 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0,\ s_1, s_2 \geq 0.$$

Для этой задачи $m = 2$, а $n = 4$.

Всякая угловая точка ОДР соответствует *базисному решению* задачи ЛП, представленной в стандартной форме. Для определения понятия *базисного решения* рассмотрим систему линейных уравнений из примера 3.5. Коэффициенты при переменных и правые части ограничений этой системы являются координатами m-мерных векторов: $P_1 = (1;-1)^т$, $P_2 = (1;1)^т$, $P_3 = (1;0)^т$, $P_4 = (0;1)^т$, $B = (4;2)^т$. Систему линейных уравнений можно записать в векторной форме:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3s_1 + P_4s_2 = B.$$

Каждая остаточная переменная вводится только в одно ограничение, поэтому в остальных ограничениях коэффициенты при этой переменной, естественно, будут равны нулю. По этой причине в рассматриваемой системе линейных уравнений векторы P_3, P_4 являются линейно независимыми единичными векторами, т.е. составляют базис всей приведенной системы векторов. Переменные s_1, s_2, в данном случае соответствующие векторам базиса, называются базисными, а переменные x_1, x_2 – небазисными, или свободными. С геометрической точки зрения роль *базисных переменных* состоит в том, что они определяют величину проекции вектора B на направления векторов базиса (рис. 3.3).

С введением остаточных переменных базисное решение получить нетрудно. Базисным решением является такое частное решение системы линейных уравнений, которое получено следующим образом: все (n – m) *свободных переменных* приравниваются нулю, а *m базисных переменных*, в качестве которых и выступают остаточные переменные, приравниваются правым частям уравнений.

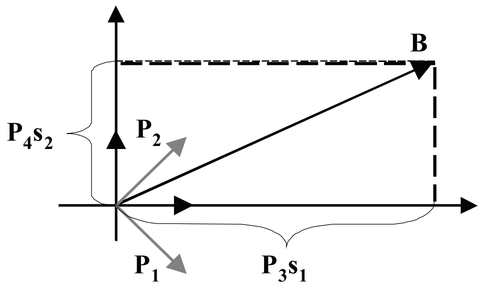


Рис. 3.3. Векторное представление ограничений задачи ЛП

Если базисное решение удовлетворяет условию неотрицательности правых частей, то оно называется допустимым базисным решением. Исходной точкой поиска в СМ является начало координат. Решение, удовлетворяющее этой точке, называется начальным. Для задачи ЛП из примера 3.5 *начальным допустимым базисным решением* является следующее: в качестве *базисных* принимаются остаточные переменные, которые принимают значения $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, остальные переменные x_1, x_2 являются в этом случае *свободными* и приравниваются нулю. Таким образом, для задачи ЛП, имеющей ограничения только типа $\leq$, *начальное допустимое базисное решение* получается после приведения ее к стандартному виду.

С помощью метода исключений Жордана–Гаусса можно найти все базисные решения системы уравнений, последовательно переходя от одного единичного базиса к другому. Общее количество таких базисных решений определяется количеством сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$, по сути отражающим максимальное количество итераций, которое может быть выполнено при решении задачи ЛП симплекс-методом. Однако на самом деле количество таких итераций гораздо меньше, поскольку в симплекс-методе реализуется такой целенаправленный процесс перехода от одной экстремальной точки к другой, что в результате происходит увеличение значения ЦФ (в задаче ее максимизации).

Смежные экстремальные точки ОДР различаются только одной переменной в каждой группе базисных и свободных переменных. Например, на рис. 3.1 началу координат соответствуют базисные переменные s_1, s_2 и небазисные x_1, x_2. Для соседней точки F группу базисных переменных составляют x_1 и s_2, а группу небазисных – x_2 и s_1. Как видно, группы базисных и небазисных переменных в точках O и F действительно различаются лишь одной компонентой. Это свойство экстремальных точек позволяет определить каждую последующую смежную экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных переменных текущей базисной переменной.

Для рассмотрения этого процесса взаимной замены переменных вводятся понятия включаемой и исключаемой переменных. Включаемая переменная – это небазисная в данный момент переменная, но которая будет включена в состав базисных на следующей итерации. Исключаемая переменная – это переменная, которая на следующей итерации будет исключена из состава базисных.

3.3.3. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим задачу ЛП из примера 3.5. Процедуру решения задачи с использованием СМ удобнее представить с помощью таблицы 3.2, которая является реализацией обычной жордановой таблицы. В левом столбце ее отображаются номер итерации и указываются включаемые и исключаемые на очередной итерации переменные. В столбце «Базис» вписываются базисные на данной итерации переменные. Столбец «Решения» содержит правые части ограничений задачи ЛП на нулевой итерации, базисные решения, получаемые в ходе очередной итерации, в этом же столбце будет находиться и оптимальное решение задачи. В столбце «Условия допустимости» содержится отношение, с помощью которого осуществляется проверка условий *допустимости* при выборе переменной, исключаемой из состава базисных. Столбец «Контрольная сумма» служит для проверки правильности проводимых расчетов и в каждой клеточке содержит арифметическую сумму всех чисел соответствующей строки. Остальные столбцы содержат в заголовке имена всех базисных и небазисных переменных.

Шаг 0. Используя стандартную форму задачи ЛП, определить начальное допустимое базисное решение (НДБР), приравняв нулю $(n - m)$ свободных переменных. На этом шаге строится исходная таблица и в нее заносятся все базисные переменные, коэффициенты при переменных в ограничениях, а также их правые части. Для ЦФ в таблице вводится отдельная строка ($W(x)$-строка). Для включения в таблицу ЦФ преобразуют путем переноса ее правой части влево от знака равенства, например, $W(x) - x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$.

Таблица 3.2

№ итер.	Базис. Перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	Решение	Условие. допуст.	Контр. Сумма
0	Z	-1	-4	0	0	0	0	-5
x_2 вкл.,	s_1	1	1	1	0	4	4/1 = 4	7
s_2 искл.	s_2	-1	$\boxed{1}$	0	1	2	2/1 = 2	3
1	Z	-5	0	0	4	8		7
x_1 вкл.,	s_1	$\boxed{2}$	0	1	-1	2	2/2 = 1	4
s_1 искл.	x_2	-1	1	0	1	2	–	3
2	Z	0	0	5/2	3/2	13		17
(оптимум)	x_1	1	0	1/2	-1/2	1		2
	x_2	0	1	1/2	1/2	3		5

Шаг 1. Из числа текущих небазисных переменных выбирается включаемая в базис новая переменная, положительное приращение которой приводит к увеличению ЦФ. На этом шаге проверяется условие оптимальности: в задачах максимизации ЦФ включаемой в состав базисных является переменная, которая имеет наибольший отрицательный коэффициент в Z-строке симплекс-таблицы. Если все коэффициенты Z-строки оказались положительными, то это свидетельствует о достижении ЦФ <u>оптимального</u> значения. В задачах минимизации ЦФ признаком оптимальности решения является отрицательность всех коэффициентов Z-строки. Переменная, включаемая в состав базисных, определяет *ведущий* столбец таблицы.

Шаг 2. Из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение. На этом шаге проверяется условие допустимости: в задачах и максимизации, и минимизации ЦФ исключаемой выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к *положительному* коэффициенту ведущего столбца минимально, т.е. $s_i = min\ \{b_1/a_{11};\ b_2/a_{21}\}$. Существо этой проверки в том, что следующая экстремальная точка, в которую будет осуществлен переход, должна принадлежать ОДР. Величина отношения определяет приращение, которое получает включаемая в состав базисных переменная. Переменная, исключаемая из состава базисных, определяет *ведущую* строку.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым базисным и небазисным переменным. Элемент таблицы на пересечении ведущей строки и ведущего столбца называется *ведущим*. Очередная итерация проводится по следующей схеме:

1) все элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент;
2) все элементы ведущего столбца заменяются нулями, а сам ведущий элемент – единицей;
3) все остальные элементы симплекс-таблицы, включая Z-строку и элементы столбцов «Решение» и «Контрольная сумма», вычисляются по правилу «прямоугольника».

a_{is}	...	a_{ij}
...	...	...
$\boxed{a_{ks}}$	...	a_{kj}

$\bar{a}_{ij} = \dfrac{a_{ij}\, a_{ks} - a_{is} \cdot a_{kj}}{a_{ks}}$, где a_{ks} – ведущий элемент.

Осуществляется переход к шагу 1.

3.3.4. Метод искусственных переменных

Задачи ЛП с использованием СМ легко решаются лишь при ограничениях типа $\leq$. При ограничениях-равенствах или ограничениях типа $\geq$, когда имеют дело с остаточными переменными, возникают трудности, связанные с получением *начального допустимого базисного решения*.

Для получения этого решения используются искусственные переменные, которые включаются в левые части уравнений, не содержащие очевидных базисных решений. Обеспечивая получение НДБР, эти переменные играют роль остаточных переменных, но, не имея физического смысла, в процессе оптимизации они должны оказаться равными нулю.

С применением искусственных переменных связаны два основных метода: метод больших штрафов (М-метод) и двухэтапный метод.

Метод больших штрафов. В этом методе в задачу ЛП вводится обратная связь, которая обеспечивает получение оптимального решения при нулевых искусственных переменных. В качестве такой обратной связи используется *штраф*, накладываемый на ЦФ за использование искусственных переменных.

Пример 3.6. Рассмотрим задачу ЛП из примера 3.1, введя в условия дополнительное ограничение:

определить $max\ W(x) = x_1 + 4x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

После приведения задачи ЛП к стандартному виду получим:

найти $max\ W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 4, \\ -x_1 + x_2 + s_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - s_3 = 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0, s_1, s_2, s_3 \ge 0.$$

При обычном подходе для получения начального допустимого базисного решения необходимо приравнять нулю небазисные переменные x_1, x_2, а базисные переменные s_1, s_2, s_3 приравнять правым частям уравнений. Однако в этом случае переменная s_3 имеет отрицательное значение, что противоречит условию неотрицательности всех переменных задачи ЛП. Введем в третье уравнение искусственную переменную R_1, которая будет играть роль остаточной переменной. За использование этой переменной в ЦФ вводится штраф – достаточно большой отрицательный коэффициент M. В задачах минимизации ЦФ этот коэффициент является положительным. В результате задача ЛП приводится к следующему виду:

найти $max\ W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_1$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 4, \\ -x_1 + x_2 + s_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - s_3 + R_1 = 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0, s_1, s_2, s_3, R_1 \ge 0.$$

Система линейных равенств содержит $m = 3$ уравнения и $n = 6$ переменных, поэтому начальное базисное решение должно содержать $n - m = 3$ нулевых переменных и 3 базисных переменных. Если положить равными нулю свободные переменные x_1, x_2, s_3, то сразу будет получено требуемое начальное базисное решение: $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, $R_1 = 3$.

Таблица 3.3

№ итер.	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Усл. доп.
0 x_2 вкл., R_1 искл.	Z	-1-M	-4-M	0	0	M	0	-M	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 s_3 вкл., s_2 искл.	Z	3	0	0	0	-4	4+M	4	
	s_1	0	0	1	0	1	-1	3	3
	s_2	-2	0	0	1	1	-1	1	1
	x_2	1	1	0	0	-1	1	1	–
2 x_1 вкл., s_1 искл.	Z	-5	0	0	4	0	M	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-2	0	0	1	1	-1	1	–
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	–
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	M	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

После этого условия задачи переформулируются таким образом, чтобы процесс решения можно было представить в удобной табличной форме. Для этого необходимо, чтобы начальное решение в явном виде присутствовало в столбце, характеризующем правые части всех уравнений задачи. С этой целью в уравнение ЦФ подставляется выражение для искусственной переменной, полученное из соответствующего ограничения: $R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3$. В результате получается следующее выражение для ЦФ:

$$W(x) = x_1 + 4x_2 - \mathrm{M}(3 - x_1 - 3x_2 + s_3).$$

После приведения подобных членов Z-уравнение в симплекс-таблице будет иметь вид: $W(x) - (1 + M)x_1 - (4 + M)x_2 + \mathrm{M}s_3 = - M$.

Последовательность решения задачи представлена в табл. 3.3. Оптимальному решению соответствует точка $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, где ЦФ $W(x) = 13$. Так как в решении отсутствует искусственная переменная, то оно является допустимым оптимальным решением задачи.

Двухэтапный метод. Недостаток М-метода обусловлен большой величиной штрафа М, что зачастую приводит к ошибкам в вычислениях из-за процедуры округления чисел. В двухэтапном методе штраф не используется, поэтому он лишен такого недостатка. Процедура поиска оптимального решения здесь организована как бы в два этапа (отсюда и название этого метода).

На первом этапе вводятся искусственные переменные, необходимые для получения стартовой точки; формируется фиктивная ЦФ φ, как сумма искусственных переменных, выраженных из соответствующих ограничений; решается задача минимизации функции φ. Если минимальное значение функции φ равно нулю, то исходная задача имеет допустимое решение, в противном случае задача решения не имеет. Основная цель первого этапа – получение начального решения исходной задачи.

На втором этапе решается исходная задача, при этом в качестве начального решения используется оптимальное решение, полученное на первом этапе.

В симплекс-таблице для двухэтапного метода вводится еще одна строка для фиктивной ЦФ φ. На первом этапе условие оптимальности проверяется только по элементам φ-строки, а с элементами Z-строки выполняются обычные для симплекс-метода процедуры расчетов. С достижением нулевого значения функции φ-строка, соответствующая этой функции, исключается из симплекс-таблицы и дальнейшие итерации, составляющие второй этап, осуществляются с использованием элементов Z-строки.

Пример 3.7. Рассмотрим задачу из примера 3.6. После приведения исходной задачи ЛП к стандартному виду и введения искусственной переменной формируется фиктивная ЦФ:

$\varphi = R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3$.

Для включения в симплекс-таблицу функция приводится к виду: $\varphi - x_1 - 3x_2 + s_3 = 3$.

Решение задачи симплекс-методом представлено в табл. 3.4.

Таблица 3.4

№ итер.	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Усл. доп.
0 x_2 вкл., R_1 искл.	Z	-1	-4	0	0		0	0	
	φ	1	3	0	0	-1	0	3	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 s_3 вкл., s_2 искл.	Z	1/3	0	0	0	-4/3	4/3	4	
	φ	0	0	0	0	0	-1/3	0	
	s_1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3	3	3
	s_2	-4/3	0	0	1	1/3	-1/3	1	1
	x_2	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	1	–
2 x_1 вкл., s_1 искл.	Z	-5	0	0	4	0	0	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-4	0	0	3	1	-1	3	–
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	–
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	0	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

Количество необходимых итераций М-метода и двухэтапного метода всегда одинаково. Преимуществом двухэтапного метода является то, что при его применении не требуется использование в расчетах постоянной М.

4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Двойственная задача ЛП

Двойственная задача – это вспомогательная задача ЛП, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется *прямой* задачей ЛП (ПЗЛП).

Необходимость изучения двойственной задачи ЛП (ДЗЛП) обусловлена следующими причинами. Во-первых, трудности в решении задач ЛП зависят не от количества переменных n, а от количества ограничений m, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если ПЗЛП, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений ($m > n$), то в этом случае целесообразно перейти к ДЗЛП. Сформированная ДЗЛП будет иметь m переменных и n ограничений, т.е. количество итераций при этом уменьшится. Во-вторых, наличие связей между оптимальными решениями ПЗЛП и ДЗЛП позволило разработать *двойственный симплекс-метод*, который находит применение при анализе чувствительности задач ЛП и в процедурах целочисленного линейного программирования.

При переходе к ДЗЛП в качестве исходной принимается стандартная форма прямой задачи ЛП. ДЗЛП формируется по следующим правилам:

1) каждому ограничению ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП y_i, $i = 1,..,m$; правая часть ограничения ПЗЛП b_i становится коэффициентом ЦФ $W(x)$ ДЗЛП при переменных y_i;

2) каждой переменной ПЗЛП x_j, $j = 1,..,n$ соответствует ограничение ДЗЛП; коэффициенты ЦФ Z ПЗЛП c_j становятся правыми частями ограничений ДЗЛП;

3) коэффициенты a_{ij} при переменных x_j в ПЗЛП становятся коэффициентами при переменных y_i в ДЗЛП.

При переходе к ДЗЛП происходит изменение направления оптимизации, ограничений и переменных, что отражено в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Прямая задача ЛП в станд. форме	Двойственная задача ЛП		
	ЦФ	Ограничения	Переменные
max	*min*	$\geq$	Не имеют ограничений в знаке
min	*max*	$\leq$	

Пример 4.1. Дана прямая задача ЛП:

найти *max* $W(x) = x_1 + 2x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_{1,}x_2 \geq 0.$$

Необходимо сформировать двойственную задачу ЛП.

Для построения ДЗЛП требуется прямую задачу привести к стандартной форме:

найти *max* $W(x) = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_3$ при ограничениях:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 + x_2 & + s_1 & & & & = 8, \rightarrow y_1 \\
-x_1 + x_2 & & + s_2 & & & = 2, \rightarrow y_2 \\
x_1 + x_2 & & & - s_3 + R_3 & & = 4, \rightarrow y_3 \\
x_{1,} \quad x_2 \geq & 0, & s_1, & s_2, & s_3 \geq & 0. \\
\downarrow \quad \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{1-е} \quad \text{2-е} & \text{3-е} & \text{4-е} & \text{5-е} & \text{6-е} & W(x) \\
\text{огр.} \quad \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} &
\end{array}$$

В соответствии с приведенными выше правилами сформированная ДЗЛП имеет вид:

найти *min* $W(x) = 8y_1 + 2y_2 + 4y_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0_{,} y_2 \geq 0, -y_3 \geq 0 \ (y_3 \leq 0), y_3 \geq \text{-}M.$$

По правилам, приведенным в табл. 4.1, двойственные переменные $y_{1,}$ y_2, y_3 не ограничены в знаке, однако введение остаточных переменных в ПЗЛП приводит к появлению более жестких условий: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ – неотрицательности переменных. Для переменной y_3 условие неограниченности в знаке остается в силе. Дело в том, что величина М имеет большое положительное значение, поэтому ограничение $y_3 \geq -M$ равносильно неограниченности переменной y_3 как в знаке, так и в значении.

При решении ДЗЛП ее необходимо представить в виде разности двух неотрицательных переменных: $y_3 = y_3' - y_3''$, $y_3' \geq 0$, $y_3'' \geq 0$.

Между оптимальными решениями прямой и двойственной задачами ЛП существует тесная взаимосвязь. Это означает, что решение одной из этих задач без каких-либо дополнительных вычислений может быть получено из итоговой оптимальной симплекс-таблицы другой задачи. Рассмотрим эту связь на прямой и двойственной задачах из примера 4.1. В табл. 4.2 и 4.3 приведены оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач ЛП. Из сравнения таблиц можно установить следующее.

Во-первых, в точке, соответствующей оптимальным решениям обеих задач, выполняется равенство: $max\ W(x) = min\ W(x)$. В задаче максимизации ЦФ последовательно увеличивается от начального значения до оптимального $W(x) = 13$. В задаче минимизации ЦФ уменьшается от начального значения до оптимального $W(x) = 13$. Из этого следует, что процессы максимизации и минимизации сходятся в некоторой «точке равновесия», после достижения которой ЦФ задач улучшить невозможно. Такая точка достигается при равенстве значений ЦФ и соответствует их оптимальным значениям. Во-вторых, базисные решения ПЗЛП можно получить непосредственно из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП, и наоборот. В табл. 4.2 темным цветом выделены переменные начального базиса прямой задачи и коэффициенты при них в Z-строке. Этим переменным соответствуют 3-е, 4-е и 6-е ограничения ДЗЛП ($y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq -M$). Двойственные переменные определяются по следующему правилу: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном Z-уравнении ПЗЛП равен разности между левой и правой частями ограничения ДЗЛП, ассоциированного с данной начальной переменной. В этом случае $3/2 = y_1 - 0$, $1/2 = y_2 - 0$, $M = y_3 + M$. Отсюда $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/2$ и $y_3 = 0$, в справедливости чего можно убедиться, сравнив эти значения двойственных переменных с оптимальным решением ДЗЛП в табл. 4.2.

Аналогичным образом могут быть получены значения переменных ПЗЛП из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП. В табл. 4.3, где приведено оптимальное решение ДЗЛП, выделены темным цветом переменные начального базиса ДЗЛП и коэффициенты при них в оптимальной Z-строке. Очевидно, что двойственной к ДЗЛП будет являться исходная ПЗЛП. Поэтому при построении двойственной к ДЗЛП задачи переменной R_1 будет соответствовать переменная x_1 прямой задачи, а переменной R_2 – переменная x_2 прямой задачи с условиями $x_1 \geq M$ и $x_2 \geq M$.

Таблица 4.2

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_3	Реш.
Z	0	0	3/2	1/2	0	M	13
s_3	0	0	1	0	1	-1	4
x_2	0	1	½	1/2	0	0	5
x_1	1	0	½	-1/2	0	0	3

Значения переменных ПЗЛП определяются по следующему правилу: коэффициенты в оптимальном Z-уравнении равны разности между левыми и правыми частями соответствующих ограничений прямой задачи, ассоциированных с начальными переменными ДЗЛП. В данном случае имеем: $3 - M = x_1 - M$, $5 - M = x_2 - M$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = 5$, что соответствует оптимальному решению ПЗЛП в табл. 4.2.

Таблица 4.3

Базис	y_1	y_2	y_3'	y_3''	s_1	R_1	s_2	R_2	Реш.
Z	0	0	0	0	-3	$3 - M$	-5	$5 - M$	13
y_1	1	0	-1	0	-1/2	1/2	-1/2	1/2	3/2
y_2	0	1	0	-1	½	-1/2	-1/2	1/2	1/2

Соотношения двойственности задач ЛП позволили разработать *двойственный симплекс-метод*, при котором сначала получается недопустимое, но лучшее, чем оптимальное решение, а затем осуществляется систематическое приближение его к области допустимых решений. Этот метод используется для определенного класса задач ЛП, в которых уже на начальной итерации можно получить оптимальное, но недопустимое решение, но еще важнее то, что он используется при анализе чувствительности задач ЛП. Применение двойственного симплекс-метода предусматривает выполнение следующих действий:

1) преобразование всех ограничений задачи ЛП в ограничения типа $\leq$, при этом часть ограничений будет иметь отрицательные правые части; для всех ограничений вводятся остаточные переменные;

2) проверка условий допустимости, которая заключается в выявлении переменной, исключаемой из состава базисных на очередной итерации. В качестве исключаемой выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная. Если все базисные переменные неотрицательны, то это свидетельствует о получении оптимального и допустимого решения;

3) проверка условия оптимальности, которая заключается в выборе переменной, включаемой в состав базисных на очередной итерации. Для этого вычисляются отношения коэффициентов Z-строки к соответствующим коэффициентам ведущей строки. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации ЦФ вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задачах максимизации ЦФ – отношение, наименьшее по абсолютной величине. Задача ЛП не имеет решения, если знаменатели всех отношений равны нулю или положительны;

4) после выбора включаемой и исключаемой переменных осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Пример 4.2. Найти $min\ W(x) = 2x_1 + x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

После преобразований получим следующую задачу:
найти $min\ W(x) = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + s_1 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 + s_2 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + s_3 = 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Начальная симплекс-таблица представлена в табл. 4.4.

В соответствии с условием допустимости в качестве исключаемой из состава базисных выбирается переменная s_2, поскольку имеет наибольшее отрицательное значение.

Таблица 4.4

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	S_3	Реш.
Z	-2	-1	0	0	0	0
s_1	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	1	2	0	0	1	3

Включаемой в состав базисных является переменная x_2, для которой характерно минимальное отношение коэффициента Z-строки к коэффициенту ведущей строки – 1/3 (для переменной x_1 это отношение составляет 1/2 > 1/3). Далее выполняется процедура пересчета симплекс-таблицы.

Примеры ДЗЛП для последующего их решения представлены в приложении 4.

4.2. Анализ чувствительности задач линейного программирования

Задача ЛП имеет *статическое* оптимальное решение, поэтому, как только изменяются исходные условия, полученное решение теряет свою актуальность. Анализ чувствительности задачи ЛП как раз и связан с исследованием возможных изменений полученного оптимального решения в результате изменений исходных данных задачи. Анализ чувствительности – это процесс, который реализуется после того, как получено оптимальное решение.

Для проведения такого анализа используется итоговая симплекс-таблица, из которой либо непосредственно, либо при помощи простых вычислений получают важную и существенную информацию относительно 1) оптимального решения, 2) статуса ресурсов, 3) ценности каждого ресурса, 4) чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, 5) чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ.

Оптимальное решение. С точки зрения практического применения результатов решения задачи ЛП классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения, поэтому ее можно не учитывать. Переменные, которые отсутствуют в столбце «Базис», имеют нулевые значения, значения же остальных переменных и значение ЦФ приводятся в столбце «Решение».

Определение статуса ресурсов предусматривает отнесение ресурсов задачи ЛП к разряду *дефицитных* или *недефицитных*. К дефицитным относятся ресурсы, если в оптимальном решении предусматривается их полное использование; если же ресурс используется не полностью, то его следует отнести к недефицитным. Статус ресурсов любой задачи ЛП определяется на основании значений остаточных переменных. Если остаточная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном использовании ресурса, т.е. ресурс является дефицитным. Если же остаточная переменная не равна нулю, то это означает, что ресурс использован не полностью и относится, таким образом, к недефицитным.

Ценность ресурсов. Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения ЦФ, приходящегося на единицу прироста объема рассматриваемого ресурса. В итоговой симплекс-таблице ценность ресурсов можно определить по значениям коэффициентов при остаточных переменных s_i, $i = 1, .., m$, начального базиса, фигурирующих в z-уравнении оптимальной симплекс-таблицы. Поскольку переменная s_i всегда связана только с ресурсом i, то идентификация ресурса происходит однозначно. Столбцы итоговой симплекс-таблицы, связанные с искусственными переменными, при анализе чувствительности могут быть удалены как не содержащие полезной информации.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу ЛП, придав ей экономическое содержание:

найти $max\ W(x) = 4x_1 + 3x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 24 \text{ (ресурс 1)}, \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \text{ (ресурс 2)}, \\ -x_1 + x_2 \le 2 \text{ (ресурс 3)}, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Предположим, что речь идет об определении объемов производства продукции двух типов: x_1 (прод.1) и x_2 (прод.2). Для их производства используются три вида ресурсов, запасы которых ограничены и представлены правыми частями ограничений. Коэффициенты при переменных в ограничениях характеризуют интенсивность расходования ресурсов на единицу каждого вида продукции. Коэффициенты ЦФ имеют смысл стоимости продукции каждого вида (например, тыс. руб./прод.j), а ЦФ в этом случае – прибыль от реализации изготавливаемой продукции (тыс. руб.).

Итоговая симплекс-таблица задачи ЛП представлена в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.
Z	0	0	1/6	4/7	0	18
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	3
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	2

Из табл. 4.5 видно, что переменная s_3=2, а переменные s_1, s_2, будучи небазисными, равны нулю. Это означает, что ресурс 3 является недефицитным, а ресурсы 1 и 2 – дефицитными, т.е. расходуемыми полностью без остатка.

Ценность ресурсов определяется только для дефицитных ресурсов. В данном случае эта информация содержится в Z-строке для переменных s_1 и s_2. Размерность каждого элемента итоговой симплекс-таблицы устанавливается отношением единиц измерения элементов столбца «Решение» к единицам измерения каждой из переменных, сопоставленных со столбцами. Поэтому элемент в столбце для s_1 имеет размерность (тыс. руб./ресурс 1) и характеризует интенсивность улучшения оптимального значения ЦФ при увеличении на единицу запасов ресурса 1. Величины, характеризующие ценность ресурсов, называют еще *теневыми ценами* или *издержками производства*. Учитывая, что значения двойственных переменных определяются с помощью коэффициентов в Z-строке, можно сделать следующий вывод: двойственные переменные характеризуют издержки производства. Любое ограничение ДЗЛП ≥ (или ≤) c_j отражает суммарные издержки на производство j-го вида продукции.

Анализ чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов. Для проведения такого анализа используется следующий прием: вводится некоторая величина Δ_i в правую часть для ресурса b_i. Допустим, что такая величина введена для ресурса 2 в исходную задачу ЛП. Если провести вновь все алгебраические преобразования и выполнить все итерации, то в итоговой симплекс-таблице величина Δ_2 будет фигурировать только в столбце «Решение», так как этот столбец не может быть ведущим. Коэффициенты при Δ_2 равны коэффициентам столбца для переменной s_2, соответствующей ресурсу 2. Эти результаты представлены в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.
Z	0	0	1/6	4/7	0	$18 + 4/7\Delta_2$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	$2 - 1/4\Delta_2$
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	$3 + 5/8\Delta_2$
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	$2 + 7/8\Delta_2$

Так как введение Δ_2 сказывается только на правой части симплекс-таблицы, то изменение запасов ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_2 не может быть отрицательной и должна быть ограничена таким интервалом значений, при которых выполняется условие неотрицательности правых частей ограничений (или неотрицательности переменных), т.е.

$$x_1 = 2 - 1/4\Delta_2 \geq 0,$$
$$x_2 = 3 + 5/8\Delta_2 \geq 0,$$
$$s_3 = 2 + 7/8\Delta_2 \geq 0.$$

Решение этой системы неравенств приводит к результату: $-16/7 \leq \Delta_2 \leq 8$. Любое значение Δ_2, выходящее за пределы указанного интервала (т.е. уменьшение запаса ресурса 2 на 16/7 единиц или увеличение его на 8 единиц), приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных. При известных границах изменения Δ_2 устанавливаются реальные границы изменения запасов ресурса 2: $24 + \Delta_{2min} \leq b_2 \leq 24 + \Delta_{2\,max}$.

Аналогичная процедура выполняется для всех остальных ресурсов, являющихся дефицитными.

Анализ чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ. Существо анализа сводится к установлению допустимых границ изменения коэффициентов ЦФ, при которых оптимальные значения переменных задачи ЛП остаются неизменными (хотя значение ЦФ при этом меняется).

Для установления таких границ, например, коэффициета c_1 в уравнение ЦФ вводится величина изменения δ_1 этого коэффициента. Поскольку уравнение ЦФ не может быть в процессе преобразований ведущей строкой, то приращение δ_1 будет фигурировать только в Z-строке итоговой симплекс-таблицы. ЦФ в этом случае принимает вид: $W(x) = (4 + \delta_1)x_1 + 3x_2$. Если провести вновь все преобразования, то получим следующие изменения в симплекс-таблице (табл. 4.7):

Таблица 4.7

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.
Z	0	0	$1/6 + 1/6\delta_1$	$4/7 - 1/4\delta_1$	0	$18 + 2\delta_1$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2

Коэффициенты при δ_1 в Z-строке равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке для x_1, поскольку именно для этой переменной была введена величина δ_1 в исходное уравнение ЦФ.

По условиям оптимальности для задачи максимизации ЦФ все элементы Z-строки должны быть неотрицательными, поэтому составляется система неравенств:

$1/6 + 1/6\delta_1 \geq 0,$

$4/7 - 1/4\delta_1 \geq 0.$

Решая систему неравенств, получим: $-1 \leq \delta_1 \leq 16/7$. Эти результаты определяют пределы изменения коэффициента c_1 в ЦФ: $4 + \delta_{1min} \leq c1 \leq 4 + \delta_{1max}$. Таким образом, при уменьшении коэффициента ЦФ до значения $4 + (-1) = 3$ и при увеличении его до значения $4 + 16/7 = 44/7$ оптимальные значения базисных переменных остаются неизменными, хотя значение ЦФ изменяется в соответствии с выражением $18 + 2\delta_1$.

Аналогичным образом определяются границы изменения остальных коэффициентов ЦФ при переменных задачи ЛП.

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Классификация методов решения задач целочисленного линейного программирования

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) – раздел математического программирования, ориентированный на решение задач, в которых на все или на некоторые переменные наложено требование целочисленности. В соответствии с этим определением все задачи ЦЛП делятся на полностью целочисленные и частично целочисленные. В полностью целочисленных задачах требование целочисленности накладывается на все переменные, а в частично целочисленных задачах – только на часть переменных.

Основные трудности решения задач ЦЛП связаны с эффектом округления чисел, возникающим при использовании ЭВТ. Округление чисел неприемлемо для получения решения задачи ЦЛП по следующим причинам:

1) решение в результате округления может быть получено в точке, не являющейся на самом деле оптимальной. Например, если значение одной из базисных переменных в оптимальном решении равно 10,1, то округление ее до 10 может привести к недопустимости решения, т.е. к выходу из области допустимых решений;
2) округление не имеет смысла в том случае, если переменные задачи ЦЛП – булевы, т.е. могут принимать только два значения: 0 или 1;
3) округление невозможно в том случае, если в задаче речь идет о неделимых объектах, например о предприятиях, наручных часах, людях и т.д.

Существуют следующие методы решения задач ЦЛП:

1. *Методы отсечений.* К этой группе методов относятся методы отсекающих плоскостей Гомори, которые разработаны для решения как частично, так и полностью целочисленных задач. Существо метода состоит в следующем: сначала решается задача ЦЛП как задача ли-

нейного программирования без учета требования целочисленности, а затем вводятся дополнительные ограничения, которые отсекают от области допустимых решений части плоскости, не содержащие целочисленных значений переменных.

2. *Комбинаторные методы.* К этой группе методов относится метод ветвей и границ. Существо метода заключается в переборе всех допустимых целочисленных решений. Основная трудность реализации метода состоит в формировании множества приемлемой мощности допустимых целочисленных решений.

3. *Комбинированные методы.* Эти методы используются только тогда, когда целочисленные переменные являются булевыми. Булевы свойства переменных значительно упрощают процесс решения задачи ЦЛП, поэтому существуют специальные процедуры приведения таких задач к виду, где целочисленные переменные преобразуются в булевые. К этой группе методов может быть отнесен метод частичного перебора.

5.2. Метод отсекающих плоскостей Гомори

Идея метода заключается в преобразовании многогранника области допустимых решений, полученного при решении задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных, в выпуклый многогранник, экстремальная точка которого является искомым решением задачи ЦЛП.

5.2.1. Метод Гомори для полностью целочисленных задач

Необходимым условием применения этого алгоритма является целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений. Невыполнение данного условия не позволяет получить целочисленного решения. Дело в том, что требование целочисленности распространяется и на дополнительные переменные задачи ЦЛП, а наличие дробных коэффициентов в ограничениях приводит к нарушению этого требования.

Рассмотрим алгоритм решения полностью целочисленной задачи ЛП.

1. *Решение задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных*. Такая задача ЛП называется задачей с ослабленными ограничениями . Если все базисные переменные задачи целочисленны, то решение считается полученным и выполнение дальнейших процедур не имеет смысла.

2. *Формирование уравнения отсекающих плоскостей Гомори.* Из итоговой симплекс-таблицы выбираются строки, которые соответствуют нецелочисленным значениям базисных переменных. Такие строки называются *производящими*. Все последующие действия основаны на том положении, что любое нецелое число может быть представлено в виде суммы ближайшего наибольшего целого числа и дробной части:

$$\alpha = [\alpha] + f,$$

где $[\alpha]$ – наибольшее целое число ($[\alpha] \le \alpha$), f – дробная часть числа, $0 \le f < 1$. Например: $3\frac{2}{7} = 3 + \frac{2}{7}$; $-2\frac{2}{9} = -3 + \frac{7}{9}$.

Производящую строку записывают в виде уравнения

$$x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} q_j = \beta_i;\ i = \overline{1, m},$$

где β_i – нецелое число, расположенное в столбце «Решение», q_j – дополнительная (остаточная или избыточная) переменная, α_{ij} – коэффициент при дополнительной переменной. Фигурирующие в этом уравнении величины α_{ij} и β_i представляют также в виде суммы целого и дробного чисел:

$$\alpha_{ij} = [\alpha_{ij}] + f_{ij},\ 0 \le f_{ij} < 1;$$
$$\beta_i = [\beta_i] + f_i,\ 0 \le f_i < 1.$$

После подстановки в исходное уравнение величин α_{ij} и β_i как сумм целого и дробного чисел получим:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] q_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = [\beta_i] + f_i.$$

После переноса вправо целых частей уравнение приобретает следующий вид:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = x_i + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] q_{ij} - [\beta_i].$$

Так как x_i и q_j должны быть целочисленными, то правая часть этого выражения также должна быть целочисленной. Но, исходя из имеющегося равенства, следует сделать вывод, что и левая часть этого выражения тоже должна быть целочисленной.

Поскольку $q_j \geq 0$ по условиям задачи линейного программирования, а $f_{ij} \geq 0$ по представлению дробного числа, то $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \geq 0$. Из этого следует, что левая часть последнего равенства может быть представлена в виде

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \leq f_i.$$

Учитывая условие, что $0 < f_i < 1$, неравенство приобретает вид

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j < 1.$$

Левая часть этого неравенства не может быть равной 1, поэтому, делая логическое заключение, можно записать:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \leq 0. \qquad (5.1)$$

Это неравенство является выражением необходимого условия целочисленности и одновременно его можно рассматривать как дополнительное ограничение задачи линейного программирования.

В соответствии с процедурами решения задачи ЛП неравенство (5.1) приводится к стандартному виду введением остаточной переменной s_{n+1}:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j + s_{n+1} = 0.$$

Из нескольких производящих строк, имеющихся в итоговой симплекс-таблице, выбирается та, которая характеризуется максимальным значением дробной части базисной переменной f_i.

Величина f_i определяет вклад дробной части в приближение решения задачи ЦЛП к оптимальной целочисленной точке ОДР: чем больше дробная часть, тем ближе значение базисной переменной к целочисленному оптимальному решению.

После выбора производящей строки формируется уравнение отсечения:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = -f_i. \qquad (5.2)$$

Такая форма представления уравнения необходима для удобства его записи в итоговую симплекс-таблицу. Это ограничение-равенство определяет отсечение Гомори для полностью целочисленных задач.

Уравнение (5.2) является математической формой описания плоскости, отсекающей от ОДР ту ее часть, которая не содержит целочисленных значений. Это уравнение можно получить, выразив небазисные переменные q_j из исходных ограничений стандартной задачи ЛП и подставив их в уравнение (5.2).

3. *Формирование и решение дополнительной задачи ЛП*. Для решения этой задачи используется двойственный симплекс-метод, описанный в предыдущей лекции.

Результатом решения дополнительной задачи ЛП может быть целочисленное значение всех переменных, тогда задача считается решенной. В противном случае осуществляется переход к п. 2 алгоритма.

Количество шагов в методе отсечений Гомори не может быть больше количества переменных исходной задачи, куда входят как переменные ЗЛП, так и дополнительные переменные ($n + m$).

Пример 5.1. Рассмотрим следующую задачу ЦЛП:

найти $max\ Z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3/2x_1 + 1/2x_2 \le 7/2, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_{1,}\ x_2 \ge 0$, целые.

Учитывая требование целочисленности коэффициентов при переменных в линейных ограничениях, необходимо обе части первого ограничения умножить на наименьший общий знаменатель. В результате выполнения этой процедуры исходная задача ЦЛП приобретает вид:

найти $max\ Z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_{1,}\ x_2 \ge 0$, целые.

После приведения к стандартному виду задача представляется следующим образом:

найти $max\ Z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + s_1 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 7, \end{cases}$$

$x_{1,}\ x_2, s_1, s_2 \ge 0$, целые.

Решение этой задачи без учета целочисленности переменных, т.е. задачи с ослабленными ограничениями, даст следующую итоговую симплекс-таблицу (табл. 5.1):

Таблица 5.1

Базис	x_1	X_2	s_1	s_2	Реш.
z	0	0	1/8	5/8	21/4
X_1	1	0	3/8	-1/8	7/4
X_2	0	1	-1/8	3/8	7/4

Как видно из табл. 5.1, базисные переменные имеют нецелочисленные значения, поэтому следующим шагом является формирование отсекающей плоскости Гомори, для чего из симплекс-таблицы выбирается производящая строка. Поскольку при целочисленных значениях переменных значение ЦФ тоже будет целочисленным, то в качестве производящей строки может выбираться и Z-строка симплекс-таблицы. Выбор строки осуществляется по максимуму дробной части f_i тех чисел, что представлены в столбце «Решение». В данном случае максимальные и равные значения $f_1 = f_2 = 3/4$ имеют числа, соответствующие базисным переменным x_1 и x_2, поэтому любая из этих строк может быть выбрана в качестве производящей. Допустим, выбрана строка, соответствующая базисной переменной x_1.

Отсечение Гомори строится на основании равенства (5.2):

$s_3 = 3/8s_1 – 1/8s_2 – 3/4$ или

$s_3 – 3/8s_1 + 1/8s_2 = – 3/4.$

Подстановка этого уравнения в итоговую симплекс-таблицу и последующее выполнение итераций двойственного симплекс-метода приводят к таблице с целочисленными значениями базисных переменных (табл. 5.2):

Таблица 5.2

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.
z	0	0	1/8	5/8	0	5 1/4
X_1	1	0	3/8	-1/8	0	1 3/4
X_2	0	1	-1/8	3/8	0	1 3/4
S_3	0	0	-3/8	1/8	1	-3/4
z	0	0	0	2/3	1/3	5
X_1	1	0	0	0	1	1
X_2	0	1	0	1/3	-1/3	2
s_1	0	0	1	-1	-8/3	2

В том, что составленное выше отсечение Гомори действительно исключает некоторые области многогранника допустимых решений, можно убедиться следующим образом. Для этого в уравнение отсечения Гомори вместо переменных s_1 и s_2 необходимо подставить их выражения, полученные из ограничений стандартной задачи ЛП:

$$s_3 - 3/8(7 - 3x_1 - x_2) + 1/8(7 - x_1 - 3x_2) = - 3/4,$$

или $s_3 + x_1 = 1$. Это уравнение эквивалентно неравенству $x_1 \leq 1$, которое может рассматриваться как дополнительное, третье, ограничение исходной задачи ЦЛП.

Графическое решение задачи представлено на рис. 5.1. Жирными точками показаны точки ОДР, характеризующиеся целочисленными значениями переменных, а штриховой линией – линия, соответствующая третьему ограничению. Как видно, этим ограничением от ОДР отсекается та ее часть, которая не содержит целочисленных значений переменных (выделена более темным цветом). Оптимальное целочисленное решение рассматриваемой задачи достигается в точке E.

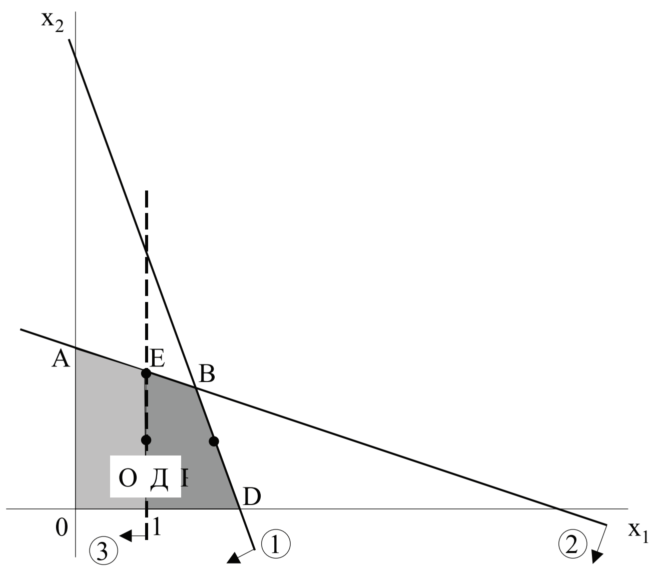


Рис. 5.1. Графический метод решения задач

5.2.2. Метод Гомори для частично-целочисленных задач

Для частично-целочисленных задач характерно то, что требование целочисленности накладывается только на часть переменных. В целом последовательность решения этих задач такова же, как и полностью целочисленных задач, а именно:

1) решается задача ЦЛП с ослабленными ограничениями;
2) на основе итоговой симплекс-таблицы выбирается производящая строка и формируется уравнение отсечения Гомори;
3) решается дополнительная задача ЛП с применением двойственного симплекс-метода. Различие с первым алгоритмом состоит лишь в способе формирования уравнения отсечения Гомори.

Допустим, что получено решение задачи ЦЛП с ослабленными ограничениями. Из итоговой симплекс-таблицы выписывается производящая строка для той переменной x_k, на которую наложено требование целочисленности:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = \beta_k,$$

где q_j – небазисная переменная, на которую, в общем случае, условие целочисленности может быть и не наложено. Правую часть равенства представляют в виде суммы целой и дробной частей числа:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = [\beta_k] + f_k.$$

После группирования целых и дробных частей получают:

$$x_k - [\beta_k] = f_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j.$$

Здесь возможны две ситуации. Если $x_k \le [\beta_k]$, то тогда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k$; если же $x_k \ge [\beta_k] + 1$, тогда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \le f_k - 1$.

Поскольку нецелочисленные коэффициенты α_{kj} могут быть как положительными, так и отрицательными, то их разделяют следующим образом. Вводят J^+ – множество индексов j, для которых $\alpha_{kj} \ge 0$, и J^- – множество индексов, для которых $\alpha_{kj} < 0$. После небольших преобразований получают:

$$\sum_{j\in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k; \quad \frac{\mathrm{f}_k}{\mathrm{f}_k - 1} \sum_{j\in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k,$$

либо составляют совместное уравнение

$$-\left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j + \frac{\mathrm{f}_k}{\mathrm{f}_k - 1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} \le f_k,$$

либо, добавляя остаточную переменную, формируют уравнение отсекающей плоскости:

$$\left\{ s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j - \frac{\mathrm{f}_k}{\mathrm{f}_k - 1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} = -f_k.$$

Это уравнение определяет искомое отсечение Гомори для частично-целочисленных задач и представляет собой необходимое условие целочисленности переменной x_k.

Далее решается дополнительная задача ЛП (с расширенной симплекс-таблицей) двойственным симплекс-методом и определяется целочисленное значение рассматриваемой переменной.

Основным недостатком метода отсекающих плоскостей Гомори является невозможность решения целочисленных задач большой размерности .

5.3. Метод ветвей и границ

Этот метод так же, как и метод отсечений Гомори, применим для решения и полностью, и частично-целочисленных задач, он тоже основан на первоначальном решении задачи ЛП с ослабленными ограничениями. Идея метода основана на переборе всех возможных комбинаций целочисленных значений переменных задачи. Однако при большой размерности задачи ЦЛП подобный перебор может потребовать много времени, а иногда и вообще оказаться невозможным. Рациональность этого процесса обеспечивается рядом процедур, которые существенно снижают количество просматриваемых комбинаций.

Процесс решения задачи состоит из нескольких последовательно выполняемых шагов.

1. *Решение задачи ЛП с ослабленными ограничениями*. Если ЦФ и переменные удовлетворяют требованию целочисленности, то полученное решение рассматривается в качестве оптимального. В противном случае осуществляется формирование ветвей исследования.

2. *Формирование ветвей исследования*. Допустим, условию целочисленности не удовлетворяют переменные x_k, $x_{r.}$ Тогда на основе дробного значения, например x_k, формируются две не связанные между собой подзадачи:

б) $x_k \le [x_k]$;

а) $x_k \ge [x_k] + 1$.

В общем случае выбор переменной, на основе которой организуется процесс ветвления, влияет на эффективность решения задачи. Для такого выбора существуют специальные эмпирические или эвристические процедуры.

3. *Решение подзадачи а).* Решение осуществляется на основе итоговой симплекс-таблицы. Рассматриваемое неравенство приводится к стандартному виду путем добавления остаточной переменной, которая вводится в задачу как базисная:

$x_k + s_{n+1} = [x_k]$.

Базисная переменная x_k из симплекс-таблицы выражается через небазисные переменные и подставляется в последнее выражение, в результате чего получается:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = -f_i.$$

Выполняется очередная итерация двойственного симплекс-метода, позволяющая получить целочисленное значение переменной x_k.

Если полученное решение удовлетворяет условиям целочисленности, то его следует рассматривать как нижнюю (в задаче максимизации ЦФ) границу задачи. Она характеризуется, таким образом, целочисленностью всех или части переменных и наилучшим в сравнении с другими подзадачами значением ЦФ. Граница вводится для повышения эффективности вычислений в том смысле, что если в результате разрешения очередной подзадачи получено худшее, чем граница, решение, то дальнейшее ветвление задачи в этом направлении нецелесообразно. Тем самым исключаются из рассмотрения те комбинации целочисленных значений переменных, которые заведомо будут иметь худшее в сравнении с границей значение ЦФ. Если в результате решения очередной подзадачи будет получено лучшее, чем граница, значение ЦФ, то тогда устанавливается новое значение границы.

4. *Решение подзадачи б).* Решение осуществляется аналогично пункту 3.

Пример 5.2. Рассмотрим задачу ЦЛП из примера 5.1. Из табл. 5.1 видно, что обе переменные являются нецелочисленными, поэтому на основе одной из них, например, x_2, организуется ветвящийся процесс поиска целочисленных значений. Дерево подзадач, порождаемых в процессе применения метода ветвей и границ, представлено на рис. 5.2.

Исходя из значения выбранной переменной, $x_2 = 1\ 3/4$, формируются две подзадачи: $x_2 \le 2$ и $x_2 \ge 1$. Результат решения второй подзадачи: $Z = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Это решение удовлетворяет требованию целочисленности, поэтому оно может рассматриваться в качестве *границы*. Дальнейшее ветвление задачи нецелесообразно, поскольку оно приведет к худшему решению. Действительно, если продолжить ветвление и рассмотреть подзадачу $x_1 \le 1$, то ее решением будет: $Z = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Допустимого же решения подзадачи $x_1 \ge 2$ вообще не существует.

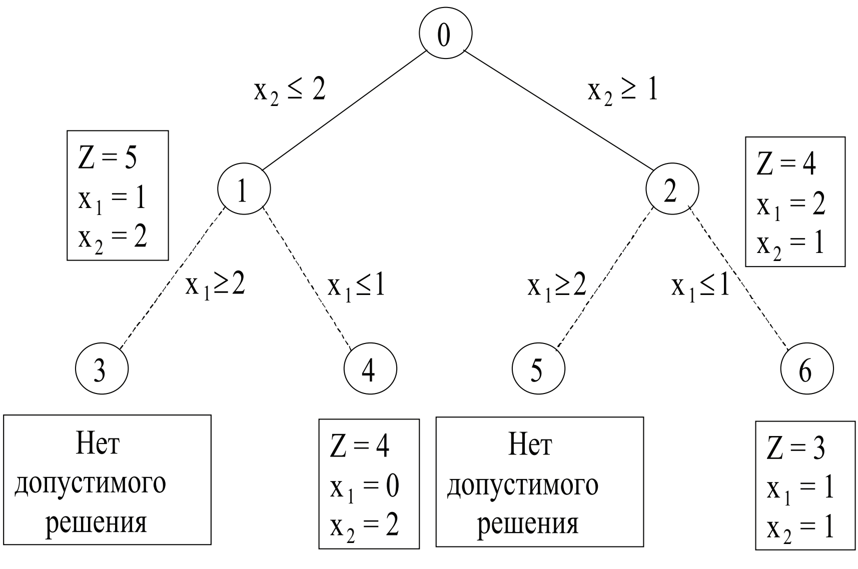


Рис. 5.2. Дерево подзадач

Первая подзадача имеет решение: $Z = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Как видно, это решение лучше, чем то, что было принято в качестве границы.

Поэтому решение второй подзадачи должно быть принято в качестве *новой границы* задачи. Дальнейшее ветвление также нецелесообразно, поскольку приведет к ухудшению значения ЦФ. На рис. 5.2 штриховыми линиями показаны те ветви, для которых соответствующие им подзадачи нецелесообразны для решения.

Таким образом, введением *границ* удается существенно уменьшить количество решаемых подзадач в ходе поиска оптимального целочисленного решения.

В настоящее время метод ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач.

6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сфера применения общих методов линейного программирования весьма обширна, однако решение практических задач связано с большим количеством переменных, что приводит к значительным вычислительным трудностям. Учитывая специфику конкретной решаемой задачи, трудности эти можно преодолеть, представляя совокупность неизвестных матрицей. Наиболее характерной и актуальной, довольно изученной задачей является так называемая задача транспортного типа.

Под транспортной задачей в настоящее время понимается целый комплекс задач, имеющий специфическую постановку и алгоритм решения.

Транспортная задача представляет собой задачу обоснования решения по скалярному показателю. По существу она является задачей линейного программирования, которую можно решать симплекс-методом. Однако специфическая структура условий задачи позволяет разработать более эффективный вычислительный метод.

6.1. Вербальная и математическая постановка транспортной задачи ЛП

Транспортная модель, как правило, используется для составления наиболее экономичного плана перевозок из нескольких пунктов (поставщиков) в пункты доставки (потребители). При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок, либо минимальное время его доставки. Транспортную модель можно применять для решения задач, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, распределением сил и средств и т.д.

Рассмотрим вербальную постановку транспортной задачи и планирование перевозок материально-технических средств.

Вербальная постановка задачи.

Планируются перевозки одного вида материально-технических средств (МТС) от нескольких поставщиков нескольким потребителям.

Известны запасы материально-технических средств поставщиков и потребности в МТС потребителей. Известна или может быть вычислена стоимость перевозки единицы МТС из каждого исходного пункта (каждого поставщика) в каждый пункт назначения (каждому потребителю). Величина транспортных расходов на любом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимых МТС. Потребности каждого потребителя могут удовлетворяться за счет нескольких поставщиков. Цель планирования состоит в определении количества МТС, которые следует перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, с тем чтобы общие транспортные расходы были минимальными (рис. 6.1).

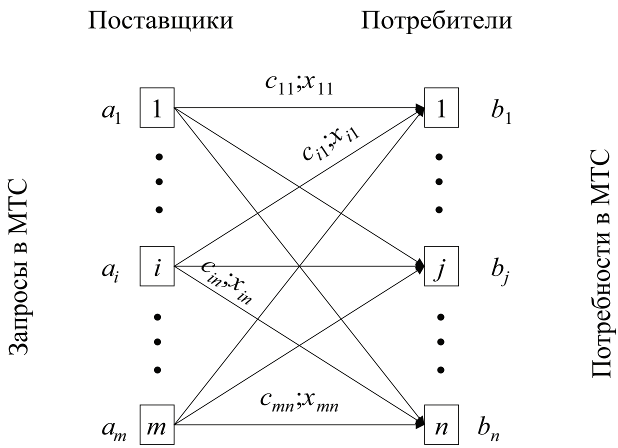


Рис. 6.1. Организация перевозок МТС:
m – количество поставщиков; n – количество потребителей; a_i – запасы МТС i-го поставщика; b_j – потребности в МТС j-го потребителя; c_{ij} – стоимость перевозок; x_{ij} – количество перевозимых МТС

Неотрицательные переменные x_{ij} можно записать в виде матрицы:

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix} \tag{6.1}$$

которую можно обозначить $\|X_{ij}\|$.

Совокупность неизвестных x_{ij} (6.1), удовлетворяющая ограничениям первой и второй групп, называется планом перевозок. План, для которого достигается минимум выражения (6.2), называется оптимальным. Величины же x_{ij} называются перевозками.

В нашем случае **математическая постановка транспортной задачи** линейного программирования в общем виде формализуется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
& x^{*} : \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
& \textit{при ограничениях} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& x_{ij} \ge 0 \textit{ для всех } i \textit{ и } j
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

Первая группа ограничений указывает, что суммарный объем перевозимых МТС от некоторого поставщика не может превышать сосредоточенных в нем запасов МТС. Вторая группа ограничений требует, чтобы суммарные перевозки МТС некоторому потребителю полностью удовлетворяли его спрос.

Если в задаче (6.2) все неравенства выполняются как равенства, т.е. суммарный объем запасов МТС равен суммарному спросу, то транспорт ную модель называют сбалансированной. Именно для сбалансированной транспортной модели разработаны эффективные методы решения.

Если суммарный спрос меньше суммарных запросов, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то переход к сбалансированной модели осуществляют путем введения в рассмотрение фиктивного потребителя с номером n+1 с заявкой:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \; .$$

При этом стоимость перевозки МТС фиктивному потребителю принимается равной нулю ($c_{i,n+1} = 0, \forall i$).

Если суммарные запасы меньше суммарного спроса, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то вводят фиктивного поставщика с номером m+1 и запасом:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

при нулевой стоимости перевозок МТС от этого поставщика ($c_{m+1,j} = 0, \forall j$).

Следует заметить, что в оптимизационной задаче (6.2) маршруты перевозок должны быть маршрутами «минимальной стоимости».

Для более компактного представления транспортной модели используют так называемую транспортную таблицу, которая может иметь следующий вид:

c_{11} x_{11}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	…
c_{m1} x_{m1}	…	c_{mn} x_{mn}

Приведем наглядный пример. Необходимо со склада города (гор.) и области (обл.) перевезти потребное число МТС потребителям (потр.). Тогда транспортная таблица будет иметь следующий вид:

Таблица 6.1

Поставщик	1 потр.		2 потр.		3 потр.		ВП
Склад гор.		3		5		6	40
Склад обл.		10		9		12	60
Потребности	25		45		30		

ВП – возможности поставщиков

Стоимость перевозки будет иметь вид

$C_{ij} = \nu_{ij} \bullet L_{ij}$,

где L_{ij} – расстояние между i и j пунктами;

ν_{ij} – стоимость перевозки 1 условной единицы груза на 1 единицу расстояния.

Если ν_{ij} = 1 условной единице, то $C_{ij} = L_{ij}$.

