

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С.

**Экономико-математические модели  
управления производством  
строительных материалов**

**Москва, 1996**

Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ. М.: ИПУ РАН. – 69 с.

*В работе рассматриваются задачи управления развитием отраслевого производства (на примере отрасли строительных материалов и изделий из них). К ним относятся задача оптимального распределения средств на маркетинговые исследования различных сегментов рынка, задача определения стандартного набора продукции, определение оптимального уровня специализации предприятий и, наконец, задача формирования механизмов, обеспечивающих финансирование программы развития отрасли.*

Рецензент: д.т.н. Цвиркун А.Д.

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

## **Введение**

Промышленность строительных материалов играет большую роль в народном хозяйстве Грузии, являясь важной составляющей материально-технической базы строительства. Около 90 % ее продукции используется в строительстве, причем доля последней в общей сумме материальных затрат на строительно-монтажные работы составляет около 50 %. Промышленность строительных материалов во многом определяет технический уровень в области капитального строительства. В Грузии промышленность строительных материалов как крупная и самостоятельная отрасль фактически создана за годы Советской власти. Значительное развитие получила промышленность строительных материалов в 1960-1975 годы. К 1975 г. по сравнению с 1960 г. объем валовой продукции увеличился в 3,2 раза. Особенно быстро развивалась промышленность сборного железобетона, валовая продукция которой увеличилась в 4,6 раза. В этот период вступили в действие домостроительные заводы в городах Тбилиси, Рустави, Кутаиси и Батуми, а также Чорохский завод по производству инертных материалов, Гардабанский картонно-рубероидный завод и др. Оценивая общий уровень развития и размещения отрасли, можно сделать вывод, что к 1990 году Грузия располагала относительно мощной промышленностью строительных материалов, конструкций и изделий. Тем не менее по уровню и темпам развития отрасли все еще отставала от быстро растущих потребностей в ее продукции строительного производства республики.

Промышленность строительных материалов в Грузии в 1990-1995 годах существенно пострадала от кризисных явлений, которые продолжаются и сегодня. Так в 1995 году по сравнению с 1990 годом производство цемента уменьшилось до 4-5 %, шифера - до 2 %, кирпича,

мягкого кровельного материала, изделий сантехники - до 1 %. Вообще прекратилось производство керамических плит для пола, облицовочных материалов для стен, линолеума (см. таб. 1)

Таблица 1.

Производство продукции строительных  
материалов в Грузии в 1990 - 1995 годах

<b>Вид продукции</b>	<b>Ед. измерения</b>	<b>1990 год</b>	<b>1995 год</b>
Цемент	тыс. тонн	1289,8	56,5
Шифер	млн. усл. плиток	26	0,055
Кирпич	млн. штук	629,02	6,4
Мягкая кровля	млн. кв. м.	45,5	0,435
Керамическая облицов. плитка	тыс. кв. м.	678,8	-
Керамическая плитка для полов	тыс. кв. м.	152,5	-
Рубероид	тыс. кв. м.	2910	-

Для скорейшего развития экономики республики требуется восстановление старых предприятий, строительство новых, восстановление и расширение жилищного фонда, что естественно подразумевает скорейший вывод из кризиса производства строительных материалов. Для решения этой задачи необходимо разработать стратегию развития отрасли, выделить приоритетные направления, ключевые проблемы, решение которых жизненно важно для развития приоритетных направлений, разработать пути решения этих проблем в условиях перехода к рыночной экономике и жесткого дефицита финансовых ресурсов. Эффективная разработка и реализация стратегии развития

отрасли требует применения современных управленческих технологий, таких как технология управления изменениями с ориентацией на конечный результат, методология «затраты - эффект» и др. Эти технологии широко используют экономико-математические модели и компьютерные системы поддержки принятия решений. В книге рассматривается ряд экономико-математических моделей управления производством строительных материалов. В первой главе описывается ряд моделей планирования маркетинговой деятельности. Вторая глава посвящена задаче стандартизации (выбору оптимального набора стандартных типов строительной продукции). В третьей главе рассматриваются задачи специализации и оптимального размещения предприятий. Наконец, в четвертой главе анализируются различные схемы финансирования программы развития промышленности строительных материалов.

# **ГЛАВА 1. Оптимизация маркетинговой деятельности**

Маркетинг в широком плане это последовательная политика производства, ориентированного на сбыт, окончательная цель которого - удовлетворение потребительского спроса.

Маркетинг в узком плане это комплекс мероприятий по изучению рынка и прогнозированию спроса. В главе мы рассмотрим ряд моделей оптимизации маркетинговой деятельности в узком плане, то есть деятельности по изучению рынка и прогнозированию спроса.

## **1.1 Постановка задачи**

Рассмотрим задачу изучения рынка и оценки прогнозируемого спроса на некоторый товар. Рынок состоит из  $m$  сегментов, выделяемых по ряду признаков (территория, тип потребителей и т.д.). Примем, что в  $i$ -ом сегменте имеется  $N_i$  потенциальных потребителей этого товара. Обозначим  $p_i$  - вероятность того, что случайно выбранный потенциальный потребитель согласится приобрести товар по предлагаемой цене. В данном случае мы предполагаем, что каждый потребитель приобретает не более одной единицы товара. В этом случае ожидаемый спрос  $V$  можно оценить как

$$V = \sum_{i=1}^m p_i N_i .$$

Таким образом задача изучения рынка и прогнозирования спроса сводится к оценке вероятностей  $\{p_i\}$  по сегментам рынка.

Распространенным способом изучения рынка является непосредственный опрос потенциальных потребителей путем

анкетирования (личные контакты, по телефону, почте и т.д.). Пусть выделенных средств на изучение рынка хватает на опрос  $R$  потенциальных потребителей (можно сказать, что ресурс службы маркетинга составляет  $R$  единиц). Как распределить этот ресурс между сегментами рынка и какую стратегию изучения рынка выбрать? Решение этих задач опирается на систему маркетинговой информации. Согласно Ф. Котлеру [4]:

Система маркетинговой информации - постоянно действующая система взаимосвязей людей, оборудования, методических приемов, предназначенная для сбора, классификации, анализа, оценки и распространения актуальной своевременной и точной информации для использования ее распорядителями сферы маркетинга с целью совершенствования планирования, претворения в жизнь и контроля за использованием маркетинговых мероприятий.

Система маркетинговой информации состоит из трех Систем сбора информации и Системы обработки собираемой информации (рис. 1.1)

Следуя [5] рассмотрим задачи, стоящие перед системой обработки информации и возможные методики обработки информации. Опираясь на

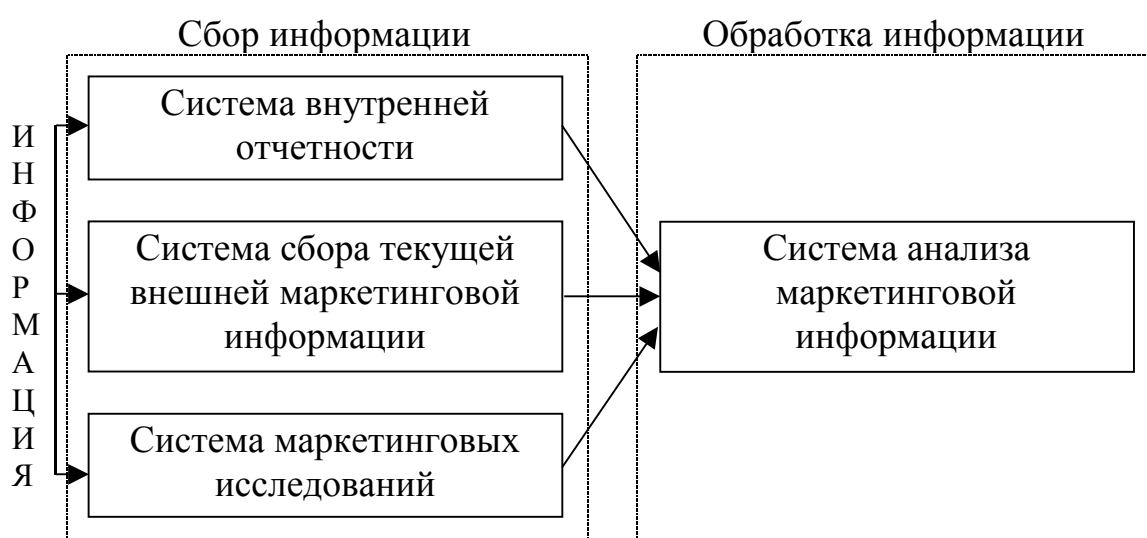


Рис. 1.1

многочисленные книги по маркетингу можно утверждать, что система обработки информации должна осуществлять поддержку принятия руководством стратегических и тактических решений, способствующих достижению целей предприятия. Цели формируются руководством на этапе стратегического планирования. Типичным считается сочетание рыночных и финансово-экономических целей и критериев. Критериями достижения рыночных целей являются: доля рынка, создание своих потребителей, увеличение объема продаж и др. Типичной финансово-экономической целью является получение прибыли. Далее, если не оговаривается иное, будет подразумеваться цель - максимизация прибыли на основе маркетинговой информации. Опираясь на систему маркетинговой информации руководство принимает стратегические решения, связанные с деятельностью предприятия в целом:

- выбор рынка для деятельности предприятия;
- выбор сегментов рынка;
- определение видов и ассортимента товаров и услуг, предлагаемых предприятием и их позиционирование, то есть фиксация основных признаков товара, отличающих его от конкурирующих товаров;
- определение направлений развития предприятия в части выхода на новые рынки и производства новых продуктов.

Руководство предприятия принимает также тактические решения:

- о ценах;
- об использовании товарных марок;
- о дополнительном сервисе;
- об упаковке;
- о способах продажи;
- о способах доставки товаров;
- о стимулировании сбыта и др.



Использование системы маркетинговой информации позволяет значительно снизить риск потерь от ошибок при оценке ситуации.

При принятии решений важную роль играет прогноз количественных характеристик внешней среды. В качестве примеров таких характеристик можно предложить следующие:

- количество обращений на фирму при публикации рекламного объявления;
- доля совершивших покупку среди всех обратившихся, и ее изменение при улучшении сервиса и расширении ассортимента;
- изменение объема продаж фирмы при изменении цен (в соответствии с зависимостью спроса от цены) и других условий;
- ожидаемый объем продаж при выходе на новый рынок;
- цены и условия продаж конкурентов.

Для того, чтобы получить достаточно точные ответы на подобные вопросы необходимо собрать данные с очень большого количества объектов, что практически нереально в силу ограниченности средств и времени. Поэтому естественным является применение статистических методов оценивания. Самым популярным методом в этом случае является выборочный метод [5].

Схематичное описание выборочного метода таково: из интересующих нас объектов числом  $N$  (так называемой генеральной совокупности) случайным образом отбирается выборка из  $n$  объектов. У отобранных объектов изучаются интересующие признаки и определяются соответствующие характеристики выборки. Далее результат распространяется на всю генеральную совокупность. При этом, если значение интересующего нас признака в выборке определено точно и равно, например,  $x$ , то значение этого признака для генеральной совокупности (обозначим его  $X$ ) можно определить лишь в виде

доверительного интервала. Причем, чем большее количество объектов попало в выборку, тем уже доверительный интервал, поэтому результат можно получить с любой требуемой точностью.

Приведем одну из основных методик обработки информации Полученной из выборки. Это методика оценки средних и суммарных значений.

Оценка средних и суммарных значений. Если каждый объект из  $N$  объектов генеральной совокупности обладает неким количественным признаком  $X_i$  (например, количество цемента, потребляемое в течении месяца),  $i$  - номер объекта, то нас интересуют следующие характеристики генеральной совокупности:

- суммарное потребление

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N;$$

- среднее значение на одного потребителя

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}.$$

Если обследовать объекты выборки объема  $n$  и для каждого из них определить значение  $X$ , то можно определить суммарное и среднее значение для выборки:

- суммарное значение

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n;$$

- среднее значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

На основе этого можно оценить значения  $\bar{X}$  и  $X$  в генеральной совокупности. Среднее значение признака  $\bar{X}$  будет лежать в интервале

$$\bar{X} = \bar{x} \pm \Delta. \quad (1.1)$$

Величина интервала ( $2\Delta$ ), в котором лежит значение  $\bar{X}$  зависит от размера выборки ( $n$ ) и от отношения размера выборки к генеральной совокупности ( $n/N$ ). Для того, чтобы определить величину  $\Delta$  определим для каждого объекта выборки разность между значением его признака ( $x_i$ ) и средним значением признака ( $\bar{x}$ ):  $x_i - \bar{x}$ . Далее полученные разности возводятся в квадрат и складываются по всей выборке. Из полученной суммы извлекается квадратный корень:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}. \quad (1.2)$$

Размер интервала зависит от полученной величины  $\sigma$ :

$$\Delta = \frac{2,58 \cdot \sigma}{\sqrt{(n-1)}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N-1}}. \quad (1.3)$$

Для того, чтобы получить суммарное значение количественного признака в генеральной совокупности, необходимо среднее значение признака умножить на количество единиц в генеральной совокупности:

$$X = \bar{x} \cdot N \pm \Delta N. \quad (1.4)$$

Имея выражения (1.1) - (1.4) можно решать ряд задач оптимального планирования маркетинговых исследований. Маркетинговые исследования это систематическое определение круга данных, необходимых в связи со стоящей перед фирмой маркетинговой ситуацией, их сбор, анализ и отчет о результатах [5]. Схема маркетингового исследования из [4] представлена на рис. 1.2. Для исследований могут быть использованы данные, собранные ранее для каких-то целей (вторичные данные) и данные, собранные впервые (первичные данные) в качестве источников вторичных данных могут выступать периодические издания, отчеты Госкомстата, коммерческая информация маркетинговых фирм, телевидение, радио и т.д.

