Д. Гейл

Теория линейных экономических моделей

THE THEORY OF LINEAR ECONOMIC MODELS

DAVID GALE

Associate Professor of Mathematics
Brown University and Consultant to
Mathematics Division of the RAND
Corporation

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.

NEW YORK TORONTO LONDON

1960

Д. ГЕЙЛ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Перевод с английского

Л. И. ГОРЬКОВА, С. С. КИСЛИЦЫНА
и И. Л. РОМАНОВСКОЙ

Под редакцией

Н. Н. ВОРОБЬЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

Книга посвящена широкому кругу исследований в области линейного программирования, теории матричных игр и математической экономики.

Собственно экономическим моделям посвящены последние две главы. Здесь рассматриваются вопросы равновесия для линейных моделей обмена, статические и динамические модели производства, модель Леонтьева, модель фон Неймана расширяющейся экономики и предложенная автором замкнутая линейная модель производства.

Книга представляет собой руководство не по экономике, а по прикладной математике, рассчитанное как на начальное, так и на более углубленное изучение предмета. От читателя не требуется специальной математической подготовки: все необходимые сведения могут быть приобретены в процессе внимательного чтения книги и тщательного решения приведенных в ней задач.

Актуальность книги, насыщенность ее материалом, хороший и живой стиль изложения, несомненно, привлекут к ней читателей — математиков и нематематиков, интересующихся вопросами математической экономики.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга Д. Гейла представляет собой учебник по линейному программированию и теории матричных игр, написанный применительно к задачам экономики.

Впервые методы линейного программирования были разработаны в Советском Союзе в 1939 году Л. В. Канторовичем, который в книге «Математические методы организации и планирования производства», Л., 1939, дал решение ряда производственно-экономических задач. Примерно с конца сороковых годов эти методы широко используются американскими учеными, с основными направлениями исследований которых и знакомит читателя книга Гейла.

Книга отличается простотой и четкостью изложения, стройной структурой и строгостью математических рассуждений. Специальная глава (глава V) посвящена некоторым задачам целочисленного программирования. Этот круг вопросов пока еще слабо представлен в советской литературе. В главах III, VIII и IX Гейл показывает применение развитого в предыдущих главах математического аппарата к анализу ряда абстрактных экономических моделей. Наряду с линейной моделью «конкурентной экономики» он рассматривает линейные модели обмена, а также модели Леонтьева и фон Неймана, являющиеся линейными моделями производства.

Идеализированные математические модели дают лишь приближенное представление о действительности, и результаты исследований, основанных на моделях такого рода, должны применяться с осторожностью. Особенно это относится к *линейным* экономическим моделям, которые совершенно не учитывают ряд важных «нелинейных» факторов экономики. В ряде случаев автор делает предположения, которые исключают применение полученных им выводов к современной капиталистической действительности. Например, автор принимает допущение о том, что существует свободная конкуренция (стр. 127) или что целью обмена является максимальное удовлетворение потребностей покупателя (стр. 350). Поэтому рассуждения, подобные доказательству существования «конкурентного равновесия», на самом деле вовсе не доказывают устойчивости капиталистической системы, а свидетельствуют лишь о несовершенстве моделей. Следует заметить, что в последние годы как у нас, так и за рубежом были изучены более тонкие экономические модели, которые с неизбежностью приводят к выводу о неустойчивости капиталистической системы.

Таким образом, некоторые примеры, приведенные автором, по существу, относятся не к реальной капиталистической экономике, а к существующему лишь в книгах некоторых буржуазных авторов «плановому капитализму». При этом сам автор (стр. 128) имеет в виду такую систему хозяйства, в которой цены на окончательные продукты определяются на основе некоторого *плана*. Для такой системы доказывается существование экономического равновесия, когда все фирмы работают так, «как будто они составляют единое целое, целью которого является максимизация суммарного производства продукции». В свете сказанного замечание Гейла о том, что «все к лучшему в этом лучшем из линейных миров со свободной конкуренцией!», воспринимается даже более юмористически, чем того хотел автор.

Советский читатель — математик и экономист — обязан помнить, что описываемые в книге экономические интерпретации математических моделей построены на весьма шатких методологических предпосылках буржуазных экономических теорий и по сути дела представляют собой фикцию. Поэтому для наших читателей ценность той части книги, которая посвящена моделям, вовсе не в экономической стороне самих моделей, а в математических методах их исследования. Эти методы представляют большой интерес и, несомненно, окажутся плодотворными при построении и изучении моделей социалистического воспроизводства.

В целом книга, безусловно, представляет большой интерес как для математиков, занимающихся задачами экономики, так и для экономистов, желающих ознакомиться с математическим аппаратом. Методические указания по ее чтению читатель найдет в предисловии.

Предисловие и главы I—III переведены И. Л. Романовской, главы IV—VI — С. С. Кислицыным, главы VII—IX — Л. И. Горьковым.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга пишется в то время, когда оживилась деятельность в области прикладной математики. Быть может, глагол «оживилась» неправильно передает мою мысль, так как характерной чертой этой новой прикладной математики является не интенсификация работ над старыми проблемами, а скорее попытка распространить применение математического мышления на ситуации совершенно нового типа. Теория информации, кибернетика, теория игр, теория автоматов — лишь некоторые из таких новых дисциплин. Естественно, что значительная часть исследований в этих областях носит пробный и экспериментальный характер. С другой стороны, имеется ряд научных направлений, полезность которых неизменно подтверждается уже в течение десяти лет. Одним из таких направлений является, по-видимому, теория информации, другим — линейное программирование и связанные с ним линейные модели. Будучи убежден, что именно этот второй предмет должен стать основным, я почувствовал, что необходим подходящий учебник и его надо попытаться создать. Эта книга — результат моей попытки в этом направлении.

Прежде чем просить читателя углубиться в предмет линейных моделей, я попытаюсь высказать на ближайших страницах некоторые соображения о том, что́ собственно представляет собой этот предмет. Конечно, идеальным было бы такое предисловие, которое в нескольких словах точно сообщало бы читателю, что́ именно содержится в остальной части книги, и тем самым избавляло бы его от неприятной необходимости ее читать. Мне приходится только сожалеть, что в данном случае написание такого предисловия превышает мои силы. Лучшее, что я могу сделать,— это очертить в общих словах круг задач, с которыми мы будем иметь дело, наш подход к этим задачам и расположение материала в книге.

П р е д м е т   и з у ч е н и я. Термин «экономическая модель» по общему признанию расплывчат, но мы будем его употреблять, понимая такую модель как абстракцию и упрощение некоторой типичной экономической ситуации. Так, например, первая модель, к которой мы обратимся,— это модель линейного программирования, являющаяся в своей абстрактной формулировке определенного рода набором математических задач на максимум или минимум. Важность этой модели вытекает из того, что многие реальные экономические ситуации приводят после некоторых упрощающих предположений именно к таким задачам. Далее мы переходим к модели игры двух лиц[1]). Она также формулируется чисто абстрактно, но для нас значимость этой модели объясняется тем, что она должна отражать существенные черты некоторых стратегических игр и тем самым — косвенно — некоторые аспекты экономической конкуренции. Другие модели, которые мы будем рассматривать, воспроизводят взаимоотношения между областями или отраслями промышленности, варианты схем производства, некоторые ситуации экономического равновесия и т. д. Во всех случаях рассмотрение новой модели будет начинаться с описания экономической ситуации, затем будут делаться необходимые упрощающие предположения и только после этого будет даваться чисто абстрактная формулировка.

Что же мы собираемся делать с этой абстрактно сформулированной моделью дальше? Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы сначала четко определим, *чего мы с ней делать не собираемся*. Очень важным вопросом для любой модели является ее приложимость. Действительно ли эта модель обеспечивает разумное приближение к тому, что имеет место на самом деле? Можно ли ее использовать для принятия решений и для предсказаний? Насколько хорошо подтверждаются эти предсказания экспериментально? Такие вопросы являются чисто экономическими и здесь рассматриваться не будут. Действительно, модели, которые мы выбрали для рассмотрения, имеют весьма различный уро-

[1]) Говоря более точно, к модели нулевой игры двух лиц. Такие игры будут далее называться антагонистическими.— *Прим. ред.*

вень применимости. В одном крайнем случае мы имеем линейное программирование, которое уже достаточно интенсивно использовалось в производственном планировании; в другом — такие вопросы как теория игр и некоторые из моделей равновесия, которые на нынешнем уровне их развития еще не созрели для практического применения.

Но если приложимость не является критерием для отбора, то что же мы учитывали при выборе тем? Ответ здесь таков: мы старались выбирать те модели, которые лучше всего показывают, каким образом математические рассуждения можно применить для получения информации об идеализированных экономических ситуациях. В некоторых местах мы должны были сделать и более решительные упрощения. К сожалению, в результате таких упрощений мы далеко отходим от реальности; однако этого и следует ожидать на ранних ступенях изучения сложных ситуаций

После того как модели построены, остается только анализировать их, т. е. логически выводить следствия из сделанных предположений. Положение здесь совершенно аналогично получению теорем из аксиом, скажем, в планиметрии. Как и в случае геометрии, некоторые из результатов, которые мы получим, едва ли можно было предугадать. Именно этот факт заставляет верить, что математический анализ может помочь сделать новые и значительные успехи в понимании экономических явлений.

Мы ограничимся изучением *линейных* моделей, т. е., грубо говоря, моделей, в которых математические связи имеют вид равенств или неравенств первой степени. Это условие относится к ограничениям во времени и в пространстве. Рассмотрению нелинейных моделей можно было бы посвятить еще такое же количество страниц. При этом, однако, понадобилось бы включить изложение значительного дополнительного математического аппарата, и по этим причинам мы предпочли ограничиться рамками линейности. Еще одним аргументом в пользу такого решения является то, что большинство результатов для нелинейного случая использует линейную теорию. Значительная часть этой книги может таким образом рассматриваться как база для работы на более высоких уровнях.

Из того, что было до сих пор сказано, могло создаться впечатление, что мы собрали пеструю коллекцию задач, единственными общими чертами которых являются их экономическое происхождение и наличие линейных соотношений. К счастью, это не так. Хотя рассматриваемые модели действительно весьма разнообразны, их математическое содержание обнаруживает примечательное единство. В большей части нашего анализа будет использован математический аппарат, изложенный в гл. II, которая посвящена «Вещественной линейной алгебре» или, говоря на более повседневном языке,— теории линейных уравнений и неравенств в вещественных числах. Отличительной чертой этой теории, которая играет объединяющую роль в большинстве применений, является фундаментальное понятие *двойственности*. Здесь мы даже не пытаемся определить этот термин, а только заметим, что это будет повторяющейся темой, которая объединит различные части книги в то, что уже законно может быть названо теорией.

Подход. Мы уже отмечали, что эта книга задумана как учебник. Мы не решаемся использовать слова «учебник повышенного типа», так как они означали бы, что от читателя требуется предварительное знакомство с изучаемым предметом, чего мы не предполагаем. Однако эта книга — повышенного типа в том смысле, что она старается вывести читателя на передовые позиции, давая ему возможность понимать, а быть может, и продолжать новейшие исследования в этой области. Иными словами, мы старались прежде всего обеспечить нужды будущего специалиста, будь он математиком, экономистом, студентом, изучающим вопросы организации производства или торговли, либо инженером. Но хотя наша основная цель состоит в подготовке специалистов, мы старались излагать материал так, чтобы эта книга была также полезна читателям, которые собираются входить в этот круг вопросов менее глубоко. Предполагается, что менее «технические» части книги, в частности гл. I, посвященная линейному программированию, и большая часть гл. VI, посвященной теории игр, будут полезны для курсов повышенного типа по этим предметам в системе экономического и технического образования в колледжах.

Относительно использования этой книги как основного учебника по курсу нужно отметить, что она опирается на ряд понятий из курса чистой и прикладной математики для подготовленных студентов, и что изложение рассчитано именно на таких студентов. Мы подозреваем, что средний студент-экономист столкнется с трудностями при самостоятельном изучении этой книги, так как, подчеркиваем, эта книга не по экономике, а по прикладной математике. Тем не менее теоремы, которые мы доказываем, относятся к экономике, используются экономистами и во многих случаях были найдены экономистами.

Относительно использования этой книги экономистами также нужно сказать несколько предупреждающих слов. Профессор Дорфман обратил мое внимание на то, что некоторые слова и выражения имеют разный смысл у математиков и у экономистов. Меня поразил и вместе с тем многое разъяснил мне тот факт, что даже самое первое слово названия моей книги «Теория...» принадлежит к упомянутой категории. Так, к примеру, математик или специалист по другим естественным наукам, читая какую-либо из важных экономических книг, развивающих «*теорию...*», скажем Хикса или Кейнса, может заметить: «очень интересно, но где же здесь теория?». Такое замечание не будет содержать пренебрежительного отношения к этим работам, а будет просто отражать путаницу в языке, так как в естественных науках от теории ожидается большое число результатов, полученных при малом числе предположений. То же, что он прочтет, будет вместо точных формулировок и детального обоснования конкретного ряда предположений содержать вывод заключений, значительно менее формальный, чем в теоретической работе по естественным наукам. Точно так же и экономист, читая настоящую книгу, бесспорно придет к выводу, что этой книге не пристало называться «теорией», так как главное здесь упущено, и он будет справедливо отмечать, что здесь делаются экономические предположения, обоснование которых недостаточно или отсутствует вовсе. Мы отвечаем на это, что слово «теория» понимается здесь как это принято в естественных, а не в социальных науках и поэтому не связывается непосредственно с обоснованием предположений. Мы отмечаем это для того, чтобы не ввести читателя в заблуждение относительно наших намерений.

Мы надеемся, что наше изложение результатов будет полезным для студента-экономиста, имеющего большую склонность к математическому подходу. Оно должно оказаться полезным также и для тех преподавателей математической экономики, которые могут видоизменять изложение, приспосабливая его к интересам своих студентов, вскользь касаясь вопросов, содержащих технические трудности, и останавливаясь подробнее на других вопросах, которые нами были изложены недостаточно детально. В этом смысле данная книга может служить полезным дополнением к одному из учебников по экономике, охватывающих тот же материал, такому как «Линейное программирование и экономический анализ» Дорфмана, Самуэльсона и Солоу или «Математическая экономия» Р. Дж. Д. Аллена[1]).

Наконец, мы надеемся, что эта книга будет полезна как справочник для тех, кто работает в области линейных моделей. Они найдут здесь математически единое изложение многих важных результатов, которые раньше можно было найти только в источниках, рассеянных в экономической и математической литературе.

Обратимся теперь к вопросу о необходимых математических познаниях. В таких случаях обычно отмечают, что для понимания всего дальнейшего не требуется ничего, кроме знания элементарного анализа. В данном случае можно обойтись даже без этого. Основным нашим аппаратом будет линейная алгебра, но здесь не требуется от читателя даже предварительного знакомства с ней, так как все необходимые факты содержатся в тексте. То, что действительно требуется,— это способность следить за развивающимся математическим рассуждением, способность, которая приходит только после достаточного опыта и часто характеризуется обманчивой фразой «математическая зрелость». Некоторые из приводимых нами доказательств весьма трудны. Даже доказательство теоремы о разделяющей гиперплоскости, которое является ключевым математическим результатом в этой книге, не сводится к трафаретным выкладкам. Эту трудность обойти невозможно, так как большинство результатов, которые мы хотим изложить, не являются математическими тривиальностями, и эти вещи нельзя сделать легкими, не опустив полностью их доказа-

---

[1]) В Издательстве иностранной литературы выходит русский перевод этой книги. — *Прим. ред.*

тельства, что, однако, разрушило бы нашу главную цель. Мы будем, конечно, использовать все доступные средства, такие, как геометрические картинки, соображения правдоподобности и численные примеры для того, чтобы облегчить читателю понимание книги.

Мы можем теперь подытожить сказанное, заметив, что курс, основанный на этой книге, должен носить характер, несколько сходный с курсом математической статистики. Такие курсы обычно читаются на математическом факультете, но доступны и студентам других факультетов, имеющим достаточную математическую подготовку.

Структура книги. Как использовать эту книгу. Мы представляем себе четыре возможных курса, которые могли бы базироваться на этой книге.

1. Годовой курс, охватывающий все девять глав. Как видно из диаграммы на стр. 14, располагать их по порядку нет необходимости.

2. Семестровый курс линейного программирования. Он мог бы охватывать первые пять глав этой книги.

3. Семестровый курс линейного программирования и теории игр. Он мог бы включать гл. I — III, VI и VII, кроме § 2 гл. VII.

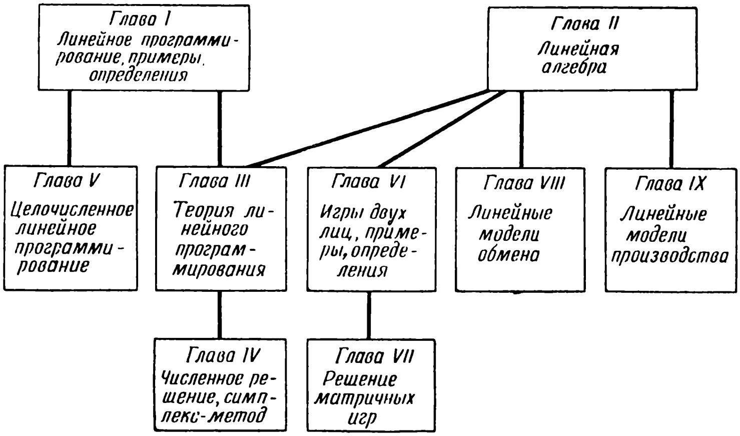
4. Семестровый курс линейных экономических моделей. Он мог бы включать гл. I — III, VIII и IX.

Схематическая диаграмма на стр. 14 показывает взаимозависимость глав.

Как видно из диаграммы, гл. II, посвященная вещественной линейной алгебре, необходима для всех дальнейших глав. Однако вторая половина этой главы, начиная с § 5, используется в последующих главах только от случая к случаю. Преподаватель может поэтому ограничиться только первыми четырьмя параграфами этой главы, которых достаточно для всех приложений в гл. III, IV, VI и VIII.

С логической точки зрения было бы более естественно начать с гл. II, в которой излагается математический аппарат. Однако такая система изложения обладает тем недостатком, что заставляет читателя поглотить значительное количество абстрактного материала, причем этот материал не дает ориентации в том, для чего он понадобится в дальнейшем. Поэтому представляется более предпочтительным начать с приложений, в данном случае с линейного программирования, и сформулировать без доказательств основные результаты с тем, чтобы обосновать дальнейшее изучение основ алгебры.

Гл. I посвящена описанию задачи линейного программирования, сначала на ряде иллюстративных примеров, а затем на основе формального изложения. В дальнейшей части главы дается формулировка (без доказательства) основной теоремы двойственности, которая затем



иллюстрируется примерами. Предполагая, что теорема двойственности верна, мы можем затем доказать важную «теорему равновесия» и дать некоторые ее приложения. Эта глава, так же как и остальные, заканчивается короткими библиографическими замечаниями и несколько более длинным набором упражнений разной степени трудности.

В первых параграфах гл. II вводятся векторы и матрицы и излагается классическая теория линейных уравнений. Изложение в этом месте сжато, но полно и независимо. Математической сердцевиной этой главы, а фактически и всей книги, являются § 3 и 4, в которых мы излагаем уже не столь классическую теорию вещественных линейных уравнений и неравенств. Вторая половина этой главы посвящена более детальному и несколько более геометричному анализу решений систем неравенств.

Читателю, знакомому с линейной алгеброй, может броситься в глаза отсутствие некоторых ее популярных разделов, в том числе теории определителей и характеристических чисел (собственных значений). Причина их исключения состоит в том, что мы не знаем ни одного случая, когда эти математические понятия были бы полезны для изучения экономических моделей, и поэтому нет никаких причин заставлять читателя тратить время на овладение этими довольно сложными вопросами[1]).

В гл. III мы возвращаемся к задачам линейного программирования, которые теперь уже ставятся с предельной общностью. Используя алгебраический аппарат, описанный в гл. II, можно дать полное изложение теорем двойственности и равновесия, а также одного важного результата, касающегося базисных решений. Последняя часть этой книги относится к наиболее важным приложениям теории линейного программирования, а именно к решению задачи об оптимальном распределении ресурсов методом равновесия цен при свободной конкуренции.

Гл. IV посвящена преимущественно изложению симплекс-метода Данцига и его применению не только в линейном программировании, но также и в таких общих задачах, как решение систем неравенств и нахождение неотрицательных решений линейных уравнений. Наш подход должен показать, что симплекс-метод может рассматриваться как обобщение обычного гауссовского метода исключения для совместного решения систем линейных уравнений. На векторном языке исключение переменной означает замену век-

[1]) Ввиду того что в экономической литературе довольно часто встречаются результаты, в которых используются определители и собственные значения, это утверждение нуждается в некотором уточнении. Мы поясним свою точку зрения на примере. Справедлива теорема о том, что модель Леонтьева может произвести положительный набор продуктов в том и только в том случае, если все главные миноры технологической матрицы положительны. Этот факт, однако, не дает ничего «экономически» нового относительно модели Леонтьева, так как экономической интерпретации этих главных миноров пока не существует. Сравните этот результат с теоремой о том, что если леонтьевская модель может произвести какой-либо положительный набор продуктов, то она сможет произвести любой набор продуктов. Последний результат относительно модели полезен и интересен, так как здесь и условие, и заключение имеют очевидный экономический смысл.

тора в базисе, а это и является «операцией замены», составляющей в нашем изложении один такт вычислений. Заключительный параграф этой главы посвящен обобщенному симплекс-методу для решения проблемы вырожденности, предложенному Данцигом, Орденом и Вулфом.

Гл. V посвящена очень важному классу задач линейного программирования (включающему транспортные задачи), которые всегда имеют целые решения, если все начальные данные целочисленны. Как видно из схематической диаграммы, материал этой главы существенно зависит от предыдущей теории. Мы начинаем с изложения принадлежащей Форду и Фулкерсону теории потоков в сетях, которая наряду с методом Куна для решения задачи о назначениях знакомит нас с полной и изящной теорией широкого класса целочисленных задач. Связь этой теории с классическим понятием равновесия цен дана в § 6. Среди других приложений детально разбирается транспортная задача Хичкока. В этой главе главным рабочим аппаратом также является принцип двойственности.

В гл. VI мы вводим нулевые игры двух лиц. Изложение ведется на ряде примеров, которые позволяют сначала сформулировать, а затем и доказать теорему фон Неймана о минимаксе. Мы использовали доказательство Гейла и Таккера, которое опирается на симметризацию игры методом фон Неймана.

«Эквивалентность» матричных игр и задач линейного программирования является первым вопросом, разбираемым в гл. VII. Там мы доказываем, что теорема о минимаксе может быть получена как частный случай основной теоремы двойственности для задач линейного программирования. Небольшой параграф посвящен решению игр с помощью симплекс-метода. Затем несколько параграфов посвящены детальному анализу структуры множеств оптимальных стратегий в матричной игре. Заключительные параграфы главы посвящены описанию метода фиктивной игры Брауна и принадлежащему Робинсон доказательству того, что этот метод приводит к сходящемуся процессу.

Гл. VIII начинается с рассмотрения линейной модели обмена, эквивалентные варианты которой были, по-видимому, независимо предложены Фришем, Ремаком и Брэем. Дается полный анализ равновесия таких моделей. Затем, следуя работе Солоу, мы рассматриваем динамическую теорию линейных трудовых моделей. Теоремы здесь в точности такие же, как в теории марковских цепей. Последние параграфы этой главы посвящены одной частной модели равновесия цен.

Среди вопросов, разобранных в последней главе,— леонтьевские модели, включая теорему Самуэльсона — Купманса — Эрроу о замещении, работа Купманса о связи между эффективностью и максимизацией прибыли и линейная модель расширяющейся экономики, предложенная фон Нейманом.

Терминология, обозначения, библиография. Мы, конечно, будем определять все специальные термины и обозначения по мере того, как они вводятся. По большей части мы придерживаемся стандартной терминологии и обозначений там, где они имеются. С другой стороны, мы будем пользоваться математическим эквивалентом поэтической свободы с тем, чтобы время от времени делать попытки «усовершенствований», главным образом в интересах типографской простоты. Так, скалярное произведение двух векторов обозначается просто их записью рядом, без всяких точек, запятых, круглых и квадратных скобок. Точно так же мы не делаем различия между векторами-строками и векторами-столбцами. Мы распространяем заботу об экономии места далее, обозначая вектор x с координатами от ξ_1 до ξ_n через (ξ_i) вместо обычного $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ничто не препятствует также обозначению матрицы A при помощи обозначения ее элементов, а именно (α_{ij}). Мы пошли на значительные удлинения с тем, чтобы избежать «навешивания» индексов на индексы. Основная мысль при этом состояла в том, что аккуратная страница формул произведет на читателя благоприятное впечатление, тогда как запутанные обозначения влекут за собой запутанные рассуждения и способны скорее испугать, чем заинтересовать.

Векторные пространства имеют у нас «ранг», а не «размерность» просто потому, что нет причин для того, чтобы одно и то же обозначать двумя разными словами. «Многогранный конус» встречался еще не часто. Поэтому мы призываем остальных присоединиться к нам и именовать его «конечным конусом».

Наша система нумерации формул не имеет ничего общего с обычной. В каждом доказательстве мы начинаем нумерацию с (1). Так, если мы утверждаем, что какое-то заключение следует из (3), то мы имеем в виду формулу (3) из того же доказательства.

Если читатель не примет некоторых из вольностей, которые мы себе позволили, то мы надеемся, что он отнесет их за счет темперамента и простит нас. Чтобы предотвратить возможность серьезной путаницы, мы прилагаем список обозначений в начале книги и перечень терминов (указатель) в конце.

Наконец, несколько слов относительно библиографии. Мы добросовестно перечисляем в конце каждой главы все источники, которые мы использовали при ее подготовке. Однако мы даже не делали попыток достичь библиографической полноты, что к тому же в учебниках и не принято. Те, чьи имена значатся в библиографии в конце книги, составляют лишь часть тех, кто сделал значительный вклад в эту область,— причем даже постоянно уменьшающуюся часть, так как в число исследователей в этом направлении постоянно вливаются новые имена. Читателю, интересующемуся вопросами библиографии, мы советуем обратиться к весьма полной «Библиографии по линейному программированию и смежным вопросам» Райли и Гасса (Riley V. and Gass S., Bibliography on Linear Programming and Related Techniques, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958).

Благодарности. Эта книга прошла три различные стадии. Начальная стадия представляла собой курс, прочитанный в 1956/57 учебном году для студентов Брауновского университета, специализирующихся по чистой и прикладной математике. По этому курсу мой ассистент Эдмунд Айзенберг и я выпустили мимеографированные записи лекций, которые были доступны лишь для весьма ограниченного числа посторонних читателей. Эта работа была выполнена по договору, заключенному с Отделением службы тыла управления научно-исследовательских работ военно-морского флота США, которому я благодарен не только за финансовую помощь, но и за моральную поддержку и интерес к работе.

В связи с благоприятными отзывами на лекционные заметки я решил развить их в учебник. Большая часть этой работы была проделана, когда я работал консультантом в математическом отделе корпорации РЭНД в 1957—1958 гг. РЭНД снабдила меня не только всем необходимым оборудованием, требующимся для выполнения этой операции, но, что более важно, дала мне возможность провести эту работу в таком месте, где была максимальная концентрация исследователей в той области, о которой я писал. За эту стимулирующую атмосферу я в конечном счете благодарен ВВС США, по контракту с которыми корпорация РЭНД проводит свою широкую программу научных исследований. Часть изложенного в этой книге материала имела ограниченное хождение в форме трех исследовательских отчетов по проекту РЭНД. Я не хочу даже пытаться перечислить всех сотрудников РЭНД, которые так или иначе помогли мне в разных местах моего изложения, но мне следовало бы принести особую благодарность Дж. Д. Вильямсу, возглавляющему математический отдел, благодаря которому я получил возможность работать в корпорации РЭНД. Завершающая работа над книгой проводилась в Брауновском университете осенью 1958 года, снова при поддержке Отделения службы тыла управления научно-исследовательских работ военно-морского флота.

Наконец, мне бы хотелось поблагодарить профессора Калифорнийского университета Е. Баранкина, предложения которого, основанные на критическом чтении моих лекционных заметок, заставили меня произвести значительные изменения в первоначальном расположении материала.

Я хочу выразить признательность всем названным группам и отдельным лицам и надеюсь, что представленный здесь окончательный вариант до некоторой степени оправдает их поддержку.

Дэвид Гейл

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже перечислены основные математические понятия, используемые в этой книге. Эти обозначения перечислены в том порядке, в котором они встречаются в тексте.

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \eta, \zeta$ и другие греческие буквы обозначают численные величины, или *скаляры*.

$a, b, c, \ldots, x, y, z$ и другие латинские буквы соответствуют векторным величинам.

$x=(\xi_i)$ — вектор, i-я компонента которого равна ξ_i.

$b=(\beta_j)$ — вектор, j-я компонента которого равна β_j.

$y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — вектор, компоненты которого $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

F^n — множество n-мерных векторов над полем F.

R^n — *n-мерное пространство*, множество всех вещественных n-мерных векторов.

u, v — *единичные векторы*, т. е. векторы, все координаты которых равны единице.

$u_i, (v_j)$ — i-й (j-й) *орт*, т. е. вектор, i-я (j-я) координата которого равна 1, а все остальные координаты равны 0.

λx — произведение вектора x на скаляр λ.

$\in$ — теоретико-множественный символ принадлежности, «является элементом из» или «принадлежит».

$\notin$ — символ, противоположный предыдущему, «не принадлежит».

xy — *скалярное произведение* векторов x и y.

$A=(\alpha_{ij})$ — матрица, ij-элемент которой есть α_{ij}.

$a_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ i-я *строка матрицы* A.

$a^j=(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$ j-й *столбец матрицы* A.

xA, Ay — произведение матрицы A на вектор x, y.

L — линейное подпространство векторного пространства.

L^* — ортогональное или *сопряженное* подпространство подпространству L.

$x \geqq \mathbf{0}$ — вектор x *неотрицательный.*
$x \geqslant \mathbf{0}$ — вектор x *полуположительный.*
$x > \mathbf{0}$ — вектор x *положительный.*
$M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$ — набор целых положительных чисел соответственно от 1 до m или от 1 до n.
$\subset$, $\supset$ — теоретико-множественное включение, соответственно «содержится в» и «содержит».
$\{x \mid P\}$ — множество всех x, обладающих свойством P.
$\bigcup$ — теоретико-множественное *объединение.*
$\bigcap$ — теоретико-множественное *пересечение.*
C — выпуклый конус.
$C_1 + C_2$ — алгебраическая *сумма* выпуклых конусов.
C^* — конус, *сопряженный* конусу C.
P — *положительный ортант*, совокупность всех неотрицательных векторов.
(b) — *полупрямая*, порожденная вектором b.
(b^*) — *полупространство*, порожденное вектором b.
$(a_1) + \ldots + (a_m)$ — конечный конус, порожденный векторами $a_1, \ldots, a_m$.
K — выпуклое множество.
$\langle X \rangle$ — *выпуклая оболочка* множества X.
$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ — выпуклая оболочка векторов $x_1, \ldots, x_n$.
$I = (\delta_{ij})$ — *единичная матрица.*
A^{-1} — матрица, *обратная* матрице A.
A^* — *транспонированная матрица.*
$x \succ \mathbf{0}$ — *x лексикографически положителен.*
(N, k) — *сеть ограниченной пропускной способности* с *вершинами* N и *функцией пропускной способности* k.
(x, y) — *ребро* от вершины x к вершине y.
$g(A)$ — значение функции в вершине A из N, задаваемое как $g(A) = \sum\limits_{x \in A} g(x)$.
$h(A, B)$ — значение функции на ребре между вершинами A и B, задаваемое как $h(A, B) = \sum\limits_{x \in A,\, y \in B} h(x, y)$.
s — *источник* в сети.
s' — *сток* в сети.
(S, S') — *разрез* сети.
∞ — символ бесконечности.
Γ — антагонистическая игра.

P_1, P_2 — первый и второй игроки.

s, t — *стратегии* первого и второго игроков.

S, T — *множество стратегий* первого и второго игроков.

$(S, T; \varphi)$ — игра с множеством стратегий S и T и *функцией выигрыша* φ.

σ, τ — *смешанные стратегии* первого и второго игроков.

$\langle S \rangle$, $\langle T \rangle$ — множества смешанных стратегий первого и второго игроков.

$\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ — *оптимальные* смешанные стратегии.

ω — *значение* игры.

$(\bar{\sigma}, \bar{\tau}; \omega)$ — *решение* игры в смешанных стратегиях.

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — *оптимальные стратегии* в матричной игре.

$U_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ — множество *чистых стратегий* в матричной игре.

$\langle U_m \rangle = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ — множество *смешанных стратегий* в матричной игре.

$\bar{X}$, $\bar{Y}$ — множества *оптимальных стратегией* в матричной игре.

$(\bar{X}, \bar{Y}; \omega)$ — *решение* матричной игры.

$x_k \to x$ — последовательность x_k *сходится* к x.

$|x|$ — *норма* вектора x.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: ПРИМЕРЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Задачи на максимум и минимум часто встречаются во многих областях чистой и прикладной математики. В экономических приложениях эти задачи особенно естественны. Фирмы стараются максимизировать доходы или минимизировать затраты. В социологических проектах делаются попытки максимизировать благосостояние общества. Потребители хотят так расходовать свой заработок, чтобы максимально удовлетворять свои потребности.

Линейное программирование имеет дело со специальными классами задач на максимум и минимум, которые очень часто появляются в экономических приложениях. Цель главы — точно описать и сформулировать эти задачи. Затем мы изложим основные теоретические результаты, касающиеся этих задач. Доказательства приведенных результатов будут даны в гл. III, после того как в следующей главе будет развит необходимый алгебраический аппарат.

Здесь и всюду в дальнейшем наш метод изложения состоит в том, что общие понятия вводятся с помощью конкретных примеров. В соответствии с этим первый параграф будет посвящен конкретным примерам задач линейного программирования, которыми мы воспользуемся при формулировке последующих общих определений.

§ 1. Примеры

Пример 1. Задача о диете. Эта задача стала классической иллюстрацией задач линейного программирования и фактически рассматривается при каждом изложении данного предмета. Она связана с проблемой питания (например, армии) наиболее экономным образом, но в то же время с соблюдением некоторых требований питательности. Будем более определенными. Пусть у врача-диетолога имеется n различных продуктов, которые обозначены через $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Из них он должен составить *диету*, т. е. определить количество каждого продукта, которое нужно потреблять ежегодно каждому индивидууму или группе индивидуумов. Требуется, чтобы это годовое меню содержало определенное количество питательных элементов таких, как белок, калории, минеральные вещества, витамины и т. п. Мы будем считать эти типы питательных элементов просто *питательными веществами*, среди которых будет m различных веществ, обозначенных через $N_1, \ldots$ $\ldots, N_m$. Предположим, что в год каждому человеку необходимо по крайней мере γ_1 единиц N_1, γ_2 единиц $N_2, \ldots, \gamma_m$ единиц N_m. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям врач-диетолог должен точно знать, сколько питательных веществ содержится в каждом продукте. Обозначим через α_{ij} количество i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го продукта. Информацию, необходимую диетологу, удобно представить в виде следующей *таблицы* или *матрицы*

	F_1	F_2	$\ldots$	F_n
N_1	α_{11}	α_{12}	$\ldots$	α_{1n}
N_2	α_{21}	α_{22}	$\ldots$	α_{2n}
$\cdot$				
$\cdot$				
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
N_m	α_{m1}	α_{m2}	$\ldots$	α_{mn}

Элемент i-й строки и j-го столбца матрицы — число α_{ij} — определяет количество N_i в единице F_j. В дальнейшем будем называть эту таблицу *матрицей питательности*.

Предположим теперь, что диетолог уже выбрал диету. Это значит, что он определил, что в год каждый человек должен потреблять η_1 единиц продукта F_1, η_2 единиц продукта F_2 и т. д. Как он теперь проверит, что в этой диете удовлетворены требования питательности? Очевидно, он просто подсчитает количество каждого питательного вещества в диете и сравнит его с предписанным количеством. Рассмотрим питательное вещество N_1. В каждой единице F_1 содержится α_{11} единиц N_1, а поскольку в диете η_1 единиц продукта F_1, из F_1 мы получаем $\eta_1\alpha_{11}$ единиц N_1. Аналогично из продукта F_2 мы получаем $\eta_2\alpha_{12}$ единиц N_1 и, вообще говоря, из продукта F_j мы получаем $\eta_j\alpha_{1j}$ единиц N_1. Полное количество N_1, содержащееся в этой диете, будет

$$\eta_1\alpha_{11}+\eta_2\alpha_{12}+\ldots+\eta_n\alpha_{1n}.$$

Требуется, чтобы это количество было равно по меньшей мере γ_1. Таким образом, потребность в питательном элементе N_1 просто означает, что числа $\eta_1, \ldots, \eta_n$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j\alpha_{1j} \geqq \gamma_1.$$

Требования на остальные питательные вещества принимают точно такую же форму, и условие удовлетворения диеты всем требованиям состоит в том, чтобы числа η_j удовлетворяли одновременно m неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j\alpha_{ij} \geqq \gamma_i \qquad \text{для } i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{1}$$

Диета, для которой выполнены условия (1), будет называться *допустимой диетой.*

Пока еще не было поставлено никакой задачи на максимум или минимум, но мы уже отметили, что диетолог должен выбрать из всех диет, отвечающих требованиям (1), наиболее экономную. Предположим теперь, что каждому продукту сопоставлена некоторая *цена*. Пусть π_j — цена единицы продукта F_j. Отсюда следует, что стоимость диеты, описанной числами η_j, определяется выражением

$$\pi_1\eta_1+\pi_2\eta_2+\ldots+\pi_n\eta_n=\sum_{j=1}^{n} \pi_j\eta_j. \tag{2}$$

Теперь мы можем дать точную формулировку задачи о диете: *Среди всех диет, удовлетворяющих условиям* (1), *найти ту, при которой выражение* (2) *достигает минимума.*

Задача, которую мы сейчас описали, может быть излишне многословно, является типичной задачей линейного программирования. Слово «линейный» употребляется здесь ввиду того, что неравенства (1) и подлежащая минимизации функция являются линейными.

Диета, удовлетворяющая (1) и минимизирующая (2), называется *оптимальной*. Задачу о диете можно в математическом отношении разделить на две части: первая — нахождение допустимых диет и вторая — если допустимые диеты существуют, нахождение оптимальной диеты. Легко видеть, что допустимые диеты будут существовать всегда, при условии, что каждое питательное вещество N_i имеется хотя бы в одном продукте F_j. Тогда, используя достаточное количество этого продукта, можно всегда удовлетворить потребности. Ясно, что в этом случае оптимальная диета также существует. Однако строгое доказательство этого факта придется отложить до главы III.

Пример 2. Транспортная задача. Пусть некоторый вид продукции, например сталь, производится на каждом из m заводов $P_1, \ldots, P_m$ и пусть σ_i — ежегодный выпуск стали на i-м заводе. Предположим далее, что сталь требуется на каждом из n рынков $M_1, \ldots, M_n$ и пусть ежегодная потребность j-го рынка равна δ_j. Наконец, пусть γ_{ij} — цена перевозки единицы товара с завода P_i на рынок M_j.

Задача состоит в том, чтобы определить такой *план перевозок*, при котором: (1) был бы удовлетворен спрос δ_j на рынке M_j, (2) не было бы превышено предложение σ_i завода P_i и (3) была бы минимальной полная цена перевозок. План перевозок состоит просто из mn неотрицательных чисел ξ_{ij}, где ξ_{ij} представляют собой количества продукции, которые должны перевозиться из P_i на M_j. Таким образом, $\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij}$ — полное количество продукции, привозимой на рынок M_j, и условие (1) обращается в

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} \geqq \delta_j. \tag{1}$$

Полное количество продукции, вывозимое из P_i, равно $\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}$ и, таким образом, условие (2) эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \leqq \sigma_i. \tag{2}$$

Наконец, требуется минимизировать

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij}\xi_{ij}. \tag{3}$$

Необходимо отметить, что эта задача формулируется в такой же общей форме, что и задача о диете. Мы ищем некоторые неотрицательные числа ξ_{ij}, которые удовлетворяют системе *линейных неравенств* (1) и (2) и минимизируют *линейную функцию* (3). По аналогии с терминологией, использованной в задаче о диете, будем говорить, что план перевозок является *допустимым*, если числа ξ_{ij} удовлетворяют неравенствам (1) и (2). Немедленно становится очевидным, что необходимое условие допустимости для этой задачи состоит в том, чтобы полное предложение было по крайней мере таким же, как и полный спрос, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \geq \sum_{j=1}^{n} \delta_j. \tag{4}$$

Предоставляем читателям доказать обратное: если (4) выполнено, то существует допустимый план перевозок (см. упр. 1).

Следующие два примера представляют весьма широкий интерес и охватывают в качестве частных случаев много других примеров. Они затрагивают важное понятие о *линейной модели производства*, которое мы сейчас опишем. Рассмотрим производственную систему, например завод, где n продуктов $G_1, \ldots, G_n$ участвуют в производственном процессе либо в качестве потребляемых продуктов, либо в качестве конечных продуктов. Например, этими продуктами могут быть сталь, труд, автомобили и т. д.[1]) Продукты производятся с помощью *линейных процессов*, называемых также *технологическими способами*. Такой способ следует представлять себе как «рецепт», указывающий пропорции, в которых различные продукты требуются при данном способе производства. Типичным примером является рецепт из обычной поваренной книги. Так, например, если продуктами являются яйца, масло, соль, молоко,

[1]) Здесь и далее автор вслед за большинством буржуазных экономистов игнорирует качественные отличия труда от других видов «продуктов».— *Прим. ред.*

сыр, то *способ изготовления суфле* полностью описывается указанием того, сколько частей масла, яиц и т. д. требуется для изготовления единицы суфле[1]). Утверждение, что этот процесс *линейный*, просто означает, что при умножении количеств всех ингредиентов на любую постоянную количество суфле умножится на ту же постоянную. Заметим, что предположение линейности является значительно более строгим ограничением в тех типах процессов, которые будут рассмотрены. Если бы в приведенном кулинарном примере труд входил в состав продуктов, линейность была бы утрачена, так как в общем, конечно, неверно, что изготовление двойной порции суфле требует двойного количества поварского труда.

Теперь легко дать формальное определение технологического процесса.

Определение. *Технологический процесс* P, включающий n продуктов, определяется набором из n чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Продукт G_j называется *потребляемым* при данном процессе, если α_j отрицательно, и *производимым*, если α_j положительно.

Линейная модель производства P, включающая n продуктов, состоит из набора таких процессов $P_1, \ldots, P_m$. Такая модель полностью описывается таблицей размера $m \times n$ из чисел α_{ij}, где α_{ij} — количество продукта G_j, производимого (или потребляемого, если α_{ij} отрицательно) при единичной интенсивности использования процесса P_i. Эта таблица называется *матрицей производительностей* модели

$$\begin{array}{c|ccc} & G_1 & \ldots & G_n \\ \hline P_1 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ P_m & \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{array}$$

---

[1]) Здесь и далее при описании процесса не предполагается каких-либо указаний на способы и последовательность обработки участвующих в процессе исходных продуктов. В этом смысле производственный процесс рассматривается как своего рода «черный ящик».— *Прим. ред.*

Далее, для того, чтобы полностью описать поведение модели производства, необходимо определить продукты, производимые и потребляемые при каждом процессе. Будем говорить, что *уровень*, или *интенсивность* процесса P_i есть ξ_i, если продукты производятся или потребляются в количествах $\xi_i\alpha_{i1}, \xi_i\alpha_{i2}, \ldots, \xi_i\alpha_{in}$. *Производственный план* модели P определяется как набор неотрицательных интенсивностей $\xi_1, \ldots, \xi_m$, соответствующих P_i. Мы видим, что при заданных ξ_i полное количество производимого продукта G_j представляет собой сумму продуктов, производимых в каждом процессе, и определяется выражением

$$\xi_1\alpha_{1j}+\xi_2\alpha_{2j}+\ldots+\xi_m\alpha_{mj},$$

где эти величины могут быть, конечно, отрицательными (это просто означает, что j-й продукт потребляется, а не производится).

Теперь мы подготовились к изложению двух примеров.

Пример 3. Производство для удовлетворения заданной потребности с минимальными затратами. Предположим, что имеется линейная модель производства и требуется произвести по крайней мере δ_j единиц продукта G_j (δ — спрос). Предположим далее, что стоимость работы при использовании процесса P_i с единичной интенсивностью равна γ_i, а с интенсивностью ξ_i равна $\xi_i\gamma_i$ (здесь мы опять делаем то довольно ограничительное предположение, что стоимость работы пропорциональна его интенсивности). Задача состоит в том, чтобы выбрать производственный план, который удовлетворял бы спросу δ_j и минимизировал полные затраты. Таким образом, ищутся неотрицательные числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$, которые минимизируют сумму

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i\gamma_i \tag{1}$$

и подчинены требованиям

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i\alpha_{ij}\geqq\delta_j, \qquad j=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь будет уместно сделать несколько замечаний. Напомним, что числа α_{ij} могут быть положительными и отрицательными в зависимости от того, производится или потребляется продукт G_j в процессе P_i. Аналогично, спрос δ_j также может быть отрицательным. Отрицательный спрос экономически означает предложение, так как, если δ_j отрицательно, то неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \geqq \delta_j$$

означает, что мы не должны потреблять больше, чем $-\delta_j$. Таким образом, в этой модели участвуют как спрос, так и предложение.

В этом примере вопрос о допустимости становится уже не таким простым. Может легко случиться, что нет технологической возможности удовлетворить заданный спрос при данных ресурсах, поскольку (2) может быть произвольной системой линейных неравенств, а такая система не обязательно имеет решение. Если, однако, допустимый план существует, то интуитивно ясно, что существует и *оптимальный* план, поскольку стоимость заданного плана ограничена снизу нулем. Доказательство этого факта будет дано в гл. III.

Пример 4. Производство с целью максимизации дохода при данных ресурсах. Этот пример по существу совпадает с предыдущим при изменении знака. Рассмотрим снова линейную модель производства, но вместо того, чтобы с каждым способом связывать некоторую цену, мы введем $\gamma_i \geqq 0$ — *доход*, получаемый при использовании процесса P_i с единичной интенсивностью, например, от продажи продукции, полученной в результате этого процесса. Предположим далее, что задан фиксированный спрос σ_j на j-й продукт (товар). Задача состоит в нахождении производственного плана $\xi_1, \ldots, \xi_m$, который будет максимизировать доход, с учетом заданного спроса. В буквенной записи наша задача примет вид:

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \tag{1}$$

при условиях

$$-\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \sigma_i. \tag{2}$$

В левой части неравенства (2) стоит минус, так как спрос мы считаем положительным, и, таким образом, количество продукта G_j, потребляемого в производстве, не должно превосходить спроса σ_j.

Имея перед собой эти четыре примера, нетрудно выявить их общие элементы и дать первое основное определение.

Определение. *Стандартная задача линейного программирования* состоит в нахождении неотрицательных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$, которые минимизируют заданную линейную функцию, т. е. решают следующую задачу:

$$\text{максимизировать или минимизировать } \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i, \tag{1}$$

причем числа ξ_i должны удовлетворять также системе линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Далее мы определим более общую задачу линейного программирования. Пока же читатель мог бы отметить, что все наши примеры подходят под приведенное определение. В соответствии с введенной терминологией будем называть числа ξ_i, удовлетворяющие системе (2), *допустимым решением* задачи, а саму задачу *допустимой*, если она имеет допустимое решение. Допустимое решение максимизирующее или минимизирующее (1) будет называться *оптимальным.* Этот максимум (или минимум) будет называться *значением* задачи линейного программирования.

§ 2. Двойственность и цены

Мы начнем этот параграф с рассмотрения вполне конкретной задачи максимизации.

Пример 5. Найти неотрицательные числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, максимизирующие

$$2\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \tag{1}$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_4 &\leqq 4, \\
2\xi_1 + \xi_2 &\leqq 3, \\
\xi_2 + 4\xi_3 + \xi_4 &\leqq 3.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Мы утверждаем, что оптимальным решением является здесь

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}, \quad \xi_4 = 0.$$

Непосредственной подстановкой читатель может проверить, что эти числа допустимы, т. е. что они удовлетворяют системе неравенств (2). Подставляя эти числа в (1), мы получаем

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} + 0 = 6\frac{1}{2}.$$

Мы утверждаем, что именно это число, $6^1/_2$, является искомым максимумом. Откуда мы можем это знать и как мы можем быть уверены в том, что никакой другой набор чисел ξ_i, также удовлетворяющих системе (2), не даст нам большего значения выражения (1)? В следующих параграфах мы собираемся доказать читателю, что приведенное допустимое решение действительно оптимально. Для того чтобы сделать это, обратимся на мгновение к общей задаче нахождения *неотрицательных чисел* $\xi_1, \ldots, \xi_m$, *которые*

$$\textit{максимизируют} \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Основное положение линейного программирования состоит в том, что приведенная задача на максимум соответствует следующей стандартной задаче на минимум: найти *неотрицательные числа* $\eta_1, \ldots, \eta_n$, *которые*

$$\textit{минимизируют} \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j \tag{3*}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} \geqq \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4*}$$

Задача (3*), (4*) называется задачей, *двойственной* задаче (3), (4), и центральные результаты линейного программирования относятся к соотношению между самой задачей и двойственной ей. Вскоре мы дадим точное изложение этого соотношения, а пока отметим следующее.

Лемма 1.1. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — *допустимое решение стандартной задачи на максимум* (т. е. неотрицательное решение неравенств (4)) *и пусть* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — *допустимое решение двойственной задачи* (неотрицательное решение неравенств (4*)). *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \leqq \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij} \leqq \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j. \tag{5}$$

Доказательство. Умножая j-е неравенство (4) на η_j и суммируя по j, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j \geqq \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \tag{6}$$

Умножая i-е неравенство (4*) на ξ_i и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \leqq \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \tag{7}$$

Сопоставление (6) и (7) дает нам (5).

Как следствие этой леммы получим наш первый важный результат:

Теорема 1.1 (критерий оптимальности). *Если существуют такие допустимые решения* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *рассмотренной выше задачи на максимум и двойственной ей задачи, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j, \tag{8}$$

то эти допустимые решения являются в действительности и оптимальными решениями соответствующих задач.

Доказательство. Пусть $\xi'_1, \ldots, \xi'_m$ — какое-нибудь другое допустимое решение задачи на максимум. Тогда по лемме

$$\sum_{i=1}^{m} \xi'_i \gamma_i \leqq \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j. \tag{9}$$

Объединяя это неравенство с (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi'_i \gamma_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma_i,$$

а это значит, что $\xi_1, \ldots, \xi_m$ является оптимальным решением. Аналогично доказывается оптимальность $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Применим этот результат непосредственно к нашему численному примеру. Двойственной к этой задаче будет задача нахождения неотрицательных чисел η_1, η_2, η_3, для которых сумма

$$4\eta_1 + 3\eta_2 + 3\eta_3 \text{ минимальна} \tag{1*}$$

и которые подчинены условиям

$$\begin{aligned} \eta_1 + 2\eta_2 \qquad &\geqq 2, \\ 3\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &\geqq 4, \\ 4\eta_3 &\geqq 1, \\ \eta_1 + \qquad \eta_3 &\geqq 1. \end{aligned} \tag{2*}$$

Теперь прямой подстановкой проверяется, что

$$\eta_1 = \frac{11}{10}, \quad \eta_2 = \frac{9}{20}, \quad \eta_3 = \frac{1}{4}$$

дают неотрицательное решение системы (2*), а следовательно, допустимое решение двойственной задачи. Более того, подсчитывая сумму (1*), получаем

$$4 \cdot \frac{11}{10} + 3 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{130}{20} = 6\frac{1}{2},$$

а это равно величине, полученной из допустимого решения исходной задачи на максимум. Следовательно, по теореме 1.1 мы нашли оптимальное решение обеих задач, как исходной, так и двойственной ей.

Мы выполнили наше обещание, доказав читателю, что указанное нами в начале этого параграфа допустимое решение является оптимальным. Это оказалось возможным потому, что нам удалось найти допустимое решение двойственной задачи, которое, как и исходное решение, удовлетворяло критерию оптимальности. По-видимому, у читателя возник естественный вопрос: было ли счастливой случайностью то, что в данном случае нам удалось найти подходящее решение двойственной задачи или же можно надеяться, что такие решения существуют всегда? Основной результат теории линейного программирования состоит в том, что явление, отмеченное в данном примере, наблюдается во всех задачах линейного программирования. Для большей точности отметим, что утверждение, обратное теореме 1.1, также справедливо; если заданы оптимальные решения исходной задачи и двойственной ей, то значения этих двух задач равны. Этот результат известен как основная теорема двойственности линейного программирования. Эту теорему мы сформулируем следующим образом:

Основная теорема двойственности. *Если стандартная задача на максимум или на минимум и двойственная ей являются допустимыми, то обе они имеют оптимальные решения и одинаковое значение.*

Этот замечательный результат, отмеченный впервые, по-видимому, Дж. фон Нейманом, является основным не только в линейном программировании, но также и в теории антагонистических игр и в других многочисленных разделах линейной экономической теории. Доказать этот факт совсем не просто, и мы его отложим до тех пор, пока в следующей главе не будет развит необходимый алгебраический аппарат. Оставшуюся часть этой главы мы посвятим объяснению этого результата в экономических терминах и выводу некоторых следствий из него.

Для того чтобы в дальнейшем было понятно значение теории двойственности, вернемся к численной задаче примера 5 и будем интерпретировать этот пример как производственную задачу того типа, который был описан в примере 4. Предполагаем, что в нашем распоряжении имеются четыре процесса P_1, P_2, P_3 и P_4. Доход, получаемый при использовании процесса P_1 с единичной интенсивностью равен 2, при использовании P_2 равен 4 и т. д. Имеется 3 продукта G_1, G_2, G_3 и для P_1 требуется 1 единица продукта G_1, 2 единицы продукта G_2; для P_2 требуется 3 единицы продукта G_1 и 1 единица продукта G_2 и 1 единица продукта G_3 и т. д. В нашем распоряжении имеется 4 единицы продукта G_1, 3 единицы продукта G_2 и 3 единицы продукта G_3. С какой интенсивностью нужно использовать эти процессы, чтобы максимизировать суммарный доход?

Мы дали типичную интерпретацию задачи (1), (2), но как интерпретировать двойственную ей задачу (1*), (2*)? Заметим, во-первых, что в правой части неравенств (2) стоят доходы и поэтому они измеряются в денежных единицах, например в долларах. Коэффициенты в левой части (2*) выражены в единицах продуктов. Следовательно, числа η_j имеют размерность доллары на единицу продуктов, т. е. η_j суть *единичные цены* товаров G_1, G_2 и G_3.

Каково значение неравенств (2*) при такой интерпретации неизвестных η_j? Рассмотрим первое неравенство

$$1\cdot\eta_1+2\cdot\eta_2\geqq 2.$$

Коэффициенты 1 и 2 слева представляют собой количества продуктов G_1 и G_2, необходимые для использования процесса P_1 с единичной интенсивностью. Поскольку η_1 и η_2— соответствующие цены, левая часть приведенного неравенства представляет собой *затраты* на использование процесса P_1 с единичной интенсивностью, а само неравенство означает, что эти затраты должны быть, во всяком случае, не меньше дохода, получаемого от этого процесса. Аналогичный анализ применим и к другим неравенствам системы (2*), значение которой можно в результате выразить простым экономическим утверждением.

Цены η_j должны быть такими, чтобы никакой процесс P_i не давал бы положительного дохода.

Наконец оказывается, что (1*) представляет собой требование минимизации суммарной цены ресурсов. Теперь можно привести словесную аргументацию, подкрепляющую утверждение теоремы 1.1. Она звучит приблизительно так: «Мы нашли цены η_j, обладающие тем свойством, что доход от каждого технологического процесса будет не больше затрат на этот процесс. Таким образом, полный доход, получающийся в результате работы модели, не больше суммарной цены имеющихся ресурсов. Но мы нашли такой способ работы модели, при котором доход равен этой суммарной цене, и, следовательно, этот способ работы должен быть оптимальным.»

§ 3. Дальнейшая интерпретация двойственности

Мы только что сформулировали основную теорему двойственности и показали, как она может быть использована для доказательства того, что допустимое решение задачи программирования является оптимальным. В этом параграфе мы еще раз рассмотрим примеры задач линейного программирования, данные в § 1, и в каждом случае дадим интерпретацию теоремы двойственности.

1. Задача о диете. Мы не будем еще раз формально переписывать задачу, но просто напомним читателю, что она касается выбора диеты, удовлетворяющей некоторым ограничениям по питательности и минимизирующей суммарные затраты. Двойственную задачу можно описать так: определить значения или «цены» каждого питательного вещества N_i таким образом, чтобы ценность всех питательных веществ, содержащихся в единице j-го продукта F_j, не превосходила цены единицы этого продукта π_i и чтобы суммарная цена требуемого в диете количества питательных веществ была максимальной. Мы рекомендуем читателю проверить приведенное словесное рассуждение формально.

Тут возникает важный нематематический вопрос. Можно ли поставить эту двойственную задачу так, чтобы она приобрела экономический смысл? Совершенно ясно, почему диетолог хотел бы минимизировать цену диеты, отвечающей упомянутым требованиям, но чем объяснить его стремление максимизировать количество питательных веществ в такой диете? Сейчас мы опишем простую ситуацию, в которой такая максимизация имеет экономический смысл. Эта ситуация сначала может показаться несколько искусственной, но когда мы продолжим рассмотрение других примеров, станет ясно, что это не так. Эта ситуация требует введения в наше «гастрономическое повествование» нового действующего лица — продавца пилюль (витаминов в драже, железа в капсулах и т. д.) Этот продавец может, конечно, заготовить для диетолога диету со всеми питательными веществами, которые последнему необходимы в концентрированном виде. Диетолог, единственная цель которого состоит в минимизации затрат, охотно заменит мясо и картофель на драже и капсулы, если это сэкономит деньги (здесь намечается некоторый дальнейший отход от реализма задачи, но в данном случае это для нас не является, конечно, препятствием). Предположим далее, что продавец пилюль установил цену единицы N_i (i-е питательное вещество) в размере ξ_i, будучи уверен, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \pi_j \text{ для всех } j, \tag{2*}$$

где α_{ij} — количество вещества N_i в продукте F_j.

Это значит, что полная цена питательных веществ в единице F_j не больше, чем ее цена. Тогда ясно, что для диетолога не имеет значения, какую диету он выберет; для него всегда будет выгодно покупать пилюли, поскольку цена каждого продукта не меньше цены содержащихся в нем питательных веществ. Продавец пилюль хочет, однако, получить с диетолога столько, сколько допускается ограничениями (2*). Поскольку диета, отвечающая требованиям, предусматривает γ_i единиц вещества N_i, он устанавливает цену ξ_i так, чтобы максимизировать сумму

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i, \tag{1*}$$

а это и есть в точности двойственная задача.

При описании двойственной задачи мы могли бы быть несколько менее конкретными, указав, что цены питательных веществ ξ_i дают возможность продавцу пилюль получить максимум дохода и успешно конкурировать с бакалейщиками. В этом состоит идея *конкурентных цен*, которая характерна для интерпретации теоремы двойственности.

2. Транспортная задача. Для того чтобы определить двойственную задачу, здесь нам удобно выписать фигурирующие в задаче соотношения без знака суммы. Напомним, что мы хотим выбрать числа ξ_{ij}, минимизирую-

щие цену перевозок

$$
\begin{array}{l}
\xi_{11}\gamma_{11} + \xi_{12}\gamma_{12} + \ldots + \xi_{1n}\gamma_{1n} + \\
+ \xi_{21}\gamma_{21} + \xi_{22}\gamma_{22} + \ldots + \xi_{2n}\gamma_{2n} + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \xi_{m1}\gamma_{m1} + \xi_{m2}\gamma_{m2} + \ldots + \xi_{mn}\gamma_{mn}
\end{array}
\qquad (1)
$$

и подчиненные следующим неравенствам (см. § 1, пример 2)

$$
\begin{array}{llllr}
-\xi_{11} - \ldots - \xi_{1n} & & & & \geqq -\sigma_1 \\
 & -\xi_{21} - \ldots - \xi_{2n} & & & \geqq -\sigma_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & & & -\xi_{m1} - \ldots - \xi_{mn} & \geqq -\sigma_m \\
\xi_{11} & + \xi_{21} + \ldots & + \xi_{m1} & & \geqq \delta_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\xi_{1n} & + \xi_{2n} & + \ldots + \xi_{mn} & & \geqq \delta_n,
\end{array}
$$

где σ_i — предложение на заводе P_i и δ_j — спрос на рынке M_j.

Тогда двойственная задача состоит в определении таких неотрицательных чисел π_i, $i = 1, \ldots, m$, и π'_j, $j = 1, \ldots, n$, чтобы $\pi'_j - \pi_i \leqq \gamma_{ij}$ для всех i, j, а разность $\sum_{j=1}^{n} \pi'_j\delta_j - \sum_{i=1}^{m} \pi_i\sigma_i$ максимальна. Читатель может убедиться в корректности постановки двойственной задачи.

Как мы будем интерпретировать эту двойственную задачу? Заметим сначала, что в силу соотношения $\pi'_j - \pi_i \leqq \gamma_{ij}$ мы вынуждены снова измерять переменные π'_j и π_i в денежных единицах. Предположим теперь, что числа γ_{ij} представляют собой транспортные тарифы, с которыми пришлось столкнуться, например, производителю стали, пытающемуся принять решение относительно плана перевозок. Его размышления прерывает визит представителя новой несколько подозрительной транспортной компании, который делает ему следующее предложение: «Я куплю всю вашу сталь по цене π_i за единицу на заводе P_i. Я гарантирую доставку стали в количестве δ_j на рынок M_j, а затем продам ее вам обратно по цене π'_j за каждую единицу, находящуюся на рынке M_j. Заметьте, пожалуйста, что

$$\pi'_j - \pi_i \leqq \gamma_{ij} \quad \text{для всех } i \text{ и } j. \tag{2*}$$

Таким образом, вы заплатите не больше обычной стоимости перевозки». Предприниматель вынужден согласиться, и поэтому сделка заключена также и к удовлетворению представителя упомянутой компании, поскольку он предусмотрительно выбрал цены так, чтобы максимизировать свой собственный доход $\sum \pi'_j\delta_j - \sum \pi_i\sigma_i$ в условиях соблюдения одних лишь неравенств (2*).