6.2. Решение транспортной задачи

Поскольку транспортная задача является задачей линейного программирования, основные этапы ее решения будут такими же, как и при решении задачи линейного программирования симплекс-методом, а именно:

1-й этап. Определение начального допустимого решения.

2-й этап. Выделение из небазисных переменных вводимую в базис переменную. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности, то закончить вычисления; в противном случае перейти к 3-му этапу.

3-й этап. Выбор выводимой из базиса переменной (используя условия допустимости) из числа переменных текущего базиса; затем нахождение нового базисного решения и возвращение ко 2-му этапу.

Рассмотрим подробнее каждый этап решения транспортной задачи, учитывая ее специфику.

<u>1-й этап. Определение начального допустимого решения</u>

Для сбалансированной транспортной задачи существует только m+n-1 независимых уравнений. Таким образом, как и в симплекс-методе, начальное базисное допустимое решение должно иметь $m+n$-1 базисных переменных.

Начальное базисное решение транспортной задачи получают непосредственно из транспортной таблицы. Для этого можно использовать три процедуры.

1. *Правило «северо-западного угла»*. При нахождении опорного плана транспортной задачи методом «северо-западного угла» на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение транспортной таблицы начинается с левого верхнего угла (северо-западного), двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз (увеличение i, увеличение j). Переменной x_1 приписывают максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и запасы.

После этого вычеркивают соответствующий столбец или строку, фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. Если ограничения выполняются одновременно, то можно вычеркнуть либо строку, либо столбец. Процесс завершается тогда, когда будет присвоено значение переменной x_{min}.

Исходный опорный план, построенный по правилу «северо-западного угла», обычно оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его формировании не учитывается стоимость перевозок (величина c_{ij}). Более совершенным правилом является правило «минимального элемента».

II. *Правило «минимального элемента»*. В методе «северо-западного угла» на каждом шаге потребность первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворяется за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, что выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на стоимость перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-либо клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбирать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке.

Правило «минимального элемента» заключается в том, чтобы перевозить максимально возможные объемы из пункта отправления маршрутом минимальной стоимости. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки (элемент c_{ij}) из всей таблицы. Переменной этой клетки x_{ij} присваивается максимально возможное значение с учетом ограничений. Затем остаток по столбцу или строке помещается в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ij} и т.д. Иными словами, последовательность заполнения клеток определяется по величине c_{ij}, а помещаемая в этих клетках величина x_{ij}, как и в правиле «северо-западного угла».

Нахождение опорного плана по этим двум процедурам будет выполнено в п. 6.3.

III. *Метод аппроксимации Фогеля.* При определении оптимального плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце условий задачи. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке или столбце, которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации. Этот метод дает наилучшее начальное приближение, часто оказывающееся оптимальным планом.

Алгоритм решения транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля следующий:

<u>I этап. Определение опорного плана.</u>

1. Для каждой строки таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Определить величину «штрафа» строки как разность значений второго и первого элементов в ранжированном ряду.
2. Для каждого столбца таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Далее необходимо определить величину штрафа столбца.
3. Определить строку или столбец, имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) – элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.
4. Присвоить наибольшее значение из допустимых, с учетом ограничений, переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу «3».

5. Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.
6. Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю, если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу «3».

Как правило, применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план.

II этап. Определение вводимой в базис переменной («метод потенциалов»).

Отметим, что «метод потенциалов» эквивалентен принципу решения задачи линейного программирования и использованию условия оптимальности в симплекс-методе, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его улучшают до получения «оптимального плана». Содержание «метода потенциалов» заключается в следующем:

1. Каждой строке i и столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа u_i и ν_j, называемые потенциалами. Они должны для каждой базисной переменной x_{ij} текущего решения удовлетворять условию $u_i + \nu_j = c_{ij}$. Эти условия приводят к системе, состоящей из $m + n$-1 уравнений (так как имеется всего $m + n - 1$ базисных переменных), в которых фигурируют $m + n$ неизвестных. Значение потенциалов определяют из этой системы уравнений, придавая одному из них произвольное значение (например, $u_1 = 0$).
2. Определяются оценки $\bar{c}_{pq}$ для небазисных переменных в соответствии с соотношением:
$\bar{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}$.
3. Если все оценки $\bar{c}_{pq}$ неположительны, то найденное решение оптимально, в противном случае необходимо определить новую вводимую в базис переменную.
4. Вводимой в базис переменной является небазисная переменная, имеющая самую большую положительную оценку $\bar{c}_{pq}$.

Наиболее эффективным методом определения вводимой переменной является метод дифференциальных рент. Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находился какой-нибудь ее опорный план, а затем он последовательно улучшался, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое *условно оптимальное распределение)* и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов необходимо постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Эти строки иногда называют также отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, считаются избыточными. Иногда их называют также положительными.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между числом в кружке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется *промежуточной рентой.* После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Заключены в кружки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), где имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент.

<u>III этап. Определение переменной, выводимой из базиса (построение цикла).</u>

Процедура построения цикла эквивалентна использованию условия допустимости в симплекс-методе.

1. Строится замкнутый цикл, соответствующий вводимой переменной по правилу. Он состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных связанных отрезков, концами которых должны быть базисные переменные (за исключением тех концов, которые относятся к вводимой в базис переменной), для каждого базисного решения и соответствующей небазисной переменной можно построить лишь один цикл.
2. Нечетным вершинам цикла, начиная с вводимой в базис переменной, присваивается знак «+», четным – «-» (будем называть эти клетки плюсовыми и минусовыми).
3. Определяется выводимая из базиса переменная, которой является одна из базисных переменных, расположенных в вершинах цикла, отмеченных знаком «-» и имеющих наименьшее значение.
4. Формируется новое допустимое базисное решение. Для этого переменные, находящиеся в вершинах цикла, соответствующим образом корректируются, а именно: уменьшаются или увеличиваются на величину вводимой в базис переменной в зависимости от знака вершины цикла.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому называется сдвигом по циклу пересчета. Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным и равным (n+m-1).

Однако при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать $\varepsilon = 0$.

Пример 6.1. Найти квазиоптимальное решение транспортной задачи по методу Фогеля.

Матрица транспортной задачи представлена таблицей вида:

	B1: 30 т	B2: 40 т	B3: 60 т	B4: 20 т
A1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)	(4,8)
A2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)	(4,0)
A3: 25 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)	(1,1)

В скобках в клетках таблицы представлены цены перевозок.
Найти план по методу Фогеля.

Решение

1. Справка.

Поиск квазиоптимального решения транспортной задачи по алгоритму Фогеля включает выполнение следующих шагов:

a) Для каждой строки таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию. Вычислить величину так называемого штрафа строки как разность значений второго и первого элементов в ранжированном ряду.
b) Для каждого столбца таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию и вычислить величину «штрафа столбца» аналогично шагу 1.
c) Найти строку или столбец, имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) – элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.
d) Присвоить переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу *c*), наибольшее из допустимых для нее значений (с учетом ограничений задачи).
e) Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если оказалось, что $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.
f) Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю. Если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу с) алгоритма.

2. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0.4, 2.7, 4.0, 4.8)	2.3
(0.6, 1.9, 3.2, 4.0)	1.3
(1.0, 1.1, 2.2, 4.6)	0.1

3. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0.4, 0.6, 4.6)	0.2
(1.0, 3.2, 4.0)	2.2
(1.9, 2.2, 2.7)	0.3
(1.1, 4.0, 4.8)	2.9

4. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2.9 и находится в четвертом столбце. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в четвертом столбце: это элемент с координатами (3,4).

5. Присвоим переменной x_{34} наибольшее из допустимых для нее значений – 20.

6. Корректируем содержимое исходной таблицы, уменьшив запас на складе А3 на 20 т и вычеркнув четвертый столбец.

	В1: 30 т	В2: 40 т	В3: 60 т
А1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)
А2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)
А3: 5 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)

7. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0.4, 2.7, 4.0)	2.3
(0.6, 1.9, 3.2)	1.3
(1.0, 1.1, 2.2)	0.1

8. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0.4, 0.6, 4.6)	0.2
(1.0, 3.2, 4.0)	2.2
(1.9, 2.2, 2.7)	0.3

9. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2.3 и находится в первой строке. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в первой строке: это элемент с координатами (1,1).

10. Присвоим переменной x_{11} наибольшее из допустимых для нее значений 30.

11. Продолжая действовать таким образом, окончательно получим квазиоптимальный план перевозок:

	B1: 30 т	B2: 40 т	B3: 60 т	B4: 20 т
A1: 90 т	30	35	25	
A2: 35 т			35	
A3: 25 т		5		20

Можно проверить, что полученное решение оказалось оптимальным.

6.3. Практическое решение задачи оптимального планирования

Перевозки товаров различными транспортными средствами в ряде случаев приводят к таким нежелательным явлениям, как порожние пробеги, простои, встречные и нерациональные перевозки. Для исключения их используются методы оптимального планирования перевозок, в частности такая экономико-математическая модель, как транспортная задача.

Простейшим примером транспортной задачи является задача о планировании перевозок некоторого продукта из конечного числа пунктов отправления в конечное число пунктов назначения при обеспечении минимальных затрат на выполнение данной операции.

Постановку и методику решения подобных задач рассмотрим на примере.

Пример 6.2. Три поставщика некоторого товара располагают следующими запасами: первый – 120 единиц, второй – 100 единиц, третий – 80 единиц; товар должен быть перевезен трем потребителям: спрос первого – 90 единиц; спрос второго – 90 единиц; спрос третьего – 120 единиц; известны также показатели затрат (c_{ij}) на перевозку единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю.

Требуется составить оптимальный (наилучший) план перевозок, приводящий к наименьшим затратам на выполнение данной операции.

Под планом перевозок понимается матрица:

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{Vmatrix},$$

в которой x_{ij} – количество единиц товара, планируемого к перевозке от поставщика с номером i к потребителю с номером j.

Для решения задачи исходные данные удобно свести в таблицу (табл. 6.2).

Математическая подстановка данной задачи имеет вид:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$$Z = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + +2x_{31} +3x_{32} + 7x_{33}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 120; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 100; \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 80;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 90; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 90; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 120.$$

Таблица 6.2

Поставщики	Возможности поставщиков	Потребители и их спрос		
		1	2	3
		90	90	120
1	120	7	6	4
2	100	3	8	5
3	80	2	3	7

В табл. 6.2. числа 7, 6, 4 и т.д. обозначают стоимости перевозок, т.е. c_{ij}.

Каждую клетку таблицы пометим двойным индексом (i, j). Первый (i) – номер поставщика, второй (j) – номер потребителя.

Транспортная задача относится к классу задач линейного программирования. Решение таких задач обычно связано с получением опорного (допустимого) плана и последующим его улучшением.

Опорный план может быть получен различными методами. Рассмотрим два из них: *метод минимального элемента, или метод наименьших затрат, и метод «северо-западного угла».*

В соответствии с методом «минимального элемента» выберем в таблице клетку, имеющую наименьший показатель затрат, т.е. клетку (3.1). Произведем поставку в эту клетку, равную 80 единицам, поскольку первому потребителю требуется 90 единиц, а у третьего поставщика в наличии лишь 80. Первому потребителю необходимо еще 10 единиц товара. Он может получить их или от первого или от второго поставщика. Так как показатель затрат в клетке (2.1) меньше, чем в клетке (1.1), то записываем 10 единиц в клетку (2.1).

Второй поставщик, отдав 10 единиц, будет располагать 90 единицами. Их можно направить второму или третьему потребителю. В связи с тем, что показатель затрат в клетке (2.3) меньше, чем в клетке (2.2), направим их третьему потребителю. Недостающие 30 единиц третий потребитель получит от первого поставщика.

Оставшиеся у первого поставщика 90 единиц запишем в клетку (1.2) и тем самым удовлетворим спрос второго потребителя.

На этом распределение можно считать законченным. Приведенную последовательность действий и результаты распределения иллюстрирует табл. 6.3.

Таблица 6.3

	90	90	120
120	7	6 / 90	4 / 30
100	3 / 10	8	5 / 90
80	2 / 80	3	7

Пример 6.3. Теперь решим задачу поиска опорного плана методом «северо-западного угла».

При этом методе не обращают никакого внимания на показатели затрат. Начав заполнение таблицы с клетки (1.1) – «северо-западного угла» таблицы, последовательно ступенями спускаются вниз до клетки (3.3). Полученный опорный план представлен в табл. 6.4.

Имея опорный план, необходимо оценить соответствующую ему стоимость перевозок (показатель эффективности или целевую функцию). Для плана, полученного методом наименьших затрат, $Z = 1300$ ед. Во втором случае имеем 2050 ед.

Следующим этапом решения задачи, независимо от того, каким методом был найден опорный план, является последовательное его улучшение до получения оптимального распределения.

С этой целью каждому поставщику товаров поставим в соответствие потенциалы A_1, A_2, A_3 и запишем их в дополнительном столбце таблицы, а каждому потребителю – потенциалы B_1, B_2, B_3, которые запишем в дополнительной строке. Один из потенциалов, например A_1, приравняем к нулю, а остальные найдем с использованием зависимости (решение производится для первого опорного плана):

$$A_{ij}=A_i + B_j.$$

Таблица 6.4

	90	90	120
120	7 90	6 30	4
100	3	8 60	5 40
80	2	3	7 80

Запишем данное соотношение для всех заполненных клеток ($x_{ij} > 0$) и определим A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Для незаполненных клеток ($x_{ij} = 0$) запишем аналогичную зависимость

$$\bar{C}_{ij} = A_i + B_j,$$

левую часть которой принято называть *псевдостоимостью*.

Условие оптимальности плана заключается в том, что для каждой свободной клетки ($x_{ij} = 0$)

$$\bar{C}ij < Cij.$$

Найдем для свободных клеток разности $\Delta_{ij} = C_{ij} - \bar{C}_{ij}$. Поскольку одна из разностей, соответствующая клетке (3.2), отрицательна, то улучшение плана начинаем именно с нее. Заметим, что если отрицательных разностей несколько, то первой выбирается клетка, для которой разность по абсолютной величине больше.

Догрузим клетку (3.2), поставив в нее знак плюс (+), и составим цепь пересчета по правилу: цепь пересчета строится в виде прямоугольника, одна из вершин которого находится в свободной клетке (3.2), а остальные – в занятых; все углы должны быть прямыми; в одной строке и в одном столбце не должно быть более двух вершин; всем вершинам приписываются чередующиеся знаки (плюс – догрузить, минус – разгрузить).

Из клеток со знаком минус (–) выбирается наименьшая величина груза *min* (80, 90, 90) = 80 и перемещается последовательно по клеткам построенной цепи: 80 единиц добавляются в клетки со знаком плюс и изымаются из клеток со знаком минус.

Таким образом, получаем новый план перевозок. Применив к нему рассмотренную выше методику, можно убедиться, что этот план является оптимальным.

Иллюстрирует методику решения задачи (для опорного плана, полученного методом наименьших затрат) табл. 6.5.

Таблица 6.5

	90	90	120
120	7	6 10	4 110
100	3 90	8	5 10
80	2	3 80	7

В общем случае математическая постановка транспортной задачи имеет вид

$$W(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m_i; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n_j; \; x_{ij} \geq 0.$$

В рассмотренном примере

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j ,$$

т.е. возможности поставщиков равны суммарному спросу потребителей. Транспортные задачи подобного вида (п. 6.1.) называют закрытыми. Задачи, для которых это условие не выполняется, представляют собой открытые задачи.

Для решения открытых задач их приводят к закрытому виду путем введения фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с возможностями по поставке или спросом, определяемыми по формуле:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j .$$

В остальном методика решения задачи остается неизменной.

Рассмотрим пример решения открытой задачи.

Пример 6.4. Пусть требуется найти оптимальное распределение поставок в следующей задаче:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$$W(x) = 4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 7x_{24} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 40; \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 60 \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 90;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 45; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 35; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 55; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 65$$

Введем фиктивного поставщика с возможностями по поставкам

$$|\,(45+35+55+65) - (40+60+90)\,| = 10.$$

Для этого исходную таблицу дополним фиктивной строкой и проведем первоначальное распределение поставок (табл. 6.6).

Таблица 6.6

	45	35	55	65
40	4	1 35	3 5	5
60	2 10	2	3 50	7
90	4 35	4	5	3 55
Ф(10)	0	0	0	0 10

Полученное распределение поставок неоптимально.

Выполнив по приведенной выше методике необходимые действия, можно установить, что для клетки (4.3) разность Δ_{43} отрицательна и среди отрицательных разностей наибольшая по абсолютной величине. Следовательно, улучшение плана следует начать именно с нее. В табл. 6.7 приведена соответствующая цепь пересчета.

Таблица 6.7

	45	35	55	65
40	4	1 35	3 5	5
60	2 20	2	3 40	7
90	4 25	4	5	3 65
Ф(10)	0	0	0 10	0

Данная таблица уже не содержит отрицательных разностей Δ_{ij}. Следовательно, приведенное в ней распределение поставок *оптимальное*.

В заключение отметим, что оптимизация перевозок может осуществляться не только по затратам, но и по другим показателям, например, времени. Кроме того, следует помнить, что задачи линейного программирования вообще и транспортная задача в частности в настоящее время решаются с использованием ЭВМ и соответствующего пакета прикладных программ для них.

7. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Многие задачи линейного программирования относятся к классу задач, которые называют распределительными или λ-задачами (лямбда-задачами), а также обобщенными транспортными задачами. В терминах перевозок распределительную задачу можно сформулировать следующим образом: пусть имеются запасы МТС, сконцентрированные в пунктах отправления, причем в различных пунктах имеются различные виды запасов. Все эти запасы или часть их требуется доставить к потребителям, причем для каждого потребителя указано количество запасов МТС. Расходы на перевозку МТС считаются известными. Задача заключается в нахождении плана перевозок, минимизирующего суммарные расходы на транспортировку.

7.1. Многопродуктовая транспортная задача

Ранее рассматривалась транспортная задача, в которой фигурировал один вид МТС (один продукт). А как быть, если необходимо спланировать перевозку нескольких видов МТС (несколько продуктов)? Для решения данной задачи можно предложить два пути:

1. Сформировать по каждому виду перевозимых МТС свою транспортную задачу (однопродуктовую). Частные решения этих задач и будут представлять оптимальный план перевозок.
2. Сформировать одну (многопродуктовую) транспортную задачу.

Рассмотрим более подробно второй путь.

Пример 7.1. Для трех пользователей необходимо пополнить запасы бензина АИ-76 и АИ-93. Пополнение запасов может производиться из хранилища города (гор.) и области (обл.). Запасы и потребности бензина представлены в табл. 7.1 и 7.2. Возможности поставщиков (гор. и обл.) и спрос потребителей указаны в табл. 7.3.

Таблица 7.1

	Склад гор.	Склад обл.
АИ-76	40	60
АИ-93	20	30

Таблица 7.2

	1-й потр.	2-й потр.	3-й потр.
АИ-76	25	45	30
АИ-93	15	35	–

Протяженность маршрутов представлена в табл. 7.3.

Таблица 7.3

	1-й потр.	2-й потр.	3-й потр.
Склад гор.	30	50	60
Склад обл.	100	90	120

В целях упрощения вычислений предположим, что $Cij = Lij$.

Для того чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, сформируем транспортную модель следующим образом. Вместо того чтобы рассматривать каждого поставщика как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с количеством видов перевозимых ГСМ. Аналогично поступим и с пунктами назначения (потребителями). В результате для нашего примера получим 4 поставщика и 5 потребителей.

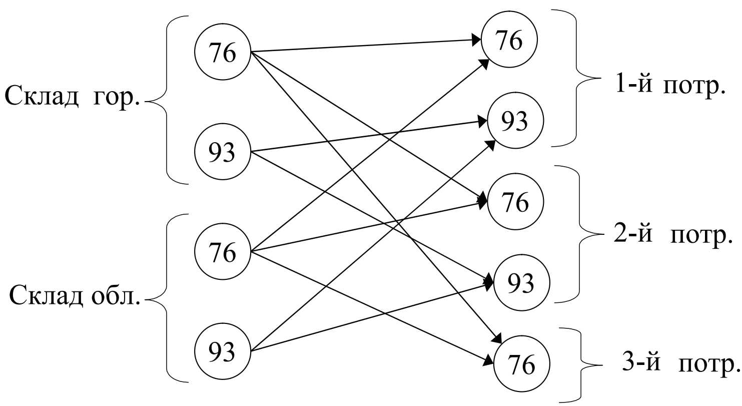


Рис. 7.1. Схема реализации многопродуктовой задачи

Заметим, что некоторые маршруты недопустимы, поскольку в данной постановке задачи не допускается взаимная компенсация различных марок бензина. Это необходимо учесть при построении транспортной таблицы, а именно запрещенным маршрутам приписывают очень высокую стоимость перевозки.

Транспортная таблица для многопродуктовой транспортной задачи в условиях нашего примера имеет следующий вид (табл. 7.4):

Таблица 7.4

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">1-й потр.</td><td colspan="2">2-й потр.</td><td>3-й потр.</td><td>АИ-76</td><td>АИ-93</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Склад гор.</td><td>3</td><td>М</td><td>5</td><td>М</td><td>6</td><td rowspan="2">40</td><td rowspan="2">20</td></tr>
<tr><td>М</td><td>3</td><td>М</td><td>5</td><td>М</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Склад обл.</td><td>10</td><td>М</td><td>9</td><td>9</td><td>12</td><td rowspan="2">60</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td>М</td><td>10</td><td>М</td><td>М</td><td>М</td></tr>
<tr><td>АИ-76</td><td>25</td><td></td><td>45</td><td></td><td>30</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>АИ-93</td><td></td><td>15</td><td></td><td>35</td><td>–</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Данную транспортную таблицу можно разбить на несколько таблиц по видам продуктов (в нашем случае на две). Следует заметить, что с вычислительной точки зрения небольшие подзадачи решать проще, чем одну сложную. Но разбиение многопродуктовой модели на однопродуктовые можно осуществлять только в том случае, если нет взаимной связи между отдельными видами продуктов. Если такая связь существует, то многопродуктовую модель не удается просто разбить на однопродуктовые.

Пример 7.2. В условиях предыдущего примера предположим, что в 1-й потр. возможна взаимная компенсация АИ-76 и АИ-93 на 100%, во 2-й потр. – на 20%. При построении транспортной таблицы необходимо в 1-й и 2-й потр. добавить по одному потребителю, величины спроса в которых определим из данных о процентном соотношении заменяемых видов ГСМ.

$$\text{1-й потр.}: \left.\begin{array}{l} 25 \times 0{,}1 = 2{,}5 \\ 15 \times 0{,}1 = 1{,}5 \end{array}\right\} \Sigma = 4.$$

$$\text{2-й потр.}: \left.\begin{array}{l} 45 \times 0{,}2 = 9 \\ 35 \times 0{,}2 = 7 \end{array}\right\} \Sigma = 16.$$

Далее необходимо сформировать транспортную таблицу следующего вида:

Таблица 7.5

		1-й потр.			2-й потр.			3-й потр.	
		76	93	76-93	76	93	76-93	76	
Склад гор.	76	3	М	3	5	М	5	6	40
	93	М	3	3	М	5	5	М	20
Склад обл.	76	10	М	10	9	М	9	12	60
	93	М	10	10	М	9	9	М	30
		22,5	13,5	4	36	28	16	30	

7.2. Транспортная модель с промежуточными пунктами

В стандартной транспортной модели предполагается, что прямой маршрут между поставщиком и потребителем является маршрутом минимальной стоимости. Это означает, что определению стоимостей перевозок единицы продукта в стандартной транспортной модели должна предшествовать предварительная работа, связанная с выявлением кратчайших маршрутов (применяются математические методы нахождения кратчайшего пути).

Другой метод определения минимальной стоимости прямой перевозки связан с постановкой транспортной задачи как задачи с промежуточными пунктами. При этом допускается перевозка груза (частично или полностью) через других поставщиков или потребителей транзитом, прежде чем он достигнет установленного потребителя. В задаче с промежуточными пунктами автоматически отыскивается маршрут минимальной стоимости между поставщиком и потребителем без предварительного определения кратчайшего маршрута.

Введение промежуточных пунктов дает возможность перевозить весь объем МТС от поставщиков через любого другого поставщика или потребителя. Это означает, что любую вершину транспортной сети (как исходный пункт, так и пункт назначения) можно рассматривать, как транзитный пункт. Поскольку априори неизвестно, какие вершины будут обладать этим свойством, можно сформулировать задачу таким образом, чтобы каждую вершину можно было рассматривать и как поставщика, и как потребителя. Другими словами, число поставщиков, как и число потребителей в задаче с промежуточными пунктами, равно сумме поставщиков и потребителей в стандартной задаче.

Пример 7.3. Рассмотрим задачу из примера 7.2 и сделаем поясняющий рисунок (при стоимости буфера B=100).

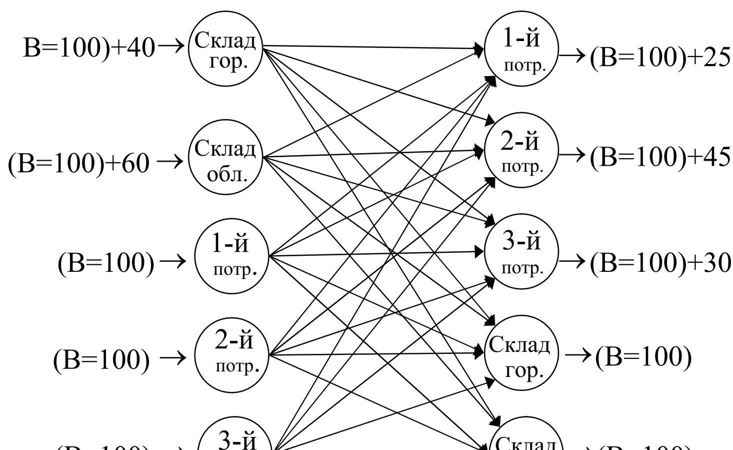


Рис. 7.2

То есть

$$B \geq \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot$$

Стоимости в расчете на единицу груза оцениваются на основании данных о маршрутах. При этом очевидно, что коэффициент стоимости перевозки между первоначально заданными поставщиками и потребителями остается таким же, как в стандартной транспортной модели. Необходимо заметить, что стоимость перевозки из некоторого пункта в него же равна нулю и стоимость перевозки может меняться в зависимости от направления движения.

В табл. 7.6 представлено оптимальное решение рассмотренной выше задачи с промежуточными пунктами, в которой емкость буфера равна 100.

Таблица 7.6

	Гор.	Обл.	1-й потр.	2-й потр.	3-й потр.	
Гор.	100		(40)			140
Обл.		100	0	(60)	2	160
1-й потр.		0	85	(15)		100
2-й потр.				70	(30)	100
3-й потр.		2			100	100
	100	100	125	145	130	

Из табл. 7.6 видно, что диагональные элементы получены в результате использования буфера. Они не дают никакой информации об окончательном решении. Внедиагональные элементы обеспечивают получение решения, которое представлено на рис. 7.3.

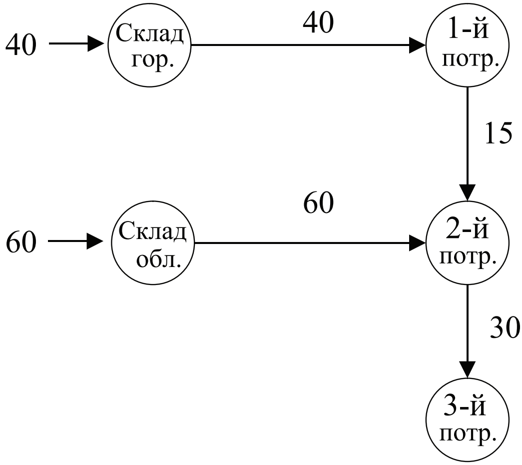


Рис 7.3. Схема решения задачи

Решение как однопродуктовой, так и многопродуктовой транспортной задачи линейного программирования может быть проведено с использованием ПЭВМ. Для этого необходимо подготовить исходные данные для пакета прикладных программ (ППП) ПЭВМ, ввести их и осуществить управление процессом решения задачи, обеспечив выдачу необходимых результатов, по которым принимается решение.

Примеры для решения транспортных задач ЛП представлены в приложении 4.

8. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

8.1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{8.1}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \; (i = \overline{1, k}), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \; (i = \overline{k+1, m}), \end{cases} \tag{8.2}$$

где f и g_i – некоторые известные функции n переменных, а b_i – заданные числа.

В результате решения задачи должна быть определена точка $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (8.2), и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям (8.2), выполняется неравенство $f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $[f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

Если f и g_i – линейные функции, то данная задача является задачей линейного программирования.

Соотношения (8.2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Такие условия могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве En система ограничений (8.2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования она не всегда является выпуклой.

Один из наиболее мощных методов решения задач нелинейного программирования состоит в преобразовании задачи каким-либо образом к виду, допускающему применение симплексного алгоритма. Природа «преобразования», с помощью которого нелинейная задача может быть приведена к форме, допускающей применение симплексного метода, очень сильно зависит от типа задачи. В некоторых случаях не требуется никакой предварительной аппроксимации, в других аппроксимация нужна. Однако эта аппроксимация может быть сколь угодно точной (ценой увеличения объема вычислений).

Широко применяется *градиентный метод.* Он представляет собой итеративную процедуру, в которой переходят шаг за шагом от одного допустимого решения к другому так, что значение целевой функции улучшается. Однако в отличие от симплексного метода ЛП в нем не используется переход от одной вершины к другой. Вообще говоря, для сходимости к решению здесь требуется бесконечное число итераций.

В последнее время широкое применение нашли методы штрафных функций и барьеров. *Метод штрафных функций* аппроксимирует задачу с ограничениями задачей без ограничений с функцией, которая налагает штраф за выход из допустимой области.

Идея *метода барьеров* аналогична методу штрафных функций, однако аппроксимация здесь осуществляется «изнутри» допустимой области.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (8.1), (8.2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (8.1), (8.2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (8.2) (если она пуста, то задача не имеет решения).
2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$.
3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (8.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.
4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (8.1).

Пример 8.1. Найти максимальное значение функции

$$W(X) = x_2 - x^2{}_1 + 6x_1 \qquad (8.3)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ \\ x_2 \le 4, \end{cases} \qquad (8.4)$$

$$x_{1,}\ x_2 \ge 0. \qquad (8.5)$$

<u>Решение</u>. Так как целевая функция (8.3) нелинейная, то задача (8.3) – (8.5) является задачей нелинейного программирования. Областью допустимых решений данной задачи является многоугольник *OABC* (рис. 8.1). Следовательно, для нахождения ее решения нужно

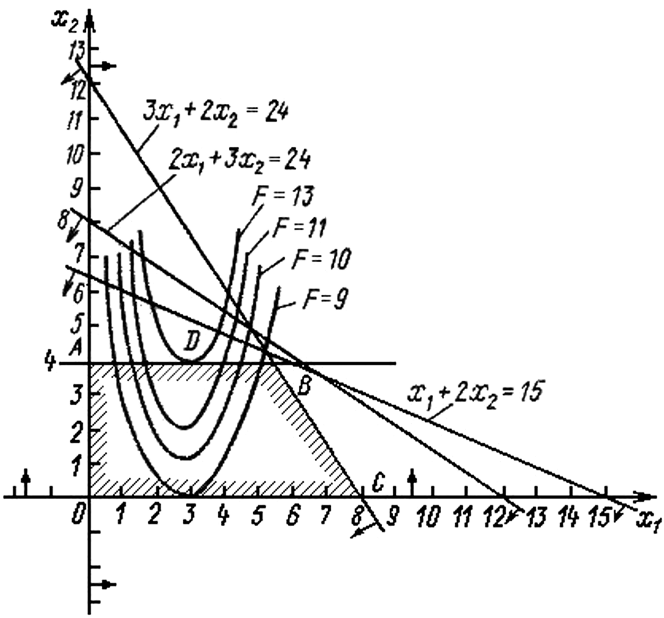


Рис. 8.1

определить такую точку многоугольника $OABC$, в которой функция (8.3) принимает максимальное значение. Построим линию уровня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, где h – некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1, чем больше значение h (рис. 8.1). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника $OABC$. Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{8.6}$$

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Итак, $F_{max} = 13$ при $X^* = (3; 4)$.

Как видим, в задаче (8.3) – (8.5) точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач ЛП, неприменима для решения данной задачи.

Пример 8.2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$W(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \tag{8.7}$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \tag{8.8}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{8.9}$$

Решение. Областью допустимых решений задачи (8.7) – (8.9) является треугольник (рис. 8.2). Полагая значение целевой функции (8.7) равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$ с центром E (3; 4) и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке D. Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке D равен 10. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке D определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим.

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0, \text{откуда } x_2' = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4).$$

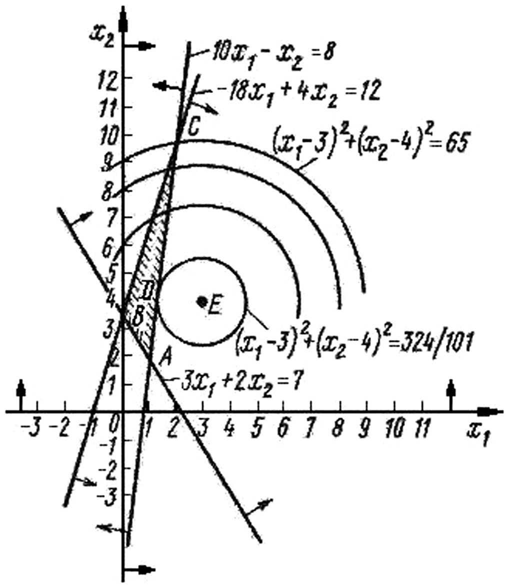


Рис. 8.2

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка E, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 123/101$; $x_2^* = 422/101$. Таким образом, $F_{min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$.

Как видно из рис. 8.2, целевая функция принимает максимальное значение в точке C (2; 12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка C. Таким образом, максимальное значение функции $F_{max} = 65$.

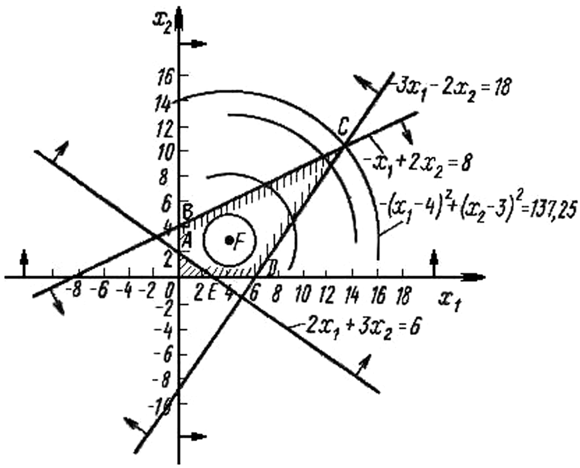


Рис. 8.3

Пример 8.3. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$W(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \tag{8.10}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases} \tag{8.11}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{8.12}$$

<u>Решение</u>. Областью допустимых решений исходной задачи является многоугольник $ABCDE$ (рис. 8.3), а линиями уровня – окружности $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ с центром F (4; 3) и радиусом $R = \sqrt{h}$.

На рис. 8.3. видно, что целевая функция принимает минимальное значение в точке F (4; 3), а максимальное – в точке E (13; 10,5). Следовательно, $F_{min} = 0$ и $F_{max} = 137,25$.

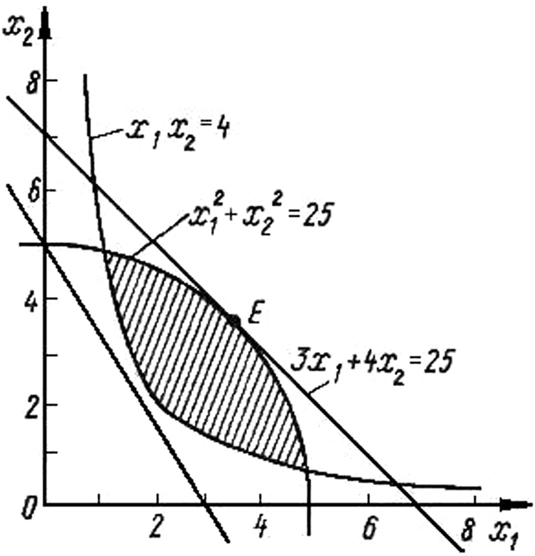


Рис. 8.4

Пример 8.4. Найти максимальное значение функции

$$W(X) = 3x_1 + 4x_2 \tag{8.13}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1x_2 \ge 4, \end{cases} \tag{8.14}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{8.15}$$

<u>Решение</u>. Область решений задачи (8.13) – (8.15) изображена на рис. 8.4. Здесь построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Максимальное значение целевая функция задачи принимает

в точке E, в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для определения координат точки E воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная) и касательная к окружности в точке E. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ и получим $2x_1 + 2x_2x'_2 = 0$, или $x'_2 = -x_1/x_2$.

Приравнивая найденное выражение числу $k = -3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. В качестве второго уравнения возьмем уравнения окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases}$$

откуда $F_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

8.2. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (8.1), (8.2), предполагая, что система ограничений (8.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия не отрицательности переменных и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max\ (min); \tag{8.16}$$
$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i\ (i = \overline{1, m}). \tag{8.17}$$

В курсе математического анализа задачу (8.16), (8.17) называют задачей на условный экстремум, или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение этой задачи, вводят набор переменных λ_1, $\lambda_2 \ldots, \lambda_m$, называемых *множителями Лагранжа,* составляют функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)], \tag{8.18}$$

находят частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ $(\overline{j = 1, n})$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $(\overline{i = 1, m})$ и рассматривают систему $n + m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \end{cases} \qquad (8.19)$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m$. Всякое решение системы уравнений (8.19) определяет точку $X = (x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений (8.19), получают все точки, в которых функция (8.16) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как в случае безусловного экстремума.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (8.16), (8.17) методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.
2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравнивают их нулю.
3. Решая систему уравнений (8.19), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум.
4. Среди точек, подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции (8.16) в этих точках.

Пример 8.5. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий I способом затраты равны $4x + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий II способом они составляют $8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \tag{8.20}$$

при условиях

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{8.21}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{8.22}$$

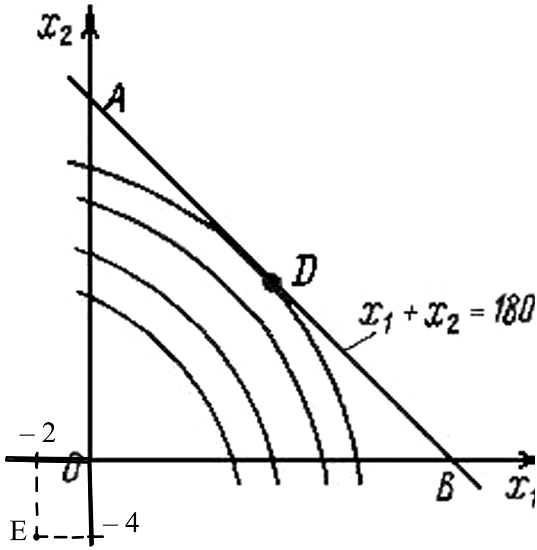


Рис. 8.5

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой *AB* (рис. 8.5.), а линиями уровня – окружности с центром в точке *E* (–2; –4).

Проводя из точки *E* окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке *D*. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точке *D* совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1 + x_2 = 180$ и, следовательно, равен –1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2 x_2' = 0, \text{или}\ x_2' = -(2 + x_1)/(4 + x_2).$$

Приравнивая полученное выражение числу –1, получаем одно из уравнений для определения координат точки D. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка D, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие I технологическим способом и 89 изделий II способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17 278 руб.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (8.20) при условии (8.1), т.е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x_2, и λ приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ или } x_1 - x_2 = 2.$$

Решая последнее уравнение вместе с уравнением $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91$ и $x_2^* = 89$, т.е. получили координаты точки D, удовлетворяющие условиям (8.22). Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке D функция f имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Следует отметить, что такой же результат мы получим и в том случае, если исследование на условный экстремум функции f сведем к исследованию на безусловный экстремум функции f_1, полученной из f в результате ее преобразований. А именно: если из уравнения связи (8.21) найдем $x_2 = 180 - x_1$ и подставим это выражение в (8.20), то получим функцию одной переменной x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Найдем стационарную точку этой функции из уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0, \text{ или } 4x_1 - 364 = 0,$$

откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Так же как и выше, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

Пример 8.6. Найти точки экстремума функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$F = (x1, x2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2),$$

найдем ее частные производные по x_1, x_2 и λ, приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases} \tag{8.23}$$

Из первого и второго уравнений имеем $x_1 - x_2 = 0$. Решая это уравнение вместе с третьим из системы (8.23), находим $x_1 = 5/2$; $x_2 = 5/2$. Таким образом, в точке (5/2; 5/2) данная функция может иметь уловный экстремум. Чтобы определить, достигается ли в этой точке условный экстремум, нужно провести дополнительные исследования. В частности, используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция имеет условный минимум и $F_{min} = 25/2$.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум функции $z = f(X)$ при условии $g(X) \le b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $z = f(X)$ из уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \ (k = \overline{1, n})$,, затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию связи $g(X) \le b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} = 0 \ (k = \overline{1, n}), \\ g(X) = b\,. \end{cases}$$

Точки, найденные в результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этаже и удовлетворяющими условию $g(X) < b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

8.3. Сетевое планирование и управление

Сложность задач, решаемых руководителями фирм и предприятий в условиях рыночной экономики, требует от них знания и умелого применения методов эффективного управления и контроля. Одним из таких методов является планирование и управление с использованием сетевых моделей.

Сетевое планирование и управление (СПУ) предназначено для управления комплексом взаимосвязанных работ, требующих четкой координации действий многих исполнителей.

Целью СПУ является оптимизация плана выполнения работ.

Содержательно СПУ является методикой решения определенного вида задач, состоящей из графических и контрольных приемов, обеспечивающих моделирование и оперативную корректировку планов выполнения различных работ.

Практика показывает, что СПУ значительно сокращает время решения сложных управленческих задач.

Приведем пример. Комплекс работ по переводу магазина на самообслуживание включает:

1. Составление сметы.
2. Приобретение оборудования.
3. Подбор кадров.
4. Монтаж оборудования.
5. Подготовка кадров.
6. Оформление торгового зала.
7. Доставка товаров.
8. Заказ и получение форменной одежды.
9. Заказ и получение ценников.
10. Выкладка товаров.
11. Заполнение ценников.
12. Открытие магазина.

Приведенный объем работ можно представить в виде сетевой модели (рис. 8.1).

На рисунке символом ***pi*** обозначен номер работы из приведенного выше перечня.

Использование СПУ в данном конкретном случае позволило существенно уменьшить общую продолжительность работ.

Основные преимущества СПУ перед другими методами планирования и управления отражены на схеме (рис. 8.2).

В настоящее время модели и методы СПУ широко используются при планировании и осуществлении строительно-монтажных работ, планировании торговой деятельности, составлении бухгалтерских отчетов, разработке торгово-финансового плана и т.д.

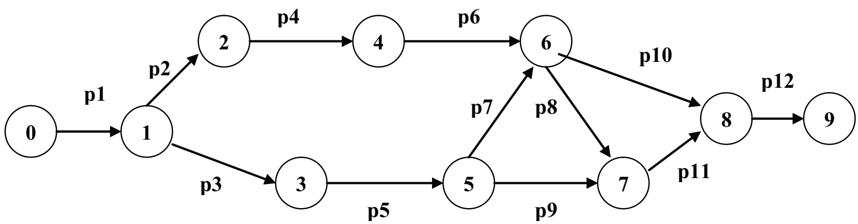


Рис. 8.1

Рис. 8.2

Последующее изложение требует введения ряда понятий и определений.

Сетевая модель – это графическое изображение плана выполнения работ в виде ориентированного графа.

Граф – это совокупность двух множеств: вершин и рёбер.

Ориентированный граф – граф, в котором все рёбра помечены стрелками, что позволяет определить, какая из любой пары смежных вершин является конечной, а какая начальной. Ориентированные рёбра называют дугами.

Два основных элемента сетевой модели – работа и событие.

Работа – это процесс, требующий затрат ресурсов.

Ожидание – это тоже работа, поскольку расходуется такой ресурс, как время.

Фиктивная работа – это связь между событиями без затрат ресурсов.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Начальное событие – событие, не имеющее предшествующих событий.

Завершающее событие – событие, не имеющее последующих событий.

Путь – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Для построения сетевой модели важное значение имеет подготовительный этап работы. На этом этапе определяются перечень и последовательность выполнения работ, взаимосвязи исполнителей (работ), продолжительность выполнения отдельных работ, потребность в ресурсах, а также осуществляется вербальная (описательная) постановка задачи.

Вариант вербальной постановки задачи построения сетевой модели:

при ограничениях на ресурсы найти такой вариант организации заданного комплекса работ, который приводил бы к минимуму функции цели – времени выполнения комплекса работ.

Сетевые модели обычно изображают в виде графа, включающего вершины – события и соединяющие их дуги – работы. При этом используются следующие правила:

1. При вычерчивании сетевого графика работы располагают так, чтобы каждая работа следовала за теми, от которых она зависит.
2. События нумеруют слева направо и сверху вниз.
3. В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
4. В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.

5. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.
6. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой – стрелкой.
7. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

Одно из важнейших понятий сетевого графика – понятие пути. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет полный путь, т.е. любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

8.3.1. Основные временные параметры сетевого графика

Временные параметры сетевой модели рассмотрим с использованием табл. 8.1:

Таблица 8.1

1	Событие	I	Кодируется номером
2	Работа	(i,j)	Кодируется номерами событий, которые она связывает
3	Продолжительность работы	$t(i,j)$	
4	Продолжительность полного пути	$t(L)$	Любой путь, начало которого совпадает с исходным событием, а конец с завершающим
5	Ранний срок совершения события	$tp(j)=\max\limits_{i}[tp(i)+t(i,j)]$	Ранний (ожидаемый) срок совершения события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию
6	Поздний срок совершения события	$tn(i)=\min\limits_{j}[t\text{п}(j)-t(i,j)]$	Наиболее поздний (максимальный) срок наступления события, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленные сроки

7	Резерв времени события	$R(i)=tn(i)\text{-}tp(i)$	
8	Ранний срок начала работы	$tрн(i,j)=tp(i)$	
9	Ранний срок окончания работы	$tpo(i,j)=tp(i)+t(i,j)$	
10	Поздний срок начала работы	$tпн(i,j)=tn(j)\text{-}t(i,j)]$	
11	Поздний срок окончания работы	$tno(i,j)=tn(j)$	
12	Полный резерв времени работы	$Rn(i,j)=tp(j)\text{-}tp(i)\text{-}t(i,j)$	Показывает, на сколько можно увеличить продолжительность данной работы, чтобы общий срок выполнения всего комплекса работ не изменился
13	Частный резерв времени работы первого вида	$R1(i,j)=tn(j)\text{-}tn(i)\text{-}t(i,j)$	На это время можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя позднего срока ее начального события
14	Независимый резерв времени работы	$Rc(i,j)=tp(j)\text{-}tp(i)\text{-}t(i,j)$ $=Rn(i,j)\text{-}R(j)$	На это время можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя раннего срока ее конечного события
15	Независимый резерв работы	$Rн(i,j)=tp(j)\text{-}tp(i)\text{-}t(i,j)$ $=Rn(i,j)\text{-}R(i)\text{-}R(j)$	Образуется, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки
16	Продолжительность критического пути	$tкр$	Наиболее продолжительный полный путь
17	Резерв времени пути	$R(L)=tкр\text{-}t(L)$	

Пример. При разработке финансового проекта выделено 12 событий:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 и 24 связывающие их работы: (0,1), (0,3), (0,5), (1,2), (1,4), (1,3), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (4,7), (4,6), (5,6), (5,8), (5,9), (6,7), (6,10), (6,9), (6,8), (7,10), (8,9), (9,10), (9,11), (10,11).

Требуется построить сетевой график реализации проекта и оценить основные временные параметры полученной сетевой модели.

Сетевая модель в данном случае представляет собой граф, изображенный на рис. 3.3. Пусть продолжительности работ в рассматриваемом примере соответствуют числам, которыми помечены дуги (ребра) на графе рис. 3.3. Тогда основные временные параметры сетевого графика примут значения, приведенные в табл. 8.2 – 8.4.

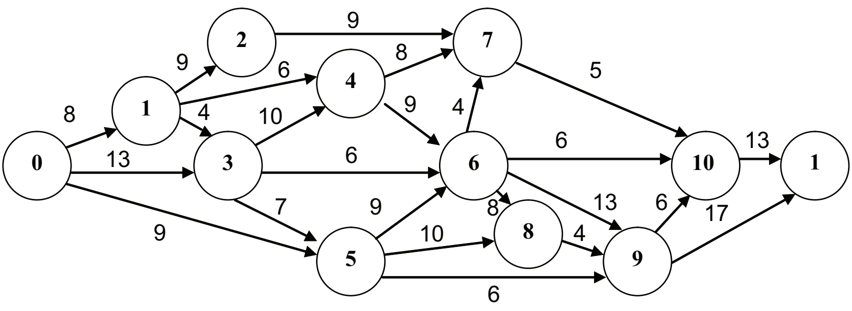


Рис. 8.3

Таблица 8.2

Номер события i	*Сроки наступления событий*		Резерв времени **R**(i)
	tр(i)	**tп**(i)	
0	0	0	0
1	8	9	1
2	17	40	23
3	13	13	0
4	23	26	3
5	20	20	0
6	29	29	0

Номер события *i*	*Сроки наступления событий*		**Резерв времени R(*i*)**
	tр(*i*)	**tп(*i*)**	
7	33	43	10
8	37	38	1
9	42	42	0
10	48	48	0
11	*tкр*=61	61	0

Таблица 8.3

№ п/п	*Работа (i,j)*	*t (i,j)*	*t рн(i,j)*	*t ро(i,j)*	*t пн(i,j)*	*t по(i,j)*
•	(0,1)	8	0	8	1	9
•	(0,3)	13	0	13	0	13
•	(0,5)	9	0	9	11	20
•	(1,2)	9	8	17	31	40
•	(1,4)	6	8	14	20	26
•	(1,3)	4	8	12	9	13
•	(2,7)	9	17	20	40	43
•	(3,4)	10	13	23	16	26
•	(3,5)	7	13	20	13	20
•	(3,6)	6	13	19	23	29
•	(4,7)	8	23	31	35	43
•	(4,6)	9	23	26	26	29
•	(5,6)	9	20	29	20	29
•	(5,8)	10	20	30	28	38
•	(5,9)	6	20	26	36	42
•	(6,7)	4	29	33	39	43
•	(6,10)	6	29	24	43	48
•	(6,9)	13	29	42	29	42
•	(6,8)	8	29	37	30	38
•	(7,10)	5	33	38	43	48
•	(8,9)	4	37	41	38	42
•	(9,10)	6	42	48	42	48
•	(9,11)	17	42	59	44	61
•	(10,11)	13	48	61	43	61

Таблица 8.4

№ п/п	*Работа (i,j)*	$R_п(i,j)$	$R_1(i,j)$	$R_с(i,j)$	$R_н(i,j)$
1	(0,1)	1	1	0	0
2	(0,3)	0	0	0	0
3	(0,5)	11	11	11	11
4	(1,2)	23	22	0	-
5	(1,4)	12	11	9	8
6	(1,3)	1	0	1	0
7	(2,7)	23	0	13	-
8	(3,4)	9	3	0	0
9	(3,5)	0	0	0	0
10	(3,6)	10	10	10	10
11	(4,7)	12	9	2	-
12	(4,6)	9	0	3	0
13	(5,6)	0	0	0	0
14	(5,8)	8	8	7	7
15	(5,9)	16	16	16	16
16	(6,7)	10	10	0	0
17	(6,10)	14	14	14	14
18	(6,9)	0	0	0	0
19	(6,8)	1	1	0	0
20	(7,10)	10	0	10	0
21	(8,9)	1	0	1	0
22	(9,10)	0	0	0	0
23	(9,11)	2	2	2	2
24	(10,11)	0	0	0	0

Следует заметить, что в случае несложных сетевых моделей результаты расчета временных параметров фиксируют прямо на графике (рис. 8.4).

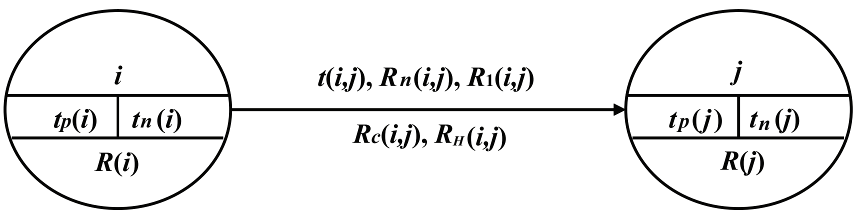


Рис. 8.4

8.3.2. Понятие об оптимизации сетевых графиков

Решение задачи оптимизации в идеале состоит в последовательном переносе средств, человеческих и др. ресурсов с некритических работ на критические до тех пор, пока все работы не будут находиться на критических путях, т.е. не будут иметь резервов. При этом длительность всех путей становится равной.

На практике оптимизацию сетевых моделей осуществляют с учетом напряженности отдельных работ, которая оценивается коэффициентом напряженности

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t'(L_{kp})}{t_{kp} - t'(L_{kp})},$$

где $t(L_{max})$ – длительность максимального из некритических путей, проходящего через работу (i,j);

$t'(L_{кр})$ – продолжительность части критических работ, входящих в путь L_{max};

$t_{кр}$ – продолжительность критического пути.

Очевидно, $0<Кн(i,j)<1$. Чем ближе Кн к единице, тем сложнее выполнить эту работу в установленные сроки.

Вычисленные значения коэффициентов напряженности позволяют классифицировать работы по зонам:

- Критическая зона – [$Кн(i,j) > 0,8$];
- Подкритическая зона – [$0,6<Кн(i,j)<0,8$];
- Резервная зона – [$Кн(i,j)<0,6$].

С учетом изложенного оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания значений коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути. Это достигается:

1) перераспределением всех видов ресурсов;
2) сокращением трудоемкости критических работ за счет их передачи на другие пути, имеющие резервы времени;
3) параллельным выполнением работ критического пути;
4) изменением состава и структуры работ.

У параллельно выполняемых работ можно смещать начала этих работ в пределах, установленных для них полных резервов. Если полный и свободный резервы равны, то начало работы (i,j) можно выбирать в любой точке отрезка $[t_p(i);t_n(j)\text{-}t(i,J)]$. В случае, когда свободный резерв меньше полного, то начало работы (i,j) можно сместить от раннего срока наступления события i только в пределах отрезка $[t_p(i);\ t_p(j)+R_c(i,j)]$.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться, и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути. Так будет продолжаться до получения рационального результата.

9. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ РИСКАМИ

9.1. Объективные критерии оценки стохастического риска

Стремление к риску или его избегание проявляются в процессе личного выбора субъектом тех или иных стратегий на практике: склонный к риску предприниматель предпочитает альтернативу со случайными исходами, среди которых один из исходов значительно предпочтительнее другого, получению скромного результата наверняка; не склонный к риску субъект предпочитает руководствоваться критериями, так сказать, «гарантированного» результата. Например, если есть возможность оценить какую-то альтернативу либо по критерию среднего результата, либо по величине дисперсии, то не склонный к риску субъект выберет в качестве критерия дисперсию, чтобы оценить степень разброса возможных результатов.

Но не только это обстоятельство – склонность или не склонность к риску – следует принимать во внимание. Сами величины результатов и величины вероятностей их получения воспринимаются разными субъектами по-разному. Например, так называемые объективисты воспринимают результаты в соответствии с их значениями, номиналами. Можно просто утверждать, что для «объективиста» полезность результата изменяется линейно с изменением его значений. Индивидуальная «оценочная функция» для значений результатов у такого субъекта линейна. А вот у «субъективистов» проявляются искажения в оценке полезности результатов. Одни из них субъективно преувеличивают ценность малых значений результатов, другие – преуменьшают ценность больших. Есть и другие субъективные проявления восприятия ценности результатов.

Как же должен поступить какой-то конкретный предприниматель, чтобы выбрать адекватный критерий оценки альтернатив в условиях стохастического риска? Что ему делать, если он не проводил специальных исследований в отношении особенностей собственной оценки риска и восприятия ценности тех или иных значений результатов и вероятностей? Главный совет – в точности следовать принципу Оккама:

«не умножать сущности без необходимости». Это значит, не следует усложнять процесс принятия решения, если с использованием самых простых, объективных критериев, традиционно применяемых в теории вероятностей, можно сделать уверенный выбор среди представившихся альтернатив. Рассмотрим, например, рискованные альтернативы, представленные в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Альтернативы	Характеристики доходности альтернатив			
	Среднее значение $M[y]$, руб.	Дисперсия $D[y]$, $\times 10^4$ руб^2	СКО σ_y, руб.	Коэффициент вариации ν_y
a_1	100 000	57 600	24 000	0,24
a_2	60 000	62 500	25 000	0,42
a_3	70 000	25 600	16 000	0,23

Основные характеристики случайной величины $\tilde{y}$ доходности этих альтернатив – среднее значение $M[y]$ (мы также обозначали его m_y) и дисперсия $D[y]$ (мы использовали обозначение D_y) величины прибыли. Кроме того, в табл. 9.1 представлены и дополнительные характеристики: среднее квадратическое значение (СКО) σ_y и коэффициент вариации ν_y.