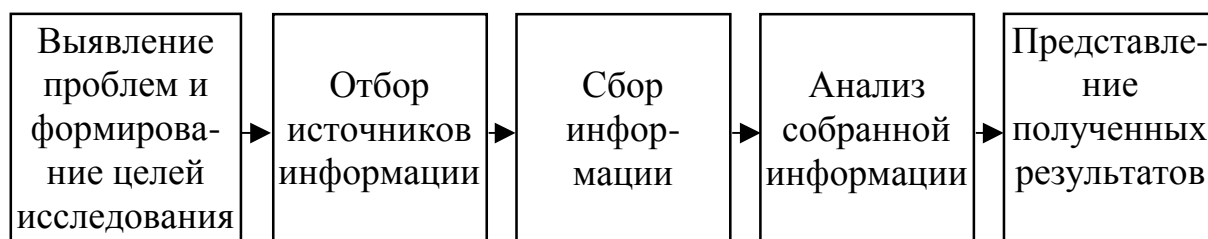


Рис. 1.2.

Со сбора вторичных данных должно начинаться всякое исследование, поскольку получение этой информации дешевле, чем первичной, а также, после изучения источников вторичных данных уменьшается риск ошибок при дальнейших полевых исследованиях.

Часто бывает, что вторичных данных недостаточно для понимания ситуации и принятия решения. Поэтому предпринимается полевое исследование - непосредственный сбор данных об изучаемых объектах.

Существуют три метода сбора первичных данных:

- наблюдение;
- эксперимент;
- опрос.

Наблюдение - метод исследования, при котором производится непосредственное наблюдение за обстановкой и фиксирование получаемой информации. Например, производится наблюдение за поведением людей в магазине, торгующем строительными материалами, чтобы определить предпочтения покупателей.

Эксперимент - создание определенных ситуаций и отслеживание реакции со стороны изучаемых объектов в сравнении с обычными условиями. Например, в каком-то регионе предприятие снижает цену на 10% и определяет увеличение объемов продаж. Если это увеличение значительно, то это повод для снижения цен в других регионах.

Опрос - изучение мнений людей по интересующим фирму вопросам. Например, фирма-производитель цемента опрашивает представителей строительных фирм о потребностях в цементе на предстоящий период, требованиях к качеству, цене и др.

Опрос является, пожалуй, самым дорогостоящим мероприятием, поскольку требует непосредственного контакта с потребителями. Рассмотрим задачу оптимального распределения средств на мероприятия по опросу в различных регионах (или сегментах рынка). Пусть задана величина средств, которая может быть израсходована на мероприятия по опросу в интересующих фирму регионах. Обозначим  $n_i$  - планируемую величину выборки в  $i$ -ом регионе. Затраты на проведение опроса в  $i$ -ом регионе в зависимости от величины выборки можно представить в виде

$$S_i = a_i + b_i n_i,$$

где  $a_i$  - постоянные затраты (не зависящие от величины выборки), а  $b_i n_i$  - переменные затраты, пропорциональные объему выборки. К постоянным затратам относятся транспортные расходы (на поездку группы специалистов в регион), затраты на организацию представительства, на обучение и т.д. К переменным затратам относится оплата времени работы специалистов, производящих опрос (время работы, естественно, пропорционально объему выборки), транспортные расходы на разъезды в регионе и др. По формуле (1.4) можно определить гарантированную оценку ожидаемого спроса в  $i$ -ом регионе в зависимости от объема выборки:

$$X_i^{\text{гар}} = \bar{x}_i N_i - \Delta_i N_i.$$

Обозначим  $p_i$  - прибыль от продажи единицы продукции в  $i$ -ом регионе. Тогда задача максимизации ожидаемой прибыли сведется к задаче максимизации следующей величины:

$$\Phi = \sum_{i \in P} (\bar{x}_i - \Delta_i) N_i p_i, \quad (1.5)$$

где  $P$  - множество обследуемых регионов. Предполагая, что  $1 \ll n_i \ll N_i$ , если  $i$ -ый регион включен в план обследования, мы можем представить выражение (1.3) приближенно в виде

$$\Delta_i \approx \frac{2,58 \sigma_i}{\sqrt{n_i}},$$

и, после подстановки в (1.5), получаем следующую задачу оптимального распределения средств на мероприятия по опросу в различных регионах: определить множество  $P$  обследуемых регионов и объем выборок  $n_i$  для всех  $i \in P$  так, чтобы величина

$$\Phi = \sum_{i \in P} \left( \bar{x}_i - \frac{2,58 \sigma_i}{\sqrt{n_i}} \right) p_i N_i \quad (1.5)$$

была максимальной при ограничении

$$\sum_{i \in P} (a_i + b_i n_i) \leq R, \quad (1.6)$$

где  $R$  - заданная величина средств на мероприятия по опросу.

Рассмотрим сначала частный случай задачи, когда множество  $P$  обследуемых регионов определено, и задача заключается в распределении переменных затрат таким образом, чтобы минимизировать

$$\sum_{i \in P} \frac{q_i}{\sqrt{n_i}}, \quad \text{где } q_i = 2,58 \sigma_i p_i N_i \quad (1.7)$$

при ограничении

$$\sum_{i \in P} b_i n_i \leq R - \sum_{i \in P} a_i = R(P).$$

Эта задача легко решается с применением метода множителей Лагранжа. Ее оптимальное решение:

$$n_i = \frac{\left(q_i/b_i\right)^{2/3}}{\sum_{j \in P} q_j^{2/3} b_j^{1/3}} \cdot R(P). \quad (1.8)$$

При этом величина (1.7) будет равна

$$\left(\sum_{j \in P} q_j^{2/3} b_j^{1/3}\right)^{3/2} \cdot R(P)^{-1/2}, \quad (1.9)$$

а ожидаемая прибыль составит

$$\Phi = \sum_{i \in P} \bar{x}_i N_i p_i - \left(\sum_{j \in P} q_j^{2/3} b_j^{1/3}\right)^{3/2} \cdot R(P)^{-1/2}. \quad (1.10)$$

Задача выбора оптимального множества регионов свелась к определению множества  $P$ , для которого (1.10) принимает максимальное значение. Эта задача относится к типу задач дискретной оптимизации, трудности решения которых хорошо известны [1]. При небольшом числе регионов задачу можно решить простым перебором всех возможных множеств (их число составляет  $2^m$ ). При большом числе  $m$  простой перебор невозможен и приходится применять различные эвристические правила.

Рассмотрим частный случай задачи, типичный для ситуации, когда фирма проводит исследование новых регионов, о которых нет никакой предварительной информации, кроме ожидаемой прибыли  $p_i$  на единицу продукции и размера генеральной совокупности в  $i$ -ом регионе  $N_i$ . В этих условиях естественно принять, что средние значения признака  $\bar{x}_i$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma_i$  одинаковы для всех регионов. Примем также, что функции затрат на проведение опроса также одинаковы для всех регионов. В этом случае задача с точностью до постоянного множителя сводится к максимизации величины

$$\sum_{i \in P} c_i - \beta \left(\sum_{i \in P} c_i^{2/3}\right)^{3/2} (R - aI)^{-1/2},$$

где  $\mathbf{l}$  - число регионов, подлежащих обследованию,  $c_i = N_i p_i$ .

Представляется достаточно естественным, что из двух регионов с разными значениями  $c_i$  следует предпочесть регион с большим значением  $c_i$  (то есть с большим произведением числа потребителей (размера генеральной совокупности) и ожидаемой прибыли на единицу продукции). Из этого естественного предположения следует простое эвристическое правило принятия решения: упорядочивать регионы по убыванию (невозрастанию)  $c_i$ . При заданном значении  $\mathbf{l}$  выбираем первые  $\mathbf{l}$  регионов в этом упорядочении. Оптимальная величина  $\mathbf{l}$  определяется простым перебором.



## **ГЛАВА 2. Задача выбора оптимального стандартного набора видов продукции**

Стандартным набором в производстве строительных материалов и изделий будем называть совокупность видов продукции, обладающих функциональной завершенностью, измеряемыми и контролируемые свойствами, независимо от того, предназначены они для непосредственного применения или для последующей переработки. Функциональная завершенность стандартного набора означает, что соответствующая совокупность видов продукции удовлетворяет все потребности в данной отрасли (в нашем случае в области строительных материалов и изделий). Понятие стандартного набора можно применять и к некоторой совокупности видов продукции и даже к отдельному виду. Например можно говорить о стандартном наборе марок цемента или размеров гвоздей. Очевидно, что существует много различных вариантов стандартных наборов. Для того, чтобы сравнивать различные наборы, введем два показателя - показатель маргинальной прибыли и показатель фиксированных издержек. Как известно, маргинальной прибылью называется прибыль, определяемая с учетом только переменных затрат. Производство каждого продукта требует, помимо переменных издержек (пропорциональных объему выпуска), фиксированных или постоянных (условно постоянных) издержек, то есть не зависящих от объема выпуска.

Пусть имеется  $n$  продуктов (строительных материалов и изделий), производство которых технологически осуществимо в рассматриваемом периоде времени. Обозначим  $a_j$  - переменные затраты на производство  $j$ -го продукта,  $b_j$  - постоянные или фиксированные затраты,  $r_j$  - маргинальная прибыль на единицу  $j$ -го продукта,  $V_j$  - потребность в  $j$ -ом продукте. Пусть

стандартный набор состоит из множества  $Q$  продуктов. Тогда совокупная маргинальная прибыль составит

$$P(Q) = \sum_{j \in Q} p_j V_j, \quad (2.1)$$

а совокупные фиксированные затраты

$$B(Q) = \sum_{j \in Q} b_j. \quad (2.2)$$

Разность  $\Pi = P - B$  составляет прибыль, которую дает стандартный набор  $Q$ .

Для постановки задачи определения оптимального стандартного набора обозначим через  $m$  число различных типов потребностей в строительных материалах и изделиях,  $R_i$  - множество продуктов, которые могут удовлетворить  $i$ -ую потребность (например, покрытие крыши, фундамент для дома, утеплитель и т.д.),  $v_{ij}$  - количество  $j$ -го продукта, требуемого для удовлетворения  $i$ -ой потребности. Обозначим также  $W_j$  - множество потребностей, удовлетворяемых  $j$ -ым продуктом из стандартного набора  $Q$ . В этом случае потребность в  $j$ -ом продукте составит

$$V_j = \sum_{i \in W_j} v_{ij}. \quad (2.3)$$

Множество продуктов  $Q$  будем называть полным, если для любой потребности  $i$  найдется продукт  $j \in Q$  такой, что  $i \in W_j$  (то есть найдется продукт, который может удовлетворить  $i$ -ую потребность). Очевидно, что стандартный набор должен быть полным множеством продуктов.

Постановка задачи. Определить полное множество  $Q$ , для которого величина прибыли

$$\Pi(Q) = \sum_{j \in Q} (p_j V_j - b_j) \quad (2.4)$$

максимальна.

*Замечание 1.* В случае, если рассматривается достаточно большой период времени, при определении прибыли и фиксированных затрат необходимо учитывать их изменение во времени, а также учитывать инфляцию и дисконтирование.

*Замечание 2.* В плановой экономике задача стандартизации решалась, как правило, по критерию минимума совокупных затрат. В рыночной экономике такой критерий уже не годится, поскольку он не учитывает потребительной стоимости продуктов.

Дадим постановку задачи в терминах теории графов. Для этого определим двудольный граф  $G(X, Y, U)$ , где  $X$  - множество вершин, соответствующих продуктам,  $Y$  - множество вершин, соответствующих потребностям. Вершины  $j \in X$  соединяются дугами  $(ji)$  с вершинами  $i \in Y$  в том и только в том случае, когда  $i \in W_j$  (то есть продукт  $j$  удовлетворяет  $i$ -ую потребность). Для каждой вершины  $j \in X$  зададим числа  $b_j, p_j$ , а для каждой дуги  $(j, i)$  - числа  $v_{ij}$ .

Подмножество  $Q$  множества вершин  $X$ , соответствующее полному множеству продуктов (или стандартному набору продуктов), назовем покрытием двудольного графа  $G$ . Обозначим  $T_i$  - множество продуктов из набора  $Q$ , каждый из которых может удовлетворить потребность  $i$ . Очевидно, что для удовлетворения  $i$ -ой потребности будет выбран продукт, для которого маргинальная прибыль максимальна. С учетом этого замечания критерий (2.4) можно записать в следующем виде:

$$\Pi = \sum_{i \in Y} \max_{j \in T_i} p_j v_{ij} - \sum_{j \in Q} b_j. \quad (2.5)$$

Задача свелась к поиску покрытия двудольного графа, для которого (2.5) принимает максимальное значение.

Пример. Пусть имеется четыре продукта и четыре типа потребностей. При этом продукт 1 может удовлетворить первую

потребность, продукт 2 - первую и вторую, продукт 3 - первую, вторую и третью, и наконец, продукт 4 - все четыре типа потребностей. Двудольный граф  $G$ , соответствующий этому случаю приведен на рис. 2.1.

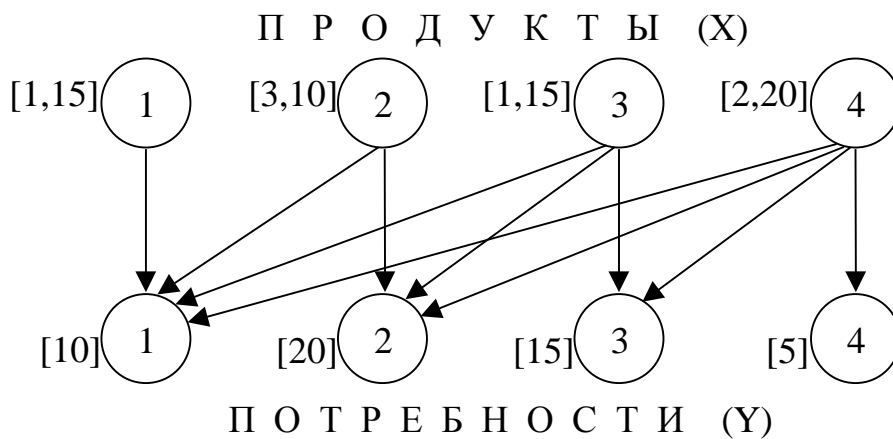


Рис. 2.1.

Числа  $p_j$ ,  $b_j$ , соответствующие маргинальной прибыли и фиксированным издержкам для  $j$ -го продукта указаны в квадратных скобках у вершин множества  $X$ , а числа  $v_i$ , соответствующие величине  $i$ -ой потребности, - в квадратных скобках у вершин множества  $Y$  (для упрощения задачи мы взяли  $v_{ij} = v_i$  для всех  $j$ ).