По теореме о двойственности оказывается, что предприниматель с помощью такого маневра на самом деле не экономит никаких денег (хотя он и избавляется от хлопот по вычислению минимизирующей расходы схемы перевозок).

Проиллюстрируем теорему двойственности для транспортной задачи численным примером.

Пример 6. Диаграмма на рис. 1 дает схематическое представление транспортной задачи с двумя заводами и тремя рынками. Эта графическая схема понятна почти без

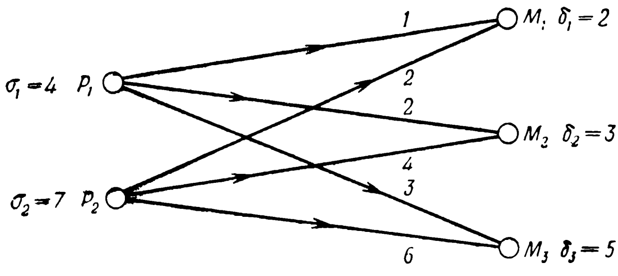


Рис. 1.

дальнейших пояснений. Вершины графа представляют собой заводы и рынки, где указаны соответствующие спрос δ_i и предложение σ_j. Линии, соединяющие заводы и рынки, изображают различные дороги (пути), а числа при каждой линии указывают цену перевозок по соответствующей дороге. Таким образом, матрица цен имеет вид

	M_1	M_2	M_3
P_1	1	2	3
P_2	2	4	6

где ij-й элемент есть цена перевозки единицы товара от P_i к M_j.

Мы утверждаем, что решением этой задачи является

$$\xi_{11}=0, \quad \xi_{12}=0, \quad \xi_{13}=4,$$
$$\xi_{21}=2, \quad \xi_{22}=3, \quad \xi_{23}=1,$$

а минимальной ценой оказывается

$$0\cdot 1+0\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 6=12+4+12+6=34.$$

Для того чтобы доказать, что это действительно так, назначим следующие допустимые цены в двойственной задаче:

$$\pi_1=3, \quad \pi_2=0,$$
$$\pi_1'=2, \quad \pi_2'=4, \quad \pi_3'=6.$$

Для проверки допустимости мы должны убедиться, что разность $\pi_j'-\pi_i$ не больше, чем ij-й элемент матрицы цен. Представленная ниже таблица облегчит эту проверку

	$\pi_1'=2$	$\pi_2'=4$	$\pi_3'=6$
$\pi_i=3$	1	2	3
$\pi_2=0$	2	4	6

Легко проверить, что каждый элемент матрицы цен не меньше разности между числами в начале его столбца и строки.

Наконец, нетрудно убедиться в том, что наши решения двойственной задачи являются оптимальными. Действительно, подсчитаем разность

$$\sum \pi_j'\delta_j-\sum \pi_i\sigma_i=2\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 6-3\cdot 4-0\cdot 7=34.$$

Она равна ранее подсчитанной цене перевозки, откуда следует, что задача решена.

Решение может также быть записано в форме таблицы — *матрицы перевозок*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

где ij-й элемент есть полное количество товаров, перевозимое от P_i к M_j. При сравнении матрицы перевозок с матрицей цен мы замечаем, что не используется наиболее дешевый путь от P_1 к M_1, а наиболее дорогой путь от P_2 к M_3 используется. Это обстоятельство, вероятно, оказалось неожиданным; оно показывает, что заранее угадать решение транспортной задачи не так-то легко.

3. Производство для удовлетворения заданной потребности при минимальной стоимости. В этом случае интерпретация двойственной задачи очень напоминает интерпретацию задачи, двойственной задаче о диете. Детали мы предоставляем читателю.

4. Производство с целью максимизации дохода при данных ресурсах. Эта задача была рассмотрена в предыдущем разделе. Двойственная задача состоит в определении цен π_j различных товаров G_j, так чтобы

$$\text{минимизировать } \sum_{j=1}^{n} \pi_j \sigma_j \tag{1*}$$

при условии, что

$$-\sum_{j=1}^{n} \pi_j \alpha_{ij} \geqq \gamma_i. \tag{2*}$$

Интерпретация. Конкурент полагает, что он может более эффективно реализовать имеющиеся ресурсы и хочет предложить предпринимателю отступного. Таким образом, он предлагает уплатить предпринимателю за каждую единицу товара G_j сумму π_j, где числа π_j удовлетворяют неравенствам (2*). Конкурент быстро убеждает производителя в том, что сумма предлагаемых ему денег, во всяком случае, не меньше той, которую он мог бы получить при любой схеме производства. «Действительно,— говорит конкурент,—

если способ P_i будет использоваться с интенсивностью ξ_i, ваш доход будет равен

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i; \tag{3}$$

при этом, конечно, ввиду ограниченности ваших запасов

$$-\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \sigma_j. \tag{4}$$

Но если вы продадите товары мне, то ваш доход будет равен

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \sigma_j,$$

а

$$\begin{aligned} \sum_j \pi_j \sigma_j \geqq -\sum_j \pi_j \sum_i \xi_i \alpha_{ij} &= \qquad [\text{из } (4)] \\ = -\sum_i \xi_i \sum_j \pi_j \alpha_{ij} &\geqq \sum_i \xi_i \gamma_i \quad [\text{из } (2^*)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, вы получите не меньше». В результате предприниматель соглашается с этим предложением и конкурент дает ему отступного по минимальной возможной цене [т. е. минимум (1*) при выполнении (2*)].

§ 4. Равновесие цен

В этом параграфе мы изложим результат, который является довольно простым следствием теоремы двойственности. Однако он чрезвычайно важен с экономической точки зрения, так как это первый пример «теоремы о равновесии» (вскоре мы объясним, что значит этот термин).

Вернемся к стандартной задаче максимизации, в которой требуется найти такие неотрицательные числа $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_m$, чтобы

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \leqq \beta_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Рассмотрим также двойственную задачу, в которой требуется найти неотрицательные числа $\eta_1, \ldots, \eta_n$, чтобы

$$\text{минимизировать } \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j \tag{1*}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} \geqq \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{2*}$$

Предполагая, что теорема двойственности справедлива, мы получим следующий результат.

Теорема 1.2 (теорема равновесия). *Допустимые решения* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *соответственно неравенств* (2) *и* (2*) *являются оптимальными решениями в том и только в том случае, если*

$$\eta_j = 0, \text{ как только } \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} < \beta_j \tag{3}$$

и

$$\xi_i = 0, \text{ как только } \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} > \gamma_i. \tag{3*}$$

Доказательство. Предположим сначала, что условия (3) и (3*) выполнены. Умножая j-е неравенство (2) на η_j, суммируя по j и используя условие (3), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Аналогично, из (2*) и (3*), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij}, \tag{5}$$

а равенства (4) и (5) показывают, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j;$$

поэтому в силу теоремы 1.1 ξ_i и η_j дают оптимальные решения.

Обратно, если ξ_i и η_j являются оптимальными решениями, то из теоремы двойственности следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = \sum_{i,\,j} \xi_i \eta_j \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j.$$

Из первого равенства, мы получаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij}\right) = 0;$$

но, поскольку числа η_j являются допустимыми, члены $\left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij}\right)$ неположительны и, следовательно, для каждого i

$$\xi_i \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij}\right) = 0,$$

откуда тотчас следует (3*). Симметричные рассуждения доказывают справедливость условия (3).

Будем теперь интерпретировать полученный результат с точки зрения экономики и попытаемся обосновать использование слова «равновесие». С этой целью будем рассматривать соотношения (1) и (2) как задачу о производстве из примера 4. Мы уже убедились в том, что естественно интерпретировать двойственные переменные η_j как цены, а также в том, что условия допустимости (2*) соответствуют требованию, что никакой технологический процесс не допускает положительного дохода. Условие (3*) имеет весьма прозрачную интерпретацию. Оно указывает, что если затраты на процесс превышают доход от него, то этот процесс не должен использоваться, т. е. он будет использоваться с нулевой интенсивностью. Совместно условия (2*) и (3*) можно рассматривать как *условия устойчивости* в следующем смысле. Если интенсивность процессов в модели равна $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и эти условия удовлетворены, то не будет побудительного мотива для изменения интенсивностей, поскольку не существует способа увеличения дохода. В случае невыполнения условий (2*) или (3*) интенсивности должны были бы быть неустойчивыми, поскольку производитель мог бы увеличить свой доход, изменяя интенсивность использования процессов.

Что касается условий (2) и (3), то первое из них представляет собою просто требования технологии производства: имеющиеся запасы не должны быть превышены. Условие (3) устанавливает, что если существуют товары, имеющиеся в *избытке*, т. е. запасы которых неисчерпаны, то цена таких товаров должна равняться нулю. Это тоже является условием устойчивости, на этот раз наложенным на цены, а не на интенсивности процессов. Напомним, что, согласно классическому «закону спроса и предложения», если запасы товара превышают спрос на него, то цена на этот товар падает. С другой стороны, цены не могут опуститься ниже нуля и, следовательно, товар, имеющийся в избытке, даже при максимизации дохода должен оставаться *свободным товаром*.

Обратимся теперь еще к одной иллюстрации и рассмотрим, что́ утверждает теорема равновесия в случае транспортной задачи. Напомним, что допустимым планом перевозок будет тот, который удовлетворяет заданному спросу, не превышая заданного предложения продукта. Допустимое множество двойственных переменных представляют собой цены на каждом заводе и на каждом рынке, обладающие тем свойством, что разница между рыночной и заводской ценой не превосходит цены перевозки с завода на рынок. Тогда условия равновесия принимают вид:

(3*) Если разница в цене на определенном рынке и определенном заводе меньше, чем соответствующая цена перевозки, то никаких товаров не будет перевезено с этого завода на этот рынок.

Интерпретация. «Компания» потеряет деньги, если за перевозку товара с завода на рынок заплатит больше, чем сможет получить, продав товар на рынке. Этот невыгодный путь не будет использоваться.

(3) Если количество товаров, перевозимое с некоторого завода меньше, чем запасы на этом заводе, то цена товара на этом заводе должна быть равна нулю.

Интерпретация. Как и при предыдущем обсуждении, если имеется избыток продукта на некотором заводе, то его цена должна опуститься до нуля.

Одно из наиболее важных использований теоремы равновесия связано с численным расчетом. Мы уже видели, что если заданы допустимые решения прямой и двойственной задач, то они легко могут быть проверены на оптимальность. Далее, если задано решение прямой задачи, то, используя теорему равновесия, часто удается найти решение двойственной задачи. Обратимся к численному примеру 5 с неравенствами

$$\begin{aligned} \xi_1 + 3\xi_2 \qquad\qquad + \xi_4 &\leqq 4, \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad\qquad &\leqq 3, \\ \xi_2 + 4\xi_3 + \xi_4 &\leqq 3 \end{aligned} \tag{2}$$

и с предполагаемым оптимальным решением

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}, \quad \xi_4 = 0.$$

По теореме равновесия двойственные неравенства должны быть в действительности уравнениями для случая $i = 1, 2, 3$, так что мы должны решить простую систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} \eta_1 + 2\eta_2 \qquad\quad &= 2, \\ 3\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 4, \\ 4\eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что ее единственным решением является то, которое приведено в § 2. Таким образом, зная только решение исходной задачи, мы можем найти решение двойственной.

Воспользуемся теоремой равновесия для решения транспортной задачи из примера 6. Предполагаемое решение дается матрицей перевозок

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы хотим найти цены π_1, π_2 и π'_1, π'_2, π'_3. Отметим сначала, что запас σ_2 на заводе P_2 равен 7, но фактически вывозится с этого завода только 6 единиц. Следовательно, по теореме равновесия $\pi_2 = 0$. Далее, ввиду неотрицательности элементов приведенной матрицы перевозок, в двойственной задаче вместо неравенств мы должны иметь уравнения. Таковыми являются

$$\begin{aligned} \pi_1' - \pi_2 &= \pi_1' = 2, \\ \pi_2' - \pi_2 &= \pi_2' = 4, \\ \pi_3' - \pi_1 &\quad\;\; = 3, \\ \pi_3' - \pi_2 &= \pi_3' = 6; \end{aligned}$$

таким образом, $\pi_1' = 2$, $\pi_2' = 4$, $\pi_3' = 6$ и $\pi_1 = 3$, а это и есть ответ, приведенный в предыдущем параграфе.

Библиографические замечания

Термин «линейное программирование» вошел в употребление приблизительно в 1947—1948 гг. Наиболее ранняя из опубликованных работ, название которой содержит эти слова, принадлежит Данцигу [1]: *Программирование* в *линейных* структурах, 1949 (курсив мой). Первая формулировка и анализ задачи о диете были даны Стиглером [1], а транспортной задачи — Хичкоком[1]) [1]. Теорема двойственности была известна Нейману [2] по крайней мере в 1947 году и содержится в целом ряде его неопубликованных заметок, но данное там доказательство не является завершенным. Первое опубликованное доказательство, основанное на заметках Неймана, принадлежит Гейлу, Куну и Таккеру [2]. Подробное изложение теоремы равновесия принадлежит Голдману и Таккеру [2] в статье, содержащей весьма полное рассмотрение теории линейного программирования.

Упражнения

1. Доказать, что транспортная задача допустима в том и только в том случае, если суммарное предложение не меньше суммарного спроса, т. е. если

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \geqq \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

[1]) Автор отмечал во введении неполноту библиографических ссылок. Поэтому мы заметим только, что первая постановка транспортной задачи была сделана еще около 1930 г. советским экономистом А. Н. Толстым; в 1942 году советский математик Л. В. Канторович предложил уже решение этой задачи, фактически использующее принцип двойственности.— *Прим. ред.*

2. Найти допустимый план перевозок в транспортной задаче с 5-ю заводами и 5-ю рынками, где спрос и предложение задаются следующими числами:

$$\sigma_1 = 120, \quad \sigma_2 = 75, \quad \sigma_3 = 205, \quad \sigma_4 = 145, \quad \sigma_5 = 90$$

и

$$\delta_1 = 235, \quad \delta_2 = 50, \quad \delta_3 = 115, \quad \delta_4 = 80, \quad \delta_5 = 150.$$

3. Показать, что следующая стандартная задача максимизации не допустима.

Найти такие неотрицательные числа ξ_1 и ξ_2, чтобы

$$\text{максимизировать } 3\xi_1 - 2\xi_2 \tag{1}$$

при условии

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 5\xi_2 &\leqq 3, \\ -3\xi_1 + 8\xi_2 &\leqq -5. \end{aligned} \tag{2}$$

4. Показать, что следующая задача линейного программирования допустима, но не имеет оптимального решения.

Найти такие ξ_1, $\xi_2 \geqq 0$, чтобы

$$\text{максимизировать } \xi_1 + \xi_2 \tag{1}$$

при условии

$$\begin{aligned} -3\xi_1 + 2\xi_2 &\leqq -1, \\ \xi_1 - \xi_2 &\leqq 2. \end{aligned} \tag{2}$$

5. Составить задачу, двойственную задаче из примера 4. Что можно сказать об этой двойственной задаче на основе результата примера 4 и теоремы двойственности? Проверить это непосредственно.

6. Построить пример стандартной задачи максимизации с двумя неравенствами и двумя неизвестными, которая имеет более одного оптимального решения, хотя и не каждое допустимое решение является оптимальным.

7. Рассмотрим стандартную задачу минимизации, в которой требуется найти такие неотрицательные числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$, чтобы

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \geqq \beta_j \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Если $\alpha_{ij} \geqq 0$ для всех i, j, то показать, что задача допустима в том и только в том случае, если $\beta_j \leqq 0$, как только $\alpha_{1j} = \alpha_{2j} = \ldots = \alpha_{mj} = 0$. Интерпретировать этот результат в случае задачи о диете.

8. Выписать задачу, двойственную задаче из примера 7. Предполагая, что условия задачи из примера 7 выполнены, и, опираясь на теорему двойственности, показать, что исходная задача и двойственная ей имеют оптимальные решения, если $\gamma_i \geqq 0$ для всех i.

9. Проверить, что задача, двойственная задаче о диете, корректно описывается утверждением из § 3, п. 2.

10. Проверить, что задача, двойственная транспортной задаче, корректно задается соотношениями из § 9, п. 2.

11. Дать экономическую интерпретацию задачи, которая двойственна задаче «о производстве для удовлетворения заданной потребности при минимальной стоимости».

12. Рассмотрим следующую стандартную задачу на максимум.

Максимизировать

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad\quad &\leqq 3, \\
\xi_3 + \xi_4 &\leqq 1, \\
\xi_2 + \xi_3 \qquad &\leqq 1, \\
\xi_1 \quad + \xi_3 \qquad &\leqq 1, \\
\xi_3 + \xi_4 &\leqq 3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Показать, что эта задача имеет оптимальное решение

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 1;$$

для этого воспользоваться решением двойственной задачи и теоремой о равновесии.

13. Теми же приемами, которые были использованы в упражнении 12, показать, что

$$\xi_1 = 4, \quad \xi_2 = 1$$

является оптимальным решением следующей задачи:

$$\text{максимизировать } \xi_1 - \xi_2 \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + \xi_2 &\leqq 2, \\ \xi_1 - 2\xi_2 &\leqq 2, \\ \xi_1 + \xi_2 &\leqq 5. \end{aligned} \tag{2}$$

14. Пусть матрица цен транспортной задачи с тремя заводами и четырьмя рынками такова:

	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	4	4	9	3
P_2	3	5	8	8
P_3	2	6	5	7

Спрос и предложение задаются числами

$$\sigma_1 = 3, \ \sigma_2 = 5, \ \sigma_3 = 7; \quad \delta_1 = 2, \ \delta_2 = 5, \ \delta_3 = 4, \ \delta_4 = 4.$$

Мы утверждаем, что следующая матрица перевозок дает оптимальное решение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверить это, найдя цены в двойственном решении, принимая во внимание, что цены на заводах P_2 и P_3 равны нулю.

15. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — несколько географических пунктов. Некий продукт производится в пункте P_0, а нужен в пункте P_n. Для каждой пары точек P_i и P_j заданы неотрицательные числа c_{ij}, называемые *пропускными способностями* и определяющие максимальное количество продукта, которое может быть перевезено за год из пункта P_i в пункт P_j. Сформулировать алгебраически задачу линейного про-

граммирования на максимизацию количества продукта, который может быть за год принят в пункте P_n. Показать, что задача всегда допустима. (Эта задача называется *задачей о максимальном потоке*.)

Указание: поскольку продукты производятся только в пункте P_0, поток из P_i не должен превышать поток в P_i для $i > 0$.

16. Выписать задачу, двойственную приведенной выше задаче о максимальном потоке. Сколько неравенств и сколько неизвестных она должна содержать? Показать, что эта двойственная задача всегда допустима, если пункт P_0 отличен от пункта P_n. Что это означает для исходной задачи с точки зрения теоремы о двойственности?

17. На некотором заводе имеется n различных работ $J_1, \ldots, J_n$ и m лиц $I_1, \ldots, I_m$, способных выполнять каждую из этих работ. Эксперт, занимающийся вопросами эффективности (производительности), испытал каждое лицо на каждой работе и нашел, что *оценка* лица I_i на работе J_j задается неотрицательным числом α_{ij}. Задача состоит в том, чтобы определить, какую долю времени лицо I_i должно работать на работе J_j (считая, что в каждый данный момент работать на данной работе может только одно лицо), так чтобы максимизировать сумму оценок. Сформулировать эту задачу алгебраически как задачу линейного программирования и показать, что она всегда допустима. (Эта задача называется *задачей об оптимальном назначении*.)

18. Выписать задачу, двойственную задаче об оптимальном назначении. Показать, что она имеет $m + n$ неизвестных и mn неравенств. Используя теорему двойственности, доказать, что задача об оптимальном назначении всегда имеет оптимальное решение.

19. Следующая таблица дает *матрицу оценок* для задачи об оптимальном назначении

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
I_1	12	9	10	3	8
I_2	6	6	2	2	9
I_3	6	8	10	11	9
I_4	6	3	4	1	1
I_5	11	1	10	9	12

Мы утверждаем, что решение этой задачи следующее:

I_1 работает все время на работе J_1,
I_2 работает все время на работе J_5,
I_3 работает все время на работе J_4,
I_4 работает все время на работе J_2,
I_5 работает все время на работе J_3.

Кроме того, 5 двойственных неизвестных $\pi'_1, \ldots, \pi'_5$, соответствующих $J_1, J_2, \ldots, J_5$ в оптимальном решении, равны

$$\pi'_1 = 3, \quad \pi'_2 = 0, \quad \pi'_3 = 1, \quad \pi'_4 = 0, \quad \pi'_5 = 3.$$

Проверить оптимальность, найдя сначала двойственные переменные $\pi_1, \ldots, \pi_5$, соответствующие $I_1, \ldots, I_5$.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В этой главе будет развит весь математический аппарат, необходимый для применения в последующих главах. Первые четыре параграфа содержат основной материал, который необходим для понимания всех последующих глав. Три последних параграфа носят несколько более «технический» характер и содержат материал, который будет использоваться лишь изредка, для отдельных приложений. В зависимости от своих намерений читатель сам решит, следует ли ему изучать эти параграфы при первом чтении (в связи с этим см. раздел предисловия «Как использовать эту книгу»).

Способ изложения, принятый в этой главе, по необходимости представляет собой некоторый компромисс. Мы дадим здесь нечто большее, чем простое изложение фактов. К счастью, линейная алгебра тесно связана с аналитической геометрией, и мы будем в тех случаях, когда это окажется желательным для усвоения читателем математической стороны дела, помещать соответствующие рисунки. Мы будем использовать и другой прием: основным теоремам мы будем давать не только номера, но и названия. Несомненно, можно было бы привести и более наглядный материал, но это несоразмерно увеличило бы объем главы. Здесь совершенно необходимо подчеркнуть, что одно упражнение, проделанное читателем, стоит трех параграфов наших объяснений. Подбор таких упражнений, как обычно, можно найти в конце главы.

Для информации читателя познакомимся кратко с программой, которой мы будем следовать в этих параграфах. Нашим предметом является теория линейных уравнений и неравенств в вещественных числах. Эти предметы настолько хорошо известны, что естественно было бы ожидать, что они являются стандартным материалом в каждом учебнике по алгебре. Однако это не так. В настоящее время нам известен только один учебник (см. библиографические замечания), в котором сделана попытка систематически рассмотреть теорию неравенств. Еще более неожиданным является тот факт, что только в сравнительно недавнее время эта теория стала рабочим орудием в математических исследованиях. Поразительной иллюстрацией этого обстоятельства является более чем двадцатилетний разрыв между первым доказательством Нейманом теоремы о минимаксе в теории игр (1928) и простым ее алгебраическим доказательством, основанным на теории неравенств (1950).

Наше изложение можно разделить на три части. Первая часть относится к классической теории линейных уравнений и написана на языке векторов и матриц. Под классической теорией здесь подразумевается теория, действующая над полем чисел: вещественных, рациональных, комплексных, над конечными полями и т. д. Эта теория рассматривается, конечно, в каждом учебнике алгебры. Тем не менее представляется целесообразным развить здесь этот предмет с самого начала, а не отсылать читателя к другим источникам. При этом трудность состоит в том, что все эти источники содержат значительно больше материала, чем нам нужно, и как следствие этого часть необходимой нам теории оказывается затемненной огромным количеством не относящегося к делу материала. Например, большое место в учебниках обычно уделяется теории определителей. Мы не знаем, однако, ни одного примера, где бы эта теория использовалась для экономических задач. Таким образом, нам нет необходимости терять время, рассматривая эти сложные вопросы.

Вторая часть главы (§ 3 и 4) содержит основные теоремы существования из теории неравенств. Как уже отмечалось, этот материал не является стандартным в учебниках алгебры, хотя мы осмеливаемся предсказать, что он станет им в ближайшем будущем. Во всяком случае, у нас нет иного выхода, как изложить его здесь с самого начала, поскольку этот материал представляет собой тот математический фундамент, на котором основано большинство дальнейших приложений. В последних параграфах содержится более детальный анализ решений неравенств. В них вводится несколько важных геометрических понятий, которые время от времени используются в последующих главах.

Хотя материал, касающийся векторов и матриц, существенно самостоятелен, мы предполагаем, что большинство наших читателей имеют некоторое знакомство с этими объектами. Поэтому мы будем только кратко отмечать их элементарные свойства и соответствующие геометрические идеи. Содержание будет значительно более подробным, когда мы подойдем к параграфам, касающимся неравенств.

§ 1. Векторы

Результаты этого параграфа касаются некоторых свойств алгебраических объектов, называемых *полями*. Для наших целей нам не нужно абстрактного определения поля. Когда мы говорим о поле F, читатель может думать о любом множестве вещественных или комплексных чисел, замкнутом относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления; т. е. если два элемента a и b принадлежат F, то F принадлежат также $a+b$, $a-b$, ab и $\frac{a}{b}$ (последнее, если $b \neq 0$). Элементы F будут далее называться *скалярами*, или *числами*.

Определение. *m-мерный вектор x* есть упорядоченный набор m чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Число ξ_i называется *i-й компонентой* вектора x. Мы будем использовать обозначение $x = (\xi_i)$, если x есть вектор, i-я компонента которого равна ξ_i.

Множество всех m-мерных векторов называется m-мерным *пространством* и обозначается через F^m.

Отметим среди векторов пространства F^m некоторые векторы, которые будут играть в последующей теории важную роль.

Определение. *Единичным вектором* в пространстве F^m является вектор, все координаты которого равны 1. Единичный вектор мы будем обозначать буквами u или v.

i-й орт есть вектор, i-я компонента которого есть 1, а остальные компоненты равны 0[1]). i-й орт мы будем обозначать через u_i или v_i.

---

[1]) Во избежание возможных недоразумений подчеркнем, что здесь термины «единичный вектор» и «орт» не являются синонимичными.— *Прим. ред.*

Определим теперь над векторами x из пространства F^m две алгебраические операции.

Сложение. Если $x = (\xi_i)$ и $y = (\eta_i)$ — m-мерные векторы, то их *суммой* $x + y$ называется вектор $(\xi_i + \eta_i)$.

Умножение на скаляр. Если $x = (\xi_i)$ — m-мерный вектор, λ — число, то *произведением* λx называется вектор $(\lambda\xi_i)$.

Напомним читателю знакомые «картинки» действий над векторами. Пусть F^3— обычное трехмерное пространство из аналитической геометрии, вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ соответствует направленному отрезку из начала координат в точку с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3. Векторы складываются по «правилу параллелограмма». Умножая вектор на λ, мы «растягиваем» его в $|\lambda|$ раз (изменяя его направление на противоположное, в случае, когда λ меньше нуля).

Перечислим теперь ряд свойств сложения и умножения на скаляр, немедленно следующих из определений. Эти свойства читатель может легко проверить. Впоследствии мы будем свободно их использовать без подробной ссылки при каждом использовании.

Для сложения мы имеем:

A1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативный закон),

A2. $x+y=y+x$ (коммутативный закон),

A3. Для любых x и y существует такое z, что $x+z=y$ (обратимость сложения).

Для умножения:

M1. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (дистрибутивный закон для векторов),

M2. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (дистрибутивный закон для скаляров),

M3. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (ассоциативный закон для умножения на скаляр),

M4. $1\cdot x=x$ (существование единицы).

Для многих теорем, которые здесь будут доказаны, достаточно пользоваться только свойствами A1 — A3 и M1 — M4 и не возвращаться к исходному определению пространства F^m. Действительно, перечисленные свойства можно рассматривать как аксиомы абстрактной алгебраической системы. Такие системы называются *векторными пространствами.*

Символ 0 мы будем использовать в двух смыслах: для обозначения числа нуль (обозначение 0) и для вектора, все компоненты которого равны нулю (обозначение $\mathbf{0}$)[1]).

Обозначение. В этом месте изложения представляется удобным ввести теоретико-множественные символы: $\in$, который означает «является элементом» или «принадлежит», и $\notin$, который, будучи отрицанием предыдущего, означает «не принадлежит». Утверждения «x есть m-мерный вектор», «λ есть скаляр» принимают тогда вид «$x \in F^m$» и «$\lambda \in F$». Мы будем неизменно для обозначения скаляров использовать греческие буквы и для векторов — латинские.

Перейдем теперь к изложению основных свойств векторных пространств.

Определения. Подмножество L векторного пространства U называется *линейным подпространством* или просто *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр, т. е.

$$\text{если } x,\ y \in L, \quad \text{то } x+y \in L, \tag{1}$$

$$\text{если } x \in L,\ \lambda \in F, \text{ то } \lambda x \in L. \tag{2}$$

Векторы $x_1, \ldots, x_n$ из U называются *линейно зависимыми* или просто *зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mathbf{0}.$$

Если таких чисел нет, то векторы называются *независимыми.*

Вектор y называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_n$, если для некоторых чисел λ_i

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

---

[1]) Различные обозначения для нуля и нулевого вектора введены в русском переводе.— *Прим. ред.*

Напомним геометрические рисунки, соответствующие этим определениям. В обычном трехмерном пространстве подпространства соответствуют плоскостям и прямым, проходящим через начало координат, а также самому началу координат $\mathbf{0}$. Два вектора линейно зависимы, если они лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат; три вектора зависимы, если они расположены на одной и той же плоскости, проходящей через начало координат.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы изложить основной результат теории векторных пространств.

Теорема 2.1 (основная теорема о векторных пространствах). *Если каждый из векторов $y_0, y_1, \ldots, y_n$ векторного пространства U является линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$, то векторы y_i зависимы.*

Доказательство ведется индукцией по n. Если $n=1$, то $y_0=\lambda_0 x_1$, $y_1=\lambda_1 x_1$. Если и λ_0 и λ_1 равны нулю, то $y_1=y_0=0$ и заключение следует немедленно. В противном случае предположим, например, $\lambda_0 \neq 0$. Тогда из того, что $\lambda_0 y_1-\lambda_1 y_0=\lambda_0\lambda_1 x_1-\lambda_1\lambda_0 x_1=0x_1=\mathbf{0}$, мы получаем желаемую зависимость.

Предположим теперь, что теорема справедлива для $n=k-1$ и докажем ее для $n=k$. Из условия мы имеем

$$y_j=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}x_i, \quad j=0, \ldots, k.$$

Если все числа λ_{ij} равны нулю, то, как и ранее, доказательство получается непосредственно. Поэтому предположим, что хотя бы одно из чисел λ_{ij} отлично от нуля. Пусть, например, $\lambda_{10}\neq 0$. Определим для $j=1, \ldots, k$

$$z_j=y_j-\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{10}}y_0=\sum_{i=2}^{k}\left(\lambda_{ij}-\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{10}}\lambda_{i0}\right)x_i.$$

Тогда каждый из k векторов z_j является линейной комбинацией $k-1$ векторов $x_2, \ldots, x_k$. Но по индуктивному предположению векторы z_j зависимы, т. е. существуют такие числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$, не все равные нулю, что

$$0=\sum_{j=1}^{k}\mu_j z_j=\sum_{j=1}^{k}\mu_j y_j-\frac{1}{\lambda_{10}}\left(\sum_{j=1}^{k}\mu_j\lambda_{ij}\right)y_0,$$

а это показывает, что векторы y_j зависимы, как и утверждалось в теореме.

Следствие 1. *Любые $m+1$ векторов в пространстве F^m зависимы.*

Доказательство. Пусть u_i — i-й орт. Тогда любой вектор x из F^m является комбинацией ортов u_i, так как если $x=(\xi_i)$, то $x=\sum_{i=1}^{m}\xi_i u_i$. Это утверждение следует из теоремы 2.1.

Следствие 2. *Любая система n однородных линейных уравнений с $n+1$ неизвестными имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\lambda_j=0,\quad i=1,\ \ldots\ ,n, \tag{1}$$

— уравнения относительно неизвестных λ_j с коэффициентами α_{ij}. Пусть a^j — n-мерные векторы: $a^j=(\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{nj})$, где $j=0,\ldots,n$. Это векторы из n-мерного пространства, и число их равно $n+1$. Значит, по следствию 1, они зависимы, так что существуют такие числа λ_j, не все равные нулю, что

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j a^j=\mathbf{0}.$$

Эти числа λ_j и определяют требуемое решение системы (1).

Теорема 2.1 и следствия из нее являются основой всей теории линейных уравнений. Отметим, что приведенное доказательство теоремы фактически *конструктивно*. Это значит, что при любых заданных $m+1$ векторах из F^m теорема указывает, как находить числа λ, которые входят в определение линейной зависимости этих векторов. Объем вычислений здесь не больше, чем при известном методе исключения.

Введем далее важные алгебраические понятия.

Определение. Пусть S — подмножество векторного пространства U. *Рангом* r подмножества S называется максимальное число независимых векторов, которые могут быть выбраны из S.

Если S имеет ранг r, то набор r независимых векторов множества S называется *базисом* S.

В общих векторных пространствах иногда можно выбирать из подмножества S и бесконечные множества независимых векторов. Однако если $U = F^m$, то из следствия 1 вытекает, что ранг любого S не может превосходить m.

В том случае когда подмножество S является линейным подмножеством, в большинстве учебников ранг множества S называется его *размерностью*. Мы предпочитаем зарезервировать термин «размерность», имея в виду использовать его в дальнейшем. Однако в случае подпространства понятия ранга и размерности будут совпадать

В обычном трехмерном пространстве линейные подпространства ранга 0, 1, 2 и 3 являются соответственно началом координат, прямой, проходящей через начало координат, плоскостью, проходящей через начало координат, и всем трехмерным пространством.

Линейное подпространство пространства F^m ранга $m-1$ называется *гиперплоскостью* и является очевидным аналогом плоскости в трехмерном пространстве.

Следствие 3. *Пространство F^m имеет ранг m.*

Доказательство. Мы только что убедились в том, что ранг F^m не превосходит m. С другой стороны, орты $u_1, \ldots, u_m$ независимы, поскольку $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, а этот вектор равен нулю, только если $\lambda_i = 0$ для всех i.

Теорема 2.2 (теорема о базисах). *Набор независимых векторов $x_1, \ldots, x_r$ множества S будет базисом S в том и только в том случае, когда любой вектор $y \in S$ является линейной комбинацией векторов x_i.*

Доказательство. Предположим, что любой вектор $y \in S$ является линейной комбинацией векторов x_i. Тогда S не содержит никакого большего набора независимых векторов, так как любой набор, состоящий более чем из r векторов, должен быть зависимым, поскольку эти вектора являются комбинацией векторов x_i. Таким образом, ранг S равен r, и векторы x_i составляют базис.

Обратно, предположим, что x_i образуют базис. Тогда по определению S имеет ранг r, так что, если $y \in S$, то векторы $x_1, \ldots, x_r$ и y зависимы; таким образом[1])

$$\sum \lambda_i x_i + \lambda y = 0,$$

где $\lambda \neq 0$, так как в противном случае векторы x_i были бы зависимы. Таким образом, мы получаем, что

$$y = -\frac{1}{\lambda} \sum \lambda_i x_i$$

дает требуемую линейную комбинацию.

§ 2. Скалярное произведение, матрицы, линейные уравнения

Введем теперь третью операцию в пространстве F^m.

Скалярное произведение. Если $x = (\xi_i)$ и $y = (\eta_j)$ — векторы из F^m, то их *произведение* xy, определим как число $\sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i$.

Очевидными свойствами скалярного произведения являются:

S1: $xy = yx$ (коммутативный закон),

S2: $(\lambda x) y = \lambda (xy)$ (смешанный ассоциативный закон),

S3: $(x + y) z = xz + yz$ (дистрибутивный закон).

Напомним читателю геометрическую интерпретацию скалярного произведения в обычной аналитической геометрии. Скалярное произведение двух векторов в этом случае есть произведение длин этих векторов, умноженное на косинус угла между ними. В частности, скалярное произведение двух векторов положительно, отрицательно или равно нулю в зависимости от того образуют ли векторы острый, прямой или тупой угол. Мы не будем дока-

[1]) Впредь мы будем опускать пределы суммирования там, где это не может привести к недоразумению.

зывать этих фактов, поскольку они нам никогда не понадобятся. Тем не менее читателю стоит помнить о них для того, чтобы представлять себе рассматриваемые алгебраические факты более наглядно.

Скалярное произведение обычно используется для записи линейных уравнений. Система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_j = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

может быть переписана в более компактной векторной форме:

$$a_i y = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \text{ и } y = (\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

В обозначениях скалярного произведения следствие 2 из предыдущего параграфа можно сформулировать так.

Следствие 2. *Если $a_1, \ldots, a_{m-1}$ векторы из пространства F^m, то уравнения*

$$a_i x = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

имеют решение $x \neq \mathbf{0}$.

Введем теперь очень удобную систему матричных обозначений.

Определение. *$m \times n$-матрицей* называется прямоугольная таблица чисел α_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1}, & \ldots, & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вместо того чтобы выписывать всю эту таблицу, мы будем просто писать $A = (\alpha_{ij})$, что читается так: «A есть матрица, ij-й *элемент* которой равен α_{ij}».

n-мерный вектор $a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ называется i-й *строкой* матрицы A, а m-мерный вектор $a^j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$ — j-м ее *столбцом*. Ранг множества строк (столбцов матрицы A) называется *строчечным* (*столбцовым*) *рангом* матрицы A.

Первое важное свойство матриц, которое мы установим, состоит в том, что эти два ранга в действительности равны.

Теорема 2.3 (теорема о ранге матрицы). *Для любой матрицы строчечный и столбцовый ранги равны.*

Доказательство. Пусть r — строчечный ранг матрицы A, а s — ее столбцовый ранг. Предположим, что $r < s$. Выберем теперь базис множества строк матрицы A, который можно считать состоящим из строк $a_1, \ldots, a_r$ (изменение нумерации строк или столбцов A, очевидно, не влияет на ее строчечный или столбцовый ранги) и базис множества столбцов, состоящий из столбцов $a^1, \ldots, a^s$. Положим $\hat{a}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{is})$ и отметим, что система уравнений

$$\hat{a}_i y = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

в которую входят r уравнений с s неизвестными, имеет ненулевое решение $\bar{y}$. Кроме того, поскольку $a_1, \ldots, a_r$ — строчечный базис, из основной теоремы следует, что для всех k существуют такие числа μ_{ik}, что $a_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} a_i$. Следовательно,

$$\hat{a}_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} \hat{a}_i, \tag{2}$$

и, таким образом, для всех k

$$\hat{a}_k \bar{y} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} (\hat{a}_i \bar{y}) = 0. \tag{3}$$

Записывая $\bar{y}$ как $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_s)$, мы можем переписать (3) в виде

$$\sum_{j=1}^{s} \bar{\eta}_j a^j = 0. \tag{4}$$

Получающаяся зависимость между столбцами a^j, $j \leq s$, противоречит предположению о том, что они образуют базис. Это противоречие показывает, что $r \geq s$, и если поменять ролями строки и столбцы, то аналогичная аргументация приведет нас к обратному неравенству. Этим и завершается доказательство.

Доказанная теорема дает нам основание говорить просто о *ранге матрицы* A.

Непосредственным следствием теоремы о ранге матрицы является следующий результат, касающийся линейных уравнений.

Следствие. *Если векторы $a_1, \ldots, a_r$ являются независимыми в пространстве F^n, то, каковы бы ни были числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, существует такой вектор y, что*

$$a_i y = \alpha_i, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть A — $r \times n$-матрица со строками $a_1, \ldots, a_r$. По теореме о ранге матрицы, столбцы a^j матрицы A имеют ранг r. Таким образом, если $a^1, \ldots a^r$ — столбцовый базис, то у нас имеется r независимых векторов из F^r и, следовательно, вектор $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ является по основной теореме их линейной комбинацией. Поэтому

$$a = \sum_{j=1}^{r} \eta_j a^j,$$

и, следовательно, вектор $y = (\eta_1, \ldots, \eta_r, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет уравнениям (1).

Определим теперь умножение векторов и матриц, которые дальше мы будем часто использовать.

Произведение матрицы на вектор. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — $m \times n$-матрица, $x = (\xi_i)$ — m-мерный вектор, а $y = (\eta_j)$ — n-мерный вектор. *Произведение* xA вектора x на матрицу A есть n-мерный вектор

$$xA = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m = (a^1 x, \ldots, a^n x).$$

Второе из этих равенств следует из определений операций над векторами. *Произведение* Ay матрицы A на вектор y представляет собой m-мерный вектор, причем

$$Ay = \eta_1 a^1 + \ldots + \eta_n a^n = (a_1 y, \ldots, a_m y).$$

Приведем некоторые очевидные свойства этого произведения:

P1 : $(x + x')A = xA + x'A$, $A(y + y') = Ay + Ay'$ (дистрибутивность),

P2 : $(\lambda x)A = \lambda(xA)$, $A(\lambda y) = \lambda(Ay)$ (однородность),

P3 : $(xA)y = x(Ay)$ (ассоциативность).

Для того чтобы проверить, например, свойство Р3, достаточно написать

$$(xA)\,y = \left(\sum \xi_i a_i\right) y = \sum \xi_i\,(a_i y) =$$
$$= x\,(a_1 y,\ \ldots,\ a_m y) = x\,(Ay).$$

Умножение матрицы на вектор является частным случаем более общего действия умножения двух матриц. Эта операция и ее свойства будут изложены в упражнениях и будут время от времени использоваться в следующих главах. Пока для нас достаточно только что введенной операции.

Произведение матрицы на вектор позволяет нам записывать системы линейных уравнений в весьма компактной форме. Так система уравнений

$$xa^j = \beta_j, \qquad j = 1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

записывается в виде

$$xA = b, \tag{2}$$

где A — матрица, j-й столбец которой равен a^j, и $b = (\beta_j)$. Аналогично, уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b \tag{3}$$

записывается в виде

$$xA = b, \tag{4}$$

где A — матрица, i-я строка которой равна a_i и $x = (\xi_i)$.

Используя матричные обозначения, сформулируем и докажем главные теоремы, касающиеся разрешимости линейных уравнений. Сначала рассмотрим *однородный* случай: $xA = \mathbf{0}$. Мы уже видели (см. следствие 2 теоремы 2.1), что если в матрице A строк больше, чем столбцов, то это уравнение имеет по крайней мере одно ненулевое решение. Следующая теорема обобщает это утверждение и точно указывает, каким является множество решений.

Теорема 2.4 (решения однородных уравнений). *Пусть A — $m \times n$-матрица ранга r. Тогда множество X*

всех решений уравнения

$$xA = 0 \tag{1}$$

является линейным подпространством ранга $m-r$.

Доказательство. То, что X является подпространством, следует непосредственно из свойств P1 и P2 матричного произведения. Для того чтобы завершить доказательство, покажем, что базис множества X состоит из $m-r$ векторов.

Можно предполагать (изменив, если это нужно, нумерацию), что строки $a_1, \ldots, a_r$ образуют строчечный базис матрицы A. Поэтому для $k > r$ мы получаем

$$a_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} a_i, \quad k = r+1, \ldots, m. \tag{2}$$

Положим теперь для $k = r+1, \ldots, m$

$$b_k = (-\mu_{1k}, \ldots, -\mu_{rk}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где единице равна k-я компонента вектора. Учитывая (2), мы видим, что каждый из векторов b_k является решением уравнения (1), а, кроме того, эти векторы независимы, так как λ_k является k-й компонентой линейной комбинации

$$b = \sum \lambda_k b_k.$$

Следовательно, $b = 0$ только в том случае, если $\lambda_k = 0$ для всех $k > r$.

Остается доказать, что каждый вектор из множества X есть линейная комбинация b_k, Пусть $x = (\xi_i)$ — решение (1). Тогда решением является и

$$x - \sum_{k=r+1}^{m} \xi_k b_k = x' = (\xi_i'). \tag{3}$$

Но мы видели, что $\xi_i' = 0$ при $i = r+1, \ldots, m$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{r} \xi_i' a_i = 0.$$

Поскольку мы предполагали, что $a_1, \ldots, a_r$ независимы, отсюда следует, что $\xi_i' = 0$ для всех i. Таким образом,

$x' = 0$, и из (3) мы получаем

$$x = \sum_{k=r+1}^{m} \xi_k b_k,$$

что и утверждалось.

Отметим, что доказанная теорема является конструктивной, так как в ходе ее доказательства показывается, как надо поступать для того, чтобы найти *все* решения системы однородных уравнений, систематически определяя базис множества решений.

Эта теорема имеет яркую геометрическую интерпретацию.

Определение. Если L — подпространство пространства F^m, то множество всех векторов y, для которых $xy = 0$ при всех $x \in L$, называется *ортогональным* или *сопряженным подпространством* L и обозначается через L^*. Геометрически это означает, что L^* состоит из всех векторов, перпендикулярных (ортогональных) L.

Теорема 2.4 соответствует утверждению

$$\text{ранг } L + \text{ранг } L^* = m.$$

В частности, в трехмерном пространстве подпространство векторов, перпендикулярных плоскости, представляет собой прямую, и наоборот. Доказательство этого соотношения между рангами предоставляется читателю в качестве упражнения (см. упр. 11.)

Последняя теорема этого параграфа дает нам критерий разрешимости любой (уже не обязательно однородной) системы линейных уравнений.

С настоящего момента и до тех пор пока противное не будет явно оговорено, A будет означать $m \times n$-матрицу, x — m-мерный вектор с компонентами ξ_i и y — n-мерный вектор с компонентами η_j.

Прежде чем сформулировать теорему, сделаем следующие простые предварительные замечания. Рассмотрим систему уравнений

$$xa^j = \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Мы хотим найти условия, гарантирующие разрешимость системы (1). Вместо того чтобы искать эти условия, попытаемся найти условия, при которых система (1) не разрешима. Заметим теперь, что если вектор x удовлетворяет системе (1), а $\eta_1, \dots, \eta_n$ — произвольные числа, то вектор x должен удовлетворять также и системе

$$x\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j a^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \beta_j. \tag{2}$$

Поэтому если мы можем найти такие числа η_j, что $\sum \eta_j a^j = \mathbf{0}$, а $\sum \eta_j \beta_j = 1$, то из (2) мы получаем невозможное утверждение: «нуль равен единице», и, следовательно, система (1) не может иметь решений. Теорема существования, к доказательству которой мы сейчас приступим, гласит, что если описанное положение не имеет места, то система (1) действительно имеет решение.

Теорема 2.5 (разрешимость линейных уравнений). *Имеет место ровно одна из следующих альтернатив. Либо уравнение*

$$xA = b \tag{1}$$

имеет решение, либо имеют решение уравнения

$$Ay = \mathbf{0}, \quad by = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Выше мы уже убедились в том, что равенства (1) и (2) не могут выполняться одновременно. Нам остается показать, что если неверно (1), то справедливо (2).

Пусть $a_1, \dots, a_r$ — строчечный базис матрицы A. Тогда эти векторы и вектор b независимы, так как в противном случае вектор b, являясь линейной комбинацией векторов a_i, давал бы некоторое решение уравнения (1). Из следствия теоремы о ранге матрицы известно, что существует такой вектор y, что $a_i y = 0$ для $i \leqq r$ и $by = 1$. Но для всех k, поскольку a_i образуют строчечный базис, мы имеем $a_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$ и, следовательно, для всех k, $a_k y = 0$; таким образом, как и утверждалось,

$$Ay = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad by = 1.$$

Важность этой теоремы, а также теорем следующего параграфа состоит в том, что они дают позитивный критерий отсутствия решений системы уравнений. Для того чтобы показать неразрешимость системы (1), достаточно найти решение системы (2).

Теорема 2.5 имеет простую геометрическую интерпретацию. Если система (1) не имеет решения, то это значит, что вектор b не лежит в подпространстве L, состоящем из линейных комбинаций строчечных векторов a_i. В этом случае теорема утверждает, что можно найти вектор, перпендикулярный подпространству L и образующий с вектором b острый угол. Рисунок в трехмерном пространстве делает этот факт интуитивно очевидным.

Наконец, эта теорема имеет, кроме того, следующее геометрическое следствие.

Следствие. *Если L — подпространство пространства F^m, то*

$$L^{**} = L.$$

Доказательство. Немедленно получаем, что L содержится в L^{**}. Действительно, если $y \in L^*$ и $b \in L$, то $by = 0$, и тогда по определению $b \in L^{**}$.

Обратно, предположим, что $b \notin L$. Пусть векторы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_r$ образуют базис L. Тогда уравнение

$$\sum \lambda_i a_i = b$$

не имеет решения и, следовательно, по теореме 2.5 существует такой вектор y, что для всех i $a_i y = 0$ и $by = 1$. Но $y \in L^*$, так как из $x \in L$ следует $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$, поскольку a_i образуют базис. Следовательно, $xy = \sum \alpha_i (a_i y) = 0$. Наконец, вследствие того, что $by = 1$, b не принадлежит L^{**}. Таким образом, L^{**} содержится в L, что и требовалось доказать.

Читатель без труда сможет построить иллюстрации этого факта в трехмерном пространстве.

§ 3. Вещественные линейные уравнения и неравенства

Мы подошли теперь к материалу, который представляет собой математическое ядро данной книги, поскольку значительная часть последующей теории будет основана именно на нем. Хорошее усвоение этих результатов является необходимой предпосылкой фактически для всего оставшегося материала и именно поэтому трудно переоценить важность основательного знакомства с ними.

Результаты этого параграфа применяются к векторным пространствам, в которых полем скаляров являются вещественные числа или в более общем случае любое подполе вещественных чисел. Поэтому поле мы будем впредь обозначать не буквой F, а буквой R. На поле R налагается важное дополнительное условие: его элементы *упорядочены*, и, таким образом, к ним применимы понятия «положительный», «отрицательный», «максимальный» и «минимальный». Кроме того, для векторного пространства R^m мы получаем важное дополнительное свойство скалярного произведения. Обозначая через x^2 произведение x на самого себя, получаем

S4: $x^2 \geqq 0$ для всех x из R^m и $x^2 = 0$ в том и только в том случае, когда $x = \mathbf{0}$.

Напомним читателю, что $x^2 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$ и, таким образом, $\sqrt{x^2}$ есть известное из аналитической геометрии расстояние между точкой x и началом координат. При таком толковании из свойства S4 следует, что это расстояние всегда положительно; таковым и должно быть всякое хорошо определенное расстояние.

В настоящий момент мы будем рассматривать главным образом два вопроса: разрешимость линейных неравенств и существование решений системы линейных уравнений. Для этого будут использованы следующие соглашения, касающиеся обозначений.

Определение. Пусть $x = (\xi_i) \in R^m$. Тогда

Неотрицательность x означает, что $\xi_i \geqq 0$ для всех i и записывается как $x \geqq \mathbf{0}$.

Положительность x означает, что $\xi_i > 0$ для всех i и записывается как $x > \mathbf{0}$.

Полуположительность x означает, что $x \geqq \mathbf{0}$, но $x \neq 0$, и записывается как $x \geqslant \mathbf{0}$.

Если $x, y \in R^m$, то мы полагаем $x \geqq y$, $x > y$ или $x \geqslant y$ в зависимости от того, неотрицательна, положительна или полуположительна разность $x - y$.

Отношения $\geqq$, $\gg$ и $>$ определяют то, что называется *частичной упорядоченностью* векторов в R^m. Следующие свойства упорядоченности могут быть выведены непосредственно из определений. Далее эти свойства будут использоваться без какой-либо ссылки. Буква $\mathbf{R}$ заменяет любое из этих трех отношений

O1: если $x\mathbf{R}y$ и $y\mathbf{R}z$, то $x\mathbf{R}z$;
O2: если $x_1\mathbf{R}y_1$ и $x_2\mathbf{R}y_2$, то $(x_1+x_2)\mathbf{R}(y_1+y_2)$;
O3: если $x\mathbf{R}y$ и $\lambda>0$, то $\lambda x\mathbf{R}\lambda y$;
если $x\mathbf{R}y$ и $\lambda<0$, то $\lambda y\mathbf{R}\lambda x$.

Особенно важно следующее свойство:

O4: если $x\gg y$ и $a>0$, то $ax>ay$;
если $x>y$ и $a\gg 0$, то $ax>ay$.

Читателю следовало бы его доказать (см. упражнение 15).

Рассмотрим теперь задачу отыскания неотрицательного решения уравнений

$$xa^j=\beta_j, \qquad j=1, \ldots, n. \tag{1}$$

Как и раньше, найдем очевидные условия, при которых уравнения (1) не будут иметь решений. Очевидно, это будет в том случае, когда существуют такие числа $\eta_1, \ldots, \eta_n$, что $\sum\eta_j a^j \geqq 0$ и $\sum\eta_j\beta_j<0$. Действительно, для любого решения (1) должно быть выполнено равенство

$$x\left(\sum\eta_j a^j\right)=\sum\eta_j\beta_j.$$

Однако правая часть этого равенства меньше нуля, а это противоречит тому, что левая неотрицательна. Покажем так же, как в предыдущем параграфе в теореме о разрешимости, что если только что описанная ситуация не встретилась, то система (1) действительно имеет неотрицательное решение. Точная формулировка этого утверждения такова:

Теорема 2.6 (неотрицательные решения линейных уравнений). *Имеет место ровно одна из следующих альтернатив: либо уравнение*

$$xA=b \tag{1}$$

имеет неотрицательное решение, либо имеют решение неравенства

$$Ay \geqq \mathbf{0}, \quad by < 0. \tag{2}$$

Этот результат фактически является ключевым для целого ряда теорем существования, которые нам понадобятся в дальнейшем. К сожалению, доказательство этой теоремы несколько формально, и из него не видно, почему

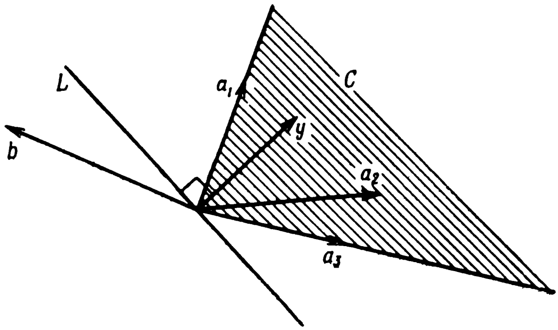


Рис. 2.

теорема «работает». Поэтому мы сначала приведем геометрическую картинку, благодаря которой обоснованность этого результата станет интуитивно понятной.

Будем рассматривать строчечные векторы a_i матрицы A как точки в пространстве R^n. Множество всех неотрицательных линейных комбинаций векторов a_i образует конусообразную область C (на рис. 2 заштрихована).

Утверждение, что уравнение (1) не имеет решения, означает, что вектор b не лежит в области C. В этом случае, согласно теореме, существует вектор y, который образует тупой угол с вектором b и нетупой угол с каждым из векторов a_i. Это значит, что точка b и конус C лежат по разные стороны гиперплоскости L, ортогональной вектору y. Поэтому эту теорему часто называют «теоремой о разделяющей гиперплоскости».

Доказательство теоремы. Мы уже указали, что соотношения (1) и (2) не могут быть разрешимы одновременно, так как в этом случае, помножив уравнение (1) скалярно на y, мы получаем

$$xAy = by,$$

а при умножении неравенства (2) на x получаем, поскольку x неотрицательно,

$$xAy \geqq 0.$$

Но эти два соотношения противоречат условию $by < 0$.

Предполагая теперь, что уравнение (1) не имеет неотрицательных решений, покажем, что (2) имеет решение. Если уравнение (1) не имеет решений вовсе, то по теореме 2.5 существует такое y, что $Ay = 0$ и $by = -1$; следовательно, y удовлетворяет неравенствам (2). Предположим теперь, что уравнение (1) имеет решения, но неотрицательного решения среди них нет, и будем рассуждать индуктивно по m, т. е. по числу строк матрицы A.

Если $m = 1$, то (1) обращается в уравнение

$$\xi a_1 = b.$$

Предположим, что имеется решение $\xi < 0$. Положим тогда y равным $-b$ и заметим, что

$$by = -b^2 < 0 \quad \text{и} \quad a_1 y = \frac{by}{\xi} = \frac{-b^2}{\xi} > 0.$$

Отсюда видно, что y является решением неравенства (2).

Предположим теперь, что теорема справедлива, когда число строк матрицы A меньше m. Если система (1) не имеет неотрицательных решений, то таких решений не имеет, конечно, и уравнение

$$\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i a_i = b.$$

Но тогда по индуктивному предположению существует такое y_1, что $a_i y_1 \geqq 0$ для всех $i < m$ и $by_1 < 0$. Если, кроме того, $a_m y_1 \geqq 0$, то y_1 удовлетворяет неравенствам (2) и теорема доказана. Если же $a_m y_1 < 0$, то положим

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= (a_i y_1)\, a_m - (a_m y_1)\, a_i \quad \text{для } i < m, \\ \bar{b} &= (by_1)\, a_m - (a_m y_1)\, b. \end{aligned} \tag{3}$$

В этом случае уравнение

$$\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \bar{a}_i = \bar{b} \tag{4}$$

должно иметь неотрицательное решение, так как, подставляя (3) в (4), мы получаем

$$\frac{1}{-a_m y_1}\left[\sum_{i=1}^{m} \xi_i (a_i y_1) - b y_1\right] a_m + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i a_i = b,$$

и уравнение (1) имело бы неотрицательное решение. Это, однако, противоречит предположенному. Учитывая это обстоятельство, применим наше индуктивное предположение к уравнению (4) и получим такой вектор $\bar{y}$, что $\bar{a}_i \bar{y} \geqq 0$ для $i < m$ и $\bar{b}\bar{y} < 0$. Теперь, положив

$$y = (a_m \bar{y})\, y_1 - (a_m y_1)\, \bar{y},$$

мы увидим, что

$$a_i y = \bar{a}_i \bar{y} \geqq 0 \quad \text{для } i < m,$$

$$by = \bar{b}\bar{y} < 0$$

и

$$a_m y = 0.$$

Таким образом, y удовлетворяет неравенствам (2), и теорема доказана.

Если мы обратимся теперь к задаче разрешимости линейных неравенств, то соответствующая теорема будет иметь такую же форму, как и только что доказанная. Таким образом, система неравенств

$$a_i y \geqq \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

очевидно, может не иметь решений, если существуют такие неотрицательные числа ξ_i, что

$$\sum \xi_i a_i = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \sum \xi_i \gamma_i = 1.$$

В противном случае мы получили бы невозможное неравенство

$$0y \geqq 1.$$

Если исключить этот случай, то наша теорема устанавливает, что система неравенств всегда имеет решения.

Теорема 2.7 (решения линейных неравенств). *Имеет место одна и только одна из следующих альтернатив.*

Либо неравенство

$$Ay \geqq c \tag{1}$$

имеет решение, либо существует неотрицательное решение уравнений

$$xA = 0, \quad xc = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Как мы видели выше, соотношения (1) и (2) не могут выполняться одновременно. Далее, полагая $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, перепишем (2) в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \gamma_i = 1.$$

Если эти уравнения не имеют неотрицательных решений, то теорема 2.6 утверждает, что существует такой n-мерный вектор y и такое число η, что

$$a_i y + \gamma_i \eta \geqq 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m,$$

и

$$0y + \eta = \eta < 0.$$

Это, однако, значит, что $a_i\left(\frac{y}{-\eta}\right) \geqq \gamma_i$ и $\frac{-y}{\eta}$ дает желаемое решение неравенства (1).

Следующая теорема важна в теории линейного программирования, которой посвящена гл. III.

Теорема 2.8 (неотрицательные решения линейных неравенств). *Выполняется ровно одна из следующих альтернатив.*

Либо неравенство

$$xA \leqq b \tag{1}$$

имеет неотрицательное решение, либо имеют неотрицательные решения неравенства

$$Ay \geqq \mathbf{0}, \qquad by < 0. \tag{2}$$

Доказательство. Читатель может легко убедиться в том, что неравенства (1) и (2) не могут одновременно иметь решения. С другой стороны, предположим, что (1) не имеет неотрицательного решения. Это значит, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = b \tag{3}$$

не имеет неотрицательного решения $\xi_1, \ldots, \xi_m, \lambda_1, \ldots \lambda_n$, где v_j j-й орт в пространстве R^n. Тогда, по теореме 2.6 существует такое y, что

$$a_i y \geqq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$v_j y \geqq 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

и

$$by < 0. \tag{6}$$

Из неравенства (5) мы получаем, что y неотрицательно, а из (4) и (6) следует, что оно удовлетворяет (2).

Две следующие теоремы дают условия разрешимости однородных уравнений и неравенств. Они имеют ту же форму, что и предыдущие результаты.

Теорема 2.9 (полуположительные решения однородных уравнений). *Должна быть выполнена ровно одна из следующих альтернатив. Либо уравнение*

$$xA = \mathbf{0} \tag{1}$$

имеет полуположительное решение, либо разрешимо неравенство

$$Ay > \mathbf{0}. \tag{2}$$

Доказательство. Сразу ясно, что эти две возможности несовместимы [умножая (1) слева на y, а (2) слева на x, получаем противоречие]. С другой стороны, если уравнение (1) не имеет полуположительного решения, то уравнения

$$\sum \xi_i a_i = \mathbf{0},$$

$$\sum \xi_i = 1$$

не имеют неотрицательного решения, и, следовательно, по теореме 2.6, существуют такие вектор y и число η, что

$$a_i y + \eta \geqq 0 \quad \text{для всех } i$$

и

$$\mathbf{0} \cdot y + \eta = \eta < 0.$$

Но это значит, что $a_i y \geqq -\eta > 0$ для всех i, откуда следует, что неравенство (2) имеет решение.

Теорема 2.9 имеет естественную геометрическую интерпретацию. Пусть L — подпространство пространства R^n и пусть L^* ортогонально ему.

Следствие 1. *Либо подпространство L содержит положительный вектор, либо L^* содержит полуположительный вектор.*

Доказательство. Пусть $a^1, \ldots, a^r$ — базис подпространства L. Когда мы говорим, что L не содержит положительного вектора, это значит, что не существует таких чисел $\eta_1, \ldots, \eta_r$, для которых $\sum \eta_j a^j > \mathbf{0}$, или, иными словами, если A — матрица, j-й столбец которой равен a^j, то неравенство $Ay > \mathbf{0}$ не имеет решения. Тогда по теореме существует такое $x \geqslant \mathbf{0}$, что $xA = \mathbf{0}$, т. е. $xa^j = 0$ для всех j и, следовательно, $x \in L^*$.