Совершенно понятно, что вне зависимости от особенностей индивидуального отношения к риску любой человек предпочитает жить, руководствуясь рациональной жизненной позицией: «лучше быть здоровым и богатым, чем бедным и больным». Другими словами, любой нормальный предприниматель стремится увеличивать среднее значение $M[y]$ будущего дохода и одновременно уменьшать дисперсию $D[y]$ величины прибыли.

Следуя подобной жизненной позиции, предпринимателю, анализирующему альтернативы, представленные в табл. 9.1, лучше сразу отвергнуть альтернативу a_2, как имеющую меньшее среднее значение $M[y]$ будущего дохода и одновременно большую его дисперсию $D[y]$ по сравнению с альтернативами a_1 и a_3. Пожалуй, с таким решением никто спорить не будет. И поэтому в табл. 9.1 данные для отвергнутой нами альтернативы a_2 мы выделили темным фоном. А вот отдать предпочтение какой-либо из оставшихся альтернатив – a_1 и a_3 – так просто не удастся: альтернатива a_1 лучше, чем a_3 по величине среднего дохода (среднее значение у нее равно 100 000 руб. против 70 000 руб.), но хуже по показателю разброса возможных его значений (дисперсия 57 600 $\times 10^4$ руб.^{2} против 25 600 $\times 10^4$ руб.^{2}).

Справедливости ради нужно сказать, что, хотя дисперсия у альтернативы a_1 более чем в два раза выше, чем у a_3, это не значит, что разброс значений дохода у альтернативы a_1 вдвое хуже. Не следует забывать, что дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой случайной величины. Чтобы устранить подобное недоразумение, на практике лучше разброс значений дохода оценивать или средним квадратическим отклонением (СКО) случайной величины дохода (обычно обозначают через σ), или коэффициентом вариации (мы обозначили его через ν). По определению СКО случайной величины (его еще называют стандартным отклонением) равно положительному корню квадратному из величины ее дисперсии, т.е.

$$\sigma_y = +\sqrt{D[y]}\cdot$$

Что касается коэффициента вариации, то по определению он вычисляется только для величин, у которых среднее значение не равно нулю, и равен отношению СКО к модулю среднего значения:

$$\nu_y = \frac{\sigma_y}{|M[y]|}.$$

В результате получается, что альтернатива a_1 не только лучше, чем a_3 по величине среднего дохода, но они практически эквивалентны по значениям коэффициентов вариации величин доходов (0,24 и 0,23 соответственно).

Если предприниматель все еще не решается сделать выбор, ему следует воспользоваться известным из теории вероятностей неравенством Чебышева (это неравенство – одна из теорем закона больших чисел, который открыл выдающийся российский математик П.Л. Чебышев). Неравенство Чебышева имеет вид:

$$P(|\tilde{y} - M[y]| \geq \mu) \leq \frac{D[y]}{\mu^2}.$$

Согласно этому неравенству, если у случайной величины, имеющей произвольное распределение вероятностей, дисперсия не бесконечна, то вероятность того, что ее значение отклонится от среднего значения – не важно, в большую или в меньшую сторону – на величину, не менее, чем μ, не превосходит значения $\frac{D[y]}{\mu^2}$. Иными словами, поскольку под знаком вероятности в выражении для неравенства Чебышева стоит модуль разности случайной величины и ее среднего значения, то верхняя граница значения вероятности распределяется на два события: $\tilde{y} \geq M[y]$ и $\tilde{y} \leq M[y]$.

Однако чаще все же предпринимателей волнует вероятность получения доходов ниже средних ожидаемых. В таком случае, пользуясь неравенством Чебышева, достаточно просто можно получить приближенную оценку недополучения доходов, если предположить, что распределение вероятностей величин доходов примерно симметрично. Для этого просто нужно значение верхней границы для вероятности поделить на два.

Пусть, например, предпринимателя интересует, с какой вероятностью значение случайной величины $\tilde{y}$ дохода для первой альтернативы, из представленных в табл. 9.1, окажется не больше, чем 70 000 руб. (это значение среднего результата для третьей альтернативы). Тогда, учитывая, что 10 000–70 000 = 30 000 = $1{,}2\sigma_y$, можно записать:

$$P(\tilde{y} \leq 70000) = P(100000 - \tilde{y} \geq 30000) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{D[y]}{30000^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{D[y]}{(1{,}2\sigma_y)^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{D[y]}{1{,}44\sigma_y^2} = \frac{1}{2{,}88} \approx 0{,}35.$$

Возможно, оценка вероятности такого события поможет предпринимателю сделать свой выбор. Но предположим, что все равно он не может решиться. Это означает, что ему мало одних только числовых характеристик случайного результата. В таком случае следует для каждой альтернативы более подробно проанализировать само распределение случайного результата. Для этого необходимо воспользоваться понятием функции распределения. По определению, функция распределения – это вероятность того, что случайная величина $\tilde{y}$ окажется строго меньше какого-то фиксированного значения t:

$F(t) = P(\tilde{y} < t).$

Если случайная величина $\tilde{y}$ относится к дискретному типу и известен ее вероятностный ряд $P(\tilde{y} = k)$, который имеет, например, возможные значения k=0, 1, 2, 3, …, t-1, t, t+1, …, K, то $F(t) = \sum_{k=0}^{t-1} P(\tilde{y} = k)$. А если $\tilde{y}$ – это непрерывная случайная величина с плотностью $f(y)$, то $F(t) = P(\tilde{y} < t) = \int_{-\infty}^{t} f(y)dy$.

Пусть функция распределения случайной величины $\tilde{y}$ дохода построена. Тогда для анализа риска и выбора наилучшей альтернативы предприниматель может применить принцип стохастического доминирования. Этот принцип также обусловлен уже обсуждавшейся нами рациональной жизненной позицией, только применительно к стохастическому риску звучит он так: «тот вариант действий лучше, для которого выше вероятность получения более предпочтительного результата».

Другими словами, чтобы установить, какой из двух вариантов – a_1 или a_3 – для предпринимателя лучше, ему необходимо последовательно перебрать все возможные текущие значения t величины дохода $\tilde{y}$ и проверить, какая из вероятностей больше $P(\tilde{y}(a_1) \geq t)$ или $P(\tilde{y}(a_3) \geq t)$.

Если для всех значений y=t, например, оказывается, что выполняется неравенство

$$P(\tilde{y}(a_1) \geq t) \geq P(\tilde{y}(a_3) \geq t)$$

или эквивалентное ему неравенство

$$Fa_1(t) \leq Fa_3(t),$$

то, следовательно, альтернатива a_1 ничуть не хуже альтернативы a_3 (коротко это утверждение можно записать математически так: $a_1 \succsim a_3$). В таком случае также говорят, что альтернатива a_3 стохастически доминируется альтернативой a_1. Проверку на доминируемость по правилу весьма удобно проводить визуально. Для этого следует изобразить графики функций $Fa_1(y) = P(\tilde{y}(a_1) < t)$ и $Fa_3(y) = P(\tilde{y}(a_3) < t)$ в одной системе координат и выбрать ту альтернативу, график функции распределения для которой лежит геометрически ниже.

Покажем, как это выглядит. В качестве примера в табл. 9.2 представлены значения (в процентах) функции $Fa(y)$ распределения предполагаемого дохода $\tilde{y}$ для четырех гипотетических альтернатив.

Таблица 9.2

Альтернативы	Величина предполагаемого дохода, тыс. руб.									
	0	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**
a_1	15	40	60	70	80	85	90	95	97	99
a_2	0	0	30	55	70	80	85	87	89	90
a_3	0	5	9	11	18	20	22	27	29	30
a_4	0	0	0	5	12	22	45	70	90	95

Сравнительный анализ данных табл. 9.2 показывает, что альтернатива a_1 доминируется альтернативами a_2, a_3 и a_4, которые между собой несравнимы по принципу стохастического доминирования. На рис. 9.1 представлены графики функций распределения результатов для этих альтернатив.

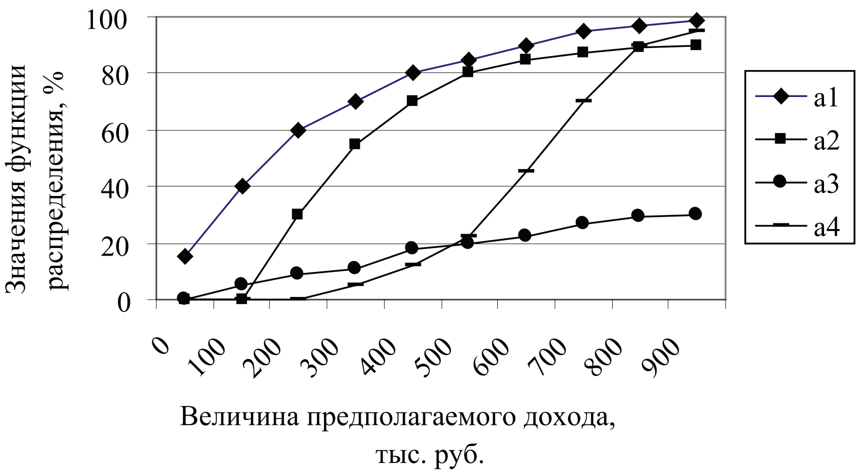


Рис. 9.1. Графики функций распределения результатов для альтернатив

Очевидно, что рассмотренное нами отношение стохастического доминирования не совершенно, так как неравенство в правой части выражения может не выполняться для всех значений результата. По этой причине предприниматель может задаться вопросом: может ли он назвать хотя бы один из уровней притязаний? Под уровнем притязаний мы договорились понимать любой результат, достижение которого отождествляется в сознании предпринимателя с успехом операции. Например, это может быть некий уровень доходов, превышение которого вполне устраивает нашего предпринимателя.

Если уровень $y^{\text{треб}}$ притязаний как требуемый результат выполнения предпринимательской операции определен, то остается для каждой альтернативы определить вероятность получения результата не хуже требуемого. Пусть, например, из значений, представленных в табл. 9.2, нашего предпринимателя вполне устроили бы доходы, имеющие величину не ниже значения 600 000 руб.

Иными словами, его вполне устроило, если бы по завершении операции доход достиг уровня 600, 700, 800 и 900 тыс. руб. В случае подобных предпочтений наилучшей следует считать альтернативу a_3, поскольку именно для этой альтернативы вероятность события $P(\tilde{y}\ (a_3) \geq 600\ 000)$ оказалась наибольшей.

В том случае, если случайный результат предпринимательской акции проявляется в процессе последовательного формирования обстоятельств, можно рекомендовать применить байесовский подход, при котором принимаются во внимание не только данные наблюдений, но и интересующие исследователя субъективные вероятности. С помощью этих данных могут быть выведены значения других вероятностей, которые также необходимо учитывать.

Порядок событий в данных расчетах не имеет значения. И, как мы уже знаем, если события независимы в том смысле, что одно событие не повлияет на вероятность происхождения другого, то вероятности всех событий просто перемножаются. Применение байесовского вывода можно показать на примере с брокером, прибегнувшим к услугам консультанта, чтобы принять решение о покупке 100 тыс. тонн железной руды у дальневосточного правительства по цене значительно ниже мировой – по $5 за тонну.

На рис. 9.2 изображено дерево событий, включающее в себя первоначальные оценки брокером вероятностей того, что отчет консультанта будет положительным (или отрицательным) при условии, что поддержка правительства на совершение сделки действительно будет (или не будет) получена. Далее применяется так называемое обращенное дерево вероятностей, моделирующее идею байесовского подхода (рис. 9.3). В случае использования для анализа риска «обращенного» дерева вероятностей производится оценка вероятностей поддержки (отвержения) сделки при условии положительности (отрицательности) отчета.

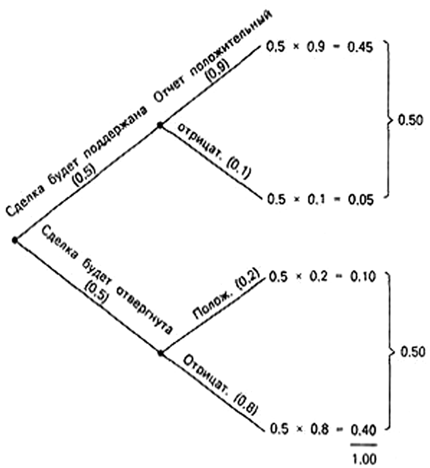


Рис. 9.2. Дерево событий

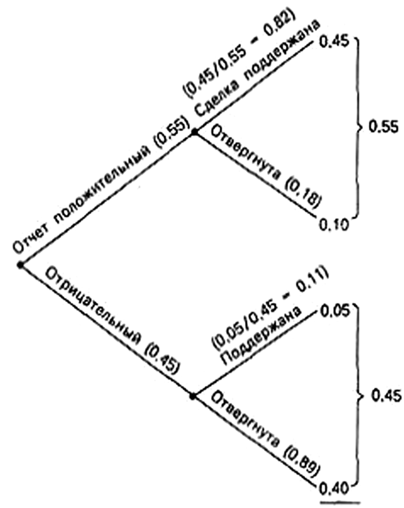


Рис. 9.3. «Обращенное» дерево вероятностей

Таким образом, переоцененные вероятности отличаются от интуитивно определенных брокером. Однако необязательно, что впоследствии полученные вероятности «лучше», чем предыдущие. Но, по крайней мере, они находятся в лучшем соответствии с остальными вероятностями в данной модели.

9.2. Субъективные критерии оценки стохастического риска

Но что, если и это не помогло нашему предпринимателю определиться в выборе? Исследования, например, показывают, что для каждой величины дисперсии результатов существует вполне определенная компенсирующая величина среднего результата, делающая вариант решения для предпринимателя вполне привлекательным. Другими словами, как мы уже отмечали, предприниматель может пойти на риск не оттого, что риск для него «привлекателен» (имеет положительную ценность), а потому, что он рассчитывает на получение более высокого положительного эффекта. Так вот в подобных ситуациях ему уже просто необходимо учесть индивидуальные особенности оценки полезности значений результатов и субъективного восприятия риска.

Приходится не ограничиваться использованием только объективных характеристик распределения результата. Использование объективных показателей для учета риска имеет очень существенный недостаток – отсутствие нормативной теории, которая позволяла бы четко указать, когда и какие объективные показатели адекватно отражают предпочтения ЛПР в ситуации выбора в условиях стохастической неопределенности. Этого недостатка лишены аксиоматические методы построения функции выбора наилучшей альтернативы, которые не только дают теоретическую основу для качественного учета особенностей отношения ЛПР к вероятностным распределениям на множестве результатов, но и позволяют дать им обоснованную количественную оценку в виде функции полезности.

В теории ожидаемой полезности определяют функцию полезности $u(y)$ случайных результатов $\tilde{y}$, математическое ожидание которой полностью определяет предпочтения ЛПР на лотереях с учетом индивидуального отношения к риску.

Модель ожидаемой полезности (МОП) – наиболее старый вариант нормативного подхода к принятию решений. Считают, что истоки модельных построений принятия решений восходят к Блезу Паскалю, который предложил тактику выбора в азартных играх: выбирай ту альтернативу, при которой будет максимальным произведение возможного выигрыша на его вероятность. Затем эту идею подхватили и начали активно разрабатывать Д. Бернулли, а затем и П. Лаплас. Однако совершенную форму, пригодную для практического использования, ему придали Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн (1947 г.) и А. Эдвардс (1954 г.). Термин «полезность» был обоснован Д. Бернулли в 1738 г., когда он дал схему соотношения богатства и полезности выигрываемых денег. Л. Сэвидж в 1954 г. создал теорию, в которой допускались неожиданные субъективные альтернативы. Родилось понятие субъективной вероятности. Было введено понятие субъективной ожидаемой ценности. С тех пор это понятие стало использоваться наравне с понятием объективной величины исхода.

Обозначим функцию полезности через $u(y)$. Согласно аксиоматической теории полезности отношение предпочтения на множестве альтернатив a моделируется с использованием математического ожидания $M[u(y(a))]$ функции полезности для этих альтернатив:

$$a_1 \succsim a_2 \Leftrightarrow M[\, u(y(a_1))\,] \geq M[\, u(y(a_2))\,]\ .$$

Другими словами, если функция полезности задана, то полезность произвольной лотереи на результатах $\tilde{y}$ лотереи определяется ожидаемой полезностью результатов этой лотереи. В частности, одна из наиболее известных функций полезности – функция Бернулли, задающая полезность определенных количеств денег, получаемых в ходе случайной реализации исходов.

Теперь о практических приложениях функции полезности для предпринимательства. Так, наиболее известны две функции полезности денег. Одна из них – квадратичная функция полезности с положительными параметрами (функция полезности Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна), задаваемая выражением $u(y) = \alpha y - \beta y^2$. Разумеется, рассматривается только восходящая ветвь на неотрицательных значениях результата $\tilde{y}$. Отмечается, что широкое ее использование объясняется теоремой Неймана–Моргенштерна о том, что при определенных естественных допущениях экономическое поведение направлено на максимизацию ожидаемого значения функции полезности. Другая, не менее распространенная, – это логарифмическая функция полезности: $u(y) = log_a y$, для a>0.

Качественно особенности отношения предпочтения ЛПР к стохастическому риску могут быть отражены графически. На рис. 9.4 представлены графики функций полезности для лиц с различной психологической доминантой.

Несколько иной подход к учету субъективной стороны выбора предлагают приверженцы теории проспектов – это представители когнитивной психологии, которая более всего использует постулаты и представления экономики и математики, – рекомендуют наилучший исход выбирать на основе полезности результата для этого исхода, умноженной на вес результата, а не на вероятность.

К такому выводу авторы теории проспектов пришли, анализируя субъективное восприятие величин вероятностей. Проиллюстрируем проявления искажений в восприятиях вероятностей на следующих известных примерах. Так, например, если обычному человеку предъявить два упорядоченных набора из пяти чисел: (1, 2, 3, 4, 5) и (5, 1, 3, 5, 1), то он вряд ли сочтет равновероятными эти последовательности, даже если они формируются путем равновероятного независимого выбора каждой очередной цифры из множеств {1, 2, 3, 4, 5}. Более того, около 70% испытуемых обычно считают первую последовательность весьма маловероятной в силу ее регулярности; то есть «степень сходства» регулярной последовательности с нерегулярной оценивается как весьма малая для случайностей.

По этой же причине при оценке вероятностей человек может игнорировать объемы выборок. Например, если вероятность некоего элементарного события равна 0,5, то вероятности сложных событий типа «элементарное событие наступило 8 раз из 10» и «элементарное событие наступило 800 раз из 1000» часто воспринимаются субъектом как одинаковые, хотя второе событие объективно менее вероятно. Далее. Оказывается, что если обычного человека попросят оценить, например, техническую надежность определенной марки легкового автомобиля, то, прежде чем вынести суждение, он припомнит поломки, возникавшие у подобных автомобилей у него самого, среди его друзей и знакомых. И если число поломок в известных ему случаях было значительным, он вынесет суждение о весьма низкой вероятности безотказной работы автомобиля данной марки.

Установлено также, что, стремясь к выравниванию вероятностей различных по правдоподобности событий, человек переоценивает объективную вероятность малоправдоподобных событий и одновременно недооценивает вероятность очень правдоподобных. Кроме того, выяснено, что человек гораздо выше оценивает вероятность выигрыша, чем вероятность проигрыша. Тверски и Канеман выделили несколько эффектов, проявляющихся при принятии решений:

- «эффект определенности» – люди переоценивают однозначные исходы по сравнению с высоко вероятными, они стабильно предпочитают \$3000 наверняка лотерее (\$4000; 0,8) или же лотерею (\$3000; 0,9) лотерее ($6000; 0,45), а также лотерею ($6000; 10^{-3}) лотерее ($3000; $2х10^{-3}$), причем запись типа ($*y*;*p*) обозначает розыгрыш лотереи с исходами $*y* и $0 (ноль долларов) с вероятностями *p* и 1-*p* соответственно;

• «эффект изоляции» – если выигрыш в лотерее – это участие в другой лотерее, то вероятности первой и второй лотерей человек не перемножает, он рассматривает их изолированно друг от друга, и в результате не работает аксиома свертывания;

• при выборе люди учитывают не итого, а различие в состоянии до и после выбора;

• имеет место качественный сдвиг при изменении вероятностей от 0,9 до 1,0 или от 0,0 до 0,1 по сравнению, например, с изменением с 0,5 до 0,6; другими словами, переходы от невозможного к маловероятному или от высокой вероятности к абсолютной уверенности отличаются от любых других трансформаций в центре вероятностной шкалы;

• наблюдается существенная асимметрия *S*-образной функции полезности для выигрышей и потерь. Отсюда в ходе коммерческих и политических переговоров каждая из сторон более чувствительна к потерям, в результате чего компромиссные решения обеими сторонами воспринимаются как более проигрышные;

• «эффект рамки», или влияние контекста на восприятие альтернатив: если альтернативы сформулированы в терминах приобретений, то выбирают то, что безопаснее, надежнее и т.п., а если они сформулированы в терминах потерь, то люди выбирают более рискованные решения (однако не все исследователи с этим согласны).

В итоге оказывается, что:

• человек переоценивает объективную вероятность малоправдоподобных событий и одновременно недооценивает вероятность очень правдоподобных;

• человек считает событие тем более вероятным, чем легче и быстрее можно запечатлеть в памяти примеры событий этого типа;

• человек гораздо выше оценивает вероятность выигрыша, чем проигрыша;

• при оценке вероятностей событий люди не принимают во внимание объем выборки;

• человек часто рассматривает независимые события как зависимые и др.

Предложенная в теории проспектов функция весов представляет собой монотонную функцию от вероятностей, имеющую указанные особенности. В том числе низкие вероятности недооцениваются, средние и высокие переоцениваются, причем последний эффект выражен сильнее, чем начальный. В области малых вероятностей веса по величине меньше, чем соответствующие им вероятности.

Один из авторов теории А. Тверски в соавторстве с Фоксом в 1995 г. показали, что в крайних областях вероятностей исходов (от 0,0 до 0,1 и от 0,9 до 1,0) вступают в действие два психологических эффекта: 1) оценка переходов от «невозможного в возможное», 2) из «возможного в наступающее наверняка». Они задействуют сдвиг по шкале «уверенность-неуверенность» в возможности исходов, а не по вероятностной шкале.

В работе других авторов (Миллер и Фогли, 1991) рассмотрены иные диапазоны переходов: от $\frac{1}{2}$ к $\frac{2}{3}$, причем в последнем случае событие переходит в категорию «субъективно возможного», а не только «неопределенного». В итоге вместо ожидаемой величины выигрыша вводится представление о «мере полезности». В теории проспектов используется представление «весов решений», которые не подчиняются аксиомам вероятностей и не должны интерпретироваться как «меры убежденности» (Шумейкер, 1994). «Веса решений» лишь монотонны по вероятностям и отражают общую привлекательность лотерей.

Принимая решения, люди демонстрируют искажения вероятностных оценок, зависимость выбора от контекста (например, «эффект рамки»), подмену частотного оценивания уверенностью и др. Для осуществления выбора между гипотезами или оценки вероятностей гипотез значительную роль играет процесс получения информации. Байесовский подход рассмотрел в своей книге еще Ю. Козелецкий. Экологический (частотный) подход развил Гигеренцер (Gigerenzer). Иногда возникают ситуации принятия решений, в которых неопределенность относится к тем факторам, которые лишь предположительно (и в этом смысле «вероятно») могут повлиять на выбор субъекта. Например, характеристики альтернатив могут сулить большую или меньшую вероятность тех или иных результатов для них, факторы условий (внутренних или внешних) влияют на восприятие той или иной информации. Особенно отличают влияние на вероятность вынесения того или иного условия факторов времени и последовательности.

Эффекты последовательности, или влияние порядка получения информации, впервые были зафиксированы в 1946 г. С. Ашем. Двум группам испытуемых Аш предъявлял один и тот же список свойств личности (зависть, упрямство, критиканство, импульсивность, трудолюбие, ум), но в прямом и обратном порядке. Оказалось, что действует эффект первичности – более сильное влияние на выносимое решение относительно свойств личности индивида производят те элементы, которые занимают первые три места в списке, практически независимо от того, что именно это за элементы. В ситуациях, когда люди знакомятся с противоположным мнением, эффект первичности проявляется в том, что они остаются более подверженными влиянию первого впечатления, т.е. первоначально полученных аргументов.

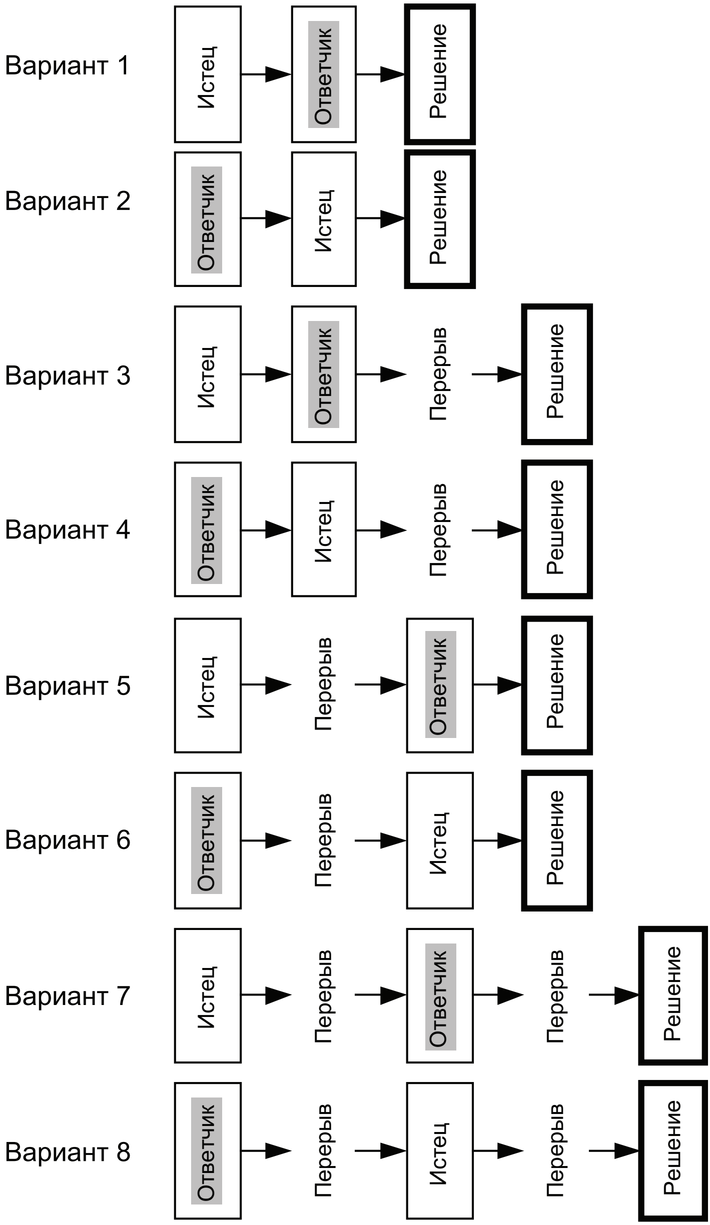
Иногда наоборот: именно последние из полученных сообщений оказывают наиболее сильное впечатление. Наблюдается эффект недавности. Особенно это заметно в ходе дебатов, публичных разбирательств и т.п. Вопрос, каким выступать, таким образом, далеко не так прост. Оказывается, все зависит от времени, через которое выносится решение. Если решение выносится сразу после окончания дебатов, то наиболее сильно проявляется действие эффекта недавности, а если решение выносится спустя некоторое время после окончания дебатов – эффект первичности. Об эффектах первичности и недавности необходимо постоянно помнить, принимая решения при подготовке и проведении деловых встреч и бесед, о которых мы будем еще говорить чуть позже.

Стоит заметить, что существование и характер проявления эффектов первичности и недавности хорошо усвоены адвокатами в судебной практике. Так, Н. Миллер и Д. Кэмпбелл проводили в середине 90-х годов XX в. деловую игру, в которой инсценировался судебный процесс, где истец требовал возмещения ущерба, нанесенного ложным обвинением. Восемь вариантов последовательности событий, которые рассматривались в этой деловой игре, схематично представлены на рис. 9.4.

Испытуемые выносили вердикт, который и был принятием решения по делу. Существенным фактором оказалось время вынесения этого приговора. Если о решении спрашивали через неделю после прослушивания выступлений сторон, то проявлялся эффект первичности (3-й и 4-й варианты последовательности событий). Если эта же неделя разделяла прослушивание информации обеих сторон, а решение выносилось сразу после прослушивания текстов последней из сторон, наблюдался эффект недавности (последовательности 5 и 6). Две первые (1 и 2) и последние (7 и 8) схемы не испытывали влияния со стороны эффектов последовательности. Кроме того, оказалось, что в вариантах 5 и 6 испытуемые были в разной степени подвержены аргументам истца и ответчика: в варианте 5 испытуемые больше могли рассказать о фактах, приведенных ответчиком (эффект недавности), а в варианте 6 в выигрыше оказывался истец, и решение принималось в его пользу. Таким образом, если решение принималось сразу после последнего выступления, то преимущества получал последний из выступавших. Сочетание факторов последовательности выступлений и времени, через которое следовало вынесение вердикта, может быть использовано не только самими выступающими, но и теми, кто ведет дискуссии или судебные разбирательства. Именно «ведущий» имеет очень серьезные рычаги управления принятием решения, давая выступающим слово в определенном порядке и организуя необходимые последовательности перерывов в слушаниях.

Итак, желание или нежелание рисковать можно при необходимости внести в анализ предпочтительности альтернатив. Например, это можно сделать с использованием дерева решений. Для этого потребуется только построить функцию полезности для исходов рассматриваемого дерева событий.

Важным обстоятельством, позволяющим существенно облегчить процедуру построения функции полезности, является то, что она аксиоматически задается с точностью до положительного линейного преобразования. Это означает, что если $u(y)$ является функцией полезности случайного результата $\tilde{y}$, то все множество $\{k \cdot u(y)+c,\ k>0\}$ положительных линейных преобразований над значениями этой функции также дают функции полезности для оценки того же самого распределения результата $\tilde{y}$ с той же самой психологической доминантой пользователя. То есть любая функция из множества $\{k \cdot u(y)+c,\ k>0\}$ упорядочивает альтернативы точно так же, как это делает исходная функция полезности $u(y)$. Следовательно, при построении функции полезности можно произвольно выбирать начало отсчета c и единицу измерения k. Поэтому чаще и удобнее выбирают нулевое начало отсчета и такую единицу измерения, чтобы функция полезности изменялась в пределах от нуля до единицы.



Вариант 1
Истец
Ответчик
Решение
Вариант 2
Ответчик
Истец
Решение
Вариант 3
Истец
Ответчик
Перерыв
Решение
Вариант 4
Ответчик
Истец
Перерыв
Решение
Вариант 5
Истец
Перерыв
Ответчик
Решение
Вариант 6
Ответчик
Перерыв
Истец
Решение
Вариант 7
Истец
Перерыв
Ответчик
Перерыв
Решение
Вариант 8
Ответчик
Перерыв
Истец
Перерыв
Решение

Рис. 9.4.

Заметим, что если предприниматель не склонен к риску, то для него индивидуальная функция полезности случайных значений результата выпукла вверх. Проще всего это показать, используя понятие базовой лотереи и достоверного эквивалента. Вообще в математической теории принятия решений (ТПР) лотереей называется пара (Y,P), где $Y = \{y_1, y_2,...,y_n\}$ – множество возможных значений случайного результата $\tilde{y}$, $P = (p_1, p_2,...,p_n)$ – вероятностное распределение на указанных результатах. В общем случае можно рассматривать лотереи с непрерывными значениями результата, а также лотереи с векторными результатами и составные лотереи (где результатом одной лотереи является другая лотерея).

Психологические особенности человека таковы, что ему очень трудно сравнивать лотереи с большим числом выигрышей. Человеку гораздо проще иметь дело лишь с двумя исходами – наилучшим y^+ и наихудшим y^-. Обычно человеку также достаточно просто отвечать на вопросы типа: «За сколько вы согласны отступиться от участия в … <такой-то> лотерее?» или «Во сколько вы оцениваете … <такую-то> лотерею, если вам предложат ее продать?» Кроме того, обычно предприниматель может достаточно уверенно ответить на вопросы, касающиеся сравнения по предпочтительности произвольного неслучайного результата y, не лучшего, но и не худшего, с так называемой базовой лотереей, в которой наилучший результат y^+ получается с вероятностью $p(y)$, а наихудший y^- результат – с вероятностью $1–p(y)$. Так вот, для оценки индивидуальной полезности $u(y)$ конкретного неслучайного результата y, находящегося по предпочтению между худшим y^- и лучшим y^+, предприниматель должен ответить на вопрос: «Какова, по вашему мнению, должна быть вероятность $p(y)$ получения в базовой лотерее лучшего результата y^+, чтобы вам лично было бы все равно – получить ли результат наверняка или участвовать в базовой лотерее с вероятностью $p(y)$ для лучшего результата y^+».

Предположим, например, что брокер в результате рискованной сделки может получить максимальный доход в размере \$300 000 или потерять \$100 000. Следовательно, для него y^+=\$300 000 и y^- =-\$100 000.

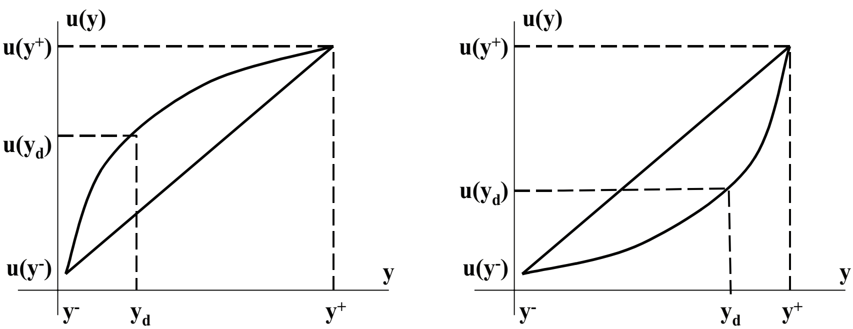
Предположим, что некто предлагает этому брокеру наверняка, т.е. безо всякого риска, доход в \$100 000 (т.е. в наших обозначениях неслучайный результат y=\$100 000) или указать такую величину вероятности $p(y)$ получения лучшего результата y^+=\$300 000 с риском потерять

\$100 000, что ему будет все равно, получить ли \$100 000 наверняка или участвовать в базовой лотерее (\$300 000, $p(y)$; -\$100 000, $1-p(y)$)). Предположим, брокер назвал свою оценку: при вероятности примерно 0,5 он не может отдать предпочтение ни получению наверняка \$100 000, ни участию в базовой лотерее с исходами y^{+}= \$300 000 и y^{-} =-\$100 000. Следовательно, полезность u(\$100 000) равна 0,5. На основе введенного нами понятия базовой лотереи можно сделать вывод о начале отсчета и единице измерения для функции полезности. Так, полезность наихудшего результата, очевидно, нулевая, поскольку только при нулевой вероятности ЛПР будет все равно, получить ли наихудший результат наверняка или участвовать в лотерее. Поэтому $u(y^{-}) = 0$. А вот полезность наилучшего результата равна единице, поскольку ЛПР пойдет на участие в лотерее против получения наилучшего результата наверняка только в случае 100% гарантии успеха операции. Отсюда логически вытекает, что $u(y^{+}) = 1$.

Однако вопрос о величине полезности можно поставить и по-другому: какой должна быть величина достоверно получаемого результата y_d, чтобы для ЛПР было бы безразлично, получить ли результат y_d наверняка или участвовать в базовой лотерее с фиксированной вероятностью $p(y)$ получения наилучшего результата. Предположим, мы выбрали базовую лотерею с характеристиками (\$300 000, 0,5; -\$100 000, 0,5), т.е. зафиксировали вероятность $p(y)$ на уровне 0,5. И спросили нашего брокера, на какой достоверно получаемый результат y_d он согласился бы, чтобы ему было безразлично, получить ли его наверняка или участвовать в лотерее с равновероятными исходами и результатами \$300 000 и -\$100 000. Такой результат y_d называют достоверным эквивалентом лотереи. Поскольку по своей сути обе формы вопросов эквивалентны, мы вправе ожидать, что брокер даст ответ: y_d=\$100 000. Однако, как установлено психологами, вопрос о величине достоверного эквивалента базовой лотереи оказывается для большинства предпринимателей более комфортным.

Именно по величине детерминированного эквивалента достаточно просто судить о типе отношения ЛПР к стохастическому риску. И если оказывается, что детерминированный эквивалент y_d лотереи меньше математического ожидания M_y результатов лотереи, то ЛПР не склонно к риску, если $y_d > M_y$ – склонно к риску, а если они равны, ЛПР безразлично к риску. Действительно, так как для ЛПР, несклонного к риску, предпочтительнее получение среднего выигрыша наверняка, нежели участие в лотерее со случайными исходами. Поэтому для него выполняется неравенство: $u(My) > M[u(y)]$.

Аналогично можно показать, что функция полезности склонного к риску ЛПР строго выпукла вниз, а для безразличного к риску – линейна. На рис. 9.5 приведены функции полезности несклонного и склонного к риску ЛПР.



а) несклонный к риску б) склонный к риску

Рис. 9.5. Графики функций полезности несклонного (а) и склонного (б) к риску ЛПР

Рассмотрим процедуру построения функции полезности на интервале возможных значений результата коммерческой операции для брокера, изучающего вопрос о покупке руды. Ранее нами было установлено, что все возможные исходы этой коммерческой сделки лежат в диапазоне -$100 000 до $300 000. Но брокер решил расширить диапазон возможных результатов для построения функции полезности. Он считает, что нужно принять во внимание возможные результаты со значениями от y^{-}=-$110 000 до y^{+}=$500 000. Поэтому сразу же положим, что u(-$110 000)=0 и u($500 000)=1.

Далее предложим брокеру рассмотреть базовую лотерею с равновероятными исходами из диапазона [-$110 000; $500 000] и назвать ее достоверный эквивалент. Мы только что рассматривали подобную задачу, поэтому для брокера она не представила труда. Он назвал достоверный эквивалент в размере -\$50 000. Поскольку полученному достоверному эквиваленту соответствует математическое ожидание функции полезности, равное 0,5, обозначим его достоверный эквивалент через $y_{0.5}$. Итак, у нас есть уже три точки, чтобы построить функцию полезности брокера, решающего вопрос о покупке руды по достаточно низкой цене в \$5 за тонну. Это точки y^{-}=-\$110 000, $y_{0.5}$= -\$50 000 и y^{+}= \$500 000. Известны также значения величин полезности для них:

u(-\$110 000)=0, *u*(-\$50 000)=0,5 и *u*(\$500 000)=1.

Величина $y_{0.5}$= -\$50 000 существенно меньше математического ожидания в лотерее с равновероятными исходами, равного 0,5(-\$110 000+\$500 000) = \$305 000. Значит, наш брокер совершенно не склонен к риску.

Что делать дальше? Да то же, что мы только что делали! Только в качестве исходных диапазонов для построения базовой лотереи нужно будет рассмотреть два новых диапазона результатов: [-\$110 000; -\$50 000] и [-\$50 000; \$500 000]. Эти диапазоны образовались из исходного диапазона [-\$110 000; \$500 000] после того, как мы разделили его точкой $y_{0.5}$= -\$50 000, соответствующей полученному нами достоверному эквиваленту. Итак, спросим теперь у нашего брокера: каков достоверный эквивалент для лотереи с равновероятными исходами и диапазоном возможных значений [-\$110 000; $y_{0.5}$= -\$50 000].

Напоминаем, что $u(y^{-}$=-\$110 000)=0 и $u(y_{0.5}$= -\$50 000)=0,5, поэтому полученный достоверный эквивалент будет иметь полезность, равную 0,25. В связи с чем обозначим его через $y_{0.5}$. Брокер подумал и ответил, что достоверным эквивалентом $y_{0.5}$ диапазона [y^{-}=-\$110 000; $y_{0.5}$= -\$50 000] значений результата является примерно 80 000. Затем для второго диапазона он назвал в качестве значения для точки $y_{0.5}$ величину, равную примерно \$30 000…\$35 000. Остановились на цифре \$33 000. В системе координат (*y*; *u*(*y*)) через пять полученных точек была проведена плавная кривая (рис. 9.6).

Если кривая была точно построена, то значения выгоды можно использовать вместо действительных последствий. Использование подобной кривой позволяет осуществлять анализ дерева решений в направлении предотвращения риска, причем с большой точностью. И если кривая была точно построена, то значения выгоды можно использовать вместо действительных последствий.

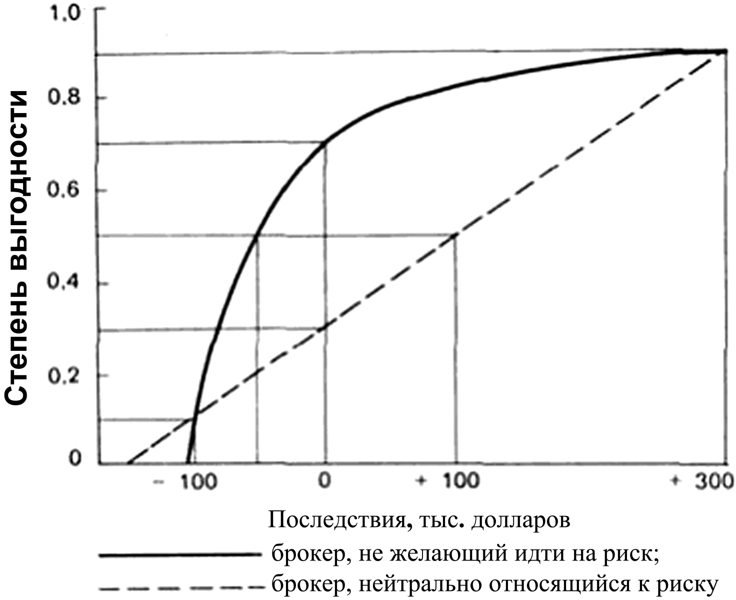


Рис. 9.6. Эмпирическая кривая функции полезности (выгодности) для брокера

Именно эту эмпирическую кривую и приняли за функцию полезности брокера, отражающую оценку его личной выгодности в задаче о покупке руды. При необходимости можно достаточно просто аппроксимировать полученную кривую одной из аналитических зависимостей. Наиболее часто для аппроксимации эмпирической функции полезности несклонного к риску ЛПР используют экспоненциальную зависимость вида $u(y) = \alpha + \beta e^{-(\gamma y+\delta)}$, параметры которой достаточно просто определить либо методом наименьших квадратов, либо методом выравнивания.

Оценка возможных результатов является наиболее сложным практическим вопросом в анализе дерева решений. Для практического использования при принятии коммерческого решения брокер решил отразить координаты основных точек полученной эмпирической кривой выгоды в виде таблицы и затем применить эти данные в дереве решений. Координаты основных точек эмпирической кривой представлены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Значение результата, тыс. долл.	-110	-100	-80	-50	0	33	300	500
Эмпирические значения полезности (выгодности)	0	0,1	0,25	0,5	0,7	0,75	0,9	1,0

Изобразим на дереве решений брокера величины денежных сумм и соответствующие им значения их полезностей (выгодностей), взятые из данных табл. 9.3. Соответствующий фрагмент дерева решений брокера представлен на рис. 9.7.

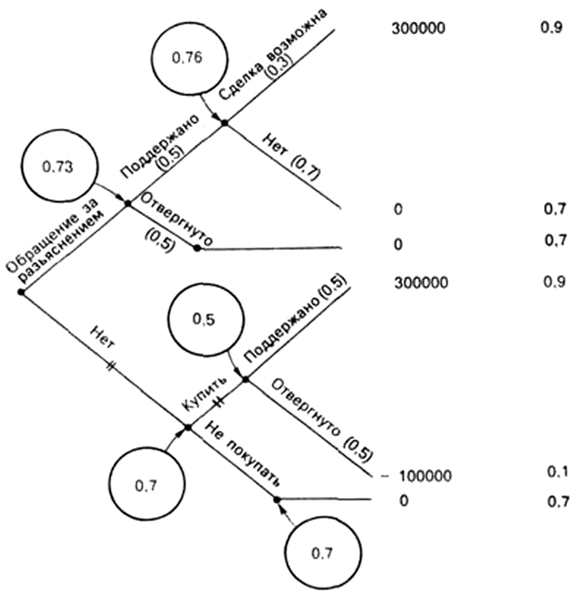


Рис. 9.7. Эмпирическая кривая функции полезности (выгодности) для брокера

В кружках на рис.9.7. проставлены математические ожидания полезностей для соответствующих ветвлений дерева. Сравнение величин, помещенных в кружках, позволяет сделать вывод, что оптимальный вариант решения (с точки зрения брокера, не желающего идти на риск) диаметрально противоположен варианту, являющемуся оптимальным с точки зрения рискующего брокера. Не имея дополнительной информации, брокер отвергает сделку. С другой стороны, как это следует из рис. 9.7, на котором изображено дерево решений, по максимуму ожидаемой полезности (величина 0,73 в кружке слева вверху рис. 9.7) выигрышным следует считать вариант обращения в правительство. Поэтому брокер, индивидуальная функция полезности которого явно свидетельствует о его несклонности к риску, выбирает вариант обращения в правительство за разъяснениями, поскольку ожидаемая полезность альтернативного варианта решения (не обращаться за разъяснениями и действовать наудачу) составляет всего 0,7.

9.3. Примеры использования математических моделей и методов для обоснования рискованных предпринимательских решений

Определение оптимального размера выборки для принятия решения о назначении скидки с подписной цены журнала. Предприниматель, занимающийся изданием глянцевых журналов, решает вопрос об увеличении тиража журнала, поскольку это обещает дополнительную прибыль. Однако предприниматель понимает, что если спрос на журнал не увеличится, то дополнительный тираж – это чистые убытки. Для составления прогноза величины будущего тиража предприниматель может получить информацию о размере процента положительных ответов при помощи опроса не всех, а только некоторой части из бывших подписчиков журнала. Однако возникал вопрос, насколько такая информация была бы точной. Мы достаточно хорошо понимаем, что вопрос о цене не отделим от вопроса о качестве, причем чем выше качество информации, тем выше ее цена. Следовательно, необходимо было оптимизировать соотношение цены и качества.

Предприниматель решил произвести случайную выборку 50 имен из рассылочной ведомости, получить ответы от подписчиков и на основе полученных положительных ответов оценить будущее количество подписчиков. На основе опыта подобных действий в прошлом наш предприниматель сделал предположение – выдвинул гипотезы – о проценте возможных положительных ответов. Пусть, например, он считает, что процент ответов будет между 1 и 5, и при этом нет причин считать, что возможность получения какого-либо конкретного процента из представленных более вероятно, чем другого. При таком предположении каждому возможному (гипотетическому) проценту ответов соответствует одинаковая вероятность, равная согласно классическому определению 1/5.

Обозначим через H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 гипотезы о том, что процент положительных ответов составит 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно. Тогда в этих обозначениях априорные вероятности гипотез составят $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = 0{,}2$. После рассылки предложений клиентам число положительных ответов будет дискретной случайной величиной, подчиняющейся закону редких событий – распределению Пуассона. Напомним, что вероятностный ряд, или ряд распределения Пуассона, задается формулой:

$$P(\tilde{y} = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где a – математическое ожидание и одновременно дисперсия случайной величины $\tilde{y}$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ – возможные значения, которые может принимать случайная величина $\tilde{y}$.

Случайное число $\tilde{y}$ положительных ответов будет иметь среднее значение (математическое ожидание) a такой величины, которая, как мы помним, определяется выражением $a=np$, причем в нашем примере $n=50$, а вероятность p успеха диктуется величиной предполагаемого процента успеха. Теперь примем во внимание, что одно и то же значение k рассматриваемая нами случайная величина может принять при разных значениях параметра a, т.е. своего математического ожидания. Значит, можно получить, например, три положительных ответа и в том случае, когда истинный процент желающих возобновить подписку на журнал по льготным условиям равен 1%, и в том случае, если этот процент будет равен 2, 3, 4 или 5. Только вероятности $P(\tilde{y}=k/H_i)$ этих условных событий окажутся разными: чем ближе значение k возможного значения случайной величины к ее среднему значению a, тем, как правило, выше значение вероятности $P(\tilde{y}=k/H_i)$, и наоборот.

Для рассматриваемых нами гипотез H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 о проценте положительных ответов величины вероятностей успеха составят $p_1=0{,}01$, $p_2=0{,}02$, $p_3=0{,}03$, $p_4=0{,}04$ и $p_5=0{,}05$ соответственно. Следовательно, математическое ожидание случайной величины $\tilde{y}$ числа положительных ответов для первой гипотезы H_1 составит величину a_1=50·0,01=0,5. Аналогично можно подсчитать средние значения чисел положительных ответов для остальных гипотез: a_2=1,0, a_3=1,5, a_4=2,0, a_5=2,5.

Для вычислений вероятностей $P(\tilde{y} = y_k)$ ряда распределения Пуассона, как мы уже отмечали, удобно использовать функцию ПУАССОН (x; среднее;…) пакета Microsof*t* Excel. С использованием этой компьютерной программы была вычислена зависимость между случайным числом подписавшихся (возможные результаты выборки) и гипотетическим процентом ответов. Условные вероятности $P(\tilde{y}=k/H_i)$ возможных значений числа **k** полученных положительных ответов для различных гипотетических значений процентов истинных положительных ответов представлены в табл. 9.4.

Таблица 9.4

Возможные значения *k* числа новых подписчиков из 50 опрошенных	Гипотетические значения процентов истинных положительных ответов				
	1%	2%	3%	4%	5%
0	0,607	0,368	0,223	0,135	0,082
1	0,303	0,368	0,335	0,271	0,205
2	0,076	0,184	0,251	0,271	0,257
3	0,013	0,061	0,126	0,180	0,214
4	0,002	0,015	0,047	0,090	0,134
5	0,000	0,003	0,014	0,036	0,067
6	0,000	0,001	0,004	0,012	0,028
7		0,000	0,001	0,003	0,010
8			0,000	0,001	0,003
9			0,000	0,000	0,001
Суммы значений в столбцах (контрольное значение)	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**

Проанализируем данные, например, четвертой строки табл. 9.4. Для удобства ее значения оттенены и выделены полужирным шрифтом. Видно, что ровно три (значение *k*=3) положительных ответа из 50 на предложение возобновить подписку на льготных условиях при истинности первой гипотезы (один процент положительных ответов) будут получены с вероятностью 0,013, а при истинности других гипотез – H_2,

H_3, H_4, H_5 – вероятности этого же числа успехов составят 0,061, 0,126, 0,180 и 0,214 соответственно.

Однако для принятия решения на рискованную операцию нашему предпринимателю нужно знать не те вероятности, которые представлены в табл. 9.4, а другие – апостериорные вероятности $P(H_i/_{\tilde{y}=k})$ истинности гипотез при получении того или иного из возможных значений k случайной величины $\tilde{y}$. Их легко определить, воспользовавшись формулами условной и полной вероятности:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$ – формула условной вероятности;

$$P(A) = \sum_k P(A/B_k) \cdot P(B_k)$$ – формула полной вероятности.

Следуя этим формулам, для вычисления вероятностей $P(H_i/_{\tilde{y}=k})$ нужно вначале найти вероятности $P(H_i \cdot (\tilde{y} = k)) = P(H_i) \cdot P(\tilde{y}=k/_{H_i})$ и $P(\tilde{y} = k)$, а затем уже вычислить требуемые вероятности по формуле:

$$P(H_i/_{\tilde{y}=k}) = \frac{P(H_i) \cdot P(\tilde{y}=k/_{H_i})}{P(\tilde{y} = k)}.$$

Рассчитаем, например, апостериорные вероятности для случая, когда на 50 разосланных предложений пришло ровно 3 ответа с намерением возобновить подписку по специальной цене. Вначале вычислим совместные вероятности $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = P(H_i) \cdot P(\tilde{y}=3/_{H_i})$ наступления каждого из гипотетических событий-процентов ответов и события-результата, состоящего в том, что $\tilde{y}$. Вспомним, что вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$, $P(H_4)$, $P(H_5)$ гипотетических событий-процентов ответов равны 0,2. Следовательно, например, искомая вероятность совместного события $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3))$ составит величину $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = P(H_i) \cdot P(\tilde{y}=3/_{H_i}) = 0{,}2 \cdot 0{,}013 = 0{,}0026$. Аналогично получаем:

$P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = 0{,}2 \cdot 0{,}061 = 0{,}0122$, $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = 0{,}2 \cdot 0{,}126 = 0{,}0252$, $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = 0{,}2 \cdot 0{,}180 = 0{,}0361$ и $P(H_i \cdot (\tilde{y} = 3)) = 0{,}2 \cdot 0{,}214 = 0{,}0428$.

Сумма полученных совместных вероятностей дает полную вероятность $P(\tilde{y} = 3)$, которая получается равной 0,1187. В результате чего апостериорные вероятности $P(H_i/_{\tilde{y}=3}) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(\tilde{y}=3/_{H_i})}{P(\tilde{y} = 3)}$ будут соответственно равны: $P\left(H_1\big/_{\tilde{y}=3}\right)$=0,0026/0,1187=0,021; $P\left(H_2\big/_{\tilde{y}=3}\right)$=0,0122/0,1187=0,103; $P\left(H_3\big/_{\tilde{y}=3}\right)$=0,0252/0,1187=0,211; $P\left(H_4\big/_{\tilde{y}=3}\right)$=0,0361/0,1187=0,304 и $P\left(H_5\big/_{\tilde{y}=3}\right)$=0,0428/0,1187=0,360.

Таким образом, как это следует из расчетов, вероятность увеличения числа подписчиков на журнал по специальной цене на 1% при условии, что из 50 разосланных предложений ровно 3 содержали положительный ответ, равна 0,021, хотя априорная вероятность этой гипотезы была 0,2. Соответствующие апостериорные вероятности увеличения числа подписчиков ровно на 2%, 3%, 4% и 5% по результатам проведенных нами вероятностных расчетов составили 0,103, 0,211, 0,304 и 0,360 соответственно (в то время как априорные вероятности всех этих событий были одинаковыми и равнялись 0,2).

На рис. 9.8 представлено дерево возможных событий для случая сравнения этой стратегии и стратегии предварительной рассылки 50 предложений продолжить подписку по специальной цене, причем на этом дереве в развернутом виде представлены события только для случая, когда получено 3 положительных ответа из 50. Апостериорные вероятности гипотез для этого случая нами уже вычислены, а их значения проставлены возле стрелок, изображающих случайные исходы рассылки предложений подписчикам.

Средняя величина ожидаемой прибыли при вычисленных значениях апостериорных вероятностей (для трех положительных ответов из 50) составляет \$5513. Чтобы получить это значение, потребовалось, как обычно, умножить значение апостериорной вероятности для каждой из гипотез на соответствующее этой гипотезе значение дохода (положительного или отрицательного) и полученные значения всех произведений сложить. Для исхода «3 положительных ответа из 50» величина среднего дохода представлена на рис. 9.8 в вынесенном прямоугольнике. Как видим, если предприниматель решится на рассылку предложений подписчикам и получит ровно 3 положительных ответа, то ожидаемая прибыль почти в 2,8 раза превысит то ее значение, которое было вычислено для случая, когда издатель хотел делать предложение о спеццене без предварительного сбора информации.

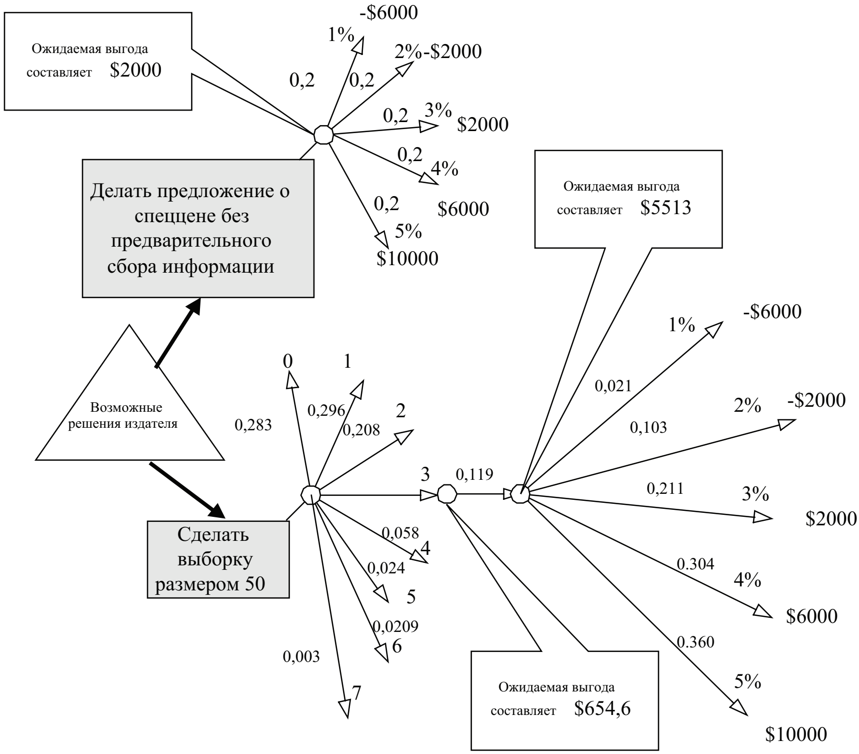


Рис. 9.8. Дерево возможных событий для сравнения стратегий с предварительной рассылкой 50 предложений продолжить подписку по специальной цене (развернут исход для случая 3 положительных ответа из 50)

До проведения рассылки, конечно, нельзя предсказать ее результатов. Однако можно рассчитать ожидаемую выгодность для каждого возможного числа положительных ответов. Значения априорных вероятностей для всех возможных исходов рассылки (в том числе и для k=3) представлены в табл. 9.5. Рассмотрены только значения k от 0 до 7, поскольку вероятности получения значений, больших чем 7, очень мала. Далее обычным порядком используем полученные апостериорные вероятности, установленные для каждого успешного результата k-выборки, чтобы определить значение общей ожидаемой выгодности действия «Сделать выборку размером 50». Например, учитывая, что значение полной вероятности $P(\tilde{y} = 3)$ рассматриваемого нами исхода равна 0,1187 (на рис. 9.8 проставлено значение 0,119), то ожидаемая величина дохода при получении ровно трех положительных ответов после рассылки 50 предложений составит $654,6.