Чтобы решить эту задачу заметим, что продукт 3 включать в стандартный набор явно нецелесообразно. Действительно, продукт 4 мы обязаны включить в набор, поскольку только он может удовлетворить четвертую потребность. Но тогда и третью потребность выгоднее удовлетворять за счет четвертого продукта, а не третьего, так как у четвертого продукта маргинальная прибыль больше. Осталось рассмотреть четыре варианта с продуктами первым и вторым.

I вариант: в набор входят оба продукта, - и первый и второй:  $Q = \{1, 2, 4\}$ , при этом первый продукт удовлетворяет первую потребность в объеме  $V_1 = 10$ , второй - вторую в объеме  $V_2 = 20$ , четвертый - третью и четвертую в суммарном объеме  $V_4 = v_3 + v_4 = 20$ . Имеем:

$$\Pi(1;2;4) = p_1v_1 + p_2v_2 + p_4v_4 - b_1 - b_2 - b_4 = 40 + 60 + 40 - 45 = 95.$$

II вариант: в набор входят первый и четвертый продукты:  $Q = \{1, 4\}$ , при этом первый продукт удовлетворяет первую потребность в объеме  $V_1 = 10$ , а четвертый - все остальные в объеме  $V_4 = 40$ . Имеем:

$$\Pi(1;4) = p_1v_1 + p_4v_4 - b_1 - b_4 = 40 + 80 - 35 = 85.$$

III вариант: в набор входят второй и четвертый продукты:  $Q = \{2, 4\}$ , при этом второй продукт удовлетворяет первую и вторую потребность в объеме  $V_2 = 30$ , а четвертый - третью и четвертую в объеме  $V_4 = 20$ . Имеем:

$$\Pi(2;4) = p_2v_2 + p_4v_4 - b_2 - b_4 = 90 + 40 - 30 = 100.$$

IV вариант: в набор входит только четвертый продукт удовлетворяющий все потребности в объеме  $V_4 = 50$ . Имеем:

$$\Pi = 100 - 20 = 80.$$

Легко видеть, что оптимальным является III вариант, которому соответствует стандартный набор из двух продуктов - второго и четвертого. Поставленная задача является экстремальной задачей комбинаторного типа, сложности решения которой хорошо известны [1]. Рассмотрим ряд частных случаев, допускающих эффективные алгоритмы решения.

Будем говорить, что продукт  $j$  *накрывает* продукт  $k$ , если  $W_j \supset W_k$ , то есть продукт  $j$  может удовлетворить все потребности, которые удовлетворяет продукт  $k$ .

Пусть существует упорядочение продуктов  $j_1, j_2, \dots, j_n$  такое, что каждый продукт накрывает все следующие за ним. Так, для рассмотренного выше примера (см. рис. 2.1) соответствующее упорядочение - (4, 3, 2, 1). Построим сеть следующим образом. Вершины сети соответствуют продуктам  $j_1, j_2, \dots, j_n$  и одна вершина  $j_{n+1} = 0$  является

выходом сети (вершина  $j_1$  является входом). Вершины  $j_k, j_s$  ( $s > k$ ) соединяются дугой  $(j_k, j_s)$ , длина которой

$$l_{j_k j_s} = p_{j_k} (V_{j_k} - V_{j_s}) - b_{j_k}. \quad (2.6)$$

$V_{j_0} = 0$  по определению.

Содержательный смысл дуги  $(j_k, j_s)$  состоит в том, что продукт  $j_k$  удовлетворяет все потребности, которые он может удовлетворить за исключением тех, которые может удовлетворить продукт  $j_s$ , а длина дуги  $(j_k, j_s)$  при этом определяет прибыль, получаемую от продукта  $j_s$ . При таком построении сети любой путь, соединяющий вершину  $j_1$  с вершиной  $j_0$  определяет некоторый стандартный набор продуктов и наоборот, любому стандартному набору продуктов соответствует некоторый путь в сети, соединяющий вход  $j_1$  с выходом  $j_0$ . Каждой дуге  $(j_k, l_j)$  пути, соединяющего вход с выходом соответствует продукт  $j_k$ , входящий в стандартный набор. Поэтому длина пути равна прибыли, получаемой от соответствующего этому пути стандартного набора. Таким образом задача определения оптимального стандартного набора свелась к задаче поиска пути в сети, имеющего максимальную длину. Для этой задачи, как известно, существуют эффективные алгоритмы [1]. Для графа рис. 2.1 соответствующая сеть приведена на рис. 2.2.

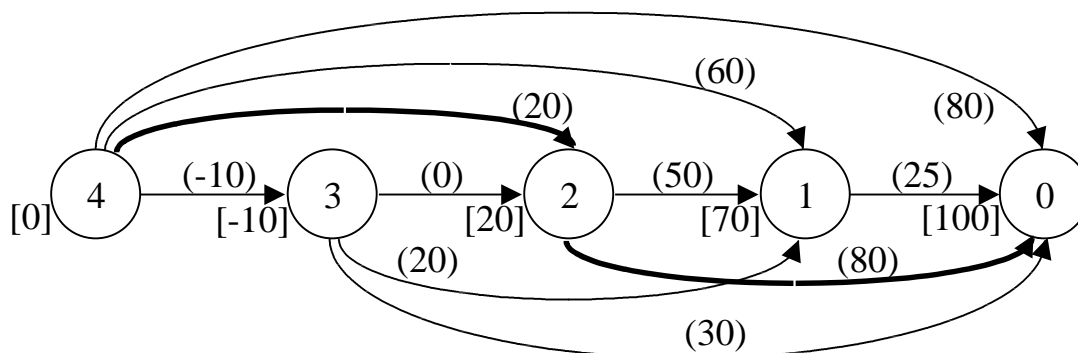


Рис. 2.2.

Длины дуг указаны в круглых скобках. В данном случае для определения пути максимальной длины, учитывая, что вершины сети правильно пронумерованы (для каждой дуги  $(i_k, i_l)$  имеет место  $k < l$ ), эффективнее всего применить алгоритм Форда для сетей, имеющих правильную нумерацию [1]. Согласно этому алгоритму, потенциал вершины  $j_1$  полагается равным 0, а потенциалы следующих вершин  $\lambda_j$  определяются последовательно:

$$\lambda_{j_l} = \max_{k < l} [\lambda_{j_k} + l_{j_k j_l}]. \quad (2.7)$$

Заметим, что фактически это метод динамического программирования Беллмана применительно к данной задаче. При этом потенциал вершины  $j_{n+1} = 0$  будет равен длине максимального пути. Сам максимальный путь определяется «обратным ходом», а именно, начиная с вершины  $j_{n+1}$  определяется вершина  $j_s$ , такая что

$$\lambda_{j_{n+1}} - \lambda_{j_s} = l_{j_s j_{n+1}}.$$

Эта вершина принадлежит пути максимальной длины. Далее, начиная с вершины  $j_s$  аналогичным образом определяется следующая вершина а т.д., пока не будет получена вершина  $j_1$ . Потенциалы вершин, полученные описанным алгоритмом, указаны в квадратных скобках у соответствующих вершин (рис. 2.2). Путь максимальной длины выделен толстыми дугами. Как легко видеть, мы получили тот же стандартный набор  $Q = \{2, 4\}$ , что и в примере 2.1, где решение было получено методом перебора. Рассмотренная модель позволяет решить задачу и в более сложном случае. А именно, до сих пор мы считали, что прибыль от продажи единицы продукта не зависит от объема продажи. На самом деле с ростом объема продаж прибыль на единицу продукта, как правило, уменьшается (хотя объем прибыли, естественно, растет с ростом объема продаж). Это происходит потому, что увеличение объема продаж

происходит, как правило, за счет вытеснения с рынка конкурирующих продуктов, что достигается за счет снижения цены, а значит уменьшения маргинальной прибыли на единицу продукта.

Пусть известна зависимость цены, а значит и маргинальной прибыли на единицу  $j$ -го продукта от объема его продаж  $p_j(V_j)$ . В рассмотренной выше модели эту зависимость легко учесть, поскольку для каждой дуги  $(j_k, j_l)$  известен продукт  $j_k$ , который соответствует этой дуге и объем этого продукта  $(V_{j_k} - V_{j_l})$ . Следовательно, легко определить длину дуги, соответствующую совокупной прибыли от продажи продукта  $j_k$ :

$$l_{j_k j_l} = p_{j_k} (V_{j_k} - V_{j_l}) \cdot (V_{j_k} - V_{j_l}) - b_{j_k}. \quad (2.8)$$

Вернемся к примеру 2.1 и примем, что маргинальная прибыль на единицу продукта уменьшается всякий раз при увеличении объема продаж за счет удовлетворения новой потребности. Соответствующие значения маргинальной прибыли приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Потребности Продукты	1	2	3	4
1	4			
2	2,5	3		
3	0,5	0,7	1	
4	0,9	1	1,5	2

Так, например, прибыль от продукта 4 на единицу продукта равна 2, если он удовлетворяет только четвертую потребность. Если объем продаж расширяется, и продукт 4 удовлетворяет и четвертую и третью потребности, то это достигается за счет снижения цены на 0,5, а значит и



маргинальной прибыли до величины 1,5 (заметим, что совокупный объем маргинальной прибыли при этом возрастает от 10 до 30). Дальнейший рост объема продаж, то есть удовлетворение второй потребности, требует дальнейшего снижения цены четвертого продукта на 0,5 и снижения маргинальной прибыли на единицу продукта до 1,0 и т.д. На основе таблицы 2.1 и формулы (2.8) можно определить новые длины дуг для сети рис. 2.2. Получаем сеть, изображенную на рис. 2.3.

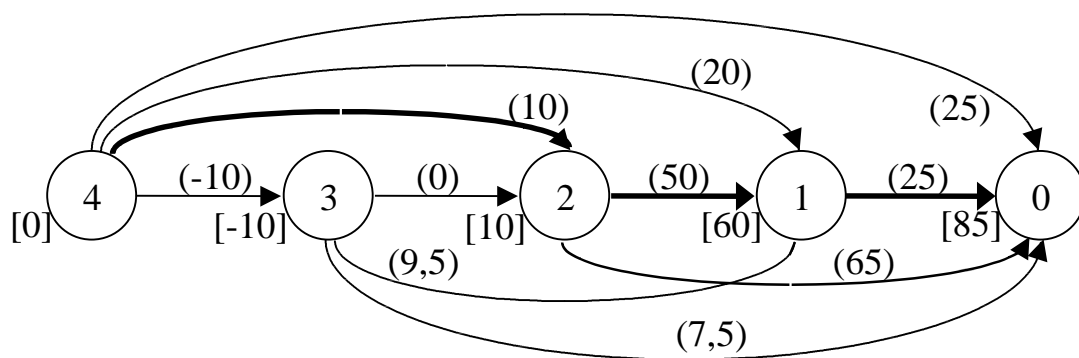


Рис. 2.3.

В данном случае оптимальный стандартный набор состоит уже из трех продуктов:  $Q = \{1, 2, 4\}$ .

Решение задачи в общем случае, когда не удастся получить упорядоченную последовательность накрывающих продуктов, требует применения комбинаторных методов. Опишем алгоритм решения задачи, основанный на методе ветвей и границ. Описание алгоритма дадим на примере 2.1.

Определим максимально возможный (то есть пользующийся спросом) выпуск  $j$ -го продукта:

$$V_j^m = \sum_{i \in W_j} v_{ij} \cdot \quad (2.9)$$

Построим график прибыли от  $j$ -го продукта в зависимости от объема его выпуска (рис. 2.4).

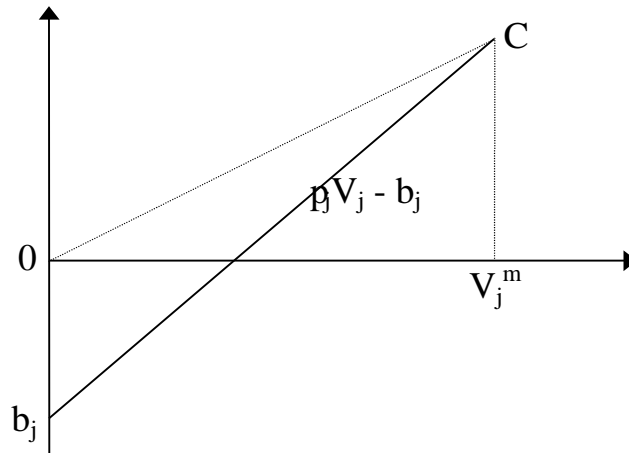


Рис. 2.4.

Заметим, что пунктирная прямая ОС является оценкой сверху величины прибыли при любом выпуске  $V_j$  и совпадает с величиной прибыли при максимальном выпуске. Определим наклон этой прямой:

$$q_j = \frac{p_j V_j^m - b_j}{V_j^m} = p_j - \frac{b_j}{V_j^m}. \quad (2.10)$$

Примем  $q_j$  за оценку прибыли на единицу  $j$ -го продукта при нулевых фиксированных затратах и рассмотрим задачу определения оптимального стандартного набора в этом случае. Поскольку фиксированные затраты равны нулю, то эта задача легко решается. А именно, каждая потребность  $i$  удовлетворяется тем продуктом, для которого оценка прибыли  $q_i v_{ij}$  максимальна. Очевидно, что величина полученной прибыли является оценкой сверху величины прибыли в оптимальном решении исходной задачи.

Для рассматриваемого примера 2.1 имеем:

$$w_1 = \{1\}; \quad w_2 = \{1, 2\}; \quad w_3 = \{1, 2, 3\}; \quad w_4 = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$V_1^m = 10; \quad V_2^m = 30; \quad V_3^m = 45; \quad V_4^m = 50;$$

$$q_1 = p_1 - b_1/V_1^m = 2,5; \quad q_2 = 2^2/3; \quad q_3 = 2^2/3; \quad q_4 = 1,6.$$

Очевидно, что в оценочной задаче первая и вторая потребность удовлетворяются вторым продуктом, а третья и четвертая - четвертым. При этом оценка сверху величины прибыли составит

$$\bar{\Pi} = 80 + 32 = 112.$$

Заметим, что оценка прибыли для третьего продукта является точной, поскольку выпуск третьего продукта максимален. Для четвертого продукта оценка является завышенной, поскольку выпуск четвертого продукта существенно ниже максимального. Для уточнения оценки проведем ветвление, то есть рассмотрим два непересекающихся подмножества решений. В первом подмножестве четвертый продукт удовлетворяет первую потребность, а во втором - не удовлетворяет.