Заключение этого следствия интуитивно очевидно в двумерном и трехмерном пространствах (см. рис. 3).

Следствие 2 (положительные решения однородных уравнений). *Должна иметь место ровно одна из следующих альтернатив.*

Либо уравнение

$$xA = 0 \qquad (1)$$

имеет положительное решение, либо разрешимо неравенство

$$Ay \geqslant 0. \qquad (2)$$

Доказательство вытекает из следствия 1. Детали его предоставляем читателю (см. упр. 22).

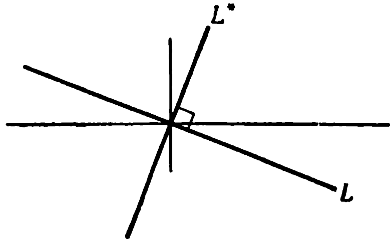


Рис. 3.

Заключим наше изложение следующим результатом.

Теорема 2.10 (полуположительные решения однородных неравенств). *Должна иметь место ровно одна из следующих альтернатив.*

Либо неравенство

$$xA \leqq 0 \qquad (1)$$

имеет полуположительное решение, либо имеется неотрицательное решение неравенства

$$Ay > 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Несовместимость (1) и (2) очевидна. Предположим теперь, что (1) не имеет полуположительных решений. Тогда неравенства

$$\sum \xi_i a_i \leqq 0,$$
$$-\sum \xi_i \leqq -1$$

не имеют неотрицательных решений. Следовательно, по теореме 2.8, существуют такой вектор $y \geqq 0$ и такое число $\eta \geqq 0$, что $a_i y - \eta \geqq 0$ и $-\eta < 0$; таким образом, $a_i\, y \geqq \eta > 0$ и $Ay > 0$, что и утверждалось.

§ 4. Базисные решения уравнений

В предыдущем параграфе были приведены основные теоремы существования решений линейных уравнений и неравенств. В следующем параграфе мы более подробно изучим структуру и свойства этих решений. В этом параграфе мы будем заниматься одним частным результатом, касающимся структуры решений. Важность этого результата оправдывает его индивидуальное рассмотрение.

Сейчас удобно ввести некоторые обозначения, которые будут часто использоваться в дальнейшем.

Обозначения. Буквы M и N будут обозначать соответственно множества целых положительных чисел от 1 до m и от 1 до n. Это записывается так:

$$M = \{1, \ldots, m\},$$
$$N = \{1, \ldots, n\}.$$

Утверждение «S является подмножеством M» записывается в общепринятых теоретико-множественных обозначениях как $S \subset M$ (читается «S содержится в M»).

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — векторы из R^m, а S — подмножество M.

Определение. Говорят, что решение $x = (\xi_i)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b \tag{1}$$

зависит от множества S, если для i не принадлежащего S

$$\xi_i = 0.$$

Решение x уравнения (1) называется *базисным решением*, если оно зависит от такого множества S', что векторы a_i для i, принадлежащих S, независимы.

Легко видеть, что если (1) имеет решение, то оно имеет и базисное решение (см. упр. 13). Докажем теперь важное обобщение этого результата.

Теорема 2.11 (базисные решения). *Если уравнение* (1) *имеет неотрицательное решение, то оно имеет и базисное неотрицательное решение.*

Доказательство ведется индукцией по m. При $m = 1$ теорема очевидна. Предположим, что она имеет место для $k < m$ и пусть $x = (\xi_i)$ — неотрицательное решение уравнения (1). Если какая-нибудь из компонент ξ_i равна нулю, то мы немедленно приходим к случаю $k = m - 1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая положительного x. Таким образом, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b, \quad \xi_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Далее, если векторы a_i независимы, то x является базисным решением и доказывать больше нечего. Предположим

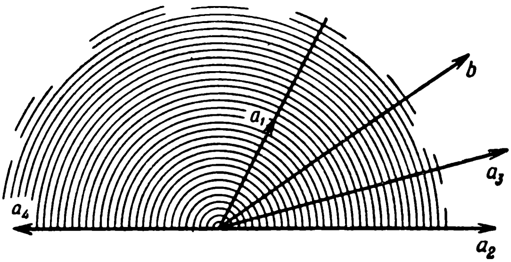


Рис. 4.

поэтому, что векторы a_i зависимы, т. е. что существуют такие числа λ_i не все равные нулю, что

$$\sum \lambda_i a_i = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Мы можем при этом считать некоторое λ_i положительным (в противном случае достаточно умножить (3) на -1).

Пусть далее $\theta = \max\limits_i \lambda_i/\xi_i$. Положим $\theta = \lambda_1/\xi_1 > 0$ (изменяя, если это нужно, нумерацию). Умножая (3) на $1/\theta$ и используя (2), мы получаем, что

$$\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{m} \left(\theta - \frac{\lambda_i}{\xi_i}\right) \xi_i a_i = b. \tag{4}$$

Но по определению θ первый коэффициент в (4) равен нулю, а все остальные неотрицательны. Таким образом, мы получили неотрицательное решение уравнения (1), зависящее только от $a_2, \ldots, a_m$, и свели тем самым доказательство к тому случаю, когда число векторов меньше m.

Геометрический чертеж, соответствующий этой теореме, дан на рис. 4. Поскольку вектор b лежит в заштрихованной области, он является неотрицательной линейной комбинацией векторов a_i и, как легко видеть, выражается в виде комбинации двух независимых векторов a_i: либо a_1 и a_3, либо a_1 и a_2, либо, наконец, a_3 и a_4.

§ 5. Геометрия линейных неравенств. Выпуклые конусы

Для большинства приложений, содержащихся в последующих главах, материала, изложенного в предыдущем параграфе этой главы, достаточно. Более подробные результаты этого параграфа будут использоваться только от случая к случаю, например, при анализе некоторых вопросов теории игр. Таким образом, при первом чтении читатель может опустить детали доказательств. Он, однако, должен как следует познакомиться с определениями этого параграфа, поскольку они будут часто использоваться в дальнейшем.

Нам будет удобно ввести некоторые стандартные теоретико-множественные обозначения, которые далее будут использоваться уже без специальных объяснений.

Определения, обозначения. Пусть X — некоторое абстрактное множество, состоящее из элементов x, а P — некоторое утверждение, касающееся элементов множества X. Тогда выражение $\{x \mid P\}$ означает «множество всех x из X, для которых выполнено P».

Пример. Если X — множество вещественных чисел, то $\{x \mid x > 0\}$ представляет собой множество всех положительных вещественных чисел.

Если A и B — подмножества X, то *объединение* $A \cup B$ множеств A и B есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо A, либо B. В наших обозначениях

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}.$$

Пересечение $A \cap B$ множеств A и B есть множество всех x, принадлежащих как A, так и B; таким образом,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

Множество A *содержится* в множестве B (записывается как $A \subset B$), если каждый элемент из A является элементом из B, и A *содержит* B (записывается $A \supset B$), если B содержится в A.

Введем теперь очень важное геометрическое понятие, которое обобщает понятие линейного подпространства.

Определение. Подмножество C пространства R^m называется *выпуклым конусом*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на неотрицательный скаляр (число), т. е.

$$\text{если} \quad x,\ y \in C, \qquad \text{то} \quad x + y \in C, \tag{1}$$

$$\text{если} \quad x \in C \quad \text{и} \quad \lambda \geqq 0, \quad \text{то} \quad \lambda x \in C. \tag{2}$$

Примеры.

1. Любое линейное подпространство L, очевидно, является частным случаем выпуклого конуса.

2. Множество всех неотрицательных векторов P из пространства R^m является выпуклым конусом и называется *неотрицательным ортантом* пространства R^m. Отметим, однако, что множество положительных векторов не является конусом, хотя и становится им, если присоединить к этому множеству начало координат.

3. Для любого вектора b из пространства R^m множество векторов, имеющих вид λb, $\lambda \geqq 0$, является выпуклым конусом; такое множество называется *полупрямой* и обозначается через (b). Таким образом,

$$(b) = \{x \mid x = \lambda b, \quad \lambda \geqq 0\}.$$

4. Множество всех решений неравенства $xb \leqq 0$ является выпуклым конусом; оно называется *полупространством* и обозначается через $(b)^*$. Формально мы имеем

$$(b)^* = \{x \mid xb \leqq 0\}.$$

5. Обобщение примера 4. Множество всех решений однородного неравенства $xA \leqq \mathbf{0}$ при любой матрице A образует выпуклый конус.

Читателю следовало бы проверить, что каждый из приведенных примеров действительно удовлетворяет определению выпуклого конуса.

Определения. Определим теперь три операции над выпуклыми конусами.

Сложение. Если C_1 и C_2 — выпуклые конусы, то их *сумма* $C_1 + C_2$ определяется как

$$C_1 + C_2 = \{x \mid x = x_1 + x_2,\ x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}.$$

Ясно, что $C_1 + C_2$ также является выпуклым конусом.

Пересечение. Если C_1 и C_2 — выпуклые конусы, то их *пересечение* $C_1 \cap C_2$ также является выпуклым конусом.

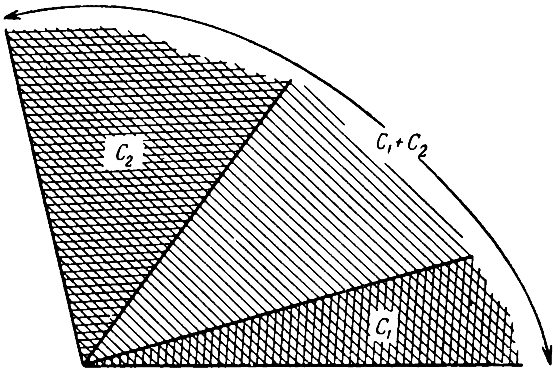


Рис. 5.

Двойственный конус. Если C — выпуклый конус, то *двойственный* ему *конус* C^* определяется как

$$C^* = \{y \mid xy \leqq 0 \quad \text{для всех } x \in C\}.$$

Геометрические картинки, соответствующие сумме, пересечению и двойственному конусу, даны соответственно на рис. 5, 6 и 7.

Рисунки, иллюстрирующие сумму и пересечение, настолько просты, что не требуют никаких пояснений. Конус, двойственный конусу C, оказывается, состоит из всех векторов, образующих неострый угол с конусом C[1]).

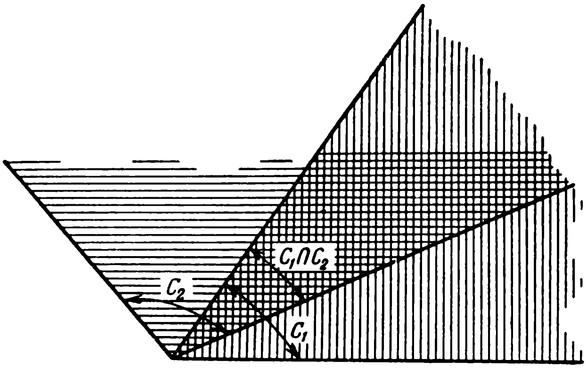


Рис. 6.

Определим двойственные конусы для каждого из пяти приведенных выше примеров. Если C—подпространство, то двойственный ему конус C^* — просто двойственное подпространство. Действительно, пусть L^* — подпространство, двойственное C. Тогда для любого $y \in L^*$, $yx = 0$ для всех $x \in C$ и, следовательно, $y \in C^*$. С другой стороны, если $y \in C^*$, то для всех $x \in C$ $yx \leqq 0$. Но, поскольку C — подпространство, из того, что $x \in C$, следует, что и $-x \in C$; следовательно, также $y(-x) \leqq 0$ или $yx \geqq 0$ и поэтому $yx = 0$, так что $y \in L^*$ и $L^* = C^*$. Это показывает, что смысл, в котором мы употребляем

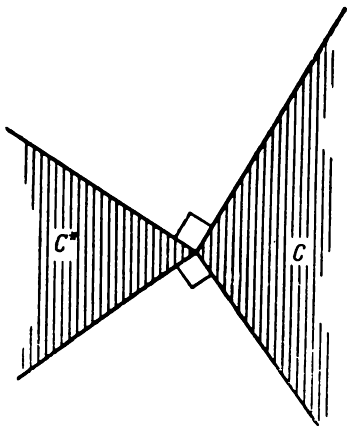


Рис. 7.

[1]) Часто в литературе под конусом, двойственным конусу C (называемым, кстати, также полярным и сопряженным к C конусом), понимается конус, состоящий из всех векторов, образующих с векторами из C нетупые углы.— *Прим. ред.*

звездочку в этом параграфе, не противоречит ее использованию в предыдущем параграфе.

Конусом, двойственным неотрицательному ортанту P, является множество всех неположительных векторов — *неположительный ортант* N. Доказательство этого мы предоставляем читателю.

Конусом, двойственным полупрямой (b) из примера 3, по определению является полупространство $(b)^*$ из примера 4 (таким образом, наши обозначения снова совпадают). Обратно, конусом, двойственным полупространству $(b)^*$, является полупрямая (b). Это фактически является частным случаем ситуации, описанной в примере 5. Пусть C — множество решений неравенства $xA \leqq \mathbf{0}$, которое мы перепишем как $xa^j \leqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Очевидно, что для любых неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вектор $y = \sum \lambda_j a^j$ принадлежит C^*, поскольку для $x \in C$,

$$x\left(\sum \lambda_j a^j\right) = \sum \lambda_j (xa^j) \leqq 0.$$

Вскоре будет показано, что, и наоборот, каждый вектор из C^* является такой неотрицательной комбинацией векторов a^j.

Перечислим теперь некоторые свойства операций над конусами:

$$\text{если } C_1 \subset C_2, \text{ то } C_2^* \subset C_1^*, \tag{1}$$

$$(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*, \tag{2}$$

$$C_1^* + C_2^* \subset (C_1 \cap C_2)^*, \tag{3}$$

$$C \subset (C^*)^*. \tag{4}$$

Эти свойства легко следуют из определений. Проверим, например, свойство (2).

Предположим, что $x \in C_1^* \cap C_2^*$, тогда $xy_1 \leqq 0$ для всех $y_1 \in C_1$ и $xy_2 \leqq 0$ для всех $y_2 \in C_2$. Но если $y \in C_1 + C_2$, то $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in C_1$, $y_2 \in C_2$; так что $xy = xy_1 + xy_2 \leqq 0$ и, следовательно, $x \in (C_1 + C_2)^*$.

Обратно, если $x \in (C_1 + C_2)^*$, то $xy \leqq 0$ для $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in C_1$, $y_2 \in C_2$. В частности, если $y_2 = \mathbf{0}$, получаем $xy_1 \leqq 0$ для всех $y_1 \in C_1$, а если $y_1 = \mathbf{0}$, получаем $xy_2 \leqq 0$ для всех $y_2 \in C_2$ и, следовательно, $x \in C_1^*$ и $x \in C_2^*$; т. е. $x \in C_1^* \cap C_2^*$, что и требовалось доказать.

В общем случае отношение «содержится в» в формулах (3) и (4) не может быть усилено до равенства (см. упражнение 28).

Как показано в заглавии этого параграфа, выпуклые конусы вводятся как средство изучения решений неравенств. Для этой цели желательно уточнить понятие конуса следующим образом.

Определение. Выпуклый конус C называется *конечным конусом*, если он является суммой конечного числа полупрямых, т. е.

$$C = (a_1) + \ldots + (a_n). \tag{1}$$

Векторы $a_1, \ldots, a_n$ называются векторами, *порождающими* конус C.

Аналогично, C является конечным конусом, если для некоторой матрицы A

$$C = \{y \mid y = xA \quad \text{для } x \geqq \mathbf{0}\}. \tag{2}$$

Для конечных конусов мы имеем следующее важное соотношение.

Теорема 2.12 (теорема двойственности). *Если C — конечный конус, то $C^{**} = C$.*

Доказательство. Предоставляем читателю непосредственную проверку того, что $C \subset C^{**}$. Для доказательства обратного предположим, что b не принадлежит C. Поскольку C имеет вид (2), это значит, что уравнение $b = xA$ не имеет неотрицательного решения. Следовательно, по теореме 2.6 существует такой вектор y, что $Ay \leqq \mathbf{0}$ и $by > 0$. Первое соотношение показывает, что $y \in C^*$, поскольку из него следует, что для всех $x \geqq \mathbf{0}$, $xAy \leqq 0$. Но ввиду того, что $by > 0$, вектор b не принадлежит C^{**}, и это завершает доказательство.

Следствие. *Пусть $C = \{x \mid xA \leqq \mathbf{0}\}$. Тогда $C^* = \{x \mid x = Ay,\ y \geqq \mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Пусть $K = \{x \mid x = Ay,\ y \geqq \mathbf{0}\}$. Мы должны показать, что $K = C^*$. Ясно, что $C = K^*$ для $x \in K^*$ в том и только в том случае, когда $xAy \leqq 0$ для всех $y \geqq \mathbf{0}$. Но это в свою очередь верно в том и только в том случае, когда $xA \leqq 0$ (почему?). Если же $C = K^*$, то по теореме $C^* = K^{**} = K$. Это следствие устанавливает утверждение, высказанное о двойственном конусе для примера 5.

Основное свойство, которое мы хотим сейчас доказать, состоит в том, что множество C решений неравенства $xA \leqq 0$ есть конечный конус. Геометрически этот результат довольно очевиден, так как, если мы запишем неравенство в виде

$$xa^j \leqq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то C окажется пересечением полуплоскостей, т. е.

$$C = (a^1)^* \cap \ldots \cap (a^n)^*.$$

В случае двух измерений ситуация изображена на рис. 8. Конус C, представленный дважды заштрихованной областью, является пересечением заштрихованных областей $(a_1)^*$ и $(a_2)^*$. Он представляет собой также сумму полупрямых (b_1) и (b_2).

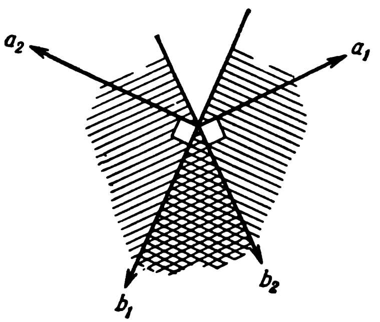


Рис. 8.

Это свойство однородных неравенств также полезно с практической точки зрения, поскольку оно означает, что для нахождения всех решений системы неравенств достаточно найти некоторое конечное множество ее решений. Тогда все остальные решения определяются как неотрицательные комбинации полученных.

Докажем сначала это основное свойство для двух частных случаев.

Лемма 2.1. *Линейное подпространство L является конечным конусом.*

Доказательство. Если $a_1, \ldots, a_r$ составляют базис L, то очевидно, что

$$L = (a_1) + \ldots + (a_r) + (-a_1) + \ldots + (-a_r).$$

Лемма 2.2. *Множество всех неотрицательных решений*

$$xA = \mathbf{0} \tag{1}$$

является конечным конусом.

Доказательство. Начнем с рассмотрения систем уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = \mathbf{0},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \tag{2}$$

$$\xi_i \geqq 0.$$

Любое полуположительное решение (1) от некоторого решения (2) отличается только положительным множителем. Покажем, что любое решение (2) является неотрицательной комбинацией базисных решений (вспомним определение и теорему 2.11). Далее, существует только конечное число таких базисных решений, поскольку имеется только конечное число независимых подмножеств векторов a_i и таким образом теорема будет доказана.

Предположим по индукции, что любое решение (2), которое зависит меньше чем от m векторов, является неотрицательной комбинацией базисных решений (для случаев $m = 1$ и $m = 2$ это очевидно). Предположим теперь, что вектор $x = (\xi_i)$ положителен и является решением (2). Пусть $\hat{a}_i$ — $(m + 1)$-мерный вектор, первые m компонент которого суть a_i, а последняя компонента равна 1. Если эти векторы $\hat{a}_i$ независимы, то x является базисом и в этом случае доказывать нечего. Если же векторы $\hat{a}_i$ зависимы, то по теореме о базисных решениях мы можем найти базисное решение $x' = (\xi_i')$, где $\xi_i' = 0$ хотя бы для одного индекса i. Отсюда следует, что для некоторого $\xi_i' > \xi_i$, поскольку $\sum \xi_i = \sum \xi_i' = 1$. Пусть $\gamma = \max \xi_i'/\xi_i$ (например, для определенности, $\gamma = \xi_1'/\xi_1$). Тогда $\gamma > 1$ и мы можем положить

$$x'' = \frac{1}{\gamma - 1}(\gamma x - x'). \tag{3}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что вектор x'' — — (ξ_i'') неотрицателен и удовлетворяет уравнениям (2). Отметим при этом, что $\xi_1'' = 0$ и решение x'' зависит не более чем от m — 1 векторов a_i. Следовательно, по индуктивному предположению x'' является неотрицательной комбинацией базисных решений. Но из (3), как легко проверить, следует, что

$$x = \frac{1}{\gamma} x' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) x''.$$

Поскольку x' является базисом, а x'' неотрицательная комбинация базисных решений, сказанное справедливо и для x, и теорема доказана.

Следствие. *Пересечение любого подпространства L с неотрицательным ортантом P представляет собой конечный конус.*

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — базис пространства L^* и пусть C — множество всех неотрицательных решений уравнений $b_i x = 0$, $i = 1, \ldots, s$. По лемме множество C является конечным конусом и очевидно, что из $x \in L \cap P$ следует $x \in C$. С другой стороны, если $x \in C$, то для всех i $xb_i = 0$; таким образом $x \in L^{**} = L$ и, следовательно, $C = L \cap P$.

Теорема 2.13. *Множество решений неравенства*

$$xA \leqq \mathbf{0} \tag{1}$$

является конечным конусом.

Доказательство. Определим подпространство L следующим образом:

$$L = \{y \mid y = xA, \ x \in R^m\}.$$

По приведенному выше следствию, $L \cap P$ является конечным конусом; следовательно,

$$L \cap P = (y_1) + \ldots + (y_r). \tag{2}$$

Выберем теперь $x_1, \ldots, x_r$ так, чтобы $-y_i = x_i A$. Пусть, наконец, X' — линейное подпространство решений уравнения $xA = \mathbf{0}$. По лемме 2.1 найдутся векторы x_i', для которых

$$X' = (x') + \ldots + (x_s'). \tag{3}$$

Теперь мы утверждаем, что множество C решений неравенства (1) определяется как

$$C=(x_1)+\ldots+(x_r)+(x'_1)+\ldots+(x'_s).$$

Тогда $-xA\in L\cap P$, так что в силу соотношения (2) мы имеем

$$xA=-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i y_i=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x_iA),$$

где $\lambda_i\geqq 0$. Таким образом, $\left(x-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i\right)A=0$; и, следовательно, используя (3), получаем, что

$$x-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^{s}\mu_i x'_i,\quad \mu_i\geqq 0.$$

Это значит, что

$$x=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i+\sum_{i=1}^{s}\mu_i x'_i.$$

Формулируемая ниже теорема объединяет в себе все алгебраические свойства конечных конусов.

Теорема 2.14. *Если C и C' — конечные конусы, то таковыми являются*

$$C+C',\tag{1}$$

$$C\cap C',\tag{2}$$

$$C^*\tag{3}$$

и выполнены следующие соотношения

$$(C+C')^*=C^*\cap C'^*,\tag{4}$$

$$(C\cap C')^*=C^*+C'^*,\tag{5}$$

$$C^{**}=C.\tag{6}$$

Доказательство. Свойство (1) следует из определения, (4) уже было доказано для произвольных выпуклых конусов, (6) представляет собой утверждение теоремы двойственности. Для того чтобы доказать свойство (3), положим $C=(a_1)+\ldots+(a_n)$. Тогда C^* есть множество всех решений неравенств $a_iy\leqq 0$, $i=1,\ldots,m$, а оно, как мы только что видели, является конечным конусом. Далее, (2) следует из (3), так как если C и C' — конечные конусы, то таковыми являются и C^*, C'^* и по свойству (4) $C \cap C' = C^{**} \cap C'^{**} = (C^* + C'^*)^*$, но это последнее выражение является конечным конусом по (1) и (3). И, наконец, (5) выполнено, поскольку

$$C^* + C'^* = (C^* + C'^*)^{**} = (C^{**} \cap C'^{**})^* = (C \cap C')^*.$$

В сущности все теоремы этого и предыдущего параграфов можно быстро получить из этих общих результатов. Для примера докажем заново теорему 2.10, которая гласит: «Должна иметь место ровно одна из следующих альтернатив. Либо неравенство

$$xA \leqq 0 \qquad (1)$$

имеет полуположительное решение, либо имеется неотрицательное решение неравенства

$$Ay > 0». \qquad (2)$$

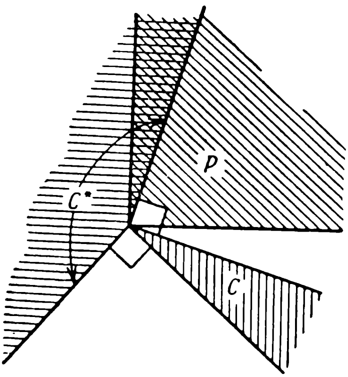


Рис. 9.

Доказательство. Пусть $C = (a^1) + \ldots + (a^n)$. Если неравенство (1) не выполняется, то это значит, что $C^* \cap P = 0$. Используя двойственность, мы получаем

$$C + P^* = C + N = (\mathbf{0})^* = R^m.$$

В частности, $C + N$ лежит некоторый положительный вектор u. Таким образом, $u = c - p$, где $u > \mathbf{0}$, $p \geqq \mathbf{0}$ и $c \in C$, но тогда $c = u + p > \mathbf{0}$ и поскольку $c = \sum_{j=1}^{n} \eta_j a^j$, вектор $y = (\eta_j)$ удовлетворяет неравенству (2).

Геометрически эта теорема означает следующее; если данный конечный конус не содержит положительного вектора, то двойственный ему конус содержит полуположительный вектор (см. рис. 9). Это является обобщением факта, уже отмеченного нами для случая подпространств (следствие 1 теоремы 2.9, рис. 4).

§ 6. Крайние векторы и крайние решения

В этом параграфе мы продолжим изучение как однородных, так и неоднородных неравенств. Полученные при этом результаты будут далее использованы при анализе решений матричных игр и линейных производственных

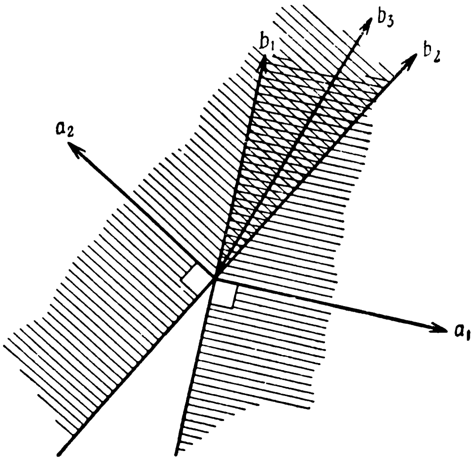


Рис. 10.

моделей. Доказательство некоторых важных фактов предоставляется читателю в виде упражнений в конце этой главы.

В предыдущем параграфе мы уже обнаружили, что решения однородных неравенств

$$xA \leqq 0 \tag{1}$$

образуют конечный конус

$$C = (x_1) + \cdots + (x_k).$$

Таким образом, для того, чтобы знать все решения неравенств (1), достаточно найти некоторое конечное множество решений $x_1, \ldots, x_k$. Все оставшиеся решения будут неотрицательными комбинациями этих x_i. Исследуем теперь вопрос о том, как найти решения x_i. Этот случай иллюстрируется рис. 10. Здесь изображено решение неравенств

$$xa_1 \geqq 0,$$
$$xa_2 \geqq 0.$$

Дважды заштрихованная область определяет конус решений C и, очевидно, он является конечным конусом, «порожденным» векторами b_1 и b_2; таким образом,

$$C = (b_1) + (b_2).$$

Конус C, конечно, может быть определен многими другими способами. Так, если b_3 — произвольный вектор из C, то мы могли бы также записать

$$C = (b_1) + (b_2) + (b_3).$$

Очевидно, однако, что это излишне, поскольку вектор b_3 для описания конуса C не нужен. С другой стороны, из чертежа видно, что любой другой способ определения C как конечного конуса должен использовать «крайние» векторы b_1 и b_2, поскольку ни один из них не может быть выражен в виде неотрицательной комбинации других векторов из C. Перейдем теперь к уточнению введенных понятий.

Определение. Вектор $x \neq 0$ из выпуклого конуса C называется *крайним вектором* этого конуса C, если он не может быть записан в виде

$$x = x_1 + x_2; \qquad x_1,\ x_2 \in C,$$

где x_1 и x_2 — независимые векторы.

Если C — конус решений неравенства $xA \leqq 0$, то крайний вектор $x \in C$ называется *крайним решением*.

В примере, изображенном на рис. 10, видно, что векторы b_1 и b_2 порождают конус C. Было бы приятно, если бы мы могли утверждать, что каждый конечный конус порождается своими крайними векторами. К сожалению, вообще говоря, это не так. Существуют, например, конусы, у которых крайних векторов нет вовсе. Любое подпространство или полупространство (кроме лежащих в двумерном пространстве) служит примером такого конуса. Однако, как будет видно, это утверждение справедливо для конусов, которые «заострены» как конусы на наших рисунках.

Определение. Векторы $a_1, \ldots, a_m$ называются *положительно независимыми*, если уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = 0$$

не имеет полуположительных решений.

Геометрически векторы a_i являются положительно независимыми, если порожденный ими конус не содержит никакого подпространства, кроме нулевого (отсюда и термин *«заостренный конус»*[1])).

Лемма 2.3. *Если векторы $a_1, \ldots, a_m$ положительно независимы, то конус $C = \sum_{i=1}^{m} (a_i)$ представляет собой сумму своих крайних полупрямых.*

Доказательство. Среди векторов $a_1, \ldots, a_m$ вычеркнем тот, который можно представить в виде неотрицательной комбинации остальных. Если это возможно, то из остальных $m-1$ векторов можно снова вычеркнуть один из векторов, являющийся неотрицательной комбинацией остальных $m-2$ векторов. Очевидно, что, следуя по этому пути, мы в конце концов придем к некоторому набору векторов, например $a_r, \ldots, a_r$, обладающему следующими свойствами:

$$C = \sum_{i=1}^{r} (a_i), \tag{1}$$

никакой из этих векторов не является неотрицательной комбинацией других. (2)

Покажем, что все векторы этого множества являются крайними. Действительно, предположим, например, что, вектор a_1 не является крайним. Тогда $a_1 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$, где

---

[1]) То есть имеющий вершину.— *Прим. ред.*

все $\lambda_i \geqq 0$. Далее, если $\lambda_1 \geqq 1$, то мы имели бы

$$(\lambda_1 - 1)\, a_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i a_i = \mathbf{0}$$

вопреки предположению о положительной независимости множества a_i. С другой стороны, если бы было $\lambda_1 < 1$, то мы имели бы

$$a_1 = \frac{1}{1-\lambda_1} \sum_{i=2}^{r} \lambda_i a_i,$$

что противоречит условиям, наложенным на множество $a_1, \ldots, a_r$. Таким образом, a_1, а значит, и все a_i являются крайними, и это завершает доказательство.

Мы можем теперь использовать эту лемму для анализа решений неравенств.

Теорема 2.15 (крайние решения неравенств). *Если ранг матрицы A равен m, то любое решение неравенства*

$$xA \leqq \mathbf{0} \tag{1}$$

является неотрицательной комбинацией его крайних решений.

Доказательство. Пусть $C = (b_1) + \ldots + (b_k)$ — конус всех решений неравенства (1); предположим, что векторы b_i положительно зависимы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = \mathbf{0},$$

где $\lambda_i \geqq 0$. Далее, если, например, $\lambda_1 > 0$, то

$$-b_1 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{k} \lambda_i b_i,$$

а, следовательно, $-b_1 A = \frac{1}{\lambda_1} \sum \lambda_i (b_i A) \leqq \mathbf{0}$ или $b_1 A \geqq \mathbf{0}$. Но поскольку $b_1 \in C$, это значит, что $b_1 A = \mathbf{0}$. Таким образом, строки матрицы A зависимы, а это противоречит предположению о том, что ранг матрицы A равен m. Так как векторы b_i положительно независимы, по лемме конус

C является, как и утверждалось, суммой своих крайних векторов.

Следующий вопрос состоит в том, как находить крайние решения систем неравенств. Прежде чем излагать соответствующие результаты, рассмотрим простой численный

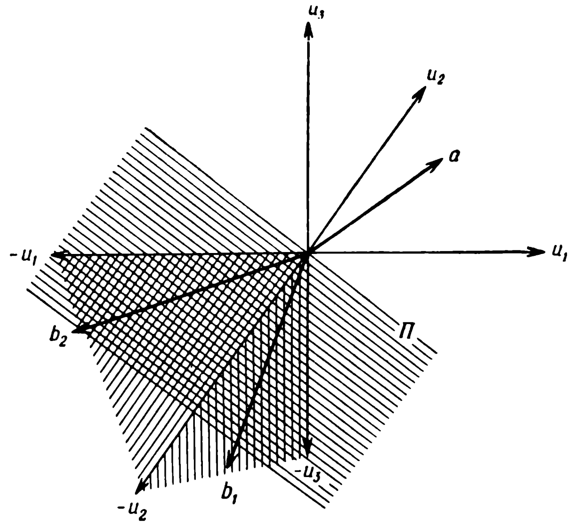


Рис. 11.

пример. Рассмотрим систему из четырех неравенств с тремя неизвестными

$$\xi_1 \leqq 0, \quad \xi_2 \leqq 0, \quad \xi_3 \leqq 0, \quad \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \leqq 0 \tag{1}$$

или в векторных обозначениях

$$xu_1 \leqq 0, \quad xu_2 \leqq 0, \quad xu_3 \leqq 0, \quad xa \leqq 0,$$

где $a = u_1 - u_2 + u_3$. На рис. 11 представлена эта ситуация для случая трехмерного пространства.

Мы заштриховали область, соответствующую конусу решений C, и утверждаем теперь, что крайними векторами конуса C являются векторы $-u_1$, $-u_3$, $b_1 = -u_3 - u_2$ и $b_2 = -u_1 - u_2$. Точки b_1 и b_2 можно определить геометрически, взяв плоскость П, перпендикулярную вектору a, и найдя пересечение ее с отрицательным ортантом.

Решениями неравенств (1) в действительности являются все точки отрицательного ортанта, находящиеся «за» плоскостью П. Векторы b_1 и b_2 лежат на пересечении плоскости П соответственно с плоскостями (u_2, u_3) и (u_1, u_2). Если в (1) заменить неравенства равенствами, то b_1 будет удовлетворять первому и четвертому, а b_2 — третьему и четвертому из этих соотношений. Кроме того, $-u_1$ удовлетворяет второму и третьему соотношению, а $-u_3$ первому и второму. Оказывается, что эти крайние векторы должны быть такими решениями неравенств, при которых в двух соотношениях достигается равенство.

Этот геометрический пример подтверждает следующее основное положение: решение системы неравенств с m неизвестными будет крайним в том и только в том случае, если оно лежит на $m-1$ независимых плоскостях. В алгебраических терминах этот результат приобретает простую форму.

Теорема 2.16 (характеристика крайних решений). *Решение $\bar{x}$ неравенства*

$$xA \leqq 0 \tag{1}$$

является крайним в том и только в том случае, если множество столбцов a^j, для которых $\bar{x}a^j = 0$, имеет ранг $m-1$.

Доказательство. Пусть $S \subset \{1, \ldots, n\}$ — множество таких индексов j, что $\bar{x}a^j = 0$, а S' — дополнительное множество (т. е. для $j \in S'$ мы должны иметь $\bar{x}a^j < 0$). Предположим сначала, что множество векторов a^j $(j \in S)$ имеет ранг $m-1$. Тогда вектор $\bar{x}$ является крайним, поскольку $\bar{x} = x' + x''$. Отсюда ясно, что $a^j x' = a^j x'' = 0$ для $j \in S$, но из теоремы 2.4 о решениях однородных уравнений нам известно, что множество решений этих уравнений имеет ранг 1, так что x' и x'' зависимы и, следовательно, вектор $\bar{x}$ крайний.

Обратно, предположим, что $\bar{x}$ является решением неравенства (1) и пусть $S \subset N$ — множество индексов j, для которых $\bar{x}a^j = 0$. Если $\bar{x} \neq \mathbf{0}$, то это множество векторов имеет ранг, меньший чем m. Если его ранг меньше, чем $m-1$, то снова по теореме 2.4 мы можем найти второе решение x

уравнений $xa^j = 0$ $j \in S$, которое не зависит от $\bar{x}$. Выберем теперь $\lambda \neq 0$, модуль которого настолько мал, что $x' = \frac{\bar{x}+\lambda x}{2}$ и $x'' = \frac{\bar{x}-\lambda x}{2}$ для $j \in S$ удовлетворяют неравенствам $xa^j < 0$. Тогда x' и x'' удовлетворяют неравенству (1) и независимы (почему?), но $\bar{x} = x' + x''$ и, следовательно, $\bar{x}$ не является крайним вектором.

Важность теорем этого параграфа состоит в том, что они дают нам конструктивные средства для вычисления, вообще говоря, всех решений системы однородных неравенств, если ранг этой системы равен m (в противном случае требуется некоторое дополнительное видоизменение). А именно, следует просто решить все подсистемы уравнений ранга $m - 1$. Эти решения, которые (с точностью до скалярного множителя) также удовлетворяют исходным неравенствам, содержат все крайние решения системы, что и приводит нас к нахождению всех решений. (С вычислительной точки зрения такая схема неудобна, так как требует очень много времени; в действительности существуют более эффективные методы и мы рассмотрим их в одной из следующих глав.)

§ 7. Выпуклые множества и многогранники

Понятие выпуклого множества, которое мы сейчас введем, играет центральную роль в математической теории игр и во многих других экономических моделях[1]). Грубо говоря, выпуклые множества имеют такое же отношение к неоднородным неравенствам, как выпуклые конусы к неравенствам однородным. Мы разовьем здесь всю теорию неоднородных неравенств, оставив, правда, несколько основных теорем читателю для доказательства в качестве примеров.

Определение. Подмножество K пространства R^m называется *выпуклым*, если для любых векторов x и x' из K и произвольного числа λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, вектор $\lambda x + (1 - \lambda)x'$ принадлежит подмножеству K.

---

[1]) Речь идет об экономической интерпретации матричных игр. Вообще же говоря, теория игр является обширной и самостоятельной математической дисциплиной.— *Прим. ред.*

Напомним известный из аналитической геометрии факт о том, что прямая, проходящая через две точки x и x', содержит все точки вида $\lambda x + (1 - \lambda) x'$. Таким образом множество выпукло, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь соединяющий их сегмент.

Предоставив читателю убедиться в том, что сумма и пересечение (но не объединение!) выпуклых множеств также выпукло, приступим к изложению некоторых существенных

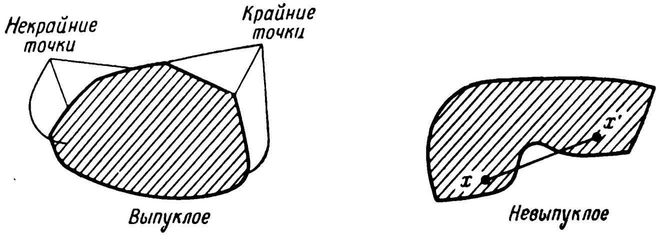


Рис. 12.

свойств выпуклых множеств. Геометрические образы здесь похожи на те, какие были в случае конусов, и мы будем предполагать, что читатель старается мысленно представлять себе излагаемые результаты (см. рис. 12).

Определение. Вектор x из R^m называется *выпуклой комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_k$, если $x = \Sigma\lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geqq 0$ для всех i и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Если X — некоторое подмножество из R^m, то *выпуклой оболочкой* X (записывается это как $\langle X \rangle$) называется множество всех выпуклых комбинаций точек из X.

Если X — конечное множество, то $\langle X \rangle$ называется *выпуклым многогранником*.

Следующая лемма такую терминологию оправдывает.

Лемма 2.4. *Если X — подмножество R^n, то $X = \langle X \rangle$ в том и только в том случае, если X выпукло.*

Доказательство. То, что $\langle X \rangle$ выпукло, следует непосредственно из определения. Действительно, если

x и x' содержатся в $\langle X\rangle$, то

$$x=\sum\lambda_i x_i,\quad \lambda_i\geqq 0,\quad \sum\lambda_i=1,\quad x_i\in X,$$
$$x'=\sum\lambda_i' x_i',\quad \lambda_i'\geqq 0,\quad \sum\lambda_i'=1,\quad x_i'\in X$$

и

$$\lambda x+(1-\lambda)x'=\sum\mu_i x_i+\sum\mu_i' x_i',$$

где

$$\mu_i=\lambda\lambda_i,\quad \mu_i'=(1-\lambda)\lambda_i',$$

так что

$$\sum\mu_i+\sum\mu_i'=\lambda+1-\lambda=1.$$

Обратно, пусть X является выпуклым множеством. Покажем, что для любых $x_i\in X$ и $\lambda_i\geqq 0$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, должно быть

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in X. \tag{1}$$

По определению соотношение (1) выполнено для $n=2$; предположим теперь, что (1) выполнено для векторов x_i числом меньше n. Можно предположить, что $\lambda_n<1$, так как если это не так, то $x=x_n$, и в этом случае доказывать нечего. Положим $x'=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_n}$. Тогда по предположению $x'\in X$ в силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}=1$. Но вектор x представим в виде $x=\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)x'$ и, следовательно, содержится в X по определению выпуклости.

Лемма наводит нас на мысль о другом способе определения выпуклости. Пусть заданы точки $x_1,\ \ldots,\ x_n$ из X и в каждой точке x_i находится некоторая масса $\lambda_i\geqq 0$. Центром тяжести этих масс тогда будет точка

$$x=\frac{1}{\lambda}\sum\lambda_i x_i,$$

где $\lambda = \Sigma \lambda_i$, и для выпуклости требуется, чтобы этот центр тяжести всегда лежал в множестве X.

Определение. Вектор x, принадлежащий выпуклому множеству K, называется *крайней точкой* или *вершиной* K, если для любых x', $x'' \in K$ и $0 < \lambda < 1$ из того, что $x = \lambda x' + (1 - \lambda) x''$ следует, что $x = x' = x''$. Геометрически крайней точкой множества K является точка, не лежащая внутри какого-либо сегмента, принадлежащего множеству K (см. рис. 12).

Выпуклое множество не обязательно имеет крайние точки, даже если оно ограничено. Примером этого в плоском случае может служить внутренность круга $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$. Однако если множество K является многогранником, то имеет место следующий решающий факт.

Теорема 2.17. *Если K—выпуклый многогранник и $\dot{K}$ — множество его крайних точек, то $K = \langle \dot{K} \rangle$.*

Пусть $K = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Тогда любая крайняя точка K является одной из точек x_i, как это можно видеть непосредственно из определений вершины и выпуклой оболочки. Среди точек x_i выберем минимальное подмножество (возможно меньшее число элементов), выпуклая оболочка которых дает множество K. Предположим, что таким множеством является $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Тогда каждая из этих точек является крайней, так как если, например,

$$x_r = \lambda x + (1 - \lambda) x', \quad 0 < \lambda < 1, \tag{1}$$

то можно видеть, что $x = x' = x_r$. Выражая x и x' через x_i, получаем

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i, \tag{2}$$

$$x' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' x_i.$$

Подставляя теперь (2) в (1), мы видим, что x_r является выпуклой комбинацией векторов x_i:

$$x_r = \sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i. \tag{3}$$

Если бы при этом $\mu_r < 1$, то мы бы имели

$$x_r = \frac{1}{1-\mu_r} \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i x_i,$$

что противоречит минимальности множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$. С другой стороны, если $\mu_r = 1$, то $\mu_i = 0$ для $i \neq r$ или для $i \neq r$

$$\lambda\lambda_i + (1-\lambda)\lambda'_i = 0.$$

Из сказанного следует, что для $i \neq r$ должно быть $\lambda_i = \lambda'_i = 0$, так что, как и утверждалось, $x = x' = x_r$.

Библиографические замечания

Здесь мы не будем делать попыток проследить историю материала, представленного в этой главе и связанного с уравнениями и неравенствами. Отметим только, что наиболее ранние из известных нам исследований принадлежат Фурье (1823) [1]. Довольно полная библиография по этому предмету имеется у Куна и Таккера [1]. Современное изложение этого материала дано Куном [2], Голдманом и Таккером [1], а также Троллом и Торнхеймом [1]; последнее изложение представляет собой главу в учебнике по матричной алгебре.

Упражнения

К параграфам 1 и 2

1. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — m-мерные векторы. Доказать, что уравнения

$$a_i y = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

имеют единственное решение y в том и только в том случае, когда уравнения

$$a_i y = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

имеют только нулевое решение.

2. Установить линейную зависимость векторов

$a_1 = (0, 1, -2)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 2, 3)$, $a_4 = (2, 0, 3)$.

3. Функция f, определенная на пространстве F^m, со значениями в пространстве F («из F^m в F») называется *линейной функцией*, если

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in F^m, \qquad (1)$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in F^m,\ \lambda \in F. \qquad (2)$$

Показать, что, если функция f линейна, то существует такой вектор a в пространстве F^m, что для всех x из F^m имеет место $f(x) = xa$.

4. Функция f из F^m в F^n называется *линейным преобразованием*, если она удовлетворяет условиям (1) и (2) из упражнения 3. Показать, что если f является линейным преобразованием, то существует такая $m \times n$-матрица A, что для всех x из F^m $f(x) = xA$.

5*[1]). Если $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-матрица и $B = (\beta_{ij})$ $n \times p$-матрица, то их произведением является $m \times p$-матрица $AB = (\gamma_{ij})$, где

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}.$$

Показать, что умножение на число, скалярное произведение векторов и произведение матрицы на вектор являются частными случаями произведения матриц.

6*. Если A, B и C соответственно $m \times n$-, $n \times p$- и $p \times q$-матрицы, то

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{(ассоциативный закон).}$$

7*. Если $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ — $m \times n$-матрицы, то их сумма определяется как $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$. Доказать, что если C — $n \times p$-матрица, то

$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{(дистрибутивный закон).}$$

8*. *Единичной* $n \times n$-*матрицей* называется $n \times n$-матрица $I = (\delta_{ij})$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{для} \quad i = j. \end{cases}$$

---

[1]) Упражнения, отмеченные звездочкой, содержат результаты, которые будут использоваться в последующих главах. Поэтому для полного понимания последующего изложения существенно, чтобы читатель эти задачи решил.

Показать, что если A — $m \times n$-матрица, а B — $n \times p$-матрица, то $AI = A$ и $IB = B$.

9*. $m \times m$-матрица называется *невырожденной*, если ее ранг равен m (в противном случае она называется *вырожденной*). Показать, что если A — невырожденная матрица, то существует $m \times m$-матрица A^{-1}, которая называется матрицей, *обратной* A, и для которой $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

10. Найти все решения уравнений

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= 0, \\ x - 5y + 2z \phantom{{}+w} &= 0. \end{aligned}$$

11. Доказать, что для любого линейного подпространства L из F^m, ранг L + ранг $L^* = m$.

12. Использовать теорему 2.5, чтобы показать, что следующие уравнения не имеют решения:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1, \\ x - 3y &= 1, \\ -x + y &= 0. \end{aligned}$$

13. Если A — $m \times n$-матрица и $m \geqq n$, то если уравнение $xA = b$ имеет решение, оно имеет хотя бы одно решение, у которого по крайней мере n ненулевых координат.

14. Подпространство S пространства F^m называется *аффинным подпространством*, если (а) из того, что $x, y \in S$ следует, что для всех λ $\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$; или (б) $S = w + L$, где w — вектор, а L — линейное подпространство; или (в) S есть множество всех решений уравнения $xA = b$. Доказать, что определения (а), (б) и (в) эквивалентны.

К параграфам 3 и 4

15. Проверить свойство О4 из § 3.

16. Используя теорему 2.6, доказать отсутствие неотрицательных решений у системы уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1 + 3\xi_2 - 5\xi_3 &= 2, \\ \xi_1 - 4\xi_2 - 7\xi_3 &= 3. \end{aligned}$$

17. Доказать, используя теорему 2.7, что следующие неравенства не имеют решения:

$$4\xi_1 - 5\xi_2 \geqq 3,$$
$$-2\xi_1 - 7\xi_2 \geqq 1,$$
$$-2\xi_1 + \xi_2 \geqq -2.$$

18. Найти решение следующих неравенств

$$5\xi_1 - 4\xi_2 \leqq 7,$$
$$-3\xi_1 + 3\xi_2 \leqq -5$$

и доказать, исходя из теоремы 2.8, что у них нет неотрицательных решений.

19. Имеют ли следующие уравнения полуположительные решения?

$$3\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0,$$
$$2\xi_1 - 4\xi_2 + \xi_3 = 0.$$

20. Показать, что система из n однородных неравенств с n неизвестными всегда имеет ненулевое решение.

21. Неравенство $xA \leqq b$ имеет решение в том и только в том случае, когда имеет решение любой набор из $m+1$ неравенств вида $xa^j \leqq \beta_j$ (использовать теоремы 2.6, 2.7 и 2.11).

22. Доказать следствие 2 теоремы 2.9.

23. Для любого подпространства L из R^n, $L + L^* = R^n$.

Замечание. В общем случае это неверно. Если F — множество всех комплексных чисел, а L — множество векторов вида (λ, λ_i) в F^2, то $L^* = L$.

24. Для любого подмножества L из R^n существуют такие векторы $x \geqq \mathbf{0}$, $x \in L$, $y \geqq \mathbf{0}$, $y \in L^*$, что $x + y > \mathbf{0}$.

25. $m \times m$-матрица A называется *положительно полуопределенной*, если для всех x из R^m $xAx \geqq 0$. Доказать, что если A — положительно полуопределенная матрица, то неравенство

$$xA \geqq \mathbf{0}$$

имеет полуположительное решение.

К параграфам 5, 6 и 7

26. Показать, что подпространство ранга r может быть представлено как сумма $r + 1$ полупрямых.

27. Пусть X — подпространство R^m и $x \in \langle X \rangle$. Показать, что x является выпуклой комбинацией некоторого множества, состоящего не более чем из $m + 1$ точек X (использовать теорему о базисных решениях).

28. Построить пример выпуклого конуса C (не конечного), для которого $C^{**} \neq C$. Построить такие конусы C_1 и C_2, чтобы имело место $(C_1 \cap C_2)^* \neq C_1^* + C_2^*$.

29. Показать, что для любого конечного конуса C из R^m $C + C^* = R^m$ (это обобщает результат упражнения 23).

30. Для любого конечного конуса $C \cap (-C^*) = 0$ в том и только в том случае, когда C является линейным пространством.

31. Матрица $A^* = (\alpha_{ij}^*)$ является *транспонированной* по отношению к матрице $A = (\alpha_{ij})$, если $\alpha_{ij}^* = \alpha_{ji}$. Используя упражнение 30, показать, что неравенство $xA \leqq 0$ имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда неравенство $yA^* \leqq 0$ имеет ненулевое решение. (Результаты последних двух задач принадлежат Дж. Гаддуму [1].)

32. Для произвольного конуса C существуют такие $x \geqq \mathbf{0}$, $x \in C$, $y \geqq \mathbf{0}$, $y \in C^*$, что $x + y > \mathbf{0}$ (это обобщает упражнение 24).

33. *Линейной размерностью* выпуклого конуса C является ранг множества, состоящего из тех векторов конуса, противоположные которым также принадлежат конусу C. Доказать, что

(а) для выпуклого конуса из R^m

$$\text{ранг } C + \text{линейная размерность } C^* = m,$$

(б) для конечных конусов

$$\text{ранг } C^* + \text{линейная размерность } C = m.$$

34. *Открытое полупространство* из R^m является множеством всех векторов x, для которых $xa < 0$ при некотором фиксированном векторе a. Показать, что если S — такое конечное множество из R^m, что любые $m + 1$ точек

S принадлежат некоторому полуоткрытому полупространству, то существует открытое полупространство, содержащее все множество S (использовать теорему 2.9 и упр. 27).

35. Используя упражнение 34, показать, что неравенство

$$xA < 0$$

имеет решение в том и только в том случае, когда любая система, состоящая из $m+1$ неравенств вида

$$xa^j < 0,$$

имеет решение.

36. Множество X из R^m называется *множеством решений*, если X является множеством всех решений неравенства $xA \leqq b$. Доказать, что любой выпуклый многогранник K является множеством решений.

Указание. Пусть $K = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, где $x_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{im})$. Определим $\hat{x}_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{im}, 1)$, положим $C = (\hat{x}_1) + \ldots + (\hat{x}_n)$ и рассмотрим C^*.

37. Множество X из R^m называется *ограниченным*, если существует такое число $\mu \geqq 0$, что для всех $x = (\xi_i)$ из X, $|\xi_i| \leqq \mu$. Показать, что множество решений неравенства $xA \leqq b$ ограничено в том и только в том случае, если неравенство $xA \leqq 0$ не имеет ненулевого решения.

38. Исходя из двух последних упражнений показать, что множество решений X является выпуклым многогранником в том и только в том случае, когда X ограничено.

39. Показать, что любое множество решений может быть представлено как сумма выпуклого многогранника и конечного конуса и наоборот.

40*. Если X — множество решений из R^m и A — $m \times n$-матрица, то $Y = \{y \mid y = xA, \quad x \in X\}$ есть множество решений из R^n.

41. (Теорема Хелли) Если $K_1, \ldots, K_r$ — набор выпуклых многогранников из R^n, причем у любого набора из $n+1$ многогранников K_i имеется общая точка, то все K_i имеют общую точку.

Указание. Используйте упр. 21 и 36.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Теперь, когда мы можем использовать развитый в первых четырех параграфах предыдущей главы алгебраический аппарат, изложение теории линейного программирования будет довольно простым делом. Напомним, что стандартная задача максимизации была определена в гл. I как задача нахождения неотрицательных чисел, которые удовлетворяют определенным линейным неравенствам и максимизируют данную линейную функцию. В векторно-матричных обозначениях, которые мы ввели, эта задача может быть переписана в следующем компактном виде.

По заданным $m \times n$-матрице A, n-мерному вектору b и m-мерному вектору c найти m-мерный неотрицательный вектор x, для которого

$$xc \text{ максимально} \tag{1}$$

при условии

$$xA \leqq b. \tag{2}$$

Двойственная задача состоит, таким образом, в нахождении такого неотрицательного n-мерного вектора y, что

$$yb \text{ минимально} \tag{1*}$$

при условии

$$Ay \geqq c. \tag{2*}$$

Фактически мы будем интересоваться задачами и более общего типа, чем стандартные задачи максимизации и минимизации, и следующий параграф будет посвящен определениям и классификации различных типов задач, которые охватываются общим названием задач линейного программирования.

§ 1. Определения

В стандартных задачах максимизации и минимизации, которые мы уже рассматривали, от неизвестного вектора x требуется, чтобы он был неотрицателен и удовлетворял линейным неравенствам. Во многих приложениях желательно вводить условия не только в форме неравенств, но и в форме уравнений. Точно так же имеются многочисленные приложения, в которых не требуется, чтобы решения были неотрицательными. Удобно ввести общий термин *линейное ограничение*, который можно использовать как для линейных равенств, так и для линейных неравенств. Мы сможем тогда отличать разные типы задач линейного программирования в зависимости от природы входящих в них ограничений.

Один тип задач, как это мы увидим в следующей главе, особенно удобен для вычислений. В нем неизвестный вектор также должен быть неотрицательным, но все ограничения записаны в форме равенств.

Определение. Пусть A, b и c определены, как и выше. *Каноническая задача максимизации* состоит в отыскании неотрицательного вектора x, который

$$\text{максимизирует } xc \tag{1}$$

при условии

$$xA = b. \tag{2}$$

Каноническая задача минимизации определяется точно так же, с заменой слова «максимизирует» на слово «минимизирует».

Сейчас мы покажем, что стандартная и каноническая задачи эквивалентны друг другу в том смысле, что каждая из них может быть очевидным способом переведена в другую. Если мы заменим условие (2) на неравенства

$$xA \leqq b,$$
$$-xA \leqq -b,$$

то получим каноническую задачу, записанную в виде стандартной. С другой стороны, чтобы представить стандартную задачу в виде канонической, заменим неравенство

$$xA \leqq b \tag{3}$$

равенством

$$xA + z = b \tag{4}$$

и дополнительным требованием $z \geqq 0$.

Таким образом, мы получили задачу, в которой ограничения являются равенствами, x и z, очевидно, неотрицательны и x максимизирует (1) при условии (4) в том и только в том случае, когда x удовлетворяет (3) и максимизирует (1).

Рассмотрим теперь самый общий случай, когда некоторые компоненты x должны быть неотрицательными, другие могут быть произвольного знака, а среди ограничений есть как равенства, так и неравенства.

Определения. Пусть $a^1, \ldots, a^r, \bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^s$ и c — m-мерные векторы, а $\beta_1, \ldots, \beta_r, \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_s$ — числа. *Общей задачей максимизации* называется задача нахождения такого m-мерного вектора x, чтобы

$$xc \text{ достигало максимума} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} xa^j &\leqq \beta_j, & j &= 1, \ldots, r, \\ x\bar{a}^j &= \bar{\beta}_j, & j &= 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что и стандартная, и каноническая задачи являются частными случаями общей. Наоборот, с помощью простого приема мы можем привести общую задачу к любой из этих двух. Так, чтобы получить стандартную задачу, эквивалентную общей, нам нужно все ограничения записать в виде неравенств, для чего можно все равенства в (2) переписать в виде

$$\begin{aligned} x\bar{a}^j &\leqq \bar{\beta}_j, \\ -x\bar{a}^j &\leqq -\bar{\beta}_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Введем теперь новые неизвестные неотрицательные m-мерные векторы $x' = (\xi_i')$ и $x'' = (\xi_i'')$, заменим неравенства (2) и (3) на неравенства

$$
\begin{aligned}
(x' - x'')a^j &\leqq \beta_j, \\
(x' - x'')\overline{a^j} &\leqq \overline{\beta}_j, \qquad (4) \\
-(x' - x'')\overline{a^j} &\leqq -\overline{\beta}_j
\end{aligned}
$$

и потребуем, чтобы разность

$$x'c - x''c \quad \text{была максимальной.} \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что $2m$-мерный вектор $z = (\xi_1', \ldots, \xi_m', \xi_1'', \ldots, \xi_m'')$ максимизирует (5) при условиях (4) в том и только в том случае, когда вектор $x = x' - x''$ решает исходную задачу [детали доказательства оставляются читателю в качестве упражнения (см. упр. 3)]. Таким образом, эквивалентность стандартной задачи и общей задачи максимизации (а также и минимизации) установлена.

Мы уже говорили, что вопросы теории линейного программирования группируются вокруг фундаментальной теоремы двойственности для стандартных задач максимизации и минимизации. Как, вероятно, читатель и ожидает, двойственные задачи для канонической и общей задач также имеются. Мы приведем сначала задачу, двойственную к общей. Задачи, двойственные к канонической и стандартной, получатся из нее как частные случаи. С этой целью удобно несколько изменить формулировку общей задачи.

Пусть A, b и c имеют их обычный смысл. Мы будем использовать теперь обозначение из § 4 гл. II, где M и N означали соответственно множества индексов от 1 до m и от 1 до n. Таким образом,

$$M = \{1, \ldots, m\}, \qquad N = \{1, \ldots, n\}.$$

Пусть S — подмножество M, а S' — его *дополнение*, т. е. состоит из всех индексов, содержащихся в M, но не содержащихся в S. Пусть T — подмножество N, а T' — его дополнение. Мы можем теперь описать общую задачу максимизации следующим образом. Найти такой m-мерный вектор $x = (\xi_i)$, чтобы

$$xc \text{ было максимально} \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \xi_i &\geqq 0 && \text{для } i \in S, \\ xa^j &\leqq \beta_j && \text{для } j \in T, \\ xa^j &= \beta_j && \text{для } j \in T'. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда задача, двойственная к этой, определяется следующим образом. Найти такой n-мерный вектор $y = (\eta_j)$, чтобы

$$yb \text{ было минимально} \tag{1*}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \eta_j &\geqq 0 && \text{при } j \in T, \\ a_i y &\geqq \gamma_i && \text{при } i \in S, \\ a_i y &= \gamma_i && \text{при } i \in S'. \end{aligned} \tag{2*}$$

Симметричность этой двойственности видна сразу. Неравенству в одной системе соответствует неотрицательная переменная в двойственной. Равенству в одной системе отвечает неограниченная переменная в двойственной.

Заметим, что стандартной задаче максимизации соответствует тот частный случай общей задачи, при котором $S = M$ и $T = N$, так что задача обращается в стандартную задачу минимизации, как это, конечно, и должно быть. Однако задача, двойственная к канонической задаче максимизации, не будет канонической задачей минимизации, так как в этом случае $S = M$ и T пусто. Двойственной к ней будет задача нахождения n-мерного вектора y (без ограничений по знаку), для которого

$$yb \quad \text{минимально} \tag{3}$$

при условиях

$$Ay \geqq c. \tag{4}$$

Что касается терминологии, то термины, использованные в гл. I, очевидным образом переносятся и на другие типы задач линейного программирования.

Определение. Задача линейного программирования называется *допустимой*, если существует вектор, удовлетворяющий ограничениям этой задачи. Такой вектор называется *допустимым вектором* (реже допустимым решением, как это делалось в гл. I).

Допустимый вектор называется *оптимальным вектором*, если он максимизирует или минимизирует данную линейную форму, и значение этого максимума или минимума называется значением задачи линейного программирования.

§ 2. Теоремы двойственности

В гл. I мы сформулировали теорему двойственности для стандартных задач максимизации и минимизации. Аналогичная формулировка справедлива и для канонической и общей задач. Именно

Теорема 3.1 (основная теорема двойственности). *Если обе двойственные задачи допустимы, то обе они имеют оптимальные векторы, и значения этих задач совпадают. Если хотя бы одна задача не является допустимой, то ни одна из них не имеет оптимального вектора.*

Начнем с доказательства теоремы двойственности для случая стандартной задачи, а из него уже получим доказательство для общей задачи.