Таблица 9.5

Апостериорные вероятности гипотез	Возможные значения k числа новых подписчиков из 50 опрошенных							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$P\left({}^{H_1}\!/_{\tilde{y}=k}\right)$	0,429	0,205	0,073	0,021	0,005	0,001	0,000	0
$P\left({}^{H_2}\!/_{\tilde{y}=k}\right)$	0,260	0,248	0,177	0,103	0,053	0,025	0,012	0,005
$P\left({}^{H_3}\!/_{\tilde{y}=k}\right)$	0,158	0,226	0,242	0,211	0,164	0,117	0,080	0,053
$P\left({}^{H_4}\!/_{\tilde{y}=k}\right)$	0,096	0,183	0,261	0,304	0,313	0,300	0,274	0,242
$P\left({}^{H_5}\!/_{\tilde{y}=k}\right)$	0,058	0,138	0,247	0,360	0,464	0,556	0,634	0,700

В табл. 9.6 представлены значения условных величин дохода для каждого из возможных исходов случайной выборки объемом 50 человек, полные вероятности для этих исходов и частные величины полных ожидаемых доходов для них. Видно, что условный (и, следовательно, частный полный) доход от выборки для нулевого исхода – ни один из опрошенных не ответил положительно на предложение возобновить подписку по специальной цене – отрицательный. Но если есть хотя бы один положительный ответ, это уже дает положительный эффект, степень которого определяется величиной полной вероятности исхода. Например, исход k=7 приносит самую большую условную величину дохода, равную $8545, однако из-за того, что полная вероятность $P(\tilde{y} = 7)$ такого исхода составляет всего лишь 0,0028, частная величина полных ожидаемых доходов для него будет всего только $24,3.

Таблица 9.6

Возможные исходы k случайной выборки	Условные величины дохода для исходов, $	Полные вероятности $P(\tilde{y} = k)$ исходов выборки	Частные величины полных ожидаемых доходов, $
0	-1623	0,2830	-459,2
1	1208	0,2963	358,0
2	3727	0,2076	773,7
3	5513	0,1187	654,6
4	6711	0,0576	386,9
5	7533	0,0240	181,1
6	8117	0,0088	71,9
7	8545	0,0028	24,9

В результате сложения величин этих частных ожидаемых выигрышей получается общая ожидаемая выгодность рассылки предложений 50 прежним подписчикам с последующим анализом полученных положительных ответов. Она составляет чуть больше $1990. Следовательно, ожидаемая ценность информации, полученной в ходе рассылки предложений 50 прежним подписчикам, будет равна разности между этим результатом и ожидаемыми последствиями действия «Делать предложение». При тех исходных данных, которыми мы пользовались, эта ценность отрицательна ($1990-$ 2000= -$10), т.е. собирать информацию при данных условиях получается не выгодным. При этом мы даже не учитывали дополнительные затраты на проведение самой случайной выборки респондентов для рассылки им предложений, а это всегда нужно делать, чтобы не исказить картину исхода.

Тем не менее склонный к риску предприниматель может пойти на решение сделать выборку, поскольку получение хотя бы одного положительного ответа может дать ценную информацию для получения более точного прогноза будущих доходов от подобной предпринимательской акции. К тому же необходимо иметь в виду, что значения вероятностей исходов существенно зависят от объема выборки. Поэтому представляется целесообразным подсчитать по предложенной нами схеме ожидаемую полную выгоду от организации сбора информации для случайных выборок разного объема. После этого можно будет сопоставить полученные результаты и окончательно определить оптимальный размер выборки, приносящий максимальный ожидаемый суммарный доход.

Контроль качества продукции методом последовательного анализа (Вальда). На выходе производственной линии производится контроль качества готовой продукции. С целью экономии затрат времени и средств на контроль изделия для контроля отбирают из готовой партии случайным образом. После этого проводится тщательный контроль изделия. По мере накопления информации о результатах контроля формируется решение о качестве продукции во всей произведенной партии по методу последовательного анализа. Предприятие будет работать успешно и приносить прибыль только в том случае, если доля брака в партии выпущенной продукции не превышает 10% от общего числа изделий в каждой партии. Поэтому такое значение принято в качестве критерия оценки качества всей партии готовой продукции.

Одновременно принято считать, что партия «бракованная», если доля некондиционных изделий в ней не менее 20%. Учитывая возможность совершения ошибок первого и второго рода при контроле, а также тяжести последствий от каждой из ошибок, были назначены предельные значения вероятностей указанных ошибок. Предельное значение вероятности α совершения ошибки, в результате которой бракуется кондиционная продукция, установлено равным 0,01, а вероятность β пропуска бракованного изделия при контроле (изделие ошибочно принято за кондиционное) ограничена величиной 0,1.

Контроль и выработка решения о состоянии всей партии готовых изделий по методу последовательного анализа организуются на основе частных выводов после каждого очередного проведенного испытания изделия. Предполагается, что после каждого очередного контроля возможны три основополагающих вывода: завершить контроль и принять всю партию, проконтролировать еще одно изделие из готовой партии, завершить контроль и забраковать всю партию. Оказывается, что обозначенные нами частные решения после каждого шага контроля будут адекватными, а вероятности ошибок первого и второго рода не выйдут за пределы установленных для них границ, если руководствоваться критерием K_t вида:

$$K_t = \frac{P(\tilde{y}_t \,/«\text{Бракованная партия»})}{P(\tilde{y}_t \,/«\text{Кондиционная партия»})},$$

где $\tilde{y}_t$ – случайное число бракованных изделий, выявленных к шагу t;

$P(\tilde{y}_t = m$ «Бракованная партия») – условная вероятность того, что случайное число бракованных изделий, выявленных к шагу t, будет равно m при условии, что партия бракованная;

$P(\tilde{y}_t = m$ «Кондиционная партия») – условная вероятность того, что случайное число бракованных изделий, выявленных к шагу t, будет равно m при условии, что партия кондиционная.

Чтобы определить обозначенные условные вероятности, входящие в выражение для критерия K_t, в количественной форме, необходимо учесть, что согласно принятому предпринимателем решению партия считается кондиционной, если доля p_1 брака не выше 0,1 (установлена в размере 10%), а в бракованной партии доля p_2 брака не ниже 0,2 (т.е. не менее 20%). Дискретная случайная величина $\tilde{y}_t$ при этом оказывается распределенной по биномиальному закону.

Напомним, что основой биномиального распределения является следующая схема. В совершенно одинаковых условиях – одна и та же доля p бракованных изделий в большой партии – проводится независимый контроль n одинаковых изделий. Результат контроля случайный: с вероятностью p под контроль подпадает именно бракованное изделие, а с вероятностью $1-p$ бракованное изделие не попадает в число контролируемых.

Итак, поскольку партия готовых изделий достаточно большая, вероятность p от изделия к изделию не меняется. Фиксируется число m изделий, которые выявлены как бракованные. Это число будет одной из возможных реализаций случайной величины $\tilde{y}_t$, которая может принимать значения от 0 до n. Вероятность того, что дискретная случайная величина $\tilde{y}$ примет значение, равное m, задается выражением вида

$$P(\tilde{y} = m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$ или кратко –

$$P(\tilde{y} = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m.

Таким образом, за t шагов (число проведенных испытаний) получаем:

$P(\tilde{y}_t = m$ «Бракованная партия») $= C_t^m \cdot p_2^m \cdot (1-p_2)^{t-m}$,

$P(\tilde{y}_t = m$ «Кондиционная партия») $C_t^m \cdot p_1^m \cdot (1-p_1)^{t-m}$.

После каждого очередного шага контроля формируются основополагающие выводы по схеме:

$\dfrac{\beta}{1-\alpha} < K_t < \dfrac{1-\beta}{\alpha}$ – сделать еще одно измерение;

$\dfrac{\beta}{1-\alpha} > K_t$ – принять кондиционную партию;

$K_t > \dfrac{1-\beta}{\alpha}$ – забраковать всю партию.

Вероятности ошибок первого и второго рода соответственно равны: $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}1$.

Запишем выражение для критериев K_t в наших условиях:

$$K_t = \frac{P(\tilde{y}_t / \text{«Бракованная партия»})}{P(\tilde{y}_t / \text{«Кондиционная партия»})} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m \cdot \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{t-m} =$$

$$= \left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^m \cdot \left(\frac{1-0{,}2}{1-0{,}1}\right)^{t-m} = 2^m \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{t-m}.$$

Теперь сформируем границы распознавания ситуации в зависимости от достигнутого к шагу t результата m числа идентифицированных бракованных изделий. Запишем формальное выражение для основополагающего вывода «сделать еще одно измерение». Для наших исходных данных получаем:

$$\frac{0{,}1}{1-0{,}01} < \left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^m \cdot \left(\frac{1-0{,}2}{1-0{,}1}\right)^{t-m} < \frac{1-0{,}1}{0{,}01} \text{ или } \frac{0{,}1}{0{,}99} < 2^m \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{t-m} < \frac{0{,}9}{0{,}01}.$$

Проведем допустимое преобразование (логарифмирование):

$$[\ell n 0{,}1 - \ell n 0{,}99] < [m \cdot \ell n 2 + (t-m) \cdot (\ell n 8 - \ell n 9)] < [\ell n 0{,}9 - \ell n 0{,}01] \text{ или}$$

$$-2{,}293 < (0{,}693 + 0{,}118) \cdot m - 0{,}118 \cdot t < 4{,}5.$$

Из последнего неравенства получаем границы зависимости между m и t:

$0{,}145 \cdot t - 2{,}82 < m < 0{,}145 \cdot t + 5{,}55.$

Границы выполнения двух представленных в выражении неравенств – это прямые линии в системе координат t и m. Если изобразить их графически, то удобно будет делать частные выводы и одновременно документировать результаты вынесения решений.

На рис. 9.9 представлена система координат (t, m) и разделяющие границы областей для формирования частных выводов. По мере проведения измерений t и фиксации числа m выявленных бракованных изделий результаты можно изображать графически в виде траектории процесса контроля. Такая траектория изображена на рис. 9.9 последовательностью пунктирных стрелок. Траектория процесса контроля начинается из точки (0; 0), что соответствует ситуации «ни одного изделия не проконтролировано и, следовательно, ни одного бракованного не выявлено». Если проведено одно измерение и брак не обнаружен, траектория процесса выходит в точку (1; 0).

Граница областей для формирования базовых решений

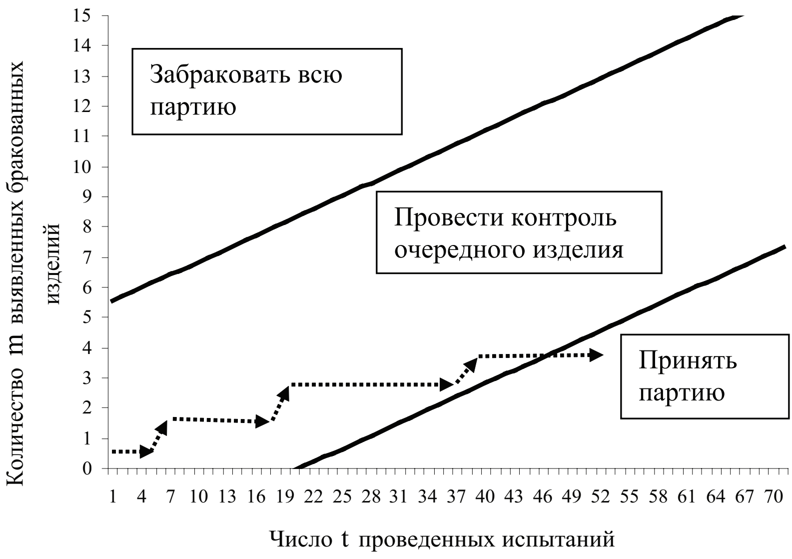


Рис. 9.9. Разделяющие границы областей для формирования частных выводов

Если проводить измерения и дальше и при этом не будут выявлены бракованные изделия, то траектория процесса будет развиваться вдоль оси t. Если на каком-то шаге процесса контроля обнаружится первое бракованное изделие, на этом шаге траектория процесса контроля изменит угол движения на 45 градусов. И так будет всякий раз, как только будет обнаруживаться брак. В результате траектория превращается в ломаную линию, устремленную в общем случае вправо и вверх.

Скорость подъема траектории вверх зависит от частоты обнаружения бракованных изделий среди проконтролированных. И если брак выявляется достаточно часто, то траектория процесса устремляется в направлении северо-западной части системы координат (t, m). Эта часть ограничена снизу линией $m = 0{,}145 \cdot t + 5{,}55$ и образует область значений числа t проведенных испытаний из числа m выявленных бракованных изделий, при попадании в которую вся партия должна быть забракована.

Напротив, если число бракованных изделий в партии готовой продукции незначительно, траектория процесса редко будет изламываться вверх. При этом рано или поздно она пересечет границу, задаваемую уравнением $m = 0{,}145 \cdot t - 2{,}82$, которая отсекает юго-восточную часть области значений характеристик t и m, соответствующую базовому решению «Принять всю партию». Траектория процесса контроля, соответствующая именно такому случаю, и отображена на рис. 9.9. Несмотря на то что принятие ошибочного решения все же возможно, вероятности α и β ошибок первого и второго рода не выйдут за пределы установленных для них пороговых значений. Кроме того, как показывают исследования, для обеспечения подобного же качества контроля по методу Неймана–Пирсона потребуется в среднем вдвое большая по объему выборка, чем та, которую придется осуществить по методу последовательного анализа Вальда. И следовательно, затраты на проведение контроля качества произведенной продукции будут в среднем вдвое ниже.

Предпринимательская деятельность по предоставлению услуг. Для коммерческой и иной подобной предпринимательской деятельности адекватным моделями оценки риска могут служить модели со случайными потоками событий. При этом события следует рассматривать как факты выполнения взаимных обязательств между сторонами по объемам и по срокам. Наиболее широко используют модели с так называемыми простейшими потоками событий. В простейшем потоке все наступающие события одинаковы, однако времена их появления случайные, подчиняющиеся показательному закону распределения (свойство «без последействия»). При этом для простейшего потока характерно, что параметр показательного закона распределения – среднее время между событиями – постоянен во времени (свойство стационарности), а события появляются поодиночке (свойство ординарности).

Примером простейшего потока может служить поток автомобилей, прибывающих на автозаправочную станцию, поток телефонных звонков, поступающих в центр мобильной связи, и т.п. Для анализа разнообразных видов предпринимательской деятельности, в рамках которых циркулируют простейшие потоки событий, можно с успехом применять мощный математический аппарат анализа так называемых марковских процессов. В рамках этого подхода, например, разработаны большинство моделей систем массового обслуживания (СМО).

Но не всегда потоки событий могут считаться простейшими. Например, как в предпринимательской деятельности, так и в быту, людям приходится совершать разнообразные платежи. Потоки платежей для банка и для потребителей часто оказываются случайными в силу случайных моментов времени их осуществления и случайных величин платежей. Например, таковыми являются потоки платежей за предоставление коммунальных услуг, за тепло и электроэнергию – ведь редко кто платит за все эти услуги в строго определенный день. При этом размеры платежей также могут быть случайными, в том числе и по причине их несоответствия объему и качеству предоставленных услуг: кое-кто не доплачивает, некоторые по ошибке переплачивают. Другой пример случайных платежей, с которым с недавних пор (после вступления в силу Закона об обязательном страховании автогражданской ответственности) приходится сталкиваться значительному числу людей, – это выплаты страховых сумм за повреждение личного или общественного автотранспорта.

Продажа бензина на автозаправочной станции (АЗС). Во времена «начала перестройки» в России АЗС представляли собой достаточно громоздкие технические сооружения, как, впрочем, многие сооружения того времени. Считалось, что это позволяет экономить площади отводимых под них участков земли. Пока автотранспорта в городе было сравнительно мало и он был, как правило, государственным, с этим можно было как-то мириться. Однако быстрый рост количества частных автомобилей в начале 90-х годов прошлого столетия, например в Москве, сделал ситуацию с автозаправками критической. Летом по пятницам, когда в конце рабочего дня тысячи москвичей устремлялись на дачные участки, к АЗС выстраивались километровые очереди.

Решить эту проблему в короткие сроки, превратить заправку большого числа автомашин в событие подстать покупке газеты, можно было только создавая много малых АЗС, достаточно плотно размещенных по всей территории города. Ведь крупные АЗС просто негде было разместить. Это еще одна причина, почему их и было крайне недостаточно.

В настоящее время АЗС представляют собой небольшие площадки с оборудованием, имеющим для розлива горюче-смазочных материалов не более 3…5 колонок. При ожидании своей очереди для заправки прибывающие автомашины располагаются на небольших площадках вблизи АЗС, позволяющих разместить также небольшое число автомашин, как правило, – не более пяти. Если считать поток прибывающих на подобную АЗС автомашин случайным простейшим, то ее работу можно с успехом моделировать как случайный процесс функционирования «n-канальной СМО с ограниченной очередью». При моделировании работы подобной СМО используем следующие обозначения:

n – число заправочных колонок (число каналов обслуживания);

S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, …, S_n – число занятых колонок (возможные «состояния СМО»);

m – число мест для автомашин на площадке ожидания (число мест в очереди);

λ – интенсивность потока прибывающих на АЗС автомашин (интенсивность входного потока заявок);

$\bar{t}_{обсл}$ – среднее время заправки одного автомобиля (обслуживания одной заявки).

При таких обозначениях сразу вычисляют параметры работы подобной СМО:

$\mu=1/\bar{t}_{обсл}$ – интенсивность потока обслуживания;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – «степень загруженности» канала;

$\eta = \dfrac{\rho}{n} = \dfrac{\lambda}{n\mu}$ – отношение величины ρ к числу каналов обслуживания («распределенная степень загруженности» СМО).

В качестве главных характеристик эффективности работы АЗС, как «n-канальной СМО с ограниченной очередью», были приняты:

A – абсолютная пропускная способность (среднее число автомобилей, обслуживаемое АЗС в единицу времени);

Q – относительная пропускная способность (вероятность заправки прибывшего автомобиля); очевидно, что $Q=A/\lambda$;

$P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании, т.е. вероятность того, что прибывший автомобиль не будет обслужен и покинет данную АЗС, поскольку все заправочные колонки и все места на площадке ожидания заняты; следовательно, $P_{\text{отк}}=1\text{-}Q$;

$\bar{k}$ – среднее число занятых заправочных колонок (каналов обслуживания);

$\bar{z}$ – среднее число автомобилей, связанных с рассматриваемой АЗС, т.е. заправляющихся или находящихся в очереди;

$\bar{r}$ – среднее число автомобилей (заявок) в очереди;

$\bar{t}_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания автомобиля на АЗС (в очереди или под обслуживанием);

$\bar{t}_{\text{оч}}$ – среднее время ожидания заправки, если заняты все колонки (среднее время пребывания заявки в очереди).

Эти характеристики вычисляют по следующим формулам:

$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-\eta^m}{1-\eta}\right)^{-1}$ – финальная вероятность $P(S_0)$ свободного состояния («простоя») СМО; если $\eta=1$, то в последнем слагаемом в скобках нужно в числителе дроби разложить $(1\text{-}\eta^m)$ на произведение $(1\text{-}\eta)(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\ldots+\eta^{m-1})$ и дробь сократить, после чего от нее останется просто сомножитель $(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\ldots+\eta^{m-1})$;

$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0$ для $1 \le k \le n$

и

$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0 = \frac{\rho}{n} \cdot p_{n+(r-1)} = \eta \cdot p_{n+(r-1)}$ для $1 \le r \le m$ – остальные финальные вероятности;

$A=\lambda(1\text{-}p_{n+m})$; $Q=1\text{-}p_{n+m}$; $P_{\text{отк}}= p_{n+m}$ – вероятность отказа в обслуживании, т.е. вероятность того, что в момент поступления заявки все каналы обслуживания и все места в очереди заняты, поэтому поступившая заявка не будет обслужена и покинет СМО; $\bar{k}=\rho(1\text{-}p_{n+m})=\lambda Q=\dfrac{A}{\mu}$;

$\bar{r}=\dfrac{\rho^{n+1}\cdot p_0}{n\cdot n!}\cdot\dfrac{1-(m+1)\eta^m+m\eta^{m+1}}{(1-\eta)^2}$ для любого $\eta<1$ или $\eta>1$, а для $\eta=1$ выражение для среднего числа заявок $\bar{r}$ в очереди определяют на основании предельного перехода и получают выражение:

$$\bar{r}=\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{m(m+1)}{2}\cdot p_0;$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k};$$

$$\bar{t}_{оч}=\frac{\bar{r}}{\lambda};$$

$$\bar{t}_{сист}=\frac{\bar{z}}{\lambda}.$$

Рассчитаем указанные финальные вероятности и характеристики эффективности АЗС для следующих исходных данных:

• на АЗС имеются две заправочные колонки (n=2);

• на площадке ожидания могут располагаться четыре автомашины (m=4);

• поток автомашин, прибывающих на АЗС, имеет интенсивность λ=1 автомашина/мин;

среднее время обслуживания автомашины $\bar{t}_{обсл}$ =2мин.

На основании этих исходных данных вычисляем по представленным формулам:

$\mu=1/\bar{t}_{обсл}$=1/2=0,5 автомашина/мин; $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$=2; $\eta=\dfrac{\rho}{\mathbf{n}}$=1.

Далее находим финальные вероятности:

финальная вероятность «простоя АЗС» (с учетом, что η=1) равна

$$p_0=\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{2\cdot 2!}\cdot(1+\eta+\eta^2+\eta^3\right)^{-1}=\frac{1}{1+2+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{2\cdot 2!}\cdot(1+1+1^2+1^3)}=\frac{1}{13};$$

финальная вероятность p_1 того, что на АЗС занята только одна из двух имеющихся колонок, равна

$$p_1=\frac{\rho^1}{1!}\cdot p_0=2\cdot\frac{1}{13}=\frac{2}{13};$$

остальные финальные вероятности p_2, p_3, p_4, p_5 и p_6 также оказываются равными $\dfrac{2}{13}$.

Через полученные финальные вероятности находим характеристики эффективности работы АЗС:

$P_{\text{отк}}=p_{n+m}=p_{2+4}=p_{6}=\frac{2}{13}$, это около 15% всех прибывающих на АЗС автомобилей; они не будут заправлены на рассматриваемой АЗС и будут искать других пунктов заправки;

относительная пропускная способность АЗС составляет, следовательно, величину $Q=1-P_{\text{отк}}=\frac{11}{13}$, или приблизительно 85% всех прибывающих на АЗС автомобилей, что вполне удовлетворительно;

в абсолютном выражении (показатель абсолютной пропускной способности) это составляет величину $A=\lambda Q=\frac{11}{13}\approx 0{,}85$ машины/мин. Именно эти обслуженные автомашины принесут владельцу АЗС прибыль.

Кроме того, можно утверждать, что *в среднем* на данной АЗС постоянно задействованы $\bar{k}=\rho(1-p_{n+m})=\frac{A}{\mu}=\frac{22}{13}\approx 1{,}69$ колонки из имеющихся двух, а в очереди на стоянке ожидания постоянно находятся *в среднем* $\bar{r}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\cdot\frac{1-(m+1)\eta^{m}+m\eta^{m+1}}{(1-\eta)^{2}}=\frac{2^{2}}{2!}\cdot\frac{4(4+1)}{2}\cdot\frac{1}{13}\approx$ 1,54 машины.

Иными словами, емкость стоянки ожидания, которой располагает рассматриваемая нами АЗС, более чем в 2,5 раза превышает среднюю потребность. Всего же «в сфере действия» данной АЗС постоянно пребывают примерно $\bar{z}=\bar{r}+\bar{r}\approx 3{,}23$ автомашины, хотя данная СМО рассчитана на шесть связанных с нею заявок на обслуживание (две заправочные колонки и четыре места на стоянке ожидания).

Можно провести дополнительные исследования, чтобы изыскать возможность повысить эффективность работы АЗС, например, путем увеличения числа заправочных колонок за счет уменьшения размера площадки ожидания. Для этого просто придется произвести оценочные расчеты при новых, гипотетических исходных данных, например для $n=3$ и $m=3$ и т.п.

Оказание платных консультационных услуг. В помещении юридической консультации работают два специалиста-консультанта. Поток посетителей в консультацию – простейший с интенсивностью 5 посетителей/час. Среднее время $\bar{t}_{\text{обсл}}$ обслуживания одного посетителя составляет 0,35 часа. Каждый обслуженный посетитель приносит консультации средний доход d_1 в размере 131 руб. Содержание каждого рабочего места, услуги связи, обращение в Интернет, а также зарплата юристов и налоги обходятся юридической консультации в среднем в 53,5 руб/час.

Помещение юридической консультации обладает сильным неудобством: нет никакой возможности оборудовать для посетителей место для ожидания приема. В результате этого сложился определенный порядок функционирования консультации: как только в помещение прибывает посетитель, его сразу же принимает свободный юрист и работает с ним. Но если в момент прибытия очередного посетителя все юристы заняты, то прибывшему посетителю просто негде находиться в ожидании приема и он вынужден уйти в другую юридическую консультацию. Из-за этого юридическая консультация теряет часть доходов. Можно было бы снизить риск потери доходов, если увеличить число специалистов-консультантов. Но сколько их нужно, чтобы максимизировать доход юридической консультации?

С целью оптимизации величины доходов юридической консультации ее директор произвел моделирование процесса функционирования этой организации как «n-канальной СМО с отказами». В итоге он собирается построить модельную зависимость величины получаемого чистого дохода от числа работающих юристов-консультантов. При моделировании и расчетах показателей эффективности работы юридической консультации им были использованы те же обозначения, что и в предыдущей задаче.

С учетом введенных обозначений основные соотношения для моделирования процесса функционирования юридической консультации, как «n-канальной СМО с отказами», и расчета характеристик ее эффективности выглядят следующим образом [10]:

• финальная вероятность $P(S_0)$ свободного состояния СМО («вероятность простоя»), равная p_0, определяется выражением

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$

• финальная вероятность $P(S_k)$ того, что занято ровно k каналов СМО, равна

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0 \text{ для } 1 \le k \le n;$$

- абсолютная пропускная способность СМО равна $A=\lambda(1\text{-}p_n)$;
- относительная пропускная способность СМО $Q=1\text{-}p_n$;
- вероятность $P_{\text{отк}}$ отказа в обслуживании равна $P_{\text{отк}}=1\text{-}Q=p_n$.

Оценим финальные вероятности и характеристики эффективности для сложившегося режима работы юридической консультации. Поскольку в консультации работают только два специалиста-консультанта, то n=2, и λ=5 чел/час. Далее определяем: $\mu=1/\bar{t}_{\text{обсл}}=1/0{,}35=2{,}86$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2{,}86}$ =1,75. Через эти параметры вычисляем:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \approx 0{,}234;\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = \frac{1{,}75^2}{2} \approx 0{,}358;$$

$P_{\text{отк}}=p_2=0{,}358$; $Q=1–P_{\text{отк}}=0{,}642$, а также – $A=\lambda Q=5\cdot 0{,}642 \approx 3{,}212$ посетителей/час.

Доход юридической консультации от обслуживания пришедших в нее посетителей составляет $A\cdot d_1=3{,}212\cdot 131=420{,}73$ руб/час. Расходы на содержание двух рабочих мест юристов-консультантов составляют $53{,}5\cdot 2=107$ руб/час. В результате чистый доход от функционирования юридической консультации с двумя юристами составляет 420,73–107= 313,73 руб/час.

Аналогично было проведено моделирование функционирования юридической консультации и расчет доходности для случаев, если бы в ней работали от одного до шести юристов. Для полноты данных был учтен и нулевой результат (ни одного юриста в консультации не работает). Результаты расчетов значений характеристик эффективности функционирования юридической консультации представлены в табл. 9.7, а на рис. 9.10 – в виде графика зависимости величины дохода юридической консультации от числа работающих в ней юристов-консультантов.

Таблица 9.7

Число n работающих юристов-консультантов	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность p_0 «простоя» юридической консультации	1	0,364	0,234	0,193	0,180	0,175	0,174
Вероятность загрузки всех К каналов	0	0,636	0,358	0,173	0,070	0,024	0,007
Абсолютная пропускная способность СМО	0	1,818	3,212	4,137	4,649	4,880	4,965
Доход от обслуженных заявок	0	238,18	420,73	541,93	609,01	639,29	650,45
Расходы на содержание каналов	0	53,5	107,0	160,5	214,0	267,5	321,0
Доход от эксплуатации n-канальной СМО	0	184,68	313,73	381,43	395,01	371,79	329,45

Рис. 9.10. Зависимость величины дохода юридической консультации от числа работающих в ней юристов-консультантов

На основании данных, представленных в табл.9.7 и отображенных в виде графика на рис. 9.10, следует, что оптимальным по максимуму получаемого юридической консультацией дохода при тех же параметрах служебного помещения следует считать увеличение штата юристов до четырех человек. При таком составе специалистов-консультантов доход этой организации составит более 395 руб/час против 313,73 руб/час, которые юридическая консультация получает в положении *status quo*, когда в ней трудятся только два консультанта.

Торговля садово-огородным инвентарем, инструментами и строительными материалами. Торговля подобными товарами в крупных центрах самообслуживания является не только прогрессивной, но и удобной формой обслуживания покупателей. Она также хороша и тем, что позволяет легко организовать автоматизированную систему сбора данных об интенсивности потоков посетителей, о доле тех из них, кто по разным причинам ушел без покупки и т.п. Этому способствует наличие у подобных торговых центров систем автоматизированного допуска посетителей к местам расположения товара и автоматизированного учета и списания купленного товара после его оплаты в кассе.

Большую часть товара в центрах торговли садово-огородным инвентарем, инструментами и строительными материалами посетители отбирают сами, непосредственно подержав в руках товар, размещенный на стеллажах и подиумах. Однако некоторая часть товара, представляющего сложную технику или дорогой инструмент, покупатель, как правило, выбирает после консультаций с менеджером в торговом зале. Время консультации при этом оказывается случайным, но распределение этого времени, как правило, показательное. Поток посетителей, обращающихся к менеджеру за консультацией, также случаен. Поэтому менеджер может то стоять без дела (к нему никто не обращается за разъяснениями), то – к нему очередь за консультацией. Но ведь не каждый из потенциальных покупателей сложной техники или дорогого инструмента готов долго ожидать своей очереди, чтобы задать менеджеру вопрос.

Некоторые особенно нетерпеливые клиенты могут просто уйти без покупки. Поэтому для снижения риска ухода посетителя без покупки из-за того, что этот нетерпеливый клиент не желает или не может ждать, пока менеджер освободится, таких консультантов должно быть возле места расположения указанного товара несколько. Но сколько именно? Разумеется, оптимальное число консультантов зависит и от интенсивности потока покупателей, и от доли тех, кто заинтересован в покупке именно дорогой или сложной техники и инструмента, и от величины среднего времени консультации, и от ряда других, менее значимых факторов.

Предположим, что после консультации с менеджером в зале посетитель выбрал интересующий его инструмент и, отстояв очередь в кассе, оплатил товар. Закончились ли на этом его взаимоотношения с торговым центром? Нет, не закончились. Есть еще одна специфическая особенность заключения сделки купли-продажи подобных товаров, а именно: обязательная проверка работоспособности изделия и оформление гарантийных обязательств на купленный товар. В итоге операция по покупке сложной садово-огородной техники, инструмента или инвентаря превращается в трехстадийный процесс: выбор товара, его оплата в кассе, проверка работоспособности и оформление гарантийного талона.

Таким образом, каждый потенциальный покупатель сложной техники или инструмента, как правило, проходит в процессе приобретения нужного ему товара три стадии: 1) выбор товара; 2) уплата денег в кассу; 3) проверка работоспособности и оформление гарантийного талона на товар. Для оценки экономической выгоды процесса работы торгового центра его руководству крайне необходима информация об эффективности процессов на каждой из стадий. Такую информацию можно получить, если будут известны следующие характеристики процессов обслуживания в торговом центре покупателей сложной техники (инструмента):

A, Q, $P_{\text{отк}}$ – абсолютная и относительная пропускные способности и вероятность отказа в обслуживании соответственно;

$\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ – среднее число клиентов в очереди на первой, второй и третьей стадиях обслуживания соответственно;

$\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$ – среднее число клиентов, связанных с первой, второй и третьей стадиями обслуживания соответственно;

$\bar{t}_{оч}^{(1)}$, $\bar{t}_{оч}^{(2)}$, $\bar{t}_{оч}^{(3)}$ – среднее время ожидания клиента в очереди на первой, второй и третьей стадиях обслуживания соответственно;

$\bar{t}_{сист}^{(1)}$, $\bar{t}_{сист}^{(2)}$, $\bar{t}_{сисп}^{(3)}$ – среднее время пребывания покупателя в первой, второй и третьей стадиях процесса обслуживания соответственно;

$\bar{r}$ – общее среднее число покупателей во всех очередях;

$\bar{z}$ – общее среднее число покупателей сложной техники (инструмента), совершающих покупку в магазине;

$\bar{t}_{\text{оч}}$ – общее среднее время, проводимое покупателем сложной техники во всех очередях;

$\bar{t}_{\text{сист}}$ – общее среднее время, затрачиваемое покупателем на приобретение сложной техники в торговом центре.

Адекватным модельным аналогом рассматриваемого нами процесса торговли может служить функционирование многофазной СМО с очередью. В подобной системе входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последействие. Однако если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО – простейший с той же интенсивностью, что и входящий. Поэтому многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой очередной фазой с простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО. Если же очередь к какой-либо фазе ограниченна, то выходной поток в этой фазе перестает быть простейшим и указанный выше прием можно применять только в качестве приближенного.

Учитывая эти замечания, применим для анализа экономической эффективности работы рассматриваемого нами торгового центра математический аппарат, описывающий работу простейшей многофазной СМО с очередью. Будем рассматривать три последовательные стадии процесса работы с покупателем торгового центра как три отдельные СМО со своими характеристиками. Исходные данные для моделирования и оценки эффективности многостадийного процесса работы с покупателями сложной техники в торговом центре представлены в табл. 9.8.

Таблица 9.8

Стадии процесса обслуживания посетителей торгового центра	Характеристики стадий процесса обслуживания посетителей торгового центра				
	Число n каналов обслуживания	Интенсивность λ входного потока (чел/час)	Доля α посетителей, которые не выбрали товар	Среднее время $\bar{t}_{обсл}$ обслуживания на стадии (мин)	Среднее время «терпеливого» ожидания в очереди (мин)
Консультации и выбор товара (многоканальная СМО «нетерпеливыми» заявками)	2	30	0,15	6	15
Оплата товара (одноканальная СМО с неограниченной очередью)	1	по итогам работы первой стадии процесса		3,2	
Контроль и оформление гарантии (многоканальная СМО с неограниченной очередью)	4	по итогам работы первой стадии процесса		12	

На первой стадии процесса происходят консультации покупателей с менеджером в зале и выбор товара. Поток посетителей простейший с интенсивностью 30 чел/час. У стендов с интересующим нас товаром работают два менеджера-консультанта. К ним обращаются покупатели, заинтересованные в приобретении сложной техники или дорогого инструмента. Среднее время обслуживания на этой стадии 6 мин. Покупателей достаточно много, консультантов только два. Поэтому не каждый из потенциальных покупателей сложной техники или инструмента готов долго ожидать своей очереди, чтобы задать менеджеру вопрос. В итоге часть клиентов торгового центра, не дождавшись возможности задать свои вопросы менеджеру, отказываются от покупки именно этой техники и переходят к самостоятельному выбору иных товаров в торговом центре. Следовательно, подобных клиентов торгового центра можно моделировать «нетерпеливыми» заявками, покидающими СМО через случайное время ожидания, подчиненное показательному закону распределения. Среднее время «терпеливого» ожидания в очереди для подобных клиентов в табл. 9.8 определено в 15 мин.

Таким образом, все случайные времена событий на первой стадии процесса имеют показательный закон распределения. В итоге процесс обслуживания клиентов торгового центра на стадии консультации и выбора товара можно смоделировать посредством процесса функционирования простейшей двухканальной СМО «нетерпеливыми» заявками и неограниченной очередью. Учтем, что интенсивность входного потока заявок в общем случае уменьшается из-за того, что некоторая доля потенциальных покупателей вообще ничего себе не подберет и уйдет из торгового центра без покупки. Доля α посетителей, которые не выбрали товар, определена в 15%.

Основные соотношения для моделирования простейшей многоканальной СМО «нетерпеливыми» заявками и неограниченной очередью:

- финальные вероятности состояний СМО

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left[\frac{\rho}{n+\beta} + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \ldots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots(n+\mathbf{r}\beta)} + \ldots\right]\right\}^{-1}$$

и

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0;\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0;\ \ldots;\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0;\ \ldots \text{ для } 1 \le k \le n;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{\mathbf{n}}}{n!} \cdot \frac{\rho}{n+\beta} \cdot p_0;\ \ldots;\ p_{\mathbf{n+r}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)(n+3\beta)\ldots(n+r\beta)} \cdot p_0;\ \ldots \text{ для } r \ge 1,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\nu}{\mu}$ и ν – интенсивность потока уходов, приходящаяся на одну заявку, стоящую в очереди; указанные финальные вероятности всегда существуют, если только $\beta > 0$;

- суммарная средняя интенсивность потока уходов, приходящаяся на все заявки, стоящие в очереди, равна $\nu\bar{r}$; значит, интенсивность входного потока заявок уменьшается на эту величину, и абсолютная пропускная способность СМО A и составляет $A = \lambda - \nu\bar{r}$; именно такая величина будет определять интенсивность потока заявок для последующих стадий процесса; эту же характеристику можно определить из соотношения интенсивности обслуживания и среднего числа занятых каналов: $A = \bar{k} \cdot \mu$;
- с учетом того, что не все посетители, а только их доля (1-α) найдет себе товар для покупки, абсолютная пропускная способность СМО будет равна величине $A = (1-\alpha)\lambda - \nu\bar{r}$; именно такой, т.е. по итогам работы первой стадии процесса, будут интенсивности входных потоков заявок для второй и третьей стадий;
- относительная пропускная способность составит $Q = \frac{A}{\lambda}$;
- среднее число $\bar{k}$ занятых каналов следует подсчитать напрямую, как математическое ожидание случайной величины числа занятых каналов с возможными значениями 0, 1, 2, …, n и соответствующими вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, [1-(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})]$; это выражение имеет вид:

$$\bar{k} = 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (n-1)p_{n-1} + n\,[1-(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})];$$

- среднее число заявок в очереди вычисляем по формуле: $\bar{r} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta}$;
- среднее число заявок в СМО $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}$;
- средние времена пребывания заявки в очереди и в системе равны, как обычно, величинам $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda$ и $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda$ соответственно.

На второй стадии покупатели, выбравшие товар, должны оплатить покупку. Пунктов расчета, как правило, в подобных торговых центрах несколько. Однако необходимо учитывать специфику их расположения и особенности продаваемого товара. Дело в том, что обычно подходы к пунктам расчета за покупку разграничены турникетами. Товар, представляющий собой садово-огородный инвентарь, оборудование дачных участков, строительные материалы и т.п., достаточно громоздкий, и покупатели перемещаются по торговым залам, транспортируя его на достаточно крупных тележках. С такой тележкой в узком проходе между турникетами особенно не развернешься.

Все это приводит к тому, что даже при нескольких пунктах расчета за покупку покупатель должен стоять в одну очередь, а именно в ту, в какую он попал по собственной воле или по воле случая. Выбраться из такой очереди и перейти в другую – весьма проблематично, учитывая психологический настрой сзади стоящих покупателей, также перегруженных покупками. В результате работу расчетного пункта и весь процесс на второй стадии приобретения товара в торговом центре приходится моделировать как работу одноканальной СМО с неограниченной очередью и средним временем расчета с покупателем, равным 5 мин.

Основные математические соотношения для моделирования простейшей одноканальной СМО с неограниченной очередью:

- $p_0 = 1 - \rho$; $p_k = \rho^k(1 - \rho)$ для k=1, 2, 3, …; причем финальные вероятности существуют только для случая, когда $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$;

характеристики эффективности определяются выражениями вида

$$A=\lambda;\ Q=1;\ P_{отк}=0;\ \bar{k}=\rho;\ \bar{r}=\frac{\rho^2}{1-\rho};\ \bar{z}=\frac{\rho}{1-\rho};\ \bar{t}_{сист}=\frac{\bar{z}}{\lambda};\ \bar{t}_{оч}=\frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Третья, последняя стадия процесса, – это контроль и оформление гарантии на приобретенный товар. Входной поток имеет такую же интенсивность, как и для второй стадии. На контроле работают четыре специалиста. Среднее время обслуживания на этой стадии 3 мин. Адекватной моделью процесса контроля качества и оформления гарантии на приобретенный товар является многоканальная СМО с неограниченной очередью. Работа подобной СМО описывается следующими характеристиками:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1}{1-\eta}\right)^{-1},$$

$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0$; … для $1 \le k \le n$; $p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0$; … для $r \ge 1$; они существуют только для случая, когда $\eta = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$; $A=\lambda$; $Q=1$; $P_{отк}=0$;

- средняя длина очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1}{(1-\eta)^2} = \frac{\eta \cdot p_n}{(1-\eta)^2};$$

- среднее число занятых каналов (или вероятность того, что канал занят) $\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$;
- среднее число заявок в системе $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho$;
- средние временные характеристики процесса: $\bar{t}_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$; $\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda}$.

На основании представленных в тексте и табл. 9.8 исходных данных по всем приведенным нами формулам были проведены модельные расчеты, результаты которых сведены в табл. 9.9.

Таблица 9.9

Стадии процесса обслуживания	Характеристики эффективности процессов на стадиях работы с посетителями торгового центра						
	A, чел/час	Q	$\bar{k}$, Чел.	$\bar{r}$, Чел.	$\bar{z}$, Чел.	$\bar{t}_{оч}$, мин	$\bar{t}_{сист}$, мин
Консультации и выбор товара	14,2 (30·0,850--4·2,81)	0,625	1,9	2,8	4,7	5,6	9,4
Оплата товара	14,2	1,0	0,8	2,4	3,1	10	13,2
Контроль и оформление гарантии	14,2	1,0	2,8	1,1	3,9	4,6	16,6

Из полученных результатов моделирования следует, что средние времена пребывания покупателя сложной техники и инструмента в очередях и в торговом центре составляют величины $\bar{t}_{оч} = \bar{t}^{(1)}_{оч} + \bar{t}^{(2)}_{оч} + \bar{t}^{(3)}_{оч} \approx$ 20,2 мин и $\bar{t}_{сист} = \bar{t}^{(1)}_{сист} + \bar{t}^{(2)}_{сист} + \bar{t}^{(3)}_{сист} \approx$ 39 мин соответственно. Анализ относительных величин для этих данных позволяет сделать вывод о том, что около 43% общего времени пребывания в магазине занимают контроль и оформление гарантии на приобретенный товар. Причем имеющееся количество специалистов на этой стадии процесса (четыре специалиста) можно считать избыточным, поскольку в среднем заняты только 2,8 чел. А вот в очереди на контроль пребывает в среднем всего 1,1 чел. В то же время на первой стадии консультации и выбора товара в очереди на консультацию стоят в среднем 2,8 чел. и, учитывая, что среди посетителей торгового центра есть «нетерпеливые», для улучшения обслуживания покупателей целесообразно одного специалиста из отдела контроля снять и поставить его консультантом в торговом зале. Следовательно, таким простым структурным изменением можно, во-первых, уменьшить время ожидания клиентом консультации, а во-вторых, снизить вероятность того, что «нетерпеливые» клиенты уйдут, не приобретя дорогого товара. Для получения более точной количественной оценки выгодности подобных структурных изменений потребуется провести все расчеты по изложенной методике при новых исходных данных.

Выпуск лотерейных билетов. Лотерейный бизнес широко распространен во всем мире. Основу процветания всевозможных лотерей составляет устойчивое желание весьма большого числа людей мгновенно обогатиться. Учитывая случайность механизма разыгрывания лотереи, а также массовый характер участия в ней игроков, для оценки рисков и обоснования показателей затрат и доходности в лотерейном бизнесе широко применяют вероятностные модели.

Предположим, что устроители лотереи для привлечения максимального числа участников гарантируют, что «в каждом лотерейном билете – автомобиль!». Лотерейный билет оформлен в виде карточки, на которой размещена таблица 4 на 5 (матрица), клетки которой закрыты фольгой. В клетки матрицы внесены какие-то буквы, но среди них обязательно есть десять букв, из которых можно составить слово «автомобиль».

Если игроку удается из двадцати имеющихся клеток открыть ровно 10 клеток (стереть с них фольгу) и в них окажутся буквы, составляющие слово «АВТОМОБИЛЬ», то такой участник лотереи получает приз – автомобиль. Одна из возможных случайных комбинаций букв в ячейках матрицы представлена в табл. 9.10.

Таблица 9.10

Ь			Л
	А		О
	И	В	
М		О	
	Т		Б

Как должен устроитель лотереи назначить цену лотерейного билета, чтобы она не была слишком высокой и не отпугивала покупателей и в то же время чтобы сама лотерея для устроителей была бы достаточно доходной?

Для решения такой задачи приведенных исходных данных недостаточно. В частности, необходимо знать, сколько найдется желающих сыграть в такую игру? Сколько будет стоить автомобиль на момент выплаты выигрыша (если игра продолжается несколько лет, цены на автомобиль могут существенно увеличиваться)? Сколько попыток (в среднем) может сделать один игрок, пока не разочаруется в возможности выиграть?

Для ответа на эти, а возможно, и другие вопросы нужна серьезная статистика. Однако, для того чтобы продемонстрировать суть подхода к решению задачи, мы можем задать необходимые данные, исходя из достаточно очевидных рассуждений. Пусть дополнительные исходные данные таковы:

- цена призового автомобиля 150 000 руб.;
- себестоимость изготовления одного лотерейного билета в партии не менее 1 млн шт. составляет 15 руб.;
- в регионе, где будут распространяться лотерейные билеты, проживает не менее 10 млн. чел.;
- взрослое кредитоспособное население 3 млн чел.;
- лотерейные билеты покупают от 30 до 60% взрослого кредитоспособного населения;
- приемлемой может считаться цена одного билета не выше 100 руб.;
- число купленных билетов (за несколько попыток выиграть автомобиль) составляет от 1 до 3 на одного игрока;
- устроитель считает лотерею достаточно доходной, если прибыль составит не менее 25%.

Решим задачу, учитывая эту дополнительную информацию.

Вначале подсчитаем вероятность того, что с первой попытки игрок откроет нужные для образования слова «АВТОМОБИЛЬ» буквы. Согласно классическому определению вероятности события это один случай из $N_{\text{общ}}$ числа возможных, т.е. $P_{авто} = \frac{1}{N_{общ}}$. Число $N_{общ}$ определяется как число сочетаний из 20 по 10, что составляет $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{10!} = 184756$. В результате $P_{авто} = \frac{1}{184756} = 5{,}413 \cdot 10^{-6}$, или примерно ноль целых и пять миллионных.

Отсюда получаем, что математическое ожидание выигрыша M[АВТО] на один билет составляет М[АВТО] = $5{,}413 \cdot 10^{-6} \cdot 15 \cdot 10^4 =$ 0,81195 руб., т.е. чуть больше 81 коп.

Средний процент играющих составляет $\frac{30+60}{2} = 45\,\%$, а с учетом общего числа взрослого кредитоспособного населения в 3 млн чел. среднее число игроков будет равно $0{,}45 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1{,}35 \cdot 10^6$. При числе попыток игры от 1 до 3 каждый из игроков купит в среднем 2 билета, в результате потребуется как минимум $2 \cdot 1{,}35 \cdot 10^6 = 2{,}7 \cdot 10^6$ билетов. Это значительно больше, чем требуется для обеспечения минимальной цены изготовления билета (не выше 15 руб.). Устроители лотереи приняли решение выпустить $2{,}8 \cdot 10^6$ билетов, чтобы обеспечить необходимую надежность обеспечения спроса на них. В таком случае среднее число билетов, на которые выпадет выигрыш, будет равно $2{,}8 \cdot 10^6 \cdot 5{,}413 \cdot 10^{-6} = 15{,}16$, т.е. в среднем выиграют чуть больше 15 билетов. А раз это так, то с учетом стоимости одного автомобиля в 150 000 руб. суммарная средняя стоимость выплат составит $15{,}16 \cdot 150\,000 =$ 2 274 000 руб.

В итоге средние суммарные затраты организатора лотереи с учетом стоимости изготовления лотерейных билетов и выплаты выигрышей будут равны:

$$C_{билета} \cdot N_{билетов} + C_{выплат} = 15 \cdot 2{,}8 \cdot 10^6 + 2\,274\,000 = 42 \cdot 10^6 + 2\,274\,000 =$$
$$= 44\,274\,000 \text{ руб.}$$

Поскольку устроитель считает, что лотерея будет достаточно доходной, если прибыль составит не менее 25%, то он рассчитывает выручить не менее чем $1{,}25 \cdot 44\,274\,000 = 55\,342\,500$ руб., тогда требуется установить цену на один лотерейный билет исходя из соотношения:

$$\frac{55342500}{2{,}8 \cdot 10^6} \geq 19{,}77 \text{ руб.}$$

Ближайшая целая сумма в рублях – 20 руб. Эту сумму и было решено установить в качестве окончательной цены лотерейного билета.

Как реализовать первый подход из указанных, нам уже известно. Поэтому рассмотрим алгоритм построения субъективной функции распределения значений цены как непрерывной величины.

Суть подхода к построению субъективной функции распределения близка тому, какой мы использовали при построении индивидуальной функции полезности. В основе лежит понятие медианы распределения. Технологически же спектр значений исходной величины делится на сегменты так, чтобы средние значения сегментов имели равную вероятность. Предположим, что брокер испытывает опасения в отношении цены, по которой он мог бы продать приобретенную по $5 руду. Обозначим цену продажи закупленной руды через s. Брокер считает, что она будет где-то между $5,5 и $12 за тонну. В вероятностных терминах это означает, что брокер полагает невозможной цену спроса ниже $5,5 и полагает вероятность $P(\tilde{s} < \$5{,}5) = 0$. Однако крайне маловероятно, что цена превысит $12 за тонну, т.е. $P(\tilde{s} < \$12) = 1$.

Итак, брокер решил выбрать именно этот интервал для того, чтобы субъективно оценить распределение вероятности цены спроса на закупленную им по $5 за тонну руду. Затем брокеру следует задуматься и попытаться ответить самому себе на вопрос: а какова цена руды «fifty-fifty»? Или по-другому: по какой цене за тонну руды ее предпочтут приобрести примерно половина заинтересованных покупателей? Предположим, в результате раздумий и личных оценок брокер пришел к выводу, что около половины потенциальных покупателей руды предпочтут приобрести ее по цене $s_{0.5}$ не выше $9,7 за тонну, а другая половина могла бы предложить и больше. Таким образом, нами найдена медиана для всего рассматриваемого диапазона возможных цен за товар. Следовательно, $P(\tilde{s} < \$9{,}7) = 0{,}5$. Теперь брокеру следует выбрать в качестве оцениваемого интервала диапазон цен от $5,5 до $9,7 за тонну руды и найти медиану для него. Для этого он может вновь задаться тем же вопросом: не выше какой цены из представленного диапазона руду предпочтет приобрести примерно четверть из общего числа заинтересованных покупателей, а остальные смогли бы согласиться предложить и большую цену? Предположим, что он остановился на оценке $s_{0.25}$ в $8,3. Таким образом, он получает еще одно значение для субъективной функции распределения цены продажи: $P(\tilde{s} < \$8{,}3) = 0{,}25$.

Остается определить величину $s_{0.75}$ верхнего квартиля, и основная часть работы будет завершена. Брокер представил себе все известное ему множество потенциальных покупателей руды, мысленно прикинул их нынешнее финансовое состояние. Он представил себе, как будут происходить открытые торги рудой, торги в полностью рыночных условиях. Он представил себе четверть наиболее состоятельных и решительных потенциальных покупателей, которые будут намерены купить руду во что бы то ни стало. При этом 3/4 остальных покупателей отступят. После всего этого брокер задался вопросом: до какой максимальной цены за тонну руды такие покупатели будут готовы ждать и не вступать в торг, чтобы затем враз предложить цену выше этой и тем самым выиграть торги? Он ответил для себя, что величина $s_{0.75}$ такой цены должна быть, как минимум, равной \$10,3 за тонну.

Таким образом, $P(\tilde{s} < \$10{,}3) = 0{,}75$. Далее брокер продолжил работу, деля каждый из полученных интервалов его собственной «медианой». В результате подобных операций им было получено множество значений субъективной функции распределения цены спроса на руду, представленных в табл. 9.11.

Таблица 9.11

Цена y, \$/тонн	5,5	7,2	8,3	9,0	9,7	10,1	10,3	10,8	12,0
$P(\tilde{s} < y)$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,0

Для уточнения собственных представлений и проверки полученных данных на непротиворечивость брокер дополнительно и независимо от уже полученных данных оценил точку «fifty-fifty», сдвигая границы интервала половинной вероятности: левую границу цены в \$5,5 он заменил на значение \$7,2, а правую, равную \$9,7, – на \$10,1. После этого он задался вопросом: чему равна точка «fifty-fifty» для интервала цены спроса от \$7,2 до \$10,1 за тонну? Подумав, он решил, что это действительно будет примерно \$9,0, и, следовательно, его представления достаточно точны и непротиворечивы. Все полученные точки были затем использованы для построения графика субъективной функции распределения $F(y) = P(\tilde{s} < y)$ цены спроса на руду. График функции $F(y) = P(\tilde{s} < y)$ представлен на рис. 9.11.

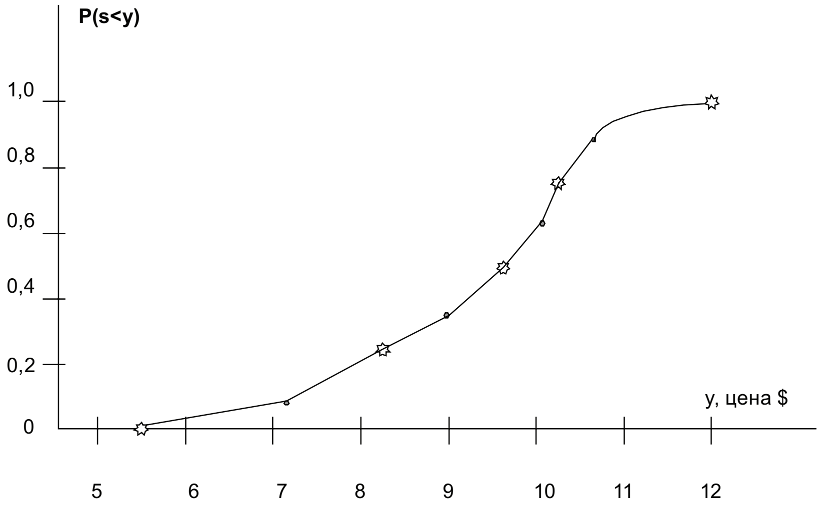


Рис. 9.11. График функции F(y) = P($\tilde{s}$ < y)

Брокер использовал его для оценки выгодности альтернатив с использованием дерева решений. Но, для того чтобы избежать существенных оценок, ему еще придется учесть временной фактор. Иными словами, в общем случае любая оценка экономических решений, и маркетинговых в частности, не может производиться лишь с позиций однократной, не существующей во времени денежной прибыли (ущерба). Иногда для этого достаточно использовать формализованную методику, например, метод оценки окупаемости капиталовложений при помощи расчета дисконтированного движения наличности.

9.4. Модели для расчета показателей риска банкротства и невозврата кредита

Оценка вероятности банкротства (*Z*-модель). Риск банкротства достаточно распространен, причем не только в странах с переходной экономикой. Об этом свидетельствуют и отечественный опыт, и события последних десятилетий в зарубежных странах. С 1 марта 1993 г. в России введен в действие закон «О несостоятельности (банкротстве) предприятия» (от 19 ноября 1992 г. № 3929-1). Согласно этому закону под банкротством понимается неспособность предприятия удовлетворять требования кредиторов по оплате товаров (работ, услуг), включая неспособность обеспечить обязательные платежи в бюджет и внебюджетные фонды, в связи с превышением обязательств над имуществом или в связи с неудовлетворительной структурой баланса. Как видно, в приведенном определении уже содержится указание на главные факторы, определяющие возможность наступления далеко не безобидного экономического и юридического события. Но это не все. С формальных позиций банкротство – это событие, то есть простейшая, системная модель сложного экономического явления. Оно не является статичным. Как правило, банкротству предшествует достаточно длинная полоса финансово-экономических затруднений, вслед за которыми происходит лавинообразное ухудшение финансового состояния предприятия. Динамика банкротства также нашла отражение в Федеральном законе «О несостоятельности (банкротстве)» от 26.10.02 № 127-ФЗ. В нем определены сроки наступления события банкротства. Так, юридическое лицо считается не способным удовлетворить требования кредиторов, если его обязательства не исполнены в течение трех месяцев с момента наступления даты исполнения.