Получим оценку для первого подмножества. Поскольку первая потребность удовлетворяется за счет четвертого продукта, то первый продукт не нужен. Для остальных продуктов получаем следующие оценочные прибыли на единицу продукта:

$$q_2 = 2,5; \quad q_3 = 4/7; \quad q_4 = 1,6$$

(при получении оценок для второго и третьего продуктов первая потребность не включается в объемы максимального выпуска, поскольку она удовлетворяется за счет четвертого продукта). В данном случае вторая потребность удовлетворяется вторым продуктом, а все остальные - четвертым. Оценка сверху величины прибыли для данного подмножества решений составит

$$\bar{\Pi}(1 \rightarrow 4) = 50 + 48 = 98$$

(запись  $\bar{\Pi}(1 \rightarrow 4)$  обозначает оценку сверху величины прибыли для подмножества решений, в которых первая потребность удовлетворяется за счет четвертого продукта).

Получим оценку для второго подмножества решений, в которых первая потребность *не удовлетворяется* за счет четвертого продукта.

Оценочные прибыли для первых трех продуктов будут, очевидно, такими же, как в (2.11). Изменится только оценка  $q_4$ , поскольку уменьшится максимальный выпуск  $V_4^m = 40$  вместо 50. Имеем

$$q_1 = 2,5; \quad q_2 = 2^2/3; \quad q_3 = 2/3; \quad q_4 = 1,5.$$

Оптимальное решение оценочной задачи имеет вид: первая и вторая потребности удовлетворяются вторым продуктом, а третья и четвертая - четвертым. Оценка сверху величины прибыли для данного подмножества равна

$$\mathfrak{H}(1 \rightarrow 4) = 2^2/3 \cdot 30 + 1,5 \cdot 20 = 110$$

(запись  $\mathfrak{H}(1 \rightarrow 4)$  означает оценку сверху величины прибыли для подмножества решений, в которых первая потребность *не удовлетворяется* за счет четвертого продукта).

Согласно методу ветвей и границ, из двух подмножеств выбирается подмножество с большей оценкой, то есть второе подмножество.

Анализируя оценку для второго подмножества мы видим, что оценка прибыли для третьего продукта является точной, а для четвертого завышенной, поскольку его выпуск меньше максимального. Поэтому второе подмножество делим на два подмножества. В первом вторая потребность *удовлетворяется* четвертым продуктом, а во втором - *не удовлетворяется* четвертым продуктом.

Оценим первое подмножество. Имеем величины оценочных прибылей:

$$q_1 = 2,5; \quad q_2 = 2; \quad q_3 = 0,4; \quad q_4 = 1,5$$

(при определении оценочных прибылей необходимо учитывать, что объем второй потребности не входит в максимальные выпуски для второго и третьего продуктов, а объем первой потребности не входит в максимальный выпуск для четвертого продукта).

В данном случае в оптимальном решении оценочной задачи первая потребность удовлетворяется за счет первого продукта, а остальные - за счет четвертого. Величина оценки для данного подмножества решений равна

$$\mathfrak{N}(1 \rightarrow 4; 2 \rightarrow 4) = 25 + 60 = 85.$$

Оценим второе подмножество, в котором ни первая, ни вторая потребности *не удовлетворяются* за счет четвертого продукта. Оценочные прибыли будут равны

$$q_1 = 2,5; \quad q_2 = 2^{2/3}; \quad q_3 = 2^{2/3}; \quad q_4 = 1,0.$$

В оптимальном решении оценочной задачи первая и вторая потребности удовлетворяются за счет второго продукта, а третья и четвертая - за счет четвертого. Оценка прибыли для данного подмножества будет равна

$$\mathfrak{N}(1 \nrightarrow 4; 2 \nrightarrow 4) = 80 + 20 = 100$$

(запись  $\mathfrak{N}(1 \nrightarrow 4; 2 \nrightarrow 4)$  означает оценку сверху величины прибыли для подмножества решений, в которых ни первая, ни вторая потребности *не удовлетворяются* за счет четвертого продукта).

Сравнивая все рассмотренные подмножества решений (их три, с оценками 98, 85 и 100) мы видим, что последнее подмножество имеет наибольшую оценку. Поэтому это подмножество и выбирается для дальнейшего разбиения (ветвления). Заметим, однако, что полученная оценка  $\mathfrak{N} = 100$  является точной, поскольку в оптимальном решении оценочной задачи оба продукта, - 2 и 4, образующие стандартный набор, выпускаются максимально возможными объемами. Поэтому полученное решение является оптимальным решением исходной задачи.

Дерево ветвлений (разбиения множества решений на подмножества) приведено на рис. 2.5 (толстыми дугами выделена ветвь, ведущая к

оптимальному решению, оценки подмножеств указаны в соответствующих вершинах).

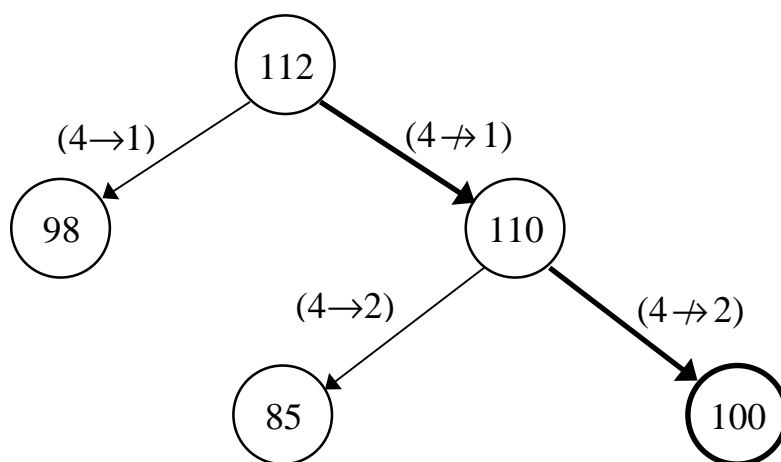


Рис. 2.5.

В случае, если для нескольких продуктов, вошедших в оптимальное решение оценочной задачи, оценка прибыли является завышенной, следует провести ветвление по каждому из этих продуктов и выбрать для дальнейшего разбиения тот продукт, для которого разность оценок подмножеств максимальна.

При решении задач большого размера построение всего дерева ветвлений является задачей, требующей большого времени и объема памяти. В этих случаях рекомендуется рандомизированный вариант метода ветвей и границ, в котором подмножества выбираются случайным образом, однако, вероятность выбора того или иного подмножества пропорциональна его верхней оценке. Решение большого числа задач показало, что описанный алгоритм в рандомизированном варианте позволяет получать достаточно хорошие решения.

Рассмотрим еще один пример, когда не существует последовательности накрывающих продуктов, и количества различных продуктов, удовлетворяющих одну и ту же потребность, различны.

Пример 2.2. Имеются четыре продукта и четыре потребности. Данные об объемах, маргинальных прибылях на единицу продукта и фиксированных затратах представлены на рис. 2.6.

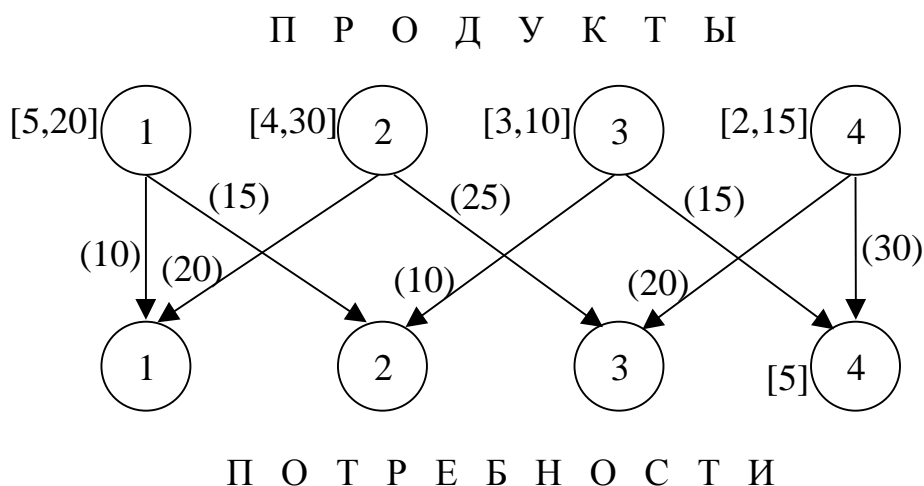


Рис. 2.6.

Первое число в квадратных скобках у вершин, соответствующих продуктам, определяет маргинальную прибыль на единицу продукта, а второе - фиксированные затраты. Числа в круглых скобках у дуг определяют количество соответствующего продукта, необходимое для удовлетворения соответствующей потребности.

I шаг. Получение верхней оценки прибыли для оптимального стандартного набора.

Имеем:

$$V_1^m = 25; \quad V_2^m = 45; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 50;$$

$$q_1 = 5 - {}^{20}_{/25} = 4,2; \quad q_2 = 4 - {}^{30}_{/45} = 3\frac{1}{3}; \quad q_3 = 3 - {}^{10}_{/25} = 2\frac{3}{5}; \quad q_4 = 2 - {}^{15}_{/50} = 1,7.$$

Так как  $q_1 v_{11} = 4,2 \cdot 10 < q_2 v_{12} = 6\frac{2}{3}$ , то первая потребность удовлетворяется вторым продуктом.

Так как  $q_1 v_{21} = 4,2 \cdot 15 > q_3 v_{23} = 2,6 \cdot 10$ , то вторая потребность удовлетворяется первым продуктом.

Так как  $q_2 v_{32} = \frac{10}{3} \cdot 25 > q_4 v_{34} = 1,7 \cdot 20$ , то третья потребность удовлетворяется вторым продуктом.

Наконец, так как  $q_3 v_{43} = 2,6 \cdot 15 < q_4 v_{44} = 1,7 \cdot 30$ , то четвертая потребность удовлетворяется четвертым продуктом.

Верхняя оценка прибыли равна

$$\mathfrak{R} = 66\frac{2}{3} + 63 + 83\frac{1}{3} + 51 = 264.$$

II шаг. Оценка прибыли для второго продукта точная, а для первого и четвертого - завышенная, поэтому ветвление можно проводить как по первому, так и по четвертому продукту. Рассмотрим обе возможности.

*1 вариант.* Ветвление проводим по первому продукту. Разбиваем множество решений на два подмножества. В первом подмножестве первый продукт удовлетворяет первую потребность, а во втором не удовлетворяет. Получим верхнюю оценку прибыли для первого подмножества. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 25; \quad V_2^m = 25; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 50.$$

Оценка прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 4,2; \quad q_2 = 4 - \frac{30}{25} = 2\frac{4}{5}; \quad q_3 = 2\frac{3}{5}; \quad q_4 = 1,7.$$

Отличие от предыдущего варианта, как легко проверить, только в том, что первая потребность удовлетворяется первым продуктом. Верхняя оценка прибыли для данного подмножества решений составит

$$\mathfrak{R}(1 \rightarrow 1) = 4,2 \cdot 25 + 2\frac{4}{5} \cdot 25 + 1,7 \cdot 30 = 226.$$

Получим верхнюю оценку прибыли для второго подмножества решений. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 15; \quad V_2^m = 45; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 50.$$

Верхние оценки прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 5 - \frac{20}{15} = 3\frac{2}{3}; \quad q_2 = 3\frac{1}{3}; \quad q_3 = 2\frac{3}{5}; \quad q_4 = 1,7.$$

В данном случае оптимальное решение оценочной задачи такое же, как на первом шаге. Верхняя оценка прибыли равна



$$\mathfrak{N}(1 \rightarrow 1) = 55 + 150 + 51 = 256.$$

*2 вариант.* Ветвление проводим по четвертому продукту. Разбиваем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве четвертый продукт удовлетворяет третью потребность, а во втором - не удовлетворяет. Получим верхнюю оценку прибыли для первого подмножества. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 25; \quad V_2^m = 20; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 50.$$

Верхние оценки прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 4\frac{1}{5}; \quad q_2 = 2,5; \quad q_3 = 2,6; \quad q_4 = 1,7.$$

Единственное отличие от оценочного решения, полученного на первом шаге в том, что третья потребность удовлетворяется четвертым продуктом, а не вторым.

Верхняя оценка прибыли для данного подмножества решений составит

$$\mathfrak{N}(4 \rightarrow 3) = 4,2 \cdot 15 + 2,5 \cdot 20 + 1,7 \cdot 50 = 198.$$

Получим верхнюю оценку прибыли для второго подмножества решений. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 25; \quad V_2^m = 45; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 30.$$

Верхние оценки прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 4,2; \quad q_2 = 3\frac{1}{3}; \quad q_3 = 2\frac{3}{5}; \quad q_4 = 1,5.$$

Оптимальное решение оценочной задачи такое же, как и на первом шаге. Верхняя оценка прибыли равна

$$\mathfrak{N}(4 \rightarrow 3) = 4,2 \cdot 15 + 3\frac{1}{3} \cdot 45 + 1,5 \cdot 30 = 258.$$

Сравним разности оценок для первого и второго вариантов. Для первого варианта разность оценок равна  $256 - 226 = 30$ , а для второго  $258 - 198 = 60$ , то есть в два раза больше. Поэтому для ветвления на втором шаге выбираем второй вариант, то есть проводим разбиение по четвертому продукту. Из двух подмножеств второго варианта выбираем

подмножество с максимальной оценкой, то есть подмножество решений, в которых четвертый продукт не удовлетворяет третью потребность.

III шаг. Для оценочного решения, выбранного на втором шаге, верхние оценки прибыли для второго и четвертого продукта являются точными, а для первого она завышена, поэтому проводим ветвление по первому продукту. Разбиваем подмножество решений, в которых четвертый продукт не удовлетворяет третью потребность, на два подмножества. В первом подмножестве первый продукт удовлетворяет первую потребность, а во втором - не удовлетворяет.