Доказательство для стандартной задачи. Предположим сначала, что и стандартная задача максимизации и двойственная к ней являются допустимыми. В этом случае найдутся неотрицательные решения неравенств

$$xA \leqq b, \tag{1}$$

$$Ay \geqq c. \tag{2}$$

Теорема будет доказана, если мы сможем найти решения (1) и (2), которые удовлетворяют также неравенству

$$xc - yb \geqq 0. \tag{3}$$

Действительно, мы видели в лемме 1.1, что если x и y удовлетворяют условиям (1) и (2), то $xc \leqq yb$, так что если (3) верно, то $xc = yb$. Следовательно, по теореме 1.1 (стр. 35) оба вектора x и y оптимальны.

Предположим теперь, что система неравенств (1), (2) и (3) не имеет неотрицательных решений. Это будет как раз та ситуация, в которой применима теорема 2.8 предыдущей главы (стр. 77). Если мы выпишем наши неравенства (1), (2), (3), то получим

$$\sum_i \xi_i \alpha_{ij} \leqq \beta_j \qquad j=1, \ldots, n, \tag{1'}$$

$$\sum_j \eta_j(-\alpha_{ij}) \leqq -\gamma_i, \qquad i=1, \ldots, m, \tag{2'}$$

$$\sum_j \eta_j\beta_j - \sum_i \xi_i\gamma_i \leqq 0. \tag{3'}$$

Если эти неравенства не имеют неотрицательных решений, то из теоремы 2.8 следует, что найдутся неотрицательный n-мерный вектор $z=(\zeta_j)$, неотрицательный m-мерный вектор $w=(\omega_i)$ и число $\theta \geqq 0$, для которых

$$\sum_j \zeta_j\alpha_{ij} - \theta\gamma_i \geqq 0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{4'}$$

$$-\sum_i \omega_i\alpha_{ij} + \theta\beta_j \geqq 0, \quad j=1, \ldots, n, \tag{5'}$$

и

$$\sum_j \zeta_j\beta_j - \sum_i \omega_i\gamma_i < 0. \tag{6'}$$

В матрично-векторной форме эти соотношения можно переписать так:

$$Az \geqq \theta c, \tag{4}$$

$$wA \leqq \theta b, \tag{5}$$

$$zb - wc < 0. \tag{6}$$

Далее, θ не равно нулю, так как в противном случае мы смогли бы выбрать допустимые векторы x и y и из (4), (5), (1) и (2) получили бы

$$0 \leqq xAz \leqq zb$$

и

$$0 \geqq wAy \geqq wc,$$

а это противоречит неравенству (6).

Поскольку θ — положительное число, w/θ и z/θ должны составлять пару допустимых векторов. Поэтому по лемме 1.1

$$\frac{w}{\theta}c \leqq \frac{z}{\theta}b \quad \text{или} \quad wc \leqq zb,$$

что также противоречит (6). Следовательно, исходная система неравенств имеет решение, которое, как мы уже заметили, и составляло бы требуемую пару оптимальных векторов.

Наконец, предположим, что одно из неравенств, например (1), не выполнено. Тогда, конечно, исходная задача максимизации не имеет решения. Поэтому на основании теоремы 2.8 существует такой неотрицательный n-мерный вектор z, что

$$Az \geqq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad zb < 0. \tag{7}$$

Но, если ограничения (2) допустимы, то существует такой вектор y, что

$$Ay \geqq c \tag{8}$$

и по неравенствам (7) для всех положительных λ вектор $y+\lambda z$ также является допустимым. Однако zb отрицательно; отсюда следует, что выражение $(y+\lambda z)\,b$ может быть сделано произвольно малым и поэтому оно не имеет минимума, так что двойственная задача не имеет оптимального вектора. Таким образом, в случае стандартной задачи доказательство завершено.

Доказательство для случая общей задачи линейного программирования. Для доказательства сведем общую задачу линейного программирования к стандартной задаче методом, описанным в § 1. Найдем такой вектор $x=(\xi_i)$, что сумма

$$\sum_i \xi_i\gamma_i \quad \text{максимальна} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \xi_i &\geqq 0, & i &\in S,\\ xa^j &\leqq \beta_j, & j &\in T,\\ xa^j &= \beta_j, & j &\in T', \end{aligned} \tag{2}$$

где S и T — соответственно подмножества M и N.

Далее, для каждого i из S' введем две новые переменные ξ_i' и ξ_i'' и рассмотрим стандартную задачу о максимизации

$$\sum_{i\in S}\xi_i\gamma_i+\sum_{i\in S}\xi_i'\gamma_i-\sum_{i\in S'}\xi_i''\gamma_i \tag{1'}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in S}\xi_i\alpha_{ij}+\sum_{i\in S'}\xi_i'\alpha_{ij}-\sum_{i\in S'}\xi_i''\alpha_{ij}\leqq\beta_j, && j\in T,\\
&\sum_{i\in S}\xi_i\alpha_{ij}+\sum_{i\in S'}\xi_i'\alpha_{ij}-\sum_{i\in S'}\xi_i''\alpha_{ij}\leqq\beta_j, && j\in T',\\
-&\sum_{i\in S}\xi_i\alpha_{ij}-\sum_{i\in S'}\xi_i'\alpha_{ij}+\sum_{i\in S'}\xi_i''\alpha_{ij}\leqq-\beta_j, && j\in T'.
\end{aligned} \tag{2'}$$

Задача, двойственная этой стандартной задаче линейного программирования, заключается в нахождении таких неотрицательных чисел η_j, $j\in T$ и η_j', η_j'', $j\in T'$, что выражение

$$\sum_{j\in T}\eta_j\beta_j+\sum_{j\in T'}\eta_j'\beta_j-\sum_{j\in T'}\eta_j''\beta_j \tag{1')*}$$

минимально при условиях

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in T}\eta_j\alpha_{ij}+\sum_{j\in T'}\eta_j'\alpha_{ij}-\sum_{j\in T'}\eta_j''\alpha_{ij}\geqq\gamma_i, && i\in S,\\
&\sum_{j\in T}\eta_j\alpha_{ij}+\sum_{j\in T'}\eta_j'\alpha_{ij}-\sum_{j\in T'}\eta_j''\alpha_{ij}\geqq\gamma_i, && i\in S',\\
-&\sum_{j\in T}\eta_j\alpha_{ij}-\sum_{j\in T'}\eta_j'\alpha_{ij}+\sum_{j\in T'}\eta_j''\alpha_{ij}\geqq-\gamma_i, && i\in S'.
\end{aligned} \tag{2')*}$$

По определению, задача, двойственная задаче (1), (2), состоит в нахождении вектора $y=(\eta_j)$, минимизирующего сумму

$$\sum_j\eta_j\beta_j \tag{1)*}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\eta_j\geqq 0, && j\in T,\\
&\sum_j\eta_j\alpha_{ij}\geqq\gamma_i, && i\in S,\\
&\sum_j\eta_j\alpha_{ij}=\gamma_i, && i\in S'.
\end{aligned} \tag{2)*}$$

Но, как мы видели в § 1, эта последняя задача эквивалентна задаче (1′)*, (2′)*. Отсюда следует, что если исходная задача и задача, двойственная ей, допустимы, то допустимыми являются и эквивалентные им задачи, обозначенные штрихами. Но тогда по теореме двойственности для стандартной задачи двойственные задачи со штрихами имеют равные значения, а, следовательно, равные значения имеют и исходные задачи; доказательство закончено.

§ 3. Теоремы равновесия

В гл. I мы уже установили теорему равновесия для стандартной задачи линейного программирования и дали доказательство этой теоремы исходя из стандартной теоремы двойственности. Теоремы равновесия, как это можно было ожидать, существуют также и в случаях общей и канонической задач. Ввиду важности для дальнейших приложений мы сформулируем и докажем теорему в случае канонической задачи. Формулировку и доказательство для общей задачи линейного программирования мы оставим в виде упражнения (см. упражнение 4).

Теорема 3.2 (каноническая теорема равновесия). *Пусть $x=(\xi_i)$ — неотрицательное решение уравнения*

$$xA=b, \tag{1}$$

а $y=(\eta_j)$ — решение неравенства

$$Ay \geqq c. \tag{2}$$

Тогда x максимизирует xc, а y минимизирует yb в том и только в том случае, когда

$$\xi_i = 0 \qquad \text{как только } a_i y > \gamma_i. \tag{3}$$

Доказательство. Если выполнено условие (3), то

$$xc = \sum_i \xi_i \gamma_i = \sum_i \xi_i a_i y = \Big(\sum_i \xi_i a_i\Big) y = xAy = by \tag{4}$$

и, следовательно, x и y — оптимальные векторы.

Обратно, если x и y — оптимальные векторы, то уравнение (4) следует из теоремы двойственности, откуда мы получаем

$$\sum_i \xi_i (a_i y - \gamma_i) = 0. \tag{5}$$

Так как все члены этой суммы неотрицательны, условие (3) выполнено.

Как и стандартная теорема равновесия, приведенный результат может быть использован для проверки оптимальности предложенных решений; это показано в следующем примере.

Пример 1. Найти вектор $x=(\xi_i)\geqq 0$, минимизирующий

$$\xi_1+6\xi_2-7\xi_3+\xi_4+5\xi_5 \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} 5\xi_1-4\xi_2+13\xi_3-2\xi_4+\xi_5&=20,\\ \xi_1-\ \xi_2+\ 5\xi_3-\ \xi_4+\xi_5&=8. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы утверждаем, что вектор $\bar{x}=\left(0, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0\right)$ в данной задаче является оптимальным, а соответствующее ему значение равно

$$6\times\frac{4}{7}-7\times\frac{12}{7}=-\frac{60}{7}.$$

Обратим внимание на двойственные ограничения:

$$\begin{aligned} 5\eta_1+\ \eta_2&\leqq 1,\\ -4\eta_1-\ \eta_2&\leqq 6,\\ 13\eta_1+5\eta_2&\leqq -7,\\ -2\eta_1-\ \eta_2&\leqq 1,\\ \eta_1+\ \eta_2&\leqq 5. \end{aligned} \tag{2*}$$

Поскольку в предложенном решении $\bar{\xi}_2$ и $\bar{\xi}_3$ положительны, из теоремы равновесия следует, что второе и третье неравенства в (2*) должны обращаться в равенства:

$$\begin{aligned} -4\eta_1-\ \eta_2&=6,\\ 13\eta_1+5\eta_2&=-7, \end{aligned}$$

из которых мы получаем

$$\eta_1=-\frac{23}{7},\quad \eta_2=\frac{50}{7}.$$

Для того чтобы показать, что мы действительно получили решение, надо только установить выполнение трех оставшихся неравенств

$$5\eta_1+\eta_2=-\frac{5\times 23+50}{7}<0<1,$$

$$-2\eta_1-\eta_2=\frac{2\times 23-50}{7}<0<1,$$

$$\eta_1+\eta_2=\frac{-23+50}{7}=\frac{27}{7}<4<5.$$

Отсюда следует, что вектор $\bar{y}=\left(-\frac{23}{7}, \frac{50}{7}\right)$ допусти́м и, значит, как $\bar{x}$, так и $\bar{y}$ оптимальные векторы. В виде окончательной проверки заметим, что значение двойственной задачи равно

$$20\eta_1+8\eta_2=\frac{-20\times 23+8\times 50}{7}=-\frac{60}{7}$$

и, как это и должно быть, значения обеих задач совпадают.

§ 4. Базисные решения

До следующей главы мы не будем заниматься практическим решением задач линейного программирования. Однако здесь мы все же докажем теорему, которая показывает, что любая такая задача может быть решена за конечное число шагов, хотя число этих шагов слишком велико для того, чтобы предложенную процедуру фактически использовать при вычислениях.

Напомним, что решение системы линейных уравнений называется базисным, если оно зависит от линейно независимой системы векторов (гл. II, § 4). В канонической задаче линейного программирования оптимальный вектор $\bar{x}$ называется базисным, если он является базисным решением уравнения ограничения

$$xA=b. \tag{1}$$

Теорема 3.3 (базисные решения задач линейного программирования). *Если каноническая задача линейного программирования имеет оптимальный вектор, то она имеет и оптимальный базисный вектор.*

Доказательство. Пусть x' оптимальный вектор, зависящий, например, от векторов $a_1, \ldots, a_r$. Далее, если

$\bar{y}$ какой-нибудь оптимальный вектор двойственной задачи, то по теореме 3.2 $a_i\bar{y} = \gamma_i$ для $i \leqq r$. Если векторы $a_1, \ldots, a_r$ независимы, то x' уже определяет требуемое базисное решение. В противном случае по теореме 2.11 о базисных решениях уравнений мы можем найти другое решение $\bar{x}$ уравнения (1), зависящее от независимого подмножества векторов $a_1, \ldots, a_r$. Но $\bar{x}$ будет и оптимальным решением, поскольку оно также будет удовлетворять условию (3) теоремы 3.2 относительно $\bar{y}$.

Эта теорема показывает, что каноническая задача может быть решена за конечное число шагов. Например, задача из примера 1 может быть решена следующим образом: поскольку ограничения состоят из двух уравнений с пятью неизвестными, нам следует рассмотреть десять множеств базисных решений, которые получаются, если выбрать всеми возможными способами три переменных равными нулю. Среди этих десяти допустимых векторов базисным оптимальным вектором будет тот, который минимизирует значение данной линейной функции. Ясно, что при большом числе переменных этот метод становится непригодным, так как требует слишком много времени.

§ 5. Приложение: распределение ресурсов в экономической системе с конкуренцией

Закончим эту главу описанием одного очень важного применения только что изложенной теории. Читатель должен был заметить, что все до сих пор рассмотренные примеры задач линейного программирования относятся к ситуациям, в которых человек или группа лиц работают сообща над достижением некоторой четко определенной цели. Оказывается, что линейное программирование действительно особенно приспособлено для решения задач «оптимизации» именно такого рода. Однако в этом параграфе мы увидим, что теория линейного программирования дает нам возможность делать содержательные утверждения и о ситуациях совершенно иного типа, в которых человек или группа лиц не только работают над достижением различных целей, но фактически конкурируют между собой. Мы будем рассматривать задачу равновесия для экономической системы с конкуренцией. Этот термин будет объяснен в следующих абзацах.

В качестве отправной точки возьмем задачу из примера 4 гл. I — задачу максимизации дохода при данных ресурсах. Некоторая экономическая единица, которую мы в дальнейшем будем именовать *фирмой*, имеет в своем распоряжении несколько технологических процессов, которые могут использоваться с различными интенсивностями. Доход от использования каждого технологического процесса с единичной интенсивностью задан, и фирма пытается максимизировать свой полный доход при условии, что заданы ограничения на имеющиеся в распоряжении фирмы запасы — сырье, которое затрачивается при использовании этих технологических процессов. В примере, на который мы ссылались, под технологическими процессами понимается производство одних товаров из некоторых других, но эта модель также применима и во многих других ситуациях. В число используемых фирмой технологических процессов мы можем относить рейсы самолетов, производство кинокартин или снабжение электроэнергией, точно так же, как и производство товаров широкого потребления. Под *экономикой* мы будем понимать просто набор такого рода фирм, например m фирм, причем k-я фирма представлена своей матрицей технологических процессов A_k. В рассмотренной ранее задаче максимизации продукции предполагалось, что известны также ресурсы, которыми располагает каждая фирма, задаваемые вектором ресурсов s_k. Однако при изучении экономики в целом мы можем уже не предполагать, что нам известны ресурсы каждой фирмы. В действительности наша главная задача в этом параграфе состоит в том, чтобы определить, как должны быть распределены ресурсы всей экономики между различными фирмами, сколько стали должно пойти на автомобили, сколько на мосты, сколько железная дорога должна перевезти груза, сколько пассажиров и т. д. Эта задача называется задачей о *распределении ресурсов*. Мы покажем, как она решается механизмом *свободной конкуренции*. Однако прежде чем приступить к этому, мы должны сформулировать нашу модель более точно.

Теперь нам удобнее будет разделить все ресурсы на две категории: *собственно ресурсы*, такие, как сырье, которое могут использовать различные фирмы, и *производственные мощности*, такие, как капитальное оборудование, которое закреплено за данной фирмой. Для металлурга железная руда относится к первой категории ресурсов, а доменная печь — ко второй. Для фермера фураж и удобрения принадлежат к первой категории, земля — ко второй[1]). Это различие легко учесть в линейной модели. Наш метод мог бы состоять в том, чтобы часть координат вектора ресурсов отвести под производственные мощности. Эквивалентный и более удобный с точки зрения обозначения путь состоит в том, чтобы разделить технологическую матрицу и вектор ресурсов на две части. Рассмотрим сначала случай производственных мощностей. Пусть x_k— вектор интенсивностей для k-й фирмы. Этот вектор ограничивается доступной предприятию мощностью с помощью неравенств

$$x_k B_k \leqq b_k, \tag{1}$$

где b_k— вектор ресурсов (т. е. земли, труда, доменных печей), доступных k-й фирме. Элемент матрицы B_k, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, задает количество j-го ресурса, нужное для функционирования i-го технологического процесса с единичной интенсивностью. Из экономической интерпретации видно, что как B_k, так и b_k можно предполагать неотрицательными.

При выполнении условий (1) k-я фирма потребляет и производит ресурсы линейно. Алгебраически это означает, что существует такая матрица A_k, что при интенсивностях x_k фирма потребляет (производит) вектор ресурсов $x_k A_k$. Матрица A_k не должна быть неотрицательной, и мы можем выбрать знаки нашей матрицы так, чтобы положительной координате $x_k A_k$ соответствовало потребляемое количество, а отрицательной — производимое количество.

Следует отметить, что категории производственных мощностей и ресурсов не исчерпывают всех видов продуктов производства, так как они не включают продуктов потреб-

[1]) Категория, к которой принадлежит данный ресурс, зависит от ситуации. Так, для некоторых приложений можно считать рабочую силу закрепленной за определенными участками, для других можно считать, что предприятия снабжаются рабочей силой из общего источника.

ления, таких, как молоко, яйца, автомобили и театральные билеты. Эти продукты включены в наше рассмотрение неявно. Нигде в этой модели не найти, например, кварты молока, но модель включит в себя технологический процесс, который ежедневно наряду с другими вещами производит и молоко. Показатель доходности этого технологического процесса будет введен в рассмотрение через продажу молока, и этот показатель доходности, а через него и цена на молоко, будет в модели заданной константой. То же самое относится ко всем другим потребительским продуктам и услугам. С другой стороны, цены ресурсов не задаются заранее, а должны определяться механизмом свободной конкуренции, как мы это скоро увидим.

Далее, еще одно важное ограничение состоит в том, что вся совокупность фирм не должна использовать ресурсов больше, чем их имеется в хозяйстве. Пусть $s = (\sigma_j)$ — вектор, j-я компонента которого показывает, каким количеством j-го ресурса может располагать хозяйство. Тогда требуемое условие примет простой вид

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k \leqq s. \tag{2}$$

Следующее необходимое замечание относится к природе ресурсов, которые сами бывают двух видов; первые — так называемые *первичные продукты*, или *факторы производства*, под которыми понимаются такие вещи, как земля и труд, и которые в хозяйстве могут использоваться, но не производиться, а вторые — *промежуточные продукты*, такие, как сталь, которые могут требоваться, скажем, для производства автомобилей и мостов, но которые сами должны производиться в хозяйстве. В дальнейшем у нас не появится математической необходимости различать первичные и промежуточные продукты, но важно держать это различие в уме для того, чтобы представлять себе экономическую общность модели. Например, одна из фирм может производить вагонетки, для которых сталь является необходимым сырьем. В свою очередь эта сталь является продукцией металлургической фирмы, которая в качестве сырья использует железную руду. Теперь в зависимости от наших целей мы можем либо рассматривать эту руду как первичный продукт, доступный в строго определенных количествах, и никогда не интересоваться тем, откуда она берется, либо модель может включать в себя горнодобывающую фирму, и в этом случае руда станет промежуточным продуктом, получаемым из первоначального продукта — труда, и, возможно, понадобится дополнительный необходимый фактор для горнодобывающей промышленности — вагонетки. Наша, казалось бы простая, модель оказывается способной охватывать и более сложные ситуации. Математически первичный продукт выступает как положительная компонента вектора ресурсов s, тогда, как промежуточному продукту соответствует нулевая компонента.

Возвращаясь теперь к задаче о распределении ресурсов, мы видим, что получили множество векторов x_k, удовлетворяющих неравенствам (1) и (2). Это, конечно, не является задачей линейного программирования, так как здесь ничего не нужно максимизировать. В общем случае будет бесконечно много возможных решений этих неравенств. Опишем теперь, как определяется такое решение с помощью механизма свободной конкуренции.

Предположим для начала, что задан набор цен различных ресурсов данной экономики $p = (\pi_j)$. Как должна действовать k-я фирма? Пусть, как в примере 4, гл. I, через γ_i^k обозначен доход k-й фирмы при использовании с единичной интенсивностью i-го технологического процесса. Тогда *полный доход* от действий k-й фирмы с вектором интенсивностей x_k равен $x_k c_k$, где $c_k = (\gamma_i^k)$. С другой стороны, затраты на эти действия равны $x_k A_k p$ (где отрицательные цены соответствуют дополнительному доходу). Ясно, что фирма будет действовать так, чтобы максимизировать свою *чистую прибыль*, задаваемую выражением $x_k (c_k - A_k p)$. Другими словами, при заданном векторе цен p k-я фирма действует так, чтобы решить стандартную задачу на максимум, в которой требуется найти неотрицательный вектор x_k, для которого

$$x_k (c_k - A_k p) \qquad \text{максимально} \tag{3}$$

при соблюдении условия (1).

Заметим теперь, что, если каждая из m фирм будет действовать так, чтобы решать сформулированную выше задачу, получающиеся векторы $x_k A_k$ не будут, вообще говоря, удовлетворять условию (2), т. е. затраты, производимые различными фирмами, могут не согласовываться с имеющимися ресурсами, часть которых окажется в избытке, а часть — в недостатке. Классическая экономическая доктрина утверждает, что в соответствии с «законом спроса и предложения» цены на продукты, в которых ощущается нехватка, должны возрасти, что уменьшит спрос на них и в конечном счете после ряда таких изменений предполагается, что наступит «равновесие» цен, при котором не будет превышения спроса ни на какой вид ресурсов. Распределение ресурсов, порождаемое этими равновесными ценами, и является уже упомянутым нами решением задачи распределения с помощью свободной конкуренции. Теперь для того, чтобы было некоторое доверие к этому механизму конкуренции, нужно показать, что эти равновесные цены действительно существуют. Мы используем теорию линейного программирования для доказательства существования таких цен — факта, далеко не очевидного.

Относительно равновесных цен нужно сделать еще одно дополнительное предположение. Мы отмечали, что закон спроса и предложения требует, чтобы цены на продукты, на которые имеется повышенный спрос, возрастали. Тот же закон традиционно утверждает, что если продукт имеется в избытке, то его цена падает. Можно было бы поставить вопрос о таких ценах, при которых все ресурсы производились бы не в недостатке и не в избытке, т. е. так, чтобы неравенство (2) обращалось в равенство. Однако это означало бы в свою очередь, что мы требуем слишком многого, и таких цен в общем случае могло бы и не существовать. Легко показать, почему это может случиться. Предположим, что при производстве бензина в качестве побочного продукта получается мазут. Пусть спрос на бензин больше, чем спрос на мазут. Тогда, для того чтобы удовлетворить спрос на бензин, нужно перепроизвести мазут. Таким образом, по самой природе технологии может случиться, что некоторые ресурсы используются не полностью даже в равновесном положении. Как же поступить тогда с условием падения цены не перепроизведенные продукты? Ответ на этот вопрос должен быть таким же, как и при рассмотрении теорем равновесия в гл. I. Мы потребуем, чтобы равновесные цены всех перепроизведенных продуктов равнялись нулю. Теперь мы уже подготовлены к тому, чтобы формализовать все, что было изложено ранее.

Определение. Говорят, что набор из $m+1$ векторов $(x_1, \ldots, x_m, p)$ дает *конкурентное равновесие*, если эти векторы удовлетворяют соотношениям (1), (2), и (3), и, кроме того,

$$\text{из} \quad \sum_{k=1}^{m} x_k A_k v_j < \sigma_j \ \text{следует, что} \ \pi_j = 0. \tag{4}$$

Вектор p называется *вектором равновесных цен.*

Мы сейчас докажем существование конкурентного равновесия. Прежде чем приступить к доказательству, сделаем важное с экономической точки зрения замечание о том, что если равновесие есть, то ресурсы должны быть распределены таким образом, чтобы максимизировать суммарный валовой доход производства. Итак формально мы имеем:

Теорема 3.4. *Если (x_k, p) приводит к конкурентному равновесию, то векторы x_k максимизируют функционал $\sum_{k=1}^{m} x_k c_k$ и удовлетворяют ограничениям* (1) *и* (2).

Доказательство. Пусть x'_k — какой-то набор векторов, удовлетворяющих (1) и (2). Тогда из (3) для всех k получаем

$$x_k (c_k - A_k p) \geqq x'_k (c_k - A_k p).$$

Просуммировав эти неравенства по k, получаем

$$\sum x_k c_k - \sum x'_k c_k \geqq \sum x_k A_k - \sum x'_k A_k p. \tag{5}$$

Из неравенства (2) следует, что $\sum x'_k A_k \leqq s$. Таким образом, $\sum x'_k A_k p \leqq sp$. Но из соотношений (2) и (4) непосредственно следует, что $\sum x_k A_k p = sp$. Поэтому правая часть неравенства (5) неотрицательна и, следовательно, $\sum x_k c_k \geqq \sum x'_k c_k$, что доказывает теорему.

Мы хотим привлечь внимание к примечательному экономическому содержанию этой теоремы. В ней говорится о том, что если существует экономическое равновесие (а то, что оно существует, мы покажем), то это равновесие побуждает все фирмы работать таким образом, как будто они составляют единое целое, целью которого является максимизация суммарного производства продукции. Так, хотя каждая фирма действует, насколько она это сознает, в чисто эгоистических интересах, она невольно сотрудничает с остальными фирмами в производстве продукции в «максимально возможном количестве». Едва ли можно найти более тонкие математические рассуждения, подкрепляющие ту философскую мысль, что все к лучшему в этом лучшем из линейных миров со свободной конкуренцией!

Для того чтобы установить существование равновесия, мы просто докажем теорему, обратную только что доказанной, и покажем, что если векторы x_k решают задачу максимизации общего валового дохода, то равновесные цены будут решением двойственной задачи. Для того чтобы использовать этот подход, мы должны знать, что валовой доход не может быть сделан сколь угодно большим. Такое предположение представляется, конечно, вполне естественным. Одним из путей для выполнения этого требования является предположение ограниченности множества решений неравенства (1). Экономически это соответствует предположению о том, что из-за ограниченности заводских мощностей никакой технологический процесс не может применяться с произвольно высокой интенсивностью.

Теорема 3.5. *Если валовое производство в хозяйстве ограничено сверху, то существует конкурентное равновесие*[1]).

Доказательство. Рассмотрим стандартную задачу максимизации, которая состоит в нахождении таких неотрицательных векторов x_k, что

$$\sum x_k c_k \quad \text{максимальна} \tag{6}$$

[1]) Для читателей, знакомых с подобными вопросами, мы подчеркнем, что описанное здесь конкурентное равновесие не является «общим равновесием» в смысле Вальраса, так как общее равновесие предполагало определение цен как ресурсов, так и продуктов. Возможно наиболее естественной ситуацией, описываемой нашей теоремой, является «полупланируемое» хозяйство, в котором плановики определяют цены продуктов, а для определения цен ресурсов используют конкурентный механизм. Довольно эффектным следствием наших теорем является тот факт, что плановики могут эффективно определить доход хозяйства с помощью соответственно назначенных цен на продукты и при этом сохранить критерий доходности как руководящую силу для отдельных фирм!

при ограничениях (1) и (2), которые мы для удобства перепишем:

$$x_k B_k \leqq b_k \quad \text{для всех } k, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k \leqq s. \tag{2}$$

Так как (6) ограничено сверху, то максимум достигается на некотором наборе векторов $\bar{x}_k$ и поэтому двойственная задача также является допустимой. Следовательно, по теореме двойственности существуют неотрицательные векторы $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ и p, для которых

$$B_k \bar{y}_k + A_k p \geqq c_k \quad \text{для всех } k \tag{7}$$

и

$$\sum \bar{y}_k b_k + ps = \sum \bar{x}_k c_k. \tag{8}$$

(Как читатель может легко проверить сам, неравенства (7) являются просто ограничениями, двойственными к (1) и (2), тогда как уравнение (8) выражает условие равенства значений двойственных задач линейного программирования.)

Покажем теперь, что векторы $\bar{x}_k$ и p дают нам требуемое равновесие. Для этого мы должны проверить, что $\bar{x}_k$ удовлетворяет (3), т. е. что каждый $\bar{x}_k$ максимизирует выражение

$$x_k (c_k - A_k p)$$

при условии (1). Задача, двойственная к этой, состоит в нахождении таких неотрицательных y_k, чтобы

$$y_k b_k \quad \text{было минимально}$$

при условии

$$B_k y_k \geqq c_k - A_k p. \tag{9}$$

Теперь вектор $\bar{x}_k$, очевидно, является допустимым для этой задачи и из (7) мы видим, что $\bar{y}_k$ удовлетворяет (9) и является поэтому допустимым для двойственной задачи. Согласно критерию оптимальности (теорема 1.1, стр. 33), $\bar{x}_k$ будет оптимальным, если

$$\bar{y}_k b_k = \bar{x}_k (c_k - A_k p). \tag{10}$$

Чтобы доказать (10) отметим, что $\bar{y}_k b_k \geq \bar{x}_k (c_k - A_k p)$ (по лемме 1.1, стр. 33) или

$$0 \leqq \bar{y}_k b_k + \bar{x}_k A_k p - \bar{x}_k c_k \quad \text{для всех } k. \tag{11}$$

Суммируя (11) по всем k, мы получаем

$$0 \leqq \sum \bar{y}_k b_k + \left(\sum \bar{x}_k A_k\right) p - \sum \bar{x}_k c_k. \tag{12}$$

Далее, из (2) следует, что правая часть этого неравенства не превосходит $\sum \bar{y}_k b_k + ps - \sum \bar{x}_k c_k$, но, согласно (8), это выражение равно нулю. Отсюда следует, что в (12) достигается равенство. Но правая часть неравенства (12) является суммой неотрицательных выражений, являющихся правыми частями неравенств (11). Поэтому каждое из этих слагаемых равно нулю, откуда следует равенство (10).

Заметим, наконец, что векторы $\bar{x}_k$ и p удовлетворяют условию (4) для продуктов, имеющихся в избытке, так как это условие совпадает с утверждением теоремы о равновесии применительно к неравенствам (2).

Подведем теперь итог тому, что было сделано. Мы показали, что в конкурентной экономике, где каждая фирма располагает рядом линейных технологических процессов, можно назначить цены ресурсов таким образом, что, хотя каждая фирма будет максимизировать свой доход, спрос на ресурсы не будет превосходить имеющихся возможностей. Более того, при этих ценах, максимизируя свой доход, фирмы автоматически будут максимизировать общий суммарный доход всего хозяйства.

Библиографические замечания

Мы уже приводили в гл. I ссылки на литературу для большей части материала, содержащегося в этой главе. Данное здесь доказательство теоремы двойственности взято автором из его статьи [1]. Теорема о базисных решениях доказана Данцигом [2].

Теоремы о распределении ресурсов и о конкурентном равновесии в то время, когда писалась эта книга, еще не появлялись где-либо в литературе в достаточно четком виде, хотя, вероятно, сами результаты знакомы многим, кто работает в этой области. Близкий результат можно найти у Купманса ([1], теорема 5.12).

Упражнения

1. Рассмотрим задачу нахождения вектора x, неограниченного по знаку, для которого

$$xc \quad \text{максимально} \tag{1}$$

при условии

$$xA = b. \tag{2}$$

Показать, что эта задача имеет решение в том и только в том случае, когда вектор c является линейной комбинацией столбцов матрицы A.

2. Привести пример стандартной задачи максимизации размера 2×2, в которой ни сама задача, ни двойственная ей не были бы допустимыми.

3. Закончить доказательство эквивалентности стандартной и общей задач максимизации.

4. Сформулировать и доказать теорему равновесия для общей задачи линейного программирования.

5. Решить следующую каноническую задачу, вычислив все три ее базисных решения

$$\begin{aligned} 4\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 &= 4, \\ \xi_1 + 3\xi_2 \qquad &= 5, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 \qquad &= \max. \end{aligned}$$

Проверить ответ, решив двойственную задачу.

6. Рассмотреть каноническую задачу минимизации, в которой требуется найти неотрицательные числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$, которые

$$\text{минимизируют } \xi_0 \tag{1}$$

при условии

$$\xi_0 b + \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = b. \tag{2}$$

Используя теорему двойственности для этой задачи, доказать теорему 2.6 (стр. 72).

7. Заменив равенство (2) в предыдущем упражнении неравенством, доказать с использованием теоремы двойственности теорему 2.8 (стр. 77).

8. Пусть X — множество допустимых векторов стандартной задачи максимизации, а $\overline{X}$ — множество оптимальных векторов. Показать, что X и $\overline{X}$ выпуклы и если $\overline{x}$ — крайняя точка $\overline{X}$, то она является также и крайней точкой X.

В двух следующих упражнениях используется новое понятие. Пусть φ — функция двух неотрицательных векторов, $x \in R^m$ и $y \in R^n$. Пара $(\overline{x}, \overline{y})$ называется *седловой точкой* функции, если

$$\varphi(\overline{x}, y) \geqq \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \geqq \varphi(x, \overline{y}) \quad \text{для всех } x, y \geqq \mathbf{0}.$$

9. Показать, что если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — оптимальные векторы, то $(\overline{x}, \overline{y})$ образует седловую точку функции

$$\varphi(x, y) = xc + yb - xAy \quad \text{для } x, y \geqq \mathbf{0}.$$

10. Доказать, что если $(\overline{x}, \overline{y})$ образует седловую точку функции φ в упражнении 9, то $\overline{x}$ и $\overline{y}$ являются оптимальными векторами соответствующей пары двойственных задач.

11. Пусть (A, b, c) — каноническая задача максимизации со значением ω, а c^k — последовательность векторов, сходящаяся к c (т. е. если $c^k = (\gamma_i^k)$ и $c = (\gamma_i)$, то $\gamma_i^k \to \gamma_i$ для $i = 1, \ldots, m$). Пусть ω_k — значение задачи (A, b, c^k). Показать, что ω_k сходятся к ω.

Указание. Воспользуйтесь тем, что имеется только конечное число допустимых базисных векторов.

12. В предыдущем упражнении фиксировать c, но рассмотреть последовательность b^k, сходящуюся к b. Доказать, что ω_k сходится к ω (Эти упражнения показывают, что значение задачи линейного программирования зависит от векторов b и c *непрерывно*.)

13. Рассмотрим следующую стандартную задачу максимизации. Найти такое неотрицательное число ξ, чтобы

$$\xi \quad \text{было максимально} \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \xi &\leqq 1, \\ \alpha\xi &\leqq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α — любое неотрицательное число. Показать, что при α, стремящемся к нулю, значение задачи ω терпит *разрыв*. (Это показывает, что значение не обязательно зависит непрерывно от матрицы A.)

14. Функция f вектора x называется *субаддитивной*, если для всех x_1, x_2

$$f(x_1+x_2) \leqq f(x_1)+f(x_2).$$

Доказать, что значение стандартной задачи максимизации является субаддитивной функцией вектора c.

15. Функция f называется *супераддитивной*, если

$$f(x_1+x_2) \geqq f(x_1)+f(x_2) \quad \text{для всех } x_1,\ x_2.$$

Доказать, что значение стандартной задачи максимизации является супераддитивной функцией вектора b.

16. Рассмотрим задачу о диете, в которой требуется, чтобы каждое из условий, налагаемых на питательные вещества, выполнялось как равенство и предположим, что оптимальная диета использует только продукты F_1, $F_2, \ldots, F_k$. Предположим теперь, что требования питательности изменились, но так, что их можно удовлетворить с помощью тех же продуктов. Доказать, что эта новая диета автоматически будет оптимальной (использовать теорему о равновесии).

17. Доказать, что если в задаче о диете фигурируют n продуктов и m питательных веществ, то найдется оптимальная диета, использующая не более m продуктов.

18. Рассмотрим следующую задачу максимизации. Требуется

$$\text{максимизировать} \quad cx \tag{1}$$

при условиях

$$xA = b \tag{2}$$

и

$$d \leqq x \leqq e, \quad \text{где } d=(\delta_i), \quad e=(\varepsilon_i). \tag{3}$$

Доказать, что $\bar{x}=(\bar{\xi}_i)$ является оптимальным вектором в том и только в том случае, когда существует вектор $\bar{y}$, такой, что

$$\text{если } a_i\bar{y} < \gamma_i, \text{ то } \bar{\xi}_i = \varepsilon_i, \tag{4}$$

$$\text{если } a_i\bar{y} > \gamma_i, \text{ то } \bar{\xi}_i = \delta_i. \tag{5}$$

Указание. Показать сначала, что вектор $\bar{x}$ оптимален в том и только в том случае, когда существуют n-мерный вектор $\bar{y}$ и неотрицательные n-мерные векторы $\bar{z}$ и $\bar{w}$, для которых

$$A\bar{y}+\bar{z}-\bar{w}=c \text{ и } \bar{x}c=\bar{y}b+\bar{z}e-\bar{w}d.$$

19. Рассмотрим общую задачу максимизации xc, где x подчинено произвольным линейным ограничениям. Изменим c, увеличив первую компоненту γ_1. Показать, что если $x=(\xi_i)$ — оптимальный вектор в исходной задаче, а $x'=(\xi_i')$ — оптимальный вектор в двойственной задаче, то $\xi_1' \geq \xi_1$.

20. Рассмотрим «экономику», в которой имеется два продукта и две фирмы. В распоряжении каждой из фирм имеется один технологический процесс, задаваемый соответственно вектором a_1 или a_2, где

$$a_1=(2,\ 1), \quad a_2=(2,\ 3),$$

соответственные объемы дохода равны

$$\gamma_1=3, \quad \gamma_2=4,$$

а имеющиеся ресурсы

$$\sigma_1=3, \quad \sigma_2=4.$$

Вследствие ограниченности производственных мощностей максимальная интенсивность использования технологических способов равна единице.

Найти конкурентное равновесие, задавая а) равновесные цены, б) значения интенсивностей технологических способов в состоянии равновесия, в) полный валовой доход хозяйства в состоянии равновесия. Ответ для в): 5,5.

21. Пусть в хозяйстве с тремя фирмами и тремя продуктами векторы технологических процессов (по одному

для каждой фирмы) таковы:

$$a_1 = (-5, 2, 1), \quad a_2 = (2, -3, 1), \quad a_3 = (0, 2, -3),$$

а объемы дохода —

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1.$$

Внешних ресурсов нет, и процессы могут использоваться не более чем с единичной интенсивностью.

Найдя соответствующие равновесные цены, показать, что интенсивности $\xi_1 = {}^7/_8$, $\xi_2 = 1$, $\xi_2 = {}^5/_8$ приводят к равновесию в модели. Обратить внимание на то, что только второй процесс используется с полной интенсивностью, хотя его объем дохода равен нулю, и объяснить это.

ГЛАВА IV

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

В предыдущей главе мы довольно подробно рассмотрели теорию линейного программирования. В гл. II нам уже пришлось предварительно заняться весьма обстоятельным исследованием чисто математической стороны вопроса — теорией линейных неравенств. При этом большинство наших теорем касалось существования решений задач линейного программирования, линейных уравнений или неравенств, а также свойств, которыми эти решения обладают. До сих пор мы не затрагивали вопроса о том, как находить эти решения в практических задачах. Теперь пора обратить внимание и на этот вопрос; поэтому настоящая глава является введением в вычислительные методы. Мы подчеркиваем слово «введение», так как объем работы, которая уже проделана и ведется в настоящее время в области вычислительных проблем, огромен и непрерывно возрастает. Эта работа, однако, относится не столько к теории линейных моделей, сколько к практическому ее применению, а потому лежит несколько в стороне от предмета нашего исследования.

Цель настоящей главы ограничена. Нам хотелось бы научить читателя решать задачи линейного программирования примерно с такой же степенью умения, с какой студент решает системы линейных уравнений. Мы совершенно не будем касаться задач, связанных с большим объемом вычислений или с быстродействующими вычислительными машинами, хотя, конечно, реальные задачи почти неизбежно выходят за рамки вычислений вручную, а часто даже и за пределы возможностей самых мощных машин. Тем не менее численные расчеты важны для нашей книги как средство пояснения теоретических результатов конкретными примерами. Кроме того, вычислительный процесс сам в большой степени опирается на теорию и дает полезные дополнительные ее приложения.

§ 1. Решение систем уравнений и обращение матриц

Рассмотрим сначала весьма элементарную и всем знакомую задачу решения системы линейных уравнений. Метод решения известен и состоит в простом исключении. Мы будем, однако, подходить к задаче с точки зрения, несколько отличающейся от обычной и более применимой к кругу вопросов, которые рассматриваются далее.

Задача. Даны: $m\times n$-матрица A и n-мерный вектор b. Найти такой m-мерный вектор x, что

$$xA=b.$$

Нетрудно видеть, что это—задача решения системы линейных уравнений, поставленная в матричной форме. Для дальнейшего будет более предпочтительной векторная формулировка.

Задача. Дано $m+1$ векторов в R^n: $a_1, \ldots, a_m$ и b. Выразить, если это возможно, b в виде линейной комбинации векторов a_i.

Опишем теперь метод решения этой задачи. Первоначально мы не знаем представления b в виде линейной комбинации векторов a_i. Однако мы можем выразить b как линейную комбинацию некоторого множества векторов из R^n, именно единичных ортов $v_1, \ldots, v_n$. Действительно, если $b=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то

$$b=\beta_1 v_1+\ldots+\beta_n v_n. \tag{1}$$

Задача состоит теперь в том, чтобы в представлении (1) постепенно заменить векторы v_j векторами a_i. Можно, например, попытаться заменить v_1 на a_1, получив таким образом представление b в виде линейной комбинации $a_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$b=\beta_1' a_1+\beta_2' v_2+\ldots+\beta_n' v_n. \tag{2}$$

Предполагая, что выражение (2) уже получено, попытаемся заменить некоторым вектором a_i другой единичный вектор v_j и будем поступать так до тех пор, пока все векторы v_j не будут заменены векторами a_i. Это и явится решением нашей задачи. Действенность такого метода основана на том, что переход от (1) к (2) весьма прост в смысле вычислений и легко поддается точному описанию. Чтобы это сделать, рассмотрим несколько более общий случай.

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — множество линейно независимых векторов, $b_1, \ldots, b_n$ — множество векторов, каждый из которых является линейной комбинацией a_i. *Таблицей* векторов b_j по отношению к *базису* a_i называется матрица T, выражающая каждый из векторов b_j в виде линейной комбинации a_i. Она записывается так:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_n \\
\hline
a_1 & \tau_{11} & \ldots & \tau_{1j} & \ldots & \tau_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_i & \tau_{i1} & \ldots & \tau_{ij} & \ldots & \tau_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_m & \tau_{m1} & \ldots & \tau_{mj} & \ldots & \tau_{mn} \\
\hline
\end{array} = T.$$

Здесь τ_{ij} есть коэффициент при a_i в выражении для b_j, т. е.

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i.$$

Основной вычислительный этап здесь состоит в том, что мы будем условно называть *операцией замещения*. Предположим, что мы решили заменить в приведенной таблице вектор a_r вектором b_s. Как будет выглядеть новая таблица? Она примет следующий вид

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & b_1 & \ldots & b_s & \ldots & b_n \\
\hline
a_1 & \tau'_{11} & \ldots & 0 & \ldots & \tau'_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_s & \tau'_{r1} & \ldots & 1 & \ldots & \tau'_{rn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_m & \tau'_{m1} & \ldots & 0 & \ldots & \tau'_{mn} \\
\hline
\end{array} = T'.$$

Мы хотим выразить элементы τ'_{ij} новой таблицы через элементы τ_{ij} таблицы T. Для этого нам понадобится следующий результат.

Теорема 4.1 (операция замещения). *Если в таблице T $\tau_{rs} \neq 0$, то векторы $a_1, \ldots, a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, \ldots, a_m$ образуют базис, и элементы таблицы T' имеют вид:*

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \quad \text{при } i \neq r, \tag{1}$$

$$\tau'_{rj} = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}}. \tag{2}$$

Формулы (1), (2), пожалуй, выглядят более сложными, чем они являются на самом деле. Впрочем, существует простой способ их запомнить. Некоторые читатели, должно быть, знакомы с понятием *элементарного преобразования строк* матрицы. Такие преобразования состоят просто в добавлении одной строки, умноженной на скаляр, к другой строке. Подобные операции используются при вычислении определителей, решении уравнений и т. д. Эти элементарные преобразования желательно выполнять таким образом, чтобы получать в матрице возможно большее число нулей. Но это как раз и есть то, что предписывают соотношения (1) и (2). Формулы (1) и (2) эквивалентны, таким образом, следующему правилу:

Правило замещения. *Чтобы получить таблицу T' из таблицы T, нужно*

(1′) *прибавить строку t_r, умноженную на некоторые скалярные множители, к каждой из остальных строк T так, чтобы получить нули в s-м столбце,*

после чего

(2′) *разделить t_r на τ_{rs}.*

Читатель может легко убедиться в том, что формулы (1) и (2) эквивалентны предписаниям (1′) и (2′).

Доказательство теоремы 4.1. Чтобы доказать линейную независимость векторов $a_1, \ldots, a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, \ldots, a_m$, предположим, что

$$\sum_{i \neq r} \lambda_i a_i + \mu_s b_s = 0. \tag{3}$$

Из таблицы T имеем

$$b_s = \sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a_i. \tag{4}$$

Комбинируя (3) и (4), получаем

$$\sum_{i \neq r} (\lambda_i + \mu_s \tau_{is}) a_i + \mu_s \tau_{rs} a_r = 0. \tag{5}$$

Так как векторы a_i независимы, все коэффициенты в (5) равны нулю. В частности, $\mu_s \tau_{rs} = 0$, а так как $\tau_{rs} \neq 0$, должно быть $\mu_s = 0$. Поэтому все λ_i — нули, и независимость доказана.

Теперь нужно показать, что

$$b_j \neq \sum_{i \neq r} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s, \tag{6}$$

где коэффициенты определяются из (1) и (2). Раскрывая правую часть (6), получаем

$$\sum_{i \neq r} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s = \sum_{i \neq r} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \right) a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} b_s =$$

$$= \sum_{i \neq r} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \right) a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} \left(\sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a_i \right) \quad [\text{из } (4)].$$

Объединяя коэффициенты при a_i, получаем окончательно

$$\sum_{i \neq r} \tau_{ij} a_i + \tau_{rj} a_r = b_j,$$

что доказывает (6).

Ненулевой элемент τ_{rs} таблицы T часто называют *ведущим элементом* данного замещения.

Применим процедуру замещения к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= 1, \\ \xi_1 \qquad + 2\xi_3 &= -2, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 2. \end{aligned}$$

В векторной форме эта система выглядит так:

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 = b,$$

где $a_1=(2,\ 1,\ 1)$; $a_2=(3,\ 0,\ 1)$; $a_3=(-1,\ 2,\ 1)$; $b=$ $=(1,\ -2,\ 2)$.

Чтобы получить первоначальную таблицу T_0, выразим каждый из четырех векторов через единичные векторы u_1, u_2, u_3. Таким образом,

T_0

	a_1	a_2	a_3	b
u_1	2	3	−1	1
u_2	1	0	2	−2
u_3	1	1	1	2

Теперь в операции замещения в качестве ведущего можно использовать любой из ненулевых элементов таблицы. Для удобства вычислений желательно выбирать ведущий элемент равным $+1$ или -1, потому что таким образом устраняется необходимость деления. В качестве ведущего мы приняли элемент τ_{21}, обведенный в таблице кружком. Заменяем u_2 на a_1; правило замещения приводит сразу к новой таблице:

T_1

	a_1	a_2	a_3	b
u_1	0	3	−5	5
a_1	1	0	2	−2
u_3	0	1	−1	4

Далее заменяем u_3 на a_2 (ведущий элемент τ_{23}, как и ранее, обведен кружком.) Мы получаем

T_2

	a_1	a_2	a_3	b
u_1	0	0	−2	−7
a_1	1	0	2	−2
a_2	0	1	−1	4

Последний шаг заключается в замене u_1 на a_3, что дает

T^3

	a_1	a_2	a_3	b
a_3	0	0	1	$^7/_2$
a_1	1	0	0	—9
a_2	0	1	0	$^{15}/_2$

и решение, таким образом, имеет вид $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-9, {}^{15}/_2, {}^{7}/_2)$, что можно легко проверить.

Читатель может заметить, что проделанные нами этапы вычислений в точности те же, что и при решении системы уравнений обычным методом исключения. Таблицу T_1 можно было бы получить исключением ξ_1 из первого и третьего уравнений, а T_2— путем последующего исключения ξ_2 из первого уравнения и так далее. Наша теперешняя точка зрения, связанная с понятием замещения, может показаться довольно искусственной. Однако она окажется весьма полезной в дальнейшем, когда мы будем обсуждать вопросы, связанные с неравенствами.

Остается выяснить еще один вопрос: что произойдет в схеме замещений, если система не имеет решений? Ответ несложен: мы достигнем такого положения, когда дальнейшая замена единичных векторов u_i векторами a_j станет невозможной, потому что все элементы τ_{ij} таблицы будут равны нулю для единичного вектора u_i и вектора a_j из данного множества векторов. Очевидно, что если система не имеет решений, то это обязательно должно произойти, ибо в случае полного замещения векторов u_i мы получили бы решение системы. Наоборот, если нам пришлось остановиться вследствие невозможности производить дальнейшие замены, то либо мы уже получили решение, либо его не существует вовсе (см. упр. 2).

Последним элементарным, но важным применением операции замещения является задача обращения матрицы. Вспомним (гл. II, упр. 9), что каждой невырожденной квадратной матрице A соответствует единственная матрица A^{-1}, для которой $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где I — единичная матрица (гл. II, упр. 8). Обозначим j-й столбец матрицы A^{-1} через $c^j = (\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{mj})$. Тогда по определению умножения матриц

$$Ac^j = u_j,$$

где, как обычно, u_j есть j-й орт.

В векторной форме это уравнение выглядит так

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kj} a^k = u_j.$$

Таким образом, матрица A^{-1} есть не что иное, как таблица ортов $u_1, \ldots, u_m$, выраженных через столбцы $a^1, \ldots, a^m$ исходной матрицы. Такая точка зрения на обратную матрицу делает возможной ее вычисление путем операций замещения. Вместо дальнейшего обсуждения этого метода применим его фактически к обращению матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица A является таблицей векторов a^1, a^2, a^3 по отношению к ортам. Перепишем матрицу в соответствующей форме и поместим в таблицу также сами орты. В результате получится следующая таблица

		a^1	a^2	a^3	u_1	u_2	u_3
	u_1	1	0	−1	1	0	0
T_0	u_2	1	2	0	0	1	0
	u_3	2	−1	3	0	0	1

Задача состоит теперь в том, чтобы заменить векторы u_i векторами a^j уже знакомым нам образом. Поместим в кружок ведущий элемент в таблице T_0. Далее мы просто приведем остальные таблицы, выделяя в каждом случае соответствующие ведущие элементы. Мы получим следующую последовательность таблиц:

		a^1	a^2	a^3	u_1	u_2	u_3
	a^3	−1	0	1	−1	0	0
T_1	u_2	1	2	0	0	1	0
	u_3	5	−1	0	3	0	1
	a^3	0	2	1	−1	1	0
T_2	a^1	1	2	0	0	1	0
	u_3	0	−11	0	3	−5	1
	a^3	0	0	1	$-5/11$	$1/11$	$2/11$
T_3	a^1	1	0	0	$6/11$	$1/11$	$2/11$
	a^2	0	1	0	$-3/11$	$5/11$	$-1/11$

На каждом шаге мы выражаем векторы u_i и a^j через векторы базиса. Произведя перестановку строк последней таблицы, мы получим таблицу для представления u_i через a^j:

	u_1	u_2	u_3
a^1	$^6/_{11}$	$^1/_{11}$	$^2/_{11}$
a^2	$-^3/_{11}$	$^5/_{11}$	$-^1/_{11}$
a^3	$-^5/_{11}$	$^1/_{11}$	$^2/_{11}$

Эта таблица и является искомой обратной матрицей, в чем легко убедиться путем непосредственного умножения.

§ 2. Симплекс-метод в линейном программировании. Обсуждение

Мы приступаем к описанию одного из наиболее знаменитых вычислительных методов в современной математике. Хотя этот метод первоначально предназначался для решения задач линейного программирования, но оказалось, что он имеет и более широкие применения. Например, это лучший из известных методов решения системы линейных неравенств и нахождения неотрицательных решений систем линейных уравнений. Симплекс-метод оказался настолько плодотворным, что во многих работах по линейному программированию речь идет главным образом об этом методе, и в процессе изучения литературы может создаться впечатление, что линейное программирование—это и есть симплекс-метод.

Симплекс-метод можно рассматривать с различных точек зрения. Его можно описать и обосновать чисто алгебраически; мы так и поступим. Его можно также обосновать с точки зрения экономики; мы коснемся вкратце и этого аспекта. Наконец, возможна геометрическая интерпретация симплекс-метода. Мы не будем касаться этого последнего подхода к вопросу, но надеемся, что алгебраическая и экономическая интерпретации метода достаточны для того, чтобы дать представление о его основной идее.

Рассмотрим каноническую задачу минимизации: найти такой вектор $y \geqq 0$, что

$$yb \text{ минимально} \tag{1}$$

при условии, что

$$Ay = c. \tag{2}$$

Чтобы вести обсуждение одновременно с алгебраической и экономической точек зрения, будем трактовать эту задачу как задачу о диете, в которой требования питательности должны соблюдаться точно. Можно представить себе, что врач определил точные количества каждого витамина и минерального вещества в рациональной диете, и диетологу нужно выбрать такую диету, которая имеет как раз заданные количества компонент питания.

При этом сразу же возникает вопрос: как найти диету, не обязательно самую дешевую, но удовлетворяющую поставленным требованиям; говоря более абстрактно, это означает нахождение допустимого вектора, т. е. неотрицательного решения (2). Решение этого вопроса представляет собой трудную задачу, которой мы займемся в § 5. Пока же мы предположим, что упомянутая задача решена, т. е. что нам уже удалось найти неотрицательное решение (2), и притом даже базисное неотрицательное решение. Пусть начальный допустимый вектор y_0 зависит от базиса $a^1, \ldots, a^m$. В наших диетологических терминах это означает, что в первоначальной диете используются только первые m видов пищи. Образуем теперь таблицу T_0 столбцов A и вектора c по отношению к этому базису:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & a^1\ a^2 \ldots & a^m & \ldots a^s & \ldots & a^n & c \\
\hline
 & a^1 & 1\ 0 \ldots & 0 & \ldots \tau_{1s} & \ldots & \tau_{1n} & \eta_1 \\
 & a^2 & 0\ 1 \ldots & 0 & \ldots \tau_{2s} & \ldots & \tau_{2n} & \eta_2 \\
T_0 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & a^m & 0\ 0 \ldots & 1 & \ldots \tau_{ms} & \ldots & \tau_{mn} & \eta_m \\
\hline
\end{array}
$$

Процедура симплекс-метода состоит в получении с помощью операций замещения последовательности допустимых векторов до тех пор, пока не будет найден оптимальный вектор. Можно было бы попытаться получить с помощью замещений *все* возможные базисы, и, как известно из теоремы 3.3, в конце концов, на этом пути мы придем к оптимальному вектору. Однако такая процедура является безнадежно трудоемкой и неэффективной. Симплекс-метод дает критерий для определения последовательности замещений, при которой оптимальный вектор достигается наиболее эффективным образом. Далее мы опишем и мотивируем критерий в терминах задачи о диете. Это несколько нестрогое описание будет уточнено затем в следующем параграфе.

«Диетическая» интерпретация таблицы T_0 такова: имеется допустимая диета, где используются первые m видов пищи в количествах $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Предположив, что эта диета не оптимальна, попробуем заменить в ней какой-либо вид пищи другим, не имевшимся ранее, чтобы уменьшить общую стоимость питания. Задача состоит в том, чтобы решить: (а) какой новый вид пищи следует ввести в диету и (б) какой из старых видов пищи следует из диеты исключить. Рассмотрим вид пищи F_s, который, как показывает таблица, в первоначальной диете отсутствует, и попробуем выяснить, следует ли его включать в новую диету. Для конкретности будем считать, что F_s— морковь. В таблице T_0 имеется выражение для моркови в виде линейной комбинации различных продуктов, содержащихся в первоначальной диете, т. е. алгебраическое соотношение

$$a^s = \sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a^i. \tag{3}$$

Смысл этого выражения в нашем примере ясен. Оно означает, что весовая единица моркови по питательности эквивалентна τ_{1s} единицам пищи F_1 плюс τ_{2s} единиц пищи F_2 и так далее. Мы можем назвать вектор $(\tau_{1s}, \ldots, \tau_{ms})$ *синтетической морковью*, потому что такая комбинация по питательности равноценна моркови (хотя, возможно, по вкусу и совершенно не похожа на нее). Зададим теперь вопрос, что дороже: настоящая или синтетическая морковь? Стоимость настоящей моркови равна β_s. Стоимость же синтетической моркови равна ζ_s, где ζ_s задается равенством

$$\zeta_s = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \tau_{is}.$$

Мы будем руководствоваться следующим правилом: если настоящая морковь дешевле синтетической (т. е., $\beta_s < \zeta_s$), то морковь в новую диету следует включить. В противном случае о моркови забудем и перейдем к шпинату.

Этот прием является весьма чувствительным. Действительно, предположим, что β_s меньше, чем ζ_s. Тогда, если мы введем в диету весовую единицу настоящей моркови, то можно будет сократить на единицу количество синтетической моркови, уменьшив таким образом расходы. Условимся вводить новый вид пищи F_s всякий раз, когда β_s будет меньше ζ_s. Если окажется, что пищи, для которой выполняется это неравенство, нет, то, как будет показано в следующем параграфе, мы уже имеем оптимальную диету.

В алгебраической форме первая часть нашего критерия замещения выглядит так:

(a) *Пусть* ζ_j — *скалярное произведение* j-*го столбца на вектор стоимостей* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. *Если для некоторого* j, $\beta_j < \zeta_j$, *то введем* a^j *в новый базис.*

Предположив, что мы решили ввести в диету морковь, нужно определить, какой вид пищи она заменит. Из уравнения (3) мы видим, что если ввести в диету η_s весовых единиц моркови, то нужно сократить количество пищи F_i на $\eta_s \tau_{is}$ единиц ($i = 1, \ldots, m$). Так как в первоначальной диете содержится η_i единиц F_i, то останется η_i' единиц, где

$$\eta_i' = \eta_i - \eta_s \tau_{is}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Конечно, нельзя допустить, чтобы какие-либо из чисел η_i' сделались отрицательными, так как бессмысленно говорить об отрицательных количествах пищи в диете. Наше правило состоит, следовательно, в том, чтобы сделать η_s как можно бóльшим, но при этом ни одно из чисел η_i' не должно стать отрицательным. Если это осуществлено, то ясно, что по крайней мере одно из новых чисел η_i' будет нулем (в противном случае было бы возможным дальнейшее увеличение η_s). Если мы сможем установить, какое именно из чисел η_i' обращается в нуль, мы тем самым найдем и пищу F_i, которую следует заменить. Но и алгебраически это также просто. Мы утверждаем, что $\eta_i' = 0$ для такого индекса i, при котором τ_{is} положительно, а отношение η_i / τ_{is} минимально. Именно,

$$\eta_i' = \eta_i - \eta_s \tau_{is} \geqq 0 \tag{5}$$

тогда и только тогда, когда

$$\eta_s \leqq \frac{\eta_i}{\tau_{is}} \qquad \text{при} \quad \tau_{is} > 0, \tag{6}$$

так что η_s может равняться наименьшей из правых частей неравенств (6), но не может превосходить эту величину.

Теперь можно сформулировать вторую часть критерия замещения.

(б) *Решив ввести в новый базис вектор a^s, подсчитаем отношения η_i/τ_{is} для $\tau_{is} > 0$ и заменим тот вектор a^r старого базиса, для которого это отношение минимально.*

В этом параграфе мы сделали попытку дать экономическую мотивировку правил замещения (а) и (б). Перейдем теперь к доказательству того, что эти правила действительно приводят к решению задачи.

§ 3. Теория симплекс-метода

Рассмотрим снова каноническую задачу минимизации: найти такое $y \geqq 0$, что

$$yb \text{ минимально} \tag{1}$$

при условии, что

$$Ay = c. \tag{2}$$

Первый результат, который мы докажем, явится обоснованием части (а) критерия замещения, описанного в предыдущем параграфе. Предположим, что имеется базис $a^1, \ldots, a^p$, соответствующий ему допустимый вектор $y = (\eta_j)$ и таблица T. Справедлива

Теорема 4.2 (критерий оптимальности). *Пусть $\zeta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}$. Тогда допустимый вектор y оптимален, если*

$$\zeta_j \leqq \beta_j \tag{1}$$

при всех $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Предположим, что (1) выполняется при всех j. Так как векторы $a^1, \ldots, a^p$ независимы, существует такой m-вектор x, что $xa^j = \beta_j$ при $j = 1, \ldots, p$ (следствие теоремы 2.3, стр. 65). Но при

$j > p$ мы имеем

$$xa^j = \sum_{i=1}^{p} \tau_{ij} (xa^i) = \sum_{i=1}^{p} \tau_{ij}\beta_i = \zeta_j \leqq \beta_j.$$

Таким образом, вектор x удовлетворяет как ограничению

$$xA \leqq b,$$

так и ограничению

$$xa^j = \beta_j,$$

если только $\eta_j > 0$. Следовательно, по теореме равновесия 3.2 (стр. 118) y является оптимальным вектором (а вектор x оптимальным для двойственной задачи).

Доказанная теорема дает необходимое обоснование правилу (а) замещения; это мы и обещали в предыдущем параграфе. Сделаем еще одно замечание в связи с правилом (а) критерия замещения. Мы знаем, что это правило требует вычисления одновременно с каждой таблицей величин

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}. \tag{2}$$

Однако, оказывается, что при переходе от таблицы T к таблице T' можно вычислять новые величины ζ'_j одновременно с выполнением операции замещения в таблице T.