Учитывая указанные обстоятельства, банкротство можно прогнозировать, чтобы своевременно принять необходимые меры для его предотвращения как события. Существуют разные методы прогнозирования финансового состояния предприятия с позиции его потенциального банкротства. Наибольший интерес среди них представляют математические методы, которые почти сорок лет широко используются в зарубежной практике оценки риска банкротства.

Например, широко известны так называемые *Z*-модели, разработанные известным западным экономистом Э. Альтманом (Al*t*man) в конце 60-х годов XX в. (другие названия этой модели: коэффициент Альтмана, индекс кредитоспособности). По форме модель Альтмана представляет линейную функцию от двух до семи факторов. Ее параметры рассчитывают на основе статистического обобщения финансовых показателей, характеризующих экономическую деятельность тех предприятий, которые либо уже обанкротились, либо все же удачно избежали банкротства. Например, при построении первой своей модели Альтман обследовал около 70 предприятий США, половина которых обанкротилась в период между 1946 и 1965 гг., а половина работала успешно.

Наиболее простая из моделей Альтмана – двухфакторная. В ней переменными являются коэффициент текущей ликвидности и доля заемного капитала в общей сумме источников заемных средств. Модель формирует качественную шкалу для оценки вероятности банкротства и задается соотношением вида:

$Z = -\,0{,}3877 - 1{,}0736\,K_1 + 0{,}0579\,K_2$,

где K_1 – коэффициент текущей ликвидности;

K_2 – доля заемного капитала в общей сумме источников заемных средств.

Анализ соотношения для двухфакторной модели показывает, что чем выше доля заемного капитала в общей сумме источников заемных средств предприятия и чем ниже его текущая ликвидность, тем выше значение Z и тем больше вероятность банкротства. Качественная шкала вероятности банкротства в течение ближайших двух лет от момента оценки формируется точечными и диапазонными значениями величины Z:

- если $Z = 0$, то вероятность банкротства примерно «fifty-fifty»;
- если $Z < 0$, то вероятность банкротства меньше 0,5;
- если $Z > 0$, вероятность банкротства больше 0,5.

Достоинство двухфакторной модели в ее простоте. За это приходится расплачиваться весьма невысокой точностью прогноза (по сути, «fifty-fifty» в течение ближайших двух лет).

Более сложной, но и более точной является пятифакторная модель Альтмана. Точность прогноза по пятифакторной модели составляет почти 95% на период до одного года, а на период до двух-трех лет не опускается ниже 80%. Эта модель имеет следующий вид:

$Z = 1{,}2\,K_1 + 1{,}4\,K_2 + 3{,}3\,K_3 + 0{,}6\,K_4 + 1\,K_5$,

где K_1 – отношение собственных оборотных средств к сумме активов («чистый капитал»);

K_2 – отношение нераспределенной прибыли к сумме активов;

K_3 – отношение балансовой прибыли до уплаты налогов и процентов к сумме активов;

K_4 – отношение рыночной стоимости акций к величине заемного капитала;

K_5 – отношение выручки от реализации продукции к сумме активов.

По сравнению с двухфакторной моделью качественная шкала оценок пятифакторной модели имеет отрицательную направленность по вероятности банкротства, а именно: чем больше значение Z, тем меньше вероятность банкротства. Результаты расчетов позволили установить диапазон возможных откликов Z-модели. Он ограничен в пределах примерно от -15 до +20. Детализация этого диапазона по градациям вероятности банкротства проводится различными исследователями в целом одинаково. Все сходятся в мнениях, что если $Z > 3$, то предприятие финансово устойчиво, а если $Z < 1{,}8$ – несостоятельно. Однако в связи с тем, что в четвертом коэффициенте фигурирует рыночная стоимость акций, этот показатель можно использовать лишь в отношении крупных компаний и границы вынесения оценок здесь начинают смазываться. Тем не менее в литературе часто можно встретить почти вдвое больше качественных градаций шкалы вероятности банкротства, чем в двухфакторной модели:

- «очень высокая», если $Z < 1{,}8$;
- «высокая», если $1{,}81 \leq Z \leq 2{,}7$;
- «возможная», если $2{,}8 \leq Z \leq 2{,}9$;
- «маловероятная», если $Z > 3$.

Итак, основной недостаток пятифакторной модели Альтмана в том, что ее адекватность высока только для достаточно крупных компаний, длительное время уверенно котирующих свои акции на бирже.

Наконец, в конце 70-х годов XX в. Альтманом была разработана семифакторная модель. По некоторым оценкам она позволяет прогнозировать банкротство за пять лет до его наступления с надежностью не менее 0,7. Кроме того, примерно в этот же период были разработаны модели и других авторов: Винакора и Смитира (по результатам оценки работы более 180 фирм); Фицпатрика (исследовано 20 фирм, которые потерпели крах в 1920–1929 гг.); Мервина (изучен опыт 939 фирм в 1926–1936 гг.); Таффлера; Спрингейта; Фулмера (30 успешных компаний и 30 банкротов); Лего (были проанализированы 30 финансовых показателей 173 промышленных компаний Квебека) и др. Они содержат от четырех до девяти факторов.

Дискретная аналитическая модель кредитного риска. В зависимости от того, в каком контексте рассматривается угроза потери или убытка, для оценки риска вполне могут быть использованы модели и методы теории надежности. Пусть вначале требуется оценить риск для самого, так сказать, неблагоприятного исхода – полного невозвращения кредита. При таком подходе к оценке риска этот случай вполне адекватно описывается моделью внезапного отказа. Обозначим через $P_н$ – вероятность невозвращения кредитных средств полностью в установленный срок, а через r_0– банковскую ставку кредитования при нулевом риске. Обычно полагают, что риск незначителен, если вероятность $P_н \le 0{,}25$, а при уровнях вероятности $P_н \ge 0{,}60$ его считают критическим.

Поскольку $0<P_н <1$, кредитор может не получить принадлежащие ему заемные средства C с учетом процентов, т.е. он может потерять сумму $(1+ r_0)\ C$ с вероятностью $P_н$. Поэтому в условиях риска он стремится увеличить ставку кредитования с r_0 до $r_р$, ориентируясь на средний ожидаемый доход. Этот ожидаемый доход можно вычислить по известной формуле для математического ожидания дискретной случайной величины:

$$P_н \cdot 0 + (1 - P_н) \cdot (1 + r_p)\ C = (1 - P_н) \cdot (1 + r_p)\ C.$$

По справедливости, это ожидаемое значение должно равняться по величине той сумме, которую кредитор получил бы, если бы положил деньги в банк и не рисковал. Поэтому полагаем, что

$$(1 - P_н) \cdot (1 + r_p)\ C = ((1 + r_0)\ C.$$

Отсюда легко определяем, что процентная ставка $r_р$ кредитования в условиях риска должна быть равна

$$r_p = \frac{r_0 + P_н}{1 - P_н}.$$

Например, для введенных нами градаций уровней 0,25 и 0,60 вероятности $P_н$ невозвращения кредитных средств и банковской ставке r_0=0,05 кредитования значения величины процентной ставки $r_р$ кредитования в условиях риска составят:

$r_p \le 0{,}4$ при $P_н \le 0.25$ и $r_p \ge 1{,}625$ при $P_н \ge 0{,}60$.

Непрерывная модель кредитного риска. Предположим теперь, что банк постоянно выдает кредиты или учитывает векселя, а риск невозврата кредита пренебрежимо мал. Однако банк может испытывать затруднения, даже нести потери или убытки оттого, что заемщики опаздывают со сроками возврата или погашения векселей. При достаточно длительном процессе проведения подобных кредитных и факторинговых операций, при значительной массовости таких событий хорошей моделью для оценки риска несвоевременного возврата может служить модель простейшего (пуассоновского) случайного потока событий. В такой модели случайными являются моменты времени возврата кредитованных средств с задержкой, а следовательно, случайной является и сама величина $\tilde{t}$ времени задержки. Обозначим через $T_{ср}$ среднее время задержки возврата.

Среднее время $T_{ср}$ задержки возврата можно установить, набирая статистику по задержкам возврата за достаточно длительный период наблюдений. Предположим, что среднее время $T_{ср}$ задержки возврата известно, и оказалось, что оно примерно постоянно за весь рассматриваемый период финансовой структуры. Это означает, что среднее число случайных событий – возвратов кредита с задержкой или опоздание с погашением векселей – не зависит от того, когда именно мы фиксируем эти события, а зависит только от того, за какой промежуток времени эти опоздания установлены. В таком случае можно рассчитать интенсивность λ постоянного потока рассматриваемых нами случайных событий, когда возврат произошел с запаздыванием: $\lambda = \frac{1}{\mathrm{T}_{ср}}$. Этой характеристики вполне достаточно, чтобы полностью охарактеризовать простейший поток случайных событий – опозданий с возвратом кредита или погашения векселей – и рассчитывать характеристики риска.

Например, функция $F(t)$ распределения непрерывной случайной величины $\tilde{t}$ продолжительности времени запаздывания с возвратом кредита задает вероятность того, что момент возврата кредита с запаздыванием наступит не позднее фиксированной величины t. Функция имеет вид:

$$F(t) = P(\tilde{t} < t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}.$$

Это неубывающая функция своего аргумента с параметром λ интенсивности потока запаздываний. Следовательно, чем больше значение величины t продолжительности запаздывания, тем меньше вероятность невозврата к этому сроку при заданной величине λ. Например, вероятность запаздывания с возвратом средств не позднее среднего времени $T_{ср}$ запаздывания (т.е. вероятность наступления события $\tilde{t} < T_{ср}$) составит величину $P(\tilde{t} < T_{ср}) = F(T_{ср}) = 1 - e^{-\lambda \cdot T ср} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$, вероятность возврата средств не позднее двукратного среднего времени запаздывания будет равна $P(\tilde{t} < 2T_{ср}) = F(2T_{ср}) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2T ср} = 1 - e^{-2} = 0{,}865$, а через три средние продолжительности запаздывания средства будут возвращены практически достоверно ($P(\tilde{t} < 3T_{ср}) = F(3T_{ср}) = 1 - e^{-\lambda \cdot 3T ср} = 1 - e^{-3} = 0{,}950$).

Итак, при запаздывании с возвратом кредитованных средств заимодатель несет убытки – отданные им в кредит средства не работают и не приносят дохода. Какими могут быть эти потери по величине? Пусть r^* – процентная ставка наиболее выгодного размещения средств. Тогда, например, при средней задержке $T_{ср}$ времени погашения векселей на одной факторинговой операции кредитор потеряет $r^*T_{ср}$, а при номинале вексельного портфеля, обслуживаемого факторингом, равном N, эти потери составят уже $r^*T_{ср}N$.

Следовательно, с учетом риска несвоевременного возврата ставка кредитования должна быть скорректирована на «эффект задержки» в погашении векселей. Для этого следует банковскую ставку r_0 кредитования при нулевом риске увеличить на некоторую долю от процентной ставки r^* наиболее выгодного размещения средств. Величину доли от процентной ставки r^* определить пропорционально отношению величины среднего времени $T_{ср}$ задержки погашения векселей к среднему сроку кредитования (среднему сроку жизни векселей до погашения).

10. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ РЕШЕНИЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ ПОВЕДЕНЧЕСКИМИ РИСКАМИ

10.1. Методы математического прогнозирования и оценки рисков на основе принципа «опоры на собственные силы»

Редко когда в предпринимательстве главным фактором, определяющим «механизм проблемной ситуации», не оказывается поведение одного или нескольких субъектов, оказавшихся втянутыми в предпринимательскую операцию. Предприниматель ведь никогда не действует в вакууме, даже тогда, когда занимается куплей-продажей акций через Интернет. Он постоянно воздействует своими поступками на других и постоянно находится под чужим воздействием. Он просто вынужден взаимодействовать с «другими», так же как и эти «другие», возможно, даже против своей воли вступают во взаимодействие с ним. Издавна при этом лица, принимающие решения, были настроены на то, чтобы получить какие-то обоснованные рекомендации для совершения собственных поступков в условиях, когда будущие поступки «других» – это как темная сторона Луны. Поэтому с начала XX в., когда начали развиваться методы математического прогнозирования и оценки рисков, на них возлагали большие надежды. В те времена экономическое сообщество еще недалеко ушло от эпохи «*homo homini lupus est*» («Человек человеку волк»), что согласно Гоббсу было естественным состоянием человеческого общества до возникновения государства. Поэтому у предпринимателей не было тогда иного выхода, как воспринимать «других» в качестве агрессивной среды.

Итак, в ходе предпринимательской деятельности рано или поздно возникает конфликт. И конфликт в экономической или политической сферах порождает борьбу. Цели и формы борьбы могут быть различны, но издавна изучались и постепенно становились известными некие общие законы, на основании которых развивались процессы парного или группового противоборства. Вот, например, как выглядят классические стратегии противоборства (стратагемы), известные из политики и военного дела:

- создавай трудности противнику, осложняй обстановку, если уверен, что лучше справишься с осложнениями и трудностями;

- заботься о свободе движения, сковывай противника, ограничивай его свободу действий;
- используй в своих целях функции и резервы противника;
- концентрируй силы и средства на самом выгодном направлении;
- выводи из строя в первую очередь координирующие центры и органы управления противника;
- заботься о восстановлении собственных поврежденных центров;
- ставь противника перед свершившимся фактом – сначала введи решение, а потом уж добивайся, чтобы с ним примирились;
- действуй проволочками, затяжками, если это ослабляет противника;
- действуй угрозами – потенциально угрозы опаснее действия;
- захвати противника врасплох, действуй скрытно, обманами.

Трудно не согласиться с высокой эффективностью перечисленных стратагем.

А вот некоторые примеры эвристических правил поведения в бизнесе:

- не давайте пришедшему к вам с деловым предложением в долг, лучше вложите деньги в совместное с этим человеком дело; тогда вы получите право участвовать в деле, вносить предложения, контролировать бизнес, участвовать в доходах; т.е. вы получите часть управления и часть прибыли, а не сколько-то процентов долговых; а если произойдет крах – вы сможете вернуть хотя бы часть своих денег; покупайте долю в бизнесе только рядом, не далее чем в вашем городе и только то, что можно увидеть своими глазами, а лучше – потрогать руками, потому что не стоит верить тому, что слышишь, надежнее все подвергать сомнению;
- у инвестора должен быть один главный девиз: «Будьте подозрительны и компетентны!»; нельзя быть некомпетентным, когда вкладываешь деньги; великая ценность денег как раз в том и состоит, что они нужны каждому, отсюда правило: «Покупайте только то, что как можно больше «похоже на деньги»; если вы торговец, вложите деньги в лучшую компанию, которая продает вам товар; если вы строитель – покупайте недвижимость и

землю; но покупайте только ту собственность, которую сможете перепродать без потерь, а не ту, которая «вам нравится», потому что завтра она может вам разонравиться, а кроме вас – она никому, оказывается, и не нужна;

- если вы интеллигент (ничего не смыслите в коммерции и торговле), приобретайте государственные ценные бумаги;
- лучше сразу получить сравнительно небольшую прибыль, чем откладывать решение в надежде на более крупную;
- тот, кто делает деньги, должен быть пессимистом во время бума и оптимистом во время депрессии; покупайте всегда у пессимистов, а продавайте оптимистам.

А вот исторически сложившиеся «золотые правила» инвестирования:

- на финансовом рынке никаких гарантий быть не может;
- лучше сохранить свои деньги, не получив по ним никакого дохода, чем потерять их все сразу;
- никогда не вкладывайте деньги в то, что до конца не понимаете. Это означает, как уже отмечалось, что заниматься операциями на рынке ценных бумаг нужно после длительных и упорных «тренировок». Перед тем как совершить первую операцию, вникните в смысл основных понятий и терминов. Затем внимательно изучите содержание документов, сопровождающих и фиксирующих сделку. Процессы, связанные с покупкой или продажей ценных бумаг, надо изучать постепенно. К слову сказать, для того чтобы привить обычным гражданам России знания, умения и навыки в работе с ценными бумагами, для «продвижения» операций с ценными бумагами «в массы» некоторые банки России предлагают в Интернете учебные интерактивные системы электронных торгов, работающие в режиме реального времени. Каждый может попробовать собственные силы и умения, а через некоторое время оценить итоги. В общем, не спешите вкладывать деньги «сломя голову»;
- никогда не вкладывайте деньги на основе только одного мнения. Не считайте себя «главным специалистом». Консультации с профессионалами обязательны (лучше с несколькими и из разных компаний);
- никогда не вкладывайте деньги под нажимом. Помните, что на свете достаточно людей, которые могут убедить кого угод-

но в чем угодно. Нужно уметь держать паузу ровно столько, сколько нужно для понимания ситуации и консультации с теми, кому доверяете. И пусть вас не смущают авторитетные имена, гипотетические расчеты, эмоциональные призывы к срочному вложению средств в «абсолютно беспроигрышное дело». Даже если потом автор этого предложения как бы невзначай упомянет в вашем присутствии, что вот, дескать, вложил деньги и оказалось – очень выиграл, не расстраивайтесь, а, как говорят, «разделите объявленный результат на десять». Согласитесь, что все-таки лучше недополучить какую-то прибыль, чем потерять основной капитал;

- никогда не вкладывайте последние деньги. Все фондовые рынки периодически подвержены спадам и кризисам. Поэтому надо быть готовым переждать неблагоприятные ситуации. Это возможно лишь в том случае, когда сделанные инвестиции не затрагивают ваших жизненных интересов;
- никогда не вкладывайте чужие деньги. Бывает, что котировки акций динамично и продолжительно растут и возникает соблазн взять деньги в долг и купить на них быстрорастущие акции. Однако обычно сложно предугадать резкий скачок вниз, а затем затяжной спад рынка. Самое же неприятное в том, что, как правило, срок возвращения чужих денег никогда не совпадает с благоприятной ситуацией, и вы окажетесь в положении должника. А раз это так, то лучше недополучить дополнительную прибыль, чем ваше имущество пойдет на торги для погашения долга.

Наконец, еще несколько мудрых правил поведения:

- если вы не очень склонны к абстракциям, с трудом фантазируете, то лучше вам иметь дело с собственностью, а не вкладывать деньги в некие планы; вообще вкладывать деньги в гипотетические проекты стоит, только имея за плечами десятилетний опыт ведения дел с собственностью;
- если нужен надежный совет, то в последнюю очередь обращайтесь к брокерам – брокер живет с продаж, его лозунг: «Рискует клиент!»;
- брокер никогда не сможет показать вам путь к «мешку золота» за копеечное вознаграждение; если бы действительно знал, где он лежит, то подобрал бы его сам.

И поэтому совсем неудивительно, что первые математические модели оценки рисков в межгосударственных отношениях и в бизнесе строились на основе принципа открытого противостояния, антагонизма и «опоры на собственные силы». В подобных конфликтных ситуациях ЛПР при обосновании своих решений приходилось рассчитывать только на худшее, поскольку не представлялось возможным знать, как конфликтующие с ним «другие» поступят или смогут поступить. Разработкой технологий и методов решений в антагонистических конфликтных ситуациях занялись психологическая теория решений и математическая теория игр. Но это достаточно сложные дисциплины.

Воспользоваться напрямую результатами этих двух теорий обыкновенному управленцу, не специалисту по ТПР, не математику подчас довольно трудно. Даже тезаурус у них своеобразный. Например, альтернативы принятия решений в теории игр принято называть стратегиями, чтобы подчеркнуть принципиальное отличие конфликтных проблемных ситуаций от иных, а модельными компонентами теории игр являются игроки, цели игроков, доступная игрокам информация для принятия решений и правила реализации игроками собственных стратегий (осуществления ходов в игре). Обсудим научную концепцию анализа рисков в конфликтных ситуациях.

Разработку решений по снижению предпринимательских рисков в конфликтных ситуациях целесообразно декомпозировать по этапам усложняющегося использования информации о проблемной ситуации. На первом этапе следует провести предварительный анализ собственных стратегических возможностей при упрощенном подходе к обоснованию решений в схеме «один против всех». Для повышения надежности представлений, выводов и рекомендаций целесообразно вначале получать оценки в качественных шкалах (номинальных или порядковых). Затем следует уточнить собственные предпочтения и усовершенствовать шкалы оценки возможных исходов.

На завершающем этапе разработки решений по управлению риском следует оценить возможности блефа, угроз со стороны противника, а также его кооперирования и вступления в коалиции с некоторыми из «других» заинтересованных лиц, что может ухудшить положение ЛПР.

Покажем, как можно достаточно просто провести моделирование первого этапа анализа рисков в условиях конфликта. Для этого рассмотрим модели оценки риска на основе принципов «индивидуальной рациональности» и «опоры на собственные силы». В теории игр такие модели именуют «парными (в том смысле, что моделируется поведение только двух конфликтующих сторон) антагонистическими играми». Из этих моделей конфликтных ситуаций наиболее проработанными в методическом и технологическом аспектах являются так называемые матричные игры, для которых характерны следующие признаки:

- наличие только двух игроков («наш» предприниматель – 1-й игрок, «другой» – 2-й игрок);
- у игроков дискретные и конечные множества стратегий;
- игроки руководствуются единым критерием, измеряемым в полезностях, причем первый игрок стремится критерий максимизировать, а второй – минимизировать;
- строгое соперничество между игроками (антагонистическая игра);
- игрокам нельзя между собой договариваться и обмениваться информацией (бескоалиционная, некооперативная игра).

Эти признаки вполне адекватны характеристикам конфликтной ситуации с бескомпромиссной борьбой между предпринимателями за прибыль на сегменте рынка. Критерий единственный – величина прибыли. В итоге конкурентной борьбы одна из сторон выиграет в прибыли ровно столько, сколько ей проиграет другая сторона.

Цель применения аппарата матричных игр для анализа предпринимательского риска – оценка собственных стратегических возможностей в упрощенной, модельной схеме «один против всех». При таком концептуальном взгляде на конфликтную ситуацию предприниматель может получить первое представление о том, чего он может достичь, если будет действовать, не обращая внимания на своих противников. И только в том случае, если эти первые выводы, сделанные предпринимателем, подтвердят для него выгодность будущей конкурентной борьбы, ему может потребоваться провести дополнительный анализ стратегий разрешения конфликта на основе более тонких представлений о личных предпочтениях и предпочтениях конкурентов. В качестве упомянутых «тонкостей» стратегий рекомендуется проанализировать возможности использования особых психологических приемов – блефа и угроз.

По поводу «угроз» как специфических формальных стратегий поведения в конфликте мы еще будем говорить, а вот «блеф» – это не стратегия, в привычном понимании, как указание о том, что, где, когда и как сделать. Это не конкретный способ действий, который реализуется в пространстве и времени. Блеф, скорее, искусство воздействия на противника с целью увлечь его в нужном для блефующего направлении мыслей и действий. Результат блефа – обман. Действие блефа на противника или проявляется практически мгновенно, если он вам поверил, или не проявляется вовсе. При организации блефа следует помнить его важный принцип: все, что может привлечь внимание именно этого конкурента, может быть использовано в качестве приманки.

Например, тщеславного, самоуверенного, рискованного субъекта с низкими моральными качествами, несомненно, соблазнит то, что вы, как его соперник, выглядите слабым, неопасным и даже не очень привлекательной жертвой. В подобной ситуации такое ваше поведение обычно провоцирует самоуверенного конкурента не бояться вас, проявить свои планы, подталкивает его к использованию не самых сильных его стратегий. Наоборот, если соперник осторожен, неуверен, чрезмерно пессимистичен и т.п., вам следует показать себя сильным, решительным, готовым к самым безрассудным поступкам. Тогда вы сможете достаточно уверенно предположить, что он задействует самые сильные из своих стратегий, которые вы можете себе представить, пойдет на уступки. В любом случае у вас появится достаточная ясность, какая ситуация в конфликте сложится. А это совсем немало!

Но начнем с моделирования конфликтных ситуаций самыми простыми методами. Путем формирования и решения матричной игры. В результате можно получить и качественные суждения, и количественные рекомендации. Качественные суждения – это представления о том, какую стратегию предпринимателю лучше использовать, а также чего, скорее всего, ждать от «другого». Что касается количественных рекомендаций, то они состоят в вычислении гарантированного выигрыша и установлении специальных сложных стратегий, приводящих к наилучшему результату. Эти стратегии называют «смешанными». Что это означает, будет ясно чуть позднее. Но начинается все с решения игры в наиболее простой ее форме, а именно – для однократной «партии» в чистых стратегиях.

Разъясним смысл словосочетания «чистые стратегии». Оно означает, что при управлении риском в конфликтной ситуации предприниматель будет применять имеющиеся в его распоряжении стратегии исключительно альтернативно. То есть применять чистые стратегии по схеме: или эта, или та, и никак иначе. Иными словами, применение чистой стратегии напрочь исключает возможность одновременного использования других имеющихся у предпринимателя альтернатив, каждая из которых также рассматривается как потенциальная чистая стратегия. Анализ конфликта в чистых стратегиях проводят на основе принципа наибольшего гарантированного результата. Поэтому ясно, что согласно принципу наибольшего гарантированного результата рациональным можно считать только такое поведение в конфликте, которое обеспечивает предпринимателю наилучший из самых неблагоприятных для него результатов.

Помимо принципа наибольшего гарантированного результата для оценки степени уверенности в исходе конфликтной ситуации прогноз осуществляют на основе принципа равновесия. Суть его в том, что рациональным поведением конфликтующих сторон следует считать только такое, при котором каждая из них стремится к ситуации, обеспечивающей лично ей наибольший гарантированный результат, и отклонение от которой невыгодно никому.

Противоположным по смыслу к рассмотренному является понятие «смешанная стратегия». Наверное, уже почти ясно, что смешанная стратегия каким-то образом формируется из чистых. Именно так: смешивание стратегий означает их одновременное совместное применение при разрешении конфликта по специальным правилам. Но для того чтобы это технически стало возможным, «партия» игры должна повторяться не один, а несколько раз. Причем чем больше раз будет проведена партия, тем лучше.

То же самое можно наблюдать и в предпринимательстве. Например, в качестве чистых стратегий на рынке ценных бумаг может выступать указание о покупке определенного количества конкретных акций по конкретной цене или распоряжение на совершение сделки в нерыночных условиях. Но ведь для снижения риска и повышения эффективности операций на рынке ценных бумаг владельцы и брокеры могут на этой бирже одновременно покупать одни акции и продавать другие, варьировать цену, объемы пакетов и пр. Так вот это будет уже смешиванием чистых стратегий на данной бирже, т.е. применением смешанной стратегии. Представим себе, что владелец ценных бумаг может производить подобное смешанное расширение игры на нескольких биржах, и понятие «смешанной стратегии» окончательно прояснится.

Технология анализа матричной игры состоит в следующем. Сначала устанавливают все ситуации игры. Ситуация игры – это та совокупность факторов и тот механизм формирования результата, которые сложатся в момент, когда игроки независимо друг от друга применят каждый свою чистую стратегию. То есть это полная аналогия карточной игры, когда игроки обязаны сделать ход одновременно: первый игрок, исходя из своих целей и возможностей, абсолютно волевым порядком выбирает одну из имеющихся у него карт; второй – поступает аналогичным образом; игроки одновременно бросают свои выбранные карты на стол; в результате – обе карты на столе, и сложилась вполне ясная ситуация, кто выиграл, а кто проиграл.

Смешанные стратегии можно наблюдать в процессе антагонистической борьбы за покупателя и прибыль на сегменте рынка с определенным товаром. Пусть, например, каждый из двух торговцев-конкурентов, выходит на рассматриваемый сегмент рынка со своей стратегией торговли. То есть каждый из торговцев доставляет на рынок свой определенный объем товара и устанавливает свою определенную цену за единицу товара. Предположим, что цена ими установлена по принципу минимальной прибыли и продавцы товара не имеют права изменять цену в процессе торговли. Итак, товар разложен на прилавках, цены объявлены. Можно начинать торговать и получать прибыль от продаж.

Все было бы ничего, вот только покупатель на рынке один и тот же для двоих продавцов. А это значит, что если этот покупатель приобретет у одного из продавцов некоторое количество n товара по цене c_1 за единицу, то именно этот продавец получит от покупателя денег на сумму $n \cdot c_1$. А другой продавец такого же товара эту же сумму от покупателя не получит (потеряет $n \cdot c_1$ единиц ценности товара). Таким образом, в модельных терминах теории игр действительно получается, что торговцы-конкуренты (игроки) пользуются в операциях куплипродажи (в игре) одной и той же критериальной функцией для оценки предпочтительности ситуаций (полученная выручка за проданный товар) и при этом каждый из торговцев (игроков) в процессе торговли (в конфликтной ситуации) выигрывает ровно столько, сколько ему проигрывает другой. Множества стратегий у игроков можно считать дискретными. Следовательно, налицо все признаки, присущие антагонистической матричной игре.

Итак, рассматривая технологию решения матричных игр, мы сделали два шага. Во-первых, установили множество ситуаций игры, как множество всевозможных пар, образованных из чистых стратегий игроков, а во-вторых, оценили каждую ситуацию по единому, общему для обоих игроков критерию. Основной результат первых двух шагов рассматриваемой нами технологии обычно оформляют в виде матрицы игры. Заголовками строк матрицы служат наименования чистых стратегий первого игрока, заголовками столбцов – наименования чистых стратегий второго игрока. На пересечении строк и столбцов – в клетках матрицы, как мы теперь понимаем, фигурируют ситуации игры.

В клетки заносят значения критерия в выбранной шкале, чем и моделируют значения выигрыша первого игрока. В то же время это значение – величина проигрыша второго игрока. Таким образом, матрица игры – очень важный результат. Дело в том, что после того, как получена матрица игры, весь последующий анализ конфликтной ситуации можно проводить, полностью отстранившись от ее контекста. Оперируют только этой матрицей, особенно не задумываясь над тем, что конкретно за ней прячется. Это очень удобно. В этом как раз и состоит идея моделирования: проводя анализ модели, можно совершенно не задумываться над тем, как модель получена (в данном случае матрица игры) и что конкретно она отображает.

Начиная с этого момента, анализируем только матрицу игры. Задача третьего шага технологии состоит в том, чтобы удалить из матрицы игры все стратегии игроков, которые порождают ситуации, явно не выгодные для разрешения конфликта. Процедуру исключения из дальнейшего рассмотрения всех не выгодных игрокам стратегий называют редуцированием (снижением размерности) матрицы игры. Методологическую основу редуцирования составляет идея доминирования. Дословно «доминирование» – это господство. В каком же смысле тогда можно говорить о доминировании стратегий?

Ответ становится очевидным, если не забывать об общесистемном принципе цели. К какой цели мы стремимся? Разрешить конфликтную ситуацию с наибольшей пользой для себя и при этом только с опорой на собственные силы. Значит, мы должны оставить в своем распоряжении для дальнейшего рассмотрения способов решения конфликта только безупречные по выгодности стратегии. Выгодность оставляемых стратегий должна явно преобладать над выгодностью каких-то других, менее выгодных, т.е. доминируемых, альтернатив. Итак, задача состоит в следующем: из исходного множества стратегий первого игрока, которые моделируют ситуации в строках матрицы игры, удалить все доминируемые альтернативы и оставить только недоминируемые. Надо вычеркнуть из дальнейшего рассмотрения все те строки, значения в которых по величине не больше, чем в какой-либо другой строке матрицы игры. Рассмотрим пример. Пусть у первого игрока четыре чистые стратегии, а у второго – пять. Следовательно, матрица будет размером 4×5. Пусть к тому же значения функции выигрыша – критерия первого игрока – таковы, как это представлено в матрице игры (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	6	3	4	2	7
a_2	5	3	4	8	2
a_3	1	2	4	2	3
a_4	2	4	5	3	3

Сравним величины функции выигрыша первого игрока в строке табл. 10.1, соответствующей его стратегии a_3 , со значениями в строке, например, для стратегии a_4. Результатом сравнения будет вывод о том, что стратегия a_4 доминирует над стратегией a_3. Это действительно так, поскольку выполняются все нестрогие неравенства $a_{4j} \geq a_{3j}$ для j=1, 2, 3,4. Стратегия a_4 превосходит почти по всем по результатам стратегию a_3. Только для ситуаций, которые формируются с пятой стратегией b_5 второго игрока, эти результаты одинаковы (в этих ситуациях (a_3, b_5) и (a_4, b_5) результат равен 3). Чтобы графически зафиксировать факт доминирования стратегии a_3 в матрице игры табл. 10.1 строка для отображения этой стратегии оттенена. Эту строку следует вычеркнуть из матрицы. В итоге редуцированная по стратегиям первого игрока матрица примет следующий вид (табл. 10.2):

Таблица 10.2

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	6	3	4	2	7
a_2	5	3	4	8	2
a_4	2	4	5	3	3

Теперь самое время первому игроку вспомнить, что в конфликте участвует и его соперник. Ни в коем случае нельзя считать своего противника глупым, недооценивать его стратегических возможностей. Никогда не будет лишним предположить, что «игрок № 2», по крайней мере, так же умен, как вы, выступающий в модели конфликта под именем «игрок № 1». Поэтому нужно проанализировать за второго игрока, его множество стратегий и удалить из этого множества все доминируемые альтернативы. Это будет правильно: ведь умный противник не будет использовать невыгодные для себя стратегии, тем более если их невыгодность заметна даже вам, его конкуренту.

Предположим, что в ходе проверки вы обнаружили какой-то столбец в матрице игры, в котором все значения функции выигрыша (напомним, что это ваш, первого игрока, критерий выигрыша) окажутся не меньше, чем в каком-то другом столбце. Это означает, что все ситуации для обнаруженного столбца выгоднее вам и не выгодны вашему противнику. Такой столбец, соответствующий стратегии b_3 второго игрока, оттенен в последней матрице игры. Сравним, например, значения в столбцах, соответствующих стратегиям b_2 и b_3. Легко заметить, что все величины в столбце b_3 превышают соответствующие значения в столбце b_2. Значит, стратегия b_2 доминирует стратегию b_3 по величинам *проигрыша* второго игрока. Следовательно, эта альтернатива b_3 должна быть исключена из множества стратегий второго игрока. После вычеркивания доминируемого столбца b_3 матрица игры примет вид, представленный в табл. 10.3:

Таблица 10.3

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_4	b_5
a_1	6	3	2	7
a_2	5	3	8	2
a_4	2	4	3	3

Но, может быть, после того, как из матрицы игры вычеркнули столбец, стоит вновь проверить ее строки на доминирование? Ведь могли же теперь в матрице остаться такие значения результата, при которых удастся выявить невыгодные ситуации? В общем случае это именно так. И поэтому полученную после редуцирования матрицу размером 3×4 следует вновь подвергнуть проверке на доминирование сначала строк, затем – столбцов, потом опять строк и т.д. Бывают ситуации, что в итоге от матрицы остается одна-единственная ситуация, образованная одной стратегией первого игрока и одной – второго. В таком случае других способов разрешения конфликта, кроме как использовать именно оставшиеся стратегии, у игроков нет: игра закончена. Но в общем случае в окончательно редуцированной матрице все же ситуаций больше, чем одна-единственная. В последней матрице 3×4 все оставшиеся стратегии игроков являются недоминируемыми.

Как только получена окончательно редуцированная матрица, можно приступать к поиску решения игры. Как уже отмечалось, вначале ищется решение на уровне качественных выводов, а затем на количественном уровне устанавливается основной результат наиболее рационального поведения в конфликтной ситуации. Для того чтобы получить решение игры с использованием математических методов, введем следующие обозначения:

A, B – множества стратегий первого и второго игроков соответственно;

a_i, b_j – стратегии из множеств A и B соответственно;

(a_i, b_j) – ситуация игры, образованная применением игроками собственных стратегий a_i и b_j;

$v(a_i, b_j)$ – функция выигрыша (критерий первого игрока); напоминаем, что в матричной игре первый игрок выигрывает ровно столько, сколько ему проигрывает второй, и – наоборот (т.е. критерием второго игрока является функция $v(a_i, b_j)$ величины его проигрыша).

Предварительный анализ игры всегда проводят, исходя из предположения, что состоится только одна ее партия. В таком случае решение получают в чистых стратегиях. Технология решения матричной игры в чистых стратегиях включает следующие шаги:

• определяют гарантированный результат для каждой стратегии a_i первого игрока (или ту величину выигрыша для каждой из его стратегий, хуже которой получиться просто не может); для этого находят величину минимума по стратегиям второго игрока в каждой строке матрицы игры:

$$\min_{b_j \in B} v(a_i, b_j),$$

где запись $b_j \in B$ означает фразу «стратегия b_j из множества B»;

• определяют стратегию a^*_i, которая дает первому игроку наибольший по всем его стратегиям гарантированный результат $\max_{a_j \in A} \min_{b_j \in B} v(a_i, b_j)$, ; другими словами (формальное определение), стратегия a^*_i, которую называют максиминной, задается выражением вида

$$a^*_i : \max_{a_j \in A} \min_{b_j \in B} v(a_i, b_j) \;;$$

саму величину $\max_{a_j \in A} \min_{b_j \in B} v(a_i, b_j)$ наибольшего гарантированного результата первого игрока называют «нижней ценой игры»; будем обозначать ее через v^-;

• определяют гарантированный результат для каждой стратегий b_j второго игрока (или ту величину проигрыша для каждой его стратегии, хуже которой никак не может быть); для этого находят величину максимума (проигрыша) по стратегиям второго игрока в каждом столбце матрицы игры:

$$\max_{a_j \in A} v(a_i, b_j) \;;$$

• определяют стратегию b^*_j, которая дает второму игроку наилучший по всем его стратегиям гарантированный результат $\min_{b_j \in B} \max_{a_j \in A} v(a_i, b_j)$ (или наименьший проигрыш); другими словами (формальное определение), стратегия b^*_j, которую называют минимаксной, задается выражением вида

$$b^*_j : \min_{b_j \in B} \max_{a_j \in A} v(a_i, b_j) \;;$$

саму величину $\min_{b_j \in B} \max_{a_j \in A} v(a_i, b_j)$ наименьшего гарантированного проигрыша второго игрока называют «верхней ценой игры»; будем обозначать ее через v^+.

Основные расчеты завершены. Теперь следует проанализировать полученные результаты. Дело в том, что названия «нижняя цена игры» и «верхняя цена игры» не случайны, а имеют важный практический смысл. Суть в том, что на основании определения этих важнейших характеристик модели конфликтной ситуации с антагонистическим соперничеством можно сделать важные выводы:

1) если первый игрок будет упорно придерживаться своей максиминной стратегии a_i^*, то его выигрыш не может быть меньше, чем величина v^- нижней цены игры;

2) если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии b_j^*, то его проигрыш не может быть больше, чем величина v^+ верхней цены игры.

Из этого следует фундаментальный вывод: какой бы ни была матрица игры, всегда выполняется соотношение $v^- \leq v^+$, т.е. нижняя цена игры не выше верхней цены игры. Или по-другому: первый игрок не может выиграть больше, чем проиграет ему второй игрок, и наоборот. Найдем верхнюю и нижнюю цены игры в нашем примере и сравним их. Для отображения логики процесса отыскания нижней и верхней цены игры добавим к табл. 4.3 дополнительный столбец справа и дополнительную строку внизу. Получим табл. 10.4:

Таблица 10.4

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_4	b_5	Минимумы значений в строках
a_1	6	3	2	7	2
a_2	5	3	8	2	2
a_4	2	4	3	3	2
Максимумы значений в столбцах	6	4	8	7	

У первого игрока, как следует из полученных результатов, во всех строках минимальные значения одинаковы, поэтому максимум из этих значений совпадает с самими значениями. Следовательно, нижняя цена игры $v^- = \underset{a_j \in A}{max} \underset{b_j \in B}{min} v(a_i, b_j)$ =2. Минимальный из максимумов в столбцах равен 4. Это означает, что верхняя цена игры $v^+ = \min_{b_j \in B} \max_{a_j \in A} v(a_i, b_j) = 4$. Таким образом, в нашем примере полученные значения удовлетворяют фундаментальному неравенству $v^- \le v^+$.

А как повлияет на характер решений конфликтующих сторон то обстоятельство, что нижняя цена игры может равняться верхней цене? Иначе говоря, как поведут себя игроки, если окажется, что $v^- = v^+$? Оказывается, в подобной ситуации конфликтующим сторонам ни в коем случае не следует отклоняться от минимаксной и максиминной стратегий соответственно! В таком случае говорят, что в игре существует равновесная ситуация (ее еще называют в математике «седловой точкой») и решение $v = v^- = v^+ = v(a_i^*, b_j^*)$ в чистых стратегиях. Предположим, что матрица гипотетической игры имела бы значения функции выигрыша в ячейках, как это представлено в табл. 10.5.

Таблица 10.5

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_4	b_5
a_1	6	3	2	7
a_2	5	4	8	6
a_4	4	2	3	5

В таком случае мы получили бы значения гарантированных результатов для строк и столбцов, которые представлены в табл. 10.6.

Таблица 10.6

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_4	b_5	Минимумы значений в строках
a_1	6	3	2	7	2
a_2	5	4	8	6	4
a_4	4	2	3	5	2
Максимумы значений в столбцах	6	4	8	7	

Тогда получилось бы, что нижняя цена игры $v^- = \max_{a_j \in A} \min_{b_j \in B} v(a_i, b_j) = 4$, верхняя цена игры $v^+ = \min_{b_j \in B} \max_{a_j \in A} v(a_i, b_j) = 4$, и, таким образом, в нашей игре существовала бы седловая точка в равновесной ситуации, обозначенной пересечением строки и столбца, дающих игрокам v^- и v^+ соответственно. Пусть теперь, например, первый игрок не знает, что от этой равновесной ситуации, образованной стратегиями a_2 и b_2, не стоит отклоняться, а второй твердо придерживается равновесной стратегии b_2. Легко заметить, что если первый игрок применит одну из своих неравновесных стратегий (или a_1, или a_4), он получит результат, равный или 3 или 2, вместо результата, равного 4, в случае использования равновесной стратегии. Аналогично можно убедиться, что если второй игрок отклонится от равновесной стратегии, в то время как первый придерживается этой стратегии, второй игрок проиграет больше (5, 6 или 8). Таким образом, действительно от равновесной ситуации невыгодно отклоняться ни одному из игроков, так как она сформирована из стратегий, гарантирующих наилучший результат каждому из них.

Величина выигрыша в равновесной ситуации служит и первому, и второму игроку ориентиром для оценки предпочтительности игры в целом. Если равновесный выигрыш не устраивает первого игрока, то ему следует либо попробовать сформировать новую игру, с использованием других стратегий, либо оценить возможности введения в игру более изощренных стратегий – блефа и угроз.

Но что произойдет, если все же ситуация равновесия в чистых стратегиях отсутствует (нижняя и верхняя цены игры не равны)?

В общем случае ситуация равновесия в чистых максиминной и минимаксной стратегиях не всегда существует. Подобный исход анализа заставляет каждого из игроков более тщательно поразмыслить о путях разрешения конфликта. Здесь нужно будет как-то адаптироваться к конкуренту. Как это сделать, чтобы улучшить свой результат? Дело это тонкое – потребуется выдвигать последовательно усложняющиеся гипотезы об ответных реакциях конкурента и собственных контрмерах. Такое поведение называют рефлексивным. Оно побуждает каждого игрока рисковать и отклоняться от своей максиминной (минимаксной) стратегии с целью улучшения значения выигрыша в свою пользу. Ясно, что каждый игрок может только предполагать, как поступит второй: будет ли его конкурент придерживаться своей стратегии наилучшего гарантированного результата или отклонится от нее? В значительной степени на решения игроков по-прежнему будут влиять их личностные качества, их интуиция и чутье, а также их искусство блефовать и рефлексировать.

Один из возможных стратегических путей адаптации к противнику – это получше изучить его, побольше узнать о его личности, о его представлениях и предпочтениях. Возможно, будет установлено, что он не склонен к риску. Если это так, то почти однозначно, что он будет придерживаться своей стратегии наилучшего гарантированного результата. Это равносильно тому, что он вам сам сообщит, как он собирается поступить в конфликте. Если же он склонен к риску, то можно предположить, что ваш конкурент отклонится от стратегии наилучшего гарантированного результата и постарается извлечь для себя выгоду от дисбаланса в нижней и верхней ценах игры. В конечном итоге выиграет тот, кто более искусно маскировал свои истинные намерения и удачнее предсказал намерения своего конкурента.

Для иллюстрации рассмотренных замечаний обратимся еще раз к матрице игры, в которой отсутствует седловая точка:

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_4	b_5	Минимумы значений в строках
a_1	6	3	2	7	2
a_2	5	3	8	2	2
a_4	2	4	3	3	2
Максимумы значений в столбцах	6	4	8	7	

Итак, в этой игре нет ситуации равновесия в чистых стратегиях, поскольку $v^{-} = 2$ меньше, чем $v^{+} = 4$.

Предположим, что первый игрок узнал, что второй игрок не намерен рисковать. Это означает, что второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии b_2. «Очень хорошо, – думает первый игрок, – в таком случае я могу максимизировать свой выигрыш до предельных возможностей и получить результат 4, совпадающий с $v^{+} = 4$». Для этого первому игроку нужно только решиться применить стратегию a_4. Тем более что гарантированный результат первого игрока для этой стратегии все тот же, равный 2. Все бы ничего, если бы информация о «трусливости» второго игрока была бы абсолютно надежной. Но если эта информация распространена самим вторым игроком, чтобы побудить первого игрока применить «более выгодную для него» стратегию a_4?

В таком случае следует ожидать, что второй игрок немедленно среагирует на возможные последствия реакции первого игрока на подброшенную приманку: второй игрок вместо ожидаемой минимаксной стратегии b_2 применит ничем не выделяющуюся среди других стратегию b_1. В итоге такого блефа и рефлексии со стороны второго игрока первый игрок немедленно окажется в ситуации (a_4, b_1) и получит вместо результата, равного 4, всего лишь 2 единицы полезности. А что если окажется, что первый игрок прибег к рефлексии более высокого порядка? Что если он только сделал вид, что поверил информации о том, что второй игрок очень труслив, и будет придерживаться своей минимаксной стратегии? Тогда уже второй игрок попадется на удочку первого: первый игрок вместо ожидаемой вторым игроком стратегии a_4 неожиданно применит стратегию a_1, которая максимизирует выигрыш первого в предположении, что второй игрок применит стратегию b_1. Второй игрок проиграет уже 6 единиц полезности вместо тех 4 единиц, которые гарантировала ему минимаксная стратегия b_2. В конечном итоге выиграет тот, кто более искусно маскировал свои истинные намерения и удачнее предсказал намерения своего противника.

Что ж, и на этот случай есть рекомендация. Нужно не дать противнику возможности предсказать свое поведение. Но для этого игра должна быть не однократной, а повторяться несколько раз. Если возможно и при этом если величина максиминного выигрыша не устраивает первого игрока, он может «приблизиться» к верхней цене игры, применив смешанную стратегию. Технология решения матричной игры в смешанных стратегиях подробно изложена, например, в [12, 13 и др.].

Итак, мы рассмотрели математические методы прогнозирования и оценки рисков на основе принципа «опоры на собственные силы». Здесь нам неинтересно было знать, что думает противник о величине нашего выигрыша (и его проигрыша), мы действовали сами по себе, ориентируясь только на свои предпочтения и оценки. На самом же деле, очень редко когда удается предпочтения разных лиц оценить одним и тем же критерием. Даже деньги, как мы помним, не могут считаться абсолютным мерилом полезности, поскольку их воспринимаемая полезность зависит от многих объективных и субъективных факторов, в том числе и от количества уже имеющихся у ЛПР денег. В результате оценки и рекомендации, которые получены методами анализа матричных игр, следует воспринимать лишь как начальную информацию для того, чтобы окончательно определиться в стратегии разрешения конфликтной ситуации. Для принятия более обоснованных решений на выгодное разрешение конфликтной ситуации рекомендуется провести еще один этап исследования: применить аппарат деловых игр, а также математические модели нестрогого соперничества – неантагонистические игры.

10.2. Модели оценки рисков на основе принципов альтернативной индивидуальной полезности, кооперирования и «справедливого дележа»

Математические модели строгого конфликта с опорой на собственные силы – это достаточно грубый инструмент анализа, чтобы им можно было напрямую пользоваться на практике. Учитывая объективную прагматическую слабость антагонистических игр, используют модели для оценки рисков на основе принципов не только индивидуальной, но и альтернативной полезности, кооперирования и «справедливого дележа». При этом большое распространение получили специфические формы моделирования при исследовании конфликтных ситуаций – деловые игры (ДИ).

Мало кому известно, что родились ДИ в нашей стране. Еще в 1930 г. в Ленинградском инженерно-экономическом институте была организована так называемая группа пуска новостроек. В результате ее исследований было установлено, что одной из важнейших причин неудач и задержек в запусках крупных заводов являлась нехватка опыта у руководящих кадров. Первая деловая игра была проведена в июне 1932 г.

За несколько следующих лет было разработано около 40 широкомасштабных ДИ (для тренировки диспетчеров; по отработке аварийных ситуаций в энергетике и других отраслях промышленности; по перестройке производства и т.п.). К сожалению, в конце 1930-х годов ДИ в нашей стране были преданы запрету и забвению вслед за такими науками, как кибернетика и генетика. В середине 50-х годов XX в. за развитие ДИ взялась Американская ассоциация менеджмента. В итоге к 1980 г. в США насчитывалось около 1000 деловых игр. Вообще-то ДИ – это моделирование по определенным правилам реальных ситуаций с целью отработки навыков принятия решений. Основной элемент игры – моделирование ситуации, близкой к реальной. Имитация отдельных этапов реального процесса позволяет провести эксперимент не в реальных условиях, а на вербальных (описательных) и математической модели этого процесса. Это особенно важно при изучении сложных экономических и общественных процессов.

Первоначально деловая игра предполагала участие в ней опытного эксперта, способного задать исходные условия для имитационной модели и затем оценить результаты действий участников, но людей, обладающих экспертными знаниями, понятно, немного, что существенно тормозило распространение деловых игр на начальном этапе массового обучения. Важно иметь в виду, что с самого своего зарождения ДИ предполагали коллективную форму, т.е. взаимодействие нескольких игроков, принимающих решения. Появление ЭВМ и дисплейных классов позволило перенести коллективный вариант игры в вычислительную среду, моделирующую внешние условия, и роль эксперта (анализ и оценка действий участников) частично перешла к ЭВМ (подведение итогов и комментарий окончательных результатов по-прежнему осуществляет руководитель игры).

С появлением вычислительной техники ситуация постепенно изменялась, изменилось и распределение ролей между человеком и машиной. Роль эксперта доверили компьютеру. Первая компьютерная ДИ была создана в США в 1956 г., она моделировала деятельность фирм-производителей и их конкуренцию на рынке готовой продукции.

Теперь за 2–3 часа можно пройти гораздо больше циклов игры, чем прежде, например «прожить» несколько лет в роли директора предприятия. Компьютерные ДИ позволяют обходиться без партнеров и даже без преподавателя, выполняя роль неких тренажеров, которые можно использовать для самосовершенствования. В итоге ДИ оказались весьма эффективными по результатам обучения персонала. Исследования еще 60-х годов показали, что при сравнении ДИ с соответствующей ей по содержанию лабораторной работой в традиционной форме уровни усвоения знаний существенно различаются. Так, в игровой группе он составил 79,3%, а в группе, непосредственно выполнявшей лабораторную работу, – 54%; через две недели – 64,9% и 11,8% соответственно, через четыре недели – 49% и 8,5%, через шесть недель и далее – 32% и 5%.

Все указанные особенности ДИ предпринимателю следует обязательно знать, а при необходимости применять на практике, особенно если нет возможности (знаний, умений, навыков, денег, времени и пр.) для математического моделирования. Предприниматель в сравнительно короткие сроки и при минимальных затратах может получить важные практические рекомендации для решения возникшего двух-или многостороннего конфликта. Для этого порой бывает достаточно всего лишь 3–4 человек и отдельного помещения. Главным методическим приемом в такой мини-ДИ является назначение одного из лучших своих сотрудников «адвокатом дьявола». Разыграйте с этими людьми простую сценку: вы предпринимаете какие-то действия, которые, как вам кажется, не раз опробованы вами лично, или об их эффективности вам известно от доверенных лиц, или они являются вашим экспромтом.

Поручите человеку, назначенному «адвокатом дьявола», быть вашим оппонентом. Пусть это для него вы делаете деловые предложения и должны убедить вашего «противника» в правильности предлагаемого вами пути разрешения возникшего конфликта. И пусть этот человек внимательно анализирует ваши предложения и действия. Пусть он импровизирует с одной-единственной целью – находить слабые места, жестоко критиковать и разрушать все, что бы вы ни предложили. Но не голословно, а аргументированно. Тогда вы получите хорошую модель будущего. Здесь вы увидите много нового для анализа как самого конфликта, так и вашей позиции на переговорах. Будьте изобретательны, постоянно ищите, как повернуть ситуацию в конструктивное русло, как вывернуться из-под огня критики оппонента. И пусть в ходе этой мыслительной дуэли еще один человек (а лучше – два) фиксирует все происходящее на видеокамеру. В крайнем случае – на магнитофон, в самом худшем – «на карандаш». Проведите «блицтурнир» с назначенным вами «адвокатом». Отдохните. Соберите всех, кто будет участвовать в будущей акции по разрешению конфликта. Продемонстрируйте им все полученные документальные материалы по ДИ. Можете не сомневаться – не только они, но и вы сами увидите для себя много нового. Обсудите увиденное. Подумайте вместе над будущим.

И все же, если есть хоть какая-то возможность, изучите математические методы анализа. Для этого не надо сверхмощных способностей. Аппарат игр с нестрогим соперничеством покажется вам достаточно простым, если вы уже уверенно оперируете понятием гарантированного результата и усвоили аппарат матричных игр. Нужно только дополнить эти знания пониманием основных формальных допущений в математических моделях нестрогого конфликта. Эти допущения сводятся к следующему:

- каждый игрок имеет свою функцию выигрышей, $v_1(a_i, b_j)$ и $v_2(a_i, b_j)$, причем для большинства ситуаций игры оказывается, что $v_1(a_i, b_j) \neq - v_2(a_i, b_j)$; другими словами, один из игроков не всегда выигрывает ровно столько, сколько ему проигрывает другой;
- имеется хотя бы одна ситуация (кроме ситуации равновесия в максиминных стратегиях игроков), для которой интересы игроков совпадают или весьма близки;
- каждый из игроков намерен использовать все свои стратегические возможности, к которым он не прибегал в антагонистической игре.

Теперь рассмотрим математические модели нестрогого конфликта, базирующиеся на принципах индивидуальной и альтернативной полезности. Наиболее простой из возможных игр, удовлетворяющих перечисленным допущениям, является так называемая биматричная игра. Эта игра формируется из двух отдельных матриц – отсюда и название «биматричная», которыми руководствуются каждый из игроков. Принято результаты заносить в одну матрицу, но в каждой ячейке записывать значения двух самостоятельных функций выигрыша: первая цифра – выигрыш первого игрока, вторая – второго. Генеральная задача каждого из игроков – максимизировать собственную функцию выигрыша.

Например, на рынке два торговца представляют каждый свой товар. Товары могут различаться по номенклатуре, по качеству, по цене. Каждый торговец заинтересован в максимизации собственной прибыли. При этом представленные торговцами товары могут быть коррелированы по величинам прибыли торговцев из-за активной роли таких факторов конъюнктуры рынка, как количество товаров, их потребительские свойства, время появления на рынке и пр. Коррелированность здесь может проявляться также и в том, что один товар может дополнять другой, усиливая его потребительские качества, или выступать угнетающим фактором для другого товара, мешая его продаже. Все эти обстоятельства приводят к тому, что разные ситуации биматричной игры по-разному предпочтительны для каждого из игроков.

Задача анализа биматричных игр сводится к тому, чтобы за каждого из игроков оценить величины гарантированных результатов, установить наличие или отсутствие ситуации равновесия, представить доводы в пользу той или иной из имеющихся стратегий поведения игроков. Здесь, как и в случае матричных игр, вначале проводят анализ, исходя из предположения об однократной партии игры, и выявляют ситуации равновесия в чистых стратегиях (если таковые есть). После чего, если есть к тому предпосылки, игру анализируют как многократно повторяющуюся и оценивают результаты в смешанных стратегиях.

Итак, пусть заданы множества A, B стратегий первого и второго игроков соответственно и их собственные функции $v_1(a_i, b_j)$, $v_2(a_i, b_j)$ выигрыша, заданные на множестве $\{(a_i, b_j)\}$ ситуаций игры. В общем случае полагают, что функции $v_1(a_i, b_j)$, $v_2(a_i, b_j)$ неотрицательны. Обозначим через a_i^* и b_j^* максиминную и минимаксную чистые стратегии, а через a_i^{o} и b_j^{o} – равновесные чистые стратегии. Тогда для биматричной игры формулируют условие равновесия (по Дж. Нэшу) в чистых стратегиях:

$$v_1\,(a_i^{\text{o}}, b_j^{\text{o}}) \geq v_1\,(a_i^{\text{o}}, b_j^{\text{o}}),$$
$$v_2\,(a_i^{\text{o}}, b_j^{\text{o}}) \geq.\ v_2\,(a_i^{\text{o}}, b_j^{\text{o}}).$$

На неформальном языке эти соотношения означают, что если оба игрока придерживаются равновесной ситуации $(a_i^{\text{o}}, b_j^{\text{o}})$, то они не могут получить меньше, чем получил бы каждый из них, если бы отклонялся от ситуации равновесия, в то время как ее придерживается другой.