Получим верхнюю оценку прибыли для первого подмножества решений. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 25; \quad V_2^m = 25; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 30.$$

Верхние оценки прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 4,2; \quad q_2 = 4 - \frac{30}{25} = 2,8; \quad q_3 = 2,6; \quad q_4 = 1,5.$$

Единственное отличие от варианта, полученного на первом шаге, в том, что первая потребность удовлетворяется первым продуктом, а не вторым.

Верхняя оценка прибыли равна

$$\bar{\Pi}(4 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1) = 4,2 \cdot 25 + 2,8 \cdot 25 + 1,5 \cdot 30 = 220.$$

Получим верхнюю оценку прибыли для второго подмножества. Максимальные объемы выпуска:

$$V_1^m = 15; \quad V_2^m = 45; \quad V_3^m = 25; \quad V_4^m = 30.$$

Верхние оценки прибыли на единицу продукта:

$$q_1 = 3\frac{2}{3}; \quad q_2 = 3\frac{1}{3}; \quad q_3 = 2,6; \quad q_4 = 1,5.$$

Оценочное решение полностью совпадает с оценочным решение первого шага.

Верхняя оценка прибыли равна

$$\bar{\Pi}(4 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1) = 3\frac{2}{3} \cdot 15 + 3\frac{1}{3} \cdot 45 + 1,5 \cdot 30 = 250.$$

Выбираем подмножество  $\{4 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1\}$ , у которого верхняя оценка прибыли больше. Заметим теперь, что для этого подмножества решений верхняя оценка является точной, поэтому полученное оценочное решение является оптимальным. Таким образом в оптимальный стандартный набор входят первый, второй и четвертый продукты, что обеспечивает максимальную прибыль, равную 250. Дерево ветвлений для рассмотренного примера приведено на рис. 2.7.

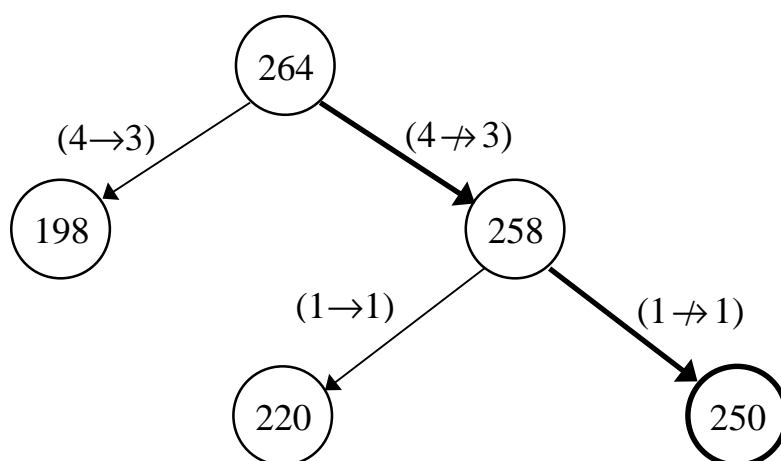


Рис. 2.7.

Верхние оценки прибыли для подмножеств указаны в соответствующих вершинах, ветвь дерева, ведущая к оптимальному решению, выделена толстыми линиями.

Описанная модель и алгоритмы решения позволяют решать задачу определения оптимального стандартного набора как для отрасли строительных материалов и изделий в целом, так и для отдельных видов продукции.

### **ГЛАВА 3. Определение оптимального уровня специализации предприятий**

Продуктовая специализация в промышленности строительных материалов и изделий означает, что совокупность производителей в стране должна охватывать всю номенклатуру видов продукции и обеспечивать выпуск продукции в количествах, удовлетворяющих общественные потребности. Специализация позволяет существенно снизить затраты на производство продукции. Сложность проблемы специализации состоит в том, что общественные потребности являются случайными величинами, изменяющимися по времени. В то же время специализированные предприятия по сути своей жестко привязаны к определенным видам продукции и их использование для производства других видов либо невозможно, либо требует больших затрат. Проблемы не возникает, если уровень потребности в данном виде продукции известен и не подвержен быстрым колебаниям. В этом случае очевидно, что мощности специализированного производства должны соответствовать уровню потребностей. При медленных изменениях уровня потребностей происходят соответствующие изменения мощностей специализированных производств (либо строятся дополнительные мощности, либо перепрофилируются уже имеющиеся на выпуск другой продукции). Однако, на практике изменения потребности происходят достаточно быстро по сравнению с инвестиционными процессами. В этом случае уровень специализации соответствует не максимальному, а некоторому среднему уровню потребностей, а избыточный спрос удовлетворяется за счет неспециализированного производства, которое может гибко перестраиваться на выпуск различных видов продукции. Ясно, что

неспециализированное производство обходится дороже. Поэтому возникает задача оптимального соотношения между специализированным и гибким производством или, другими словами, задача определения оптимального уровня специализации. Рассмотрим сначала случай одного вида продукции. Пусть известна функция распределения  $F(y)$  величины потребности  $y$  в данном виде продукции в рассматриваемом периоде. Обозначим  $x$  - совокупную мощность специализированных предприятий, выпускающих данную продукцию. Если величина потребности  $y < x$ , то специализированные предприятия простаивают, поскольку они не могут быть использованы для выпуска другой продукции), что приводит к потерям, пропорциональным разности  $(x - y)$ . С другой стороны, если величина потребности  $y > x$ , то недостающую продукцию приходится производить на неспециализированных (а значит - более дорогих) производствах, либо закупать в других странах, что также обходится дороже и приводит к потерям, пропорциональным разности  $(y - x)$ . Очевидно, что существует оптимальный уровень специализации  $x$ . Примем, что потери  $S$  при недостаточном или избыточном спросе являются линейными функциями, то есть

$$S = \begin{cases} \alpha(x - y), & \text{если } x > y \\ \beta(y - x), & \text{если } y > x \end{cases}, \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  - коэффициент потерь в случае простоя специализированного предприятия, а  $\beta$  - коэффициент потерь в случае необходимости производства данной продукции на неспециализированных предприятиях или закупки ее в других странах.

Определим математическое ожидание потерь:

$$M_y[S] = \alpha \int_0^x (x - y) dF(y) + \beta \int_x^\infty (y - x) dF(y). \quad (3.2)$$

Поставим задачу определить уровень специализации  $x$ , при котором ожидаемые потери минимальны. Для ее решения проведем простое преобразование выражения (3.2):

$$\begin{aligned} M_y[S] &= (\alpha + \beta) \int_0^x (x - y) dF(y) - \beta \int_0^\infty (x - y) dF(y) = \\ &= (\alpha + \beta) \left[ (x - y)F(y) \Big|_0^x + \int_0^x F(y) dy \right] - \beta x + \beta \mu = \quad . \quad (3.3) \\ &= \beta(\mu - x) + (\alpha + \beta) \int_0^x F(y) dy \end{aligned}$$

Производная выражения (3.3) равна

$$(\alpha + \beta)F(x) - \beta$$

и является возрастающей функцией  $x$ . Поэтому точка минимума выражения (3.3) определяется из уравнения

$$F(x) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + k}, \quad (3.4)$$

где  $k = \alpha/\beta$  - отношение коэффициента потерь при недостаточном спросе к коэффициенту потерь при избыточном спросе.

*Замечание.* В данном случае мы не проводим различия между потребностью и спросом (выявленной потребностью), считая, что спрос соответствует потребности.

В случае нескольких видов продукции задача решается независимо для каждого вида.

## **ГЛАВА 4. Механизм финансирования инвестиционных программ развития производства строительных материалов и изделий**

Рассмотренные в предыдущей главе задачи и методы их решения позволяют определить потребность в строительных материалах и изделиях, сформировать стандартный набор видов продукции, определить оптимальный уровень специализации производства. Однако, для того, чтобы выйти на требуемый уровень производства, необходима инвестиционная программа развития производства строительных материалов и изделий. В условиях ограниченности финансовых ресурсов жесткие требования предъявляются к эффективности инвестиционных проектов. При этом первоочередными задачами программы должны быть задачи реформирования, реструктуризации и реконструкции уже имеющихся предприятий. Ограниченность финансовых ресурсов предъявляет также серьезные требования к механизмам их распределения. Будем рассматривать два иерархических уровня распределения финансовых ресурсов. На верхнем уровне происходит распределение финансовых ресурсов по приоритетным направлениям развития производства строительных материалов и изделий. Эта задача решается на уровне бюджетных комиссий или комитетов. Члены комиссий или комитетов выступают в данном случае как эксперты, вырабатывающие рекомендации по финансированию приоритетных направлений. Мы рассмотрим две различные схемы работы комиссий. В первой схеме по каждому приоритетному направлению создается своя комиссия, которая вырабатывает рекомендации по финансированию данного направления. Как правило, при этом суммарное финансирование всех приоритетных

направлений превышает выделенный объем финансовых ресурсов. Поэтому окончательное решение принимается центральной (согласительной) комиссией, включающей представителей комиссий по всем направлениям. Центральная комиссия может применять различные механизмы выработки согласованного решения. В книге анализируются так называемые приоритетные механизмы распределения финансовых ресурсов.

Во второй схеме согласительные комиссии создаются сразу по группам направлений (в простейшем случае - по парам направлений). Задача каждой согласительной комиссии состоит в том, чтобы выработать рекомендации о соотношении объемов финансирования направлений, входящих в соответствующую группу. Разбиение на группы проводится таким образом, что зная соотношение объемов финансирования направлений внутри группы и общий объем выделенных финансовых ресурсов можно однозначно определить объем финансирования каждого приоритетного направления. Заметим, что в первой схеме основная тяжесть принятия решения ложится на центральную согласительную комиссию, а во второй - на согласительные комиссии по группам направлений. По этой причине первую схему будем называть централизованной, а вторую - децентрализованной.

На нижнем уровне происходит распределение финансовых ресурсов непосредственно по инвестиционным проектам внутри каждого приоритетного направления. Здесь, как правило, применяются конкурсные механизмы, механизмы смешанного финансирования, когда государство дает только часть необходимых средств, а остальные средства вносит фирма, получившая заказ на реализацию соответствующего проекта и механизмы льготного кредитования. Ниже проводится анализ ряда механизмов верхнего и нижнего уровней.



#### 4.1. Анализ централизованной схемы

Обозначим  $S_i$  - объем финансирования, рекомендованный  $i$ -ой комиссией,  $S = \sum_{i=1}^n S_i$  - общий объем требуемого финансирования ( $n$  - число приоритетных направлений),  $R$  - выделенный объем средств. Проблема для центральной комиссии возникает в случае, когда  $S > R$ , то есть выделенных средств не хватает. В этом случае применяются различные правила принятия согласованного решения. Эти правило опираются, обычно, на количественные экспертные оценки степени приоритетности направлений. Обозначим  $\eta_i$  - степень приоритетности  $i$ -го направления. Если степени приоритетности определены, то согласованное распределение финансовых ресурсов вычисляется по формулам

$$x_i = \min(s_i; \gamma \eta_i), \quad (4.1)$$

где параметр  $\gamma$  определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^n \min(s_i; \gamma \eta_i) = R. \quad (4.2)$$

Для того, чтобы решить систему (4.1) - 4.2), определим

$$\gamma_i = \frac{s_i}{\eta_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

Пусть все направления пронумерованы по возрастанию  $\gamma_i$ , то есть

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n.$$

Определим  $k$  такое, что

$$\sum_{i=1}^k s_i + \gamma_k \sum_{i=k+1}^n \eta_i \leq R,$$
$$\sum_{i=1}^{k+1} s_i + \gamma_{k+1} \sum_{i=k+2}^n \eta_i > R.$$

Величина  $\gamma$  определяется выражением

$$\gamma = \frac{R - \sum_{i=1}^k s_i}{\sum_{i=k+1}^n \eta_i}. \quad (4.4)$$

Пример. Имеются четыре приоритетных направления. Степени приоритетности и рекомендуемые комиссиями объемы финансирования приведены в таблице.

Таблица 4.1.

i	1	2	3	4
$s_i$	30	40	50	60
$\Xi_i$	6	5	5	4
$g_i$	5	8	10	15

I шаг. Полагаем  $\gamma = \gamma_1 = 5$  ( $k = 1$ ),

$$s_1 = \gamma_1(\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) = 30 + 5 \cdot 14 = 100 < 128,$$

$$s_1 + s_2 + \gamma_2(\eta_3 + \eta_4) = 70 + 8 \cdot 9 = 142 > 128.$$

Следовательно, согласно (4.4)

$$\gamma = \frac{128 - 30}{14} = 7.$$

Окончательно имеем

$$x_1 = 30; \quad x_2 = \gamma \eta_2 = 35; \quad x_3 = \gamma \eta_3 = 35; \quad x_4 = \gamma \eta_4 = 28.$$

В зависимости от того, как определяются приоритеты  $\{\eta_i\}$ , мы получаем различные механизмы финансирования.

а) Механизмы абсолютных приоритетов. В этих механизмах экспертная комиссия (в качестве экспертной комиссии может выступать центральная согласительная комиссия) определяет ожидаемый эффект  $\Xi_i$

от  $i$ -го приоритетного направления в случае его финансирования в полном объеме. Таким образом, механизмы абсолютных приоритетов реализуют принцип распределения финансовых ресурсов пропорционально ожидаемым эффектам от направлений (при их достаточном финансировании), то есть  $\eta_i = \Xi_i$ . Достоинством данного принципа является отсутствие у комиссий по направлениям заинтересованности завышать объем требуемых средств, то есть данный механизм является механизмом честной игры [3]. Действительно, если при сообщении достоверной оценки финансирования направления  $i$  (обозначим эту оценку через  $r_i$ ) объем выделенных средств  $x_i$  оказывается меньше чем  $r_i$ , то сообщая завышенную оценку  $s_i > r_i$  комиссия не сможет увеличить финансирование своего направления. Докажем этот факт.

Пусть при сообщении комиссией  $i$  достоверной оценки  $r_i$  имеет место  $x_i < r_i$ , а следовательно  $x_i = \gamma \eta_i$ , причем  $\gamma \leq \gamma_i$ .