Определим для этого $(n+1)$-вектор z с помощью правила

$$z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_0),$$

где ζ_j при $j \geqq 0$ дается формулой (2), а

$$\zeta_0 = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \eta_i. \tag{3}$$

Заметим, что ζ_0 равно значению линейной функции yb при допустимом векторе $y = (\eta_j)$.

Расширим таблицу T добавлением к ней в качестве $(n+1)$-й строки вектора

$$z - b = (\zeta_1 - \beta_1, \ldots, \zeta_n - \beta_n, \zeta_0).$$

Получившаяся таблица имеет вид

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c|}
 & a^1 & \cdots & a^p & \cdots & a^s & \cdots & a^n & c \\
\hline
 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \tau_{1s} & \cdots & \tau_{1n} & \eta_1 \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & 0 & \cdots & 0 & \cdot & \tau_{rs} & \cdots & \tau_{rn} & \eta_r \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \tau_{ps} & \cdots & \tau_{pn} & \eta_p \\
\hline
b & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \zeta_s - \beta_s & \cdots & \zeta_n - \beta_n & \zeta_0 \\
\hline
\end{array}
$$

Предположим, что мы решили заменить вектор базиса a^r на a^s (это отмечено в таблице выделением элемента τ_{rs}), переходя таким образом к новой таблице T'. Обозначим, как и ранее, i-ю строку T через t_i.

Лемма 4.1. *Дополнительная строка $z' - b$ таблицы T' находится по правилу*

$$z' - b = z - b - \frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} t_r.$$

Лемма показывает, что строка $z' - b$ получается так же, как и остальные строки T', а именно мы вычитаем из $z - b$ такое кратное строки t_r, чтобы в s-м столбце появился 0.

Доказательство. По определению z' и t'_i

$$z' = \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i t'_i + \beta_s t'_r = \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i \left(t_i - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} t_r \right) + \frac{\beta_s}{\tau_{rs}} t_r =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \beta_i t_i - \beta_r t_r - \left(\frac{1}{\tau_{rs}} \sum_{i \neq r}^{p} \beta_i \tau_{is} \right) t_r + \frac{\beta_s}{\tau_{rs}} t_r = z - \left(\frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} \right) t_r,$$

и окончательный результат получается путем вычитания b из обеих частей равенства.

Вернемся теперь к изучению симплекс-метода и рассмотрим правило (б) критерия замещения, которое гласит:

(б) *Решив ввести a^s в новый базис, вычислим все отношения η_i/τ_{is} для $\tau_{is} > 0$ и заменим тот вектор a^r старого базиса, для которого это отношение минимально.*

Если ни одно из чисел τ_{is} не положительно, то в этом месте может возникнуть затруднение. В этом случае, однако, можно воспользоваться следующим результатом.

Лемма 4.2. *Если при попытке применить* (б) *окажется, что ни одно из чисел τ_{is} не является положительным* ($i = 1, \ldots, p$), *то первоначальная задача не имеет минимума.*

Доказательство. Так как a^s вводится в новый базис, согласно правилу (а) должно быть $\zeta_s > \beta_s$. Далее по определению стоящих в таблице величин мы имеем

$$c = \sum_{i=1}^{p} \eta_i a^i \tag{1}$$

и

$$0 = a^s - \sum_{i=1}^{p} \tau_{is} a^i. \tag{2}$$

Умножая (2) на положительное число λ и прибавляя результат к (1), получаем

$$c = \lambda a^s + \sum_{i=1}^{p} (\eta_i - \lambda \tau_{is}) a^i.$$

Так как, согласно предположению, все числа τ_{is} неположительны, мы получаем новое допустимое решение исходной задачи. Соответствующее выражение линейной формы, которую мы минимизируем, таково:

$$\lambda \beta_s + \sum_{i=1}^{p} (\eta_i - \lambda \tau_{is}) \beta_i = \sum_{i=1}^{p} \eta_i \beta_i + \lambda (\beta_s - \zeta_s).$$

В последнем члене справа $\beta_s - \zeta_s$ отрицательно, а λ можно сделать сколь угодно большим; поэтому минимизируемая в задаче величина минимума не имеет.

Чтобы завершить наше рассуждение, остается показать, что повторные замещения с использованием правил (а) и (б) в конце концов дадут таблицу, удовлетворяющую критерию оптимальности. Доказательство окажется значительно более простым, если мы сделаем дополнительное предположение относительно *невырожденности* матрицы A. Считая, что ранг матрицы A равен p, потребуем, чтобы выполнялось

(У) Условие невырожденности. *Невозможно выразить вектор c в виде линейной комбинации меньшего, чем p, числа столбов матрицы A.*

Это предположение не является слишком стеснительным. В самом деле, если условие (У) не выполняется, то можно слегка изменить вектор c и получить вектор c', для которого условие (У) уже справедливо. В этом случае необходимо видоизменить правило (б) критерия замещения, чтобы иметь гарантию конечности процесса. Этот случай вырожденности будет рассмотрен в § 7.

Основной результат, необходимый для доказательства сходимости процесса симплекс-метода, следующий:

Теорема 4.3 (процесс улучшения). *Если при выполнении условия* (а) *произвести замещение в соответствии с правилами* (а) *и* (б), *то вновь полученный базис будет снова допустимым, а соответствующее значение ζ_0' линейной формы, подлежащей минимизации, будет меньше, чем прежнее значение ζ_0.*

Доказательство. Чтобы установить допустимость нового базиса, мы должны показать, что элементы η_i' таблицы T' неотрицательны. Предположим, что вектор a^s заменяется на a^r. Тогда мы имеем

$$\eta_i' = \eta_i - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}}\,\eta_r \qquad \text{при } i \neq r. \tag{1}$$

Если $\tau_{is} \leqq 0$, то ясно, что $\eta_i' \geqq 0$ (так как $\tau_{rs} > 0$). Если $\tau_{is} > 0$, то из правила (б) следует, что

$$\frac{\eta_i}{\tau_{is}} \geqq \frac{\eta_r}{\tau_{rs}},$$

т. е. η_i' снова неотрицательно.

Далее, из леммы 4.1 известно, что

$$\zeta_0' = \zeta_0 - \frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}}\,\eta_r.$$

Из условия (У) вытекает положительность η_r (в противном случае имелось бы допустимое решение, зависящее менее, чем от p столбцов матрицы A). Величина $\zeta_s - \beta_s$ также положительна (по правилу (а)). Следовательно, $\zeta_0' < \zeta_0$, что и завершает доказательство.

Полученный результат говорит о том, что после конечного числа шагов мы достигнем желаемого минимума. В самом деле, величина ζ_0 при каждом замещении убывает. Следовательно, мы не можем получить один и тот же базис более одного раза и должны поэтому, в конце концов, достичь оптимального базиса.

§ 4. Несколько численных примеров

Уже давно пора продемонстрировать применение симплекс-метода на ряде конкретных примеров. Начнем с канонической задачи минимизации.

Пример 1. Найти вектор $y = (\eta_1, \ldots, \eta_5) \geqq \mathbf{0}$, минимизирующий

$$\eta_1 + 6\eta_2 - 7\eta_3 + \eta_4 + 5\eta_5 \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 5\eta_1 - 4\eta_2 + 13\eta_3 - 2\eta_4 + \eta_5 &= 20, \\ \eta_1 - \eta_2 + 5\eta_3 - \eta_4 + \eta_5 &= 8. \end{aligned} \tag{2}$$

Этот пример в точности совпадает с примером 1 предыдущей главы. Матрица A в данном случае такова:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первым этапом является нахождение допустимого решения (2). Для решения системы применим операцию замещения. Как и в § 1, первоначальная таблица по отношению к ортам имеет вид

T_0		a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	c
	u_1	5	−4	13	−2	1	20
	u_2	1	−1	5	−1	1	8

а подходящий элемент, который удобно принять за ведущий, обведен кружком. Соответствующее замещение дает нам

T_1		a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	c
	u_1	4	-3	8	-1	0	12
	a^5	1	-1	5	-1	1	8

Если мы далее используем в качестве ведущего выделенный элемент таблицы T_1, то получим неотрицательное решение системы, а именно $\eta_1 = 3$, $\eta_5 = 5$:

T_2							
	a^1	1	$-3/4$	2	$-1/4$	0	3
	a^5	0	$-1/4$	3	$-3/4$	1	5

Теперь можно приступать к применению симплекс-метода. Сначала нужно получить расширенную таблицу, подсчитав строку $z - b$, где $z = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2$, а t_1, t_2 — строки таблицы T_2. В результате получим

$$z = (1, \ -2, \ 17, \ -4, \ 5, \ 28)$$

и

$$z - b = (0, \ -8, \ 24, \ -5, \ 0, \ 28).$$

Расширенная таблица имеет вид

T_2'							
	a^1	1	$-3/4$	2	$-1/4$	0	3
	a^5	0	$-1/4$	3	$-3/4$	1	5
	$z - b$	0	-8	24	-5	0	28

Единственным положительным элементом в последней строке (за исключением элемента ζ_0) является 24 в третьем столбце. Согласно правилу замещения (а), мы должны ввести в новый базис вектор a^3. Чтобы определить, какой базисный вектор следует заменять, подсчитаем отношения η_i/τ_{ij} при $j = 3$:

$$\frac{\eta_1}{\tau_{13}} = \frac{3}{2}; \qquad \frac{\eta_5}{\tau_{53}} = \frac{5}{3}.$$

Так как $^3/_2 < {^5/_3}$, по правилу (б) мы должны заменить вектор a^1. Выполнение этой операции замещения в T_2' дает

		a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	c
T_3'	a^3	$1/2$	$-3/8$	1	$-1/8$	0	$3/2$
	a^5	$-3/2$	$7/8$	0	$-3/8$	1	$1/2$
	$z-b$	-12	1	0	-2	0	-8

Единственным положительным элементом последней строки является 1 в столбце 2, поэтому вектор a^2 должен войти в новый базис. Во втором столбце положительна лишь координата τ_{21} второй строки. Следовательно, замене подлежит вектор a^5. Соответствующий ведущий элемент, равный $^7/_8$, обведен кружком.

Произведя замещение, получим

T_4'	a^3	$-^1/_7$	0	1	$-^2/_7$	$^3/_7$	$^{12}/_7$
	a^2	$-^{12}/_7$	1	0	$-^3/_7$	$^8/_7$	$^4/_7$
	$z-b$	$-^{72}/_7$	0	0	$-^{11}/_7$	$-^8/_7$	$-^{60}/_7$

Теперь мы с удовлетворением замечаем, что в последней строке уже больше не имеется положительных элементов. Поэтому, согласно критерию оптимальности, решение таково:

$$\bar{y} = (0, {^4/_7}, {^{12}/_7}, 0, 0),$$

$$\bar{y}b = -{^{60}/_7}.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим следующую стандартную задачу максимизации. Найти неотрицательные числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, максимизирующие сумму

$$2\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \tag{1}$$

при условии, что

$$\begin{aligned} \xi_1 + 3\xi_2 \qquad\quad + \xi_4 &\leqq 4, \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad\qquad &\leqq 3, \\ \xi_2 + 4\xi_3 + \xi_4 &\leqq 3, \end{aligned} \tag{2}$$

Векторы в данном случае имеют вид:

$$a_1 = (1,\ 2,\ 0);\ a_2 = (3,\ 1,\ 1);\ a_3 = (0,\ 0{,}4);\ a_4 = (1,\ 0,\ 1);$$
$$b = (4,\ 3,\ 3),$$

так что (2) можно переписать короче:

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4 \leqq b. \qquad (3)$$

Чтобы свести дело к задаче, в которой фигурируют равенства вместо неравенств, присоединим к нашим векторам v_1, v_2, v_3 орты и напишем

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = b, \qquad (4)$$

где все числа ξ_i и λ_j неотрицательны. Теперь можно без труда найти начальное допустимое решение (4), так как в качестве исходного базиса берутся единичные векторы и получается таблица

		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
	v_1	1	3	0	1	4	1	0	0
T_0	v_2	2	1	0	0	3	0	1	0
	v_3	0	1	4	1	3	0	0	1
	$z-c$	−2	−4	−1	−1	0	0	0	0

Заметим, что последняя строчка представляет собой вектор $-c$, потому что числа γ_i, соответствующие ортам v_1, v_2, v_3, а следовательно и ζ_i, суть нули. Так как мы решаем задачу максимизации, а не минимизации, мы должны теперь искать не положительные, а отрицательные элементы последней строки таблицы. В данном случае все коэффициенты отрицательны, и в новый базис можно ввести любой из векторов a_i. Чтобы избежать дробей, введем a_4. Так как $^3/_1 < {^4/_1}$, замене подлежит v_3. Новая таблица имеет вид

		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
	v_1	1	2	−4	0	1	1	0	−1
T_1	v_2	2	1	0	0	3	0	1	0
	a_4	0	1	4	1	3	0	0	1
	$z-c$	−2	−3	3	0	3	0	0	1

Теперь можно ввести как a_1, так и a_2. Вновь пытаясь избежать дробей, выбираем вектор a_1, который должен заменить v_1:

		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
T_2	a_1	1	2	−4	0	1	1	0	−1
	v_2	0	−3	8	0	1	−2	1	2
	a_4	0	1	4	1	3	0	0	1
	$z-c$	0	1	−5	0	5	2	1	−1

На следующем этапе можно сделать базисным либо вектор a_3, либо вектор v_3. Мы выбираем вектор a_3 (часто применяется такое правило: вводят вектор a_j, для которого величина ζ_j отрицательна и наименьшая). Заменяем v_2, получая при этом

		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
T_3	a_1	1	$1/2$	0	0	$3/2$	0	$1/2$	0
	a_3	0	$-3/8$	1	0	$1/8$	$-1/4$	$1/8$	$1/4$
	a_4	0	$5/2$	0	1	$5/2$	1	$-1/2$	0
	$z-c$	0	$-7/8$	0	0	$4\,5/8$	$3/4$	$5/8$	$1/4$

Здесь уже выбора нет, и сразу указан ведущий элемент.

		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
T_4	a_1	1	0	0	$-1/5$	1	$-1/5$	$3/5$	0
	a_3	0	0	1	$3/20$	$1/2$	$-1/10$	$1/29$	$1/4$
	a_2	0	1	0	$2/5$	1	$2/5$	$-1/5$	0
	$z-c$	0	0	0	$7/20$	$13/2$	$11/10$	$9/20$	$1/4$

Так как в последней строке отрицательных элементов нет, из критерия оптимальности вытекает, что решение задачи следующее:

$$\bar{x}=(1,\ 1,\ 1/2,\ 0);\quad \bar{x}c=13/2.$$

Этот пример иллюстрирует другую важную черту симплекс-метода, состоящую в том, что таблица T_4 содержит не только решение нашей задачи, но также и решение задачи, двойственной ей! Это решение дают элементы последней строки в столбцах, соответствующих v_1, v_2, v_3. В этом легко убедиться. В самом деле, положим $y = (^{11}/_{10}, {}^{9}/_{20}, {}^{1}/_{4})$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{11}{10} + 2\cdot\frac{9}{20} \qquad\qquad &= 2 \geqq 2, \\ 3\cdot\frac{11}{10} + \frac{9}{20} + \frac{1}{4} &= 4 \geqq 4, \\ 4\cdot\frac{1}{4} &= 1 \geqq 1, \\ \frac{11}{10} \qquad + \frac{1}{4} &= \frac{27}{20} \geqq 1. \end{aligned}$$

т. е. вектор y является допустимым для двойственной задачи. Кроме того,

$$yb = {}^{11}/_{10}\cdot 4 + {}^{9}/_{20}\cdot 3 + {}^{1}/_{4}\cdot 3 = {}^{130}/_{20} = {}^{13}/_{2},$$

так что вектор y и оптимален.

Отмеченное свойство симплекс-метода очень полезно для численных расчетов, поскольку дает удобный независимый метод контроля.

В том, что решение двойственной задачи получается столь удобным путем всегда, нужно еще убедиться. Наиболее просто это можно осуществить, вернувшись к канонической задаче минимизации при ограничениях

$$Ay = c. \tag{1}$$

Будем считать, что ранг матрицы A равен m (как будет показано в следующем параграфе, это условие можно отбросить). Предположим теперь, что имеется оптимальное решение, зависящее, скажем, от векторов $a^1, \ldots, a^m$. Окончательная таблица должна при этом выглядеть так

	$a^1 \ldots a^m \ldots a^n$	c	$u_1 \ldots u_m$
a^1	$1 \ldots 0 \ldots \tau_{1n}$	η_1	$\lambda_{11} \ldots \lambda_{1m}$
.	. . .	.	. .
.	. . .	.	. .
.	. . .	.	. .
a^m	$0 \ldots 1 \ldots \tau_{mn}$	η_m	$\lambda_{m1} \ldots \lambda_{mm}$
$z-b$	$0 \ldots 0 \ldots \zeta_n - \beta_n$	ζ_0	$\xi_1 \ldots \xi_m$

где единичные векторы вынесены в последние m столбцов таблицы. Обозначая через A_m матрицу, состоящую из первых m столбцов A, мы замечаем, что квадратная матрица $L=(\lambda_{ij})$ является обратной к A_m (см. § 1). Числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$ в таблице определяются следующим образом

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_{ij}. \tag{2}$$

Мы утверждаем теперь, что вектор $x=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ дает решение двойственной задачи. Чтобы убедиться в этом, обозначим через b_m вектор, состоящий из m первых компонент b:

$$b_m=(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Теперь, из таблицы видно, что $x=b_mL$. Но так как $L=A_m^{-1}$, это означает, что $xA_m=b_m$. Иначе говоря,

$$xa^j=\beta_j \quad \text{при } j \leqq m. \tag{3}$$

При $j>m$ мы имеем

$$a^j=\sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a^i.$$

Отсюда вытекает, что

$$xa^j=\sum_{i=1}^{m} \tau_{ij}(xa^i)=\sum_{i=1}^{m} \tau_{ij}\beta_i=\zeta_j, \tag{4}$$

причем последнее равенство является определением ζ_j. Так как мы считаем, что $a_1, \ldots, a_m$ — оптимальный базис, критерий оптимальности выполняется. Поэтому, $\zeta_j-\beta_j \leqq 0$ при всех j, откуда, согласно (4), следует, что

$$xa^j \leqq \beta_j \quad \text{при } j>m. \tag{5}$$

Как видно из (3) и (5), вектор x является допустимым для двойственной задачи. Поскольку равенство (3) выполняется при всех j, для которых a^j принадлежит базису, по теореме равновесия 3.2, вектор x оптимален.

Доказательство того, что этот же метод дает решение как стандартной, так и канонической задачи, получается путем сведения стандартной задачи к канонической.

Предположим, что задача состоит в нахождении неотрицательного y,

$$\text{минимизирующего } yb \tag{1}$$

при условии, что

$$Ay \geqq c. \tag{2}$$

В эквивалентной канонической задаче (2) заменяется на

$$Ay - z = c, \quad z \geqq 0. \tag{2'}$$

Симплекс-метод, как мы только что видели, дает вектор x, являющийся решением двойственной задачи и удовлетворяющий поэтому двойственным ограничениям

$$xA \leqq b, \quad -xu_i \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2')*}$$

Однако последние неравенства показывают, что вектор x неотрицателен и потому является решением задачи, двойственной к первоначальной стандартной задаче.

§ 5. Неотрицательные решения системы линейных уравнений

При описании симплекс-метода мы считали, что в нашем распоряжении уже имеется допустимый базисный вектор, т. е. базисное неотрицательное решение системы

$$xA = b. \tag{1}$$

Теперь мы должны показать, как такой вектор может быть найден. Один из возможных путей состоит в том, чтобы попытаться найти все базисные решения (1) в надежде обнаружить то из них, которое неотрицательно. Если, однако, m значительно больше, чем n, т. е. если имеется гораздо больше неизвестных, чем уравнений, то такое перечисление становится слишком трудоемким. Эффективным методом решения задачи является превращение ее в каноническую задачу минимизации. Заметим, что мы всегда можем сделать вектор b неотрицательным, соответствующим образом изменив знаки в обеих частях уравнений. Рассмотрим теперь задачу нахождения таких неотрицательных векторов x и y, что

$$yv \text{ минимально (где } v \text{ — единичный вектор из } R^n) \qquad (2)$$

при условии

$$xA + y = b. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что (1) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда минимальное значение (2) равно нулю. Действительно, в данном случае y будет нулевым вектором, а x — решением (1). Рассмотрим сразу же действие этого простого приема на конкретном примере.

Пример 3. Найти такой вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \geqq 0$, что

$$\begin{aligned} \xi_1 \qquad - \xi_3 + 4\xi_4 &= 3, \\ 2\xi_1 - \xi_2 \qquad\qquad &= 3, \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 \qquad - \xi_4 &= 1. \end{aligned}$$

Соответствующая задача линейного программирования состоит в нахождении неотрицательного вектора x и вектора $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, для которого

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \text{ минимально}$$

причем,

$$\begin{aligned} \xi_1 \qquad - \xi_3 + 4\xi_4 + \eta_1 \qquad\qquad &= 3, \\ 2\xi_1 - \xi_2 \qquad\qquad + \eta_2 \qquad &= 3, \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 \qquad - \xi_4 \qquad\qquad + \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

В исходной таблице в качестве базиса выбираем орты v_1, v_2, v_3. Далее приводится последовательность таблиц

T_0		a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
	v_1	1	0	−1	4	3	1	0	0
	v_2	2	−1	0	0	3	0	1	0
	v_3	3	−2	0	−1	1	0	0	1
	$z - c$	6	−3	−1	3	7	0	0	0

Заметим, что c в нашем случае является 7-мерным вектором, равным (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1).

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	v_1	v_2	v_3
v_1	0	$2/3$	-1	$13/3$	$8/3$	1	0	$-1/3$
v_2	0	$1/3$	0	$2/3$	$7/3$	0	1	$-2/3$
a_1	1	$-2/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	0	$1/3$
$z-c$	0	1	-1	5	5	0	0	-2
a_2	0	1	$-3/2$	$13/2$	4	$3/2$	0	$-1/2$
v_2	0	0	$1/2$	$-3/2$	1	$-1/2$	1	$-1/2$
a_1	1	0	-1	4	3	1	0	0
$z-c$	0	0	$1/2$	$-3/2$	1	$-3/2$	0	$-3/2$
a_2					7			
a_3					2			
a_1					5			
$z-c$	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

В последней таблице мы ограничились нахождением только последней строки и столбца, соответствующего b, потому что критерий оптимальности здесь выполняется. Легко видеть, что вектор $x = (5, 7, 2, 0)$ является искомым неотрицательным базисным решением.

§ 6. Решение систем линейных неравенств

В качестве последнего примера приложения симплекс-метода рассмотрим задачу решения системы линейных неравенств

$$xA \leqq b. \tag{1}$$

Мы решим эту задачу путем сведе́ния ее к задаче предыдущего параграфа, использовав теорему 2.7 (стр. 76) о решении систем линейных неравенств. Эта теорема говорит о том, что (1) не имеет решения тогда и только тогда, когда система

$$Ay = 0; \quad by = -1 \tag{2}$$

имеет неотрицательное решение. Ответ на последний вопрос можно получить, решив каноническую задачу:

$$\text{минимизировать } \eta \tag{3}$$

при условии, что

$$\begin{aligned} Ay &= 0, \\ by - \eta &= -1, \end{aligned} \tag{4}$$

где, как обычно, y и η должны быть неотрицательны. Если минимальное значение η окажется нулем, то система неравенств не имеет решений. В противном случае (когда минимальное значение η положительно) решение двойственной задачи дает нам вектор x и число λ, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} xA + \lambda b &\leqq 0, \\ -\lambda &\leqq 1, \end{aligned}$$

причем $-\lambda$ положительно. Следовательно, $x/(-\lambda)$ является решением системы неравенств (1). Таким образом, мы получаем решение неравенства (1) из решения двойственной задачи (3), (4).

Пример 4. Найти решение системы

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + 2\xi_2 &\leqq -1, \\ 2\xi_1 - \xi_2 &\leqq 2, \\ -4\xi_2 &\leqq 3, \\ -15\xi_1 - 12\xi_2 &\leqq -2, \\ 12\xi_1 + 20\xi_2 &\leqq -1. \end{aligned}$$

В соответствии с изложенным выше рассмотрим каноническую задачу нахождения неотрицательных чисел η_0, $\eta_1, \ldots, \eta_5$, которые

$$\text{минимизируют } \eta_0$$

при условиях

$$\begin{aligned} -2\eta_1 + 2\eta_2 \phantom{{}-4\eta_3} - 15\eta_4 + 12\eta_5 &= 0, \\ 2\eta_1 - \eta_2 - 4\eta_3 - 12\eta_4 + 20\eta_5 &= 0, \\ -\eta_0 - \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 - 2\eta_4 - \eta_5 &= -1. \end{aligned} \tag{5}$$

Выбирая в качестве начального базиса систему ортов, получаем таблицу

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	c	u_1	u_2	u_3
	u_1	0	−2	2	0	−15	12	0	1	0	0
T_0	u_2	0	2	−1	−4	−12	20	0	0	1	0
	u_3	−1	−1	2	3	−2	−1	−1	0	0	1

Заметим, что $a_0 = -u_3$. Поэтому, подставляя a_0 вместо u_3, достаточно просто изменить знаки в последней строке таблицы. Далее, заменяем u_2 на a_2, а затем u_1 на a_1, что, как обычно, отмечается кружками в таблицах.

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	c	u_1	u_2	u_3
T_1	u_1	0	2	0	−8	−39	52	0	1	2	0
	a_2	0	−2	1	4	12	−20	0	0	−1	0
	a_0	1	−3	0	5	26	−39	1	0	−2	−1

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	c	u_1	u_2	u_3
T_2	a_1	0	1	0	−4	$-{}^{39}/_{2}$	26	0	$^{1}/_{2}$	1	0
	a_2	0	0	1	−4	− 27	32	0	1	1	0
	a_0	1	0	0	−7	$-{}^{65}/_{2}$	39	1	$^{3}/_{2}$	1	−1
	$z-b$	0	0	0	−7	$-{}^{65}/_{2}$	39	1	$^{3}/_{2}$	1	−1

В таблице T_2 мы добавили строку $z - b$, чтобы начать симплекс-процедуру. Заметим, что $b = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, а вектор z — такой же, как и строка a_0 таблицы. Единственным положительным элементом последней строки T_2 является число 39 в столбце 5; поэтому в новый базис следует ввести вектор a_5. Далее, по правилу замещения (б), найдем минимальное из отношений η_i/τ_{ij}. Так как отношения $^0/_{26}$ и $^0/_{32}$ равны нулю, то можно заменять как a_1, так и a_2. Мы заменили a_1, потому что такой выбор, как это видно из приведенной ниже таблицы, делает все элементы последней строчки неположительными, а значит его результат удовлетворяет критерию оптимальности. В итоге мы имеем

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	c	u_1	u_2	u_3
a_5							0			
a_2							0			
a_0							1			
$z-b$	0	$-{}^{3}/_{2}$	0	−1	$-{}^{13}/_{4}$	0	1	$^{3}/_{4}$	$-{}^{1}/_{2}$	−1

где снова подсчитаны лишь необходимые окончательные величины.

О чем говорит последняя таблица? Вспомним, что мы искали решение системы (5), минимизирующее η_0. Мы нашли при этом, что минимум η_0 равен 1. Из теории, развитой в первой части параграфа, следует, что исходная система неравенств имеет решение, совпадающее с решением двойственной задачи. Решение это таково:

$$x = (^3/_4, \ -^1/_2).$$

Для данного решения выполняется строгое равенство во втором и пятом неравенствах, что соответствует наличию a_2 и a_5 в окончательном базисе линейной программы.

§ 7. Вырожденность. Обобщенный симплекс-метод

В этом параграфе мы будем иметь дело исключительно с канонической задачей минимизации: найти такой вектор $y \geqq 0$, что

$$yb \quad \text{минимально} \tag{1}$$

при условии

$$Ay = c. \tag{2}$$

Нас будут интересовать два типа вырождения: первый, когда ранг матрицы A меньше m и второй, когда не выполняется условие невырожденности (У). В первом из этих случаев дело обстоит совсем просто, в то время как второй значительно более труден.

Если матрица A имеет ранг $p < m$, то ее строки линейно зависимы, и можно найти p таких ее строк (например, $a_1, \ldots, a_p$), что остальные строки являются их линейными комбинациями. После того как эти строки найдены, можно заменить условие (2) системой p уравнений

$$a_i y = \gamma_i, \qquad i = 1, \ \ldots, \ p. \tag{3}$$

В самом деле, из сказанного выше следует, что любой вектор y, являющийся решением системы уравнений (3), должен также удовлетворять уравнениям $a_i y = \gamma_i$ при $i > p$. Поэтому y является решением (2). Сведя систему уравнений (2) к меньшей системе (3), мы перейдем от решения $m \times n$-задачи к решению $p \times n$-задачи, в которой ранг новой матрицы A_p равен числу ее строк.

Задача нахождения множества строк, являющихся базисом A, легко решается методом замещения. Именно: выпишем начальную таблицу строк a_i по отношению к ортам u_i. Эта таблица является просто транспонированной матрицей A. Будем теперь заменять векторы u_i векторами a_k до тех пор, пока такие замены возможны. Мы утверждаем, что векторы a_k нового базиса будут составлять базис строк A. Доказательство предоставляется читателю (см. упр. 12).

Следует заметить, что фактическое определение базиса строк A производится почти автоматически вместе с построением начального допустимого вектора y по методу, описанному в § 5. Таким образом, в случае, когда ранг A меньше m, почти никаких дополнительных расчетов не требуется.

Предположим теперь, что ранг матрицы A равен m и обратимся к более трудной задаче — к случаю, когда не выполняется условие (У). Чтобы понять, в чем именно состоит здесь трудность, нам нужно оглянуться назад и посмотреть, где в наших рассуждениях использовалось условие (У). Оказывается, это было только однажды, а именно при доказательстве теоремы 4.3 о процессе улучшения. В связи с этим вспомним правило (б) критерия замещения. Если мы решили ввести в новый базис вектор a^s, правило (б) рекомендует обратить внимание на отношения η_i/τ_{is} с $\tau_{is} > 0$ и заменить тот из векторов a^i, для которого это отношение минимально. Известно, что когда справедливо условие (У), все η_i положительны. Поэтому минимальное отношение положительно, и можно показать, что для получаемого после замены a^r на a^s нового допустимого вектора y' должно выполняться неравенство $y'b < yb$, где y — первоначальный допустимый вектор. В случае когда (У) не выполняется, минимум η_i/τ_{is} может оказаться равным 0, и теорема 4.3 уже не будет более справедливой. Применение правила (б) может теперь не дать улучшения решения. Не исключена возможность неограниченного количества замещений без какого-либо уменьшения подлежащей минимизации формы (в этой связи читателю следует обратить внимание на замечание в конце данного параграфа).

Только что описанная трудность разрешается путем более детальной разработки части (б) критерия замещения и доказательства некоторого видоизменения теоремы 4.3. Для этой цели нам нужно ввести новый способ упорядочения векторов в R^m.

Определение. Пусть $x = (\xi_i)$ — вектор из R^m. Назовем x *лексикографически положительным* и обозначим это

$$x \succ 0,$$

если $x \neq 0$, и первая ненулевая координата x положительна.

Теперь можно *лексикографически* упорядочить все векторы из R^m, полагая

$$x \succ y, \quad \text{если } x - y \succ 0.$$

Иначе говоря, для наименьшего индекса i, при котором $\xi_i \neq \eta_i$, имеет место $\xi_i > \eta_i$.

Легко показать, что отношение $\succ$ обладает свойствами упорядочения. Это значит, что из $x \succ y$ и $y \succ z$ следует $x \succ z$ и т. д. Все это оставляется для доказательства читателю в качестве упражнений.

Обратимся теперь к канонической задаче минимизации и предположим, что имеется допустимый базис, например, $a^1, \ldots, a^m$. Выпишем расширенную таблицу

	$a^1 \ \ldots \ a^n$	c	$u_1 \ \ldots \ u_m$
a^1	$1 \ \ldots \ \tau_{1n}$	η_1	$\lambda_{11} \ \ldots \ \lambda_{1m}$
T $\vdots$	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
a^m	$0 \ \ldots \ \tau_{mn}$	η_m	$\lambda_{m1} \ \ldots \ \lambda_{mn}$
$z - b$	$\zeta_1 - \beta_1 \ldots \zeta_n - \beta_n$	ζ_0	$\xi_1 \ \ldots \ \xi_m$

Введем в рассмотрение вектор q_i, состоящий из $m+1$ последних элементов i-й строки T. Таким образом,

$$q_i = (\eta_i, \lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im}).$$

Положим

$$q = (\zeta_0, \xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Будем говорить, что базис $a^1, \ldots, a^m$ является *строго допустимым*, если каждый из векторов q_i лексикографически положителен, т. е.

$$q_i \succ 0.$$

Заметим, что если условие (У) справедливо, то все числа η_i положительны, а потому каждый допустимый базис является допустимым в строгом смысле. Если при некотором i компоненты η_i равны (0), то мы требуем, чтобы первый из ненулевых элементов λ_{ij} был положителен. Сформулируем теперь правило (б) критерия замещения несколько иначе:

(б′) *Пусть a^s — новый вектор, который мы хотим ввести в базис. Найдем векторы q_i/τ_{is} при $\tau_{is} > 0$ и заменим тот вектор a_i, для которого отношение q_i/τ_{is} лексикографически минимально.*

В соответствии с этим получаем новый вариант процесса улучшения.

Теорема 4.4. *Если замещение произвести в соответствии с правилами* (а) *и* (б), *то вновь полученный базис, как и ранее, окажется строго допустимым, и для вектора q' новой таблицы T' имеет место*

$$q \succ q'.$$

Заметим сразу же, что эта теорема свидетельствует о результативности симплекс-алгорифма. В самом деле, так как вектор q с каждым замещением делается лексикографически меньше, мы не можем получить один и тот же базис дважды, и должны в конце концов прийти к базису, для которого выполняется критерий оптимальности.

Доказательство. Заметим сначала, что, применяя правило (б′), будем находить только один индекс i, для которого отношение q_i/τ_{is} лексикографически минимально. Действительно, если бы имело место равенство $q_i/\tau_{is} = q_k/\tau_{ks}$, то q_i и q_k имели бы пропорциональные координаты. Но это означало бы, что матрица (λ_{ij}) вырожденная, хотя на самом деле она является матрицей, обратной к матрице базиса. Таким образом, если предстоит замена a^r, то

$$\frac{q_k}{\tau_{ks}} \succ \frac{q_r}{\tau_{rs}} \quad \text{при всех } \tau_{ks} > 0. \tag{1}$$

По определению операции замещения $q_r' = \frac{1}{\tau_{rs}} q_r$ и, так как $q_r \succ \mathbf{0}$, $\tau_{rs} > 0$, должно быть $q_r' \succ \mathbf{0}$, Итак,

$$q_k' = q_k - \frac{\tau_{ks}}{\tau_{rs}} q_r. \tag{2}$$

Если при этом $\tau_{ks} \leqq 0$, то $q_k' \succ \mathbf{0}$. Если же $\tau_{ks} > 0$, то

$$q_k' = \tau_{ks}\left(\frac{q_k}{\tau_{ks}} - \frac{q_r}{\tau_{rs}}\right).$$

Из (1) видно, что выражение в скобках лексикографически положительно. Это показывает, что новый базис является допустимым в строгом смысле. Заметим, наконец, что

$$q' = q - \frac{\zeta_s - \beta_s}{\tau_{rs}} q_r,$$

и так как по правилу (a) $\zeta_s - \beta_s > 0$, мы получаем $q \succ q'$.

Остается лишь показать, как можно получить исходный строго допустимый базис. Здесь можно применить метод совершенно аналогичный методу § 5. Ставя перед собой задачу найти допустимый в строгом смысле базис системы

$$Ay = c, \tag{3}$$

рассмотрим сначала вопрос о нахождении таких неотрицательных y и z, которые

$$\text{минимизируют} \quad zu \tag{4}$$

при условии

$$Ay + z = c, \tag{5}$$

где считается, что вектор c неотрицателен (безобидное допущение, поскольку этого можно добиться простой переменой знаков).

Для (5) имеется очевидный строго допустимый исходный базис, состоящий из ортов $u_1, \ldots, u_m$. Новый процесс улучшения, вытекающий из теоремы 4.4, в конце концов приведет к исключению всех u_i из базиса и даст строго допустимый базис для уравнения (3). Таким образом, мы показали, что обобщенный симплекс-метод с видоизмененным правилом (б′) может дать решение любой задачи линейного программирования независимо от того, будет она вырожденной или нет.

Замечания. Положение с вырожденностью представляется довольно любопытным. Многие из реальных задач линейного программирования оказываются на практике вырожденными. Несмотря на это, описанный выше обобщенный симплекс-метод в практических вычислениях никогда не применяется. Вместо этого придерживаются обычной простой схемы замещений по правилам (а) и (б). Если задача вырожденная, то может случиться, и это часто действительно происходит, что «процесс улучшения» на самом деле улучшения не дает. Так, если минимальное из отношений η_i/τ_{is} равно нулю, то замена a^s на a^r *не* уменьшает линейной функции yb. Практическое правило состоит в том, что в любом случае делают некоторое замещение. Обычно всегда оказывается, что после ряда замещений «без улучшения» в конце концов становится возможным либо 1) произвести замещение с улучшением, либо 2) получить оптимальный вектор.

Посмотрим, какие могут возникнуть нарушения при только что описанном грубом способе. Возможно, что замещения будут происходить неограниченно долго без выполнения 1) или 2). Это случится, если последовательные замещения образуют «цикл», т. е. если имеет место повторение нескольких базисов. Были построены примеры, где такие циклы действительно появляются. Однако до сих пор циклы обнаруживались только в тех задачах, которые были специально для этой цели сконструированы. Следовательно, с практической точки зрения, нет необходимости применять при расчетах обобщенный симплекс-метод, и мы советуем читателю при решении численных задач руководствоваться (а) и (б) в уверенности, что все обойдется благополучно.

Конечно, в этой книге мы интересуемся скорее теоретическими, чем практическими вопросами, и поэтому случай вырождения было необходимо разобрать. Фактом, несколько обескураживающим математика, является то, что весьма часто вычислительные схемы, пригодные не во всех случаях, дают тем не менее нужные результаты в огромном большинстве практических случаев. Именно эта особенность вычислительной техники заставляет считать, что вычисления в некотором отношении скорее искусство, нежели наука.

Библиографические замечания

Симплекс-метод для задач линейного программирования был разработан Данцигом. В его капитальной работе [2] рассматривается невырожденный случай. Первая публикация о вырождении принадлежит Чарнсу [1]. Изложение вырожденного случая, представленное здесь, примерно такое, как в работе Данцига, Ордена и Вулфа [1].

Упражнения

1. Рассмотрим следующую таблицу:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & a^1 & \ldots & a^m & \ldots & a^j & \ldots & a^n \\
\hline
a^1 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \tau_{1j} & \ldots & \tau_{1n} \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \vdots & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
a^i & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \tau_{ij} & \ldots & \tau_{in} \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
a^m & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \tau_{mj} & \ldots & \tau_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Показать, что если $\tau_{ij}=0$, то векторы $a^1, \ldots, a^{i-1}, a^j, a^{i+1}, \ldots, a^m$ зависимы.

2. Предположим, что при решении системы $xA=b$ мы получили следующую таблицу:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & a_1 & \ldots & a_k & \ldots & a_m & b \\
\hline
a_1 & 1 & \ldots & \tau_{1k} & \ldots & \tau_{1m} & \xi_1 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
a_r & 0 & \ldots & \tau_{rk} & \ldots & \tau_{rm} & \xi_r \\
u_1 & 0 & \ldots & \sigma_{1k} & \ldots & \sigma_{1m} & \delta_1 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
u_s & 0 & \ldots & \sigma_{sk} & \ldots & \sigma_{sm} & \delta_s \\
\hline
\end{array}
$$

Доказать, что если невозможны дальнейшие замещения векторов u_i, то либо числа $\xi_1, \ldots, \xi_r$ являются решением системы, либо она вовсе не имеет решений.

3. Рассмотрим каноническую задачу: максимизировать xu_1 при ограничении $xA = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 0).$$

а) Построить для этой задачи таблицу по отношению к базису a_1, a_2.

б) Показать, что соответствующее решение системы $xA = b$ оптимально, хотя критерий оптимальности теоремы 4.2 и не выполняется.

в) Найти новый базис, для которого выполняется критерий оптимальности.

4. Показать, что в задаче линейного программирования, для которой выполняется условие невырожденности, любой оптимальный базис удовлетворяет критерию оптимальности теоремы 4.2.

5. Переписать окончательную таблицу примера 1 (§ 4), добавив два столбца из ортов, и найти таким образом решение двойственной задачи.

6. Решить симплекс-методом:

$$\begin{aligned} \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3 &\geq 0, \\ 3\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 &\leq 25, \\ \xi_1 + 3\xi_2 + 3\xi_3 &\leq 50, \\ 8\xi_1 + 19\xi_2 + 7\xi_3 &= \max. \end{aligned}$$

Проверить правильность решения, решив двойственную задачу.

7. Максимизировать

$$\xi_1 + 750\xi_2 + 10\xi_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 0{,}15\xi_1 + 75\xi_2 + 1{,}3\xi_3 &\leq 2, \\ 0{,}10\xi_1 + 170\xi_2 + 1{,}1\xi_3 &\leq 5/3, \\ \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Максимизировать

$$\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 5\xi_1 + 3\xi_2 \qquad\quad &\leqq 3, \\ \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 &\leqq 4. \end{aligned}$$

9. Найти неотрицательное решение системы

$$\begin{aligned} 5\xi_1 + \xi_2 + 6\xi_3 \qquad\quad - 5\xi_5 &= 2, \\ -7\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 + \xi_4 + 2\xi_5 &= -5. \end{aligned}$$

10. Использовать метод § 5 для нахождения допустимого решения примера 1, § 4.

11. Найти решение системы неравенств:

$$\begin{aligned} 5\xi_1 + 4\xi_2 - 7\xi_3 &\leqq 1, \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &\leqq -4, \\ -3\xi_1 - 2\xi_2 + 4\xi_3 &\leqq 3, \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 - 2\xi_3 &\leqq -7. \end{aligned}$$

12. Доказать, что мы получим базис для строк матрицы, если начнем с таблицы

$$\begin{array}{c|ccc|} & a_1 & \dots & a_m \\ \hline u_1 & \tau_{11} & \dots & \tau_{1m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_m & \tau_{m1} & \dots & \tau_{mm} \\ \hline \end{array}$$

и станем заменять векторы u_i произвольным образом до тех пор, пока такие замещения возможны.

13. Найти базис строк следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Показать, что лексикографическая упорядоченность обладает следующими свойствами:

а) Для любых двух различных векторов x и y либо $x \succ y$, либо $y \succ x$.

б) Если $x \succ y$ и $y \succ z$, то $x \succ z$.

в) Если $x \succ y$ и $z \succ w$, то $x + z \succ y + w$.

г) Если $x \succ y$ и $\lambda > 0$, то $\lambda x \succ \lambda y$.

ГЛАВА V

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этой главе мы рассмотрим один частный, но важный класс задач линейного программирования, в которых требуется, чтобы оптимальные векторы имели целочисленные координаты. Такие задачи имеют практическое значение. Например, решения производственных задач, где рассматривается выпуск некоторых неделимых товаров, таких, как автомашины или радиоприемники, естественно, должны удовлетворять требованию целочисленности. В настоящее время нет общей теории, которая охватывала бы все такие целочисленные задачи, хотя для получения численных решений и придуманы весьма хитроумные вычислительные приемы [1]). Однако этот круг вопросов лежит за рамками нашей книги. С другой стороны, для ограниченного, но очень важного класса целочисленных задач существует законченная и красивая теория, которая будет здесь рассмотрена. Эта теория фактически не зависит от общей теории линейного программирования, рассматривавшейся в гл. III, так что математически настоящая глава почти самостоятельна. Как обычно, мы начнем изложение с ряда примеров.

§ 1. Примеры

Пример 1. Транспортная задача с неделимым грузом. Это просто транспортная задача, описанная в примере 2, гл. I, с той лишь разницей, что перевозимый груз не является безгранично делимым, как, например, сталь, а может поступать лишь в дискретных количествах, как, например, автомобили.

---

[1]) В литературе последних лет под целочисленным программированием понимается нахождение целочисленных решений для общей задачи (1), (2) стр. 109. Универсальный метод решения таких задач разработан в 1958 году Гомори (Гомори, Баумоль). Здесь автор ограничивается изучением задач, которые всегда имеют целочисленные решения.—*Прим. ред.*

Пример 2. Задача о назначениях. Предположим, что на фабрике имеется n мест на работы $J_1, \ldots, J_n$ и m кандидатов $I_1, \ldots, I_m$ на эти должности. Предположим далее, что каждый кандидат подвергся проверке с помощью некоторого испытания, которое дало количественную информацию относительно пригодности претендента на каждую из n работ. Пусть α_{ij}— неотрицательное число, оценивающее производительность I_i на работе J_j. Желательно распределить людей по работам так, чтобы максимизировать эффективность, измеряемую суммой производительностей (см. гл. I, упр. 17).

На первый взгляд кажется, что эта задача вовсе не относится к линейному программированию. Поскольку имеется лишь конечное число возможных назначений людей на работы, необходимо только рассмотреть все мыслимые назначения и выбрать из них то, для которого сумма производительностей максимальна. Однако, когда m и n велики, число возможных назначений очень велико (при $m = n$ оно равно $n!$), так что прямой перебор становится практически невозможным. Рассмотрим поэтому вместо нашей задачи целочисленную задачу линейного программирования, заключающуюся в нахождении целых неотрицательных чисел ξ_{ij}, которые

$$\text{максимизируют} \quad \sum_{i,\,j} \alpha_{ij}\xi_{ij} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &\leqq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &\leqq 1, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что имеется решение этой задачи. Так как числа ξ_{ij} целые, из (2) следует, что они должны быть равны либо 0, либо 1. Из решения вытекает, что назначение I_i на работу J_j будет оптимальным тогда, когда $\xi_{ij} = 1$. Условия (2) свидетельствуют о том, что это действительно даст полное назначение. В самом деле, первое неравенство говорит о том, что на каждую из работ назначено не более одного человека, а второе — о том, что никто не назначен более, чем на одну работу.

Далее мы увидим, что подобная формулировка задачи о назначениях позволяет свести не слишком большие примеры к вычислениям от руки.

Пример 3. Задача о загрузке. Самолет может взять M фунтов груза. Имеется n предметов, которые желательно перевезти, причем вес i-го предмета равен α_i, а стоимость его равна β_i. Как следует произвести загрузку, чтобы максимизировать стоимость груза без превышения предела для веса?

Здесь снова встает вопрос, который в принципе можно решить путем прямого перебора. Достаточно просто рассмотреть 2^n возможных множеств предметов и среди всех множеств, суммарный вес которых не превосходит указанного предела, выбрать наиболее ценное. Трудность, конечно, опять заключается в величине 2^n. Легко, однако, сформулировать эквивалентную задачу линейного программирования: найти такие целые неотрицательные числа ξ_i, что сумма

$$\sum \xi_i \beta_i \quad \text{максимальна} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{gathered} \xi_i \leqq 1, \\ \sum \xi_i \alpha_i \leqq M. \end{gathered} \tag{2}$$

К сожалению, теория, излагаемая в настоящей главе, *не* может быть приложена к этой задаче и в момент написания нашей книги подходящей теории еще не существует. Мы упомянули задачу о загрузке, чтобы указать интересное, на наш взгляд, направление для будущих исследований.

§ 2. Потоки в сетях

Транспортная задача является прототипом всех задач, рассматриваемых в этой главе. Однако для приложений нам представляется необходимым расширить связанные с этой задачей понятия. Вспомним простой чертеж, соответствующий задаче и изображенный для частного случая на рис. 1. Сопоставим каждому заводу P_i и рынку M_j *узел*, или *вершину графа*, а каждой паре узлов (P_i, M_j) — *ребро*, направленное от P_i к M_j, с приписанной ему стоимостью γ_{ij}. Это иллюстрируется рис. 13.

На практике часто может случиться, что прямые перевозки от каждого завода к каждому рынку невозможны. Это наводит нас на мысль о том, что не все ребра (P_i, M_j) будут принадлежать графу. Граф с тремя заводами и тремя рынками может выглядеть так, как показано на рис. 14.

Предположим, что имеется верхняя граница для количества груза, которое можно перевезти в направлении данного ребра. Конечно, это находится в соответствии с действительностью, потому что любая транспортная система за фиксированный период времени может пропустить лишь ограниченное количество груза. Каждому ребру (P_i, M_j) ставится в соответствие неотрицательная *пропускная способность* k_{ij}. В частности, некоторые из чисел k_{ij} могут оказаться равными 0, что просто означает невозможность перевозки из P_i в M_j.

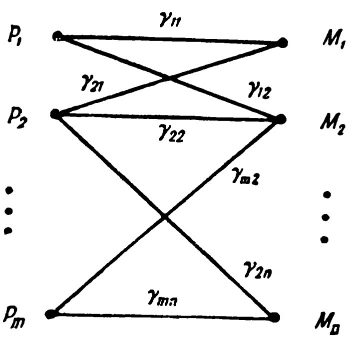


Рис 13.

Для еще большей общности отбросим требование, чтобы каждый узел транспортного графа был заводом или рынком. Если мы имеем дело с настоящей железнодорожной сетью, то известно, что часто

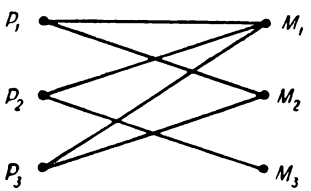


Рис. 14.

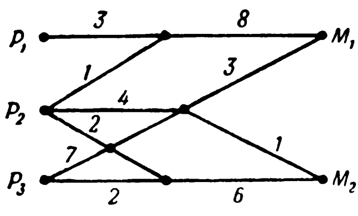


Рис. 15.

приходится осуществлять перевозки из одного города в другой через ряд промежуточных пунктов. Пример общего транспортного графа *с пропускной способностью* изображен на рис. 15, где числа у ребер обозначают не стоимость перевозок, а пропускные способности.

Теперь мы можем дать абстрактное определение сети. В этом определении все узлы считаются одинаковыми, т. е. мы не обращаем внимания на то, является ли данный узел заводом, рынком или промежуточным пунктом.

Определение. *Сеть с пропускной способностью* (N, k) состоит из конечного множества *узлов*, которые будут обозначаться буквами x, y и т. д. Упорядоченная пара узлов (x, y) называется *ребром* сети. *Функция пропускной способности* k сопоставляет каждому ребру (x, y) неотрицательное число $k(x, y)$.

Замечание. На рис. 15 приписаны числа «неориентированным» ребрам. Тем самым подразумевается, что пропускная способность одинакова независимо от направления, в каком проходится ребро. В приведенном выше определении такого требования симметрии не налагается. Некоторые из ребер могут, например, быть путями с движением лишь в одну сторону.

Формализуем теперь понятие перевозок, введя определение *потока.*

Определение. *Потоком* в сети (N, k) называется функция f, сопоставляющая каждому *ребру* (x, y) сети целое число $f(x, y)$ и обладающая свойствами:

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \text{(кососимметрия)}, \tag{1}$$

$$f(x, y) \leqq k(x, y) \quad \text{(допустимость)}. \tag{2}$$

Смысл условия (2) очевиден: поток вдоль ребра не должен превосходить пропускной способности. Условие (1) является просто удобным соглашением. Для того чтобы проиллюстрировать его смысл, предположим, что при некотором расписании из x в y посылается количество α, а из y в x — количество β. Так как мы интересуемся здесь лишь *чистыми* потоками, заметим, что чистый поток из x в y равен $\alpha - \beta$, а чистый поток из y в x равен $\beta - \alpha$. Требование кососимметричности позволяет заменить два параметра α и β одним параметром $\alpha - \beta$.

Введем теперь обозначение, которое избавит нас от необходимости писать в дальнейшем много знаков суммирования.

Обозначение. Пусть A — подмножество N, а g — функция на N. Положим

$$g(A)=\sum_{x\in A} g(x).$$

Если R — функция на ребрах (x, y), а A и B — подмножества N, положим

$$h(A, B)=\sum_{x\in A,\ y\in B} R(x, y).$$

Мы часто будем использовать свойства, которые являются непосредственными следствиями этих обозначений: Если A, B, $C\subset N$ и $A\cap B$ пусто[1]), то (g и h имеют тот же смысл, что и выше)

$$g(A\cup B)=g(A)+g(B), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} h(A\cup B, C)&=h(A, C)+h(B, C),\\ h(C, A\cup B)&=h(C, A)+h(C, B). \end{aligned} \tag{4}$$

В этих обозначениях условия (1) и (2) равносильны следующим:

$$f(A, A)=0 \qquad \text{при всех } A\subset N, \tag{1'}$$

$$f(A, B)\leqq k(A, B) \text{ при всех } A,\ B\subset N. \tag{2'}$$

Теоретико-множественная символика для задач потока естественна, потому что $f(A, B)$ означает чистый поток из A в B, а $k(A, B)$ — полную пропускную способность ребер, начинающихся в A и заканчивающихся в B.

Рассмотрим теперь задачу о потоке от некоторого узла s, называемого *источником*, к какому-нибудь другому узлу s', называемому *стоком*, причем узлы s и s' могут быть связаны произвольно сложной промежуточной сетью. Задача о максимальном потоке состоит в определении количества, которое можно перевезти из s в s'. Формализуем эти понятия следующим образом.

Определение. Узел s множества N называется *источником потока* f, если $f(s, N)>0$. Узел s' называется *стоком потока* f, если $f(s', N)<0$. Поток

[1]) Теоретико-множественные символы, введенные в § 5, гл. II, сохраняют свой смысл и здесь.

с одним источником s и стоком s' называется *потоком от* s *к* s'.

Заметим, что если f — поток от s к s', то при всех x, отличных от s и s', должно быть $f(x, N) = 0$. Имеет место также равенство $f(s, N) = f(N, s')$ (т. е. все, что вытекает из источника, попадает в сток). Это легко доказать алгебраически, используя условие (1) (см. упр. 1). *Мощностью* потока f называется число $f(s, N) = f(N, s')$, а поток наибольшей мощности носит наименование *максимального потока.*

Для рассмотрения задачи о максимальном потоке необходимо ввести еще одно понятие.

Определение. *Сечением сети N относительно s и s'* называется разбиение узлов N на такие два множества S и S' (т. е. $S \bigcup S' = N$, $S \bigcap S' = \Lambda$), что

$$s \in S \quad \text{и} \quad s' \in S'.$$

Пропускной способностью сечения (s, s') называется просто $k(S, S')$. Сечение с наименьшей пропускной способностью называется *минимальным сечением.*

Связь между сечениями и потоками устанавливается следующей довольно очевидной леммой.

Лемма 5.1. *Если f — поток в N от s к s' и (S, S') — сечение в N, то мощность f не превосходит $k(S, S')$.*

Доказательство. Для потока f мы имеем

$$\begin{aligned} f(s, N) &= f(s, N) + f(S - s, N) = \quad [\text{так как } f(S - s, N) = 0] \\ &= f(S, N) = f(S, S) + f(S, S') = \quad [\text{из } (4)] \\ &= f(S, S') \leqq k(S, S'), \quad [\text{из } (1') \text{ и } (2')], \end{aligned} \tag{3}$$

что и является требуемым неравенством.

Заметим, что когда в (3) имеет место равенство, то сразу можно сделать вывод о максимальности потока f и минимальности сечения (S, S'). Следующая важная теорема утверждает, что всегда имеются такие поток и сечение, для которых в (3) соблюдается равенство. Этот результат является в настоящей главе основным.

Теорема 5.1 (о максимальном потоке и о минимальном сечении). *Мощность максимального потока в сети (N, k) равна пропускной способности минимального сечения.*

Доказательство. Пусть $\bar{f}$ — максимальный поток. Такой поток, конечно, существует, потому что в сети (N, k) из-за ограничений допустимости и требования целочисленности имеется лишь конечное множество потоков.

Будем говорить, что ребро (x, y) *насыщено* потоком $\bar{f}$, если $\bar{f}(x, y) = k(x, y)$. Определим теперь сечение (S, S') следующим образом. Узел x принадлежит S, если $x = s$ или если существует *ненасыщенный путь* от s к x, т. е. последовательность ребер (s, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_k, x), ни одно из которых не является насыщенным. За S' берется, как обычно, дополнение S. Чтобы показать, что (S, S') — сечение, нужно лишь установить принадлежность s' к S'. Но если бы s' принадлежало s, то имелся бы ненасыщенный путь P из s в s', т. е. для всех ребер $(x, y) \in P$ должно было иметь место неравенство $\bar{f}(x, y) < k(x, y)$. Тогда, если положить

$$\delta = \min_{(x, y) \in P} [k(x, y) - \bar{f}(x, y)],$$

то можно определить новый поток f', для которого

$$f'(x, y) = \bar{f}(x, y) + \delta \quad \text{при } (x, y) \in P,$$

$$f'(x, y) = \bar{f}(x, y) \quad \text{в остальных случаях.}$$

Нетрудно видеть, что мощность f' будет больше, чем мощность $\bar{f}$ на δ. Это, однако, противоречит максимальности потока $\bar{f}$.

Теперь можно показать, что в формуле (3) предыдущей леммы имеет место равенство, так как если бы было

$$\bar{f}(S, S') < k(S, S'), \tag{4}$$

то для некоторых $x \in S$ и $y \in S'$ оказалось бы $\bar{f}(x, y) < k(x, y)$. С другой стороны, из определения S следует, что имеется ненасыщенный путь от s к x. Так как ребро (x, y) также ненасыщенно, то можно продолжить ненасыщенный путь от s до y, что противоречит $y \in S'$. Это показывает, что неравенство (4) невозможно, и доказательство завершено.

Обратим внимание на то, что данное выше доказательство дословно проходит и для того случая, когда пропускные способности и потоки принимают любые вещественные значения, не обязательно целые, за исключением доказательства существования максимальных потоков. Последнее, однако, следует из результатов гл. III.

Подобно теореме двойственности, теорема о максимальном потоке и минимальном сечении важна как критерий оптимальности потока. А именно, следует искать сечение, пропускная способность которого равна потоку. В действительности теорема дает даже больше, так как из ее доказательства вытекает следующий конструктивный метод нахождения максимальных потоков. Начав с некоторого

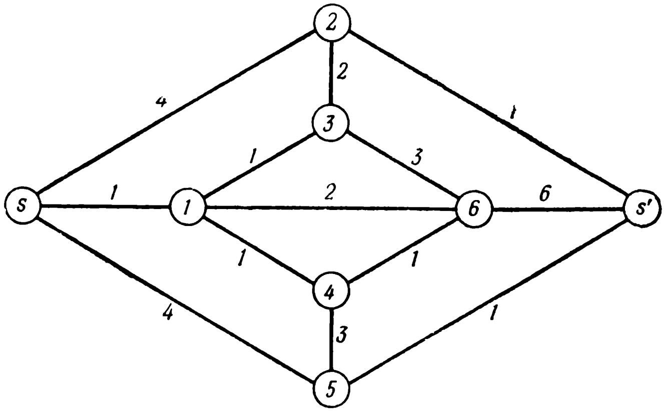


Рис. 16.

потока f_1 (возможно, нулевого), построим множество узлов S_1, которые могут быть достигнуты из s по ненасыщенным путям. Если $s' \in S_1$, то от s к s' имеется ненасыщенный путь, на который можно наложить дополнительный поток f_1', получив новый поток $f_2 = f_1 + f_1'$ большей мощности. Если же s' не принадлежит S_1, то поток f_1 уже максимален, и сечение (S_1, S_1') минимально.

Проиллюстрируем этот метод численным примером, приведенным на рис. 16.

Здесь числа, обведенные кружками, обозначают узлы. Числа, стоящие при ребрах, означают пропускные способности ребер, которые одинаковы в обоих направлениях. Вся сеть может быть естественным образом описана *матрицей* ее *пропускных способностей*:

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	4	0	0	4	0	0
1	1	0	0	1	1	0	2	0
2	4	0	0	2	0	0	0	1
3	0	1	2	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	4	0	0	0	3	0	0	1
6	0	2	0	3	1	0	0	6
s'	0	0	1	0	0	1	6	0

В этой матрице на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит пропускная способность ребра (i, j).

Для начала возьмем исходный поток f_1, в котором одна единица перевозится по «верхнему» пути сети, одна единица — по «нижнему» и одна единица — по «среднему». Этот поток, который легко получить непосредственно, сократит расчеты и позволит перейти к более интересному этапу метода. *Матрицей потока* для f_1 является

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		1	1			1		
1	−1						1	
2	−1							1
3								
4								
5	−1							1
6		−1						1
s'			−1			−1	−1	

(Начиная с этого места, мы принимаем, что пустые места в матрице соответствуют нулям.)