Принципиальное отличие условия равновесия по Нэшу для биматричной игры по сравнению с ситуацией равновесия в матричной игре состоит в следующем. Во-первых, равновесный выигрыш в биматричной игре для каждого из игроков не меньше по величине, чем выигрыш в максиминной ситуации равновесия, т.е. в общем случае выполняются неравенства:

$$v_1\,(a_i^{o}, b_j^{o}) \geq v_1\,(a_i^{*}, b_j^{*}),$$
$$v_2\,(a_i^{o}, b_j^{o}) \geq .\ v_2\,(a_i^{*}, b_j^{*}).$$

Во-вторых, в биматричной игре отклонение какого-либо игрока от ситуации равновесия может по-разному повлиять на выигрыш как самого этого, так и другого игрока. В антагонистических играх, как мы знаем, уклонение любого из игроков от ситуации равновесия, в то время как другой продолжает придерживаться своей максиминной (или минимаксной) стратегии, приводит к ухудшению положения «уклониста» и одновременно к улучшению ситуации для рационально поступающего игрока. А в неантагонистической игре такое же отклонение может по-разному повлиять на выигрыш другого игрока. Например, может даже оказаться, что если оба игрока отклонятся от равновесной ситуации, то выигрыш каждого из них может увеличиться. Но может остаться прежним или уменьшиться.

Из этих двух отмеченных особенностей вытекает важный вывод для практического использования аппарата биматричных игр: если при анализе биматричной игры будет установлено, что равновесные выигрыши игроков существенно превосходят максиминные, то в таком случае им стоит подумать о перспективах применения равновесных стратегий биматричной игры. Однако необходимо помнить, что решение следовать равновесной по Нэшу стратегии сродни желанию «жить по закону»: принудить к этому нельзя, и, кроме того, в условиях, когда «все живут по закону», у кого-то обязательно возникает искушение нарушить закон, поскольку ему лично это значительно выгоднее (хотя все остальные от этого могут сильно страдать). Продемонстрируем все отмеченные особенности и выводы классическими примерами [37].

«Семейный спор». Игра была разработана с целью продемонстрировать факт присутствия в поведении индивидов достаточно противоречивых устремлений. С одной стороны, каждый стремится к повышению собственной выгоды (принцип индивидуальной рациональности), с другой – каждый из этих индивидов может испытывать значительное удовлетворение от того, что он может сделать приятное другому (принцип групповой рациональности). Фабула модели: муж любит хоккей, а жена – балет. Близится выходной день. Каждый из супругов стремится провести его как можно приятнее для себя. Но если муж согласится пойти на балет, то жена получит максимум удовольствия, а муж будет удовлетворен только тем, что будет вместе с женой. Если же на хоккей согласится жена, то именно она будет удовлетворена только тем, что не провела выходной одна. Если же каждый из них будет настаивать на собственном способе проведения отдыха, будет отдыхать «своим путем» – жена на балет, а муж – на хоккей, – оба не получат удовольствия. Матрица игры имеет следующий вид:

(0; 0)	(10; 3)
(3; 10)	(0; 0)

Данная модель хорошо описывает также проблемы столкновения интересов при совместном решении вопросов об установлении квот на рынке сбыта. Предположим, два конкурента (далее условно именуемые «сторона *A*» и «сторона *B*») прибыли на переговоры об установлении квот на рынке сбыта определенного товара, например нефти и нефтепродуктов. Каждая из сторон прибывает со своими пакетами предложений. Для простоты предположим, что у каждой из сторон две альтернативы: настаивать на принятии своих предложений (альтернативы a_1и b_1) или принять предложения конкурента (альтернативы a_2 и b_2).

Оценим выгодность всех возможных ситуаций в порядковой шкале, считая, что если стороны не придут к соглашению, то сохраняется *status quo* и полезность переговоров равна нулю. Другие градации шкалы таковы: если принимается предложение стороны *A* в ущерб стороне *B*, то выигрыш стороны *A* более чем в три раза превышает выигрыш стороны *B*; аналогично оцениваются выигрыши, если принимается предложение стороны *B* в ущерб стороне *A*. Для полноты анализа будем считать, что ситуация, когда обе стороны соглашаются на план конкурента, также имеет нулевую ценность для обеих сторон (как невероятный случай).

В результате биматрица игры примет следующий вид:

		Стратегии стороны *B*	
		b_1	b_2
Стратегии стороны *A*	a_1	(0; 0)	(10; 3)
	a_2	(3; 10)	(0; 0)

Вначале найдем максиминные стратегии для каждого из игроков. Обе стратегии первого игрока являются максиминными, так как они обеспечивают ему одинаковый наибольший гарантированный результат (равный нулю). Оказывается, что обе стратегии второго игрока также являются максиминными и также дают этому игроку гарантированный результат, равный нулю.

Найдем теперь равновесные по Нэшу ситуации, пользуясь определением. Проще всего это сделать путем фиксирования, так сказать, претендентов на звание равновесных стратегий. Покажем, как это делается при отыскании равновесных стратегий для первого игрока. Зафиксируем первую стратегию b_1 второго игрока, считая, что именно она претендует на роль «равновесной». При таком предположении наибольший результат для первого игрока дает использование его стратегии a_2, поскольку выполняется неравенство $v_1(a_2, b_1) = 3 > v_1(a_1, b_1) = 0$. Теперь проведем сравнение стратегий первого игрока, зафиксировав в качестве претендента на роль «равновесной» вторую стратегию b_2 второго игрока. Получается, что первому игроку при такой гипотезе выгоднее применить свою первую стратегию a_1, поскольку выполняется неравенство $v_1(a_1, b_2) = 10 > v_1(a_2, b_2) = 0$.

Аналогично проведем оценку предпочтительности стратегий второго игрока, предполагая поочередно, что претендентами на роль «равновесной» являются стратегии a_1 и a_2 первого игрока. В результате проверки указанных гипотез получаем: $v_2(a_1, b_2) = 3 > v_2(a_1, b_1) = 0$ и $v_2(a_2, b_1) = 10 > v_2(a_2, b_2) = 0$. Это означает, что если на роль «равновесной» претендует стратегия a_1, то второму игроку предпочтительнее использовать стратегию b_2, а если фиксировать a_2, то выгоднее будет стратегия b_1. Удобно предпочтения сторон в парной биматричной игре отражать стрелками, направленными от более предпочтительной ситуации к менее предпочтительной. Результат применения подобного «метода стрелок» представлен на рис. 10.1, где предпочтения на парах стратегий игроков, выраженные при условии фиксации у конкурента претендентов на роль «равновесных», отображены в виде стрелок, направленных от более предпочтительной стратегии к менее предпочтительной.

		b_1		b_2
a_1		(0; 0)		(10; 3)
a_2		(3; 10)		(0; 0)

Рис. 10.1. Результат применения этого «метода стрелок»

Геометрически стрелки, отображающие предпочтения, сходятся на ситуациях (a_1; b_1) и (a_2; b_2). Такое согласие в предпочтениях конкурирующих сторон означает, что в этой игре две равновесные стратегии: (a_1; b_1) и (a_2; b_2). Эти две равновесные ситуации улучшают положение каждой из сторон по сравнению с ситуациями, дающими им каждой нулевой результат. Но эти равновесные ситуации принципиально различаются по предпочтительности для сторон: одна из сторон согласно условиям получает более чем втрое по сравнению с другой. Согласятся ли стороны с таким «равновесием»?

«Дилемма заключенного». Эту игру в своеобразной интерпретации разработал американский ученый из Принстонского университета А. Таккер (A.W. Tucker), чем и объясняется несколько экстравагантное название модели. На самом деле ее разработка была связана с поиском решения проблемы стратегической стабильности. Стороны A и B решают договориться о масштабах сокращения вооруженных сил. У каждой из сторон две стратегии: или поддерживать вооружения на прежнем уровне, или произвести существенное сокращение вооружений. В то же время эта игра хорошо демонстрирует психологию лиц, готовых поддержать любые предложения по «всеобщему и повсеместному исполнению законов», но только не ими самими.

Фабула игры. Окружной прокурор приказал взять под стражу двух подозреваемых в совершении дерзкого ограбления. Они помещены в разные камеры и не могут переговариваться. У каждого из заключенных две возможности: признаться в том, что участвовал в ограблении, или запираться до конца. Если оба будут запираться, то через трое суток их вынуждены будут отпустить. Если оба признаются, то они получат минимальное наказание.

Рассмотрим матрицу игры со следующими оценками предпочтительности для каждого из заключенных под стражу:

		Стратегии стороны B	
		b_1	b_2
Стратегии стороны A	a_1	(5; 5)	(0;10)
	a_2	(10;0)	(1; 1)

Применяя «метод стрелок», получаем, что равновесной является ситуация (a_2, b_2) – оба заключенных признаются в совершении преступления, – в которой их выигрыши равны по единице у каждого. Но совершенно очевидно, что ситуация (a_1, b_1) – не признаваться – для них выгоднее. Другими словами, эта ситуация доминирует равновесную ситуацию, и лучше обоим запираться, чем обоим признаваться. Однако есть одно «но»: у каждого из подозреваемых в ситуации (a_1, b_1) существует мощный стимул признаться «в одиночку», пока его подельник запирается, и тем самым существенно выиграть по сравнению с неустойчивой ситуацией (a_1, b_1). Так запираться или признаваться? Вот в чем вопрос…

Рассмотренные примеры являются иллюстративными в смысле условности значений выигрышей сторон. Эти выигрыши назначались нами в соответствии с простым предпочтением одного исхода над другим без детализации, на сколько или во сколько раз сильнее то или иное предпочтение. Для таких игр «с предпочтениями» бессмысленно говорить о применении смешанных стратегий. Если же биматричная игра описывается в шкале полезностей, не менее совершенной, чем интервальная, то рассмотрение смешанных стратегий оправданно, если это допустимо их интерпретацией в рамках данного конфликта.

Но что делать, если выигрыши, получаемые конфликтующими сторонами в равновесной по Нэшу ситуации, их не устраивают? В таком случае им ничего не остается, как начать обмениваться информацией, блефовать, угрожать и договариваться друг с другом о совместном разрешении конфликта. Математической моделью конфликта при таких устремлениях сторон становится кооперативная и коалиционная игра. Такая игра ведется по следующим правилам:

- разрешено заключать совместные соглашения;
- допускается совместный выбор стратегий (в общем случае – смешанных);

- допускается передавать полезность от одного игрока к другому (хотя, возможно, и не всегда линейно).

Каждый из приведенных пунктов правил ведения кооперативных игр в целом означает следование принципу групповой рациональности. Однако последний пункт, хотя и предполагает, что игроки могут «покупать и продавать» друг другу имеющуюся в их распоряжении полезность, чтобы улучшить собственное положение в игре, не накладывает каких-либо ограничений на то, как это должно делаться. А ведь принцип индивидуальной рациональности будет заставлять каждого, образно говоря, «тянуть одеяло на себя», а значит – индивидуальная рациональность может войти в противоречие с групповой. Другими словами, если кооперирование допускается, то сразу возникает вопрос: «Что такое справедливый дележ?»

Нэш предложил компромиссную схему распределения имеющейся в распоряжении игроков максимальной полезности, которая может быть принята за модель «справедливого дележа». Суть этой схемы в следующем. Вначале устанавливают «начало отсчета». За него принимают тот минимальный результат, которого игрок может достичь и самостоятельно, поэтому он не согласится ни на какие меньшие дележи. Понятно, что этот минимальный результат определяется собственными стратегическими возможностями каждого игрока и равен наибольшему гарантированному результату. Затем нужно вычислить приращения $\Delta v_1(v_1, v_2)$ и $\Delta v_2(v_1, v_2)$ полезностей игроков от согласованного ими дележа v_1, v_2. Эти приращения составляют величины:

$\Delta v_1(v_1, v_2) = v_1 - v_1^*$ и $\Delta v_2(v_1, v_2) = v_2 - v_2^*$,

где v_1^* и v_2^* – максиминные выигрыши первого и второго игроков соответственно.

После этого формируется целевая функция $\varphi(v_1,v_2)= \Delta v_1(v_1,v_2)\cdot\Delta v_2(v_1,v_2)$, и на множестве $\{v_1 ,v_2\}$ допустимых дележей отыскивается максимум этой функции. В результате компромиссное решение $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ отыскивается в ходе решения задачи:

$$\tilde{v}_1 , \tilde{v}_2 : \max_{\{v_1, v_2\}} \varphi(v_1, v_2).$$

Поиск экстремума в этой задаче отражает стремление к наилучшему компромиссному дележу полезности между игроками. При этом большую часть общей полезности при дележе получит тот игрок, у которого минимаксный результат (то самое «начало отсчета») или *status quo* представляет более предпочтительную величину. Это примерно соответствует некой гипотетической ситуации дележа определенной суммы денег между богатым и бедным, однако саму эту сумму они получат только при условии, что смогут договориться, как ее разделить. В такой ситуации, чтобы получить хоть что-то, более бедный скорее всего вынужден будет пойти на некоторые уступки при дележе, а богатый, у которого финансовое положение более прочное, может позволить себе дольше торговаться и настаивать на большей доле для себя. Рассмотрим количественный пример согласно приведенному вербальному описанию.

Двум людям предлагают \$100, если они смогут решить, как поделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего в \$100. Предполагается также, что функция полезности денег логарифмическая, т.е. полезность любой суммы денег пропорциональна ее логарифму. Как должны быть разделены эти деньги, чтобы люди на него согласились? Обозначим через **x** сумму денег, которую получит первый игрок. По условиям игры – это очень богатый человек, поэтому для него не будет большой ошибкой считать, что его функция полезности на интервале возможных значений выигрыша приблизительно пропорциональна полученной сумме, т.е. $log\ x \approx x$. Кроме того, для величины **x** выполняется очевидное условие: $x \leq 100$, т.е. первый из участников дележа не может получить больше, чем предложено двум для дележа. Так как второй участник дележа имеет вначале только \$100, то приращение $\Delta v_1(v_1, v_2)$ полезности, которое он получает от своей части дележа в (\$100-x), равно

$$log(100 + (100 - x)) - log\,100 = log\frac{200 - x}{100}.$$

Максиминные выигрыши $v_1(a_i^*, b_j^*)$ и $v_2(a_i^*, b_j^*)$ обоих игроков, конечно же, равны нулю, поскольку согласно условию они смогут получить в свое распоряжение \$100, если только договорятся о том, как их поделить. Составим выражение для целевой функции:

$$\varphi(v_1,v_2)= \Delta v_1(v_1,v_2)\cdot\Delta v_2(v_1,v_2)=x\cdot\ log\frac{200 - x}{100}.$$

Эта функция одной переменной **x**. Отыскиваем оптимальное значение $x^{оптим}$, которое максимизирует функцию $\varphi(v_1,v_2)$. В таком случае доли для дележа между участниками сделки составят: $\tilde{v}_1 = x^{оптим}$ и $\tilde{v}_2 = 100 - x^{оптим}$. Для отыскания максимума целевой функции $\varphi(v_1,v_2)$ можно применить необходимое условие существования экстремума, согласно которому в точке $x^{оптим}$ экстремума производная от функции $\varphi(v_1,v_2)$ по переменной **x** должна быть равна нулю.

После дифференцирования и приравнивания нулю производной мы получаем уравнение $\frac{x}{200-x} = log\frac{200-x}{100}$. Решая его, получаем приближенно $x^{оптим} = 54{,}4$. Следовательно, богатый участник сделки может претендовать на $\tilde{v}_1$ = \$54,4, а бедный, у которого только и есть что его \$100, должен согласиться на сумму $\tilde{v}_2$ = \$100-\$54,4=\$45,6. Иначе, согласно условиям, сделка не состоится.

В некотором смысле полученное решение кажется странным. Из него следует, что богатый участник сделки должен получить больше, чем бедный, о котором можно утверждать, что он больше нуждается в деньгах. Однако такое утверждение предполагает сравнение полезностей разных лиц. А для них логарифмическая фикция полезности используется на разных участках определения аргумента: для богатого – в области насыщения, для бедного – на участке интенсивного роста. Иными словами, полученное согласно схеме Нэша решение учитывает, что фактическая полезность денег у второго участника сделки убывает быстро, а у первого – медленно. В результате получается, что второй участник дележа стремится получить хоть что-то и при сделке может уступить богатому первому участнику.

Против решения Нэша задачи о сделках можно выдвинуть серьезное возражение, состоящее в том, что оно не принимает в расчет угрозы. И если кто-то из игроков все же не удовлетворен компромиссным решением, достигнутым в ходе решения указанной оптимизационной задачи, он может оценить свои стратегические возможности по применению стратегий угроз.

Что понимать под стратегией угрозы? Во-первых, это некая реальная или провозглашенная в качестве возможной для применения в конфликте стратегия поведения того или иного игрока. Во-вторых, эта стратегия должна быть эффективна в отношении достижения цели дележа, а именно: объявление одним из игроков о намерении использовать стратегию угрозы должно склонить другого игрока к мысли, что ему выгоднее пойти на уступки при дележе, чем попасть в ситуацию, когда будет применена стратегия угрозы. При демонстрации угрозы пускаются в ход все уловки: «дымовые завесы», намеки, «пробные шары», а порой и заявления на пресс-конференциях – вся известная техника дипломатии бросается на запугивание и выяснение намерений друг друга. Взаимоотношения сторон делаются многомерными и, в общем случае, многополюсными. Но в своих основных моментах они, как всегда, базируются на простой, почти физической «силе».

Таким образом, эффективность стратегии угрозы определяется не только результатом предполагаемого истинного воздействия по каким-то физическим объектам. Такое воздействие может привести к изменению состояния объектов, связей между ними, формы или качества входящих в них элементов. Кроме того, эффективность стратегии угрозы в значительной мере оценивается психологическим воздействием на субъекта, которому угрожают. И это психологическое воздействие приводит к тому, что у субъекта изменяются мнения относительно ценности тех или ситуаций конфликта, изменяются суждения о пропорциях дележа полезности и т.п. В-третьих, поведение угрожающего игрока и само провозглашение стратегии угрозы должны быть таковыми, чтобы у того, кому угрожают, не оставалось сомнений в том, что угроза может быть приведена в исполнение. Таким образом, стратегия угрозы эффективна только в том случае, если она правдоподобна, если она может улучшить положение угрожающего по отношению к тому, кому угрожают, и если она использована обдуманно. Последнее означает, что если угроза объявлена, то угрожающий обязательно ее применит, когда потребуется.

Найти компромиссное решение в случае применения игроками стратегий угроз можно путем решения оптимизационной задачи, аналогичной той, которую мы только что рассмотрели. Только при формировании целевой функции вместо величин v_1* и v_2* нужно использовать значения $v_1^{\text{угр}}$ и $v_2^{\text{угр}}$, представляющие величины полезностей игроков в ситуации, которая сложится после применения игроками своих стратегий угроз. Рассмотрим пример. Пусть биматричная игра моделируется матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} (1,4) & (-2,-4) \\ (-3,-1) & (4,1) \end{Vmatrix}.$$

Достаточно просто убедиться, что для этой игры имеются две ситуации равновесия по Нэшу, выигрыши в которых превосходят максиминный уровень. Эти ситуации принципиально отличаются по предпочтительности для каждой из сторон: ситуация (a_1,b_1) более предпочтительна второму игроку, а ситуация (a_2,b_2) – первому. Наибольший гарантированный результат v_1* игры для первого игрока равен –2 и обеспечивается этому игроку применением его первой стратегии. Для второго игрока его наибольший гарантированный результат v_2* равен –1 и достигается применением также его первой стратегии. Скорее всего, такие значения выигрышей игроков устроить не могут, поскольку в данной игре они оперируют максимальной полезностью $v_{max} = 5$ (суммы выигрышей в ситуациях (a_1,b_1) и (a_2,b_2) игры).

Если игра будет вестись как некооперативная и бескоалиционная, то согласно принципу индивидуальной рациональности игроки применят свои максиминные стратегии и получат реальные (а не гарантированные) результаты, соответствующие ситуации (a_1,b_1). Это, конечно, устроило бы второго игрока (его выигрыш стал бы равным 4), но никак не первого. В такой ситуации первый игрок хотел бы применить стратегию угроз, чтобы добиться для себя некоторых уступок от второго. Какие у него в таком случае стратегические возможности? Попытаемся качественно проанализировать конфликтную ситуацию. Во-первых, менее предпочтительными для игроков являются ситуации (a_1,b_2) и (a_2,b_1), более предпочтительны ситуации (a_1,b_1) и (a_2,b_2). Очевидно, что все недоминируемые дележи, среди которых следует вести поиск компромисса, представляют собой математический отрезок, соединяющий точки со значениями выигрышей для ситуаций (a_1,b_1) и (a_2,b_2). В то же время, как мы уже отмечали, ситуация (a_1,b_1) более предпочтительна для второго игрока, а ситуация (a_2,b_2) – для первого.

Предположим, что первый игрок попробует угрожать применить свою вторую стратегию a_2, если второй не согласится на компромиссное решение, которое будет более выгодно для него. Но будет ли такая угроза первого игрока эффективной? Оказывается, нет. Очевидно, что второй игрок может легко парировать эту угрозу, ответив контругрозой применить свою первую стратегию. Вроде бы второй игрок блефует, поскольку он рискует при этом оказаться в ситуации (a_2,b_1), которая принесет ему явный проигрыш, равный –1. Однако такой исход сильнее наказывает первого игрока, поскольку его проигрыш в таком случае составит уже –3. Следовательно, позиция первого игрока в рассматриваемой игре весьма сложная. А вот у второго игрока есть весьма эффективная угроза – применить свою первую стратегию.

Против такой угрозы первый игрок ничего не может предпринять, существенно не ухудшив свое положение в игре. Поэтому первому игроку следует пойти на значительные уступки при дележе общей полезности. Определим компромиссный дележ общей полезности игроков, приняв ситуацию (a_2,b_1) за ситуацию угрозы со значениями полезностей для игроков $v_1^{угр} = -3$ и $v_2^{угр} = -1$. С учетом того, что максимальная полезность $v_{max}=v_1+v_2$ на эффективной границе равна 5, можно положить $v_2 = 5 - v_1$. В таком случае функция $\varphi(v_1,v_2) = \Delta v_1(v_1,v_2)\ \Delta v_2(v_1,v_2)$ примет вид: $\varphi(v_1,v_2) = [v_1 -(-3)]\ [(5 - v_1) - (-1)] = -v_1^2 + 3\ v_1 + 18$. Максимум в этой задаче безусловной оптимизации можно также искать, применив сначала необходимое, а затем достаточное условие существования экстремума. После несложных преобразований находим, что это условие выполняется для стационарной точки $v_1=3{,}5$. Достаточное условие для задачи на максимум состоит в отрицательности второй производной от функции по ее аргументу в стационарной точке. Это условие также выполняется.

Следовательно, решением рассматриваемой задачи, задающим компромиссное решение Нэша в биматричной игре с угрозами, будут значения $\tilde{v}_1 = 3{,}5$; $\tilde{v}_2 = 1{,}5$. Но если компромиссное решение, полученное в рамках модели «линейного распределения полезности», не устраивает конфликтующие стороны, им остается попробовать достичь соглашения путем переговоров в ходе деловой беседы.

Деловые беседы мы рассмотрим в следующем разделе, а пока обсудим еще один вопрос, касающийся анализа многосторонних конфликтов, т.е. конфликтов с несколькими участниками. Очень часто нескольким предпринимателям приходится решать вопросы выбора стратегии собственных действий в условиях, когда ни один из них не обладает преимуществами перед другими, не может диктовать им свою волю, но обязан учитывать их позицию, поскольку от этого зависит успех его личного бизнеса. Другая типичная конфликтная ситуация с участием нескольких лиц – служебный конфликт. Он прежде всего является следствием низкой культуры руководства персоналом, результатом пренебрежения психологическими аспектами управления.

Руководитель не должен допустить возникновения конфликта, а если он возник – не допустить его разрастания. Ни в коем случае нельзя доводить дело до всеобщей истерики и срыва. Руководитель обязан своевременно выявлять причины конфликтной ситуации и устранить ее рациональными (административными, психологическими методами) или общественными воздействиями. Но это не все. Очень часто служебный конфликт представляет собой болезнь роста, почти всегда возникающую вследствие недостаточного развития коллектива, неблагоприятного психологического климата в подразделении.

Служебные конфликты сильно вредят делу. Они не только ухудшают взаимоотношения, портят настроение, но и приводят к значительным (до 15%) потерям рабочего времени. Это время затрачивается не только на сам конфликт, но также и на следующие за ним переживания. Психологические травмы долго не заживают.

Адекватными моделями для оценки стратегий снижения риска конфликта в коллективе, а также устранения предпринимательских конфликтов с несколькими участниками могут служить так называемые игры *N*-лиц и модели группового выбора. Можно, конечно, анализировать конфликты и с позиции «опоры на собственные силы», т.е. в максиминных стратегиях, но результат подобного анализа обычно становится ясен еще до начала исследования: максиминные выигрыши столь мизерны, что обычно никого устроить не могут. В многосторонних конфликтах значительно большую выгоду приносят договоренности и образование коалиций. Ввиду этой особенности путей разрешения многосторонних конфликтов их адекватными математическими моделями оказываются биматричные игры, а также кооперативные и коалиционные модели. Иными словами, весьма конструктивным в математическом моделировании многостороннего конфликта оказывается подход, основанный на имитации главных механизмов переговоров. Результат моделирования формируется в виде оценки перспективности коалиций, которые могут сформировать внутри всей группы участники возникшего конфликта. Вот почему модели коалиционных решений на основе принципов кооперирования и «справедливого дележа» более интересны практически.

Изучают процессы формирования коалиций на основе моделирования игр N-лиц в форме характеристической функции. В теории игр характеристическую функцию определяют на множестве N игроков, а точнее – на подмножествах $S \subseteq N$ этого множества, которые называют коалициями. Расшифруем понятие в математических терминах.

Пусть в конфликтную ситуацию оказалось втянутым целое множество N суверенных сторон (игроков), число которых равно n. Пусть также S – подмножество, или коалиция, из этого множества, а $W(S)$ – гарантированный выигрыш, который может себе обеспечить эта коалиция, опираясь только на собственную силу. Пусть, например, S_1 и S_2 – две коалиции из N. Тогда функцию коалиции $W(S)$ называют «характеристической функцией», если она по величине совпадает с гарантированным результатом коалиции в конфликте и одновременно удовлетворяет условиям:

1) $W(0) = 0$,
2) $W(S_1 \cup S_2) \geq W(S_1) \cup W(S_2)$,
3) $S_1 \cap S_2 = 0$,
4) $S_1, S_2 \subseteq N$.

Первое из представленных условий означает, что если в коалицию не входит ни одного участника, то эта «пустая коалиция» ничего выиграть не может. «Гарантированный выигрыш» такой «пустой коалиции» против другой коалиции, в которую вошли все остальные участники конфликта (т.е. против группы из N-лиц), естественно, равен нулю. Второе условие подтверждает рациональность и выгодность «коллективистской» линии поведения: сила коалиции не ниже суммы гарантированных выигрышей ее участников. Поясним суть этого условия, называемого «супераддитивностью функции». Пусть в коалицию входит всего один i-й игрок, то есть $S=i$. Поскольку этот один игрок противостоит всем остальным, его гарантированный выигрыш при противостоянии со всеми остальными игроками составит $W(S=i)$. Если теперь каждый из таких индивидуалистов начнет объединяться с другими, соотношение между «индивидуальными» гарантированными выигрышами и гарантированным выигрышем образовавшейся коалиции будет удовлетворять второму неравенству. Теперь только остается посмотреть, что будет, когда все «индивидуалисты» согласятся объединить свои усилия и будут действовать согласованно. Как величина гарантированного выигрыша, которую они получат, соотнесется с суммой гарантированных выигрышей «индивидуалистов»? Согласно второму условию получаем:

$$C = W(N) = W(\{1,2,3,..., n\}) \geq \sum_{i=1}^{n} W(S = i),$$

где С – общая полезность, которая находится в распоряжении всего множества N игроков, а $W(S=i)$ – гарантированный выигрыш i-го игрока, действующего в одиночку против всех N/S остальных игроков.

Следовательно, что подталкивает игроков к объединению в коалицию? Только выгода. Эту выгодность можно формализовать так. Обозначим через C_i часть общей полезности С, которую получит i-й игрок, если он вступит в коалицию. Тогда вектор $D(C)$ с компонентами C_1, C_2,..., C_n называется *дележом*, если он удовлетворяет двум условиям:

$C_i \geq W(S = i)$, для всех номеров i игроков;

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = c.$$

Первое из этих двух условий моделирует принцип индивидуальной рациональности, а второе – групповой, означающей, что группа может исчерпать все потенциальные возможности, заложенные в общей полезности С, т.е. наиболее выгодно, когда в коалицию объединяются все.

Таким образом, проблема решения игры N-лиц сводится к нахождению оптимального дележа $D^*(C) = (C^*_1, C^*_2,...,C^*_n)$, наиболее выгодного каждому из участников коалиции.

Выгодность для каждого определяется степенью различия величин C^*_i и $W(S=i)$: чем C^*_i больше по сравнению с $W(S=i)$, тем выгоднее i-му игроку участвовать в коалиции. И эта выгода удерживает рассматриваемого игрока в коалиции тем сильнее, чем выше выгодность. Следовательно, в принципе, если какая-то коалиция S предлагает i-му игроку долю $C^*_i(S)$ в общем дележе, а какая-то другая коалиция Т предложит этому же игроку более «выгодные условия» в виде доли $C^*_i(T) \geq C^*_i(S)$, то i-му игроку целесообразно примкнуть к коалиции Т. Если оптимальный дележ найден и все с ним согласились, стратегические возможности у каждого из участников конфликта (игрока) напрочь исчезают. Каждому придется действовать в соответствии с единой коалиционной стратегией, обязательной к выполнению всеми.

К сожалению, до сих пор ни одна общая теорема существования решения в играх N-лиц не доказана. Естественно, это заставило исследователей искать другие представления о способах разрешения многостороннего конфликта. Одно из предложений, как это сделать, ввел в практику анализа игр Л. Шепли (L.S. Shapley). Как в свое время Дж. Нэш, Шепли предложил идею вектора компромиссного дележа, обосновывая свое предложение достаточно убедительным стремлением каждого субъекта вступить в более выгодную коалицию. Естественно, что к «справедливому» дележу следует предъявить некоторые достаточно убедительные и ясные требования.

Прежде всего «справедливость требует» при разделении общего выигрыша ничего не выделять на долю посторонних, равно как и ничего не взимать с них. «Справедливо считать», что каждый игрок i, вступая с какими-либо игроками в некоторую коалицию $S \subset N$, рассчитывает получить хотя бы тот прирост выигрыша $W(S) - W(S/i)$, который он вносит в коалицию S своим присутствием. Поскольку, однако, может быть сформирована любая содержащая игрока i коалиция, справедливой долей этого игрока следует считать не значение указанной разности для какой-либо конкретной коалиции, а некоторое усредненное значение этой разности по всем коалициям, содержащим i-го игрока.

«Справедливый дележ», введенный Шепли (вектор Шепли, значение по Шепли), задается выражением вида:

$$\varphi_i(C) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \gamma^{(S)} \cdot [W(S) - W(S \setminus i)] ,$$

где $\varphi_i(C)$ – доля i-го игрока в общей полезности C;

$[W(S) - W(S/i)]$ – полезность, которую внес i-й игрок в коалицию S;

$|S|$ – размер коалиции;

$\gamma^{(|S|)} = \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!}$ – вес коалиции, состоящей из |S| членов.

В компоненты $\varphi_i(C)$ вектора Шепли разности гарантированных полезностей входят с коэффициентом («весом», «вероятностью») $\gamma^{(|S|)} = \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}$. Сумма этих коэффициентов в выражении под знаком суммы (дробь перед квадратными скобками) равна 1. Что касается формального анализа самого выражения для компонентов вектора Шепли, то это математическое ожидание выигрыша i-го игрока в условиях так называемой рандомизированной схемы, предполагающей случайное образование всевозможных коалиций, в которые рассматриваемый i-й игрок может войти. Возникает вопрос: что тогда представляют собой эти коэффициенты?

Шепли интерпретировал их как вероятности появления коалиции S при условии, что в нее заведомо войдет игрок i. Он исходил из представления этой величины в виде вероятности совмещения двух независимых событий: равновероятного назначения размеров $|S|$ коалиции S, т.е. равновероятного выбора одного из чисел 1, 2, …, n с последующим равновероятным выбором n-1 возможных партнеров, состоящего из $|S|$-1 игроков набора, составляющего вместе с i коалицию S. Насколько это обоснованно, судить трудно, так как сложно обосновать равновероятность числа партнеров в коалиции с данным игроком и равновероятность самих коалиций с заданным числом партнеров как равновероятность всевозможных перестановок игроков. После этого обычным порядком определяют средний суммарный вклад его присутствия в каждую из коалиций.

Рассмотрим пример с нахождением компромиссного решения в конфликтной ситуации между тремя предпринимателями в виде вектора Шепли. Пусть эти предприниматели – условно назовем их сторонами A, B и C – решили договориться о разделе сегмента некоторого рынка товаров. Предположим, что в процессе индивидуальной («дикой») торговли на сегменте рынка у каждой из сторон были только две опробованные стратегии цены: одна – оптимистичная, а другая – пессимистичная. В целом эти стратегии соответствуют взглядам сторон и на раздел рынка.

Предположим, что каждая сторона считает именно эти стратегии «границами» между справедливым и не справедливым. Поэтому каждая сторона решила выйти на переговоры именно с такими предложениями. Будем просто нумеровать стратегии сторон. Такой прием позволит нам достаточно наглядно обозначать ситуации, которые складывались на сегменте «дикого» рынка, когда торговцы применяли свои стратегии независимо друг от друга. Обозначение будет иметь вид вектора с тремя компонентами. Первая компонента – номер стратегии стороны A, вторая – стороны B, а третья – C. Каждая компонента – это цифра 1 или 2. Тогда, например, вектор (1, 1, 2) является кодом ситуации, которая сложится, если в ходе торгов A и B применяли свои оптимистичные стратегии, а сторона C – пессимистичную. Множество ситуаций на сегменте рынка и соответствующие ситуациям значения прибылей сторон (в долл.) представлены в табл. 10.7.

Таблица 10.7

Коды ситуаций	Значения выигрышей сторон ($)		
	A	*B*	*C*
(1, 1, 1)	100 000	200 000	300 000
(1, 1, 2)	200 000	600 000	200 000
(1, 2, 1)	500 000	300 000	100 000
(1, 2, 2)	500 000	300 000	100 000
(2, 1, 1)	300 000	200 000	100 000
(2, 1, 2)	600 000	200 000	100 000
(2, 2, 1)	200 000	400 000	300 000
(2, 2, 2)	400 000	500 000	600 000

Для данной конфликтной ситуации у каждой из сторон только две возможности: или действовать абсолютно автономно, опираясь только на собственные силы и не обращая внимания на других игроков, или объединяться в коалицию с кем-то из игроков. В последнем случае сторонам необходимо будет решить, с кем вступить в коалицию и сколько «запросить» при дележе за объединение.

Для ответа на оба вопроса вначале найдем гарантированные выигрыши $W(i)$ для каждого i-го игрока, а затем – характеристическую функцию $W(S)$ для каждой S-й коалиции $S \subseteq N$ из множества N игроков.

Для трех сторон, оперирующих на сегменте рынка, возможны только четыре «ненулевых» и «не единоличных» коалиции: $S=\{1, 2\}$, $S=\{1, 3\}$, $S=\{2, 3\}$, $S=\{1, 2, 3\}$. Определим гарантированные результаты для каждой из сторон (игроков) в отдельности. Гарантированный выигрыш $W(1)$ первого игрока – это значение характеристической функции для «единоличной» коалиции $S=\{1\}$. Для этого по табл. 10.7 находим минимальные значения прибыли для его первой стратегии и второй стратегии. Для первой стратегии минимальное значение выигрыша первого игрока равно \$100 000, а для второй стратегии – \$200 000. Таким образом, наибольший гарантированный результат (максимальное из этих минимальных значений) равен для первого игрока $W(1)=$ \$200 000. Аналогично находим по табл. 10.7, что $W(2)=$ \$300 000 и $W(3)=$ \$100 000.

Теперь рассмотрим гарантированные выигрыши коалиций. Определяем значения характеристической функции $W(S)$ для всех не пустых и не единоличных коалиций. При этом будем учитывать, что гарантированный выигрыш каждой коалиции в той или иной ситуации игры не меньше суммы гарантированных выигрышей в этой ситуации сторон, входящих в рассматриваемую коалицию.

Составим новую таблицу, в которой на основании данных табл. 10.7 отобразим значения выигрышей коалиции сторон A и B (первого и второго игроков соответственно) против стороны C (третьего игрока) в каждой из ситуаций (табл. 10.8).

Таблица 10.8

Коалиционная стратегия сторон A и B (первого и второго игроков)	Стратегии стороны C (третьего игрока)	
	c_1	c_2
(a_1, b_1)	(1+2)=3	(2+6)=8
(a_1, b_2)	(5+3)=8	(5+3)=8
(a_2, b_1)	(3+2)=5	(6+2)=8
(a_2, b_2)	(2+4)=6	(4+5)=9

Тогда получим, что наибольший гарантированный выигрыш коалиции $S=\{1, 2\}$ в ситуациях игры трех лиц – значение характеристической функции $W(1,2)$ – равно (×\$100 000):

$$W(1,2) = \max_{A\times B} \{\min_{c\in C}(3,8), \min_{c\in C}(8,8), \min_{c\in C}(5,8), \min_{c\in C}(6,9)\} = 8 \,.$$

Аналогично устанавливаем, что:

$$W(1{,}2) = \max_{A\times B}\ \{\min_{c\in C}(3{,}8), \min_{c\in C}(8{,}8), \min_{c\in C}(5{,}8), \min_{c\in C}(6{,}9)\} = 8\ ,$$

$$W(1{,}3) = \max_{A\times C}\ \{\min_{b\in B}(4{,}7), \min_{b\in B}(4{,}5), \min_{b\in B}(4{,}5), \min_{b\in B}(7{,}10)\} = 7\ ,$$

$$W(2{,}3) = \max_{B\times C}\ \{\min_{a\in A}(5{,}3), \min_{a\in A}(8{,}3), \min_{a\in A}(4{,}7), \min_{a\in A}(4{,}11)\} = 4\ .$$

Если все три игрока объединятся в одну коалицию S={1, 2, 3}, игра станет нестратегической для них, а их максимальный выигрыш, который они должны будут разделить на всех, составит в ситуации (1, 2, 3) ровно \$1 500 000, т.е. W(1, 2, 3)=\$1 500 000.

Для проведения анализа и получения обобщенных выводов сведем полученные значения характеристической функции в табл. 10.9.

Таблица 10.9

Номера игроков	Коалиция-партнер, в которую входит игрок		Образовавшаяся новая коалиция		Вклад, который внес игрок в новую коалицию
	номера игроков	гарантир. выигрыш	номера игроков	гарантир. выигрыш	
1	{0}	0	{1}	2	2
	{2}	3	{1, 2}	8	5
	{3}	1	{1, 3}	7	6
2	{2, 3}	4	{1, 2, 3}	15	11
	{0}	0	{2}	3	3
	{1}	2	{1, 2}	8	6
	{3}	1	{3, 2}	4	3
3	{1, 3}	7	{1, 3, 2}	15	8
	{0}	0	{3}	1	1
	{1}	2	{1, 3}	7	5
	{2}	3	{2, 3}	4	1
	{1, 2}	8	{1, 2, 3}	15	7

На основании данных табл. 10.9 можно сделать следующие выводы:

- стороне *A* выгоднее объединяться со стороной *B*, а не со стороной *C* (суммарный выигрыш коалиции со стороной *B* для него составляет \$800 000, а со стороной *C* – \$700 000); но сам торговец *A* имеет средние шансы на успех – его гарантированный выигрыш составляет всего \$200 000; однако если он объединяется с торговцами *B* и *C*, то получает максимальный прирост прибыли, равный \$1 100 000;
- торговцу *B* выгоднее объединиться с торговцем *A* (прирост прибыли \$600 000);
- торговцу *C* также выгоднее объединяться с *A*, а лучше с *A* и *B* сторонами в единую коалицию (прирост прибыли равен \$700 000).

Таким образом, оказывается, что сторона *A* – очень дефицитный участник сегмента рынка, он нужен всем и может за объединение в общую коалицию затребовать у сторон *B* и *C* более половины из максимально возможного прироста прибыли, т.е. \$600 000 из \$1 100 000. В результате общая доля стороны *A* может составить \$200 000 + + \$600 000=\$800 000. Сторонам *B* и *C* первый игрок на рынке может предложить поделить остаток суммарной прибыли (\$1500 000 – \$800 000), например, в пропорции примерно 3:1. В результате сторона *B* могла бы получить из оставшихся \$700 000 прибыли, например, \$500 000, а второму предложить \$200 000. Таким образом, общий итог мог бы оказаться таким: первому игроку – \$800 000, второму – \$500 000, третьему – \$200 000. Каждый, в общем, получает больше, чем гарантированно мог получать в одиночку. Но согласится ли на подобный дележ второй торговец, то есть сторона *B*? А сторона *C*? И какова могла бы быть «справедливая доля» каждого из игроков? Попробуем ответить на эти вопросы, используя понятие «справедливого дележа» Шепли. Компоненты вектора Шепли определяем по представленным выше формулам.

Для условий нашего примера вычислим весовые коэффициенты коалиций, состоящих из одного, двух и трех участников конфликтной ситуации. Эти коэффициенты оказались соответственно равны:

$$\gamma^{(1)} = \frac{(3-1)(1-1)}{3!} = \frac{1}{3}\ ,\ \gamma^{(2)} = \frac{(3-2)(2-1)}{3!} = \frac{1}{6}\ ,\ \gamma^{(3)} = \frac{(3-3)(3-1)}{3!} = \frac{1}{3}\ .$$

Теперь на основании данных табл. 10.9 со значениями характеристической функции при объединении игроков в коалиции вычисляем «справедливые доли» участников игры, на которые они могут претендовать за свое участие в произвольных коалициях. В условиях рассматриваемого примера максимальная общая полезность *C*, которую торговцы могут себе обеспечить на сегменте рынка, если все они объединятся в одну общую коалицию, составляет \$1 500 000. Тогда составляющие вектора Шепли составят (х\$100 000):

$$\varphi_1(15) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{6}(5+6) + \frac{1}{3}\cdot 11 = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6},$$

$$\varphi_2(15) = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}(6+3) + \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{31}{6} = 5\frac{1}{6},$$

$$\varphi_3(15) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6}(5+1) + \frac{1}{3}\cdot 7 = \frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}.$$

Легко проверить, что сумма вычисленных компонентов вектора Шепли в точности равна максимальной сумме (\$1 500 000), которую могут получить торговцы, если они договорятся и согласятся на коалиционную стратегию (2, 2, 2). В результате даже такого «справедливого дележа» каждый из них получит больше, чем если бы он действовал в одиночку. Больше всего может выиграть третий игрок, который вместо гарантированного выигрыша, равного \$100 000, может получить «справедливую долю», равную $3\frac{2}{3}$ сотен тыс. долл. В итоге, если оптимальный дележ найден и все с ним согласились, стратегические возможности у каждого из участников конфликта (игрока) напрочь исчезают. Каждому придется действовать в соответствии с единой коалиционной стратегией, обязательной к выполнению всеми.

10.3. Модели оценки и управления рисками при проведении торгов и аукционов

Напомним, что отличительной особенностью торгов для приобретения товара, выставленного на аукцион, является то, что покупатели повышают цену не меньше, чем на некоторую фиксированную величину, установленную правилами аукциона. В конце концов тот, кто предложит самую большую цену, приобретает выставленный объект. Поэтому еще до начала аукциона каждый его посетитель должен определить цель своего участия в торгах, знать особенности механизма торгов. Для системного изучения особенностей торгов в настоящее время разрабатывают самые разнообразные по сложности модели этого процесса.

Наиболее простые модели – с двумя участниками, каждый из которых стремится, например, максимизировать свой собственный доход, минимизировать доход своего конкурента (чтобы ослабить его), максимизировать разность своего дохода и дохода конкурента и др. Вот, например, как формируется модель торгов при максимизации разности доходов. Пусть на аукцион последовательно выставлены два объекта известной стоимости V_1 и V_2. Два участника A и B борются за право собственности на эти объекты. Пусть A имеет S_A денежных единиц для участия в аукционе, а B – S_B. Пусть силы A и B примерно равны, математически это выражается так: $1/2 < (S_A/S_B) < 2$.

Выясним, как должен вести себя, например, участник A для достижения своей цели – максимизации разности доходов. Предположим, что В предложил текущую аукционную цену X. Если A не захочет платить такую цену, то B купит 1-й объект, в итоге он получит прибыль $R_B = V_1 - X$. Но израсходовав столь много на покупку 1-го объекта, он уступит 2-й объект A, если тот предложит хотя бы немного больше, чем вообще сможет предложить B. Итак, у B осталось $S_B - X$, значит, если A предложит $S_B - X + \Delta$, то A приобретает 2-й объект и его доход оказывается равным $R_A = V_2 - (S_B - X - \Delta)$ и разность доходов равна $R_A - R_B = (V_2 - S_B + X - \Delta) - (V_1 - X)$. Если же A не захочет уступить 1-й объект B и увеличит цену, предложив $X + \Delta$, и B уступит, то B выиграет торги за 2-й объект, предложив за него $(S_A - (X + \Delta) + \Delta) = (S_A - X)$. В этом случае разность доходов будет равна $R_A - R_B = (V_1 - X - \Delta) - [\, V_2 - (S_A - X)]$. Таким образом, A должен будет уступить 1-й объект B тогда и только тогда, когда разность доходов в этом случае больше, чем когда A идет на повышение и предлагает за 1-й объект $X + \Delta$. Итак, A должен предложить за 1-й объект $X + \Delta$, если окажется выполненным условие

$$(V_2 - S_B + X - \Delta) - (V_1 - X) \le (\, V_1 - X - \Delta) - [\, V_2 - (S_A - X)],$$

или

$$4X \le 2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B, \text{ или } X \le (\, 2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4.$$

Следовательно, A будет повышать цену до значения X, определяемого равенством $X = (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4$.

Дальше повышать цену ему нецелесообразно, ведь он стремится максимизировать разность доходов. Простейшие эквивалентные преобразования позволяют определить разность между доходами A и B:

$R_A - R_B = (S_A - S_B)/2 - \Delta$.

Доход A при этом равен $R_A = (V + V)/\ 2 - (S+S)/4 - \Delta$.

Рассмотрим численный пример. Пусть A решил потратить на аукционе не более 1200 руб., а B – не более 1000. По мнению A 1-й предмет, выставленный на аукцион, стоит 700 руб., а 2-й – 800 руб. Тогда A будет повышать цену до величины $X = (2(700 - 800) + 1200 + 1000) / 4 = 500$ руб. Пусть 1-й предмет будет куплен за эту цену. Если его купил B, то его доход равен $R_B = 200$ руб., а доход A равен $R_A = 800 - 500 = 300$ руб., так что разность доходов равна 100 руб. Можно убедиться, что такова же разность доходов и в случае, когда 1-й предмет был бы куплен A.

Более сложными, но и более адекватными реальности являются модели торгов, в которых число лиц велико. Существуют научные рекомендации и по таким торгам, однако осуществление этих рекомендаций на практике требует большой работы по сбору сведений о конкурентах, в частности об их участии в аналогичных торгах в прошлом. Поэтому предприниматель, готовящийся к подобным торгам, естественным образом прибегает к аппарату теории игр N-лиц, позволяющему достаточно оперативно оценить собственные предпочтения и возможности потенциальных участников образовать коалиции. Кроме того, как уже отмечалось, можно приблизительно установить области притязаний при выработке договоренностей о дележах будущей прибыли.

Но какую бы модель торгов мы ни рассматривали, основным ее элементом всегда выступает стоимость объекта, выставляемого на продажу. Со стоимости объекта все начинается, она формируется в зависимости от условий торгов или аукциона по законам свободного рынка или в нерыночных условиях. Однако более глубокий анализ механизмов формирования цены, т.е. той суммы, которая будет уплачена за объект в ходе торгов, показывает, что в основе всего лежит рыночная стоимость объекта. На рыночную стоимость объекта в первую очередь влияют его характеристики и параметры рынка (объемы аналогичных товаров, сроки экспозиции товара на рынке и пр.).

Но не менее важны и отношения между субъектами товарно-денежных отношений – продавцом и покупателем. Подтверждений этому множество. Взять хотя бы семантическое наполнение терминов «цена» и «затраты», относящихся к понятию «стоимость». От того, как их воспринимает каждый из субъектов торгов, многое зависит. Ведь понятие «цена» относится к фактическому обмену товаров или услуг на рынке. Она представляет собой сумму, запрошенную, предлагаемую или уплаченную за товар или услугу. После проведения обмена цена, объявленная открыто или сохраненная в тайне, становится фактом. Что касается понятия «затраты», то оно отражает только расходы на производство товара. Это понятие относится к сфере производства, сильно отличной от сферы обмена. Затраты определяются как денежная сумма, требуемая для создания или производства товара или услуги.

После завершения производства товара или оказания услуги затраты становятся фактом. Но они выступают важной вехой на пути расчета «стоимости». А вот сама «стоимость» понятие, скорее, концептуальное, поскольку является идеальным представлением торгующихся сторон о той цене, при которой они (покупатель и продавец) с наибольшей вероятностью договорятся о совершении сделки по купле-продаже. Причем продавец стремится к этой цене сверху, а покупатель – снизу по шкале значений. Уплаченная цена соответствует точке пересечения мысленных кривых предложения и спроса. Стоимость объекта – не факт, а *наиболее вероятная цена*, которая *будет* уплачена в конкретных условиях за рассматриваемый объект. Особенно важно это принимать при планировании своей позиции на аукционных торгах, например по распродаже активов и имущества предприятия, объявленного банкротом. Здесь уже действуют не рыночные условия. И стоимость рассчитывают не рыночную, а, например, ликвидационную.

Хорошим подспорьем в решении задачи исследования закономерностей процесса формирования ликвидационной стоимости может стать методология когнитивного моделирования. Напомним, что любая система может быть представлена в виде плоской диаграммы – графа. Вершины графа в этом случае моделируют основные факторы, а дуги – отношения между вершинами. Знаковые нагрузки дуг моделируют эффекты причинно-следственной связи между вершинами, связанными дугой. Если при увеличении нагрузки вершины-«причины» происходит увеличение нагрузки вершины-«следствия», то такая связь считается положительной, им присваивается знак плюс. В противном случае дуге присваивается знак минус. Получившиеся в результате подобной операции ориентированные знаковые и нагруженные знаковые графы называют когнитивными диаграммами (или когнитивными картами). Понятно, что знаковые когнитивные модели самые простые. Они не учитывают степени интенсивности воздействия одних факторов на другие. На самом деле эти воздействия бывают обычно разной силы.

Повышает адекватность когнитивной знаковой модели приписывание дугам нагрузок, моделирующих интенсивность проявления той или иной связи между факторами. В результате получают взвешенный знаковый граф. Разумеется, когнитивные модели не универсальны, и работать с ними достаточно сложно. Однако все эти труды окупаются, так как часто другими методами просто невозможно даже предсказать характер результата.

Итак, рассмотрим вначале основные факторы, которые целесообразно учитывать при когнитивном моделировании процесса формирования ликвидационной стоимости объекта оценки. Среди них, на наш взгляд, наиболее значимыми факторами являются рыночная стоимость объекта и его качество, обусловливающее инвестиционную привлекательность, эффект вынужденности продажи и длительность ликвидационного периода, уровень потребительского спроса на подобные объекты и конъюнктуру рынка и др.

Знаковая когнитивная знаковая модель процесса формирования ликвидационной стоимости представлена на рис.10.2. Этот граф имеет девять вершин, номера которых кодируют наименования основных факторов. Сплошными стрелками на когнитивной диаграмме обозначены отношения, результаты или следствия которых проявляются практически сразу, без какого бы то ни было запаздывания. Пунктирами отображены стрелки для связей, которые действуют с некоторым запаздыванием.

Обозначим номером 1 вершину, отражающую фактор ликвидационной стоимости объекта, а номером 2 – фактор величины рыночной стоимости этого объекта. Как нам уже известно, наиболее сильное влияние на ликвидационную стоимость оказывают длительность ликвидационного периода (вершина с номером 3) и привлекательность объекта для покупателей (фактор 4).

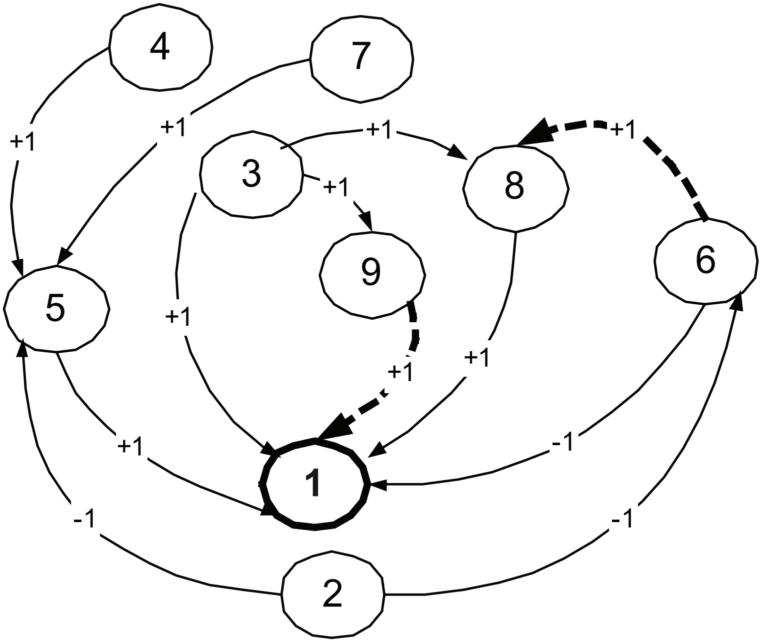


Рис. 10.2. Когнитивная знаковая модель процесса формирования ликвидационной стоимости

Не менее важны также уровень потребительского спроса (5) на аналогичные объекты и эффект вынужденности продажи (6). Они связаны с ликвидационной стоимостью (1) самыми короткими путями – по одной дуге. Кроме того, именно факторы (3) и (6) определяют условия продажи объекта как отличные от рыночных. Состояние, в котором находится объект в момент вынужденной продажи (фактор 7), влияет опосредованно (через изменение фактора 5). Наконец, влияние длительности ликвидационного периода (3) проявляется через изменение таких факторов, как конъюнктура рынка (8) и эффективность маркетинга (9). Это и понятно, ведь эффективность маркетинговых усилий и способность продавца гибко использовать конъюнктуру рынка напрямую зависят от срока экспозиции объекта.

И еще одно замечание. Если рыночная стоимость объекта, выставленного на продажу, очень велика или очень мала, то это почти всегда отпугивает значительную часть потенциальных покупателей. При этом для объектов с высокой рыночной стоимостью (высокое значение фактора 2) просто снижается количество потенциальных покупателей (фактор 5), которым указанная цена под силу. Если же для выставляемых на продажу объектов указывают «просто смешные цены», то у потенциальных покупателей возникает подозрение в их качественности и достойных потребительских свойствах (отрицательная связь между факторами 2 и 6). Труднее всего учесть специфические системные свойства имущественного комплекса, выставляемого на продажу. Ясно только, что такое взаимодействие системообразующих факторов (так называемая эмерджентность системы) существует всегда. Например, любой структурированный бизнес, любой сложный имущественный комплекс при дроблении на составляющие может значительно потерять в стоимости, даже обесцениться! Существуют определенные неосязаемые элементы стоимости в бизнесе, обусловленные такими факторами, как наличие подготовленных кадров, исправно работающего оборудования, необходимых лицензий, систем и процедур. Кроме того, подобные важнные обстоятельства, влияющие на ликвидационную стоимость объекта, возникают благодаря названию, репутации, наличию постоянной клиентуры, местоположению, продуктами и аналогичными факторами. Такие факторы также нельзя выделить и (или) оценить по отдельности. Они обязательно создают экономические выгоды, формируют специфический неосязаемый актив, так называемый гудвилл.

Согласно сложившейся на Западе точке зрения гудвилл определяют как «превышение затрат на приобретение над чистыми активами приобретенного бизнеса». Учесть гудвилл можно по-разному. Например, внести поправку в предварительную оценку ликвидационной стоимости, которую установили в ходе моделирования. Но преимущество когнитивного моделирования как раз во многом состоит в том, что это можно сделать прямо в модели. Введем в рассмотрение дополнительные факторы:

- 10 – степень зависимости ликвидационной стоимости от конфигурации остальных факторов, в том числе и не отображенных в модели;

- 11 – управляемость имущественного комплекса или бизнеса и совершенство его структурной организации.

В результате таких дополнений в совокупность вершин графа следует пополнить и число дуг, моделирующих отношения межу факторами. Например, ввести положительную связь между факторами (10) и (2), отрицательную (с запаздыванием) связь между факторами (10) и (4). Поскольку существенное негативное влияние на ликвидационную стоимость имущественного комплекса оказывают такие факторы, как управляемость и совершенство структурной организации (11), то на ликвидационной стоимости предприятия с неэффективным или небрежным управлением это сказывается достаточно сильно. Проявляется подобное негативное влияние и через документальное оформление прав собственности, и через недисциплинированность персонала, и через запутанность бухгалтерской отчетности. Все это затягивает момент отчуждения прав собственности и начало сроков продажи. В итоге сокращается время экспозиции, которое может быть использовано непосредственно в целях продажи. Для отражения этого взаимодействия в когнитивную модель следует ввести положительную связь между факторами (11) и (3).