Заметим теперь, что при увеличении  $s_i$  величина  $\gamma_i$  увеличивается, а величина  $\gamma$ , определяемая выражением (4.4) не изменяется. Поэтому увеличение  $s_i$  никак не повлияет на результирующее распределение финансов.

б) Механизмы прямых приоритетов. В этих механизмах экспертная комиссия определяет ожидаемую эффективность от развития  $i$ -го направления, то есть эффект на единицу затрат (обозначим ожидаемую эффективность  $q_i$ ). Тогда ожидаемый эффект составит  $\eta_i = q_i s_i$  и формулы для распределения средств принимают вид:

$$x_i = \min(s_i; \gamma \cdot q_i s_i). \quad (4.5)$$

В данном случае  $\gamma_i = 1/q_i$ .

Покажем, что в данном случае существует явная заинтересованность комиссий в завышении рекомендуемых оценок требуемых средств, то есть что  $x_i$  возрастает с ростом  $s_i$ . При  $x_i < s_i$  этот факт очевиден. Если  $x_i \geq s_i$ , то

$$x_i = \gamma \cdot q_i \cdot s_i = \frac{q_i s_i \left( R - \sum_{j=1}^k s_j \right)}{\sum_{j=k+1}^n q_j s_j},$$

причем  $\gamma_i \geq \gamma$ . Легко убедиться, что  $x_i$  возрастающая функция  $(q_i s_i)$ , а значит и  $s_i$ . Заинтересованность комиссий в завышении рекомендуемых объемов финансирования своих направлений является серьезным недостатком механизмов прямых приоритетов. Несмотря на это, подобного вида механизмы, основанные на пропорциональном «урезании» требований довольно популярны на практике.

в) Механизмы обратных приоритетов. В этих механизмах экспертная комиссия определяет, как и в механизмах абсолютных приоритетов, ожидаемый эффект от реализации программы развития соответствующего приоритетного направления. Однако, распределение средств ведется пропорционально эффективностям  $q_i = \mathfrak{E}_i/s_i$  и формулы (4.1) принимают вид

$$x_i = \min \left( s_i; \gamma \frac{\mathfrak{E}_i}{s_i} \right) \quad (4.6)$$

При определении  $k$  и  $\gamma$  согласно формуле (4.4) следует взять  $\gamma_i = s_i^2/\mathfrak{E}_i$ . Теоретико-игровой анализ механизмов обратных приоритетов сложнее, чем двух предыдущих. Тем не менее можно доказать [2], что существует гарантирующая стратегия для каждой комиссии

$$s_i^r = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_i}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\mathfrak{E}_j}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.7)$$

сообщение которой обеспечивает данному направлению финансирование не менее  $x_i = s_i^r$  при любых оценках по остальным направлениям. Если

$s_i^r > r_i$ , то комиссия по данному направлению сообщит, очевидно, истинную оценку  $s_i = r_i$  и получит  $x_i = r_i$ .

Сравним распределение средств, получаемое при разных механизмах на данных примера 4.1. Примем, что оценки  $r_1 = 30$ ,  $r_2 = 40$ ,  $r_3 = 50$ ,  $r_4 = 60$  являются объективными мнениями комиссий. Для механизма абсолютных приоритетов решение уже было получено:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 35, \quad x_3 = 35, \quad x_4 = 28.$$

Для оценки близости этого распределения к оптимальному определим эффективности:

$$q_1 = \Theta_1/s_1 = 0,2; \quad q_2 = 1/8; \quad q_3 = 0,1; \quad q_4 = 1/15.$$

Первое направление является самым эффективным, поэтому на него следует выделить максимум средств  $x_1 = 30$ , далее, на второе, -  $x_2 = 40$ , на третье -  $x_3 = 50$  и, наконец, оставшиеся средства на четвертое -  $x_4 = 8$ . Такое распределение средств дает максимум ожидаемого эффекта:

$$\Theta_{\max} = 6 + 5 + 5 + 1/15 \cdot 8 = 16^{8/15}.$$

Полученное на основе механизма абсолютных приоритетов распределение средств дает ожидаемый эффект в размере

$$\Theta_{\text{абс}} = 6 + 1/8 \cdot 35 + 1/10 \cdot 35 + 1/15 \cdot 28 = 15^{89/120},$$

что составляет

$$K = \frac{\Theta_{\text{абс}}}{\Theta_{\max}} \cdot 100\% = 95 \%$$

от максимального эффекта. Механизм прямых приоритетов при сообщении комиссиями тех же оценок дает то же самое распределение средств.

Следует, однако, учитывать тенденцию завышения оценок. Примем, что комиссии могут без особых последствий завысить рекомендуемые оценки примерно в два раза по сравнению с объективными. Заметим, что само понятие объективных оценок является весьма размытым и по сути

дела является субъективным мнением комиссии, что создает благодатную почву для проявления тенденции к завышению. Если каждая комиссия использовала возможности завышения оценок требуемых средств в максимальной степени, то рекомендуемые оценки будут следующими:

$$s_1 = 60, \quad s_2 = 80, \quad s_3 = 100, \quad s_4 = 120.$$

Применяя алгоритм распределения средств, мы получим следующее распределение:

$$x_1 = 38,4; \quad x_2 = 32; \quad x_3 = 32; \quad x_4 = 25,6.$$

Сообщая максимальные оценки первая комиссия получает больше средств, чем необходимо. Если желание комиссии получить только требуемые средства, то есть 30, то она скорректирует оценку (снизит ее) так, чтобы получить требуемую величину. Для того, чтобы получить оптимальную оценку нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{0,2s_1}{0,2s_1 + 28} \cdot 128 = 30.$$

Решая это уравнение получаем:

$$s_1 \approx 42,8.$$

При этом, считая, что остальные комиссии по-прежнему придерживаются максимальных оценок, получаем распределение средств:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 35, \quad x_3 = 35, \quad x_4 = 28,$$

что полностью совпадает с решением, полученным на основе механизма абсолютных приоритетов.

*Замечание.* Следует иметь ввиду, что получив больше средств, чем это требуется, первая комиссия не будет пересматривать свои оценки и согласится на полученное распределение средств, поскольку избыток средств имеет свои преимущества. В этом случае полученное распределение средств дает гораздо меньший ожидаемый эффект:

$$\mathcal{E}_{\text{np}} = \frac{1}{5} \cdot 38,4 + \frac{1}{8} \cdot 32 + \frac{1}{10} \cdot 32 + \frac{1}{15} \cdot 25,6 = 13,$$

что составляет

$$K = \frac{\Theta_{\text{пр}}}{\Theta_{\text{max}}} \cdot 100\% \approx 79\% < 95\%.$$

Оценим механизм обратных приоритетов. Применяя формулы (4.7) непосредственно получаем:

$$\begin{aligned}x_1 &\approx \frac{2,45}{8,91} \cdot 128 \approx 35; & x_2 &\approx \frac{2,23}{8,91} \cdot 128 \approx 32; \\x_3 &\approx \frac{2,23}{8,91} \cdot 128 \approx 32; & x_4 &\approx \frac{2}{8,91} \cdot 128 \approx 29.\end{aligned}$$

Поскольку  $x_1 = 35 > 30$ , то первая экспертная комиссия скорректирует свою оценку, сообщит истинную оценку  $s_1 = 30$  и получит требуемое финансирование. Оставшиеся ресурсы в количестве  $R_{\text{ост}} = 98$  распределяем между оставшимися тремя направлениями по тем же формулам (4.7). Получаем:

$$x_2 \approx \frac{2,23}{6,46} \cdot 98 \approx 34; \quad x_3 \approx \frac{2,23}{6,46} \cdot 98 \approx 34; \quad x_4 \approx \frac{2}{6,46} \cdot 98 \approx 30.$$

Определяем ожидаемый эффект:

$$\Theta_{\text{обр}} = \frac{1}{5} \cdot 30 + \frac{1}{8} \cdot 34 + \frac{1}{10} \cdot 34 + \frac{1}{15} \cdot 30 = 16,5,$$

что практически совпадает с максимальным эффектом 16,53.

Таким образом, с практической точки зрения все три механизма дают примерно одинаковые результаты (с учетом точности получаемых экспертных данных). Этот важный вывод был проверен на многих примерах. В этих условиях следует рекомендовать либо механизм абсолютных приоритетов, либо механизм обратных приоритетов, чтобы повысить заинтересованность комиссий в объективности рекомендаций.

Отметим, что принцип обратных приоритетов имеет ряд дополнительных преимуществ. Во-первых, в окончательном распределении средств, как мы убедились, каждое направление получает

такое финансирование, какое рекомендовано соответствующей комиссией. Это весьма важное свойство, которое значительно упрощает принятие решения центральной комиссией и снижает конфликтность ситуации. Во-вторых, механизмы обратных приоритетов создают обратную тенденцию - занижать (а не завышать) рекомендуемые оценки (можно сказать, что в данном случае действует принцип «меньше просишь - больше получишь»), то есть тенденцию экономить, что весьма важно в условиях дефицита средств.

## **4.2. Анализ децентрализованной схемы**

Как отмечалось выше, в децентрализованной схеме распределения средств основная работа выполняется согласительными комиссиями по группам направлений. Рассмотрим случай, когда одно из направлений считается базовым, и создается  $(n-1)$  комиссия, каждая из которых дает оценку одного из оставшихся направлений (не базовых) относительно базового (другими словами, каждая из комиссий оценивает, насколько финансирование по соответствующему направлению больше (меньше) чем по базовому). Обозначим  $s_i$  - оценку, рекомендованную  $i$ -ой комиссией,  $i = \overline{1, n-1}$  (за базовое примем направление с номером  $n$ ). Получив информацию от всех комиссий, центральная комиссия однозначно определяет объем финансирования всех направлений. Действительно, так как

$$x_i - x_n = s_i,$$

$$\text{то } x_i = x_n + s_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Суммируя средства по всем направлениям получаем уравнение



$$\sum_{i=1}^n s_i + nx_n = R,$$

решая которое получаем

$$x_n = \frac{R - A}{n}, \text{ где } A = \sum_{i=1}^{n-1} s_i$$

$$x_i = x_n + s_i = \frac{R - A}{n} + s_i. \quad (4.8)$$

Вопрос заключается в том, будут ли комиссии заинтересованы в истинном сообщении оценок разностей. Для ответа на этот вопрос заметим, что у каждой комиссии может быть свое представление о наиболее целесообразном распределении средств по приоритетным направлениям. Обозначим через  $\bar{v}_k = \{v_{ki}\}$ ,  $\sum_i v_{ki} = R$  распределение средств, предпочтительное с точки зрения  $k$ -ой комиссии и, соответственно, через  $a_k = \{a_{ki}, i = \overline{1, n-1}\}$  обозначим разности  $a_{ki} = v_{ki} - v_{kn}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Будем оценивать эффективность результирующего распределения с точки зрения  $k$ -ой комиссии по близости этого распределения к вектору  $v_k$  по критерию

$$\delta_k = \max_i \{v_{ki} - x_i\} \rightarrow \min. \quad (4.9)$$

При формировании комиссии естественно принять, что в комиссию по  $i$ -му направлению войдут специалисты, заинтересованные в развитии  $i$ -го и базового направления в гораздо большей степени, чем в развитии других направлений. Это условие назовем условием достаточной заинтересованности членов  $i$ -ой комиссии в развитии пары направлений, которые они оценивают. При условии достаточной заинтересованности максимум в критерии (4.9) будет достигаться либо при  $i = k$ , либо при  $i = n$  (это свойство можно считать формальным определением условия достаточной заинтересованности). В этом случае имеем:

$$\delta_k = \max\{v_{kk} - x_k; v_{kn} - x_n\} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (s_i - a_{ki})}{n} + \max(a_{kk} - s_k; 0).$$

Пусть  $s_k \leq a_{kk}$ . Тогда

$$\delta_k = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j \neq k} (s_j - a_{kj}) + (n-1)(a_{kk} - s_k) \right].$$

Эта величина является убывающей функцией  $s_k$ . Поэтому ее минимум достигается при  $s_k = a_{kk}$ .

Пусть теперь  $s_k \geq a_{kk}$ . Тогда

$$\delta_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (s_i - a_{ki}).$$

Минимум этой величины по  $s_k$  достигается также при  $s_k = a_{kk}$ . Итак, при условии достаточной заинтересованности каждая комиссия заинтересована в сообщении объективной оценки  $s_k = a_{kk}$ .

Пример 4.2. Пусть имеются три приоритетных направления и, соответственно, две согласительные комиссии. Объем выделенных средств равен 100. Распределения ресурсов, наиболее эффективные с точки зрения комиссий, приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2.

Направления Комиссии	1	2	3
1-ая	60	10	30
2-ая	20	35	45

Объективные разности  $\{a_{ki}\}$  приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3.

Направления	1	2	3

Комиссии			
1-ая	30	-20	0
2-ая	-25	-10	0

Условия достаточной заинтересованности выполняются, так как  $a_{11} = 30 > a_{21} = -25$  и  $a_{22} = -10 > a_{12} = -20$ . При сообщении объективных оценок разностей  $s_1 = 30$ ,  $s_2 = -10$  будет получено следующее распределение ресурсов:

$$x_1 = 56^{2/3}; \quad x_2 = 16^{2/3}; \quad x_3 = 26^{2/3},$$

при этом  $\delta_1 = 3^{1/3}$ ;  $\delta_2 = 18^{1/3}$ . Посмотрим, может ли первая комиссия улучшить результирующее распределение, манипулируя оценкой  $s_1$ . Если она завысит оценку, сообщив, например,  $s_1 = 35$ , то распределение средств будет следующим:

$$x_1 = 60; \quad x_2 = 15; \quad x_3 = 25.$$

Хотя по первому направлению финансирование увеличилось, по базовому направлению оно уменьшилось. В целом критерий

$$\delta_1 = \max(0; 5) = 5 > 3^{1/3},$$

то есть ситуация для первой комиссии ухудшилась. Если комиссия занижит оценку, например, сообщит  $s_1 = 20$ , то получит следующее распределение:

$$x_1 = 50; \quad x_2 = 20; \quad x_3 = 30.$$

В данном случае ситуация становится хуже для первого направления, величина критерия

$$\delta_1 = \max(10; 0) = 10 > 3^{1/3}.$$

Аналогично нетрудно проверить, что и вторая комиссия только ухудшит ситуацию, манипулируя оценкой  $s_i$ .