Мы должны найти пути, которые не насыщены потоком f_1. Удобно вычесть поток f_1 из пропускной способности k, получая новую функцию пропускной способности $k_1=k-f_1$, определенную на первоначальной сети. Задача теперь сводится к нахождению путей с положительной пропускной способностью относительно k_1. В нашем примере новая матрица пропускных способностей такова

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		0	3			3		
1	2			1	1		1	
2	$\boxed{5}$			2				0
3		1	$\boxed{2}$				3	
4		1				3	1	
5	5				3			0
6		3		$\boxed{3}$	1			5
s'			2			2	$\boxed{7}$	

Отыщем теперь все узлы, которых можно достигнуть, идя из s по ненасыщенным ребрам. Эти узлы соответствуют положительным элементам первой строки матрицы k_1. Таких узлов имеется два и они обозначены цифрами 2 и 5 в кружках. Затем рассмотрим узлы, которые достижимы из этих двух. Такими узлами будут узлы, обозначенные цифрами 3 и 4 в кружках. Наконец, из этих последних узлов можно достичь узла, обозначенного цифрой 6 в кружке, а из этого последнего — стока, обозначенного s' в кружке. Так получается ненасыщенный путь $(s, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$ и $(6, s')$. Образующие этот путь элементы в матрице k_1 обведены кружками, а элементы, соответствующие ребрам противоположного направления, выделены квадратами. Минимальное значение пропускных способностей обведенных кружками ребер равно 2, поэтому по выбранному пути можно направить поток мощности 2. Новой матрицы потока f_2 выписывать нет необходимости, так как матрицу пропускных способностей k_2 можно получить простым вычитанием 2 из чисел, обведенных кружками, и добавлением 2 к числам, обведенным квадратами. Выполнение этих действий дает нам:

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		0	1			3		
1	2			1	1		1	
2	7			0				0
3		1	4				1	
4		1				$\boxed{3}$	1	
5	$\boxed{5}$				3			0
6		3		5	$\boxed{1}$			3
s'			2			2	$\boxed{9}$	

Здесь имеется путь от узла s в кружке через узлы, обозначенные цифрами 5, 4, 6 в кружках, к s' в кружке. (Соответствующие элементы обведены кружками и квадратами.) Так как пропускная способность ребра (4,6) равна 1, можно перевозить дополнительно лишь одну единицу. Новая матрица пропускных способностей k_3 получается, как и ранее. Она имеет вид

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		0	1			2		
1	2			1	$\boxed{1}$		1	
2	7			0				0
3		1	4				1	
4		1				$\boxed{4}$	0	
5	$\boxed{6}$				2			0
6		$\boxed{3}$		5	2			2
s'			2			2	$\boxed{10}$	

Путь здесь таков:

$$s \to 5 \to 4 \to 1 \to 6 \to s'$$

и новая матрица пропускных способностей k_4 равна

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		0	1			1		
1	2			1	2		0	
2	7			0				0
3		1	4				1	
4		0				5	0	
5	7				1			0
6		4		5	2			1
s'			2			2	11	

В этой последней матрице мы выделили кружками все узлы, которых можно достичь из s. Они не включают s', и поэтому вычисления закончены. Единственными узлами, которых можно достичь из s в кружке, являются узлы с обозначениями $s, 2, 4$ и 5 в кружках. Следовательно, они образуют множество s минимального сечения. Из первоначальной матрицы пропускных способностей находим, что

$$k(S, S') = k(s, 1) + k(2, 3) + k(2, s') + k(4, 1) + k(4, 6) +$$
$$+ k(5, s') = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

Мы должны, наконец, определить матрицу максимального потока $\overline{f}$, но она, очевидно, равна просто $k - k_4$. В результате вычитания матрицы k_4 из матрицы k получаем

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s		1	3			3		
1	-1				-1		2	
2	-3			2				1
3			-2				2	
4		1				-2	1	
5	-3				2			1
6		-2		-2	-1			5
s'			-1			-1	-5	

Общий поток, выходящий из s, равен сумме чисел первой строки и, конечно, равен общему стоку в s', который представляет сумму элементов последнего столбца. Мощность потока равна 7, что совпадает с пропускной способностью

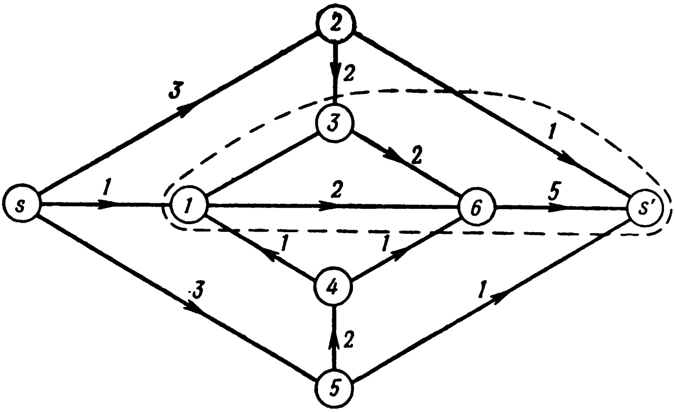


Рис. 17.

минимального сечения. Это может служить проверкой наших вычислений. Заметим также, что суммы элементов каждой из строк и каждого из столбцов, за исключением первых и последних, равны нулю (почему?).

Обращаясь к графическому представлению, получаем вполне понятную диаграмму (рис. 17).

Числа у ребер означают мощности потока в направлениях, указанных стрелками. Узлы, окруженные пунктирной линией, образуют множество S' минимального сечения.

§ 3. Упрощенная задача о назначениях

Задача, которая будет рассматриваться в этом параграфе, является частным случаем задачи об оптимальных назначениях, описанной в примере 2 § 1. Как и там, рассмотрим m лиц $I_1, \ldots, I_m$ и n работ $J_1, \ldots, J_n$. Каждое лицо может выполнять некоторые из работ и не может выполнять других. Задача состоит в том, чтобы определить, можно ли назначить людей на работы, которые им подходят, так, чтобы каждый выполнял лишь одну работу[1]).

Формализуем задачу, введя в рассмотрение *матрицу квалификаций* $Q = (\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij} = 1$, если лицо I_i обучено работе J_j, и $\alpha_{ij} = 0$ в противном случае. Задача состоит в том, чтобы выбрать m различных единиц в матрице Q, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце. Из такой формулировки видно, что упрощенная задача о назначениях является тем частным случаем задачи об оптимальных назначениях, в котором каждое α_{ij} равно 1 или 0.

Для того чтобы задача имела решение, очевидно, необходимо следующее условие: если взять любое подмножество k лиц, то среди них должны оказаться люди, годные по крайней мере на k различных работ. В противном случае не для всех из них нашлась бы работа. Важен следующий результат, ставший уже классическим: оказывается верно и обратное. Точнее говоря, если S — любое множество лиц, а $J(S)$ — множество всех видов работ J_j, которые может выполнить хоть одно из этих S лиц. Тогда справедлива теорема.

Теорема 5.2. *Назначить всех людей I_i на работы J_j в соответствии с их квалификацией можно тогда и только тогда, когда для любого множества S $J(S)$ содержит не меньше элементов, чем S.*

Мы дадим доказательство этой теоремы, основанное на теореме о максимальном потоке и минимальном сечении. Чтобы сделать это, опишем сначала соответствующую сеть. Нам удобно ввести число «бесконечность», изображаемое символом ∞. Это число является абстрактным элементом, присоединяемым к множеству целых неотрицательных чисел, который имеет следующие два свойства:

$$n + \infty = \infty \quad \text{при любом целом} \quad n, \tag{1}$$

$$n < \infty \quad \text{при любом целом} \quad n. \tag{2}$$

Определим теперь сеть *назначений.* В ней имеется $n + m + 2$ узлов, состоящих из источника s, стока s',

[1]) Более занимательным вариантом является так называемая «задача о браках», в которой спрашивается, можно ли сочетать браком некоторое множество молодых людей и девушек, причем каждый из молодых людей выбирает понравившуюся ему девушку.

m лиц I_i и n работ J_j. Функция пропускных способностей определяется правилами

$$k(s,\ I_i) = 1 \quad \text{при всех } i, \tag{3}$$

$$k(J_j,\ s') = 1 \quad \text{при всех } j, \tag{4}$$

$$k(I_i,\ J_j) = \infty, \quad \text{если } I_i \text{ годен на работу } J_j. \tag{5}$$

Все остальные пропускные способности равны нулю. На рис. 18 представлена схема такой сети.

Заметим, что максимальный поток в этой сети равен по крайней мере m, потому что сечение $(s,\ N - s)$ имеет

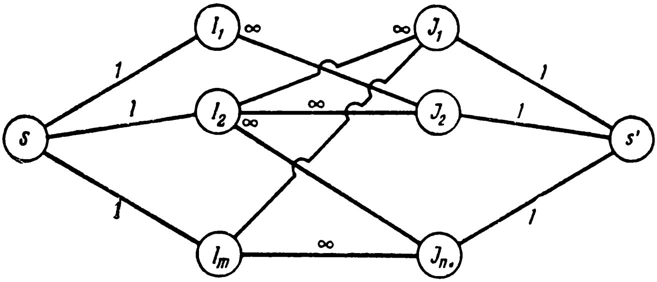


Рис. 18.

пропускную способность m. Легко видеть, что если имеется поток $\bar{f}$ мощности m, то задачу о назначениях можно решить.

Именно, ввиду того, что $\bar{f}(s,\ N) = m$, в каждый узел I_i должно попадать по одной единице и по одной выходить из него. Назначим лицо I_i на работу J_j, если $\bar{f}(I_i,\ J_j) = 1$. Нетрудно видеть, что при этой схеме на работу J_j будет назначено только одно лицо, потому что поток, выходящий из каждого узла J_j, не превосходит единицы; то же самое верно и для потока, входящего в каждый из узлов.

Доказательство теоремы 5.2. Мы уже видели, что условие теоремы необходимо. Чтобы доказать его достаточность, предположим, что в наших условиях назначить всех людей невозможно. Тогда мощности максимальных потоков и пропускные способности минимальных сечений в сети назначений должны быть меньше m. Пусть

(S, S') будет минимальным сечением, скажем,

$$S = \{s, I_1, \ldots, I_p, J_1, \ldots, J_q\}.$$

Тогда при $i \leqslant p$ и $j > q$, лицо I_i не подходит для работы J_j, потому что в противном случае мы получили бы $k(I_i, J_j) = \infty$ и $k(S, S') = \infty$. В результате получаем

$$m > k(S, S') = \sum_{i>p} k(s, I_i) + \sum_{j \leqslant q} k(J_j, s') = m - p + q.$$

Так как здесь $p < q$ и p лиц $I_1, \ldots, I_p$ назначены по крайней мере на q работ $J_1, \ldots, J_q$, утверждение доказано.

Ввиду важности этой теоремы, приведем второе ее доказательство, совершенно не зависящее от каких-либо понятий, связанных с сетями.

Второе доказательство. Мы будем вести его индукцией по m. Так как для $m = 1$ утверждение очевидно, предположим, что теорема верна при всех целых положительных числах, меньших m.

Случай 1. Каждое множество из k лиц $(k < m)$ имеет специалистов по крайней мере по $k + 1$ работе. Назначим в таком случае первого человека на какую-либо из работ, которую он может выполнять. Для оставшегося множества $m - 1$ лиц условие теоремы выполняется, и по индуктивному предположению все эти лица могут быть назначены на работы.

Случай 2. Имеется множество k лиц $(k < m)$, подходящих ровно для k работ. Тогда по индуктивному предположению эти лица могут быть назначены на работы. Предположим, что среди остальных $m - k$ лиц r лиц являются специалистами только по s работам, где $s < r$. Однако это нарушает условие теоремы, потому что тогда k упомянутых ранее лиц вместе с r лицами могли бы выполнить лишь $k + s$ работ. Следовательно, условие теоремы выполняется и для остальных $m - k$ лиц, поэтому по индуктивному предположению они могут быть назначены на работы.

Хотя второе доказательство гораздо короче первого, оно обладает одним серьезным недостатком, а именно оно неконструктивно. Вследствие этого рассуждение, основанное на привлечении понятия «потоки в сетях», более полезно при решении практических задач, которые мы собираемся изучать.

Рассмотрим матрицу квалификаций, приведенную ниже. Строки здесь соответствуют людям, столбцы — работам, а x в i-й строке и j-м столбце указывает, что I_i может выполнять работу J_j. Теперь сразу можно свести эту задачу к задаче о максимальном потоке и решить ее методом, изложенным в предыдущем параграфе. Это приводит к квадратной матрице порядка $m + n + 2$. Однако оказывается, что при вычислениях от руки можно иметь дело с матрицей квалификаций n непосредственно. Мы опишем соответствующий метод, используя терминологию потоков, а не назначений. В такой интерпретации приводимую ниже матрицу можно рассматривать как матрицу пропускных способностей, в которой $k(I_i, J_j) = \infty$, если на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит x, и $k(I_i, J_j) = 0$ — в остальных случаях

$I \backslash J$	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
I_1				x	x				x	
I_2								x	x	x
I_3	x	x	x			x	x			
I_4									x	x
I_5				x	x			x	x	
I_6	x	x	x				x			
I_7			x			x	x			
I_8	x	x				x				x
I_9				x	x			x		
I_{10}				x	x				x	

В этой таблице мы выбрали исходный поток f_1, назначив лицо I_1 на работу с наименьшим номером, на которую оно способно. В данном случае этой работой будет J_4. Распределив k первых людей, назначим $(k + 1)$-го на подходящую ему работу, которая еще не занята и имеет наименьший индекс. Таким образом мы назначили всех людей, исключая 9 и 10, причем оказались обеспеченными все работы, кроме 7 и 10. Кружки в таблице символизируют назначения.

Следующий шаг состоит в том, чтобы выписать новую матрицу пропускных способностей $k_1 = k - f_1$. К счастью, при этом нет необходимости переписывать всю матрицу, так как k_1 можно получить путем соответствующей интерпретации исходной матрицы. Именно, будем считать, что $k_1(I_i, J_j) = \infty$, если на пересечении i-й строки и j-го столбца имеется *не обведенный кружком* x [например, $k_1(I_3, J_3) = \infty$] и $k_1(J_j, I_i) = 1$, если элементом (i, j) матрицы является x, *обведенный кружком* [например, $k_1(J_6, I_8) = 1$]. Все остальные пропускные способности считаются равными нулю. Попробуем увеличить поток путем нахождения «пути» от свободного человека к свободной работе. Таков путь от I_9 через J_8, I_2 к J_{10}.

Пустив поток мощности 1 по этому пути, мы должны выделить кружками элементы (I_9, J_8) и (I_2, J_{10}), но снять кружок при (J_8, I_2), так как новый поток вдоль этого ребра уничтожает прежний поток от I_2 к J_8. Новая матрица будет такой

$I \backslash J$	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
I_1				x	x				x	
I_2								x	x	x
I_3	x	x	x			x	x			
I_4									x	x
I_5				x	x					
I_6	x	x	x				x			
I_7			x			x	x			
I_8	x	x				x				x
I_9				x	x			x		
I_{10}				x	x				x	

В новой таблице свободны лишь I_{10} и J_7, и остается определить, нет ли пути от I_{10} к J_7. Из I_{10} имеются пути только к I_1, I_2, I_4, I_5, I_9, J_4, J_5, J_8, J_9 J_{10} и никуда больше. Таким образом, 6 лиц I_1, I_2, I_4, I_5, I_9, I_{10} могут выполнять лишь 5 работ J_4, J_5, J_8, J_9, J_{10}. Отсюда вытекает, что возможны самое большее 9 назначений, а это уже достигнуто. Следовательно, задача решена. (Конечно, решение это далеко не единственное.)

Решением этой упрощенной задачи о назначениях мы воспользуемся, когда будем рассматривать в § 5 задачу об оптимальных назначениях.

§ 4. Задача о перевозках

Обратимся теперь к более общим транспортным сетям, в которых, как и в предыдущих примерах, некоторые узлы будут пониматься как *заводы*, а другие — как *рынки*. Обозначим множество заводов через P, а множество рынков — через M. *Производительность* завода $x \in P$ обозначим через $\sigma(x)$, а *емкость рынка* в узле $x \in M$ через $\delta(x)$. Предполагая, что имеется сеть с пропускной способностью (N, k), естественно поставить вопрос: можно ли удовлетворить данные емкости рынков, имея данные производительности заводов? В общем случае в N могут быть такие узлы x, которые не производят и не потребляют. Эти узлы удобно включить в P. Задачи такого вида будут называться *задачами о перевозках.*

Определение. Задача о перевозках называется *допустимой*, если имеется такой поток f, что

$$f(N, x) \geqq \delta(x) \quad \text{при } x \in M, \tag{1}$$

$$f(x, N) \leqq \sigma(x) \quad \text{при } x \in P. \tag{2}$$

Поток, для которого выполняются (1) и (2), называется *допустимым потоком.*

Следующий результат даст нам возможность определить, когда задача о перевозках допустима, и построить допустимые потоки, если они существуют.

Теорема 5.3. (теорема о допустимости). *Задача о перевозках допустима в том и только в том случае, когда для каждого множества узлов S*

$$\delta(S' \cap M) - \sigma(S' \cap P) \leqq k(S, S'). \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия интуитивно ясна, ибо оно выражает требование, чтобы *чистый спрос* (т. е. спрос минус производительность) для любого множества узлов не превосходил суммарной пропускной способности путей, подходящих к этому множеству. Предположим, что имеется допустимый поток f, а S — любое подмножество N. Тогда

$$\delta(S' \cap M) = \sum_{x \in S' \cap M} \delta(x) \leqq \sum_{x \in S' \cap M} f(N, x) = f(N, S' \cap M) \quad (4)$$

и

$$\sigma(S' \cap P) = \sum_{x \in S' \cap P} \sigma(x) \geqq \sum_{x \in S' \cap P} f(x, N) = f(S' \cap P, N) = \\ = -f(N, S' \cap P). \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4), получим

$$\delta(S' \cap M) - \sigma(S' \cap P) \leqq f(N, S' \cap P) + f(N, S' \cap M) = \\ = f(N, S') = f(S, S') + f(S', S') = f(S, S') \leqq k(S, S'),$$

а это и требовалось.

Чтобы доказать достаточность, присоединим к N источник s и сток s' и определим пропускную способность $\bar{k}$ расширенной сети $\bar{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\bar{k}(x, y) = k(x, y) && \text{при} \quad x, y \in N, \\ &\bar{k}(s, x) = \sigma(x) && \text{при} \quad x \in P, \\ &\bar{k}(x, s') = \delta(x) && \text{при} \quad x \in M, \\ &\bar{k}(x, y) = 0 && \text{во всех остальных случаях.} \end{aligned}$$

Покажем сначала, что минимальным сечением $\bar{N}$ относительно s и s' является $(N \cup s, s')$. В самом деле, пусть S — любое подмножество N, а $(S \cup s, S' \cup s')$ — соответствующее сечение $\bar{N}$. Тогда

$$\bar{k}(S \cup s, S' \cup s') = \bar{k}(s, S') + \bar{k}(S, S') + \bar{k}(S, s') = \\ = \sigma(S' \cap P) + k(S, S') + \delta(S \cap M). \quad (6)$$

Но

$$\bar{k}(N \cup s, s') = \delta(M) = \delta(S \cap M) + \delta(S' \cap M), \quad (7)$$

и вычитание (7) из (6) дает нам

$$\bar{k}(S \cup s, S' \cup s') - \bar{k}(N \cup s, s') = \\ = k(S, S') + \sigma(S' \cap P) - \delta(S \cap M).$$

Последнее же выражение по условию теоремы неотрицательно.

Применим теперь теорему о максимальном потоке и минимальном сечении к сети $(\overline{N}, \overline{k})$ и получим, что существует поток $\overline{f}$, мощность которого $\overline{k}(N \bigcup s, s') = \delta(M)$. Это означает, что

$$\sum_{x \in N} \overline{f}(x, s') = \sum_{x \in M} \delta(x),$$

и поэтому

$$\overline{f}(x, s') = \delta(x) \quad \text{при всех } x \in M. \tag{8}$$

Рассматривая поток $\overline{f}$ лишь на ребрах из N, мы получим поток в (N, k), который обозначим через f. Нам остается проверить допустимость f [т. е. выполнение для него условий (1) и (2)]. $\overline{f}$ является потоком от s к s'. Поэтому при любом $x \in N$,

$$0 = \overline{f}(\overline{N}, x) = f(N, x) + \overline{f}(s, x) + \overline{f}(s', x). \tag{9}$$

При $x \in M$, $\overline{f}(s, x) = 0$, и из (8), (9) следует, что

$$f(N, x) = -\overline{f}(s', x) = \overline{f}(x, s') = \delta(x).$$

Условие (1), таким образом, выполняется. При $x \in P$ должно быть $\overline{f}(s', x) = 0$, и (9) дает нам

$$f(x, N) = \overline{f}(s, x) \leqslant \overline{k}(s, x) = \sigma(x).$$

Таким образом, условие (2) тоже выполняется.

Доказательство теоремы о допустимости показывает, что задачу о перевозках можно решить при помощи сведе́ния ее к равносильной задаче о максимальном потоке. Проиллюстрируем это на примере.

Предположим, что имеются 4 завода P_1, P_2, P_3 и P_4 с производительностями, соответственно равными 15, 6, 13 и 8, и 4 рынка M_1, M_2, M_3 и M_4, где спрос равен 14, 9, 7 и 12. Будем считать, что ненулевые пропускные способности имеют только пути от заводов к рынкам, т. е. пропускные способности путей между заводами, между рынками и от рынков к заводам равны нулю. Полагая, что k_{ij} — пропускная способность пути (P_i, M_j), мы можем изобразить положение дел следующей таблицей

Спрос / Производительность		M_1	M_2	M_3	M_4
		14	9	7	12
P_1	15	4	5	4	2
P_2	6	4	1	2	2
P_3	13	2	5	4	3
P_4	8	4	1	3	5

Заметим, что упрощенная задача о назначениях предыдущего параграфа является частным случаем задачи о допустимости, где спрос или производительность в каждой точке равны 1, а пропускные способности равны либо 0, либо ∞.

Как и при доказательстве теоремы 5.3, эту задачу можно свести к задаче о максимальном потоке. Однако, ввиду специфического характера сети, здесь удобно применить менее громоздкий метод. Расширим прежде всего таблицу, включив в нее как пропускные способности путей от заводов к рынкам, так и от рынков к заводам. Сначала, конечно, все обратные пропускные способности равны нулю. Вспомним, однако, что если на некотором этапе вычислений имелся поток ξ_{ij} от P_i к M_j, то при следующей итерации должно быть:

$$k(M_j, P_i) = 0 - \xi_{ji} = \xi_{ij}.$$

Расширенная таблица выглядит так:

		M_1	14	M_2	9	M_3	7	M_4	12
P_1	15	4	0	5	0	4	0	2	0
P_2	6	4	0	1	0	2	0	2	0
P_3	13	2	0	5	0	4	0	3	0
P_4	8	4	0	1	0	3	0	5	0

Для того чтобы получить первоначальный поток, отправим наибольшее возможное количество с первого завода P_1 без превышения величин спроса и пропускных способностей. Итак, мы направляем 4 на M_1, 5 на M_2, 4 на M_3, 2 на M_4. После такой перевозки производительность, спрос и пропускные способности принимают вид

		M_1	10	M_2	4	M_3	3	M_4	10
P_1	0	0	4	0	5	0	4	0	2

Заметим, что производительность P_1 и пропускные способности всех путей из P_1 сведены к нулю, но взамен этого появились положительные пропускные способности для путей от рынков к P_1. Распределяя таким же образом производительность, мы получаем вторую строку

		M_1	6	M_2	3	M_3	2	M_4	10
P_2	0	0	4	0	1	1	1	2	0

Далее, разгружая P_3, отправляем 2 единицы на M_1, 3 на M_2 (пропускная способность позволяет отправить и 5 единиц, но это уже превысило бы спрос), 2 на M_3 и 3 на M_4. Третья строка поэтому такова

		M_1	4	M_2	0	M_3	0	M_4	7
P_3	3	0	2	2	3	2	2	0	3

Наконец направляем из P_4 4 единицы на M_1 и 4 единицы на M_4. Полная таблица имеет вид

		M_1	0	M_2	0	M_3	0	M_4	3
P_1	0	0	4	0	5	0	4	0	2
P_2	0	0	4	0	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	0
P_3	3	0	2	2	3	$\boxed{2}$	2	0	3
P_4	0	0	4	1	0	3	0	1	4

Цифры в правых половинах столбцов при каждом из рынков характеризуют потоки вдоль соответствующих ребер, или «обратные пропускные способности» этих ребер в направлении от рынка к заводу, в то время как цифры в левых половинах столбцов дают новые прямые пропускные способности. Вопрос заключается теперь в том, как переправить оставшиеся 3 единицы из P_3 в M_4. Для этой цели мы ищем «пути», связывающие наши 2 узла. Один из них идет от P_3 к M_2 (пропускная способность звена 2), далее от M_2 к P_2 (пропускная способность 1) и, наконец, от P_2 к M_4 (пропускная способность 2). Добавив вдоль этого пути дополнительный поток мощности 1, мы находим затем второй путь от P_3 через M_3 и P_2 к M_4. Наименьшая пропускная способность наблюдается здесь для звена от M_3 до P_2, где она равна 1. Следовательно, снова возможно увеличение потока. Мы выделили в таблице кружками и квадратами элементы, соответствующие ребрам первого и второго путей. Прибавив обычным образом эти потоки, мы получим новую матрицу пропускных способностей

	M_1	0	M_2	0	M_3	0	M_4	1
P_1 0	0	4	0	5	0	4	0	2
P_2 0	0	4	1	0	2	0	0	2
P_3 1	0	2	1	4	1	3	0	3
P_4 0	0	4	1	0	3	0	1	4

Оказывается, что других путей от P_3 к M_4 нет. В самом деле, единственными узлами, которых можно достичь из P_3, являются P_1, M_2 и M_3. Это показывает, что для четырех упомянутых узлов имеется избыток производительности величиной в единицу, в чем сразу можно убедиться по первоначальной таблице: чистая производительность этого множества равна $15+13-9-7=12$, в то время как пропускная способность ребер, исходящих из множества, составляет

$$k(P_1, M_1)+k(P_1, M_4)+k(P_3, M_1)+k(P_3, M_4)=$$
$$=4+2+2+3=11.$$

Таким образом, на заводах P_1 и P_3 одна единица «лишняя», и избавиться от нее нельзя. Следовательно, задача не является допустимой.

Здесь необходимо сделать важное заключительное замечание к задаче о перевозках. При доказательстве теорем 5.1 и 5.3 мы нигде не использовали то обстоятельство, что пропускные способности и величины спроса — целые числа. Поэтому эти теоремы останутся верными и при замене целых чисел неотрицательными вещественными числами. С другой стороны, из доказательства теоремы о допустимости видно, что если задача о перевозках с целочисленными ограничениями допустима для вещественных чисел, то она имеет допустимый целочисленный поток. Конечно, среди множества всех допустимых потоков будет, вообще говоря, бесконечное число потоков, не являющихся целочисленными. Положение дел в точности описывается следующей теоремой. Будем при этом рассматривать задачу о перевозках в несколько более общей форме.

Пусть (N, k) — некоторая сеть, a, b — две целочисленные функции на N, причем $a(x) \leqq b(x)$ при всех $x \in N$. *Допустимым потоком* в сети (N, k) назовем такой поток f, для которого $a(x) \leqq f(x, N) \leqq b(x)$.

Хотя функции k, a и b целочисленны, мы допускаем для потока возможность быть любой вещественной функцией, удовлетворяющей условиям допустимости. В предположении, что множество N состоит из n элементов, поток f будет вектором размерности n^2, компоненты которого являются значениями f на n^2 ребрах (x, y). Обозначая через F множество всех допустимых векторов, легко убедиться в том, что F — выпуклое множество. Основной результат относительно целочисленных потоков состоит в следующем:

Теорема 5.4. *Множество F всех допустимых вещественных потоков есть выпуклый многогранник, крайние точки которого являются целочисленными потоками*[1]).

Доказательство. Множество F состоит из всех потоков, удовлетворяющих неравенствам

$$f(x, y) \leqslant k(x, y) \quad \text{при всех } x, y, \tag{1}$$

[1]) Для этой теоремы необходимы определение и результаты из § 7, гл. II.

$$\sum_y f(x, y) \leqslant b(x) \qquad \text{при всех } x, \tag{2}$$

$$-\sum_y f(x, y) \leqslant -a(x) \quad \text{при всех } x. \tag{3}$$

Очевидно, ввиду неравенств (1) это множество ограничено. Из упр. 38 гл. II следует, что F — выпуклый многогранник.

Пусть теперь f — допустимый поток, который не является целочисленным, т. е. значение функции не является целым числом хотя бы для одного ребра (x, y). Мы будем называть такое ребро *дробным*. Под *дробным путем* P понимается такая последовательность узлов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, что все ребра (x_i, x_{i+1}) $(i = 1, \ldots, k-1)$ дробные. Если при этом $x_k = x_1$, то такой путь называется *дробным циклом*.

Случай 1. Существует дробный цикл $P = (x_1, \ldots, x_k)$. Тогда для всех $x_i \in P$ ввиду кососимметричности f имеет место $k(x_i, x_{i+1}) > f(x_i, x_{i+1}) > -k(x_{i+1}, x_i)$, так как функция k целочисленна. Отсюда следует, что можно выбрать малое, но положительное число ε и определить новые допустимые потоки f_1 и f_2 по следующим правилам:

$$f_1(x_i, x_{i+1}) = f(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon \qquad \text{на } P,$$
$$f_2(x_i, x_{i+1}) = f(x_i, x_{i+1}) - \varepsilon \qquad \text{на } P$$

$f_1(x, y) = f_2(x, y) = f(x, y)$ для ребер (x, y), лежащих вне P. Но тогда

$$f(x, y) = {}^1/_2\ f_1(x, y) + {}^1/_2\ f_2(x, y) \text{ при всех } x, \ y \text{ из } N,$$

так что f не является крайней точкой.

Случай 2. Дробных циклов нет. Пусть тогда $P = (x_1, \ldots, x_k)$ — дробный путь наибольшей длины в N. Все узлы P различны, потому что в противном случае P содержал бы дробный цикл. Ребро (x_1, x_2) дробно по условию, но остальные ребра (x_1, y), $y \neq x_2$ целочисленны, потому что в противном случае было бы возможным продолжение P путем присоединения y, а это противоречит предположению о максимальности P. Отсюда следует, что

$$f(x_1, N) = f(x_1, x_2) + f(x_1, N - x_2)$$

дробно, и потому

$$a(x_1) < f(x_1, N) < b(x_1), \tag{1}$$

так как числа $a(x_1)$ и $b(x_1)$ целые. В силу аналогичных причин,

$$a(x_k) < f(x_k, N) < b(x_k). \tag{2}$$

Снова можно выбрать некоторое малое положительное ε и построить тем же методом, что и ранее, потоки f_1 и f_2, которые удовлетворяют условиям (1) и (2) и потому снова являются допустимыми. Но тогда $f = {}^1/_2 f_1 + {}^1/_2 f_2$, так что f опять-таки не может быть крайней точкой. Этим завершается доказательство.

Сформулированное выше свойство задачи о перевозках характерно для всех задач, рассматриваемых в настоящей главе. Именно все крайние допустимые векторы оказываются целочисленными. Это свойство, по-видимому, тесно связано с существованием простых комбинаторных методов решения задач.

§ 5. Задача об оптимальных назначениях

Возвратимся теперь к задаче об оптимальных назначениях, описанной в § 1. Мы не будем вновь излагать содержательную интерпретацию этой задачи (читатель в случае необходимости может вновь прочитать соответствующее место), а просто напомним, что дана неотрицательная *матрица производительностей* $A = (\alpha_{ij})$, и ищутся неотрицательные целые числа, которые

$$\text{максимизируют } \sum_{i,\,j} \xi_{ij}\alpha_{ij} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &\leqslant 1 \quad \text{при всех } j, \\ \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &\leqslant 1 \quad \text{при всех } i. \end{aligned} \tag{2}$$

Для предварительного упрощения задачи мы покажем, что достаточно рассмотреть случай $m=n$. Если бы, например, было больше людей, чем работ, то можно было бы ввести $m-n$ «фиктивных» работ, на которых все лица имеют одинаковую производительность, скажем, 0. Ясно, что любое решение видоизмененной задачи дает некоторое решение первоначальной задачи. Говоря точнее, лицо, назначаемое на фиктивную работу в видоизмененной задаче, в первоначальной задаче не получает назначения вовсе, и оптимальность при этом сохраняется. В случае $m=n$ мы можем считать, что каждое лицо получает назначение на какую-нибудь работу, так как ввиду неотрицательности a_{ij} нет оснований оставлять кого-либо без назначения. Таким образом, неравенства (2) превращаются в равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} &= 1 \quad \text{при всех } j, \\ \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &= 1 \quad \text{при всех } i. \end{aligned} \tag{2'}$$

Отбросив на мгновение требование целочисленности ξ_{ij}, мы получим не что иное, как каноническую задачу максимизации. Задача, двойственная ей, состоит в нахождении таких чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \text{ минимально} \tag{1*}$$

при условии

$$\xi_i + \eta_j \geqslant a_{ij} \quad \text{при всех } i \text{ и } j. \tag{2*}$$

Чтобы решить задачу о назначениях, докажем для нее теорему двойственности с ограничивающим требованием целочисленности ξ_i, η_j и ξ_{ij}. Это доказательство совершенно не зависит от общей теории двойственности, развитой в гл. III, а также от других доказательств в этой главе. Оно полностью конструктивно и сразу приводит к эффективному методу решения.

Теорема 5.5 *Если все переменные ξ_i, η_j и ξ_{ij} принимают целые значения, то максимум* (1) *при ограничениях* (2′) *равен минимуму* (1*) *при ограничениях* (2*).

Доказательство. Как обычно,

$$\max\left(\sum_{i,j} \xi_{ij}\alpha_{ij}\right) \leqq \min\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \eta_j\right),$$

так как

$$\sum_{i,j} \xi_{ij}\alpha_{ij} \leqq \sum_{i,j} \xi_{ij}(\xi_i + \eta_j) =$$

$$= \sum_i \xi_i\left(\sum_j \xi_{ij}\right) + \sum_j \eta_j\left(\sum_i \xi_{ij}\right) = \sum_i \xi_i + \sum_j \eta_j. \qquad (3)$$

Пусть теперь $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ минимизируют (1*) при ограничениях (2*). Обозначим через P множество всех пар индексов (i, j), для которых $\xi_i + \eta_j = \alpha_{ij}$ [т. е. для которых в (2*) имеет место равенство]. Рассмотрим упрощенную задачу о назначениях для n лиц и n работ, где лицо I_i может быть использовано на работе J_j в том и только в том случае, если $(i, j) \in P$.

Случай 1. В рассмотренной выше упрощенной задаче назначения получают все n лиц. В этом случае мы получим полное множество назначений (мы уже знаем, как нужно производить расчеты) и положим $\xi_{ij} = 1$ в том и только в том случае, если I_i получает назначение на J_j. Если теперь подставить эти значения для ξ_{ij} в (3), то мы увидим, что это неравенство превращается в равенство, так как по построению множества P, $\xi_{ij} = 1$, если только $\alpha_{ij} = \xi_i + \eta_j$; в остальных же случаях $\xi_{ij} = 0$. Отсюда следует, что назначение, задаваемое этими ξ_{ij}, оптимально.

Случай 2. Невозможно обеспечить все n лиц назначениями. В этом случае по теореме 5.2 существует такое множество k лиц, обозначаемое через K, что эти n лиц способны выполнять лишь $q < k$ работ, составляющих множество Q. Определим новые двойственные переменные ξ_i', η_j':

$$\xi_i' = \begin{cases} \xi_i - 1 & \text{при} \quad I_i \in K, \\ \xi_i & \text{при} \quad I_i \notin K \end{cases}$$

$$\eta_j' = \begin{cases} \eta_j + 1 & \text{при} \quad J_j \in Q, \\ \eta_j & \text{при} \quad J_j \notin Q \end{cases}$$

и покажем, что числа ξ_i' и η_j' все еще удовлетворяют (2*). Действительно,

если $I_i \notin K$, то $\xi_i' + \eta_j' \geqslant \xi_i + \eta_j \geqslant \alpha_{ij}$,
если $I_i \in K$, $J_j \in Q$, то $\xi_i' + \eta_j' = \xi_i - 1 + \eta_j + 1 = \xi_i + \eta_j \geqslant \alpha_{ij}$,
если $I_i \in K$, $J_j \notin Q$, то $(i, j) \notin P$ (т. е. лицо I_i не подходит для работы J_j).

В последнем случае по определению $\xi_i + \eta_j > \alpha_{ij}$ и, так как все рассматриваемые нами сейчас числа целые

$$\xi_i + \eta_j \geqq \alpha_{ij} + 1, \quad \text{или} \quad (\xi_i - 1) + \eta_j \geqq \alpha_{ij},$$

это означает, что

$$\xi_i' + \eta_j' \geqq \alpha_{ij},$$

т. е. переменные ξ_i', η_j' допустимы.

С другой стороны,

$$\sum_i \xi_i' + \sum_j \eta_j' = \sum_i \xi_i - k + \sum_j \eta_j + q = \sum_i \xi_i + \sum_j \eta_j + (q - k).$$

Так как здесь $q < k$, мы получили меньшее значение (1*), а это противоречит предположению о том, что минимум достигается при ξ_i и η_j.

Это завершает доказательство.

Применим сразу доказанную теорему к решению задачи о назначениях, для которой матрица производительностей имеет вид

	ξ_i \\ η_j	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
		0↑	0	0	0	0↑
I_1	12↓	12′	9	10	3	8
I_2	9↓	6	6	2	2	9′
I_3	11	6	8	10	11′	9
I_4	6↓	6	3	4	1	1
I_5	12↓	11	1	10	9	12

Здесь мы также строим начальное множество двойственных переменных ξ_i и η_j, удовлетворяющих (2), полагая, что все η_j— нули, а $\xi_i = \max \alpha_{ij}$. Обведем кружками те элементы α_{ij}, для которых $\alpha_{ij} = \xi_i + \eta_j$, и будем рассматривать эти элементы как x в матрице производительностей. Методом, изложенным в § 3, легко можно найти максимально возможное число назначений, равное в данном случае 3. Пометим в примере штрихами те обведенные кружками элементы, которые соответствуют получившим назначения лицам. По теореме 5.2 должно существовать множество $k + 2$ лиц, способных вместе выполнять лишь k работ. Это множество легко находится путем отыскания тех I_i и J_j, которых можно «достичь» от не получивших назначения I_4 и I_5. Таковыми являются I_1, I_2, I_4, I_5, J_1 и J_5. Следовательно, не нарушая условия (2*), можно уменьшить ξ_1, ξ_2, ξ_4 и ξ_5 по крайней мере на единицу, соответственно увеличив η_1 и η_5. В действительности можно, не нарушая условия, уменьшить ξ_i и η_j на 2 единицы. В предыдущей таблице стрелками, направленными вниз, помечены те из ξ_i, которые следует уменьшить, а стрелками, направленными вверх, — те из η_j, которые нужно увеличить. Если произвести все эти изменения, то получается новая таблица

		J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
		2↑	0	0↑	0	2↑
I_1	10↓	12′	9	10	3	8
I_2	7↓	6	6	2	2	9′
I_3	11	6	8	10	11′	9
I_4	4↓	6	3	4′	1	1
I_5	10↓	11	1	10	9	12

Теперь можно выдать назначения 4 лицам (но не более, потому что I_1, I_2, I_4 и I_5 годны лишь на работы J_1, J_3 и J_5). Стрелки в началах строк и столбцов имеют прежний смысл. Уменьшая выделенные ξ_i и увеличивая η_j на 1, мы приходим к таблице

		J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
		3	0	1	0	3
I_1	9	12′	9	10	3	8
I_2	6	6	6	2	2	9′
I_3	11	6	8	10	11′	9
I_4	3	6	3′	4	1	1
I_5	9	11	1	10′	9	12

Элементы со штрихами свидетельствуют о том, что теперь можно дать назначения всем лицам. В соответствии с этим существует оптимальное назначение, для которого суммарная производительность равна

$$12+9+11+3+10=45.$$

Независимым критерием правильности решения служит то, что сумма всех ξ_i и η_j равна

$$(9+6+11+3+9)+(3+0+1+0+3)=38+7=45,$$

и нами получены одинаковые значения для обеих двойственных задач, а следовательно, и решение каждой из них.

§ 6. Задача, связанная с оптимальными назначениями. Равновесие цен

Имеется ряд интересных результатов, которые можно получить как простые следствия теоремы двойственности 5.5 для задачи об оптимальных назначениях. Один из них мы рассмотрим в настоящем параграфе.

Предположим, что n лиц $I_1, \ldots, I_n$ заинтересованы в приобретении домов, а в продаже имеется n таких домов: $H_1, \ldots, H_n$. Продажные цены на эти дома заранее не установлены и определяются путем переговоров между продавцами и покупателями. Предположим также, что ценность дома H_j для I_i равна α_{ij}. Матрицу $A=(\alpha_{ij})$ назовем матрицей *ценностей*.

Представим себе далее, что продажные цены $\pi_1, \ldots, \pi_n$ для n домов были объявлены. Как будет себя вести i-й покупатель? Прежде всего он изъявит желание купить дом H_j только в том случае, когда $\alpha_{ij} \geqslant \pi_j$, т. е. он должен чувствовать, что получит ценность, не меньшую чем ценность затрачиваемых денег. Если имеется несколько домов, которые он хотел бы таким образом купить, то, понятно, он изъявит желание купить тот дом H_j, для которого разность $\alpha_{ij} - \pi_j$ максимальна, потому что именно этой величиной измеряется возрастание богатства I_i от покупки H_j. Наложим дополнительное условие: каждый покупатель может приобрести не более одного дома. Если при данных ценах никакие два лица не собираются покупать один и тот же дом, то никаких трудностей в продаже домов людям, желающим их приобрести, не возникает. Цены, при которых никакие два покупателя не выбирают одного дома, называются *равновесными*. Произвольный набор цен, вообще говоря, не будет обладать этим свойством равновесия, т. е. будут некоторые дома, которые будут стараться приобрести несколько людей, а также такие дома, которые никому не нужны. Таким образом, для некоторых домов спрос превысит предложение, а для других предложение превысит спрос. Равновесные цены, следовательно, уравновешивают предложение и спрос в смысле классической экономики. Вопрос заключается в том, можем ли мы всегда быть уверены в существовании таких цен. Чтобы решить этот вопрос, нужно сначала перевести его на алгебраический язык.

Пусть p — *вектор цен*, $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \geqslant 0$. Положим $\mu_i = \max\limits_j (\alpha_{ij} - \pi_j)$. Элемент α_{ij} назовем *допустимым* относительно p, если $\alpha_{ij} = \mu_i + \pi_j$. Назовем p *вектором равновесных цен*, если:

числа μ_i неотрицательны; (1)

существует множество допустимых элементов α_{ij} ровно с одним элементом в каждой строке и каждом столбце матрицы A. (2)

Читателю следует проверить, что формальные требования (1) и (2) в точности соответствуют экономическому описанию равновесных цен, данному в предыдущем абзаце.

Теорема 5.6. *Для любой матрицы ценностей A существует вектор равновесных цен.*

Доказательство. По теореме 5.5 можно найти такие целые μ_i и π_j, что

$$\mu_i + \pi_j \geqq \alpha_{ij} \text{ при всех } i, j. \tag{3}$$

Существует такое множество S элементов α_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A, что

$$\sum_i \mu_i + \sum_j \pi_j = \sum_{\alpha_{ij} \in S} \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Не нарушая общности, можно считать далее, что числа μ_i и π_j неотрицательны. Действительно, возьмем $\delta = \min [\mu_i, \pi_j]$ (пусть для определенности $\delta = \mu_1 < 0$) и положим

$$\mu_i' = \mu_i - \mu_1,$$
$$\pi_j' = \pi_j + \mu_1.$$

Числа μ_i' и π_j' по-прежнему удовлетворяют соотношениям (3) и (4). По выбору μ_1 все μ_i' неотрицательны. Но числа π_j' также неотрицательны, поскольку $\pi_j' = \pi_j + \mu_1 \geqq \alpha_{1j} \geqq 0$.

Заметим теперь, что, согласно (3), при всех i, j справедливы неравенства $\mu_i \geqq \alpha_{ij} - \pi_j$, и так как в каждой строчке есть некоторый элемент α_{ij} из S, то $\mu_i = \max\limits_j (\alpha_{ij} - \pi_j)$ является искомым множеством допустимых элементов, и, следовательно, вектор цен $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ удовлетворяет требованиям равновесности (1) и (2).

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство, связанное с только что доказанным результатом. Пусть $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — вектор равновесных цен, а дома H_j занумерованы таким образом, что покупатель I_i покупает дом H_i по цене π_i. Можно измерить полное возрастание суммарной полезности в результате n этих сделок. «Доход» I_i равен $\alpha_{ii} - \pi_i$, доход продавца H_i равен просто π_i, а сумма всех таких доходов составляет

$$\sum (\alpha_{ii} - \pi_i) + \sum \pi_i = \sum \alpha_{ii}. \tag{5}$$

Никакое другое распределение домов среди покупателей не даст бо́льшего увеличения суммарного богатства, ибо мы уже видели из теоремы 5.5, что числа α_{ii} соответствуют именно оптимальному назначению. В этом легко убедиться и непосредственно, поскольку мы знаем, что при всех i, j

$$\alpha_{ii} - \pi_i \geqq \alpha_{ij} - \pi_j. \tag{6}$$

Возьмем теперь любое множество S элементов α_{ij} по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы ценностей A. Суммируя все те неравенства (6), для которых $\alpha_{ij} \in S$, мы получаем

$$\sum_i \alpha_{ii} \geqq \sum_S \alpha_{ij},$$

так как суммы $\sum \pi_i$ и $\sum \pi_j$ взаимно уничтожаются.

Мы показали, что в рассматриваемом случае классическое понятие равновесия цен всегда приводит к распределению, дающему наибольшее приращение богатства. Как, вероятно, читатель уже заметил, результаты этого параграфа совершенно аналогичны задаче о распределении ресурсов гл. III, § 5. Основное различие состоит в том, что здесь равновесное распределение должно быть целочисленным.

§ 7. Транспортная задача

По-видимому, наиболее важным примером задачи, решаемой методами, изложенными в настоящей главе, является транспортная задача с «неделимым» продуктом, описанная в § 1, где все производительности, спросы, потоки и цены суть целые числа. Как и в примере 2, гл. I, обозначим производительность i-го завода через σ_i, емкость j-го рынка — через δ_j, стоимость перевозки единицы груза от i-го завода к j-му рынку — через γ_{ij}. Считая, что ξ_{ij} — количество груза, перевозимое из i в j мы хотим

$$\text{минимизировать } \sum_{i,j} \gamma_{ij}\xi_{ij} \tag{1}$$

при условиях

$$\xi_{ij} \geqq 0; \quad \sum_j \xi_{ij} \leqq \sigma_i; \quad \sum_i \xi_{ij} \geqq \delta_j \text{ при всех } i, j. \tag{2}$$

Числа ξ_{ij}, конечно, должны быть при этом целыми.

Сделаем очевидное предварительное замечание, заключающееся в том, что необходимым условием допустимости ограничений (2) является неравенство $\sum_i \sigma_i \geqq \sum_j \delta_j$, т. е. суммарная производительность должна быть по крайней мере равна емкостям рынков. Как и в задаче о назначениях, мы можем ограничиться тем частным случаем, когда это неравенство вырождается в равенство. В самом деле, предположим, что $\sum_i \sigma_i > \sum_j \delta_j$. Обозначив через δ *избыток*, определяемый как разность $\sum_i \sigma_i - \sum_j \delta_j$, введем $(n+1)$-й рынок, именуемый далее *свалкой*, емкость которого равна δ. Пусть стоимость $\gamma_{i,\,n+1}$ доставки с любого завода на свалку равна 0. В этой новой задаче суммарная производительность и емкость рынков равны между собой, и, с другой стороны, любое минимизирующее решение новой задачи дает минимум стоимости для первоначальной задачи, поскольку перевозка на свалку осуществляется бесплатно. Если общая производительность и суммарная емкость рынков равны, то ограничения (2) превращаются в равенства

$$\xi_{ij} \geqq 0, \quad \sum_j \xi_{ij} = \sigma_i, \quad \sum_i \xi_{ij} = \delta_j \quad \text{при всех } i, j. \qquad (2')$$

Двойственной задачей к канонической задаче линейного программирования заданной соотношениями (1) и (2′), является следующая:

$$\begin{aligned} &\text{найти «цены» } \pi_1, \ \ldots, \ \pi_m \text{ и } \pi'_1, \ \ldots, \ \pi'_n, \\ &\text{которые максимизируют } \sum_j \pi'_j \delta_j - \sum_i \pi_i \sigma_i \end{aligned} \qquad (1^*)$$

при условиях, что

$$\pi'_j - \pi_i \leqq \gamma_{ij} \quad \text{при всех } i, j. \qquad (2^*)$$

Как и в предыдущих примерах, мы дадим доказательство частной теоремы двойственности для случая этой модели, которое не зависит от общей теоремы двойственности. Это доказательство приложимо к целочисленному методу решения задачи.

Теорема 5.7. *Если целые числа ξ_{ij} удовлетворяют соотношениям* (1) *и* (2′), *а целые числа π_i и π'_j — соот-*

ношениям (1*) *и* (2*), *то*

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij}\xi_{ij} = \sum_j \pi'_j\delta_j - \sum_i \pi_i\sigma_i.$$

Доказательство. Из (2') и (2*) мы имеем

$$\sum_j \pi'_j\delta_j - \sum_i \pi_i\sigma_i = \sum_j \pi'_j\Big(\sum_i \xi_{ij}\Big) - \sum_i \pi_i\Big(\sum_j \xi_{ij}\Big) =$$
$$= \sum_{i,j} \xi_{ij}(\pi'_j - \pi_i) \leqq \sum_{i,j} \xi_{ij}\gamma_{ij}. \qquad (3)$$

Мы должны показать, что это неравенство в действительности является равенством. Рассмотрим для этого сеть из $m+n$ узлов, состоящую из m заводов и n рынков, причем пропускная способность k_{ij} ребра, соединяющего i-й завод с j-м рынком, равна

$$k_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad \pi'_j - \pi_i = \gamma_{ij}, \\ 0, & \text{если} \quad \pi'_j - \pi_i < \gamma_{ij}, \end{cases}$$

где π'_j и π_i — решения (1)* и (2)*.

Рассмотрим теперь задачу о перевозках с величинами производительности σ_i, спроса δ_j и пропускных способностей k_{ij}. Предположим сначала, что задача допустима. Тогда целые числа ξ'_{ij}, являющиеся ее решениями, по определению удовлетворяют ограничениям (2'). Подставляя ξ'_{ij} вместо ξ_{ij} в неравенства (3), мы должны получить равенства, так как по определению пропускных способностей k_{ij} числа ξ'_{ij} отличны от нуля только, когда $\pi'_j - \pi_i = \gamma_{ij}$. Следовательно, для данного случая утверждение доказано.

Предположим теперь, что наша задача о перевозках не является допустимой. Тогда по теореме 5.3 найдется такое множество узлов S, что чистый спрос в S превосходит пропускную способность путей из S' в S. В нашем случае это может произойти лишь при условии, что пропускная способность путей из S' в S равна 0 (в противном случае она равнялась бы ∞). Пусть U — множество заводов из S, а V — множество рынков из S. Тогда теорема 5.3 принимает вид

$$\delta(S) - \sigma(S) = \sum_{M_j \in V} \delta_j - \sum_{P_i \in U} \sigma_i > k(S, S') = 0. \qquad (4)$$

Теперь мы можем получить противоречие, заключающееся в том, что π_i и π'_j не дают максимум (1*). Для этого положим

$$\bar{\pi}_i = \pi_i + 1 \quad \text{при} \quad P_i \in U \quad \bar{\pi}_i = \pi_i \quad \text{при} \quad P_i \in U',$$
$$\bar{\pi}'_j = \pi'_j + 1 \quad \text{при} \quad M_j \in V \quad \bar{\pi}'_j = \pi'_j \quad \text{при} \quad M_j \in V'.$$

Используя (4), мы получаем

$$\sum_j \bar{\pi}'_j \delta_j - \sum_i \bar{\pi}_i \sigma_i = \sum_j \pi'_j \delta_j - \sum_i \pi_i \sigma_i +$$
$$+ \Big(\sum_{M_j \in V} \delta_j - \sum_{P_i \in U} \sigma_i \Big) > \sum_j \pi'_j \delta_j - \sum_i \pi_i \sigma_i.$$

Остается только показать, что $\bar{\pi}_i$ и $\bar{\pi}'_j$ удовлетворяют (2*), т. е.

$$\bar{\pi}'_j - \bar{\pi}_i \leqslant \gamma_{ij}. \tag{5}$$

Единственным случаем, для которого (5) могло бы не иметь места, является следующий: $M_j \in V$ и $P_i \in U'$. Но если $P_i \in U'$, то $P_i \in S'$, и поэтому $k_{ij} = 0$. Значит по определению пропускных способностей должно быть $\pi'_j - \pi_i < \gamma_{ij}$ или $\pi'_j - \pi_i \leqslant \gamma_{ij} - 1$. Следовательно, $\bar{\pi}'_j - \bar{\pi}_i = \pi'_j + 1 - \pi_i \leqslant \gamma_{ij}$, так что и для этого случая условие (2*) выполняется. Нужное противоречие получено, и теорема доказана.

Займемся решением примера, задаваемого следующей таблицей:

			M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
		π'_j	2	3	3	3	7	2
	π_i	σ_i \ δ_j	3	3	6	2	1	2
P_1	0	3	5	3	7	3	8	5
P_2	0	4	5	6	12	5	7	11
P_3	0	2	2	8	3	4	8	2
P_4	0	8	9	6	10	5	10	9

В этой задаче фигурируют 4 завода и 6 рынков. Числа в столбце σ_i обозначают производительности, а в строке δ_j указывают величины спроса. Элемент (i, j) таблицы является, как обычно, стоимостью γ_{ij}.

Для того чтобы приступить к вычислениям, нужно выбрать некоторые «цены» π_i и π'_j. Простой метод заключается в том, чтобы положить все π_i равными 0, а $\pi'_j = \min \gamma_{ij}$. Это и было сделано в приведенной таблице, где мы также выделили кружками те элементы γ_{ij}, для которых $\gamma_{ij} = \pi'_j - \pi_i$. Замечаем, что в последней строке не имеется элементов, обведенных кружками, и поэтому можно «улучшить» первоначальное множество цен, полагая $\pi_4 = -2$ (цены не обязательно должны быть положительными). Процедура, которой мы будем следовать, состоит из двух уже привычных для нас чередующихся этапов. Первый из них заключается в попытке решения задачи о перевозках методами § 4, а второй — в выборе улучшенных цен для двойственной задачи. Первый из этих этапов иллюстрируется следующей таблицей:

				M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
		π'_j		2		3		3		↓ 3		↓ 7		2	
	π_i	σ_i \ δ_j		3	1	3	0	6	6	2	0	1	0	2	2
P_1	0	3	0	5		3	3	7		3		8		5	
P_2	↓ 0	4	3	5		6		12		5		7	1	11	
P_3	0	2	0	2	2	8		3		4		8		2	
P_4	↓ −2	8	6	9		6		10		5	2	10		9	

Поясним эту таблицу. В столбце π_i и строке π'_j содержатся определенные ранее начальные цены. Итеративный процесс мы начинаем с перевозок от заводов к рынкам. В разделенном надвое столбце σ_i в левой колонке приведены начальные производительности, а в правой — производительности после первого этапа перевозок. Аналогично левый ряд цифр в строке δ_j соответствует начальному спросу, а правый — обозначает величины спроса, не удовлетворенного после первого этапа перевозок. В самой матрице стоимостей мы выделили, как обычно, кружками те элементы, для которых $\pi'_j - \pi_i = \gamma_{ij}$. Такие элементы всегда имеются в левой части каждого столбца.

Приступим теперь к решению задачи о перевозках, т. е. удовлетворим наибольшее возможное количество спроса, используя лишь те ребра (i, j), для которых стоимость перевозки обведена кружками. Метод решения полностью совпадает с описанным в § 4. Правая половина двойной ячейки (i, j) матрицы используется для записи количества груза, перевозимого из P_i в M_j. Так, например, при первой итерации мы отправляем три единицы с завода P_1 на рынок M_2, одну единицу — с P_2 на M_5, 2 единицы — с P_3 на M_1 и 2 единицы — с P_4 на M_4. У нас остается 3 единицы на P_2 и 6 единиц на P_4, как это видно из правой половины столбца σ_i. Никакие дальнейшие перевозки при этих условиях не могут быть произведены, потому что для P_2 и P_4 единственными достижимыми рынками являются M_4 и M_5, спрос в которых уже удовлетворен. Мы видим, что в узлах P_2, P_4, M_4 и M_5 имеется избыточная производительность в 9 единиц. Если мы теперь в этих узлах все цены уменьшим, то получим допустимое решение двойственной задачи, которое увеличилось по крайней мере на 9 единиц. Стрелки, направленные вниз, указывают в таблице на цены, подлежащие уменьшению. (Заметим, что при доказательстве теоремы 5.7 мы находили множество с избыточным спросом, а не с избыточной производительностью, и цены увеличивали, а не уменьшали. Однако здесь имеет место симметрия и в данном случае удобнее произ-

				M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
		π'_j			2	↓	3		3	↓	2	↓	6		2
	π_i	σ_i	δ_j	1	1	0	0	6	6	0	0	0	0	2	2
P_1	↓ 0	0	0	5		3	3	7		3		8		5	
P_2	↓ −1	3	3	5		6		12		5		7	1	11	
P_3	0	0	0	2	2	8		3		4		8		2	
P_4	↓ −3	6	6	9		6		10		5	2	10		9	

водить именно уменьшение цен.) Понизив помеченные стрелкой цены на единицу, мы получим новую таблицу (см. стр. 215).

Единственным новым элементом среди обведенных кружком является элемент 6 в последней строке (столбец M_2). С другой стороны, элемент 3 в первой строке (столбец M_4), который при первой итерации был обведен кружком, теперь уже не обводится, потому что π'_4 уменьшилось, а π_1 осталось без изменения. После применения алгорифма для решения задачи о перевозках можно видеть, что на этом этапе никакие другие перевозки невозможны, и в узлах P_1, P_2, P_4, M_2, M_4 и M_5 имеется избыток производительности в 9 единиц. В соответствии с этим мы снова можем уменьшить цены. На этом шаге без нарушения ограничений, накладываемых на цены, возможно уменьшение на 2 единицы

				M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
		π'_j			2		1	↑	3		0		4	↑	2
	π_i	σ_i \ δ_j		1	0	0	0	6	6	0	0	0	0	2	0
P_1	−2	0	0	5		3	3	7		3		8		5	
P_2	−3	3	0	5	3	6		12		5		7	1	11	
P_3	↑ 0	0	0	2		8		3		4		8		2	2
P_4	−5	6	6	9		6		10		5	2	10		9	

Теперь появляется обведенный кружком элемент 5 во второй строке (столбец M_1). Отправим одну единицу из P_2 в M_1, а 2 единицы сначала из P_2 в M_1, а затем из M_1 в P_3, так как из предыдущей таблицы известно, что обратная пропускная способность пути из M_1 в P_3 равна 2.

Далее, отправляем эти 2 единицы из P_3 в M_6. У нас остаются 6 единиц в P_4 и спрос 6 единиц в M_3. Для множества узлов P_3, M_3 и M_6 имеется избыточный спрос 6 единиц, а пропускная способность путей к этому множеству равна нулю. Увеличивая π_3, π'_3 и π'_6 на единицу, приходим к новой таблице

				M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
		π'_j			2		1	↑	4		0		4	↑	3
	π_i	σ_i \ δ_j		0	0	0	0	6	4	0	0	0	0	0	0
P_1	−2	0	0	5		3	1	7		3		8		5	2
P_2	−3	0	0	5	3	6		12		5		7	1	11	
P_3	↑ 1	0	0	2		8		3	2	4		8		2	
P_4	−5	6	4	9		6	2	10		5	2	10		9	

Новым элементом, обведенным кружком, теперь является 5 в первой строке (столбец M_6). Это позволяет нам направить 2 единицы из P_4 через M_2, P_1, M_6, P_3 в M_3. В таблице сделаны соответствующие изменения. Теперь имеется избыток спроса величиной в 4 единицы в P_3 и M_3, причем пропускная способность путей, ведущих к этим узлам, равна 0. Поэтому снова можно увеличить π_3 и π'_3 и получить

				M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
		π'_j			2		1		5		0		4		3
	π_i	σ_i \ δ_j		0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0
P_1	−2	0		5		3	1	7		3		8		5	2
P_2	−3	0		5	3	6		12		5		7	1	11	
P_3	2	0		2		8		3	2	4		8		2	
P_4	−5	4		9	0	6	2	10	4	5	2	10		9	

Новые кружки появились на пересечении столбца M_3 и со строками 1 и 4. Вследствие наличия кружка в строке 4, мы можем направить оставшиеся 4 единицы прямо из P_4 в M_3. Таким образом, задача о перевозках является допустимой, и, следовательно, у первоначальной задачи имеется решение.

Это решение непосредственно получается из последней таблицы, потому что ненулевые потоки ξ_{ij} являются ненулевыми элементами правых колонок двойных столбцов матрицы. Искомое решение имеет вид

$$\xi_{12}=1,\quad \xi_{16}=2,\quad \xi_{21}=3,\quad \xi_{25}=1,$$
$$\xi_{33}=2,\quad \xi_{42}=2,\quad \xi_{43}=4,\quad \xi_{44}=2,$$

а минимальная стоимость есть просто сумма произведений элементов, стоящих в правой и левой колонках каждого столбца, т. е. равна

$$3\times 1+5\times 2+5\times 3+7\times 1+3\times 2+6\times 2+$$
$$+10\times 4+5\times 2=103.$$

Мы получаем также решение двойственной задачи

$$(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4)=(-2,\ -3,\ 2,\ -5)$$

и

$$(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \pi'_3,\ \pi'_4,\ \pi'_5,\ \pi'_6)=(2,\ 1,\ 5,\ 0,\ 4{,}3);$$

и, конечно, имеем теперь важный независимый способ проверки наших вычислений путем нахождения ее (задачи) значения:

$$\sum_j \pi'_j\delta_j-\sum_j \pi_i\sigma_i=2\times 3+1\times 3+5\times 6+0\times 2+4\times 1+$$
$$+3\times 2+2\times 3+4\times 3-2\times 2+5\times 8=103.$$

Хотя для описания этого алгорифма понадобилось известное время, практически его проделать можно очень быстро, особенно на доске, где легко стирать и изменять элементы таблицы, не переписывая заново все числа при каждой итерации. Заметим, что мы решили здесь задачу с 24 неизвестными и 10 ограничениями за гораздо более короткое время, чем потребовалось бы при симплекс-методе.