Укрупненную методику расчета ликвидационной стоимости можно представить как двухэтапную. На первом этапе проводят расчет рыночной стоимости объекта, а на втором определяют корректирующую поправку на нерыночные условия. Порядок расчета рыночной стоимости по устоявшимся методикам хорошо известен. Вся неопределенность последующей оценки сосредоточивается на способе определения корректирующей поправки. Как правило, эти оценки назначают экспертным путем, по опыту предшествующих или аналогичных торгов. Обычная величина скидки на вынужденный характер продаж на торгах колеблется в диапазоне от 20 до 50%; статистика аукционов по объектам недвижимости показывает, что скидка к рыночной цене колеблется в диапазоне 30…50%, а в отдельных случаях достигает и 80% и т.п.

Иногда назначение поправочного коэффициента хотя и проводят экспертно, но каждый элемент обоснования величины скидки фиксируют отдельно. Согласно классической теории ценообразования цена на товар связана со спросом на него через коэффициент K эластичности соотношением:

$$K = -\frac{(V_2 - V_1)\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)}{(C_2 - C_1)\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)},$$

где C_1 и C_2 – значение цены на товар при значениях спроса соответственно V_1 и V_2.

Знак минус перед дробью указывает на обратную зависимость спроса от цены, т.е. при увеличении цены спрос падает (и наоборот). Для объектов с эластичным спросом коэффициент эластичности обычно значительно больше единицы. Другой класс образуют объекты с неэластичным спросом. Для них цена не является главным регулятором величины спроса, и поэтому коэффициент эластичности не больше единицы. Это, как правило, товары первой необходимости, объекты недвижимости для предпринимательства (торговые, офисные и складские здания и помещения) и др.

Вот, например, как выглядит модель оценки ликвидационной стоимости для объектов с неэластичным спросом. В качестве главного фактора модели рассматривают время экспозиции объекта на рынке. При этом предполагают, что сам рынок подобных объектов с неэластичным спросом достаточно развит и близок к равновесному (т.е. на место проданных объектов немедленно поступают новые, так что общее количество экспонируемых объектов постоянно). В модели предполагается постоянство спроса на рассматриваемые объекты – постоянна интенсивность продаж в единицу времени, а также обязательность совершения сделки купли-продажи при равенстве спроса и предложения. У этой модели есть одна интересная особенность, отражающая важные реалии аукционных распродаж: на рынке помимо «настоящих потребителей» данного товара действуют «перекупщики».

Эта категория покупателей приобретает товар с целью продать по истечении времени экспозиции по рыночной цене и получить из-за этого прибыль. Обычно перекупщик очень хорошо чувствует конъюнктуру нерыночных торгов и может точно рассчитать предельную цену приобретения объекта, чтобы затем продать его с выгодой. Наиболее жесткое ограничение модели – это то, что все подобные объекты продаются на данном рынке по одинаковой цене. И, конечно, как мы отмечали, рыночная стоимость объекта известна. Обозначим:

C_R – рыночная стоимость объекта;

C^* – предельная цена приобретения объекта, при которой операция покупки объекта по этой стоимости и последующая перепродажа его по рыночной стоимости C_R позволяет получить прибыль, равную прибыли продавцов, действующих на данном сегменте рынка;

t_R – длительность периода рыночной экспозиции, измеряемого в месяцах;

K_R – коэффициент эластичности для точки (C_R, t_R);

$t_Э$ – текущее время экспозиции объекта на рынке;

r – ставка дисконтирования, %;

m – число периодов начисления процентов за год;

t^* – длительность времени экспозиции, при котором цена объекта достигает величины C^*;

t_L – длительность периода ликвидационной экспозиции;

C_L – ликвидационная стоимость объекта.

С учетом введенных обозначений в работе получено итоговое соотношение для двух основных диапазонов цен: от C_R до C^* и от C^* и ниже. Эта формула для ликвидационной стоимости, состоящая из трех сомножителей, имеет вид

$$C_L = C_R \left(\frac{1}{1 + \frac{r}{m}} \right)^{\frac{t_R m}{12}} \frac{1}{(1 + k_т)\left(2 - \frac{t_L}{t_R}\right)},$$

где $k_т$ – коэффициент торговой наценки.

Первый сомножитель в формуле для расчета ликвидационной стоимости – это, разумеется, рыночная стоимость C_R, которая будет корректироваться. Второй отражает стремление перекупщика не заморозить свои инвестиции на время t_R, даже если он приобретет объект по предельной рыночной цене C_R. Другими словами, считают, что покупатель вправе требовать скидку к рыночной стоимости в размере дисконтного множителя, поскольку объект может быть реализован по рыночной цене только в конце периода t_R. На это время средства покупателя как бы «замораживаются», не принося ему дохода, тогда как они могли бы быть вложены в некий финансовый инструмент, приносящий доход в размере r % годовых.

Третий сомножитель отражает стремление получить прибыль до уровня C^*, уменьшая вычисленную стоимость «не замороженных денег» на значение торговой наценки (составляющая $\frac{1}{(1+k_т)}$ этого сомножителя). Кроме того, как видно, в этой же компоненте модели учитывается продолжительность времени экспозиции по сравнению с рыночным периодом (дробь $\frac{1}{2-\frac{t_L}{t_R}}$).

Интересная особенность модели состоит в том, что при расчете ликвидационной стоимости объектов с неэластичным спросом можно принимать коэффициент эластичности равным нулю. При этом погрешность определения ликвидационной стоимости не превышает 10%. Кроме того, исследования авторов свидетельствуют, что при ограничении продолжительности «ликвидационного» периода одним годом (12 мес.) резко снижается влияние величины r ставки дисконтирования. При этом вариация величины ставки r в пределах 20…35% дает ошибку расчета ликвидационной стоимости, не превышающую 5…10%. Результаты моделирования с использованием приведенной модели оказались хорошо согласованными с фактическими данными продаж офисных зданий и помещений в 1998–2000 гг.

Побудительным мотивом к совершению акта купли-продажи на торгах можно рассматривать не удовлетворение неких потребностей в пользовании объектом, а исключительно «спекулятивная» цель. При этом на моделируемом рынке конкурируют только те, кто приобретает объекты по ликвидационной стоимости с целью последующей их продажи по рыночной цене. Назовем таких коммерсантов «перекупщиками». Но и перекупщики в этой модели тоже специфические: они вкладывают в приобретение объекта не свои собственные деньги, а заемные средства, причем берут они эти средства под процент у инвестора на строго определенный срок и с цены покупки сразу сбрасывают будущую прибыль инвестора. Срок заимствования средств покупателем у кредитора определен как разность продолжительности рыночной и ликвидационной экспозиции объекта на рынке.

Таким образом, налицо использование принципа индивидуальной рациональности в виде утверждения, что покупатель не заплатит за товар больше, чем текущая стоимость будущих доходов от обладания этим имуществом. Модель расчета ликвидационной стоимости формируется следующим образом. Сначала определяют размер платы за заемные средства $C_L \cdot (t_R – t_L) \cdot i$, считая, что i – процентная ставка, отражающая норму дохода кредитора, предоставляющего заемные средства. Затем устанавливают величину дохода $C_R \cdot (t_R – t_L) \cdot i_{\text{п.и.}}$ от продажи объекта по рыночной стоимости с учетом компенсации затрат на заемные средства и определенной нормы $i_{\text{п.и}}$ прибыли «перекупщика». А после этого уже определяют ликвидационную стоимость согласно условию:

$$C_L \leq C_R - C_L \cdot (t_R – t_L) \cdot i - C_R \cdot (t_R – t_L) \cdot i_{\text{п.и.}}.$$

Другими словами, ликвидационная стоимость представляет собой рыночную стоимость, уменьшенную на сумму величин затрат на заимствование средств и на получение прибыли от «спекуляции». В конце концов можно оценить наибольшее значение величины ликвидационной стоимости. Для этого достаточно заменить знак неравенства в последнем соотношении на равенство. После тождественных преобразований, учета принятых нами обозначений и используемых единиц измерения (t_R и t_L – месяцы, i и $i_{\text{п.и.}}$ – проценты годовых, т.е. за 12 мес.) получено выражение для относительной величины ликвидационной стоимости объекта оценки:

$$\frac{C_L}{C_R} = \frac{1 - i_{п.и.} \cdot \frac{t_R}{12} \cdot (1 - \frac{t_L}{t_R})}{1 + i \cdot \frac{t_R}{12} \cdot (1 - \frac{t_L}{t_R})}.$$

Оказалось, что при фиксированной величине t_R рыночного срока экспозиции влияние нормы $i_{\text{п.и}}$ прибыли инвестора на ликвидационную стоимость объекта практически не ощущается. Так, для середины рыночного срока экспозиции (4-й месяц времени «ликвидационной» экспозиции) при 17% нормы прибыли инвестора величина ликвидационной стоимости получается равной 0,86 от рыночной, а при 37% – 0,80 от рыночной стоимости. При этом зависимость $\frac{C_L}{C_R}$ от времени «ликвидационной» экспозиции, вычисленная по приведенной формуле, практически линейная, тогда как график зависимости относительной величины ликвидационной стоимости для модели с неэластичным спросом оказывается явно нелинейным.

Графики зависимости величины ликвидационной стоимости как доли рыночной от времени экспозиции для модели с неэластичным спросом и модели с «перекупщиками» представлены на рис. 10.3.

Эти графики построены при следующих исходных данных: t_R = 8мес., i = 27%, $i_{\text{п.и.}}$ = 27%, $k_{\text{т}}$ = 7%. Хорошо заметно, что скидка с рыночной стоимости на рассматриваемые объекты, рассчитанная по модели с «перекупщиками», меньше, чем для модели с неэластичным спросом. И, кроме того, разница в относительном размере скидки уменьшается по мере приближения ликвидационного срока экспозиции к рыночному. Но тем не менее эта разница значительна: в первый месяц ликвидационного периода она может составлять до 35…40% от рыночной стоимости объекта и уменьшаться до 20% к концу рыночного срока экспозиции. Наконец, из рис. 10.3 следует, что при совпадении ликвидационного срока с рыночным ($t_L = t_R$) модель с «перекупщиком» показывает, что $C_L = C_R$, а вот модель с неэластичным спросом все равно выдает некоторую скидку из-за того, что приходится учитывать факт «замораживания» вложенных в покупку объекта денег на время t_R (дисконтирование со ставкой i) и торговую наценку $k_{\text{т}}$. Результаты моделирования по обеим моделям проясняют главное: фактор продолжительности времени рыночной экспозиции оказывает весьма сильное влияние на значение ликвидационной стоимости объекта.

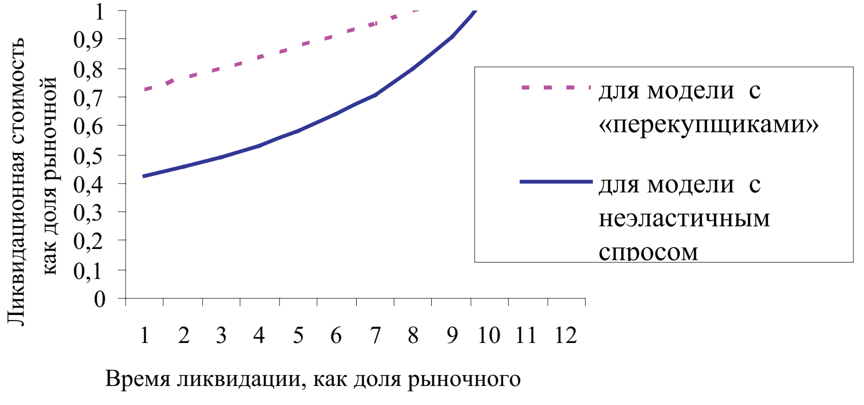


Рис. 10.3. Графики зависимости величины ликвидационной стоимости как доли рыночной от времени экспозиции для модели с неэластичным спросом и модели с «перекупщиками»

10.4. Методы снижения предпринимательского риска на основе принципов «социальной справедливости»

При организации риск-менеджмента главная роль принадлежит финансовому менеджеру, его психологическим качествам. Он лично отвечает за все последствия рискового вложения капитала, поэтому и решение должно приниматься им единолично. Здесь неуместно и даже недопустимо коллективное (групповое) принятие решения, за которое никто конкретно не будет нести ответственности. А ведь большинство, например, финансовых учреждений – это групповое мышление, групповое действие, групповые интересы.

Возьмем, к примеру, банковское дело. Всех сотрудников современных российских банков можно разделить на несколько групп. Одна группа – это квалифицированные работники среднего и старшего возраста. Из них особенно продуктивны 45–55-летние сотрудники со стажем работы в банковской сфере от 10 до 25 лет. Они в совершенстве знают тонкости бухгалтерии и нюансы взаимоотношений в банковской сфере. Большинство из них женщины, обладающие высокой ответственностью, они стремятся работать предельно точно и без ошибок, часто берут работу домой или допоздна работают на своем служебном месте. Однако подобные сотрудники с трудом воспринимают изменения в условиях и содержании работы. Главная проблема для них – постоянная необходимость обновления профессионального опыта, накопленного преимущественно в советский период. Они испытывают трудности в усвоении «рыночных» знаний и преодолении устаревших способов работы. Психологическое напряжение работников этой категории усиливается еще из-за стремления сохранить имеющийся должностной статус. В этих случаях возникают карьерные «битвы», которые могут продолжаться довольно долго.

Другая группа банковских служащих – это люди в возрасте 35–50 лет, пришедшие в банки из различных сфер деятельности. Практически все они имеют высшее образование, некоторые – ученые степени, а ранее имели в своей профессиональной сфере определенный статус и известность (публикации, признание, имя), занимали руководящие посты. Подобные специалисты из других профессиональных областей предприимчивы и отличаются высоким интеллектуальным уровнем и богатым опытом профессиональных взаимодействий. Они не связаны устаревшими знаниями, открыты для профессионального развития и способны осуществить позитивные инновации в банковской сфере.

«Старые» банковские работники из первой группы не желают отдавать высокие должностные места этим пришедшим «новичкам». Средством давления на них часто становится то, что многие банки ставят условием для выдвижения обязательное получение второго экономического образования. Поэтому «новички» вынуждены самоутверждаться на новом месте работы.

Есть еще и третья группа банковских служащих. Она состоит из молодых людей 20…30 лет, занимающих в банках различные должности, начиная от операциониста и кончая управляющим. Они закончили среднюю общеобразовательную школу или специализированные банковские курсы, или имеют экономическое образование, полученное в последние годы в России. Бывает, что у молодого сотрудника банка отсутствует специальное образование, но он является держателем пакета акций и входит в состав управляющих. Работники этой категории уверенно чувствуют себя в новых экономических условиях. Однако они работают в условиях острого дефицита или полного отсутствия профессиональной преемственности.

Не всегда существуют принятые всеми морально-этические ценности, регламентирующие взаимодействия среди такой группы. В результате среди членов молодой группы банковских работников все идет крайне спонтанно. Выживают далеко не самые умные и честные. Часто побеждают напористые и агрессивные молодые люди, не отягощенные морально-этическими принципами, склонные к силовым методам, авантюрам.

И еще есть моменты в управлении экономическим или финансовым предприятием, когда, например, его уставом положено проводить коллективные мероприятия по выработке каких-то решений. Наиболее ярко это проявляется в работе совета директоров при выработке корпоративной финансовой политики, в периодических собраниях акционеров, в деятельности различных общественных организаций (например, Общества потребителей), частных фондов и т.п. Это, конечно, не исключает принятия личного решения специалистом после коллективного обсуждения. Но в ходе обсуждения требуется выполнять определенные правила и нормы, которые известны как «демократические» принципы, или принципы «социальной справедливости».

Таким образом, коллективизм и демократичность при принятии решения – это и хорошо и плохо. Хорошо, по-видимому, потому, что каждому участнику выработки решения дается право высказывать свое мнение, а само решение учитывает все мнения. Плохо же по разным причинам. Прежде всего групповое решение всегда более затянуто, а в критических ситуациях нерешительность и волокита могут привести к катастрофе. Вспомним один из трагичных эпизодов конца XX в. Над Воронежской областью пронесся смерч. Десятки тысяч людей остались без крова. Только экстренные меры, предпринятые на местах, и решительные действия МЧС позволили не допустить катастрофы. А теперь представим себе, что получилось бы, прибегни лица, принимающие решения, к «демократической» процедуре выработки решения на устранение последствий. Так вот, пока сомневались бы да спорили, положение все больше ухудшалось и наступил бы такой момент, когда никакие меры уже не смогли помочь. Вот тогда-то и произошла бы настоящая катастрофа – возможная гибель десятков и сотен людей.

Другая, не менее неприятная особенность группового решения – это феномен повышенного риска. При этом, как известно, если речь идет о простых и хорошо известных вещах, то сам факт присутствия других людей делает ответы человека более уверенными, а при ответах на сложные вопросы присутствие наблюдателей снижает субъективную уверенность в правильности выбора. Существуют тенденции ухудшения показателей работы в группах из-за того, что человек не так ясно видит связь между своими усилиями и результатом, который является следствием совместных решений; человек перестает нести личную ответственность за принятие своего предложения, он как бы прячется за спины других («распределение ответственности»). Наблюдается также снижение степени реалистичности в оценках альтернатив из-за «стремления к единомыслию». И еще в группах люди предпочитают выбирать в качестве эталонов оценивания в ситуации выбора тех, кто не сильно отличается от них самих. В результате они не всегда стремятся к наиболее эффективным и обоснованным решениям. При этом ориентировка на тех, кто отличается, не имеет для них особого значения. Наконец, часто появляются энтузиасты, защищающие группу от дополнительной информации, которая могла бы поколебать уверенность в намечаемом решении. Более того, у членов группы появляется самоцензура: они как бы не допускают приемлемости другой альтернативы, если она противоречит общегрупповым обоснованиям.

В результате при выработке вариантов решения возможна ошибка, характерная именно в условиях демократии. Ведь к решению порой весьма сложных вопросов зачастую привлекаются неспециалисты. Люди некомпетентные, как правило, стремятся проскочить непонятный и скучный для них период ознакомления с проблемой, углубленный анализ и как можно быстрее перейти к проявлению своей демократической позиции – к голосованию. Получается, что даже при выборе одного из предложенных вариантов самое трудное – согласовать интересы коллектива и его членов. Как с этим бороться?

Есть способы. Например, в англо-американском судопроизводстве у судьи есть возможность не согласиться с вердиктом присяжных, отвергнуть его на основании простого и неоспоримого критерия: к такому решению не пришло бы ни одно жюри, если бы оно руководствовалось разумом. Другими словами, все дело в наличии очевидного рассогласования принятого решения и материалов дела. Это могут быть в том числе и не содержательные, а иные регуляторы – сговор, эмоции, которые, возможно, оказались превалирующими, полагают в таких случаях судьи.

Впервые требования для формирования «справедливых» правил сформулировал Эрроу. Они состояли в следующем:

1. Решение не должно выноситься по привычке или по традиции, т.е. не должно быть постоянного решения, независимого от предпочтений членов группы.

2. Решение не должно быть диктаторским, т.е. групповое предпочтение не должно быть идентичным с предпочтением какого-то одного члена группы, который поступает так или иначе, совершенно не обращая внимания на предпочтения других.

3. Между групповым предпочтением и предпочтением индивидуальным должна быть положительная связь. Это означает следующее. Пусть, например, мы рассматриваем какие-то две различные комбинации индивидуальных упорядочений каких-то альтернатив. И пусть при этом какая-то определенная альтернатива классифицирована в обеих комбинациях, по крайней мере, как «отличная». В таком случае эта альтернатива должна быть классифицирована как «отличная» и в групповом упорядочении.

4. Предпочтение в групповом выборе должно быть независимым от добавления или вычеркивания других альтернатив.

5. Дополнительно Эрроу ввел требования о том, чтобы отношение предпочтения между любыми двумя суждениями было бы транзитивным как в индивидуальном, так и в групповом упорядочении, и что число сравниваемых альтернатив должно быть не менее трех (так как начиная с трех альтернатив, возможно проявление нетранзитивности суждений).

Рассмотрим подходы к поиску решений в группе, состоящей из нескольких лиц. Эта группа может включать субъектов, не общающихся друг с другом, или лиц, которые могут вступать в переговоры и образовывать коалиции. Если каждый из субъектов действует независимо от остальных, не ведет никаких переговоров и, следовательно, не может вступать ни в какие коалиции, то анализ поведения такой группы с точки зрения ТПР ничем не отличается от анализа парных игр. Другими словами, всю группу мы как бы делим на две части – «Я» и «Не-Я», а затем анализируем «Наше» поведение в контексте «против всех». Такой случай здесь не представляет особого интереса, поскольку мы уже рассмотрели эти подходы.

Совершенно другое дело, как мы отмечали в предыдущем параграфе, если участники могут обмениваться информацией, дискутировать, вступать в переговоры и образовывать коалиции. Здесь мы можем подойти к анализу конфликта среди *N* суверенных лиц концептуально шире. Но для этого придется применить математические процедуры, чтобы они по своим результатам хорошо согласовались с результатами применения известных «демократических процедур» для принятия решений. Потребуется только по возможности точно воспроизвести особенности тех правил «социальной справедливости», которые отражают права и полномочия отдельных лиц в группе. Например, в одном случае каждому из участников может быть разрешено лишь выдвигать предложения о значениях дележа в игре, а также обмениваться информацией и убеждать других участников примкнуть к его мнению. В другом случае каждый участник может обладать реальными возможностями повлиять на окончательное решение, просто сказав, что будет поступать, как ему угодно, а иногда такой возможности у них нет. Иногда у кого-то каждого из участников может быть «суверенное право» настаивать на обязательном учете в решении конкретно его предложений. Могут быть и другие права и полномочия.

Рассмотрим основные положения для формирования математической модели группового выбора. Пусть N суверенных участников группы работают вместе, но имеют собственные предпочтения. Эта группа, в общем случае, должна принять решение об упорядочении по предпочтению представленных ей элементов d из множества D. В результате индивидуальной работы могут родиться в общем случае N наборов индивидуальных предпочтений (в общем случае – нестрогих, задаваемых высказыванием «не менее предпочтительно»). Обозначим через s номер каждого участника группы, через $\overset{s}{\succ\approx}$ его индивидуальное нестрогое предпочтение на множестве D объектов предъявления. Требуется так согласовать индивидуальные предпочтения $\overset{s}{\succ\approx}$ в групповом мнении $\succ\approx$, чтобы все оговоренные нами условия были соблюдены и чтобы его согласились принять все члены рабочей группы.

Эвристически были сформированы несколько правил, которые, как казалось, вполне соответствуют требованиям «справедливости». Рассмотрим наиболее часто применяемые из них относительно к сформулированной нами постановке задачи упорядочения множества D элементов.

Правило простого большинства. Группа будет считать объект d_i не менее предпочтительным объекта d_j , если так считают (т.е. это отражено в индивидуальных предпочтениях $\left\{\overset{s}{\succ\approx}\right\}$ индивидов) не менее половины из N участников группы. Формально это можно записать следующим образом:

$$d_i \succ \approx d_j \Leftrightarrow n(d_i \succ \approx d_j) \geq 0{,}5N,$$

где $n(d_i \succ \approx d_j)$ – число членов группы, считающих, что объект d_i не менее предпочтителен, чем объект d_j.

Правило «квалифицированного» большинства. Группа будет считать объект d_i не менее предпочтительным объекта d_j , если так считают не менее β-й части (β>0,5) из N участников группы. Формально это можно записать следующим образом:

$$d_i \succ \approx d_j \Leftrightarrow n(d_i \succ \approx d_j) \geq ßN.$$

«Тотально-мажоритарное» правило. Группа будет считать объект d_i не менее предпочтительным объекта d_j , если так считают все, кроме, быть может, одного из N участников группы. Формально это можно записать следующим образом:

$$d_i \succ\approx d_j \Leftrightarrow n(d_i \succ\approx d_j) \geq N - 1.$$

Правило суммарного («среднего») ранга. Групповое упорядочение $\succ\approx$ следует строить на основе превращения каждого индивидуального упорядочения $\overset{s}{\succ\approx}$ элементов d_i в последовательность их рангов $<r(d_i)>_s$ (номеров мест в упорядочении по убыванию предпочтений), суммирования рангов $r(d_i)_s$ по каждому из объектов, т.е. вычисления величин $R(d_i) = \sum_s r(d_i)_s$ и расположения элементов d_i по возрастанию величин $R(d_i)$.

«Медианное правило». Групповым упорядочением $\succ\approx$ следует считать такое, которое «удалено» от индивидуальных упорядочений $\left\{\overset{s}{\succ\approx}\right\}$ на одинаковое расстояние.

На основе рассмотренных «правил голосования» можно теперь строить их различные модификации или компоновать их друг с другом. Однако, как оказалось, все такие правила не безупречны. Более того, при сформулированных Эрроу условиях «социальной справедливости» может быть получен только отрицательный результат в смысле получения универсального правила формирования группового мнения $\succ\approx$ из набора $\left\{\overset{s}{\succ\approx}\right\}$ индивидуальных мнений. При этом правила группового выбора типа мажоритарных (правило простого большинства, правило «квалифицированного» большинства, «тотально-мажоритарное» правило) нередко приводят к потере транзитивности, а следовательно, являются стратегически сильно манипулируемыми.

Вот простой пример. Пусть N=3. Эта группа должна отобрать одного из трех претендентов на занятие вакантной должности. Каждому из участников группы было предложено строго упорядочить претендентов по убыванию предпочтения. Индивидуальные предпочтения получились следующими:

$\overset{1}{\succ\approx} : <d_1, d_2, d_3>, \overset{2}{\succ\approx} : <d_2, d_3, d_1>, \overset{3}{\succ\approx} : < d_3, d_1, d_2>.$

Это означает, что, например, первый из членов группы (s=1) считает, что предпочтительнее всего назначить на вакантную должность первого d_1 из претендентов (а наименее предпочтительным он считает третьего d_3 претендента). Мнение второго из принимающих решение означает, что наилучшим является второй претендент, а первый – наихудший. Третий участник группы, вырабатывающей решение, полагает, что только третий кандидат должен занять вакантную должность, а второго не следует принимать в расчет – в крайнем случае, первый может еще претендовать. Но при таких индивидуальных мнениях легко убедиться, что каждый из претендентов по правилу простого большинства лучше, чем остальные, так как за него голосуют «два из трех». В результате происходит потеря транзитивности итогового предпочтения, и принять решение невозможно. Некоторые могут сказать, что процедуру «можно улучшить», например, как это делают на выборах президента и губернаторов в нашей стране или парламентах других стран, применяя двухэтапную процедуру голосования.

В нашем примере эту процедуру можно было бы представить себе так: в первом туре голосования сравнивают только два элемента, а затем худший из них отбрасывают. Во втором туре оставшийся лучший объект сравнивают с тем, который еще не участвовал в первом туре. Получится вот что. Например, если в первом туре выставлены на конкурс претенденты d_1 и d_2, то при тех же индивидуальных предпочтениях выиграет первый претендент (то, что он лучше второго, считают первый и третий члены группы). А во втором туре, когда первый претендент будет сравниваться с третьим претендентом d_3, выиграет по голосам претендент d_3, так как второй и третий из голосующих считают, что третий претендент лучше первого.

Вроде бы все хорошо, нетранзитивность исчезла и можно выбрать действительно наилучшего из претендентов, так как все члены группы выражали свое решение вполне суверенно… Но не тут-то было! Оказывается, если первый тур проводить по-иному, сравнивая, например, второго претендента с третьим, то победит во втором туре первый кандидат на вакантную должность. А если в первом туре производить выбор между первым и третьим претендентами, то в итоге победит второй. Кто же определяет выбор наилучшего претендента? – Только не члены группы! Все определяет кто-то другой, а именно тот, кто назначает пары для сравнения в первом туре! Вот он и манипулирует мнением суверенных выборщиков и, по сути, принимает решение.

Есть и другие, не менее известные приемы манипулирования групповым мнением при использовании разнообразных мажоритарных правил. Рассмотрим пример «демократичной» процедуры отбора кандидата на вакантную должность. Руководство компании предложило каждому из трех членов группы принятия решений включить в список кандидатов не более двух самых перспективных, по их мнению, лиц. После этого каждый из участников группы должен был упорядочить весь список по убыванию предпочтительности кандидатов. Для построения группового упорядочения было также решено использовать правило суммарного ранга. Предположим, список мог быть составлен из следующих предложений суверенных участников группы:

- предложение первого члена группы – d_1
- предложение второго члена группы – d_4, d_5
- предложение третьего члена группы – d_2, d_3.

Таким образом, участники группы включили в список кандидатов на занятие вакантной должности в компании пять кандидатур.

Пусть наиболее искушенным в процедурах голосования является третий член группы голосования. Предположим, что ему более всего импонирует кандидатура d_3. Однако из кулуарных бесед третий участник группы голосования точно знает, что первые двое его «соратников» по группе выработки решения так не считают. При включении в список всех пяти кандидатур результаты голосования первых двух участников наверняка выглядели бы так:

$$\overset{1}{\succ\approx} : \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \rangle, \ \overset{2}{\succ\approx} : \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \rangle.$$

Другими словами, первые двое членов группы предпочли бы, в крайнем случае, увидеть на вакантной должности кандидата d_1 и они будут стремиться, чтобы именно кандидат d_1 набрал наиболее предпочтительную сумму рангов. При такой расстановке сил третий участник группы никак вроде бы не может повлиять на результаты голосования. Ан, нет! Прогнозируя неблагоприятный для себя исход голосования, третий участник группы решает вообще не включать кандидата d_2 в список для голосования. В результате в списке оказались включены только кандидаты d_1, d_3, d_4 и d_5.

Если теперь первые два участника группы голосования сохранят свои предпочтения, то получится ранжировки вида

$$\overset{1}{\succ\approx} : <d_1, d_3, d_4, d_5>, \overset{2}{\succ\approx} : < d_1, d_3, d_4, d_5>.$$

При такой расстановке сил третьему достаточно выразить свое предпочтение на кандидатах из списка следующим образом: $\overset{3}{\succ\approx} : < d_3, d_4, d_5, d_1>$, чтобы третий кандидат тут же набрал наиболее предпочтительную сумму рангов.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно просуммировать ранги кандидатов, присвоенные им в результате приписывания номеров в соответствии с занимаемыми ими местами в упорядоченных по предпочтительности последовательностях. Эти ранги представлены в табл. 10.10.

Таблица 10.10

Номера участников группы голосования	Кандидаты на занятие вакантной должности, включенные в список для голосования			
	d_1	d_3	d_4	d_5
1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	4	1	2	3
Суммы рангов:	6	5	8	11

Поскольку, как это следует из табл. 10.10, наименьшую сумму рангов имеет кандидат d_3, именно он в соответствии с утвержденными правилами голосования и будет признан наиболее предпочтительным для занятия вакантной должности в компании. Таким образом, все вроде бы «по справедливости»: индивидуальные мнения в точности учтены, а результат – явно не тот, которого ожидали первые два участника группы выработки решения. Это значит, что правила оценки предпочтительности, основанные на вычислениях рейтинга («суммарного среднего ранга»), в общем случае не являются независимыми от добавления других, или вычеркивания некоторых из имеющихся альтернатив.

Медианные правила существенно снижают зависимость группового решения от индивидуальных предпочтений, нивелируют их. И кроме того, поскольку для упорядочения процесса своей работы группа чаще всего избирает председателя, у того появляется важная стратегическая прерогатива – подбор альтернатив и выставление их, например, для голосования. Это может оказать существенное влияние на групповое решение, из-за чего правило группового выбора перестает удовлетворять естественному требованию отсутствия диктатора в группе.

Эрроу доказал, что «социально справедливого» правила согласования индивидуальных мнений, которое удовлетворяло бы всем перечисленным требованиям и ограничениям, не существует. Кроме того, им было установлено, что любое правило, ведущее к единственному исходу, является манипулируемым и на основе такого (ведущего к единственному исходу) правила голосования можно получить любой нужный манипулирующему результат. Поэтому те, кому не нравится чисто отрицательный результат исследований Эрроу, имеют возможность опустить некоторые ограничения, а затем, возможно, приблизиться к положительному результату.

11. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СНИЖЕНИЯ ПРИРОДНЫХ РИСКОВ

11.1. Методы прогнозирования «природно-неопределенных» рискованных ситуаций

Когда размышляющий человек спрашивает себя, какова природа всех наших заключений относительно событий и фактов, при отсутствии твердых знаний о закономерностях их происхождения, то самым частым является, по-видимому, следующий вывод: все они основаны на представлении о причине и следствии. Человек может не знать космогонии и законов астрономии, но он хорошо усвоил, что после зимы приходит весна, а вслед за летом – осень. В итоге мыслящий человек приходит к неизбежному выводу, что в основе всех наших рассуждений и заключений насчет причинно-следственных отношений лежит опыт. От сходных по внешнему проявлению причин мы ожидаем сходных же следствий. В этом суть всех наших заключений, сделанных из опыта.

Например, пока не существует формальных законов и даже закономерностей рынка ценных бумаг. Но точно установлено, что этот рынок живет слухами, страхами и ожиданиями. Стоило весной 2004 г. в России возбудить несколько уголовных дел против владельцев крупных компаний (так называемых олигархов), а одного из них арестовать, и рынок заколебался; стоило приостановить лицензию у одного из крупных банков – сотни вкладчиков этого и других коммерческих банков начали осаждать их офисы; стоило появиться слухам о том, что существуют некие списки коммерческих банков, у которых будет отозвана лицензия на работу с частными вкладами, и даже крупные банкиры заговорили о возможности банковского кризиса в России. Все это – лишь ближайшие подтверждения того, что в основе поступков людей при недостатке знаний о природе вещей лежат представления о причине и следствии, а также их приложения к конкретной области практических действий – опыт.

Всякий человек, занимающийся предпринимательством, обязательно составляет себе на основании наблюдений много общих и частных проверенных правил относительно практической жизни. Правда, как уже не раз отмечалось, когда человек начинает применять эти правила на практике, он как бы забывает об опыте. Он оказывается подвержен необъяснимым с точки зрения здравого смысла ошибкам. Почему это так, мы тоже не знаем, но это так. И со временем дальнейший опыт заставляет человека вносить все новые и новые поправки в уже полученный опыт. Все это происходит по тому, что во всяком положении, во всяком событии существует много мелких частностей, которые самый прозорливый человек не способен с первого взгляда увидеть, хотя от них может полностью зависеть правильность его умозаключений, а следовательно, и разумность поступков. И так на протяжении всей жизни.

Все это касается только отдельного человека. А опыт развития общества? Социальные процессы всегда специфичны. Они не тождественны ни отдельным человеческим действиям, ни экономическим закономерностям. И, следовательно, угрозы, исходящие из недр общества, должны анализироваться отдельно. Здесь важно понять, что есть две группы явлений, которые приходится человеку наблюдать в течение своей жизни. Одни явления ускоряют процессы в обществе, другие – тормозят. В итоге периоды процветания сменяются застоем, а иногда регрессом и существенным ухудшением жизни человека. Почему так происходит, что ускоряет, а что сдерживает перемены в обществе? Посмотрим схему формирования результатов исторического развития, представленную на рис. 11.1.

Одни процессы идут бурно, заметно, ярко. Они привлекают всеобщее внимание. Это политические перемены, становления и падения династий, «перемещения власти», нашествия захватчиков. Но некоторые перемены происходят незаметно. Это процессы трансформации идей. Одни идеи – «идеи настоящего» – ускоряют перемены, к их числу следует отнести изменения во всевозможных верованиях (религиозных, политических, социальных), в научных взглядах, а также изменения в условиях жизни людей.

Другие идеи – «идеи прошлого» – сдерживают перемены как прогрессивные, так и реакционные. Это всевозможные традиции предшествующих поколений, наследственный образ мысли, культура народа. Оба этих невидимых процесса по-разному влияют на изменения в идеях, в понятиях, убеждениях и верованиях людей. Эти перемены постепенно подтачивают основы старого, готовят почву для нового – хорошего ли, плохого ли – не всегда очевидно. Подчас исход медленных перемен становится понятным тогда, когда ничего уже исправить нельзя. Но общие выводы можно сделать по анализу исторической ретроспективы. Оказывается, текущий временной период будет анархическим и хаотическим, если в это время сдерживающие идеи наполовину разрушены, а идеи, ускоряющие перемены в историческом развитии, еще находятся в стадии формирования.

Рис. 11.1. Схема формирования результатов исторического развития

Именно так незаметные перемены и видимые причины поворотов в истории приводят к великим переворотам и изменениям цивилизации. Но вот почему это происходит именно так, каков конкретно «механизм изменений», нам неизвестно. Однако то, что это происходит именно так – несомненно, и данного закономерного процесса никому не изменить. Поэтому и нужно знать особенности этого процесса, учитывать его, планируя собственную жизнь и деятельность.

История свидетельствует, что со временем существенно изменяются и расстановка общественных сил, и степени влияния сил общества на направленность его развития, и даже то, что мы именуем «общественным мнением». Здесь закономерности на количественном уровне пока еще не вскрыты. Да и надо ли это делать? А вот понять характер качественных взаимосвязей между основными факторами исторического развития общества, пожалуй, будет не лишним. Это многое проясняет в прошлом и позволяет по-новому взглянуть на настоящее. Ведь к прошлому надо относиться как к предупреждению.

Можно себе представить, например, характер изменений в расстановке сил в обществе на разных исторических фазах его развития. На рис. 11.2 представлены качественные графики, отражающие тенденции в изменении степеней влияния основных сил общества на различных фазах его развития. В древние времена, в эпоху варварства, главное влияние на развитие общества оказывали его нравственные силы (религиозные, культурные). Их активно поддерживала интеллектуальная аристократия. Наука и производство находились в зачаточном состоянии и не играли особой роли.

Переход к цивилизации был обусловлен необходимым развитием науки (главным образом – философии и математики) и ростом производства. Постепенно рост производства ускорялся, усиливалась роль масс. Поскольку масса не столь образована и культурна, как лучшие представители общества, постепенно приходили в упадок культура и античная религия. Интеллектуальная аристократия постепенно теряла власть. Все больше в почете была грубая сила. Только начало эпохи Возрождения в Европе остановило этот лавинообразный процесс нарастания мракобесия и уничтожения культуры. Постепенно нарождается новая интеллектуальная элита, растет ее влияние в обществе. Одновременно ускоряется научный прогресс и относительно снижается влияние религии на общество. В Англии, Нидерландах, Швейцарии,

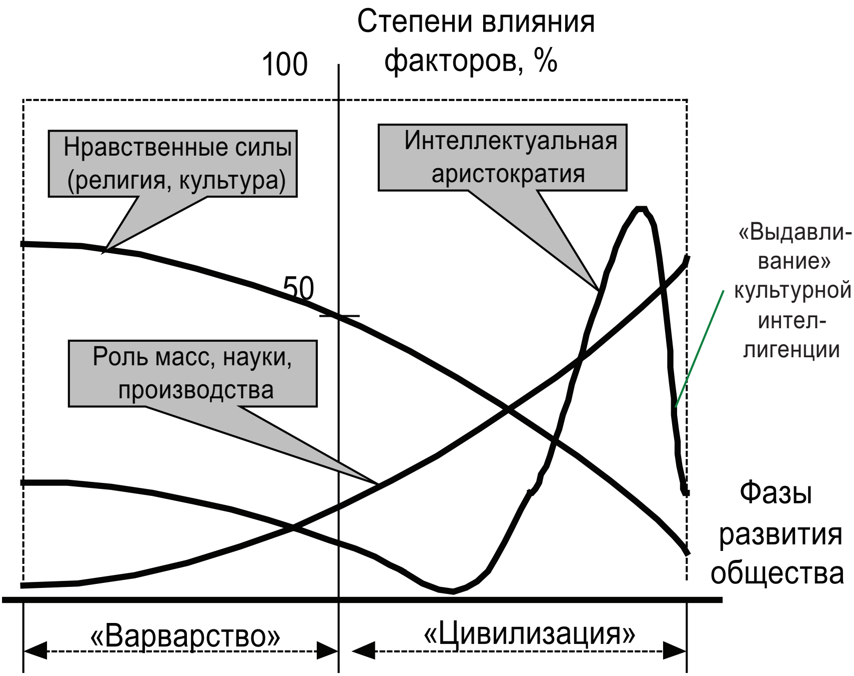


Рис. 11.2. Качественные графики, отражающие тенденции в изменении степеней влияния основных сил общества на различных фазах его развития

а позже во Франции появляются первые цивилизованные демократии, зачастую при сохранении монархии.

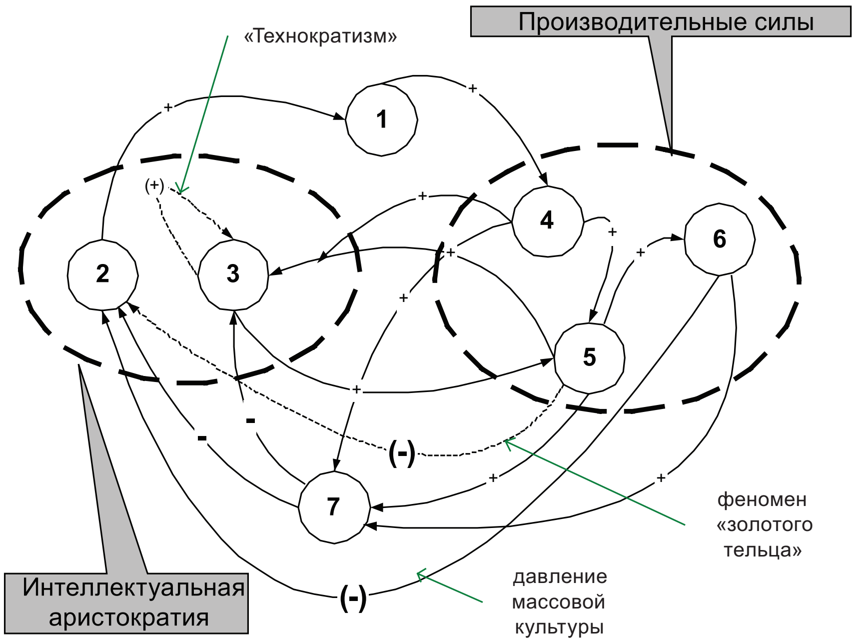
Бурный рост промышленного производства в XVIII–XX вв., переделы колоний и мировые войны вывели на передний план истории огромные массы людей. У многих простых по происхождению людей появились большие деньги. Деньги позволяли желать всего и сразу. Старинный титул или ученое звание стали мало что значить. И вот нувориши захотели всего и сразу. Прекрасные театры и концертные залы, рестораны и гостиницы, до того свободные и просторные, так как были доступны только для элиты, вдруг стали тесными. Теперь уже не стало ничего особенного в том, что в театре рядом могли сидеть аристократ и фабрикант, а в ресторане – художник и продавец магазина. Общество вдруг почувствовало, что «всех нас стало слишком много». Рост агрессивной массовой посредственности в умах и потребностях привел к выдавливанию интеллектуальной элиты – роль интеллектуальной аристократии вновь стала резко падать. Религия отступила на третий план. «Классовое» сознание заменило «массовое» сознание, «классовая» культура стала «массовой».

Различие в классах стирается, на передний план выходит новый феномен – масса. Но чтобы понять проявляющиеся тенденции в жизни общества, нам, конечно, недостаточно того весьма масштабного по времени взгляда на историю, который мы только что использовали. Нужно взглянуть на интересующие нас процессы под более значительным «увеличением», пусть даже этот взгляд по-прежнему будет качественным (в том смысле, что не количественным). Анализируя саму идею внедрения математики в социологические науки, Г. Саймон выдвинул для этого направления деятельности несколько важных положений. Прежде всего, как он полагал, исходным пунктом такого процесса является задача перевода на язык математики некоторых понятий и положений, фундаментальных в современной социально-психологической теории. По его мнению, в социальных науках мы имеем не одну, а несколько теорий, поэтому реальный подход состоит в том, чтобы создать не одну математическую модель, а несколько. Г. Саймон считал, что в математических моделях, объединяющих рациональные и иррациональные аспекты поведения больших и малых групп людей, иррациональные аспекты могут быть введены в качестве условий, ограничивающих область рациональной деятельности.

Итак, при выработке решений ЛПР и исполнители часто сталкиваются с проблемой трансформации понятий и категорий вербальных теорий, например социологических, психологических и им подобных, на математический язык. По-прежнему это происходит без достаточной ясности. Немногие области, где были предприняты подобные шаги, позволяют понять, что вообще можно сделать в этом направлении. Весьма важная из этих областей для жизни человека – экономика. Здесь была создана математическая модель теории полезности, которая ликвидировала множество неясностей в понятии «рационального поведения». Одновременно вскрылись новые методологические проблемы – влияние субъективного мнения ЛПР – в определении и измерении «полезности». Таким образом, все указанные успехи, возможно, и могли быть достигнуты без математики, но, как отмечал Г. Саймон, они все же не были сделаны без нее.

Для того чтобы лучше, подробнее выявить качественные взаимосвязи между основными движущими силами общества, как мы знаем, стоит прибегнуть к использованию когнитивной модели. Методы когнитивного моделирования уже давно нашли применение в целях концептуального предсказания тенденций развития экономики, науки, культуры, межгосударственных и межэтнических отношений, в общем, для раскрытия «природной» неопределенности в самых разных ее ипостасях.

На рис. 11.3 представлена когнитивная диаграмма взаимодействия основных факторов развития общества. На этом рисунке выделены три главные группы факторов:



А) Интеллектуальная аристократия: 1 – нравственные силы (религия, культура); 2 – религиозная и культурная элита; 3 – техническая интеллигенция;

Б) Производительные силы: 4 – наука; 5 – производство, бизнес;

В) Роль масс: 6 – массы людей; 7 – самосознание масс

Рис. 11.3. Когнитивная диаграмма взаимодействия основных факторов развития общества

- «интеллектуальная аристократия», объединяющая: 1 – нравственные силы общества, 2 – религиозную и культурную элиту, 3 – техническую интеллигенцию (группа «А» факторов);
- «производительные силы» (группа «Б» факторов), включающая: 4 – науку, 5 – производство, бизнес;
- «роль масс» (группа «В»), объединяющая такие факторы, как: 6 – сами массы людей и 7 – их самосознание.

Ваимодействие факторов в когнитивной диаграмме отображается стрелками, которым в качестве нагрузки приписаны знаки плюс и минус. Знак плюс означает, что при изменении фактора, от которого идет стрелка к какому-то другому, отражается на этом другом факторе изменением его в том же направлении, что и изменение исходного фактора («причины»). Например, возрастание роли производства и бизнеса (фактор 5) стимулирует повышение роли массы людей (фактор 6), а рост этого фактора, в свою очередь, приводит к росту самосознания масс (фактор 7) в жизни общества. Но с ростом факторов 5, 6 и 7 одновременно растет нигилизм в обществе, что сказывается отрицательно на религиозной и культурной элите общества (стрелки с отрицательными знаками). Феномен «золотого тельца», массовая культура и массовое сознание оказывают подавляющее влияние на культурную элиту и техническую интеллигенцию. В частности, растет влияние эффекта «технократизма» и кастовости культурной и технической интеллигенции, которые замыкаются в себе.

Итак, процесс выявления и познания причинно-следственных связей в явлениях реальной действительности – важнейший руководитель человеческой жизни. Только этот принцип делает опыт полезным для нас и побуждает ожидать в будущем хода событий, подобного тому, который мы воспринимали в прошлом.

Посмотрев, что происходит, когда, на первый взгляд, совершенно разные люди собираются вместе, например, на стадионе, на открытой концертной площадке, в торговом зале биржи, можно отметить, что в этот момент формируется особый социальный феномен, известный издавна как «толпа».

До недавних пор, еще лет пятьдесят назад, этому явлению не уделяли особого внимания, но затем оно стало проявлять себя подобно стихийному бедствию. Особенно при проведении азартных спортивных зрелищ (футбол, бокс и т.п.), при организации крупных коммерческих проектов в сфере шоу-бизнеса, народных гуляний в крупных городах и т.п. Возникла острая потребность в специальном учете антропогенного риска, проистекающего от больших масс людей. Начали, естественно, с изучения видимых характеристик толпы. В результате были выявлены устрашающие закономерности.

Во-первых, оказалось, что толпа абсолютно анонимна и не несет на себе ответственности. Индивид в толпе благодаря только ее численности приобретает чувство и сознание непреодолимой силы, и это сознание позволяет ему поддаваться таким инстинктам, которым он никогда бы не дал волю, если бы был один.

Во-вторых, толпа обладает гипнотической силой. И всякое чувство или действие в ней «заразительно». Поэтому индивид очень легко приносит свои личные чувства в жертву коллективному чувству. Но, поскольку это противоречит человеческой природе, человек способен на такое поведение исключительно в толпе. Наблюдается эффект исчезновения сознательной личности и преобладание личности бессознательной. В итоге человек в толпе все ниже и ниже спускается по лестнице цивилизации.

Все это оказалось следствием некоторых особенных свойств толпы. В частности, толпе свойственно ассоциативное, а не аналитическое мышление. Другими словами, большие массы людей мало склонны к теоретическим рассуждениям, зато очень склонны к действию. Ничто не останавливает толпу, если она на что-то направила свое внимание – в таком случае «право» масс имеет тираническую направленность и не допускает никаких обсуждений. Толпа всегда раздражительна, импульсивна, всегда стремится к немедленному действию. У толпы преувеличенная чувствительность. Она не способна обдумывать, у нее полностью отсутствует рассуждение или критика. В итоге толпа в интеллектуальном отношении всегда стоит ниже изолированного индивида. А вот в отношении чувств или поступков, вызываемых этими чувствами, толпа может быть лучше или хуже отдельного индивида, смотря по обстоятельствам.

Родоначальник науки о толпах, Гюстав Ле Бон, отказывал толпе в разуме, считая, что единственной ее движущей силой являются чувства, иррациональное начало. Объединение людей в массу, по мнению Ле Бона, происходит на базе нижних этажей психики, ответственных за эмоции. Высокоинтеллектуальный человек, попавший в толпу, утрачивает все свои преимущества и оказывается в положении одной из множества однородных песчинок, увлекаемых единым потоком. В XX в. идеи Г. Ле Бона развил известный психолог Серж Московичи. Он полагал, что иррациональность в обществе имеет тенденцию к определенному росту. Другой исследователь толп, Канетти, так описывает бегущую толпу: «Все бегут вместе. Пока они вместе, опасность воспринимается как разделенная. Их так много, что ни один не думает, что жертва – это он. Масса устремляется прочь от опасности, и каждый в ней проникнут ощущением близости спасения».

Итак, мы обсудили вопрос, *какова природа всех наших заключений* о происходящем в мире, если мы не обладаем достаточно формальными знаниями для количественного выяснения закономерностей конкретного «механизма» рискованной ситуации. Теперь достаточно ясно, что в предпринимательской деятельности нужно просто опираться на накопленный опыт, а также на наиболее общие, фундаментальные законы развития общества и общественного сознания. Мы рассмотрели некоторые концептуальные модели, которые могут помочь предпринимателю правильно понять суть знаковых явлений в обществе и представлять свою роль и возможности в его жизни. Некоторые из них можно применять и для прогнозирования более частных закономерностей. Например, мы рассматривали концептуальную модель формирования ликвидационной стоимости для объектов, выставляемых на торги или аукционы. Прогнозирование с использованием когнитивных и других моделей позволяет в значительной степени понять суть, а значит, более успешно осуществлять предвидение определенных явлений и событий, оценивать перспективу изменения финансовых взаимосвязей между предприятиями.

Совершенно ясно, например, что никто из финансистов не отказался бы узнать завтрашние цены. Инвестор достаточно часто вынужден принимать решения, когда исходные данные основаны на приблизительной информации. Естественно, что если бы у инвестора была более точная информация, он мог бы лучше сделать прогноз и снизить риск. Для получения ответа на вопрос, предсказуемо ли движение цен, было проведено множество исследований. Объективно они дали неожиданный и парадоксальный результат: цены изменяются совершенно произвольно, даже случайно. Но есть и другое мнение. Опытные финансисты утверждают, что цены изменяются в соответствии с некоторыми трендами. Согласно постулатам технического анализа ценных бумаг отдельные фрагменты графиков годовых и сезонных цен повторяются. Поэтому по тенденциям наблюдаемого участка цен можно сделать достаточно уверенные предположения о том, какова будет закономерность их изменения в ближайшем будущем. На этом построена идея большинства известных «моделей сглаживания».

Рассмотрим модель так называемого экспоненциального сглаживания. Пусть $h(t)$ – объективно наблюдаемый процесс, имеющий произвольный характер. Например, цены на валюту, уровни спроса и предложения на тот или иной товар, объемы продаж и т.п. При этом предполагается, что все базируется на некой объективной тенденции $z(t)$. Предположим, что время от времени проводятся измерения $y(t)$ интересующего результата, а сами результаты фиксируются без ошибки, т.е. результат измерения $\mathbf{y}(t)$ в точности совпадает с истинным значением $h(t)$. Необходимо выявить скрытую тенденцию $z(t)$. Сразу возникает вопрос: если мы наблюдаем отдельные фиксированные значения процесса, а они – возможно случайные флуктуации от тенденции $z(t)$, то какому или каким значениям $y(t)$ верить больше, а каким меньше? Ведь если полностью верить предыстории как состоявшемуся факту, то последнее измерение надо просто отбросить. Оно «случайное», поживем – увидим, а пока отбросим. Но тогда тенденцией будет только предыстория, а предсказать ничего будет нельзя. Если же безоговорочно верить последнему факту, тогда предыстория не нужна вовсе. Как всегда, предпочли ограничиться «золотой серединой».

Простейшая модель сглаживания первого порядка предполагает использование только двух оценок: последнего измерения $\mathbf{y}(t)$ и результата $\mathbf{z}(t\text{-}1)$ прогноза на предыдущем шаге:

$$z(t) = \alpha y(t) + (1-\alpha)z(t-1),$$

где α – постоянная сглаживания, принимающая значения из диапазона [0;1].

Очевидно, что если α=0, то вся предыстория отбрасывается и за прогнозное $z(t)$ значение будет принят результат $\mathbf{y}(t)$ последнего измерения процесса. Если α=1, то, наоборот, игнорируется предыстория. Обычно выбирают значение постоянной сглаживания α, равное 0,5…0,8.

В общем случае, если в прогнозе требуется учесть все предшествующие моменту t значения от 0 до (t-1), в исходное выражение для результатов прогноза рекуррентно подставляют «самое себя». В результате получают следующее окончательное выражение:

$$z(t) = \alpha \sum_{k=0}^{t-1} (1-\alpha)^k y(t-k) + (1-\alpha)^t y(0) .$$

Вид этого последнего выражения и раскрывает суть названия «экспоненциальное сглаживание»: каждое отдельное измерение входит в окончательное выражение с весом, который экспоненциально убывает по мере удаления в ретроспективу.

Экспоненциальное сглаживание второго порядка вносит нелинейность в прогнозный результат, однако оно несколько резче реагирует на последнее изменение, что зачастую приводит к «перерегулированию». Чтобы как-то сгладить негативные последствия перерегулирования, коэффициент перед нелинейным членом назначают достаточно маленьким. Каким конкретно, каждый раз решают отдельно, экспериментально настраивая параметры модели на конкретный сложившийся «механизм» неопределенности. Самый незначительный из недостатков этого вида сглаживания – более сложное выражение для расчетной формулы экспоненциального сглаживания второго порядка. Формула сглаживания второго порядка имеет вид

$$z(t) = \alpha_1 y^2(t) + \alpha y(t) + (1-\alpha) z(t-1) .$$

Сглаживание более высокого порядка, чем второй, применяется крайне редко из-за отмеченных особенностей влияния нелинейности и трудностей с определением значений параметров модели.

Покажем на простом примере, как влияют порядок экспоненциального сглаживания и величина постоянной сглаживания на характер соответствия прогноза реалиям. Пусть объективно наблюдаемый процесс $h(t)$ – пилообразная функция. Допустим, что на отрезке времени от 0 до 5 дней наблюдается линейный рост цены акции от некоторого условного «нуля» до значения в 5 условных денежных единиц (у.д.е.), а затем цена резко падает до начального уровня (до «нуля») и остается такой же до момента t=9. График функции $h(t)$ представлен на рис. 11.4.

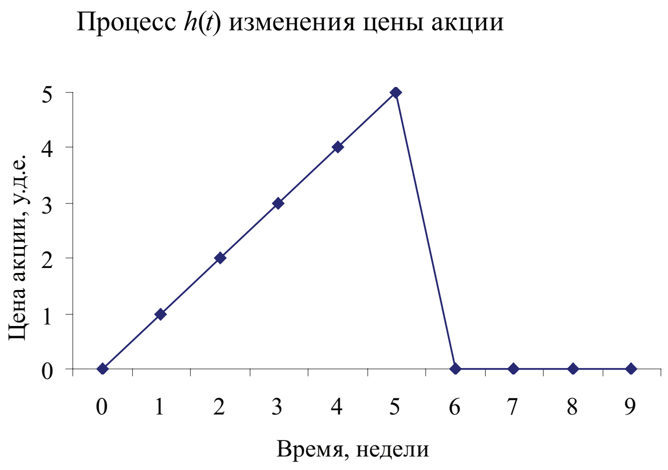


Рис. 11.4. График процесса h(t) изменения цены акции

С целью прогноза цены изменений акции использовали экспоненциальное сглаживание первого и второго порядка при следующих исходных данных:

- постоянная α для сглаживания первого порядка может принимать три значения $\{0,1; 0,5; 0,9\}$;
- для сглаживания второго порядка принять α_1 **=0,02** и α**=0,8.**

Результаты расчетов по формуле сглаживания первого порядка представлены в табл. 11.1, а на рис. 11.5 представлены графики результатов прогноза по методу экспоненциального сглаживания первого порядка для различных значений параметра α**.**

Таблица 11.1

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9
y(t)		1	2	3	4	5	0	0	0	0
z(t)	α=0,1	0,1	0,29	0,56	0,90	1,31	1,18	1,06	0,96	0,86
	α=0,5	0,5	1,25	2,13	3,06	4,03	2,02	1,01	0,51	0,25
	α=0,9	0,9	1,89	2,89	3,89	4,89	0,49	0,05	0,00	0,00

Анализ полученных данных показывает, что для достижения хорошего согласования результатов прогноза с истинным трендом процесса параметр α должен быть достаточно большим (более 0,5). Однако слишком большое значение постоянной α экспоненциального сглаживания приводит к снижению влияния на результат прогноза всех ранее собранных данных.