Покажем, что если число приоритетных направлений равно трем, то всегда можно выбрать базовое направление таким образом, что условие

достаточной заинтересованности будет выполняться. Для этого выпишем условие достаточной заинтересованности для всех трех возможных вариантов.

а) Если базовым является направление 3, то условия достаточной заинтересованности имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{11} - v_{13} &\geq v_{21} - v_{23}, \\ v_{22} - v_{23} &\geq v_{12} - v_{13}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Будем считать, что первое условие выполняется (этого всегда можно добиться, изменив нумерацию комиссий).

б) Если базовым является направление 1, то условия достаточной заинтересованности имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{23} - v_{21} &\geq v_{13} - v_{11}, \\ v_{12} - v_{11} &\geq v_{22} - v_{21}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В силу нашего предположения первое условие удовлетворяется всегда. Теперь заметим, что если ни (4.10), ни (4.11) не имеют места, то обязательно выполняется условие

$$\begin{aligned} v_{12} - v_{13} &\geq v_{22} - v_{23}, \\ v_{22} - v_{21} &\geq v_{12} - v_{11}, \end{aligned}$$

а это ничто иное, как условие достаточной заинтересованности для случая, когда базовым является направление 2.

В случае, если число направлений больше трех, целесообразна иерархическая схема распределения средств, такая что решения на каждом уровне принимаются на основе информации, поступающей от не более чем трех комиссий.

Пример 4.3. Пусть имеются четыре приоритетных направления. Создадим три комиссии, первая из которых принимает решение о сравнительных объемах финансирования третьего и четвертого направления, а вторая и третья занимаются вопросами финансирования

первого и второго направления, а также направления, объединяющего третье и четвертое вместе. В таблице 4.4 приведены данные о распределении финансирования в объеме  $R = 100$  между тремя направлениями (первым, вторым и объединенным) с точки зрения второй и третьей комиссий.

Таблица 4.4.

Направления Комиссии	1	2	(3, 4)
2-ая	40	25	35
3-я	50	30	20

Возьмем второе направление в качестве базового, причем вторая комиссия оценивает объединенное направление по сравнению со вторым, а третья - первое по сравнению со вторым. Нетрудно убедиться, что условия достаточной заинтересованности выполняются. Действительно:

$$35 - 25 = 10 > 20 - 30 = -10,$$

$$50 - 30 = 20 > 40 - 25 = 15.$$

Поэтому на первом шаге комиссии сообщают объективные оценки  $s_2 = 10$ ,  $s_3 = 20$ , и распределение средств будет иметь вид

$$x_1 = 43\frac{1}{3}; \quad x_2 = 23\frac{1}{3}; \quad x_{34} = 33\frac{1}{3}.$$

На втором шаге первая комиссия сообщает сравнительный объем финансирования третьего направления относительно четвертого. Пусть  $s_3 = x_3 - x_4 = 13\frac{1}{3}$ . Тогда окончательно получаем

$$x_3 = 23\frac{1}{3}; \quad x_4 = 10.$$

Недостатком описанного механизма является возможность получения отрицательных значений  $x_i$ .

Пример 4.4. Рассмотрим следующую ситуацию (объем выделенных средств  $R = 100$ ).

Таблица 4.5.

Направления Комиссии	1	2	(3, 4)
2-ая	70	20	10
3-я	20	70	10

Таблица разностей для случая, когда базовым является третье направление, имеет следующий вид:

Таблица 4.6.

Направления Комиссии	1	2	(3, 4)
2-ая	60	10	0
3-я	10	60	0

Если обе комиссии сообщат объективные оценки  $s_1 = 60$ ,  $s_2 = 60$ , то результирующее распределение средств будет иметь вид :

$$x_1 = 53\frac{1}{3}; \quad x_2 = 53\frac{1}{3}; \quad x_3 = -6\frac{2}{3}.$$

В этом случае отрицательные значения  $x_i$  следует заменить на нулевые, а для оставшихся направлений процедуру повторить. В нашем примере следует положить  $x_3 = 0$ , а для первого и второго направления создать новую согласительную комиссию (из представителей первой и второй комиссий). Новая комиссия, по-видимому, будет рекомендовать равное финансирование первого и второго направлений. Окончательно получаем следующее распределение средств:

$$x_1 = 50; \quad x_2 = 50; \quad x_3 = 0.$$

От этих недостатков свободен механизм, описанный в [3], в котором комиссии сообщают оценки не разностей, а отношений величин

финансирования соответствующих направлений к базовому, то есть оценки  $s_i = x_i/x_n$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

### **4.3. Конкурсные механизмы**

Перейдем к описанию механизмов финансирования второго уровня. Как уже отмечалось выше, на этом уровне определяется пакет инвестиционных проектов, которые получают финансирование.

Обозначим через  $I_i$  оценку ожидаемого эффекта от реализации  $i$ -го проекта,  $s_i$  - оценку объема финансирования  $i$ -го проекта. Как правило, оценка  $I_i$  определяется экспертной комиссией с учетом рыночных, экономических и социальных целей, а оценка  $s_i$  - фирмой, предлагающей проект, либо организацией, которая берется за его реализацию. Будем считать, что оценка эффекта  $I_i$  достаточно объективна, хотя, в принципе, нельзя исключить сознательное завышение или занижение оценок эффекта со стороны экспертов, заинтересованных в том или ином проекте. Что касается оценок требуемого финансирования, то здесь нельзя не учитывать тенденцию завышения требуемого объема финансирования со стороны фирм, которые берутся за его реализацию, либо которые предлагают свой проект.

Для снижения негативного влияния этой тенденции широко применяются конкурсные механизмы. Вводится некоторая оценка эффективности (приоритетности) инвестиционных проектов, зависящая как от эффекта  $I_i$ , так и от оценки объема финансирования  $s_i$ . Затем проекты упорядочиваются по убыванию эффективностей и финансируются в порядке этой очередности пока хватает средств. Наиболее распространенными являются две оценки эффективности -

$q_i = I_i / s_i$  и  $q_i = I_i - a s_i$  ( $a$  - нормативный коэффициент, соизмеряющий эффект и затраты).

Как оценить эффективность конкурса? Обозначим через  $r_i$  объективную оценку объема финансирования  $i$ -го проекта (при финансировании, меньшем  $r_i$ , велик риск нереализации проекта). Если для всех проектов известны объективные объемы финансирования, то можно выбрать оптимальный пакет проектов  $Q$ , решив следующую задачу:

$$\sum_{i \in Q} I_i \rightarrow \max \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \in Q} r_i \leq R, \quad (4.13)$$

где  $R$  - выделенный объем финансирования по данному направлению.

Максимальный эффект, полученный в результате решения задачи (4.12) - (4.13) обозначим через  $L_{\max}$ . Пусть  $Q$  - множество победителей конкурса. Тогда суммарный эффект от победившего пакета проектов составит

$$L(Q) = \sum_{i \in Q} I_i. \quad (4.14)$$

Очевидно, что  $L(Q) \leq L_{\max}$ . Отношение

$$K = \frac{L(Q)}{L_{\max}} \quad (4.15)$$

и определяет эффективность конкурсного механизма. Покажем, что эффективность простых конкурсов может быть сколь угодно малой.

Пример 4.5. Пусть имеется всего два проекта, причем

$$I_1 = 2\varepsilon, \quad r_1 = \varepsilon \quad (\varepsilon - \text{малое число}),$$

$$I_2 = 150, \quad r_2 = 100.$$

Выделенный объем финансирования  $R = 100$ .

При оценке по отношению  $q_1 = I_1 / r_1 = 2$ ;  $q_2 = I_2 / r_2 = 1,5$  очевидно, победителем будет первый проект, который получает финансирование



$s_1 = \varepsilon$ . На второй проект денег не хватает. Таким образом  $Q = \{1\}$ ,  $L(Q) = 2\varepsilon$ . Максимальный эффект, очевидно, равен  $L_{\max} = 150$ , когда финансируется второй проект. Эффективность конкурсного механизма составляет

$$K = \frac{2\varepsilon}{150} = \frac{\varepsilon}{75}$$

и может быть сколь угодно малой.

При оценке эффективности по разности  $q_1 = \mathbf{l}_1 - ar_1$ ;  $q_2 = \mathbf{l}_2 - ar_2$  при  $a = 1,5$  имеем  $q_1 = 0,5\varepsilon$ ,  $q_2 = 0$ , и при любом  $\varepsilon$  победителем будет первый проект. Эффективность конкурсного механизма в этом случае будет такой же, как и при оценке эффективности по отношению, то есть может быть сколь угодно малой.

Рассмотрим прямой конкурсный механизм суть которого в том, что победители определяются в результате непосредственного решения задачи на максимум суммарного эффекта

$$\sum_{i \in Q} \mathbf{l}_i \rightarrow \max \quad (4.16)$$

при ограничении

$$\sum_{i \in Q} s_i \leq R. \quad (4.17)$$

В [3] показано, что эффективность прямого конкурсного механизма не менее чем 0,5. Эта оценка не улучшаема, что показывает следующий пример.

Пример 4.6. Имеются два проекта со следующими параметрами:

$$\mathbf{l}_1 = 100 + \varepsilon, \quad r_1 = 50,$$

$$\mathbf{l}_2 = 100, \quad r_2 = 50,$$

где  $\varepsilon$  - малое положительное число. Пусть при выделенном объеме финансирования  $R = 100$  организации сообщили следующие оценки:

$$s_1 = 100, \quad s_2 = 50.$$

Очевидно, что в результате решения задачи (4.16), (4.17) победителем будет первая организация, то есть  $Q = \{1\}$ ,  $L(Q) = 100 + \varepsilon$ . В то же время, как легко убедиться,  $L_{\max} = 200 + \varepsilon$  и поэтому

$$K = \frac{100 + \varepsilon}{200 + \varepsilon} = 0,5 + \frac{\varepsilon}{400 + 2\varepsilon}.$$

Так как  $\varepsilon$  - любое положительное число, то  $K$  может быть сколь угодно близким к 0,5.

Рассмотрим более сложный вариант организации конкурса, так называемый двухэтапный конкурс. На первом этапе определяются все решения задачи (4.16), (4.17), для которых имеет место соотношение

$$L(Q) \geq \varepsilon L_0, \quad (4.18)$$

где  $L_0$  - суммарный эффект в оптимальном решении этой задачи,  $0 < \varepsilon \leq 1$  - фиксированный параметр. Другими словами, выбираются все пакеты проектов, для которых суммарный эффект не менее, чем определенная доля  $\varepsilon$  от максимального эффекта при сообщенных оценках  $\{s_i\}$ . На втором этапе из всех пакетов, которые прошли первый тур, то есть удовлетворяют условию (4.18), выбирается пакет, требующий минимального финансирования. Для данного механизма возникает вопрос, какое  $\varepsilon$  выбрать. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случай двух проектов. При заданном значении  $\varepsilon$  возможны четыре варианта (для определенности примем, что  $I_1 \geq I_2$ ):

а)  $I_2 / I_1 < \varepsilon$  и  $r_1 + r_2 > R$ . В этом случае на первом этапе побеждает только один пакет, состоящий из одного первого проекта. Очевидно, что эффективность  $K = 1$ .

б)  $I_2 / I_1 < \varepsilon$  и  $r_1 + r_2 \leq R$ . В этом случае на первом этапе также побеждает только один пакет, состоящий из первого проекта. Однако, поскольку  $L_{\max} = I_1 + I_2$ , то эффективность будет равна

$$K = \frac{l_1}{l_1 + l_2} > \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

в)  $l_2/l_1 \geq \varepsilon$  и  $r_1 + r_2 > R$ . В этом случае побеждают два пакета, один из которых включает первый пакет, а другой - второй. На втором этапе в худшем случае побеждает второй проект (если  $r_2 < r_1$ ) и поэтому эффективность равна

$$K = \frac{l_2}{l_1} \geq \varepsilon.$$

г)  $l_2/l_1 \geq \varepsilon$  и  $r_1 + r_2 \leq R$ . В этом случае наименее благоприятный вариант состоит в том, что на первом этапе побеждают два пакета, как и в варианте «в», а на втором этапе - второй проект. Это произойдет в том случае, если  $s_1 + s_2 > R$  и в то же время  $s_2 < s_1$ . Если принять, что  $s_1 = r_1$  (побежденный сообщает минимальную оценку), то наименее благоприятный вариант возможен, если  $r_1 > R/2$  и  $r_2 < r_1$ . В этом случае эффективность будет равна

$$K = \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Мы видим, что в случае «г» эффективность минимальна. Поскольку в этом случае эффективность растет с ростом  $\varepsilon$ , то следует взять  $\varepsilon = 1$ . Таким образом мы снова приходим к прямому конкурсу.

По-видимому, при сделанных предположениях не существует конкурсного механизма, обеспечивающего гарантированную эффективность более, чем 0,5. Ситуация становится более благоприятной, если принять другие гипотезы о поведении участников конкурса. До сих пор мы считали, что поведение участников конкурса определяется стремлением к равновесной ситуации (точке Нэша). Если принять, что участники конкурса стремятся к максимизации гарантированного результата, то выявляются преимущества двухэтапного конкурса.

Действительно, в этом случае для уверенной победы на втором этапе участник, представляющий первый проект, либо должен быть уверен, что на первом этапе победит только один пакет, состоящий из первого проекта, либо он должен сообщить минимальную оценку затрат  $s_1 = r_1$  для повышения шансов на победу во втором этапе. Аналогично второй участник сообщит  $s_2 = r_2$ . Отсюда следует, что наименее благоприятный случай в варианте «Г» невозможен, и эффективность конкурса в варианте «Г» равна 1. Таким образом, гарантированная эффективность будет равна

$$K = \min\left(\varepsilon, \frac{1}{1+\varepsilon}\right),$$

ее максимум достигается, если

$$\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Решая это уравнение получаем оптимальную величину  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6.$$

Полученная оценка гарантированной эффективности, по-видимому, справедлива и для случая, когда число участников больше 2. Это следует из предположения, что с ростом числа участников эффективность конкурса не уменьшается.