§ 8. Другие примеры: кратчайший путь; задача о поставщике

Одно из самых простых и изящных приложений методов настоящей главы связано с задачей нахождения кратчайшего пути через сеть. Пусть снова нам дана сеть N с источником s и стоком s'. Каждому ребру $(x,\ y)$ ставится в соответствие неотрицательное число $\tau(x, y)$, называемое *временем перехода* и которое означает время, необходимое, чтобы перейти из x в y. Если попасть прямо из x в y невозможно, то $\tau(x, y)$ принимается равным бесконечности. Задача состоит в нахождении пути $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, где $x_0 = s$, $x_n = s'$, имеющего наименьшую *длину*. Здесь длина $l(P)$ определяется следующим образом:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \tau(x_{i-1}, x_i). \tag{1}$$

Чтобы решить задачу, переформулируем ее в виде задачи о перевозке одной единицы из s в s'. Функция $\tau(x, y)$ будет теперь пониматься как стоимость перевозки одной единицы из x в y, и мы ищем самый дешевый путь. В двойственной задаче нам надо найти такие «цены» $\pi(x)$ в узлах, что

$$\pi(s') \text{ максимально} \tag{1*}$$

при условиях

$$\pi(y) - \pi(x) \leqq \tau(x, y) \quad \text{при всех } x, y \tag{2*}$$

и

$$\pi(s) = 0.$$

Теорема 5.8. *Максимальное значение* (1*) *есть длина кратчайшего пути из s в s'.*

Доказательство. Если π удовлетворяет условию (2*) и $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = P$ — любой путь из s в s', то

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \tau(x_{i-1}, x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} [\pi(x_i) - \pi(x_{i-1})] =$$
$$= \pi(x_n) - \pi(x_0) = \pi(s') - \pi(s) = \pi(s'). \tag{3}$$

Предположим, что π — функция цены, обеспечивающая максимум. Если существует такой путь $P = (x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ из s в s', что

$$\pi(x_i) - \pi(x_{i-1}) = \tau(x_{i-1}, x_i) \quad \text{при всех } i,$$

то (3) обращается в равенство, так что путь P будет минимальным. Если такого пути не существует, то пусть $S \subset N$ означает множество тех узлов, которых можно достичь из s по путям, состоящим из ребер (x, y), обладающих тем свойством, что $\pi(y) - \pi(x) = \tau(x, y)$. По предположению $s' \notin S$. Определим теперь $\bar{\pi}(x)$, положив

$$\bar{\pi}(x) = \pi(x) \qquad \text{при } x \in S,$$
$$\bar{\pi}(x) = \pi(x) + 1 \quad \text{при } x \in S'.$$

$\bar{\pi}$ также удовлетворяет (2*). В самом деле, это условие могло бы нарушиться в том единственном случае, когда $x \in S$, $y \in S'$. Если, однако, $x \in S$, то существует «допустимый» путь из s в x, а потому $\pi(y) - \pi(x) < \tau(x, y)$ (в противном случае этот путь можно было бы продолжить до пути из s в y). Таким образом,

$$\pi(y) - \pi(x) \leqq \tau(x, y) - 1$$

и

$$\tau(x, y) \geqq \pi(y) + 1 - \pi(x) = \bar{\pi}(y) - \bar{\pi}(x),$$

что доказывает наше утверждение. С другой стороны, $\bar{\pi}(s') = \pi(s') + 1 > \pi(s')$, что противоречит максимальности π. Этим завершается доказательство.

Эта теорема может быть непосредственно преобразована в некоторый вычислительный алгорифм. Соответствующая процедура аналогична использованной в задачах о назначениях и транспортной задаче, хотя и несколько проще. Численный пример для решения приводится в упражнениях. Он дает возможность читателю проверить свое понимание методов настоящей главы (упр. 15).

Имеется еще ряд задач, которые не имеют ничего общего с потоками в сетях, но которые могут быть решены путем сведе́ния их к эквивалентным сетевым задачам. В качестве примера опишем *задачу о поставщике.*

Поставщик должен снабжать салфетками банкеты в течение m последовательных дней, причем в i-й день их требуется δ_i штук. Салфетки можно 1) покупать по цене α центов за штуку, 2) отдавать в прачечную в быструю q-дневную стирку по цене β центов за штуку или 3) отдавать в обычную

r-дневную стирку по цене γ центов за штуку. Сколько салфеток нужно купить и как отдавать их в стирку, чтобы обслужить все банкеты с минимальными затратами, если $q < r$ и $\gamma < \beta < \alpha$?

Эквивалентной транспортной задачей является следующая: имеется m рынков (соответствующих банкетам), причем емкость i-го рынка равна δ_i. Далее имеется $m+1$ заводов; первый из них P_0 является складом («магазином») и имеет производительность $\sum_{i=1}^{m} \delta_i$; i-й завод соответствует i-й корзине для использованных салфеток в i-й день и соответственно имеет производительность δ_i. Наконец, стоимости γ_{ij} таковы:

$$\gamma_{ij} = \alpha \quad \text{при } j = 1, \ldots, m$$

(так как салфетку можно отправить из магазина на любой банкет по цене α)

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \infty && \text{при } i \neq 0 && \text{и} && j < i+q, \\
\gamma_{ij} &= \beta && \text{при } i \neq 0 && \text{и} && i+q \leqq j < i+r, \\
\gamma_{ij} &= \gamma && \text{при } i \neq 0 && \text{и} && i+r \leqq j.
\end{aligned}$$

Эти три соотношения выражают то обстоятельство, что салфетки нельзя выстирать менее, чем за q дней, а если они понадобятся ранее, но менее чем через r дней, то их придется стирать по высокой цене. Ясно, что эта транспортная задача эквивалентна первоначальной задаче, причем здесь пригодны методы предыдущего параграфа. Упражнение 16 в конце главы дает возможность читателю решить численный пример.

§ 9. Заключительные замечания и нерешенные вопросы

В это главе мы рассмотрели лишь несколько простейших целочисленных задач, которые могут быть решены описанными методами. Естественный и важный случай, который нами не рассматривался — это синтез транспортной задачи и задачи о перевозках, где требуется найти среди всех потоков, допустимых в смысле § 4, поток с минимальной стоимостью перевозок. Нужная теорема двойственности формулируется в упражнениях и может быть использована для получения эффективного вычислительного алгорифма нахождения оптимального потока. Поскольку в этой задаче рассматриваются как пропускные способности, так и стоимости, вычисления здесь несколько более длинны, чем те, которые рассматривались в настоящей главе, хотя они в принципе не более трудны.

Другой интересной задачей является так называемая динамическая задача о максимальном потоке, в которой задается сеть с источником и стоком, временами перехода

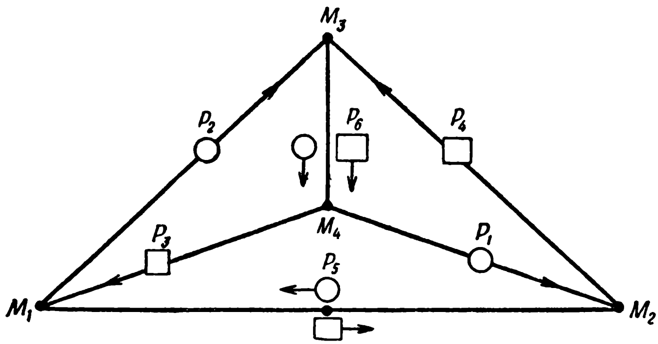


Рис. 19.

из узла в узел и пропускными способностями, определенными для каждого ребра. Задача состоит в том, чтобы максимизировать поток из s в s' в данный фиксированный период времени. Нетрудно обобщить методы настоящей главы так, чтобы решить эту динамическую задачу.

С другой стороны, есть задачи, которые кажутся на первый взгляд очень похожими на рассмотренные нами, но до сих пор не могут быть решены аналогичными методами. Удивительной иллюстрацией этого является задача о перевозках более чем одного продукта.

Следующий простой пример показывает, какие могут здесь возникнуть трудности. Это задача о перевозках, в которой фигурируют 6 заводов и 4 рынка. Пусть заводы P_1 и P_2 производят «кружки», заводы P_3 и P_4— «квадраты», а заводы P_5 и P_6— то и другое. Считается, что как каждый кружок, так и каждый квадрат занимают одну единицу объема. На каждом рынке имеется спрос на один кружок и на один квадрат, а заводы связаны с рынками ребрами с пропускной способностью, равной 1, как указано на рис. 19.

Встает вопрос, являются ли допустимыми величины спроса. Сразу видно, что спрос может быть удовлетворен отправлением с каждого завода на соседние с ним рынки по половине кружка и половине квадрата. С другой стороны, в целых числах решения задачи не существует. В самом деле, ввиду симметрии можно принять, что кружок из P_5 посылается в M_1. Тогда кружок из P_2 должен идти на M_3, а из P_6— на M_4. Точно так же квадрат из P_5 идет на M_2, из P_4— на M_3, но это означает, что квадрат из P_6 идет на M_4, что перегружает путь из P_6 в M_4.

Задачи такого типа представляют собой важный объект для дальнейшего исследования.

Библиографические замечания

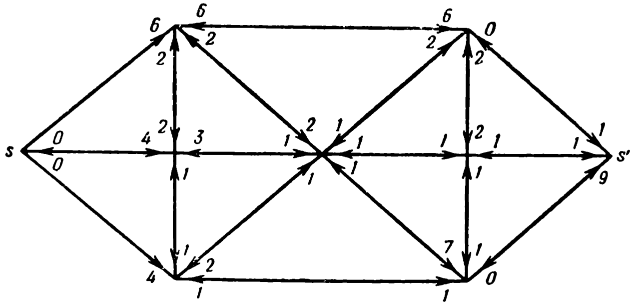
Теорема о максимальном потоке и минимальном сечении, являющаяся исходным пунктом для анализа настоящей главы, впервые была доказана Фордом и Фулкерсоном [1]. Теорема о допустимости для упрощенной задачи о назначениях принадлежит П. Холлу [1]. Второе доказательство этого результата дано Халмошем и Воганом [1]. Теорема о допустимости для задачи о перевозках установлена Гейлом [1]. При изложении задачи об оптимальных назначениях мы следовали работе Куна [3]. Модель равновесия цен излагается здесь впервые. Транспортная задача решается в § 7 методами Форда и Фулкерсона [2]. Этим авторам принадлежат также и рассматриваемые там численные примеры. Задача о кратчайшем пути описана Фордом [1], а задача о поставщике впервые предложена Джекобсом [1] и рассмотрена как транспортная Прагером [1].

Упражнения

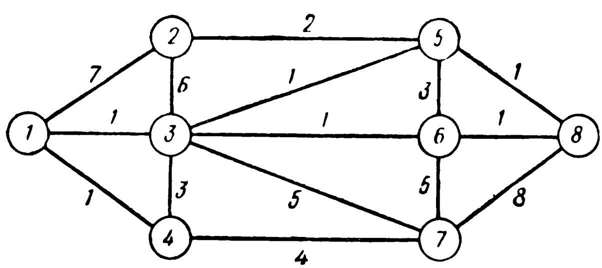
1. Доказать, что если f — произвольный поток от s к s' в сети N, то $f(s, N) = f(N, s')$.

2. Найти максимальный поток в сети, приведенной ниже.

Числа около каждого ребра означают пропускные способности в направлениях, указанных стрелками.



3. В сети, изображенной ниже, узлы 1 и 6 в кружках являются источниками с производительностями $\sigma(1) = 3$, $\sigma(6) = 5$. Узлы 4 и 8 в кружках — стоки с величинами спроса $\delta(4) = 4$, $\delta(8) = 4$. Числа около ребер — пропускные способности, одинаковые в обоих направлениях. Определить, допустима ли эта задача о перевозках.



4. Пусть (S, S') и (R, R') — два минимальных сечения в сети N. Показать, что $(S \cap R, S' \cup R')$ также является минимальным сечением. (Заметим, что эту теорему можно сформулировать, не определяя понятие потока, но ее доказательство, очевидно, требует теоремы о максимальном потоке и минимальном сечении.)

5. Пусть Q является матрицей квалификаций для упрощенной задачи о назначениях. *Покрытием* Q назовем такое

множество строк R и столбцов C матрицы Q, что любой ненулевой элемент Q находится либо в строке из R, либо в столбце из C. Доказать, что максимальное число людей, которые могут быть назначены на работы, равно минимальному числу строк и столбцов, которые покрывают Q.

6. Найти минимальное покрытие для матрицы квалификаций § 3.

7. Найти решение задачи об оптимальных назначениях, матрица производительностей которой следующая:

0	15	9	1	3	4	19
2	0	19	11	9	3	14
12	5	17	12	24	15	16
19	11	14	23	16	17	29
20	15	23	22	19	21	24
23	12	16	17	24	25	26
25	16	8	26	21	20	23

8. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — $n \times n$-матрица производительностей, а $A' = (\alpha_{ij} + \alpha_i)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — любые n чисел. Показать, что любое назначение оптимально для A' тогда и только тогда, когда оно оптимально для A.

9. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — $n \times n$-матрица производительностей. Показать, что существуют такие числа α_i, что для матрицы $A' = (\alpha'_{ij}) = (\alpha_{ij} + \alpha_i)$ значение оптимальных назначений будет определяться формулой

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \max_i (\alpha'_{ij}).$$

10. Показать, что при любом оптимальном назначении по крайней мере одно лицо получит работу, где его производительность будет наибольшей. Найти способ построения $n \times n$-матрицы производительностей при любом n, в которой при оптимальном назначении лишь одно лицо получает назначение на ту работу, где оно имеет наибольшую производительность.

11. $n \times n$-матрица называется *бистохастической*, если все ее элементы неотрицательны, и суммы элементов в каждой строке и в каждом столбце равны 1. Показать, что эти матрицы образуют выпуклую оболочку, крайние точки которой — перестановочные матрицы, т. е. такие матрицы, у которых все векторы строк и столбцов — орты.

Указание: сформулировать соответствующую задачу о потоке и применить теорему 5.4.

12. Показать, что при любой $n \times n$-матрице $A = (\alpha_{ij})$ решения канонической задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 1,$$
$$\sum \lambda_{ij}\alpha_{ij} = \max$$

образуют выпуклую оболочку, крайними точками которой являются оптимальные назначения и только они.

13. Показать, что в задаче о равновесии цен множества *допустимых элементов* [удовлетворяющие (2), § 6] соответствуют всевозможным оптимальным назначениям.

14. Решить транспортную 3×4-задачу с матрицей стоимостей

4	4	9	3
3	5	8	8
2	6	5	7

производительностями

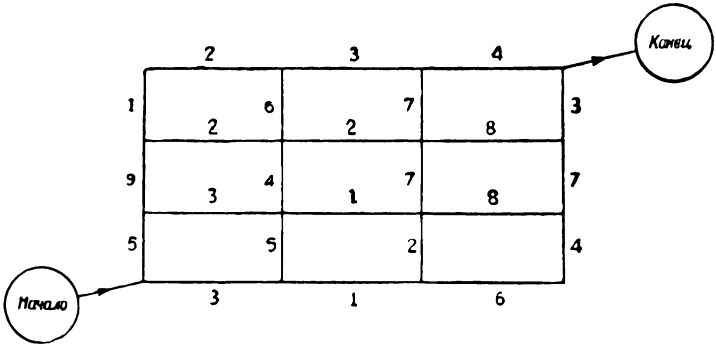
$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 5, \quad \sigma_3 = 7$$

и величинами спроса

$$\delta_1 = 2, \quad \delta_2 = 5, \quad \delta_3 = 4, \quad \delta_4 = 4.$$

15. Найти кратчайший путь в сети, изображенной на стр. 227. Числа у ребер означают расстояние в милях.

16. Поставщик должен приготовить 60 салфеток к понедельнику, 50 ко вторнику, 80 к среде, 40 к четвергу и 50 к пятнице. Салфетки стоят по 5 центов за штуку; они могут



быть выстираны в один день за 2 цента и в два дня за 1 цент. Каков наиболее экономичный способ действий для поставщика?

17. Следующая задача является обобщением транспортной. В сети N стоимость перевозки единицы груза из x в y равна $c(x, y)$. Спрос в узле x равен $d(x)$, причем отрицательный спрос толкуется как производительность. Считая $d(N) = 0$, показать, что корректно поставленной задачей об удовлетворении спроса при минимальных затратах является следующая: найти такую неотрицательную функцию g, заданную на ребрах N, что

$$\sum_{x,\,y} g(x, y)\, c(x, y) \quad \text{минимально} \tag{1}$$

при условиях, что

$$g(N, x) - g(x, N) \geqq d(x) \quad \text{для всех } x. \tag{2}$$

Путем доказательства теоремы двойственности установить, что корректно поставленной двойственной задачей является следующая: найти такую функцию π, заданную на N, что

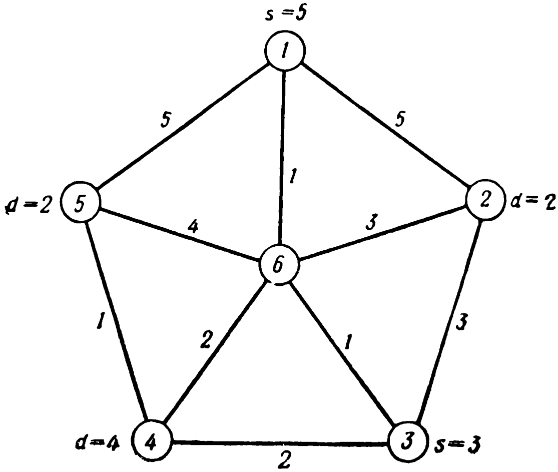
$$\sum_{x} \pi(x)\, d(x) \quad \text{максимально} \tag{1*}$$

при условиях, что

$$\pi(y) - \pi(x) \leqq c(x, y) \quad \text{для всех } x,\ y. \tag{2*}$$

18. В сети, изображенной ниже, узлы 1 и 3 в кружках являются источниками с производительностями $s(1) = 5$,

$s(3) = 3$. Узлы, обозначенные обведенными кружками цифрами 2, 4 и 5, — стоки с величинами спроса $d(2) = 2$, $d(4) = 4$, $d(5) = 2$. Числа около ребер означают стоимости перевозки единицы груза, одинаковые в обоих направлениях. Найти самое дешевое расписание перевозок, соответствующее данным производительностям и спросам.



19. Рассмотрим транспортную задачу, где заданы пропускная способность k_{ij} пути от завода P_i к рынку M_j и стоимость γ_{ij} перевозки по этому пути. Показать, что допустимое расписание перевозок ξ_{ij} оптимально в том и только в том случае, когда существуют такие цены $\pi_1, \ldots, \pi_m, \pi'_1, \ldots, \pi'_n$, что

$$\text{если } \pi'_j - \pi_i > \gamma_{ij}, \quad \text{то } \xi_{ij} = k_{ij}; \tag{1}$$

$$\text{если } \pi'_j - \pi_i < \gamma_{ij}, \quad \text{то } \xi_{ij} = 0. \tag{2}$$

Указание: см. упр. 16, гл. III.

20. В сети N с источником s и стоком s' x_1 и x_2 означают узлы N. Предположим, что а) если пропускная способность сети $k(s, x_1)$ увеличивается на δ_1, то величина максимального потока μ увеличивается на Δ_1; б) если $k(s, x_2)$ увеличивается на δ_2, то μ увеличивается на Δ_2; в) если $k(s, x_1)$

и $k(s, x_2)$ одновременно увеличиваются на δ_1 и δ_2, то μ увеличивается на Δ_{12}. Доказать, что $\Delta_{12} \leqslant \Delta_1 + \Delta_2$.

21. Как и в упр. 20, предположим, что а) если $k(s, x_1)$ увеличивается на δ_1, то μ увеличивается на Δ_1; б) если $k(x_2, s')$ увеличивается на δ_2, то μ увеличивается на Δ_2; в) если обе пропускные способности увеличиваются соответственно на δ_1 и δ_2, то μ увеличивается на Δ_{12}. Доказать, что $\Delta_{12} \geqq \Delta_1 + \Delta_2$.

22. По воздушной линии за год должно быть осуществлено n рейсов $F_1, \ldots, F_n$. Будем говорить, что рейс F_i предшествует рейсу F_j (обозначение $F_i \succ F_j$), если самолет может сначала сделать рейс F_i, и лишь затем рейс F_j. Из определения ясно, что соотношение $\succ$ обладает свойствами

$$\text{если } F_i \succ F_j \text{ и } F_j \succ F_k, \text{ то } F_i \succ F_k;$$
$$\text{если } F_i \succ F_j, \text{ то } F_j \not\succ F_i.$$

Два рейса называются *несравнимыми*, если ни один из них не предшествует другому. Доказать, что *минимальное число самолетов, необходимых для выполнения данного расписания, равно максимальному числу взаимно несравнимых рейсов.*

Указание. Рассмотрим упрощенную $n \times n$-задачу о назначениях с матрицей квалификаций $A = (\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $F_i \succ F_j$. Предположим, что максимальное число назначений и, следовательно, минимальное покрытие A равны k (см. упр. 5).

а) Используя k назначений, показать, что все рейсы можно осуществить с помощью $n - k$ самолетов.

б) Показать, что, если покрытие матрицы A содержит как i-ю строку, так и i-й столбец A, то оно неминимально. Доказать затем, что все рейсы F_i, для которых ни i-я строка, ни i-й столбец не принадлежат минимальному покрытию, образуют множество, состоящее из $n - k$ несравнимых рейсов.

ГЛАВА VI

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ: ПРИМЕРЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

Все экономические модели, которые мы до сих пор рассматривали, были одного типа: их можно назвать *моделями оптимизации*[1]). В таких моделях ставится задача найти процедуру достижения некоторой четко определенной цели, например, максимизации доходов или минимизации стоимостей. В экономике такие модели обычно применяются к случаям, когда имеется отдельная фирма или, возможно, отдельная страна с планируемой экономикой. Теория оптимизации — несомненно наиболее широко разработанная область теоретической экономики. Однако задачи оптимизации составляют лишь небольшой и довольно частный раздел экономики. Они не охватывают большинства задач, касающихся экономики в целом, так называемых «задач рынка». В самом деле, они не охватывают ситуаций, где имеются группы лиц с совершенно различными интересами, так что оптимальное состояние для одной группы может быть далеко не оптимальным для другой.

В последующих главах этой книги мы будем иметь дело главным образом с моделями, не принадлежащими к простому оптимизационному типу, и читателю следует подготовиться к определенному изменению темы наших рассуждений. При рассмотрении линейного программирования мы получили вполне отчетливую теорию. Все обсуждаемые вопросы имели очевидный смысл. Теория была основательно разработана, причем даже были получены эффективные методы для нахождения решений, и, что самое важное, с самого начала было видно, на какие вопросы следует получить ответ. С другой стороны, в ситуациях не оптими-

---

[1]) Исключение составляют задачи о равновесии цен в гл. III, § 5, гл. V, § 6.

зационного характера первой и обычно наиболее трудной задачей является выбор тех вопросов, на которые нужно отвечать. Оставшаяся часть этой книги в значительной степени посвящена некоторым ответам, даваемым в этих задачах при различных ситуациях. Эти ответы по необходимости будут более предварительными, чем ответы для простых задач максимизации и минимизации, и читатель не должен ожидать отработанных и завершенных результатов. Теория «многоцелевых» моделей еще находится в начальной стадии развития, и лучшее, что мы можем сделать,— это познакомить читателя с рядом наиболее интересных результатов, которые были получены для некоторых частных случаев.

Мы уже упоминали в качестве характерного свойства неоптимизационных моделей идею о лицах и группах лиц с противоречивыми интересами. Теория игр пытается изучать экономическое поведение, выделяя именно это характерное свойство, которое в простейшей форме выступает в стратегических играх. Программу фон Неймана и Моргенштерна можно довольно грубо описать как попытку изучить экономические модели, анализируя сперва эти, более простые, а потому более легко поддающиеся изучению игровые модели. Ко времени написания этой книги все еще не ясно, будет ли иметь успех такая программа в отношении приложения ее к экономике. Однако общепризнано, что теория так называемых антагонистических игр уже достигла довольно значительных успехов, правда, не как средство непосредственного изучения экономических явлений, а главным образом как пример построения модели и ее анализа.

В двух последующих главах читателю будет предоставлена возможность подробно изучить этот пример важной и содержательной математической теории, которая успешно описывает определенный вид поведения, «напоминающего экономическое». Для каждого, кто интересуется формулировкой и изучением моделей поведения, понимание этого исходного прототипа является поэтому необходимым.

Как и прежде, начнем с иллюстрации понятия игры на конкретных примерах.

§ 1. Первые примеры и определения

Во всех играх, рассматриваемых в настоящей главе, участвуют два игрока, игрок I и игрок II. Опишем ряд игр, сначала с помощью системы словесных «правил», а затем с формальными математическими обозначениями.

Пример 1. Чет-нечет (сравнение монет). *Правила.* Каждый игрок выбирает одно из чисел, 1 или 2, не зная выбора противника. После выяснения их выбора I платит или получает доллар в зависимости от нечетности или четности суммы выбранных чисел.

Эта, конечно, всем знакомая игра, обычно осуществляющаяся путем «выбрасывания» одного или двух пальцев. Ясно, что механизм выбора несуществен, когда речь идет об исходах игры. Полезно иметь схему, в которой сохраняются все существенные особенности игры, но исключены несущественные. Для описанной выше игры характерно то, что каждый игрок имеет два способа действия, или две стратегии: он может выбрать либо число 1, либо 2. Если мы обозначим стратегии I через s_1 и s_2, а стратегии II— через t_1 и t_2, то всю игру сжато можно представить в следующей табличной форме

$$\begin{array}{c|cc|} & t_1 & t_2 \\ \hline s_1 & 1 & -1 \\ s_2 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

где число на пересечении i-й строки и j-го столбца означает величину выигрыша I у II, когда I использует стратегию s_i, а II— t_j. Эта таблица называется *матрицей выигрышей* описанной игры.

Рассмотрим теперь другую игру, *сравнение монет.*

Правила. Каждый игрок кладет на стол монету. Если обе монеты выложены одной стороной, то они достаются I, если же одна лежит гербом вверх, а другая — решеткой, то их забирает II, Сразу видно, что такая игра, по сути дела, равносильна предыдущей. Пусть стратегии выбора гербов и решеток двумя игроками обозначены через s_H, s_T и t_H, t_T. Тогда матрица выигрышей есть

$$\begin{array}{c|cc|} & t_H & t_T \\ \hline s_H & 1 & -1 \\ s_T & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

Различия между таблицами (1) и (2) заключаются только в названиях стратегий и денежных единицах. Однако ни одно из этих различий не оказывает влияния на ход игры, поэтому для теоретических целей игру можно отождествить с ее матрицей выигрышей. Итак, *все игры, имеющие одинаковые матрицы выигрышей, будут далее рассматриваться как одна и та же игра.*

Прежде чем вводить новые термины, рассмотрим другой пример, который является обобщением предыдущей игры.

Пример 2. Морра. *Правила.* Игроки одновременно показывают один или два пальца, и в тот же момент каждый из игроков называет число. Если число, названное одним из игроков, совпадает с общим числом пальцев, показываемых обоими игроками, то игрок получает со своего противника выигрыш, равный этому числу (если оба игрока угадают верно, то чистый платеж каждого равен 0).

Мы видим, что здесь каждый игрок имеет четыре возможные стратегии. Он может показать один палец и сказать, что в сумме их будет два или три, или показать два пальца и сказать, что всего их будет три или четыре. (Конечно, имеются и другие возможности, например, показать один и назвать четыре, но такая стратегия, очевидно, никогда не может привести к выигрышу. Поэтому ее можно сразу исключить из рассмотрения.) Если обозначить через s_{ij} и t_{ij} стратегии «показать i пальцев и назвать число j»

соответственно для первого и второго игроков, то мы получим следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{c|cccc|} & t_{12} & t_{13} & t_{23} & t_{24} \\ \hline s_{12} & 0 & 2 & -3 & 0 \\ s_{13} & -2 & 0 & 0 & 3 \\ s_{23} & 3 & 0 & 0 & -4 \\ s_{24} & 0 & -3 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (3)$$

Так, например, если I выбирает s_{13}, а II— t_{24}, то это значит, что I показывает один палец, II—два пальца, что в сумме составляет три — число, названное I (но не II). Следовательно, I выигрывает три у II, как указано в матрице.

Предыдущими иллюстративными примерами мы уже подготовлены к формализации некоторых из приведенных выше понятий.

Определение. *Антагонистическая игра* Γ описывается двумя множествами S и T и вещественной функцией φ, определенной на парах (s, t), где $s \in S$, $t \in T$.

Терминология. Элементы s и t множеств S и T называются стратегиями соответственно игрока I и игрока II. Функция φ носит наименование *функции выигрыша*, а ее значение называется *выигрышем*.

Интерпретация. Число $\varphi(s, t)$ есть величина, которую II платит I в случае, когда I избирает стратегию s, а II— стратегию t.

Антагонистические игры часто называются также играми двух лиц с нулевой суммой. Термин «двух лиц» понятен. Термин же «с нулевой суммой» означает, что сумма платежей первого игрока второму и второго первому, соответствующая любой паре стратегий s и t, равна нулю, или, проще говоря, один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой. С этого момента, если это не будет оговорено особо, речь будет идти только о таких играх, и под игрой будет всегда пониматься именно такая игра.

Обозначение. Игру Г с множествами стратегий S и T и функцией выигрыша φ будем обозначать через $(S, T; \varphi)$.

Если множества S и T конечны, то, как мы видели, выигрыш φ можно представить в виде матрицы. В связи с этим такие игры будут называться *матричными.*

Естественно спросить, охватывают ли эти формальные определения то, что мы обычно имеем в виду, говоря об играх, например о шахматах, бридже, покере. Если бы эта книга предназначалась как руководство по теории игр, то обстоятельное освещение этих вопросов было бы обязательным. Здесь же достаточно отметить, что все эти игры действительно могут быть включены в общий класс матричных игр, хотя фактическое выписывание множеств S и T, а также матрицы выигрышей φ оказывается невозможным вследствие огромного числа имеющихся стратегий. Из рассматриваемых в следующем параграфе примеров читатель получит некоторое представление о том, как можно было бы установить возможность описания упомянутых выше игр при помощи только что определенной общей схемы.

§ 2. Дальнейшие примеры матричных игр

Пример 3. Игра «ходи́». *Правила.* У каждого игрока имеются на руках n карт, занумерованных числами от 1 до n. При первом «ходе» каждый игрок выбирает одну из своих карт, и тот, кто выложил старшую карту, получает выигрыш a_1, или, если карты равны, каждый выигрывает $a_1/2$. На следующем ходе каждый из игроков выбирает одну из своих оставшихся карт, и положивший старшую карту выигрывает a_2, а в случае равенства каждый получает $a_2/2$. Игра продолжается так до тех пор, пока не кончатся все карты, после чего игрок, на которого записан больший выигрыш, получает разницу со своего партнера. (Последовательность чисел $a_1, \ldots, a_n$ известна обоим игрокам заранее.)

Покажем, что «ходи́» можно рассматривать как матричную игру. Чтобы сделать это, мы должны описать множества стратегий S и T. Решающим свойством пары стратегий является то, что как только стратегии выбраны, сразу определяется исход игры, т. е. выигрыш игроков. Так, решение выложить карту i на первом ходе *не является* стратегией. С другой стороны, решение выложить на первом ходе карту i_1, на втором — карту i_2, ... и на n-м — карту i_n составляет стратегию. Однако это весьма частный (и не очень хороший) вид стратегии, потому что все решения принимаются заранее и не используется информация, которую получает игрок в процессе игры относительно того, какие карты еще остаются у партнера. Наиболее общая стратегия выглядит примерно так: на первом ходе выбрать карту i; на втором ходе выбрать карту $i_1, \ldots, i_n$ согласно тому, какую карту $1, 2, \ldots, n$ выбрал противник на первом ходе. На третьем ходе выложить карту $i_{(j,k)}$, если противник выложил карту j на первом ходе и карту k на втором и т. д.

Подсчитаем фактически число стратегий для игры с тремя картами. При использовании обозначений предыдущего параграфа стратегию можно записать в виде (i, i_1, i_2, i_3). Число i, карту, выкладываемую на первом шаге, можно выбрать 3 способами, а каждое из чисел i_1, i_2 и i_3 — 2 способами из оставшихся карт. Таким образом, общее число стратегий каждого игрока равно 24.

Стратегия для этой игры, как и для любой игры, может быть словесно охарактеризована как «совокупность инструкций относительного того, как следует поступать игроку при любых возможных положениях, которые могут возникнуть на каждом этапе игры». (Такое определение, конечно, можно уточнить, но это потребовало бы большого формализма, что для нас здесь нежелательно.)

Заметим, что такие знакомые игры, как шахматы, шашки и «крестики-нолики», можно, по крайней мере теоретически, трактовать как матричные игры. Для игры в «крестики-нолики» можно даже попытаться выписать явно некоторые стратегии. Для шахмат, конечно, эта задача практически невозможна. Однако для теоретических целей достаточно знать, что такая формализация существует.

Пример 4. Блеф. *Правила.* Две карты Ст и Мл кладутся в шляпу. I вынимает карту и смотрит на нее. Затем он может «пасовать», платя при этом игроку II сумму $a > 0$, или «надбавлять». В последнем случае II может или «пасовать», платя I величину a, или «подравнять». Если II подравнивает, то он получает с I или платит ему величину b в зависимости от того, окажется ли у I Мл или Ст. Мы считаем, что $b > a$.

Прежде чем выписывать матрицу выигрышей, заметим, что если I получает Ст, то, конечно, ему нецелесообразно пасовать и терять a, тогда как надбавляя, он может выиграть по крайней мере a. Если мы согласимся исключить эту явно «плохую» стратегию, то I имеет две стратегии, соответствующие надбавке или пасу при извлечении им Мл. Обозначим эти стратегии через s_B, и s_F. II также имеет две стратегии: t_C (подравнять), t_F (спасовать).

Эта игра имеет одну новую особенность, с которой мы ранее не встречались, а именно начальный «случайный ход» I, заключающийся в извлечении карты. Это значит, что при подсчете функции выигрыша мы должны рассматривать *математические ожидания*. Так, если игрок I выбирает s_B, а II— t_C, то ввиду того, что I получит Ст и Мл с вероятностями $^1/_2$, его ожидаемый выигрыш равен 0. Если I выбирает s_B, а II— t_F, то I выигрывает a независимо от результата извлечения. Если I придерживается стратегии s_F, а II— стратегии t_C, то I выигрывает b, если извлекает Ст, т. е. в половине случаев, и теряет a в остальных случаях. Таким образом, математическое ожидание выигрыша для него равно $(b - a)/2$. Наконец, если оба партнера пасуют, то средний ожидаемый выигрыш снова равен 0. Итак, мы имеем

$$\begin{array}{c|cc|} & t_C & t_F \\ \hline s_B & 0 & a \\ s_F & \frac{b-a}{2} & 0 \\ \hline \end{array} \tag{4}$$

Эта игра называется игрой с блефом из-за первой стратегии I, при которой он надбавляет, даже имея на руках младшую карту. Заметим, что если I никогда не блефует, выбирая неизменно t_F, то II может гарантировать для себя средний выигрыш 0. С другой стороны, если I всегда блефует, то II опять-таки может оказаться не в убытке, постоянно подравнивая. Опыт и здравый смысл подсказывают, что желателен промежуточный образ действий, заключающийся в частичном блефе. Теория, которую мы далее кратко изложим, подтвердит это предчувствие и уточнит его указанием, сколь часто должен блефовать I и на какой выигрыш он может рассчитывать, поступая таким образом.

Пример 5. «Игра A, B, C». *Правила.* Тасуется колода, состоящая из трех карт A, B, C, и каждому из двух игроков сдается по одной карте. Посмотрев на свою карту, I делает предположение относительно того, какая карта у II. Посмотрев на свою карту и услышав предположение I, II также пытается угадать карту I. Если какой-либо из игроков угадывает правильно, другой платит ему доллар.

Здесь комбинируются многоходовый характер игры «ходи́» и элемент случайности блефа. В действительности, эта игра является трехходовой, причем первым ходом является сдача карт, вносящая элемент случайности, вторым — предположение I, а третьим — предположение II.

Определим теперь множества стратегий S и T. Припоминая определение стратегии как «полного множества инструкций», мы видим, что I должен знать свой образ действий при наличии у него карты A, B, C. Например, его стратегией может быть такая: назвать C, если у него на руках A, назвать A, если у него B или C. Эту стратегию можно обозначить символом (C, A, A). Вообще стратегию I можно записать в виде (X, Y, Z), где каждая переменная X, Y, Z принимает любое из трех значений A, B или C и имеет следующий смысл: если досталась A, назвать X, если B — назвать Y, если C — назвать Z. Так как каждая из трех переменных X, Y и Z может принять любое из значений A, B или C, то всего в распоряжении I имеется 27 стратегий.

Стратегия II еще более сложна, так как у него два источника информации, на которой основывается его решение, а именно знание собственной карты и предположение противника. Стратегию II можно представить следующей таблицей:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \overbrace{\begin{array}{ccc} A & \quad B & \quad C \end{array}}^{\text{имеет } P_2} \\
\text{называет } P_1 & \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \right. & \left| \begin{array}{ccc} X_{AA} & X_{AB} & X_{AC} \\ X_{BA} & X_{BB} & X_{BC} \\ X_{CA} & X_{CB} & X_{CC} \end{array} \right|
\end{array}
\tag{5}
$$

Здесь переменные X_{AA}, X_{AB} и т. д. принимают значения A, B или C. Если II имеет карту A, а I называет карту C, то II назовет карту X_{CA} и так далее. Так как каждый из 9 элементов матрицы может принять любое из трех значений, общее число возможностей равно $3^9 = 19\,683$. Некоторые из этих стратегий, однако, можно сразу исключить. Ясно, что для II бессмысленно называть карту, которую он имеет. (Однако, как мы скоро увидим, для I дело обстоит иначе.) Другими словами, можно считать, что элементы таблицы могут принимать только два значения и число возможных стратегий сокращается до $2^9 = 512$, которое тем не менее для удобных расчетов слишком велико.

К счастью, некоторые простые соображения, основанные на здравом смысле, позволяют редуцировать игру до подходящих размеров. Заметим прежде всего, что у I есть лишь два существенно различных способа действий. Он может назвать либо ту карту, которая имеется у него на руках, либо одну из оставшихся карт. Обозначим эти стратегии соответственно через s_S и s_D. У II также есть две возможности. Если I называет карту, которую имеет II, то II называет одну из оставшихся карт, неважно какую именно. II имеет фактическую возможность выбора стратегий в единственном случае, а именно, когда его карта не была названа игроком I. Здесь у него две возможности: а) назвать ту же карту, что и I; б) назвать третью карту. Эти стратегии будут обозначаться соответственно через t_S и t_D. Мы свели теперь описанную первоначально игру к такой игре, в которой каждый игрок имеет лишь две стратегии. Переходим к оценке матрицы выигрышей.

Случай 1. I выбирает s_S, II — t_S. В этом случае выигрыш (I у II) равен -1, поскольку II правильно назвал карту I.

Случай 2. I выбирает s_S, II — t_D. В этом случае ни один из игроков не угадывает и выигрыш равен нулю.

Случай 3. I выбирает s_D, II — t_S. В половине случаев I не будет угадывать карту II, и тогда II тоже будет ошибаться, что дает выигрыш нуль. Когда I угадывает правильно, II также угадает правильно с вероятностью $^1/_2$. Следовательно, ожидаемый выигрыш в этом случае равен $^1/_4$.

Случай 4. I выбирает s_D, II — t_D. В этом случае, если I не угадывает правильно, то это наверняка сделает II.

Такое положение будет иметь место в половине всех случаев. Если I угадывает правильно, то анализ аналогичен проведенному в случае 3, причем выигрыш равен $-{}^1/_4$. Таким образом, матрица игры равна

$$\begin{array}{c|cc|} & t_S & t_D \\ \hline s_S & -1 & 0 \\ s_D & {}^1/_4 & -{}^1/_4 \\ \hline \end{array} \qquad (6)$$

Словесные рассуждения, которые привели к такому существенному сокращению матрицы выигрышей, можно, конечно, формализовать. Читатель, интересующийся дальнейшими подробностями, отсылается к библиографии в конце главы.

Из приведенной упрощенной матрицы сразу можно усмотреть ряд свойств игры. Стратегия s_S, как и в предыдущем примере, является стратегией блефа. Очевидно, s_S никогда не выигрышна для I. С другой стороны, если II уверен, что I никогда не блефует, то он может обеспечить себе ожидаемый выигрыш $-{}^1/_4$, выбирая t_D. Как и в предыдущем случае, можно ожидать, что ответ для I должен быть некоторой смесью, комбинацией двух его стратегий.

§ 3. Решения игр. Смешанные стратегии

Мы привели четыре примера матричных игр различной степени сложности. Приступим теперь к «решению» этих примеров или, говоря точнее, определим для них понятие решения и дадим решения примеров 1, 2 и 4 (ведь игра «ходи́» до настоящего времени «не решена»).

Рассмотрим сначала игрока I в игре «чет-нечет». Ему ничего неизвестно о психологии своего партнера; в частности, у него нет сведений, более ли вероятен для II выбор одной стратегии, чем другой. При таких обстоятельствах ясно, что I не может надеяться выиграть или даже иметь положительное математическое ожидание выигрыша. Лучшее, на что он может надеяться, это добиться равенства, т. е. иметь математическое ожидание, равное нулю. Мы видим, что у I имеется простой способ обеспечить нулевой средний выигрыш как бы хитер ни был игрок II. Все, что ему нужно делать, это подбрасывать симметричную монету, выбирая s_1, когда она выпадает орлом, и s_2, когда она выпадает решеткой. Пренебрегая возможностью ясновидения II, I может обеспечить для себя таким образом нулевое математическое ожидание. Укажем, однако, на важность того, чтобы монета, бросаемая I, была симметричной. Предположим, например, что монета имеет большую вероятность выпадения орлом. Тогда I избирал бы s_1 с вероятностью, большей, чем $^1/_2$, и II мог бы обеспечить для себя средний положительный выигрыш, выбирая стратегию t_2.

Подводя итог, мы скажем, что *решением* игры «чет-нечет» для I (и по симметрии также для II) является случайный выбор обеих стратегий и притом с равными вероятностями. Эта процедура обладает тем свойством, что гарантирует каждому из игроков математическое ожидание выигрыша, равное нулю. Так как бо́льшее математическое ожидание для любого из игроков ничем не может быть гарантировано, разумно считать такую программу в некотором смысле оптимальной.

Игра «чет-нечет» настолько проста, что полученное только что решение может показаться очевидным и чуть ли не вытекающим из самого определения игры. Обратимся поэтому к более сложной игре, именно к игре морра, где те же идеи приведут к решению, которое заранее отнюдь не очевидно. Для этой игры матрица выигрышей есть

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	2	−3	0
s_2	−2	0	0	3
s_3	3	0	0	−4
s_4	0	−3	4	0

Ввиду симметричности игры (скоро мы это понятие уточним) для любого из игроков, очевидно, не представляется возможным избрать стратегию, гарантирующую ему положительное математическое ожидание (в самом деле, любой способ действий I может быть «скопирован» II, что делает математическое ожидание равным нулю). Следовательно, лучшее, на что мы можем надеяться,— это найти процедуру, которая оставляет игрока не в убытке. Мы утверждаем, что такой процедурой для I является выбор одной из стратегий s_2 или s_3 с помощью некоторого специального устройства, дающего s_2 с вероятностью $^3/_5$ и s_3 с вероятностью $^2/_5$ (можно положить, например, в шляпу 5 карт, 3 из которых обозначены s_2 и 2 — s_3, хорошо перемешать эти карты и вытащить одну из них). Ожидаемый выигрыш для любых возможных поведений II при таком способе действий легко подсчитать. Предположим, что по тем или иным причинам игрок II пришел к решению придерживаться t_1. Тогда I потеряет 2 с вероятностью $^3/_5$ и выиграет 3 с вероятностью $^2/_5$. Его ожидаемый выигрыш, следовательно, равен

$$\frac{3}{5}\cdot(-2)+\frac{2}{5}\cdot 3=0.$$

Если II выбирает t_2 или t_3, то ясно, что ни один из партнеров не выигрывает. Наконец, если II выбирает t_4, то I выигрывает 3 с вероятностью $^3/_5$, проигрывает 4 с вероятностью $^2/_5$, и его ожидаемый выигрыш будет равен

$$\frac{3}{5}\cdot 3+\frac{2}{5}(-4)=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, как и утверждалось, игроку I гарантировано равное нулю математическое ожидание выигрыша независимо от того, что делает II. Эту процедуру поэтому мы будем называть *оптимальной*. Уместно спросить, имеются ли какие-нибудь другие оптимальные процедуры. Оказывается, что для этой игры они существуют. В действительности мы даже можем указать бесконечное множество таких оптимальных процедур. Именно: пусть I выбирает s_2 или s_3 и пусть вероятность выбора s_2— любое число ϱ между $^4/_7$ и $^3/_5$ (вероятность выбора s_3, конечно, равна $1-\varrho$). Любая такая процедура обеспечивает выигрыш ноль против t_2 и t_3; при этом против t_1 мы имеем

$$\varrho(-2)+(1-\varrho)3=-5\varrho+3\geqslant 0, \quad \text{так как } \varrho\leqq\frac{3}{5},$$

а против t_4

$$\varrho(3)+(1-\varrho)(-4)=7\varrho-4\geqq 0, \quad \text{так как } \varrho\geqq\frac{4}{7}.$$

Нетрудно видеть, что множество описанных выше процедур включает *все* оптимальные рандомизированные[1]) процедуры. Прежде, чем это доказать, формализуем понятие рандомизированной процедуры, которое действительно является основным в последующей теории.

Определение. Пусть Γ — игра $(S, T; \varphi)$. *Смешанной стратегией* σ игрока I называется такая вещественная функция на S, что

$$\sigma(s)\geqq 0, \tag{1}$$

$$\sigma(s)=0 \text{ для всех, кроме конечного числа } s\in S, \tag{2}$$

$$\sum_{s\in S}\sigma(s)=1.$$

Смешанная стратегия τ для игрока II определяется аналогичным образом.

Множества всех смешанных стратегий I и II обозначаются соответственно через $\langle S\rangle$ и $\langle T\rangle$.

Интерпретация. Число $\sigma(s)$ является вероятностью, с которой I выбирает s.

Чтобы отличать первоначальные стратегии s и t от смешанных стратегий σ и τ, мы будем иногда называть первые *чистыми стратегиями.* Заметим, однако, что чистая стратегия s на самом деле является тем частным случаем смешанной стратегии σ, для которого $\sigma(s)=1$, и $\sigma(s')=0$ при $s'\neq s$. Функция выигрыша φ очевидным образом распространяется на смешанные стратегии

$$\varphi(\sigma, \tau)=\sum_{s,\ t}\sigma(s)\tau(t)\varphi(s, t).$$

Последнее выражение просто является математическим ожиданием выигрыша, когда I выбирает σ, а II — τ.

[1]) Рандомизированным явлением называется такое случайное явление, в которое элемент случайности введен искусственно. Рандомизированными действиями игроков являются их смешанные стратегии. — *Прим. ред.*

Игру, в которой стратегии и выигрыш обобщены подобным образом, мы будем называть *расширенной* и обозначим ее $\langle\Gamma\rangle = (\langle S\rangle, \langle T\rangle, \varphi)$.

В случае матричных игр для смешанных стратегий удобно ввести специальные обозначения. Пусть S и T состоят соответственно из m и n стратегий и перенумерованы в некотором порядке: $s_1, \ldots, s_m$ и $t_1, \ldots, t_n$; выигрыш $\varphi(s_i, t_j)$ пусть обозначен через α_{ij}. Тогда смешанная стратегия игрока I задается m-мерным вектором $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, где ξ_i есть вероятность выбора s_i для I (таким образом, $\xi_i \geqslant 0$ и $\sum \xi_i = 1$). Аналогично, смешанной стратегией II является n-мерный вектор $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ с соответствующей интерпретацией. Формула для среднего выигрыша теперь такова

$$\varphi(x, y) = \sum_{i, j} \xi_i \alpha_{ij} \eta_j = xAy,$$

где A — матрица выигрышей.

Используя только что введенные понятия, можно сказать, что «решением» (этот термин еще пока формально не определен) игры морра является смешанная стратегия

$$\bar{x} = (0,\ \varrho,\ 1-\varrho,\ 0), \text{ где } \frac{4}{7} \leqq \varrho \leqq \frac{3}{5}.$$

Покажем теперь, что это единственные стратегии, дающие неотрицательное математическое ожидание выигрыша при любых стратегиях II. Чтобы убедиться в этом, предположим, что

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

является произвольной смешанной стратегией I, гарантирующей неотрицательный средний выигрыш. Заметим сначала, что $\xi_1 = 0$, ибо если бы ξ_1 было положительным, то при смешанной стратегии II $y = (0, {}^4/_7, {}^3/_7, 0)$ выигрыш оказался бы равным

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{7}(2\xi_1 - 3\xi_4) + \frac{3}{7}(-3\xi_1 + 4\xi_4) = -\frac{1}{7}\xi_1 < 0.$$

Аналогично убеждаемся в том, что $\xi_4 = 0$. Действительно, если это не так, то положим $y = (0, {}^3/_5, {}^2/_5, 0)$, и тогда

$$\varphi(x, y) = \frac{3}{5}(2\xi_1 - 3\xi_4) + \frac{2}{5}(-3\xi_1 + 4\xi_4) = -\frac{1}{5}\xi_4 < 0.$$

Далее, пусть $\xi_2 > {}^3/_5$, и II выбирает t_1. Это дает нам

$$\varphi(x, t_1) = -2\xi_2 + 3(1-\xi_2) = -5\xi_2 + 3 < 0.$$

Наконец, если $\xi_2 < {}^4/_7$ и II придерживается t_4,

$$\varphi(x, t_4) = 3\xi_2 - 4(1-\xi_2) = 7\xi_2 - 4 < 0.$$

Все это показывает, что оптимальными стратегиями являются только приведенные выше. Следует указать на довольно сложный вид решения игры, несмотря на простоту ее правил.

§ 4. Значение игры и оптимальные стратегии

Рассмотрим вновь игру «блеф» (пример 4) с матрицей

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} 0 & a \\ \frac{b-a}{2} & 0 \end{array}} \end{array}$$

Поскольку эта игра несимметрична, заранее неясно, к какому среднему выигрышу должен стремиться I. Предположим, однако, что I пользуется при игре смешанной стратегией $\bar{x} = \left(\frac{b-a}{b+a}, \frac{2a}{b+a}\right)$. Нетрудно проверить, что математическое ожидание его выигрыша при любой, смешанной или иной, стратегии II равно $\omega = a(b-a)/(b+a)$. Иными словами, I может гарантировать себе по крайней мере ω, которое положительно ввиду $b > a$, но сделать это он может лишь путем блефа, т. е. выбирая стратегию s_1, означающую надбавку при наличии младшей карты. В самом деле, откровенность — плохое поведение для I, потому что если он не блефует и II уверен в этом, то выбор t_2 делает выигрыш для I невозможным. Конечно, неизменный блеф равным образом плох, потому что в этом случае II выбирает t_1 и I ничего не выигрывает.

Заметим далее, что I не может обеспечить себе средний выигрыш, бо́льший, чем ω, так как, если II принимает смешанную стратегию $\bar{y} = \left(\frac{2a}{b+a}, \frac{b-a}{b+a}\right)$, то I получит ровно ω независимо от того, как он играет. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой. Значит, ω является тем наибольшим выигрышем, который может гарантировать себе игрок I. Заметим, что число ω играет ту же роль, какую играл нуль в предыдущих примерах. Оно называется *значением* игры.

Подведем итоги. *Играя надлежащим образом,* I *может обеспечить себе выигрыш, по крайней мере равный* ω. *Игрок* II, *играя разумно, может быть уверен, что* I *получит не более, чем* ω. Смешанные стратегии $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются оптимальными; число ω называется значением игры.

Теперь мы можем дать общее определение.

Определение. Игра $\Gamma = (S, T; \varphi)$ имеет *решение* $(\bar{s}, \bar{t}; \omega)$, если

$$\varphi(\bar{s}, t) \geqq \omega \quad \text{при всех} \quad t \in T,$$

$$\varphi(s, \bar{t}) \leqq \omega \quad \text{при всех} \quad s \in S.$$

Чистые стратегии $\bar{s}$ и $\bar{t}$ называются *оптимальными*; число ω называется значением игры. Заметим, что $\omega = \varphi(\bar{s}, \bar{t})$ (почему?)

Говорят, что игра Γ имеет *решение в смешанных стратегиях*, если имеет решение расширенная игра $\langle \Gamma \rangle$.

Мы только что видели, что игра «блеф» имеет решение в смешанных стратегиях. Читателю следует показать, что эти оптимальные стратегии — единственные; таким образом, для того чтобы быть уверенным в выигрыше ω, игроку I необходимо не просто блефовать, но блефовать некоторым вполне определенным образом, т. е. с вероятностью $(1 - a/b)/(1 + a/b)$. Это показывает, что чем больше отношение первоначальной ставки и надбавки, тем большей должна быть вероятность блефа. Величина выигрыша I всегда менее a, но стремится к a, когда a/b стремится к нулю.

Проведенное исследование подтверждает основанное на здравом смысле предчувствие того, что в играх такого рода желателен эпизодический блеф. Однако анализ идет здесь дальше здравого смысла; интуитивные соображения мы делаем точными и облекаем их в количественную форму. Наш анализ утверждает не только необходимость блефа, но и указывает, сколь часто следует блефовать и какого при этом можно ожидать выигрыша. Подобное исследование можно провести по крайней мере в принципе, и для таких «реальных» игр, как, например, различные виды покера. Конечно, огромное число стратегий, имеющихся в таких играх, делает численное их решение практически невозможным.

Как читатель уже наверное догадывается, положение дел в рассмотренных нами примерах характерно для матричных игр вообще. Мы наблюдали лишь частные примеры того, что правильно назвать:

Основная теорема теории игр. *Каждая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 8. Однако одно обстоятельство немедленно вытекает из определения.

Теорема 6.1. *Игра* Γ *имеет не более одного значения.*

Доказательство. Пусть $(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1; \omega_1)$ и $(\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2; \omega_2)$ — решения игры Γ. Тогда

$$\omega_1 = \varphi(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1) \geqq \varphi(\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_1) \geqq \varphi(\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2) =$$
$$= \omega_2 \geqq \varphi(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_2) \geqq \varphi(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1) = \omega_1,$$

так что $\omega_1 = \omega_2$.

Словесное рассуждение, пожалуй, здесь еще более наглядно. Если, скажем, $\omega_1 \leqslant \omega_2$, то игрок II может гарантировать себе ω_2. Однако II может помешать I выиграть более, чем ω_1. Это должно означать, что $\omega_1 = \omega_2$.

Замечание. Обратим внимание читателя на следующий полезный факт. Чтобы показать, что $(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}; \omega)$ является решением игры Γ, достаточно проверить выполнение неравенств

$$\varphi(\bar{\sigma}, t) \geqq \omega \geqq \varphi(s, \bar{\tau})$$

только для всех *чистых* стратегий s и t, потому что если $\varphi(\bar{\sigma}, t) \geqq \omega$ при всех t из T, то

$$\varphi(\bar{\sigma}, \tau) = \sum_t \tau(t)\, \varphi(\bar{\sigma}, t) \geqq \omega \sum_t \tau(t) = \omega$$

при всех τ и, аналогично, $\varphi(\sigma, \bar{\tau}) \leqslant \omega$ при всех σ.

Ввиду сказанного для установления оптимальности данной смешанной стратегии достаточно показать, что она осуществляет значение игры при всех чистых стратегиях противника.

Рассмотрим теперь игру A, B, C (пример 5) с матрицей

$$\begin{array}{c|cc|} & t_S & t_D \\ \hline s_S & -1 & 0 \\ s_D & {}^1/_4 & -{}^1/_4 \\ \hline \end{array}$$

Предоставляем читателю проверить, что решение этой игры есть $\bar{x} = ({}^1/_3, {}^2/_3)$, $\bar{y} = ({}^1/_6, {}^5/_6)$; $\omega = -{}^1/_6$ и что оптимальные стратегии единственны. Это довольно неожиданный результат, потому что он требует применения блефа игроком I; в данной игре им является «называние» игроком своей собственной карты с вероятностью ${}^1/_3$. То же самое случилось бы, если бы I не обращал внимания на свою карту и просто случайно называл карту. В самом деле, один из оптимальных способов действий для I заключается в том, чтобы постоянно называть какую-нибудь карту, например, карту A, не глядя на свою собственную, так как это, очевидно, вынуждает его блефовать с нужной вероятностью. Такое положение дел можно интерпретировать следующим образом: информация, получаемая I от знакомства со своей картой, для него бесполезна, потому что любой способ игры, который использует эту информацию, дает сведения и противнику.

Мы довольно долго обсуждали последние два примера, потому что они удивительным образом иллюстрируют сравнительно простой путь решения теорией игр довольно тонких вопросов стратегии.

§ 5. Некоторые бесконечные игры

В качестве первого примера не матричной игры рассмотрим бесконечный вариант игры «блеф» (пример 4).

Пример 6. Непрерывный блеф. *Правила.* I извлекает из колоды одну из карт, Ст или Мл. Он может теперь сделать ставку величины x, где $a \leqslant x \leqslant b$ (a и b — положительные числа), между тем как II может спасовать и потерять количество a или подравнять, выигрывая или теряя x в зависимости от того, имеет ли I Мл или Ст.

Определим стратегии и функцию выигрыша в этой игре. Стратегия I состоит из пары чисел (x, y), лежащих между a и b, причем x означает ставку x при карте Ст, y — ставку y при карте Мл. Множество S состоит из всех таких пар (x, y). Стратегия II состоит в выборе множества чисел C из промежутка $[a, b]$ ($[a, b]$ означает множество чисел x, где $a \leqslant x \leqslant b$). Он подравнивает, если ставка I принадлежит множеству C, и пасует в противном случае.

Таким образом, множество стратегий T игрока II соответствует всем подмножествам C промежутка $[a, b]$, а функция выигрыша φ определяется следующим образом:

$$\varphi[(x, y), C] = \begin{cases} \dfrac{x-y}{2}, & \text{если } x,\ y \in C; \\ \dfrac{x+a}{2}, & \text{если } x \in C, \text{ а } y \notin C; \\ \dfrac{a-y}{2}, & \text{если } y \in C, \text{ а } x \notin C; \\ a, & \text{если } x,\ y \notin C. \end{cases}$$

Решим теперь эту игру, хотя форма решения будет несколько отличаться от решений в предыдущих примерах.

Предположим сначала, что игрок I пренебрегает возможностью делать промежуточные ставки x между a и b и решает играть так, как будто имеются только возможности a и b. Когда он получает Ст, он всегда делает ставку b. Имея же Мл, он делает ставку b с вероятностью $(b-a)/(b+a)$ и ставку a с дополнительной вероятностью $2a/(b+a)$. Ясно, что игрок II никогда не должен пасовать при ставке a (почему?), поэтому ему нужно лишь решить, пасовать или уравнивать игру при ставке b. Мы предоставляем читателю доказать, что в любом случае средний выигрыш I равен $a(b-a)/(b+a)$. Остается решить, может ли I получить больший выигрыш, используя возможность делать промежуточные ставки. Мы покажем, что это невозможно, описав оптимальную контрстратегию игрока II. Пусть II ведет себя следующим образом: если его противник делает ставку x, II уравнивает игру с вероятностью $2a/(x+a)$ и пасует с дополнительной вероятностью $(x-a)/(x+a)$. Предполагая, что игрок I придерживается стратегии (x, y), подсчитаем математическое ожидание его выигрыша при только что описанной стратегии II.

С вероятностью $^1/_2$ игрок 1 имеет Ст и делает ставку x, выигрывая в этом случае x с вероятностью $2a/(x+a)$ и выигрывая a с вероятностью $(x-a)/(x+a)$. Математическое ожидание выигрыша в этом случае равно, следовательно,

$$\frac{2ax}{x+a}+\frac{(x-a)\,a}{x+a}=\frac{3ax-a^2}{x+a}\,. \qquad (1)$$

Если игрок 1 получает Мл, то он делает ставку y, теряя y с вероятностью $2ay/(y+a)$ и выигрывая a с вероятностью $(y-a)a/(y+a)$. Математическое ожидание равно

$$\frac{-2ay}{y+a}+\frac{(y-a)\,a}{y+a}=-a, \qquad (2)$$

и усреднение (1) и (2) дает полное математическое ожидание

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3ax-a^2}{x+a}-a\right)=\frac{2ax-2a^2}{2\,(x+a)}=\frac{a\,(x-a)}{x+a}\leqslant\frac{a\,(b-a)}{b+a}\,, \qquad (3)$$

так как $x\leqq b$. Следовательно, игрок II может быть уверен, что I не выиграет более, чем $a(b-a)/(b+a)$, и мы нашли значение игры, а также оптимальные стратегии.

Заметим, что оптимальная процедура для II не является смешанной стратегией в строгом смысле, потому что смешанная стратегия подразумевает «рандомизацию» первоначально заданных чистых стратегий. Описанная же процедура предписывает II рандомизировать свои действия и притом после того, как I сделал свой первый «ход». Такая процедура называется *стратегией поведения*. Имеется интересная связь между стратегиями поведения и смешанными стратегиями, но исследование этого вопроса увело бы нас слишком далеко от нашего основного предмета.

Пример 7. Дуэли. *Правила.* Два дуэлянта стоят лицом к лицу на расстоянии d друг от друга. Каждый из них вооружен пистолетом, имеющим одну пулю. Дуэлянты двигаются навстречу друг другу, и в любой момент каждый из них может выстрелить. Вероятности для I или II убить своего противника на расстоянии x задаются соответственно *функциями меткости* $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Обычно предполагается, что функции p_i строго убывают и $p_i(0) = 1$. В остальных случаях исход игры считается ничейным.

Мы не сможем здесь привести решения описанной игры, поскольку это потребовало бы привлечения идей, лежащих в стороне от содержания настоящей книги. Ограничимся лишь описанием функции выигрыша. Для этой цели, однако, мы должны различать два случая в зависимости от того, снабжено оружие дуэлянтов глушителем или нет. Последнее обстоятельство, очевидно, обусловливает существенные различия в характере протекания игры, потому что в случае «шумной» дуэли, когда один из участников слышит выстрел противника (это возможно только в случае промаха, так как пуля летит быстрее звука), то, конечно, он будет ждать, пока не дойдет до противника и не поразит его в упор с вероятностью единица. Наоборот, в случае бесшумной дуэли он не будет знать в каждый момент, выстрелил ли его противник или нет.