Рис. 11.5. Графики результатов прогноза по методу экспоненциального сглаживания первого порядка для различных значений параметра α

Мало того, что трудно самому себе ответить на естественный вопрос, зачем же мы тратили время и деньги на сбор этих данных, еще может возникнуть неустойчивость прогноза из-за случайных биений измеренных результатов.

На рис. 11.6 представлен график результатов моделирования для экспоненциального сглаживания второго порядка.

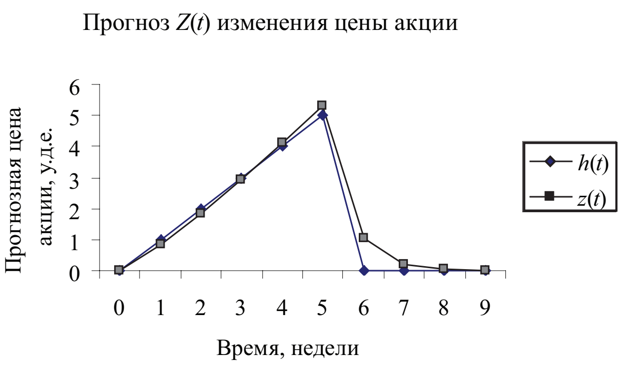


Рис. 11.6. График результатов моделирования для экспоненциального сглаживания второго порядка

При установленных в примере исходных данных (α_1 **=0,02** и α**=0,8**) график **z**(t) прогнозируемой величины цены акции вначале несколько отстает от графика h(t) реального изменения цены. Но уже после третьей недели из-за наличия нелинейности начинается опережающее предсказание тенденции роста цены акции. В результате к тому моменту, когда реальная цена резко падает, прогноз z(t) все еще показывает рост. Нелинейность в модели экспоненциального сглаживания второго порядка обеспечивает определенную инерционность предсказания вплоть до последнего момента t=9.

Попытка прямым подбором значений параметров α_1 и α добиться более качественного предсказания, чем представленное, практически не дает ощутимых результатов. Чтобы уменьшить перерегулирование вначале, приходится снижать α_1, но это приближает экспоненциальное сглаживание второго порядка к простому линейному сглаживанию. Чтобы уменьшить запаздывание прогноза после того, как истинные значения h(t) резко упали, а тем более в самом конце процесса, приходится увеличивать значение параметра α, но это ухудшает использование ретроспективных данных. В общем, как всегда, если в системе что-то улучшаешь, это, как правило, происходит за счет ухудшения чего-то другого. Поэтому к экспоненциальному сглаживанию второго порядка целесообразно прибегать в тех случаях, когда предполагается, что изменение анализируемого фактора процесс растущий и весьма динамичный и есть опасение не успеть отследить эти изменения. Если же процесс вялотекущий, то под угрозой привнесения в прогноз методических ошибок, скорее всего, не следует прибегать к более сложным моделям сглаживания, чем линейная.

11.2. Классические и современные методы принятия управленческих решений в условиях природного риска

Предприниматель задумал проведение финансовой операции, которая принесет доход. Он уже достаточно грамотно представляет, что такое предпринимательский риск, и прекрасно понимает, что планы и жизнь – это большая разница. Он рассуждает так. Вначале нужно сделать все, чтобы выполнить необходимое условие отсутствия риска.

Нужно представить себе классическую схему «ЕСЛИ-ТО…». Например: «Если сложится самое благоприятное сочетание неуправляемых внешних и внутренних факторов, то как я должен буду повести дело, как воздействовать на управляемые факторы экономического процесса, чтобы ничего не потерять и получить максимальную прибыль?»

Поразмыслив над этим вопросом, предприниматель наверняка найдет наилучшее для фиксированного комплекса условий решение. Для этого необходимо применить весь известный ему арсенал финансовых и экономических приемов снижения риска. В частности, известные эвристические правила хеджирования валютного риска требуют оперативно принимать и не спешить отдавать сильную валюту, а со слабой валютой поступать наоборот: производить закупки товаров и услуг в слабой валюте, а продажи – в сильной, стараться использовать форвардные и фьючерсные контракты и валютные опционы и т.п. При выборе конкретного варианта действий из перечисленных следует иметь в виду, что опционы дают возможность воспользоваться благоприятной рыночной ситуацией, но фактически обменный курс будет выше курса использования опциона на величину опционной премии. И вообще, операции с опционами – дело довольно сложное… Дело тут редко доходит до действительной поставки активов. Чаще проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами. При этом американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель такого опциона пребывает в постоянном напряжении: как поступить? а вдруг сейчас – самый выгодный момент? Но ведь и за самую возможность выбора наиболее выгодного момента американский опцион стоит дороже. Обо всем этом нужно помнить, поскольку затраты предстоит вычесть из дохода!

Формально дело может быть представлено так: если экономическая обстановка сложится в виде s_1, то необходимо применить наилучшую для такого случая стратегию a_1. Далее он рассуждает: «А если все сложится не так, как я представил себе в обстановке s_1? Тогда моя стратегия a_1 уже не будет наилучшим решением». Предприниматель делает естественный вывод: поскольку не понятно, какой будет реально сложившаяся в будущем обстановка, то не ясно, чем может закончиться моя операция. Поэтому надо рассмотреть не один, а несколько сценариев развития событий, надо оценить не одну, а несколько возможных обстановок проведения экономической операции, подобрать не одну, а несколько стратегий для нее.

В результате глубоких размышлений, обращения к собственному опыту, советов со своими партнерами и экспертами предприниматель пришел к выводу о том, что в период проведения его экономической операции и по ее завершении, скорее всего, сложится только одна из возможных обстановок s_1, s_2, s_3, …, s_n. Он обозначил множество этих возможных экономических условий через S. Далее предприниматель на основе своего личного опыта, своих теоретических знаний, а также советов специалистов, сформировал под каждое конкретное условие $s_i \in S$ наилучшую экономическую стратегию a_1, a_2, a_3, …, a_m и получил множество A стратегий. Таким образом, у него сформировалась матрица размером m × n возможных операционных ситуаций. Затем наступил этап экономических расчетов. Для каждой ситуации (a_i, s_j) рассчитали величины $y_{ij}^{\text{доход}}$ – значение полезного эффекта («доход»), который желательно максимизировать, и $y_{ij}^{\text{затраты}}$ – значение негативного эффекта («затраты»), который желательно минимизировать. В итоге для каждой ситуации (a_i, s_j) был определен результат $y(a_i, s_j) = y_{ij} = (y_{ij}^{\text{доход}} - y_{ij}^{\text{затраты}})$, характеризующий величину чистой прибыли предпринимателя.

Теперь почти все необходимые данные для принятия решения на проведение экономической операции получены. Остается решить следующую задачу: если известны все ситуации (a_i, s_j) и все возможные результаты $y(a_i, s_j)$ для них, то какую наилучшую стратегию a^* из возможных A стратегий следует применить в операции, чтобы результат оказался наилучшим?

В такой постановке задачу можно решить, если только сначала определить, что следует понимать под *словами «наилучший результат в условиях природной неопределенности»*. Из теории игр знаем, что такое гарантированный результат и на основании какого принципа он получен. Мы можем здесь увидеть полную аналогию с теорией игр. К слову, раздел ТПР, занимающийся принятием решений в условиях природной неопределенности, называют «игры с природой». Название в большей степени, так сказать, историческое и обусловлено представлением о неопределенности ситуации как полностью враждебной. Но тем не менее оно дает ответ на вопрос: с чего начать анализ игры с природой? Ответ такой: с того же, с чего начинали анализ антагонистических и неантагонистических игр – с редуцирования матрицы игры, которое состоит в отбрасывании доминированных строк и столбцов.

Первые попытки разработки методического аппарата и методов анализа игр с природой восходят к началу 50-х годов XX в. Все они могут быть отнесены к типу эвристических, поскольку авторы формировали эти подходы и методы на основе наблюдений за практическими ситуациями, а затем аппроксимировали результаты выбора в виде специальных принципов оптимальности. Каждый из этих принципов, хотя и бессистемно, учитывал какие-то особенности личности ЛПР.

Затем, вплоть до конца 80-х годов XX в., практически не наблюдалось никаких изменений в методологическом подходе. Крупные экологические катастрофы и экономические потрясения, политические провалы начала 90-х годов XX в. вновь заставили предпринимателей и политиков потребовать от ученых вернуться к вопросам методологии. Нужно было на основе накопленных знаний сформировать новые представления о том, что такое «наилучшее решение» в условиях априорной неопределенности. Потребовалось с системных позиций выяснить, чем руководствуются в принятии решений наиболее успешные из бизнесменов, чем в настоящее время отличаются методы работы удачливых менеджеров больших финансовых систем? Не менее интересно, на что ориентируются проницательные биржевые аналитики, брокеры, риелторы, работники диспетчерских служб аэропортов, операторы служб и систем охраны и лица других профессий, большинства из которых не было еще в середине 50-х годов XX в. Оказалось, что часто перечисленные лица интуитивно чувствуют степень возможности того или иного исхода, даже могут описать эти чувства в терминах шансов. Иногда они ощущают меру риска через ожидание больших потерь или больших выигрышей, иногда они субъективно стремятся застраховаться или, наоборот, уловить удачную конъюнктуру.

Особую роль в решении рисковых задач играют интуиция менеджера и инсайд. Интуиция представляет собой способность непосредственно, как бы внезапно, без логического продумывания находить правильное решение проблемы. Интуитивное решение как внутреннее озарение, просветление мысли раскрывает суть изучаемого вопроса. Интуиция является непременным компонентом творческого процесса. Психология рассматривает интуицию во взаимосвязи с чувственным и логическим познанием и практической деятельностью как непосредственное знание в его единстве со знанием опосредованным, ранее приобретенным. Инсайд – это осознанное решение некоторой проблемы. Субъективно инсайд переживают как неожиданное озарение, постижение. В момент самого инсайда решение осознается очень ясно, однако эта ясность часто носит кратковременный характер и нуждается в сознательной фиксации решения.

Практическое использование классических методов анализа «игр с природой» оказалось затруднено именно в силу недостаточной проработанности вопросов, связанных с отождествлением того или иного из таких методов анализа решений с личностью ЛПР и его отношением к риску. При этом описания классических методов практически не содержали информации о том, какой из них более адекватно отражает те или иные особенности системы предпочтений ЛПР.

Таким образом, можно выделить два этапа развития методов и технологий для анализа решений в условиях природной неопределенности: классический и современный. По этой же причине все методы и технологии условно разделим на классические и современные, учитывающие несколько характеристик личности ЛПР.

Анализ всей доступной информации о том, какими соображениями руководствуются подобные ЛПР, когда они принимают ответственные решения в условиях, сходных с «природной» неопределенностью, позволил выдвинуть ряд гипотез о восприятии нестохастического риска. На основе таких гипотез затем были предложены критерии оценки характеристик личности ЛПР и сформированы технологии принятия решений в условиях «природной» неопределенности.

Изложение полученных результатов анализа решений в условиях подобного механизма риска проводится в рамках единой терминологии, поскольку, как оказалось, классические и современные методы «игр с природой» укладываются в единую методологическую схему. Наша цель – построение формальных моделей принятия решений, которые предприниматель может использовать на практике.

Введем понятие риска для случая природной неопределенности. Определим такой риск как «плату» за возможность получения наиболее благоприятного исхода в операции. Таким образом, в качестве наказания за принятие рискованного решения выступает угроза получения неблагоприятного исхода. В соответствии с таким определением риск можно оценивать, например, величиной разности между наиболее и наименее предпочтительными результатами для каждой из возможных стратегий или величиной разности между текущими результатами и уровнем притязаний. Напомним, что ранее под уровнем притязаний мы договорились понимать любой результат, достижение которого отождествляется в сознании ЛПР с конечным успехом. Например, уровень притязаний менеджеры часто расценивают как самый лучший результат из возможных при данных обстоятельствах. Брокеры иногда считают, что это некоторый вполне конкретный результат между худшим и лучшим при данных обстоятельствах или даже любой не самый худший. Это, возможно, объясняется тем, что брокер «живет с продаж», а за все риски, по сути, отвечает клиент.

Применительно к задачам принятия решений в условиях неопределенности можно ввести следующие характеристики отношения ЛПР к нестохастическому риску:

• *несклонное к риску* – это ЛПР, которое опасается много проиграть, и поэтому при оценке возможных стратегий в первую очередь обращает внимание на величины связанных с ними наихудших результатов; иными словами, если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель главное внимание сосредоточивает на величинах результатов, а среди них – только на значения неудовлетворительных исходов, то он, скорее всего, не склонен рисковать в условиях «природной» неопределенности;

• *склонное к риску* – это ЛПР, которое боится мало выиграть и поэтому при оценке возможных стратегий в первую очередь обращает внимание или на величины связанных с ними наилучших результатов, или на величины потенциальных потерь; если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель главное внимание сосредоточивает на величинах наилучших из возможных результатов, а также стремится в обязательном порядке оценивать величины возможных сожалений, то он, скорее всего, относится к лицам, склонным к нестохастическому риску в «игре с природой»;

• *безразличное к риску* – это ЛПР, которое придает одинаковый вес как наилучшим, так и наихудшим результатам, учитывая возможные промежуточные результаты; таким образом, если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель одинаково внимательно оценивает и очень плохие, и очень хорошие результаты, и величины сожалений для ситуаций, т.е. подвергает ситуации всестороннему взвешенному анализу, то ему, пожалуй, можно считать себя *взвешенно относящимся к «природному» риску.*

Итак, рассмотрим классические методики анализа «игр с природой» в рамках введенных допущений, определений и формальных обозначений. Напомним, что в каждой ситуации (a_i, s_j) игры предпочтительность исхода экономической операции оценивается предпринимателем скалярной величиной $y(a_i, s_j)$ прибыли, которую он стремится максимизировать.

Предположим, что предприниматель рассматривает вопрос о поставке в следующем году партии определенного товара на рынок. Он понимает, что выгодность этой коммерческой операции зависит и от того, к какой стратегии интервенции на рынке аналогичных товаров он прибегнет, и от того, какой будет конъюнктура на рынке аналогичных товаров (объемы поставок, уровень спроса, время экспозиции товара, цена на единицу товара и др.). По заказу предпринимателя маркетинговая служба провела исследования перспектив рынка аналогичных товаров и выявила четыре его возможных состояния $s_j \in S$, различающихся по предпочтительности для продвижения собственных объемов товара и сопровождающих его услуг. С целью максимизации величины $y(a_i, s_j)$ прибыли для каждого из этих возможных состояний рынка были разработаны четыре стратегии $a_i \in A$ продвижения товаров и услуг.

После этого предприниматель поставил задачу перед аналитическим департаментом предприятия оценить величины $y(a_i, s_j)$ прибыли для каждого из возможных состояний (a_i, s_j). Результаты расчетов величин прибыли $y(a_i, s_j)$ в рублях для каждой из стратегий торговли и всех состояний рынка аналогичных товаров представлены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг (руб.)			
	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	**32 065**	**34 980**	**20 405**	**2915**
a_2	**29 150**	**20 405**	**34 980**	**8745**
a_3	**11 660**	**23 320**	**17 490**	**14 575**
a_4	**20 405**	**40 810**	**2915**	**20 405**

Предприниматель поставил руководителю аналитического департамента задачу вначале произвести оценку предпочтительности этой, достаточно компактной совокупности стратегий торговли. Затем на основании анализа полученных результатов служащим аналитического департамента надлежало разработать предложения для принятия решений. В этих предложениях должны были присутствовать базовые предпосылки, на основе которых были сделаны те ли иные выводы (т.е. информация о том, какую систему предпочтений аналитики заложили в модель принятия решений), а также практические выводы и конкретные рекомендации для принятия решений. Если ни одна из имеющихся альтернатив не будет признана наилучшей для принятия решений, то аналитическому департаменту совместно с маркетинговой службой надлежало разработать дополнительные варианты или предложить новые стратегии продвижения товара на рынке.

Получив задачу, начальник аналитического департамента решил вначале для оценки предпочтительности стратегий использовать классические критерии выбора. Для этого прежде всего требовалось описать характеристики личности ЛПР и его отношение к «природному» риску.

Чтобы продемонстрировать работу классических критериев, мы в нашем примере будем последовательно выдвигать гипотезу об этих элементах предпочтений ЛПР для принятия им предпринимательских решений.

Критерий Вальда. Таким критерием обычно руководствуется ЛПР, которое при выборе решения абсолютно не приемлет риск. ЛПР оценивает каждую из альтернатив $a_i \in A$ гарантированным для нее результатом $y^{-}(a_i) \min_{s_j \in S} y(a_i, s_j)$, представляющим собой то худшее из возможного, хуже чего не будет для этой альтернативы ни при каких обстоятельствах. После этого наилучшей считают альтернативу a^*, выбранную по уже знакомому нам принципу «лучшее из худшего»:

$$a^* : \max_{a_i \in A} \min_{s_j \in S} y(a_i, s_j) \; .$$

Другое название метода Вальда – «максиминный критерий» – обусловлено видом правой части формального выражения для него. В табл. 11.3 представлены гарантированные результаты для каждой стратегии в нашем примере и значение наибольшего гарантированного результата, равного 11 660 руб. Это результат соответствует стратегии a_3.

Таблица 11.3

Стратегии торговли	Характеристики стратегий по критерию Вальда	
	Гарантированные результаты, руб.	Наибольший гарантированный результат, руб.
a_1	**2915**	
a_2	**8745**	
a_3	**11 660**	**11 660**
a_4	**2915**	

Предприниматель, который абсолютно не склонен к риску, считает себя крайним пессимистом, уверен, что для него неуспех операции крайне нежелателен независимо от того, какими могут быть другие, благоприятные исходы, скорее всего, должен выбирать именно такой критерий принятия решений.

Если наш предприниматель именно таков, то ему следует присмотреться только к стратегии торговли a_3 и для нее оценивать предпочтительность намеченного стратегического плана торговли. В зависимости от того, как сложится конъюнктура на рынке в будущем, эта стратегия может принести ему прибыль в размере или 11 660 руб., или 23 320 руб., или 17 490 руб., или 14 575 руб., но не меньше, чем **11 660** руб. Если такая картина предпринимателя устраивает, ему следует принять именно эту стратегию a_3, поскольку она совсем не рискованная в смысле получения наибольшего гарантированного результата. Таким образом, доходчивость и логичность критерия Вальда, простота вычислений для принятия решения – это его достоинства. Однако известно, что именно эти свойства критерия наибольшего гарантированного результата иногда превращаются в его самый значительный недостаток, если применять его формально. Чтобы показать, как это происходит, предположим, что матрица результатов содержит всего две строки и четыре столбца состояний «природы», как это представлено в табл. 11.4.

Таблица 11.4

Стратегии	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0,99	1000	1000	1000
a_2	1	1	1	1

Гарантированный результат в табл. 11.4 для стратегии a_1 равен 0,99, а для альтернативы a_2 он равен 1,0. Следовательно, формально по критерию Вальда наилучшей следует считать альтернативу a_2. Но на самом деле каждому понятно, что с точки зрения не формального, а практического бизнеса результаты 0,99 и 1,0 – это одно и то же. Поэтому формально получается, что мы выбираем стратегию, которая для всех связанных с ней ситуаций дает один и тот же результат. А вот для стратегии a_1 практически такой же результат получается только в одной из связанных с ней ситуаций, а в остальных своих ситуациях эта стратегия на три порядка лучше, чем стратегия a_2. И об этой формальной стороне критерия Вальда нужно постоянно помнить. Таким образом, этот критерий принимает во внимание только наихудшие значения для конкретной стратеги и, а то, какие по величинам наилучшие результаты дает эта же стратегия и сколько таких «лучших» результатов у нее, он, критерий, вообще не принимает во внимание.

Критерий Сэвиджа. Это критерий ЛПР, склонного к риску, являющегося *крайним пессимистом*. Здесь используют не результаты $y(a_i, s_j)$, а так называемое сожаление от неиспользованных возможностей. По замыслу автора, величина «сожаления» вычисляется для каждой возможной ситуации как разность между наилучшим при данном состоянии природы результатом и всеми текущими для этого состояниями. Обозначим «сожаление» в ситуации (a_i, s_j) через $\mathbf{z}(a_i, s_j)$. Тогда формальное выражение для величины сожаления в ситуации (a_i, s_j) выглядит следующим образом:

$$z(a_i, s_j) = \max_{a_i \in A} y(a_i, s_j) - y(a_i, s_j),$$

т.е. из наилучшего результата $\max_{a_i \in A} y(a_i, s_j)$ для фиксированного состояния s_j природы вычитаем текущий результат $y(a_i, s_j)$ для этого состояния, и полученная разность характеризует величину недовольства, «сожаления» ЛПР о своем необдуманном поступке. После того как для всех ситуаций сожаления вычислены, мы можем заменить матрицу $\|y_{ij}\|$ результатов $y(a_i, s_j)$ на матрицу $\|z_{ij}\|$ величин сожалений $z(a_i, s_j)$. Получим матрицу сожалений для ситуаций нашего примера. Почему может сожалеть думающий предприниматель? Потому только, что он знал, как нужно поступить, но не поступил (почему-то). Как это соотносится с нашим примером? Предположим, предприниматель точно знает, что конъюнктура на рынке товара сложится в точности как в s_1 состоянии «природы». Тогда он выберет наилучшую из его стратегий, чтобы получить наибольшую прибыль. Формально это означает, что нужно найти в столбце s_1 наилучший результат. Применив эти рассуждения к исходным данным нашего примера, мы увидим, что наилучший результат 32 065 руб. дает применение стратегии a_1. Если же предприниматель применит для этого же состояния рынка иную стратегию, например a_2, то получит прибыль всего 29 150 руб., т.е. он потеряет 2915 руб. и будет сожалеть о своем нерациональном поступке. Следовательно, если мы вычтем из наилучшего результата в столбце s_1 все остальные результаты этого же столбца, мы получим для этого столбца величины $z(a_i, s_j)$ сожалений в рублях. Нулевое по величине сожаление будет только для ситуации (a_i, s_j). Затем так же можно вычислить сожаления и для остальных состояний рынка. Матрица сожалений представлена в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	**0**	**5830**	**14 575**	**17 490**
a_2	**2915**	**20 405**	**0**	**11 660**
a_3	**20 405**	**17 490**	**17 490**	**5830**
a_4	**11 660**	**0**	**32 065**	**0**

Далее Сэвидж предложил для оценки предпочтительности альтернатив проводить анализ так же, как в методе Вальда:

• для каждой альтернативы a_i получить оценку гарантированного, т.е. наибольшего, сожаления:

$$z^{-}(a_i) : \max_{s_i \in S} z(a_i, s_j);$$

• найти наилучшую альтернативу a^*, обеспечивающую ЛПР наименьшее гарантированное сожаление:

$$a^* : \min_{a_j \in A} \max_{s_j \in S} z(a_i, s_j) \quad .$$

В соответствии с записанным формальным правилом критерий Сэвиджа называют также критерием минимаксных сожалений. В табл. 11.6 представлены значения гарантированных сожалений.

Таблица 11.6

Стратегии торговли	Характеристики стратегий по критерию Сэвиджа	
	Гарантированные сожаления, руб.	Наименьшее гарантированное сожаление, руб.
a_1	**17 490**	**17490**
a_2	**20 405**	
a_3	**20 405**	
a_4	**32 065**	

Итак, мы видим, что наилучшей по критерию Сэвиджа является стратегия a_1! Это противоречит тому, что мы получили, когда использовали критерий Вальда, но не должно удивлять. Было бы гораздо больше подозрений, если бы оценки по столь разным критериям в результате совпали. Ведь эти критерии для разных по своим устремлениям ЛПР: критерий Вальда – для того, кто боится много проиграть, а критерий Сэвиджа для того, кто боится мало выиграть. Но в принципе совпадения результатов применения разных критериев возможны.

Поскольку теоретической основой обоих рассмотренных нами критериев является принцип наилучшего гарантированного результата (для критерия Вальда – сам результат, а для критерия Сэвиджа – сожаление), основные достоинства и недостатки у критерия Сэвиджа те же, что и у критерия Вальда. Но есть у критерия минимаксных сожалений и специфический недостаток. Дело в вычислении величин сожалений по ситуациям. Поэтому критерий Сэвиджа чувствителен к составу исходного множества альтернатив. Пусть игра с природой моделируется матрицей, представленной в табл. 11.7.

Таблица 11.7

Стратегии	s_1	s_2
a_1	α	1000
a_2	1	1

При этом пусть $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда сожаления для указанной матрицы результатов будут такими, как это отображено в табл. 11.8.

Таблица 11.8

Стратегии	s_1	s_2
a_1	$1-\alpha$	0
a_2	0	999

Наименьшие гарантированные сожаления, равные $1-\alpha$, обеспечивает стратегия a_1, которая и является наилучшей для рассматриваемого примера.

А теперь пусть число стратегий увеличили, и матрица гипотетической игры (см. табл. 11.7) приобрела вид, представленный в табл. 11.9. Достаточно просто убедиться, что решение в подобной игре неустойчиво к добавленной «посторонней» альтернативе и зависит от того, останется ли она в числе стратегий ЛПР или нет.

Таблица 11.9

Стратегии	s_1	s_2
a_1	α	1000
a_2	1	1
a_3	1000	β

Таким образом, эта матрица получена из матрицы предыдущего примера с добавлением еще одной строки для стратегии a_3. По матрице результатов с добавленной альтернативой вычислим значения сожалений (табл. 11.10).

Таблица 11.10

Стратегии	s_1	s_1
a_1	1000-α	0
a_2	999	999
a_3	0	1000-β

Получается, что критерий Сэвиджа выделяет в качестве наилучшей стратегию a_2, хотя если по какой-либо причине стратегия a_3 не сможет быть реализована, то наилучшей будет альтернатива a_1, а a_2 перестанет быть наилучшей. Следовательно, критерий Сэвиджа не обладает свойством независимости (устойчивости) от «посторонних» (дополнительных) альтернатив. Это очень важно помнить, если вы решите дополнять перечень уже имеющихся альтернатив какими-то новыми.

Критерий Гурвица используют для следующих элементов системы предпочтений ЛПР: оно безразлично к риску и является *реалистом*. *В* качестве количественной характеристики для каждой стратегии предпринимателю рекомендуется использовать величину $y(a_i, \gamma)$, которая формируется в виде линейной функции наихудшего (пессимистического) и наилучшего (оптимистического) для нее значений прибыли. Для этого используют специальный коэффициент пессимизма-оптимизма, называемый также *коэффициентом Гурвица*. Обозначим этот коэффициент через γ. Значения коэффициента выбирают из диапазона [0; 1] по правилу:

- $\gamma = 0$, если ЛПР считает, что состояние «природы» в операции будет самым благоприятным (оптимистический прогноз);
- $\gamma = 1$, если ЛПР считает, что состояние «природы» в операции будет самым неблагоприятным (пессимистический прогноз);
- $0 < \gamma < 1$, если ЛПР считает, что состояние «природы» в операции будет не самым плохим, но и не самым благоприятным.

Каждую альтернативу оценивают взвешенным результатом вида

$$\mathbf{y}\,(a_i, \gamma) = \gamma \cdot \min_{s_j \in S} y\,(a_i, s_j) + (1 - \gamma) \cdot \max_{s_j \in S} y\,(a_i, s_j) \quad .$$

Затем наилучшую альтернативу a^* отыскивают обычным порядком, т.е. максимизацией величин $y(a_i, \gamma)$: $a^*\colon \max_{s_j \in S} y\,(a_i, s_j)$. Легко заметить, что если $\gamma=0$, то модель выбора по критерию Гурвица отражает предпочтения ЛПР, руководствующегося правилом «все сложится самым удачным образом» (*крайний оптимист*); если $\gamma=1$, то сразу получается критерий Вальда, который моделирует крайне пессимистичное отношение ЛПР к возможным условиям проведения операции.

Значение коэффициента γ может быть назначено ЛПР эвристически из интервала [0; 1] или это значение можно оценить с использованием специальных процедур, сходных с процедурами определения субъективных вероятностей.

Определим наилучшую по критерию Гурвица стратегию для нашего примера. В табл. 11.11 представлены значения линейной функции $y(a_i, \gamma)$ Гурвица при значении коэффициента пессимизма-оптимизма γ, равного 0,2.

Таблица 11.11

Стратегии торговли	Характеристики стратегий по критерию Гурвица	
	Величина $y(a_i, \gamma)$, руб.	Наибольшее значение результата по Гурвицу, руб.
a_1	**28 567**	
a_2	**29 733**	
a_3	**20 988**	
a_4	**33 231**	**33 231**

Таким образом, по критерию Гурвица наилучшей оказывается стратегия a_4. Понятно, что наилучшим это решение может быть признано только тем предпринимателем, который считает себя нейтрально относящимся к риску относительно возможности получения как наилучших, так и наихудших результатов, т.е. *реалистом*. Кроме того, он считает, что возможности таких альтернативных исходов не одинаковы, поэтому придает больший вес оптимистичному исходу, а не пессимистичному. Причем эта его личная уверенность достаточно сильна, в связи с чем значение величины γ – коэффициента пессимизма-оптимизма, называемого также *коэффициентом Гурвица,* составляет величину 0,2. Если бы предприниматель придавал таким исходам одинаковый вес – принял бы γ=0,5, то получилось бы две оптимальные по Гурвицу стратегии a_2 и a_4, а если бы он был более пессимистично настроен (γ=0,8), наилучшей оказалась бы стратегия a_3.

Заметим, что критерий Гурвица может не различать явно различающиеся по предпочтительности стратегии в силу того, что каждой из них ставит в соответствие оценку, которая является линейной комбинацией только наихудшего и наилучшего результата для альтернатив. Поясним это на следующем примере. Пусть игра с природой описывается матрицей, представленной табл. 11.12.

Таблица 11.12

Стратегии	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	**0**	**0**	**1000**	**0**
a_2	**1000**	**999**	**999**	**0**

Стратегии a_1 и a_2 существенно отличаются по предпочтительности, так у первой альтернативы только один ненулевой исход, а у второй их три (весьма значительные по величине). В то же время у них одинаковые наилучшие (равные 1000) и наихудшие (равные 0) результаты и, следовательно, по критерию Гурвица эти альтернативы эквивалентны. Но для практики, разумеется, вторая стратегия лучше первой.

Критерий Лапласа-Бернулли. Это критерий для ЛПР, несклонного к риску, и являющегося *реалистом*. В его основу положена концепция недостаточного основания Лапласа и принцип рандомизации, о котором мы также уже говорили. Согласно концепции недостаточного основания, если нет никаких оснований полагать, что какие-либо из **n** возможных состояний природы более возможны по отношению к другим, то их целесообразно полагать субъективно равновозможными, т.е. имеющими одинаковую $p(s_j) = \frac{1}{n}$ субъективную вероятность появления. После этого, опираясь на принцип рандомизации, считаем ситуацию случайной и применяем критерий наибольшего среднего результата. В итоге критерий Лапласа-Бернулли принимает вид

$$a^* : \max_{a_i \in A} M_y(a_i) = \max_{a_i \in A} \sum_{s_j \in S} \left[p(s_j) y(a_i, s_j) \right] = \max_{a_i \in A} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y(a_i, s_j).$$

Результаты расчетов величин средней субъективно ожидаемой прибыли для стратегий торговли представлены в табл. 11.13.

Таблица 11.13

Стратегии торговли	Характеристики стратегий по критерию Лапласа-Бернулли	
	Величины средней субъективно ожидаемой прибыли, руб.	Наибольшее значение величины средней субъективно ожидаемой прибыли, руб.
a_1	**22 591,25**	
a_2	**23 320**	**23 320**
a_3	**16 761,25**	
a_4	**21 133,75**	

Расчеты для исходных данных нашего примера показывают, что наилучшей по критерию недостаточного основания Лапласа-Бернулли следует считать стратегию a_2.

Для наглядности и в качестве промежуточного итога сведем результаты применения всех классических критериев в табл. 11.14, где наилучшая стратегия отмечена звездочкой в строке для соответствующей стратегии торговли.

Таблица 11.14

Стратегии торговли	Результаты применения классических критериев					
	Вальда	Сэвиджа	Гурвица			Лапласа-Бернулли
			$\gamma = 0{,}2$	$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 0{,}8$	
a_1		*				
a_2				*	*	*
a_3	*					
a_4			*	*		

Теперь в дополнение к рассмотренным классическим критериям приведем несколько новых критериев принятия решений в условиях природной неопределенности. Первый шаг на этом пути – модификация классического критерия путем ослабления его очевидных недостатков.

Модифицированный критерий Гурвица. Основная идея модификации состоит в том, чтобы при оценке каждой альтернативы помимо наименее и наиболее предпочтительности результатов присутствовали бы и промежуточные. В итоге критерий принял вид

$$a^* : \max_{a_i \in A} y(a_i, \gamma_j) \quad ,$$

при ограничении $\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y(a_i,\, s_j) \geq y^{\text{притяз}}$,

где $y^{\text{притяз}}$ – установленный ЛПР уровень притязаний по среднему арифметическому из величин возможных результатов для альтернатив.

Предположим, $y^{\text{притяз}}$ =22 000 руб. При таком значении уровня притязаний только для первых двух альтернатив выполняется условие превышения средних арифметических значений результата над уровнем притязаний. Значения средних арифметических результатов составляют 22 591,25 руб. и 23 320 руб. соответственно. В этом легко убедиться, рассмотрев данные для результатов применения критерия

Лапласа-Бернулли. Среди стратегий-претендентов наилучшим значением линейной функции Гурвица $\mathbf{y}(a_i, \gamma) = \gamma \cdot \min_{s_j \in S} y(a_i, s_j) + (1 - \gamma) \cdot \max_{s_j \in S} y(a_i, s_j)$ обладает вторая стратегия (28 567 руб. – у первой стратегии и 29 733 руб. – у второй). Таким образом, $a^* = a_2$.

Модифицированный критерий Сэвиджа. При модификации введено расширенное толкование понятия «сожаление». Если субъектом движет желание коренным образом изменить ситуацию, добиться существенного выигрыша в ней, пусть даже ценой каких-то потерь, то «риск» – это просто плата за возможность получения наиболее благоприятного исхода в операции, а «сожаление» – мера подобно трактуемого риска. В результате в дополнение к классическому понятию «сожаления» предложено измерять его также и величиной разности между уровнем притязаний и текущим результатом. Поэтому вполне возможно, что могут быть получены «сожаления» как со знаком плюс, так и со знаком минус. Иными словами, отрицательное сожаление означает «значительный успех», выраженный в превышении полученного результата над выбранным уровнем притязаний. А далее все просто: использован тот же подход, что и в модифицированном методе Гурвица – введено понятие «уровень притязаний по сожалениям». Обозначим эту величину через $z^{\text{притяз}}$. В итоге такой модификации получаем критерий вида

$$a^* : \min_{a_j \in A} \max_{s_j \in S} z(a_i, s_j)$$

при ограничении $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z(a_i, s_j) \leq z^{\text{притяз}}$.

Пусть в рамках рассматриваемого нами примера $z^{\text{притяз}} = 9000$ руб., т.е. при сожалениях, не превышающих 9000 руб., предприниматель готов рассматривать кандидатов на звание лучшей стратегии. Оказывается, что среднее арифметическое значение сожалений для стратегий только в одном случае удовлетворяет уровень притязаний по величинам сожалений. Только для стратегии a_2 величина среднего арифметического ее сожалений составляет 8745 руб., а у трех остальных стратегий эта величина выше порогового значения в 9000 руб. Поэтому у предпринимателя нет выбора – перед ним дилемма: или он будет руководствоваться стратегией a_2, или и ему предстоит расширить множество альтернатив и при этом постоянно помнить, к чему может привести добавление «посторонних» альтернатив.

Разумеется, это не все модификации классических методов, а лишь их часть.

Однако имеются новые критерии, позволяющие напрямую оперировать предложенными формальными характеристиками личности ЛПР.

Критерий субъективно средних результатов соответствует предпочтениям ЛПР, *несклонного к риску*, являющегося *разумным оптимистом*. Такое ЛПР оценивает состояния природы величинами результатов, но рассматривает результаты через призму субъективного восприятия состояний природы. Субъективные вероятности состояний природы принимаются пропорциональными суммарным результатам для каждого состояния «природы». Согласно этому критерию лучшей следует считать ту стратегию, которая приводит к максимальному субъективно среднему результату:

$$a^* : \max_{a_i \in A} \sum_{j=1}^{n} p(s_j) \cdot y(a_i, s_j),$$

причем субъективные вероятности $\mathbf{p}(s_i)$ определяются по формуле:

$$p(s_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} y(a_i, s_j)}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y(a_i, s_j)}.$$

При тех исходных данных, которыми мы оперируем в общем для анализа примере, значения субъективных вероятностей $p(s_j)$ конъюнктуры рынка составят:

$p(s_1) = 0{,}28$, $p(s_2)=0{,}36$, $p(s_3)=0{,}23$ и $p(s_4)=0{,}14$.

Окончательно величины субъективно средних результатов для стратегий получаются равными тем, которые представлены в табл. 11.15.

Таблица 11.15

a_1	a_2	a_3	a_4
26412,43	24511,35	17540,7	23725,57

Таким образом, по критерию субъективно средних результатов наилучшей является стратегия a_1, дающая в среднем прибыль в 26412,43 руб.

Предположим теперь, что ЛПР *склонно к риску* и является *разумным оптимистом*. В таком случае оно, скорее всего, оценивает ситуации величинами сожалений и намерено измерять субъективные вероятности возможных состояний «природы». Величины субъективных вероятностей состояний природы вычисляем пропорционально суммарным результатам для каждого состояния, а сам критерий – его можно назвать *критерием средних субъективных сожалений* – выглядит так:

$$a^* : \min_{a_i \in A} \sum_{s_j \in S} \left[p(s_j) z(a_i, s_j) \right],$$

причем величины $\mathbf{p}(s_j)$ субъективных вероятностей определяют по формуле:

$$p(s_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} y(a_i, s_j)}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y(a_i, s_j)}.$$

В нашем примере величины субъективных вероятностей для этого критерия те же, что и для предыдущего критерия. Умножив их на соответствующие ситуациям величины сожалений $\mathbf{z}(a_i, s_j)$, получаем величины средних субъективных сожалений, указанные в табл. 11.16.

Таблица 11.16

a_1	a_2	a_3	a_4
7807,13	**9708,217**	**16 678,87**	**10 494**

Минимальное сожаление соответствует применению стратегии a_1.

Критерий субъективной вероятностной гарантии характерен для ЛПР *безразличного к риску*, который может указать субъективные оценки $p(s_j)$ вероятностей состояний природы в числовой форме, а также требуемый уровень результата (уровень притязаний). Критерий рекомендует лучшей считать ту стратегию, которая приводит к наибольшему значению вероятности получения результата не хуже требуемого:

$$a^* : \max_{a_i \in A} \sum_{s_j \in S(a_i)} p(s_j),$$

где $S(a_i / y^{\text{притяз}}) = \{s_j \mid y(a_i, s_j) > y^{\text{притяз}}\}$ – те состояния природы, для которых результат применения стратегии a_i оказался лучше уровня $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$.

Предположим, анализируя с помощью экспертов возможные уровни конъюнктуры рынка аналогичных товаров, предприниматель оценил попарно возможные состояния s_j рынка и применил процедуру определения субъективных вероятностей через вербальные высказывания типа «более вероятно», «равновероятно», «менее вероятно». Результаты оценки составили:

$p(s_1)$= 0,38, $p(s_2)$=0,36, $p(s_3)$=0,20 и $p(s_4)$=0,06.

Уровень притязаний $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$ по результатам оценки установлен в 30 000 руб. Используя значения прибыли для ситуаций, найдем те, для которых результаты превышают 30 000 руб. (табл. 11.17).

Таблица 11.17

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	$p(s_1)$= 0,38	$p(s_2)$=0,36	$p(s_3)$=0,20	$p(s_4)$=0,06
a_1	**32 065**	**34 980**		
a_2			**34 980**	
a_3				
a_4		**40 810**		

Анализ данных табл. 11.17 показывает: для первой стратегии a_1 вероятность получения результата, превышающего установленный уровень $y^{\text{притяз}}$ =30 000 руб., составляет $p(s_1)+p(s_2)$= 0,38+0,36=0,74; для стратегии a_2 вероятность этого события равна $p(s_3)$=0,20, для стратегии a_3 вероятность превышения уровня притязаний равна нулю, а для стратегии a_4 – $p(s_2)$=0,36. В итоге по критерию субъективной вероятностной гарантии наилучшей следует признать стратегию a_1.

Критерий субъективно ожидаемой полезности моделирует выбор ЛПР, которое не только может указать субъективные вероятности состояний природы в числовой форме, но и получить для оценки результатов свою индивидуальную функцию полезности для рассматриваемых условий. Эмпирическая функция $u^N(y)$ для оценки полезности результатов **y** в условиях «природного» риска имеет вид степенной зависимости

$$u^N(y) = y^{\alpha},$$

где y – нормированные результаты операции;
α – параметр функции,
и трансформирует значения нормированных результатов операции в отрезок [0;1]. Нормирование результатов проводят по линейной зависимости вида

$$y = \frac{y^{н} - y^{н}_{min}}{y^{н}_{max} - y^{н}_{min}},$$

где y^{H} – результат в натуральной шкале;

$y^{н}_{min} = \min\limits_{a_i \in A} \min\limits_{s_j \in S} y(a_i, s_j)$ – минимальный из результатов для всех ситуаций в натуральной шкале;

$y^{н}_{max} = \max\limits_{a_i \in A} \max\limits_{s_j \in S} y(a_i, s_j)$ – максимальный из всех результатов в натуральной шкале.

Параметру α функции устанавливают значения из следующей шкалы:

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}125 - \text{если существенная несклонность к риску;} \\ 0{,}5 - \text{если незначительная несклонность к риску;} \\ 1{,}0 - \text{если взвешенное отношение к риску} \\ 2{,}0 - \text{если незначительная склонность к риску;} \\ 5{,}0 - \text{если существенная склонность к риску.} \end{cases}.$$

В итоге наилучшей следует считать ту стратегию a^*, которая характеризуется наибольшей ожидаемой субъективной полезностью результатов:

$$a^* : \max_{a_i \in A} \sum_{j=1}^{n} p(s_j) \cdot u^N\big(y(a_i, s_j)\big).$$

Применим этот критерий для сравнения стратегий, предполагая, что $\alpha=5$. Предварительно вычислим нормированные значения величин прибыли (в табл. 11.18).

Таблица 11.18

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	**0,731**	**0,804**	**0,440**	**0,004**
a_2	**0,658**	**0,440**	**0,804**	**0,149**
a_3	**0,222**	**0,513**	**0,367**	**0,295**
a_4	**0,440**	**0,949**	**0,004**	**0,440**

Значения величин функции $\mathbf{u^N(y) = y^\alpha}$ полезности предпринимателя сведены в табл. 11.19.

Таблица 11.19

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	**0,51**	**0,62**	**0,17**	**0,00**
a_2	**0,40**	**0,17**	**0,62**	**0,02**
a_3	**0,04**	**0,23**	**0,11**	**0,07**
a_4	**0,17**	**0,89**	**0,00**	**0,17**

Теперь остается вычислить ожидаемую субъективную полезность. Результаты вычислений сведены в табл. 11.20.

Таблица 11.20

a_1	a_2	a_3	a_4
0,45	**0,32**	**0,13**	**0,39**

Таким образом, с использованием введенных понятий (тип личности, отношение к «природному» риску) оказалось достаточно легко привести классические и современные методы анализа «игр с природой» в стройную систему, а также сформулировать сравнительно простые правила для процедуры подбора критерия, который наиболее адекватно отражает особенности принятия решений конкретным ЛПР в условиях «природного» риска.

При этом наиболее общие рекомендации по применению критериев таковы:

- критерием Вальда следует руководствоваться предпринимателю, который считает себя крайним пессимистом и, кроме того, абсолютно не склонен рисковать в рассматриваемой экономической операции;
- критерий Сэвиджа минимаксных сожалений следует рекомендовать для оценки предпочтительности альтернатив тому предпринимателю, который хотя и относит себя к классу пес-

симистов, но в данной операции весьма заинтересован в ее результатах и очень опасается упустить выгодный шанс, мало выиграть;

- критерий Гурвица пессимизма-оптимизма хорош для тех предпринимателей, которые взвешенно относятся к риску в условиях «природной» неопределенности и могут, хотя бы качественно, оценить меру собственного пессимизма или оптимизма; для таких лиц, принимающих решения, авторы рекомендуют для коэффициента γ (коэффициент пессимизма-оптимизма Гурвица) назначать значения по правилу:
  - $\gamma \geq 0{,}7$, если «крайний пессимист»;
  - $\gamma \approx 0{,}55 \ldots 0{,}65$, если «разумный пессимист»;
  - $\gamma \leq 0{,}3$, если «крайний оптимист»;
  - $\gamma \approx 0{,}35 \ldots 0{,}45$, если «разумный оптимист».

- критерием Лапласа-Бернулли следует руководствоваться ЛПР, которое несклонно к риску и считает себя реалистом.

Приложение 1

Решите следующие транспортные задачи (здесь A – вектор мощностей поставщиков, B – вектор мощностей потребителей, C – матрица транспортных издержек на единицу груза):

а) A = (100; 150; 50), $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$;

B = (75; 80; 60; 85),

б) A = (300; 350; 150; 200), $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

B = (400; 400; 200),

в) A = (20; 30; 40; 20), $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

B = (40; 40; 20).

Приложение 2

Решите задачи линейного программирования графическим методом:

1. $W(X) = 2x_1 + x_2 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ \qquad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $W(X) = x_1 - 3x_2 \to min$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge -3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2. \end{cases}$$

3. $W(X) = 4x_1 - 3x_2 \to max$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 0. \end{cases}$$

4. $W(X) = -x_1 + 4x_2 \to min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge -12. \end{cases}$$

5. $W(X) = x_1 + 2x_2 \to max$;

$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 12. \end{cases}$$

6. $W(X) = 3x_1 + x_2 \to max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$$

7. $W(X) = 3x_1 + 5x_2 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0\ , \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $W(X) = 2x_1 + 5x_2 \to min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 5x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2_2 \le 2. \end{cases}$$

9. $W(X) = x_1 + 3x_2 \to max$; **10.** $W(X) = x_1 + 4x_2 \to max$;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12. \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $W(X) = -3x_1 + 2x_2 \to max$; **12.** $W(X) = x_1 + 4x_2 \to max$;

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 0, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

13. $W(X) = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to max$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ \forall_j.$$

14. $W(X) = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to max$;

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22, \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ \forall_j.$$

15. $W(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ \forall_j.$$

16. $W(X) = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4, \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ \forall_j.$$

17. $W(X) = 11x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 18, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ \forall_j.$$

18. $W(X) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ \forall_j.$$

Приложение 3

Решите симплексным методом следующие задачи линейного программирования:

1. $W(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

2. $W(X) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

3. $W(X) = x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

4. $W(X) = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \to min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

5. $W(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq -4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

6. $W(X) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \to min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

7. $W(X) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

8. $W(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

9. $W(X) = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

10. $W(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

11. $W(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

12. $W(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

13. $W(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to min$;

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

14. $W(X) = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to min$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

15. $W(X) = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to min$;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 16, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

16. $W(X) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to min$;

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

17. $W(X) = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to max$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

18. $W(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

Приложение 4

Составьте двойственные задачи для следующих задач:

1. $W(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

2. $W(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

3. $W(X) = 2x_1 - x_3 + x_4 \to max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$

4. $W(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to min$;

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$

5. $W(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

6. $W(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

7. $W(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

8. $W(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge 1, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$

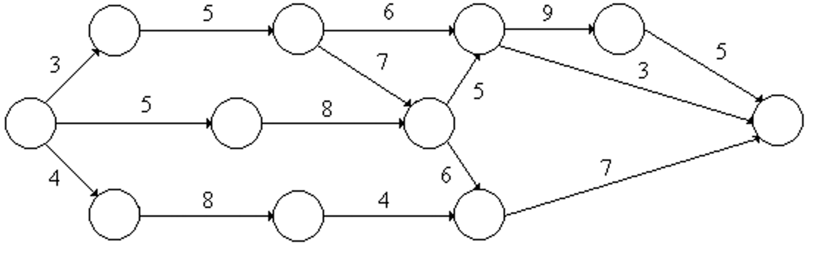
9. С помощью метода Лагранжа найдите условный экстремум функционала W:

а) $W = x_1 x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 2$;

б) $W = x_1^3 + x_2^3$ при $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{matrix}$

в) $W = x_1 + x_2$ при $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1.$

10. Сетевой график с указанием продолжительности работ в днях приведен на рисунке:



Требуется:

а) Пронумеровать события.

б) Выделить критический путь и найти его длину.

в) Определить резервы времени каждого события.

г) Определить полные резервы времени некритических работ.

Приложение 5

Решите задачи нелинейного программирования:

1. Найдите максимальное значение функции $F = x_1x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Найдите минимальное значение функции $F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)$ при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Найдите максимальное значение функции $F = 4x_1 + 3x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

4. Найдите максимальное значение функции $F = x_1x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Составьте математические модели задач:

5. На развитие предприятий отрасли на планируемый год выделено 220 млн руб. Эти средства могут быть распределены между тремя предприятиями. Каждый вариант распределения обеспечивает к концу года определенный доход отрасли. Учитывая возможные варианты распределения капитальных вложений между предприятиями и получаемый при этом доход, определите такой вариант распределения капиталовложений, при котором доход отрасли является максимальным.

Предприятие	Размер капиталовложений (млн. руб.)	Доход (тыс. руб.)	Размер капиталовложений (млн руб.)	Доход (тыс. руб.)	Размер капиталовложений (млн руб.)	Доход (тыс. руб.)
1	От 10 до 30	14,3	От 30 до 60	16,2	60 и более	17,2
2	От 10 до 40	13,5	От 40 до 70	17,8	70 и более	18,3
3	От 10 до 50	18,4	От 50 до 80	19,3	80 и более	19,4

6. Между n-предприятиями отрасли необходимо распределить выпуск некоторой однородной продукции. Затраты, связанные с производством $x_i (i = 1,n)$ единиц продукции на j-предприятии, зависят от объема производства и определяются функциями $f_i(x_i)$. Зная, что продукции должно быть изготовлено не менее b единиц, составьте такой план производства продукции предприятиями отрасли, при котором общие затраты, связанные с ее производством, минимальны.

7. В m-пунктах отправления сосредоточена однородная продукция в количествах, равных $a_1,...,a_m$ единиц. Эту продукцию нужно перевезти в n пунктов назначения в объемах, равных b_1, $b_2,...,b_n$ единиц. Цены, связанные с перевозкой единицы продукции, зависят от объемов перевозимой продукции и определяются функциями $f_{ij}(x_{ij})$, где x_{ij} $(i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n})$ количество единиц продукции, перевозимой из i-пункта отправления в j-пункт назначения. Определите, сколько единиц продукции из i-пункта отправления в j-пункт назначения следует доставить, чтобы вся продукция была перевезена в пункты назначения в необходимых объемах при минимальной общей стоимости перевозок.

Приложение 6

Найдите условные экстремумы функций:

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

2. $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

3. $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x1 + 2x2x3 = 11. \end{cases}$$

5. $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8. \end{cases}$$

6. Найдите максимальное значение функции $f = x_1^2 x_2^3 x_3^4$ при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 18$.

7. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на I предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на II предприятии, составляют $20x_2 + 6x_2^2$ руб. Определите, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

8. Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$ руб., а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$ руб. (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 – некоторые положительные числа). Составьте план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.

Приложение 7

Найдите решение следующих задач целочисленного линейного программирования:

1. $F = 7x_1 + x_2 \to max$;

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 110, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, x_j – целые ($j = 1, 5$).

2. $F = -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 6x_6 \to max$;

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 30, \\ -4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 60, \end{cases}$$

$0 \leq x_j \leq 10$, x_j – целые ($j = 1, 6$).

3. $F = 60x_1 + 70x_2 + 120,4x_3 + 130x_4 \to max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 1{,}85x_2 + x_3 + x_4 \leq 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10, \\ 4x_1 + 6{,}9x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100, \\ 6{,}3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 100, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, x_j – целые ($j = 1, 4$).

4. $F = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 11, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_5 + 3x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, x_j – целые ($j = 1, 6$).

Приложение 8

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1) По каким признакам осуществляется классификация методов оптимизации?

2) Как осуществляются вербальная и математическая постановки задачи линейного программирования?

3) Каковы основные правила перехода к двойственным задачам линейного программирования?

4) В чем заключается идея метода Гомори для полностью целочисленных задач линейного программирвания?

5) Сформулируйте математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.

6) Какими методами решаются многопродуктовые транспортные задачи?

7) Какими методами можно решать задачи нелинейного программирования?

8) В чем состоит идея решения задач сетевого планирования и управления?

9) Какие методы существуют для принятия управленческих решений в условиях природного риска?

10) В чем состоит суть критерия Вальда?

ЛИТЕРАТУРА

1. Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. М.: Прогресс, 1968.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986.

3. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. М.: ИНФРА-М, 2005.

4. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: пер. с англ. М.: Мир, 1982.

5. Банди Б. Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989.

6. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: пер. с англ. / под ред. А.А. Первозванского. М.: Наука, 1965.

7. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3 т.: пер. с англ. М.: Мир, 1972.

8. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964.

9. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972.

10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Советское радио, 1984.

11. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964.

12. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. М.: Физматгиз, 1969.

13. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.

14. Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике (методы оптимальных решений). М.: Статистика, 1976.

15. Воробьев С.Н., Балдин К.В. Управление рисками в предпринимательстве. М.: Дашков и К, 2007.

16. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. М.; СПб.; Краснодар: Лань, 2007.

17. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.

18. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования. М.: МГТУ, 1990.

19. Гуревич Т.Ф., Лущук В.О. Сборник задач по математическому программированию. М.: Колос, 1977.

20. Давыдов Э.Г. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1990.

21. Данциг Дж. Линейное программирование. М.: Мир, 1981.

22. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972.

23. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1986.

24. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр / под ред. И.Н. Воробьева. М.: Наука, 1981.

25. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.

26. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Высшая школа, 1979.

27. Зуховицкий С.И., Радчик И.А. Математические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965.

28. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высшая школа, 1975.

29. Карлик С. Математические методы в теории игр, программировании, экономике. М.: Мир, 1964.

30. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.

31. Кондаков Н.И. Логический словарь. М.: Наука, 1971.

32. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2006.

33. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Вышэйшая школа, 1978.

34. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ, 2005.

35. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960.

36. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

37. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.

38. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

39. Исследование операций: в 2 т.: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. М.: Мир, 1981.

40. Надежность и эффективность в технике: справочник: в 10 т. Т. 3. Эффективность технических систем. М.: Машиностроение, 1988.

41. Невежин В.П., Кружилов С.И. Сборник задач по курсу: Экономико-математическое моделирование. М., 2005.

42. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969.

43. Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы. М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2007.

44. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. М.: Высшая школа, 1989.

45. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988.

46. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. Теория, методы, приложения. М.: Радио и связь, 1982.

47. Резников Б.А. Системный анализ и методы системотехники. М.: Высшая школа, 1990.

48. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. М.: Воениздат, 1963.

49. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио, 1971.

50. Словарь по кибернетике / под ред. В.С. Михалевича. 2-е изд. Киев: Гл. ред. УСЭ им. М.П. Бажана, 1989.

51. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2 кн.: пер. с англ. М.: Мир, 1985.
52. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. М.: Статистика, 1972.
53. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Радио и связь, 1977.
54. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: пер. с англ. / под ред. Б.Г. Сумнова. М.: Мир, 1984.
55. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.
56. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
57. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях: пер. с англ. / под ред. А.А. Фридмана. М.: Мир, 1974.
58. Хуторецкий А.Б. Модели исследования операций. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006.
59. Шикин Е.В. Исследование операций. М.: ПРОСПЕКТ, 2006.
60. Щедрин Н.И., Кархов А.Н. Математические методы программирования в экономике. М.: Статистика, 1974.
61. Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 2006.
62. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио, 1974.

Учебное издание

Балдин Константин Васильевич,
Башлыков Виктор Николаевич,
Рукосуев Андрей Владимирович

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНИК

Подписано в печать 15.07.2015.
Электронное издание для распространения через Интернет.

ООО «ФЛИНТА», 117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17-Б, комн. 324.
Тел./факс: (495)334-82-65; тел. (495)336-03-11.
E-mail: flinta@mail.ru; WebSite: www.flinta.ru