#### **4.4. Механизмы смешанного, возвратного и кредитного финансирования**

В механизмах смешанного (частичного) финансирования государство выделяет на проект только часть требуемых средств, а недостающие средства выделяет фирма, выигравшая конкурс. Механизмы смешанного финансирования детально рассмотрены в работах [3]. Мы опишем модификацию механизма смешанного финансирования, близкую по принципу действия к механизмам возвратного финансирования. В механизмах возвратного финансирования часть выделенных средств должна быть возвращена государству через определенный срок. Если сумма возвращаемых денег превышает выделенные, то мы имеем дело с кредитными механизмами. Описанные ниже механизмы смешанного, возвратного и кредитного финансирования объединяет одна общая идея - доля собственных средств, доля возвращаемых средств или кредитная ставка не являются фиксированными, а определяются в процессе распределения средств в зависимости от сложившейся ситуации.

Итак, рассмотрим  $m$  фирм, каждая из которых предлагает для реализации некоторое множество  $Q_j$  проектов. Как и ранее, каждый проект будем характеризовать двумя величинами - оценкой эффекта  $I_i$  и оценкой требуемых финансов  $s_i$  (объективную оценку требуемых финансов, как и раньше, обозначим через  $r_i$ ). Отношение  $q_i = I_i/s_i$  определяет эффективность  $i$ -го проекта (эффект на единицу затрат). Упорядочим проекты, предлагаемые  $j$ -ой фирмой, по убыванию эффективностей и построим график зависимости суммарного эффекта  $\varphi_j$ , получаемого  $i$ -ой фирмой, от величины выделенных ей средств  $x_j$ . Примерный вид этого графика приведен на рис. 4.1.

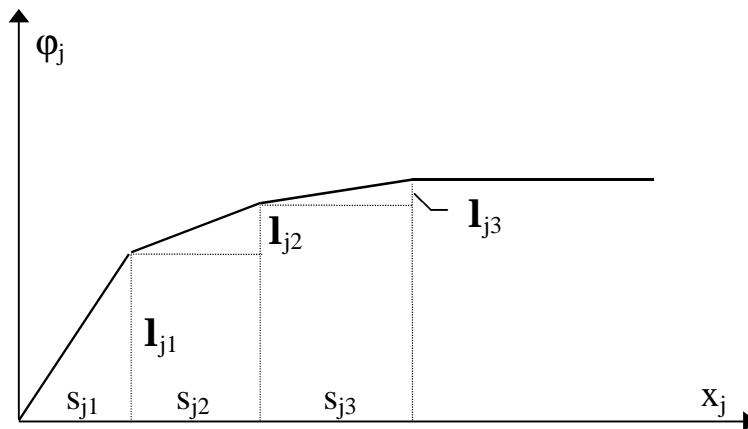


Рис. 4.1.

На рисунке через  $l_{jk}$  обозначен  $k$ -ый по эффективности проект  $j$ -ой фирмы, а через  $s_{jk}$  - оценка требуемого финансирования для этого проекта. Пунктирная линия отражает ситуацию, когда проект реализуется только при выделении средств в полном объеме, а сплошная линия, - когда возможна частичная реализация проекта (при этом эффект пропорционален объему выделенных средств). Запишем целевую функцию  $j$ -ой фирмы в следующем виде:

$$f_j(x_j) = \Phi_j(x_j) - \gamma x_j, \quad (4.19)$$

где  $\gamma x_j$  - доля возвратных средств в финансировании проектов. Общее для всех трех механизмов предположение заключается в том, что информация, сообщаемая отдельной фирмой слабо влияет на параметр  $\gamma$  и поэтому фирмы при принятии решений о том, какую оценку затрат сообщить, не учитывают влияния своего сообщения на параметр  $\gamma$  (это так называемая гипотеза слабого влияния [2]). Основное условие, которое выполняет центр (государство) при распределении финансов заключается в том, что каждая фирма получает при установленном параметре  $\gamma$  все прибыльные проекты, то есть такие, для которых имеет место следующее условие:

$$l_i - \gamma s_i \geq 0. \quad (4.20)$$

Эти условия получили название условий совершенного согласования, поскольку они обеспечивают максимальный (совершенный) учет интересов фирм. Из этих условий следует, что доминантной стратегией каждой фирмы является сообщение достоверных оценок требуемого финансирования по всем проектам. Таким образом механизмы смешанного возвратного и кредитного финансирования являются механизмами честной игры [2].

Рассмотрим, как определяется параметр  $\gamma$  в этих механизмах:

а) Механизмы смешанного финансирования. Пусть распределение выделенных финансовых ресурсов по прибыльным проектам происходит прямопропорционально оценкам  $s_i$ , то есть финансирование  $i$ -го проекта равно

$$x_i = \frac{s_i}{\sum_{j \in Q} s_j} \cdot R, \quad (4.21)$$

где  $Q$  - множество финансируемых проектов, то есть таких, для которых выполняется условие (4.20). Опишем алгоритм определения множества  $Q$  финансируемых проектов.

Примем, что все проекты пронумерованы по убыванию эффективностей  $q_i = 1/s_i$ . Нам нужно определить максимальный параметр  $\gamma$ , такой что

$$(1 - \gamma) \cdot \sum_{i: q_i \geq \gamma} s_i \geq R.$$

Для этого находим минимальный номер  $k$ , для которого

$$(1 - q_k) \cdot \sum_{i=1}^k s_i \geq R.$$

В случае, если проекты неделимы (то есть проект либо выполняется полностью при финансировании  $s_i$ , либо не выполняются вообще), финансируются первые  $(k-1)$  проектов при общем объеме финансирования

равном  $(1 - q_k) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} s_i$ . Если проекты могут реализовываться частично, то объем государственного финансирования  $k$ -го проекта равен  $R - (1 - q_k) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} s_i$ , общее финансирование по  $k$ -му проекту составляет

$$s'_k = \frac{R - (1 - q_k) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} s_i}{1 - q_k} < \frac{(1 - q_k) s_k}{1 - q_k} = s_k.$$

Пример. Имеются четыре проекта, данные о которых приведены в таблице 4.7.

Таблица 4.7.

<b>i</b>	1	2	3	4
<b><math>l_i</math></b>	5	8	3	6
<b><math>r_i</math></b>	6	10	4	12
<b><math>q_i</math></b>	$5/6$	$4/5$	$3/4$	$1/2$

Мы видим, что экономический эффект от всех проектов отрицателен. Это объясняется тем, что, как правило, в сегодняшней неустойчивой экономической ситуации ожидаемый эффект определяется в расчете на небольшой срок (как правило, один год), поскольку прогнозы на более долгие сроки весьма ненадежны. Очевидно, что в данной ситуации проекты фирмам экономически невыгодны и без государственной поддержки вряд ли будут реализованы. Пусть выделенный объем финансовых ресурсов равен  $R = 5$ . Имеем:

$$(1 - q_1) \cdot r_1 = 1 < 20,$$

$$(1 - q_2) \cdot (r_1 + r_2) = 3,2 < 20,$$

$$(1 - q_3) \cdot (r_1 + r_2 + r_3) = 5 = R.$$



Следовательно,  $\gamma = q_3 = 3/4$ . Финансируются первые три проекта в размере  $y_1 = (1 - \gamma)r_1 = 1,5$ ;  $y_2 = (1 - \gamma)r_2 = 2,5$ ;  $y_3 = (1 - \gamma)r_3 = 1$ .

б) Механизмы возвратного финансирования. Доля возвратных средств определяется условием

$$\sum_{i \in Q} r_i \leq R,$$

где  $Q$  - множество финансируемых проектов, для которых  $I_i - \gamma r_i \geq 0$ . Для определения  $\gamma$  необходимо найти минимальный номер  $k$ , такой что

$$\sum_{i=1}^k r_i \geq R$$

(в случае, если  $\sum_{i=1}^k r_i > R$ , проект финансируется частично). Параметр  $\gamma$  равен  $q_k$ . Если в предыдущем примере взять  $R = 20$ , то при  $k = 3$  имеем  $r_1 + r_2 + r_3 = 20$ . Следовательно,  $\gamma = q_3 = 3/4$ , то есть 75% средств возвращаются. Фактически государственные расходы составят, как и в предыдущем случае 5 единиц.

*Замечание.* При определении величины критерия (4.19) следует и ожидаемый эффект, и выделяемые ресурсы приводить к одному и тому же сроку (либо к начальному периоду, либо к моменту возврата средств, либо к моменту завершения проекта и т.д.).

в) Механизмы кредитования. В механизмах кредитования параметр  $\gamma$  больше 1 (поскольку он включает процентную ставку). Очевидно, что эти механизмы могут применяться только для экономически выгодных проектов, для которых  $I_i > r_i$ . Величина  $\gamma$  определяется также, как и в случае механизмов возвратного финансирования. Так, если в таблице 4.7. увеличить все эффекты в два раза, то получим следующую таблицу:

Таблица 4.8.

<b>i</b>	1	2	3	4
<b><math>l_i</math></b>	10	16	6	12
<b><math>r_i</math></b>	6	10	4	12
<b><math>q_i</math></b>	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{2}$	1

При выделенном объеме финансирования  $R = 16$  имеем  $\gamma = \frac{8}{5}$ , так как  $r_1 + r_2 = 16 = R$ . Процентная ставка за кредит составляет  $\alpha = \gamma - 1 = 0,6$  или 60%.

Безусловно, рассмотренный вариант механизмов кредитного финансирования следует применять, если процентная ставка меньше банковской (то есть речь идет о льготном кредите). В противном случае проекты являются инвестиционно привлекательными и государственной поддержки не требуется.

На этом примере можно посмотреть, к чему приводит манипулирование данными, то есть завышение оценок требуемого финансирования.

Пусть проекты 1 и 2 представляют разные фирмы. Если вторая фирма завысит оценку, то есть сообщит  $s_2 = 11$ , то в случае неделимых проектов проект просто не будет финансироваться. В случае делимых проектов вторая фирма ничего не выигрывает, поскольку при новой процентной ставке ее прибыль будет равна 0 как и ранее. Если первая фирма завысит оценку и сообщит, например,  $s_1 = 7$ , то в случае неделимых проектов вторая фирма также не получает финансирования, параметр  $\gamma$  будет равен  $\frac{10}{7}$  и прибыль первой фирмы будет равна 0, то есть уменьшится. В случае делимых проектов параметр  $\gamma$  не изменится и прибыль первой фирмы составит

$$10 - \frac{8}{5} \cdot 7 = -1,2,$$

то есть станет отрицательной.

Если оба проекта представляет одна фирма, то ситуация меняется, поскольку мы имеем дело с монопольным случаем. Действительно, тогда в случае неделимых проектов фирме выгодно зависить оценку затрат по второму проекту с тем, чтобы уменьшить процентную ставку. При этом, по второму проекту прибыль останется равной нулю, однако, по первому проекту прибыль увеличится. Действительно, по первому проекту имеем

$$I_1 - \gamma \cdot r_1 = I_1 - \frac{I_2}{s_2} \cdot r_1 = 10 - \frac{96}{s_2},$$

и чем больше  $s_2$ , тем больше прибыль. В случае неделимых проектов завышение оценки по второму проекту прибыли не приносит. Однако, фирма может применить более сложную стратегию, а именно, увеличить оценку затрат по второму проекту, одновременно уменьшив на ту же величину оценку затрат по первому проекту. В этом случае финансируются оба проекта, и прибыль фирмы составит

$$I_1 - \gamma s_1 = I_1 - \frac{I_2}{r_2 + \Delta} \cdot (r_1 - \Delta) = 10 - \frac{16}{10 + \Delta} (6 - \Delta).$$

В идеале фирма вообще может сообщить нулевую оценку затрат по первому проекту и оценку  $s_2 = 16$  по второму (то есть взять  $\Delta = 6$ ). В этом случае фирма получает финансирование в объеме 16 единиц, реализует за эти деньги оба проекта, возвращает взятые деньги получая чистую прибыль 10 единиц (фактически в данном случае получается кредит с нулевой процентной ставкой или возвратная схема с коэффициентом возврата, равным 1).

## **Заключение**

В книге мы попытались рассмотреть основные задачи, возникающие при решении проблемы развития производства строительных материалов и изделий из них. Во многом, конечно, эти задачи типичны для развития любой отрасли промышленности. Они охватывают весь цикл от изучения потребностей в продукции, определения стандартного набора продуктов и уровня специализации предприятий до, наконец, формирования пакета инвестиционных проектов развития отрасли. Рассмотренные модели, методы решения соответствующих задач и организационные механизмы финансирования инвестиционных проектов могут составить основу для систем поддержки принятия решений на различных уровнях управления (от министерств и крупных корпораций до малых предприятий и фирм).

Безусловно, в ограниченном объеме книги не все задачи удалось рассмотреть. К ним относятся такие задачи, как размещение предприятий, формирование пакета инвестиционных проектов на основе самофинансирования (доход от реализованных проектов идет частично на финансирование новых проектов), учет риска при выборе инвестиционных проектов и другие.

## Литература

1. *Бараташвили Е., Джавахадзе Г.* «Капитальное строительство и рыночная экономика», Тбилиси, «Зедаше», 1992 г.
2. *Бурков В.* «Основы математической теории активных систем», Москва, «Наука», 1977 г.
3. *Бурков В., Горгидзе И., Ловецкий С.* «Прикладные задачи теории графов», Тбилиси, Мецниереба, 1974 г.
4. *Бурков В., Ириков В.* «Модели и методы управления организационными системами», Москва, Наука, 1994 г.
5. *Джавахадзе Г.* «Задачи оптимальной специализации предприятий», Тбилиси, журнал «Инженерные новости Грузии» №1, 1996 г.
6. *Джавахадзе Г.* «Маркетинг, как основа коммерческой деятельности предприятий строительных материалов и изделий», Тбилиси, Техинформи, 1995 г.
7. *Котлер Ф.* «Основы маркетинга», Санкт-Петербург, АО «Коруна», АОЗТ «Литера плюс», 1994 г.
8. *Новиков Д.* «Механизмы управления проектами», Москва, Синтег-Гео, 1997 г.
9. *Хомяченко О.* «Технология маркетинга на фирме. Экономический аспект», Москва, Московский физико-технический институт, 1996 г.