Вычислим выигрыши для бесшумного случая (расчеты для случая с шумом оставляются в качестве упражнения). Стратегия каждого из дуэлянтов состоит в выборе числа между 0 и d, равного расстоянию до противника в тот момент, когда решено производить выстрел. Пусть x и y — эти числа, выбранные соответственно игроками I и II. Легко видеть, что выигрыш задается так:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} -p_2(y) + [1 - p_2(y)]\, p_1(x) & \text{при } x < y, \\ p_1(x) - [1 - p_1(x)]\, p_2(y) & \text{при } y < x, \\ p_1(x) - p_2(x) & \text{при } x = y. \end{cases}$$

Эту функцию можно представить в более четкой форме:

$$\varphi(x, y) = p_1(x) - p_2(y) + \operatorname{sgn}(x - y)\, p_1(x)\, p_2(y),$$

где sgn означает функцию знака, определяемую по правилам

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Имеется много разновидностей задач типа дуэли. Некоторые из них будут рассмотрены в упражнениях.

Пример 8. Разведка нефтеносных месторождений (игра против природы). У вас имеется некоторое количество земли в Техасе, где, вы полагаете, есть нефть. Вам известно, что средняя глубина залегания нефти — d футов, и имеется достаточно средств, чтобы всего пробурить f футов в одном месте или в нескольких местах. Если вы достигнете нефти прежде, чем кончатся ваши деньги, вы становитесь миллионером и выигрываете. В противном случае вы за свои хлопоты ничего не получите, кроме ряда пустых скважин; вы банкрот и проигрываете. Что же делать?

Такая ситуация знакома даже людям, которые занимались земляными работами в более скромных размерах, например в поисках ракушек. После того как некоторое время работа производилась безуспешно, появляется склонность перейти на новое место, но в то же время думается, что следующий удар лопаты в старом месте откроет скрытое сокровище. Игра, которую мы собираемся описать, предназначена отразить в некоторой степени атмосферу такой обстановки. Чтобы дать необходимый анализ, уточним правила игры.

Правила. Игрок I, бурильщик, имеет на выбор два места S_1 и S_2, где можно искать нефть. Глубина залегания нефти, считая от поверхности, устанавливается игроком II, «природой», и равна y_1 в S_1, y_2 в S_2. Эти глубины игроку I неизвестны. Ему известно, однако, что средняя глубина залегания равна $d/2$, т. е. что $y_1 + y_2 = d$. I может пробурить x_1 футов в S_1 и x_2 футов в S_2, где x_1 и x_2 — неотрицательные целые числа, для которых $x_1 + x_2 = f$, причем число f также известно обоим игрокам. I выигрывает, если доберется до нефти, и проигрывает в противном случае.

Заметим сразу же, что наша игра во многих отношениях искусственна. Особенно неестественным является представление о том, что природа — искусный игрок, единственная цель которого — навредить бурильщику. Изучение настоящей игры будет поучительным[1]), хотя, быть может, потребует некоторого труда.

Для удобства предположим, что $f=1$, и начнем с рассмотрения некоторых простых случаев. Если $d \leq 1$, то ясно, что игра выигрышна для бурильщика, который просто выбирает одно из мест и бурит на расстояние 1. С другой стороны. если $d > 2$, то природа, беря $y_1 = y_2 = d/2$, выигрывает. Следовательно, интересен лишь случай $d = 1 + \Delta$, где $0 < \Delta \leqslant 1$. Обозначая через x и y соответственно глубины бурения в S_1, S_2, можно записать, что выигрыш равен

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < y < x + \Delta, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что в первом случае $x < y$, так что бурильщик не достигнет нефти в первом месте, но ведь имеет место также $1-x < d - y$, а потому он не достигнет нефти и во втором.

Мы дадим здесь полное решение этой игры, связанное довольно своеобразным образом со значением Δ.

Напишем сначала

$$1 = q\Delta + r, \tag{1}$$

где неполное частное q — целое положительное число, а остаток — неотрицательная дробь, меньшая Δ. Мы утверждаем, что значение игры равно

$$\omega = \frac{q-1}{q+1}.$$

Прежде чем переходить к доказательству, выясним, что означает этот результат. Он говорит о том, что если d находится между 2 и $^3/_2$, то $\omega = 0$, но для d, равного $^3/_2$, ω скачкообразно достигает значения $^1/_3$; затем, когда d уменьшается до $^4/_3$, ω снова делает скачок до $^1/_2$, и т. д. Таким образом, при непрерывном изменении d значение

[1]) Анализ этой игры довольно сложен, и при первом чтении читатель может его опустить.

игры изменяется разрывным образом. Для большей наглядности заметим, что при $d = 1{,}5001$ бурильщику гарантированы половинные шансы обнаружения нефти, в то время как при $d = 1{,}5$ его шансы повышаются до двух третей.

Найдем теперь оптимальные стратегии игры. Обозначим через x_k стратегию I, состоящую в бурении на глубину $^k/_q$ в первом месте (и следовательно, на глубину $1 - {}^k/_q$ во втором), и предположим, что I избирает стратегии $x_0, \ldots, x_q$ с равными вероятностями $^1/_{(q+1)}$. Если II применяет стратегию y, то он выиграет против стратегии противника x_k только в том случае, когда $x_k < y < x_k + \Delta$. Однако из (1) следует, что $\Delta \leqslant {}^1/_q$, и поэтому II выигрывает лишь тогда, когда $x_k < y < x_{k+1}$, что происходит с вероятностью, не превышающей $^1/_{(q+1)}$. В остальных случаях выигрывает I, так что ожидаемый выигрыш I не меньше, чем

$$\frac{q}{q+1} - \frac{1}{q+1} = \frac{q-1}{q+1}.$$

С другой стороны, пусть $\bar{y}$ — любое число, для которого $^1/_{(q+1)} < \bar{y} < \Delta$, а II использует стратегии $\bar{y}, 2\bar{y}, \ldots$ $\ldots, (q+1)\bar{y}$ с равными вероятностями. Сопоставим каждой стратегии x такое наименьшее из чисел k, что $x < k\bar{y}$. Если $k = 1$, то мы имеем $0 \leqq x < \bar{y} < \Delta \leqq x + \Delta$, так что II выигрывает. Если $k > 1$, то, поскольку k было наименьшим из чисел, для которых $x < k\bar{y}$, мы имеем $x \geqq (k-1)\,\bar{y}$, или

$$x + \Delta \geqq k\bar{y} + (\Delta - \bar{y}) > k\bar{y}$$

и снова выигрывает II. Так как игрок II придерживается стратегии $k\bar{y}$ с вероятностью $^1/_{(q+1)}$, он выиграет по крайней мере с этой вероятностью. Поэтому I не может выиграть в среднем более чем $(q-1)/(q+1)$. Тем самым доказано, что последняя величина является значением игры, а это и требовалось.

В теории игр часто случается, что две игры, правила которых кажутся совершенно различными, на самом деле имеют одинаковые или эквивалентные функции выигрышей. Мы уже видели простой пример этого на играх «чет-нечет» и сравнение монет. Опишем теперь игру, которая фактически эквивалентна только что рассмотренной, хотя на первый взгляд это вовсе незаметно.

Пример 8а. Бомбардировщик и подводная лодка. *Правила.* Лодка может находиться в погруженном состоянии в течение 5 часов из 12 часов дневного времени. В течение дня над лодкой пролетает вражеский бомбардировщик, и если в этот момент лодка находится на поверхности, то она будет уничтожена. Считая, что о плане действий бомбардировщика никаких данных не имеется, нужно выбрать 5-часовой период погружения так, чтобы максимизировать вероятность «выживания» лодки.

Мы оставляем читателю задачу решения этой игры путем доказательства ее эквивалентности описанной выше игре «поиск нефти».

Два последних примера завершат этот параграф.

Пример 9. Бóльшее число. *Правила.* Каждый игрок выбирает целое положительное число. Тот, кто выбрал бóльшее число, выигрывает.

Несомненно, читатель чувствует некоторую абсурдность этой игры, поскольку не имеет разумного способа ее разыгрывания. Он прав. Данная задача является простым примером того, что основная теорема теории игр вне области конечных игр, вообще говоря, несправедлива. Действительно, вопрос о том, верна ли основная теорема для той или иной бесконечной игры, часто является весьма тонким.

Для некоторых широких важных классов игр вопрос этот уже решен, но неизвестно ничего, что напоминало бы необходимые и достаточные условия существования решений.

Пример 10. Меньшее число. *Правила* Каждый игрок выбирает целое положительное число. Игрок, выбравший меньшее число, выигрывает 1, если только это число не оказывается точно на 1 меньше, чем то, которое названо противником. В последнем случае игрок теряет 2.

В отличие от предыдущей эта игра разрешима; соответствующие подробности приведены в упражнениях.

§ 6. Седловые точки и минимакс

Отвлечемся теперь от рассмотрения частных примеров для того, чтобы перейти к некоторым общим вопросам предварительного характера. Заметим сначала, что математические понятия, содержащиеся в формулировке основной теоремы, совершенно не зависят от какой-либо концепции игры. Для целей теории удобно иметь дело с абстрактной формулировкой.

Определение. Пусть S и T — произвольные множества. Говорят, что вещественная функция двух переменных $s \in S$ и $t \in T$ имеет *седловую точку* $(\bar{s}, \bar{t})$, если

$$\varphi(\bar{s}, t) \geqq \varphi(s, \bar{t}) \text{ при всех } s \in S,\ t \in T.$$

Число $\omega = \varphi(\bar{s}, \bar{t})$ называется в этом случае седловым значением функции.

Это определение, по существу, совпадает с определением решения игры. Более точно сказать, что игра имеет решение в смысле § 4, это и значит сказать, что ее функция выигрыша имеет седловую точку. Термин «седловая точка» ведет свое происхождение от обычного седла для верховой езды. Если двигаться вперед или назад от центра седла, поверхность поднимается (что соответствует изменению t при фиксированном s, равном $\bar{s}$), в то время как при движении вправо или влево (изменяя s при фиксированном t, равном $\bar{t}$) поверхность седла понижается.

Введем теперь другое понятие, тесно связанное с седловой точкой.

Определение. Пусть φ — функция s и t. Положим

$$\varphi_M(t) = \max_{s \in S} \varphi(s, t),$$

$$\varphi_m(s) = \min_{t \in T} \varphi(s, t)$$

и

$$\text{minimax}\, \varphi = \min_{t \in T} \varphi_M(t),$$

$$\text{maximin}\, \varphi = \max_{s \in S} \varphi_m(s).$$

Здесь предполагается, что все фигурирующие в определении максимумы и минимумы достигаются. Понятия седловой точки, минимакса (minimax) и максимина (maximin) связаны следующим образом.

Теорема 6.2. *Если φ — функция, для которой существуют как минимакс, так и максимин, то*

$$\operatorname{maximin} \varphi \leqslant \operatorname{minimax} \varphi, \tag{1}$$

и равенство имеет место в том и только в том случае, когда у φ есть седловая точка.

Доказательство. Пусть φ_M и φ_m заданы, как в определении, приведенном выше. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_m(s) \leqq \varphi(s, t), \\ \varphi_M(t) \geqq \varphi(s, t) \end{array}\right. \quad \text{при всех } s, t. \tag{2}$$

Полагая $\operatorname{maximin} \varphi = \varphi_m(\bar{s})$ и $\operatorname{minimax} \varphi = \varphi_M(\bar{t})$, мы из (2) имеем $\varphi_m(\bar{s}) \leqq \varphi_M(\bar{t})$, что и дает (1).

Если $\varphi_m(\bar{s}) = \varphi_M(\bar{t})$, то снова из (2)

$$\varphi(\bar{s}, t) \geqq \varphi_m(\bar{s}) = \varphi_M(\bar{t}) \geqq \varphi(s, \bar{t}),$$

так что $(\bar{s}, \bar{t})$ есть седловая точка.

Наконец, если $(\bar{s}, \bar{t})$ — седловая точка, то, поскольку

$$\varphi(\bar{s}, t) \geqq \varphi(s, \bar{t}) \text{ при всех } s, t,$$

должно быть

$$\varphi_m(\bar{s}) \geqq \varphi_M(\bar{t}).$$

Но, с другой стороны, из (2) следует, что

$$\varphi_m(s) \leqq \varphi_M(t) \qquad \text{при всех } s \text{ и } t,$$

так что

$$\varphi_m(\bar{s}) = \varphi_M(\bar{t}) = \max \varphi_m(s) = \min \varphi_M(t)$$

и поэтому

$$\operatorname{maximin} \varphi = \operatorname{minimax} \varphi.$$

Установленный результат имеет естественную теоретико-игровую интерпретацию. Вспомним, что, вводя понятия решения и оптимальной стратегии, мы принимаем, что каждый игрок считает своего противника столь же умным, как и он сам[1]. В частности, это означает, что какой бы способ действий ни избрал игрок, он считает, что противник об этом догадается. Таким образом, если я как игрок I решу применить смешанную стратегию σ, я полагаю, что вы как игрок II изберете стратегию τ, которая минимизирует мой выигрыш, т. е. я буду ожидать получить величину $\min\limits_{\tau} \varphi(\sigma, \tau) = \varphi_m(\sigma)$. Поэтому я избираю стратегию σ, для которой $\varphi_m(\sigma)$ максимально, гарантируя себе тем самым математическое ожидание выигрыша $\max \varphi_m(\sigma) = \operatorname{maximin} \varphi$. Если вы как игрок II будете рассуждать аналогично, вы станете играть так, чтобы заведомо не дать мне выигрыша, большего, чем минимакс φ. В играх, для которых верна основная теорема, эти две величины, как видно из только что полученного результата, оказываются равными. Вследствие данной интерпретации, основную теорему часто называют *теоремой о минимаксе.*

В качестве простого примера приведем такой: пусть множества S и T состоят из двух точек каждое, s_1, s_2 и t_1, t_2 и $\varphi(s_1, t_1) = \varphi(s_2, t_2) = 1$, $\varphi(s_1, t_2) = \varphi(s_2, t_1) = -1$, тогда $\operatorname{maximin} \varphi = -1$, а $\operatorname{minimax} \varphi = 1$.

Простым следствием теоремы 6.2 является то, что значение игры (если она его имеет) зависит от функции выигрыша непрерывно. Точная формулировка этого утверждения такова:

Теорема 6.3. *Если φ и φ' — две функции от переменных s и t с седловыми значениями ω и ω' и если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любых пар (s, t) имеет место*

$$|\varphi(s, t) - \varphi'(s, t)| \leqq \varepsilon,$$

то

$$|\omega - \omega'| \leqq \varepsilon.$$

Это сразу следует из теоремы 6.2 и из того, что максимумы и минимумы двух функций различаются не

[1] Точнее говоря, каждый игрок, обоснованно считая себя абсолютно осведомленным во всех тонкостях игры, приписывает эти же черты противнику. —*Прим. ред.*

более чем на ε, если сами функции различаются самое большее на ε. Доказательство оставляется в качестве упражнения.

§ 7. Симметричные игры

Определение. Игра $\Gamma=(S, T; \varphi)$ называется *симметричной*, если $S=T$ и $\varphi(s, t)=-\varphi(t, s)$ при всех s, t. Отсюда следует, что $\varphi(s, s)=0$ при всех s.

Игры морра и «ходи́» — типичные примеры симметричных игр, где оба партнера имеют одинаковые множества стратегий. Формально это выражается в том, что функция выигрыша является *кососимметрической*. Заметим, что игра «чет-нечет» *не является* симметричной в смысле данного выше определения.

В этом параграфе мы собираемся показать, что каждая игра в некотором смысле эквивалентна симметричной игре и, таким образом, ряд вопросов, относящихся к играм вообще, может быть сведен к рассмотрению частного, симметричного случая.

Сначала будет доказана

Лемма 6.1. *Симметричная игра* Γ *имеет решение в том и только в том случае, если существует такое* $\bar{s}\in S$, *что* $\varphi(\bar{s}, s)\geqq 0$ *при всех* $s\in S$.

Доказательство. Если Γ имеет оптимальные стратегии $\bar{s}$ и $\bar{s}'$, то $\varphi(\bar{s}, s)\geqq\varphi(s', \bar{s}')$ при всех s и s' и, в частности, при всех s

$$\varphi(\bar{s}, s)\geqq\varphi(\bar{s}', \bar{s}')=0.$$

Наоборот, если $\varphi(\bar{s}, s)\geqq 0$ при всех s, то $\varphi(s', \bar{s})\leqq 0$ при всех s', и отсюда

$$\varphi(\bar{s}, s)\geqq\varphi(\bar{s}, \bar{s})=0\geqq\varphi(s', \bar{s})$$

при всех s и s'. Следовательно, $(\bar{s}, \bar{s}, 0)$ является решением игры.

Определение. Пусть $\Gamma=(S, T; \varphi)$ — произвольная игра. Ее *симметризацией* называется игра $\hat{\Gamma}$, стратегии которой состоят из всех пар (s, t), где $s\in S$, $t\in T$, а выигрыш определяется так:

$$\hat{\varphi}[(s, t), (s', t')]=\varphi(s, t')-\varphi(s', t).$$

Нетрудно убедиться в том, что игра $\hat{\Gamma}$ симметричная, поскольку

$$\hat{\varphi}[(s, t), (s', t')] = \varphi(s, t') - \varphi(s', t) =$$
$$= -[\varphi(s', t) - \varphi(s, t')] = -\hat{\varphi}[(s', t'), (s, t)].$$

Интерпретация. Определение симметризации, данное выше, является просто формальным отражением того, что часто делается в реальных играх, например в шахматах, где используется случайное устройство[1]), определяющее, кому играть белыми. Предположим теперь, что в любой игре роли игроков определяются бросанием симметричной монеты. Тогда каждому игроку необходимо выбрать заранее пару стратегий, одну из $S_{\pm}$ и другую из T так, чтобы быть готовым к любой случайности. Если I выбирает пару (s, t), а II — пару (s', t'), то ожидаемый выигрыш I будет равен

$$\frac{1}{2}[\varphi(s, t') - \varphi(s', t)].$$

Этот выигрыш, если не обращать внимание на несущественный множитель $^1/_2$, находится в соответствии с нашим формальным определением.

Из проведенного рассуждения интуитивно ясно, что значение оптимальной стратегии для игры $\hat{\Gamma}$ равносильно информации относительно обоих игроков в исходной игре Γ. Точная формулировка этого утверждения такова.

Теорема 6.4. *Игра Γ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение игра $\hat{\Gamma}$.*

Доказательство. Стратегии $(\bar{s}, \bar{t})$ оптимальны в игре Γ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(\bar{s}, t) \geqq \varphi(s, \bar{t}) \qquad \text{при всех } s, t,$$

что означает

$$\hat{\varphi}[(\bar{s}, \bar{t}), (s, t)] = \varphi(\bar{s}, t) - \varphi(s, \bar{t}) \geqslant 0 \qquad \text{при всех } s, t,$$

---

[1]) Имеется в виду угадывание пешки в отдельной неофициальной партии, жеребьевка в турнирах. — *Прим. ред.*

а по лемме 6.1 это эквивалентно существованию решения для игры $\hat{\Gamma}$.

Как можно было ожидать, аналогичный результат справедлив также и для смешанных стратегий, но для этого случая требуется особое обоснование.

Теорема. 6.5. *Игра* Γ *имеет решение в смешанных стратегиях в том и только в том случае, когда такое решение имеет ее симметризация* $\hat{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $(\bar{\sigma}, \bar{\tau}; \omega)$ есть решение Γ, так что

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\sigma}, t') &= \sum_s \bar{\sigma}(s)\varphi(s, t') \geqq \omega \qquad \text{при всех } t', \\ -\varphi(s', \bar{\tau}) &= -\sum_t \bar{\tau}(t)\varphi(s', t) \geqq -\omega \qquad \text{при всех } s'. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\overline{\sigma\tau}$ — смешанная стратегия $\hat{\Gamma}$, определяемая следующим образом:

$$\overline{\sigma\tau}(s, t) = \bar{\sigma}(s)\cdot\bar{\tau}(t).$$

Ясно, что $\overline{\sigma\tau}$ является смешанной стратегией, потому что

$$\sum_{s,t} \overline{\sigma\tau}(s, t) = \sum_{s,t} \bar{\sigma}(s)\cdot\bar{\tau}(t) = \sum_s \Big[\bar{\sigma}(s)\sum_t \bar{\tau}(t)\Big] = \sum_s \bar{\sigma}(s) = 1.$$

Чтобы доказать оптимальность $\overline{\sigma\tau}$, допустим, что (s', t') является произвольной чистой стратегией игрока II в игре $\hat{\Gamma}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}[\overline{\sigma\tau}, (s', t')] &= \sum_{s,t} \bar{\sigma}(s)\bar{\tau}(t)\hat{\varphi}[(s, t), (s', t')] = \\ &= \sum_{s,t} \bar{\sigma}(s)\bar{\tau}(t)[\varphi(s, t') - \varphi(s', t)] = \\ &= \sum_s \bar{\sigma}(s)\varphi(s, t') - \sum_t \bar{\tau}(t)\varphi(s' t) \leqq 0, \end{aligned}$$

причем последнее неравенство получается сложением двух выражений (1).

Наоборот, предположим, что стратегия $\bar{\varrho}$ оптимальна для $\hat{\Gamma}$. Это значит, что

$$0 \leqq \hat{\varphi}[\bar{\varrho}, (s', t')] = \sum_{s,t} \bar{\varrho}(s, t)[\varphi(s, t') - \varphi(s', t)]. \tag{2}$$

Определим теперь $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$, полагая

$$\bar{\sigma}(s) = \sum_t \bar{\varrho}(s, t),$$

$$\bar{\tau}(t) = \sum_s \bar{\varrho}(s, t).$$

Тогда (2) дает нам

$$0 \leqq \sum_s \bar{\sigma}(s)\,\varphi(s, t') - \sum_t \bar{\tau}(t)\,\varphi(s', t) \qquad \text{при всех } s', t'$$

или

$$\varphi(\bar{\sigma}, t') \geqq \varphi(s', \bar{\tau}) \qquad \text{при всех } s', t'.$$

Следовательно, Г имеет решение $(\bar{\sigma}, \bar{\tau}; \omega)$, где $\omega = \varphi(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$.

§ 8. Доказательство основной теоремы

Ввиду теоремы 6.5 предыдущего параграфа мы можем ограничиться доказательством основной теоремы теории игр лишь для симметричных игр. Это в свою очередь является, как мы сейчас увидим, простым следствием теоремы 2.10. Заметим сначала, что если матричная игра симметрична, то ее матрица выигрышей $A = (\alpha_{ij})$ *кососимметрична*, т. е.

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji},$$

так как

$$\alpha_{ij} = \varphi(s_i, t_j) = -\varphi(t_j, s_i) = -\alpha_{ji}.$$

Отсюда сразу следует, что для любого вектора x

$$xA = -Ax, \tag{1}$$

поскольку $xA = (xa^j)$

$$xa^j = \sum_i \xi_i \alpha_{ij} = -\sum_i \xi_i \alpha_{ji} = -a_j x,$$

а это — j-я компонента вектора Ax.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 6.6. *Каждая симметричная матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что имеется такая смешанная стратегия $\bar{x}$, что $\bar{x}A \geqq \mathbf{0}$. Если такой стратегии $\bar{x}$ нет, то неравенство

$$xA \geqslant \mathbf{0} \tag{2}$$

не имеет полуположительных решений. Но тогда, согласно теореме 2.10 (стр. 79), существует такой неотрицательный вектор y, что $Ay < \mathbf{0}$. Так как $y \neq \mathbf{0}$, этот вектор в действительности должен быть полуположительным. Но тогда из (1) мы получаем, что $yA > \mathbf{0}$, а это противоречит предположению об отсутствии у (2) полуположительных решений. Этим доказательство завершено.

Следствие (основная теорема теории игр). *Каждая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Таким образом, нам удалось довольно просто разделаться с теоремой о минимаксе. Конечно, ключевым результатом к ней явилась теорема 2.10 о неравенствах, которая в свою очередь была прямым следствием теоремы 2.6 о разделяющей гиперплоскости. Как мы уже отмечали, теорема о разделяющей гиперплоскости является основным теоретическим результатом для всех наших практических приложений.

В следующей главе мы дадим другое доказательство основной теоремы с помощью теоремы двойственности линейного программирования. Мы привели здесь доказательство, основанное на симметризации матричных игр лишь для того, чтобы сделать эту главу независимой от глав, посвященных программированию.

Приложение к гл. VI. Геометрическое «доказательство» основной теоремы теории матричных игр

Хотя приведенное выше доказательство основной теоремы и является очень простым с алгебраической точки зрения, оно несколько формально и, быть может, осталось непонятным, почему примененные выкладки привели к желаемой цели. В этом приложении мы изложим геометрические соображения, чтобы справедливость теоремы стала интуитивно ясной.

В частности, станет отчетливо видна необходимость теоремы 2.10 при доказательстве основной теоремы теории игр.

Для удобства графического представления мы рассмотрим игру, в которой игрок I имеет 2 чистые стратегии, а игрок II — 5, так что столбцы матрицы A являются двумерными векторами $a^1, \ldots, a^5$, которые изображены в плоскости на рис. 20. Пусть $C = \langle a^1, \ldots, a^5 \rangle$ — выпуклая

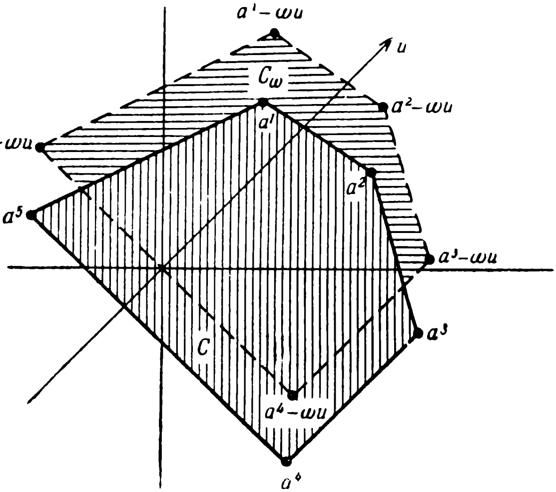


Рис. 20.

оболочка (в данном случае многоугольник), порожденная a^i и представленная на рисунке в виде вертикально заштрихованной области.

«Переместим» теперь множество C в направлении биссектрисы координатного угла до тех пор, пока C не будет касаться отрицательного квадранта. Говоря более точно, пусть u — вектор $(1,1)$, а C_λ — множество векторов $x' = x - \lambda u$, где $x \in C$. Если λ велико, то C_λ полностью лежит в отрицательном квадранте, а если λ очень мало, то C_λ лежит в положительном квадранте. Пусть ω — наименьшее значение λ, при котором C_λ имеет соприкосновение с неотрицательным квадрантом. (Доказательство существования минимума опускается, но мы ожидаем, что читатель охотно в это поверит.) Теперь мы имеем

$$C_\omega = \langle a^1 - \omega u, \ \ldots, \ a^5 - \omega u \rangle.$$

Здесь важно заметить, что вследствие нашего выбора ω C_ω касается N и потому содержит неположительный вектор, но не содержит отрицательных векторов. Алгебраически это означает, что неравенства

$$\sum \eta_j (a^j - \omega u) \leqq 0 \tag{1}$$

имеют неотрицательное решение $\bar{y} = (\bar{\eta}_1, \ \ldots, \bar{\eta}_5)$, для которого $\sum \bar{\eta}_j = 1$. С другой стороны, неравенства

$$\sum \eta_j (a^j - \omega u) < 0 \tag{2}$$

не имеют неотрицательного решения, потому что это означало бы, что C_ω содержит отрицательный вектор. Эта ситуация иллюстрируется рис. 21.

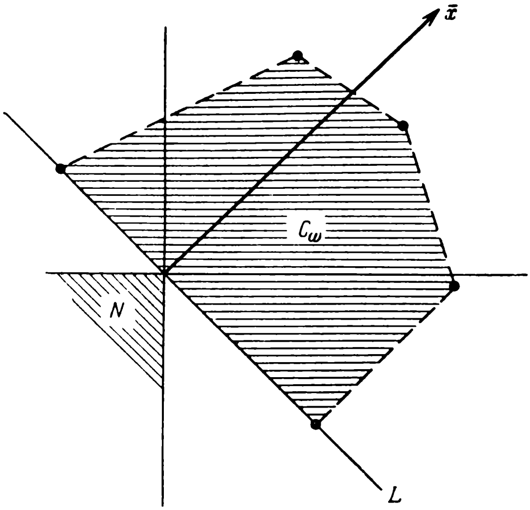


Рис. 21.

Из рисунка видно, что можно найти прямую L, проходящую через начало координат, которая «отделяет» C_ω от N, т. е. C_ω и N лежат по разные стороны L. Если

$\bar{x}$ — вектор, перпендикулярный L и лежащий по ту же сторону от L, что и C_ω, то $\bar{x}$ образует не тупой угол со всеми точками C_ω и не острый угол со всеми точками N. Первое утверждение означает, что

$$\bar{x}(a^j - \omega u) \geqq 0 \qquad \text{при всех } j, \tag{3}$$

а второе, очевидно, равносильно тому, что вектор $\bar{x}$ полуположителен. Изложенные геометрические рассуждения в алгебраической форме проводились в гл. II при доказательстве теоремы 2.10, где как раз и утверждалось, что, поскольку (2) не имеет неотрицательного решения, (3) должно иметь полуположительное решение $\bar{x}$. Очевидно, этот вектор $\bar{x} = (\bar{\xi}_i)$ можно выбрать так, чтобы $\sum \bar{\xi}_i = 1$.

Теперь нам остается лишь приспособить соответствующим образом обозначения, чтобы усмотреть, что (1) и (3) вместе составляют доказательство теоремы о минимаксе. Но (1) в матричной форме записывается как

$$A\bar{y} = \sum \bar{\eta}_j a^j \leqq \sum \bar{\eta}_j (\omega u) = \omega u, \tag{4}$$

ввиду того, что $\sum \bar{\eta}_j = 1$. Аналогично, (3) принимает вид

$$\bar{x}a^j \geqq \omega(\bar{x}u) = \omega \qquad \text{при всех } j, \tag{5}$$

так как $\sum \bar{\xi}_i = 1$. Полагая $v = (1, 1, 1, 1, 1)$, это можно записать в виде

$$\bar{x}A \geqq \omega v. \tag{6}$$

Таким образом, (6) и (4) вместе дают для любых смешанных стратегий x и y

$$\bar{x}Ay \geqq \omega(vy) = \omega = \omega(ux) \geqq xA\bar{y},$$

а это и есть нужное нам утверждение.

Доказательство, намеченное здесь, в существенных чертах совпадает с доказательством, данным Нейманом и Моргенштерном на основе доказательства Вилля. К этой геометрической картине мы вернемся позже при выяснении строения множества оптимальных стратегий.

Библиографические замечания

Теория антагонистических игр, изложенная в этой главе, является в основном творением фон Неймана; первая его работа, посвященная этому вопросу, была опубликована в 1928 году [1]. Наиболее обстоятельное изложение теории содержится в книгах фон Неймана и Моргенштерна [1] и Мак-Кинси [1]. Игра «блеф» (пример 4) основана на одном примере Вайды [1], стр. 3. Со стратегиями поведения можно познакомиться по Куну [1].

История теоремы о минимаксе довольно интересна. Первоначальное доказательство фон Неймана [1] (1928) было весьма сложным и опиралось на довольно трудную топологическую теорему о неподвижной точке. В 1941 году Какутани [1] нашел короткое и изящное доказательство, которое, однако, все еще было связано с теоремой о неподвижной точке. Между тем Вилль [1] (1938) получил первое «элементарное» доказательство, не требующее ничего, кроме некоторых сведений о выпуклых множествах. Доказательство, приводимое в монографии фон Неймана и Моргенштерна [1], является видоизменением доказательства Вилля, которое в свою очередь во многом схоже с геометрическим доказательством, приведенным в приложении к этой главе. Основанное на симметризации,, доказательство, изложенное в § 8, принадлежит Гейлу, Куну и Таккеру [1].

Упражнения

1. Подсчитать число чистых стратегий в игре «ходи́» с n картами. (Принять, что выбор игрока на k-м ходе зависит только от карт, которые остались на руках у него и его противника.)

$$\text{Ответ:}\quad \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)^{\binom{n}{k}} .$$

2. Рассмотреть игру «ходи́» с тремя картами, где $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Показать, что стратегия «класть карту i на i-м ходе» оптимальна. Оптимальна ли эта стратегия также для случая $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, но $a_3 = 4$? Для случая $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$?

3. Найти матрицу выигрышей для следующей игры, которую будем именовать *бейсболом*.

Правила. Игрок II, называемый подающим, имеет две стратегии: *быстрый мяч* и *крученый мяч*. I—отбивающий, может *отбить мяч* или *принять* его. Если I принимает при крученом мяче и отбивает быстрый мяч, то он в проигрыше и теряет 1. Если он принимает быстрый мяч, то выигрывает $p > 0$. Если он отбивает крученый мяч, то игра повторяется, и при повторном принятии крученого мяча он «совершает пробежку» и выигрывает 1.

Ответ:
$$\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Найти матрицу выигрыша для упрощенного *покера*.

Правила. I получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или «сделать ставку» или «спасовать». Если I делает ставку, то II может «спасовать» и потерять a или «уравнять игру» и выиграть или потерять b в зависимости от того, имеется ли на руках у игрока I карта Мл или Ст. Если I пасует, то II может также пасовать, что дает выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая a, если у игрока I карта Мл, и теряя b, если у игрока I Ст.

Ответ:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a \\ \frac{b-a}{2} & \frac{b}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -\frac{b}{2} & \frac{a+b}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b-a}{2} & 0 & \frac{b-a}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

5. Найти решение следующей игры. Каждому из игроков раздается случайным образом по одной из карт A, B или C. Затем игрок I, посмотрев на свою карту, делает предположение относительно того, какая карта осталась

в колоде. Игрок II, посмотрев на свою карту и выслушав предположение игрока I, также высказывает свое предположение о третьей карте. Если какой-либо из игроков угадывает правильно, он выигрывает 1 у своего противника.

6. Показать, что оптимальные стратегии для примеров 4 и 5 в тексте главы (стр. 236 и 238) единственны.

7. Найти множество стратегий и функцию выигрыша для случая «шумной» дуэли в примере 7.

Ответ:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - 2p_2(y) & \text{при } x < y, \\ 2p_1(x) - 1 & \text{при } y < x, \\ p_1(x) - p_2(x) & \text{при } x = y. \end{cases}$$

8. Показать, что в случае «шумной» дуэли, где меткости обоих противников одинаковы, оптимальная стратегия состоит в производстве выстрела, когда вероятность попадания равна $^1/_2$. Показать, что такая стратегия не оптимальна для соответствующей «бесшумной» дуэли.

9. Выписать функции выигрыша для бесконечных игр «бо́льшее число» и «меньшее число» из примеров 9 и 10.

10. Показать, что оптимальная стратегия в игре «меньшее число» (пример 10) заключается в том, чтобы называть числа 1, 2, 3, 4, 5 соответственно с относительными частотами 1 : 5 : 4 : 5 : 1.

11. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — n игр, определенных на одних и тех же множествах стратегий S и T, т. е. $\Gamma_i = (S, T; \varphi_i)$. Предположим, что игра Γ_i имеет значение ω_i и множества оптимальных стратегий S_i и T_i. Доказать, что если пересечение всех множеств вида S_i обозначить через S_0, а пересечение всех множеств T_i — через T_0, и оба эти множества не пусты, то игра $\Gamma_0 = (S, T; \varphi_1 + \ldots + \varphi_n)$ имеет значение $\omega_1 + \ldots + \omega_n$.

12. Пусть Γ является матричной $n \times n$-игрой, у которой матрица выигрышей содержит ровно n различных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и каждое из чисел α_i встречается в каждой строке и каждом столбце. Найти решение Γ.

13. Матричная $n \times n$-игра называется *диагональной*, если в каждой строке и каждом столбце имеется лишь один

ненулевой элемент. Найти формулу для значения диагональной игры, в которой все выигрыши неотрицательны.

Ответ: $\omega = \left(\sum 1/a_i\right)^{-1}$, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — ненулевые элементы.

14. Пусть игра $\Gamma = (S, T; \varphi)$ имеет значение ω. Показать, что если α и β — вещественные числа, причем $\alpha \geqslant 0$, то игра $\Gamma = (S, T; \alpha\varphi + \beta)$ имеет значение $\alpha\omega + \beta$.

15. Использовать результаты упр. 13 и 14 для решения игры бейсбол из упр. 3.

Ответ: $\omega = \dfrac{p-3}{p+5}$.

16. Говорят, что чистая стратегия $s \in S$ *доминируется* смешанной стратегией σ, если при всех $t \in T$, $\varphi(\sigma, t) > \varphi(s, t)$. Доказать, что игра Γ имеет те же решения, что и игра Γ', получаемая устранением стратегии s из S.

17. Доказать теорему 6.3.

18. Решить игру «бомбардировщик против подводной лодки» (пример 8а) методами, использованными при решении примера 8.

Ответ: $\omega = 1/3$.

19. Показать, что если множества стратегий S и T являются замкнутыми интервалами, а функция выигрыша φ непрерывна, то минимакс и максимин φ существуют, хотя и не обязательно равны.

20. Предположим, что φ такая функция s и t, что

$$\min_S \varphi(s, t) \quad \text{и} \quad \max_S \varphi(s, t) \text{ существуют при всех } t,$$

$$\min_T \varphi(s, t) \quad \text{и} \quad \max_T \varphi(s, t) \text{ существуют при всех } s.$$

Следует ли отсюда, что существуют минимакс и максимин?

21. Пусть $\Gamma = (S, T; \varphi)$ является игрой, для которой $\varphi(s, t) > 0$ при всех s, t. Определим далее симметричную игру Γ_θ. Множество стратегий каждого из игроков в Γ_θ есть сумма S и T и дополнительной стратегии θ. Выигрыш

φ_θ определяется следующими правилами:

$$\begin{aligned} &\varphi_\theta(s, t) = -\varphi_\theta(t, s) = \varphi(s, t) && \text{при } s \in S,\ t \in T; \\ &\varphi_\theta(s, \theta) = -\varphi_\theta(\theta, s) = -1 && \text{при } s \in S; \\ &\varphi_\theta(\theta, t) = -\varphi_\theta(t, \theta) = -1 && \text{при } t \in T; \\ &\qquad \varphi_\theta = 0 && \text{в прочих случаях.} \end{aligned}$$

Показать, что Γ_θ имеет решение тогда и только тогда, когда его имеет Γ.

22. Пусть Γ матричная $n \times n$-игра. Пусть партия игры Γ, Γ^n состоит в разыгрывании n партий игры Γ с применением разных чистых стратегий в каждой партии. После каждой партии игрокам сообщается, какую стратегию применял противник. Показать, что оптимальная стратегия каждого из игроков состоит в некотором случайном выборе своих n стратегий. Найти значение Γ^n, выраженное через числа $\alpha_{ij} = \varphi(s_i, t_i)$.

Указание: применить метод индукции по n.

Использовать этот результат для решения игры «ходи́» в том частном случае, когда выигрыши a_i при каждом ходе равны.

23. Следующая игра *в прятки* принадлежит фон Нейману. Игрок II выбирает элемент α_{ij} положительной $n \times n$-матрицы A. I выбирает или строку a_i, или столбец a^j. Если элемент α_{ij} оказывается в строке или столбце, выбранном I, то он выигрывает α_{ij} у II. В противном случае его выигрыш равен нулю.

Игра решается следующим образом. Пусть $B = (\beta_{ij})$ — матрица, для которой $\beta_{ij} = 1/\alpha_{ij}$. Пусть далее S — множество n элементов из A, взятых по одному из каждой строки каждого столбца, причем соответствующие элементы β_{ij} представляют собой оптимальное назначение в B. Показать, что оптимальной стратегией II является выбор α_{ij} с вероятностями, пропорциональными $1/\alpha_{ij}$, а значение игры равно $1/\mu$, где μ — значение оптимального назначения в B.

Указание: для нахождения оптимальной стратегии игрока I применить теорему 5.5.

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР

Эта глава посвящена детальному изучению свойств матричных игр и смежных вопросов. В § 1 описывается связь между играми и линейным программированием и приводится новое доказательство теоремы о минимаксе как частного случая общей теоремы двойственности. Затем указывается способ построения игры, которая естественным образом соответствует паре двойственных задач линейного программирования. Переформулировав теоретико-игровую задачу как задачу линейного программирования, можно приступить к решению этой задачи симплекс-методом, что и иллюстрируется в § 2.

Ряд последующих параграфов посвящен изучению структуры множеств оптимальных стратегий. Показывается, что для данной игры множества оптимальных стратегий каждого из игроков являются выпуклыми многогранниками, размерности которых должны удовлетворять некоторому специальному соотношению. Крайние точки множеств оптимальных стратегий могут быть характеризованы через матрицу выигрышей. Один параграф посвящен проблеме «синтезирования» игры, т. е. построению по двум заданным многогранникам такой игры, для которой эти множества являются множествами оптимальных стратегий игроков. В заключительном параграфе мы описываем итеративный процесс приближенного вычисления значения игры. Этот процесс с вычислительной точки зрения непрактичен, но представляет теоретический интерес.

§ 1. Связь между матричными играми и линейным программированием

Одним из самых удивительных событий, связанных с появлением современной теории линейных экономических моделей, явилось одновременное, но независимое развитие теории линейного программирования, с одной стороны, и теории игр, с другой, и выявившаяся затем тесная связь между этими двумя предметами. В настоящем параграфе мы эту взаимосвязь детально опишем.

В конце предыдущей главы мы доказали основную теорему теории игр, установив предварительно ее для игры с кососимметрической матрицей выигрышей. Для случая положительной матрицы выигрышей (т. е. матрицы с положительными элементами) мы дадим сейчас другое доказательство, использующее теорему двойственности из линейного программирования. Справедливость теоремы в общем случае будет тривиальным следствием ее справедливости для положительной матрицы ввиду следующего замечания. Рассмотрим матрицу

$$A=(\alpha_{ij}), \quad i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

и обозначим через $A'=(\alpha_{ij}+\alpha)$ положительную матрицу, полученную добавлением достаточно большого положительного числа α ко всем элементам матрицы A. Далее, если предположить, что основная теорема уже доказана для матрицы A', то будут существовать такие смешанные оптимальные стратегии $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что для всех смешанных стратегий x и y

$$\bar{x}A'y \geqq \omega' \geqq xA'\bar{y}.$$

Но простое преобразование показывает, что $\bar{x}A'y=\bar{x}Ay+\alpha$, $xA'\bar{y}=xA\bar{y}+\alpha$, и поэтому

$$\bar{x}Ay \geqq \omega = \omega' - \alpha \geqq xA\bar{y}.$$

Следовательно, $(\bar{x}, \bar{y}; \omega)$ является решением исходной игры.

Второе доказательство основной теоремы теории игр. Обозначим через A положительную матрицу выигрышей и рассмотрим обычную экстремальную задачу нахождения неотрицательного m-мерного вектора x, удовлетворяющего следующим условиям:

$$xu \quad \text{минимально,} \tag{1}$$

причем

$$xA \geqq v, \tag{2}$$

где u и v — единичные векторы соответственно в пространстве R^m и R^n.

Поскольку матрица A положительна, задача, очевидно, оказывается допустимой, и двойственной к ней будет задача нахождения неотрицательного n-мерного вектора y, удовлетворяющего следующим условиям:

$$yv \text{ максимально,} \tag{1*}$$

причем

$$Ay \leqq u \tag{2*}$$

(допустимым является вектор $y = 0$).

Далее, в силу теоремы двойственности существуют оптимальные векторы x_0 и y_0, для которых

$$x_0 u = y_0 v = \mu, \tag{3}$$

где μ — общее значение этой пары двойственных задач линейного программирования. Ясно, что при этом $\mu > 0$.

Мы утверждаем, что решение $(\bar{x}, \bar{y}; \omega)$ исходной игры описывается формулами

$$\bar{x} = \frac{x_0}{\mu}, \qquad \bar{y} = \frac{y_0}{\mu}, \qquad \omega = \frac{1}{\mu}.$$

Тот факт, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются смешанными стратегиями, следует сразу же из (3).

Из (2) следует также, что для смешанной стратегии y выполняется неравенство

$$\bar{x}Ay \geqq \frac{1}{\mu} vy = \omega,$$

и по симметрии для всех смешанных стратегий x должно быть

$$xA\bar{y} \leqq \omega.$$

Это завершает доказательство.

Итак, мы видим, как можно решить произвольную матричную игру на основе решения некоторой связанной с этой игрой задачи линейного программирования. Покажем теперь, что можно идти и обратным путем, связывая с любой парой стандартных двойственных задач линейного программирования некоторую симметричную игру, решения которой позволяют найти и решения двойственных задач линейного программирования, если, конечно, эти решения существуют. Однако следует напомнить читателю, что, в то время как игры имеют решения всегда, задачи линейного программирования их иметь не обязаны, так что и соответствие между этими двумя моделями должно учитывать этот факт.

Пусть A, b и c — обычные матрица и векторы, соответствующие паре стандартных задач линейного программирования. Будем обозначать коротко эту пару задач через (A, b, c). *Эквивалентная игра* $\Gamma_{(A, b, c)}$ будет симметричной игрой с $m+n+1$ чистыми стратегиями, которые мы будем обозначать через $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ и w. Далее, функция выигрыша φ определяется следующими правилами:

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_i, v_j) &= -\varphi(v_j, u_i) = -\alpha_{ij},\\
\varphi(u_i, w) &= -\varphi(w, u_i) = \gamma_i,\\
\varphi(v_j, w) &= -\varphi(w, v_j) = -\beta_j,
\end{aligned}
$$

а во всех остальных случаях выигрыш равен нулю.

Обозначая через A^* *транспонированную* к A матрицу, т. е. $A^* = (\alpha^*_{ij})$, где $\alpha^*_{ij} = \alpha_{ji}$, (см. гл. II, упр. 31), читатель легко проверит, что матрица выигрышей, соответствующая функции φ, такова:

	w	$u_1 \ldots u_m$	$v_1 \ldots v_n$
w	0	$-c$	b
$u_1 \ldots u_m$	c	0	$-A$
$v_1 \ldots v_n$	$-b$	A^*	0

Теорема 7.1. *Пара двойственных задач (A, b, c) имеет решения тогда и только тогда, когда игра $\Gamma_{(A, b, c)}$ имеет такую оптимальную стратегию $z = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{m+n})$, что $\zeta_0 > 0$. В этом случае можно указать взаимно-однозначное соответствие между этими стратегиями и решением двойственных задач (A, b, c).*

Доказательство. Обозначим написанную выше матрицу выигрышей через M. Пусть $x = (\xi_i)$ и $y = (\eta_j)$ — оптимальные векторы для двойственных задач $(A,\ b,\ c)$. Определяем $(m+n+1)$-мерный вектор z, положив

$$z = (1,\ \xi_1,\ \dots,\ \xi_m,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_n).$$

Мы утверждаем, что $zM \geqq 0$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что первая компонента вектора zM есть $xc - yb$ и она равна нулю, поскольку $xc = yb$, что в силу теоремы двойственности равно значению программы. Последующие m компонент вектора zM совпадают с компонентами вектора

$$-c + yA^* = -c + Ay,$$

который неотрицателен ввиду допустимости вектора y. Последние n компонент вектора zM совпадают с компонентами вектора

$$b - xA,$$

который также неотрицателен ввиду допустимости вектора x.

Отсюда следует (см. лемму 6.1), что вектор

$$\bar{z} = \frac{z}{1 + \sum \xi_i + \sum \eta_j}$$

является оптимальной стратегией игры, удовлетворяющей условиям теоремы. Предоставляем читателю возможность показать, что каждая пара оптимальных векторов x и y двойственных задач $(A,\ b,\ c)$ сопоставляется таким путем одной и только одной оптимальной стратегии игры.

Пусть теперь, наоборот, вектор $z = (\zeta_0,\ \zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{m+n})$ — оптимальная стратегия игры с матрицей выигрышей M, причем $\zeta_0 > 0$. Тогда, вводя обозначения

$$x = \frac{(\zeta_1,\ \dots,\ \zeta_m)}{\zeta_0}, \qquad y = \frac{(\zeta_{m+1},\ \dots,\ \zeta_{m+n})}{\zeta_0},$$

можно непосредственной проверкой показать, что x и y — допустимые векторы для двойственных задач линейного программирования, и в силу неравенства

$$xc - yb \geqq 0$$

мы получаем, что векторы x и y действительно оптимальные. что и завершает доказательство.

§ 2. Решение игр симплекс-методом

В предыдущем параграфе было показано, что решение игры с положительной матрицей выигрыша A эквивалентно решению пары двойственных задач линейного программирования:

$$\text{минимизировать } xu \tag{1}$$

при условии

$$xA \geqq v \tag{2}$$

и

$$\text{максимизировать } yv \tag{1*}$$

при условии

$$Ay \leqq u. \tag{2*}$$

Если мы еще раз посмотрим доказательство этого факта, то увидим, что нам требовалась не положительность матрицы A, а лишь положительность значения игры.

Построив для нашей игры эквивалентную ей задачу линейного программирования, решаем эту задачу симплекс-методом и таким образом получаем решение исходной игры. Для иллюстрации этого метода решим игру в *покер*, рассмотренную в упр. 4 предыдущей главы. Просматривая правила игры, мы видим, что в ней участвуют два платежа a и b. Очевидно, без ограничения общности можно предположить, что $a = 1$. Чтобы избежать дробных величин, умножим все элементы матрицы выигрышей на 2 и получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ b-1 & b & 0 & 1 \\ 0 & -b & b+1 & 1 \\ b-1 & 0 & b-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что $b > 1$ (в противном случае игра тривиальна). Ясно, что эта игра имеет положительное значение, ибо любая смесь первых двух стратегий будет гарантировать положительное математическое ожидание выигрыша игрока I.

Применим теперь симплекс-метод для решения следующей экстремальной задачи: найти неотрицательный вектор $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, который

$$\text{максимизирует} \quad yv \tag{3}$$

при условии

$$Ay \leqq u. \tag{4}$$

Напомним, что для применения симплекс-метода мы должны привести нашу стандартную задачу линейного программирования к канонической задаче максимизации с помощью введения дополнительных неотрицательных переменных. Неравенство (4) превратится при этом в следующее равенство

$$Ay + \sum \xi_i u_i = u. \tag{4'}$$

В игровых задачах, как мы видим это из соотношения (4′), у нас всегда есть возможность в качестве начального базиса использовать орты u_i. Наша исходная таблица для рассматриваемой игры будет иметь следующий вид:

		a^1	a^2	a^3	a^4	u	u_1	u_2	u_3	u_4
	u_1	0	0	2	2	1	1	0	0	0
	u_2	$b-1$	b	0	1	1	0	1	0	0
T_0	u_3	0	$-b$	$b+1$	1	1	0	0	1	0
	u_4	$b-1$	0	$b-1$	0	1	0	0	0	1
	$z-v$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0

По-видимому, читатель, дочитав книгу до этого места, уже достаточно ознакомился с симплекс-методом, и поэтому нет необходимости подробно объяснять здесь каждое из последовательных преобразований этой таблицы. Отметим только, что мы можем сначала ввести в первый базис любой из векторов a^j. После пересмотра всех таких возможностей мы попытаемся выбрать ведущий элемент так, чтобы уменьшить вычислительные трудности. Приведенные ниже таблицы являются, по-видимому, самыми простыми для этой частной задачи. Как показывает обведенный кружком элемент исходной таблицы, наше первое преобразование состоит в замене u_1 на a^4. Последующие таблицы приведены ниже:

		a^1	a^2	a^3	a^4	u	u_1	u_2	u_3	u_4
T_1	a^4	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	u_2	$b-1$	b	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
	u_3	0	$-b$	b	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
	u_4	$b-1$	0	$b-1$	0	1	0	0	0	1
	$z-v$	-1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
T_2	a^4	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	a^1	1	$\frac{b}{b-1}$	$\frac{-1}{b-1}$	0	$\frac{1}{2(b-1)}$	$\frac{-1}{2(b-1)}$	$\frac{1}{b-1}$	0	0
	u_3	0	$-b$	b	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
	u_4	0	$-b$	b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1
	$z-v$	0	$\frac{1}{b-1}$	$\frac{-1}{b-1}$	0	$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b-1}\right)$	$\frac{b-2}{2(b-1)}$	$\frac{1}{b-1}$	0	0
T_3	a^4					$\frac{b-1}{2b}$				
	a^1					$\frac{b+1}{2b(b-1)}$				
	u_3					0				
	a^3					$\frac{1}{2b}$				
	$z-v$	0	0	0	0	$\frac{b^2+1}{2b(b-1)}$	$\frac{b-1}{2b}$	$\frac{1}{b}$	0	$\frac{1}{b(b-1)}$

В окончательной таблице мы вычислили только ту строку и тот столбец, которые дают решение прямой и двойственной задач. Значение игры ω является обратным значением для ζ_0 и поэтому

$$\omega = \frac{2b(b-1)}{b^2+1},$$

а оптимальные стратегии мы получим после нормировки оптимальных векторов x и y из окончательной таблицы

$$\bar{x} = \frac{1}{b^2+1}[(b-1)^2,\ 2(b-1),\ 0,\ 2],$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b^2+1}[b+1,\ 0,\ b-1,\ (b-1)^2].$$

Непосредственное вычисление дает нам

$$\frac{1}{b^2+1}[(b-1)^2,\ 2(b-1),\ 0,\ 2]\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ b-1 & b & 0 & 1 \\ 0 & -b & b+1 & 1 \\ b-1 & 0 & b-1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2b(b-1)}{b^2+1}v=\omega v,$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ b-1 & b & 0 & 1 \\ 0 & -b & b+1 & 1 \\ b-1 & 0 & b-1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{b^2+1}[b+1,\ 0,\ b-1,\ (b-1)^2]=\omega u.$$

Читателю было бы полезно вернуться назад и вспомнить правила игры в покер, а затем интерпретировать полученный выше результат с точки зрения этих правил (см. упражнение 6).

§ 3. Оптимальные стратегии

В этом параграфе мы попытаемся ответить на следующий вопрос: какие множества смешанных стратегий могут встретиться нам в качестве множеств оптимальных стратегий игроков в матричной игре? Ответ на этот вопрос очень прост: ими может быть любой выпуклый многогранник, лежащий в множестве смешанных стратегий. В следующем параграфе мы рассмотрим аналогичный, но более сложный вопрос: при каких условиях пара выпуклых многогранников $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ может быть множеством оптимальных стратегий соответственно для игроков I и II в некоторой матричной игре? Ответ на этот вопрос будет уже более сложным.

Для дальнейшего удобно ввести некоторые простые обозначения. Мы будем обозначать через U_m множество, состоящее из m координатных ортов в пространстве R^m, т. е.

$$U_m=\{u_1,\ \ldots,\ u_m\}.$$

Далее, через $\langle U_m \rangle$ будем обозначать выпуклое множество[1]) $\langle u_1, \ldots, u_m \rangle$. Если векторы $u_1, \ldots, u_m$ рассматривать как чистые стратегии игры, то $\langle U_m \rangle$ есть просто множество смешанных стратегий этой игры. Рассмотрим аналогично,

$$V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

и

$$\langle V_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

Через $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ будем обозначать соответственно множества всех оптимальных стратегий каждого из игроков в рассматриваемой игре. Следовательно, *решением* игры является тройка $(\overline{X}, \overline{Y}; \omega)$, где ω — значение игры.

Во многих случаях целесообразно принять то упрощающее предположение, что значение игры равно нулю. Именно, если $A = (\alpha_{ij})$ — матрица выигрышей в игре с решением $(\overline{X}, \overline{Y}; \omega)$, то ясно, что новая игра с матрицей $A' = (\alpha_{ij} - \omega)$ будет иметь в качестве решения $(\overline{X}, \overline{Y}; 0)$ (см. упр. 14, гл. VI). Действительно, игру A' можно рассматривать как ту же самую игру, за исключением того, что до ее начала игрок I выплачивает игроку II сумму ω.

Для наших целей решение игры можно понимать просто как пару множеств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.

Теорема 7.2. *В любой матричной игре множество оптимальных стратегий $\overline{X}$ (или $\overline{Y}$) является выпуклым многогранником.*

Доказательство. Так как мы предполагаем, что $\omega = 0$, множество $\overline{X}$ должно состоять из всех векторов $\bar{x} \in R^m$, удовлетворяющих условиям

$$\bar{x} \geqq \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\bar{x}A \geqq \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\sum \xi_i = 1. \tag{3}$$

Обозначая через $\hat{X}$ множество всех векторов, удовлетворяющих условиям (1) и (2), мы из теоремы 2.13 получим (см. стр. 90), что множество $\hat{X}$, будучи множеством

---

[1]) См. стр. 99. — *Прим. перев.*

решений системы однородных неравенств, является конечным конусом, т. е.

$$\hat{X} = (x_1) + \ldots + (x_k)$$

и, следовательно, в силу неравенства (1) каждый вектор вида $x_r = (\xi_{r1}, \ldots, \xi_{rm})$ будет полуположительным. Поэтому можно предположить, что $\sum_{i=1}^{m} \xi_{ri} = 1$. Отсюда следует, что

$$\overline{X} = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle, \tag{4}$$

ибо если $\overline{x} \in \overline{X}$, то поскольку $\overline{X} \subset \hat{X}$, мы получаем, что

$$\overline{x} = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r x_r, \quad (\lambda_r \geq 0).$$

Из (3) мы имеем также

$$1 = u\overline{x} = \sum \lambda_r (ux_r) = \sum \lambda_r .$$

Следовательно, точка $\overline{x}$ является выпуклой комбинацией точек x_r, т. е.

$$\overline{x} \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle .$$

Наоборот, ввиду того, что каждая выпуклая комбинация векторов x_r удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), утверждение (4) доказано.

Заметим, что эту теорему можно было бы доказать и непосредственно, если использовать результат упражнения 38, гл. II (стр. 108). Однако привести независимое доказательство предпочтительнее.

Докажем теперь обратное утверждение:

Теорема 7.3. *Если $\overline{X}$ — некоторый выпуклый многогранник в $\langle U_m \rangle$, то существует матричная игра, для которой множество $\overline{X}$ является множеством оптимальных стратегий игрока* I.

Доказательство. Пусть $\overline{X} = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$, а $\hat{X}$ — конечный конус, порожденный точками x_r, $r = 1, \ldots k$, т. е.

$$\hat{X} = (x_1) + \ldots + (x_k).$$

Из теоремы 2.14 (см. стр. 91) нам известно, что $\hat{X}$ является множеством решений некоторой системы неравенств $xa^j \geqq 0$, $j = 1, \ldots, n$, при некотором n. Мы утверждаем, что $\bar{X}$ точно совпадает с множеством решений игры Г с матрицей, столбцы которой суть $a^0, a^1, \ldots, a^n$, где $a^0 = \mathbf{0}$, а векторы a^j при $j > 0$ те же, что и выше. Заметим прежде всего, что $\omega = 0$ для игры Г, поскольку игрок I может получить

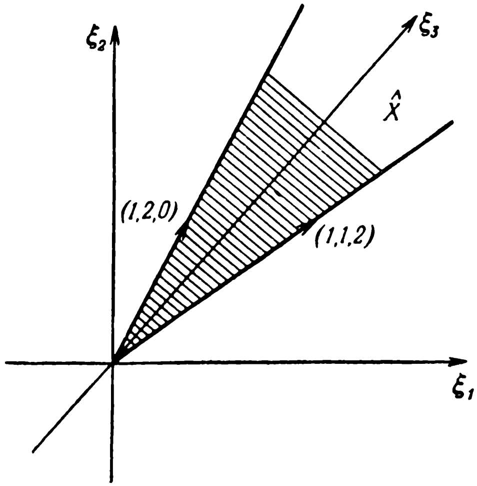


Рис. 22.

выигрыш, равный, по крайней мере, нулю, применяя любую стратегию $\bar{x} \in \bar{X}$, а игрок II может получить выигрыш, равный нулю, применяя стратегию a^0. Более того, игроку I гарантирован выигрыш, равный нулю, тогда и только тогда, когда он применяет $\bar{x} \in \bar{X}$, ибо если $\bar{x}$ — смешанная стратегия, не принадлежащая $\bar{X}$, то $\bar{x}$ не может принадлежать и $\hat{X}$, и, следовательно, $xa^j < 0$ для некоторого j.

В качестве иллюстрации к сказанному построим игру с тремя чистыми стратегиями для игрока I, для которой множество оптимальных стратегий $\bar{X}$ состоит из сегмента $[x_1, x_2]$, где

$$x_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad x_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Множество $\hat{X}$ порождается в нашем случае точками $(1, 2, 0)$ и $(1, 1, 2)$. Задача теперь состоит в том, чтобы представить $\hat{X}$ как множество решений некоторой системы неравенств. Соответствующий конус $\hat{X}$ изображен на рис. 22.

Мы утверждаем, что $\hat{X}$ есть множество всех неотрицательных решений системы неравенств

$$\begin{aligned} 4\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 &\geqq 0, \\ -4\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 &\geqq 0, \\ \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующие столбцы для матрицы выигрышей будут таковы:

$$\begin{aligned} a^1 &= (4, -2, -1), \\ a^2 &= (-4, 2, 1), \\ a^3 &= (1, 3, -2). \end{aligned}$$

В этом случае даже нет необходимости использовать нулевой вектор a^0. Мы утверждаем, что для игры с матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

множество $\overline{X}$ является множеством оптимальных стратегий игрока I. Ясно, что I, используя $\overline{x} \in \overline{X}$, получает неотрицательный выигрыш. С другой стороны, игрок II, применяя смешанную стратегию $(^1/_2, {}^1/_2, 0)$, гарантирует себе выигрыш, равный нулю; следовательно, $\omega = 0$.

Предоставляем читателю возможность показать, что множество $\overline{X}$ содержит все оптимальные стратегии игрока I.

§ 4. Решения

Чтобы описать множество всех решений данной игры, введем полезное и важное понятие.

Определение. Если существует такая оптимальная стратегия $\overline{x} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_m)$, что $\overline{\xi}_k > 0$, то k-я чистая стратегия u_k игрока I называется *существенной*.

Иными словами, чистая стратегия называется существенной, если она с положительной вероятностью входит в некоторую оптимальную стратегию. Например, при анализе игры морра (пример 2, гл. 6) было показано, что чистые стратегии s_2 и s_3 являются существенными, а чистые стратегии s_1 и s_4 таковыми не являются. Действительно, было показано, что если какой-нибудь игрок использует с положительной вероятностью s_1 или s_4, то его противник, выбрав соответствующую оптимальную стратегию, получит положительный выигрыш (см. стр. 244). Это иллюстрирует важное свойство существенных стратегий, которое дает ключ к выяснению структуры множества всех решений игры.

Лемма 7.1. *Чистая стратегия u_k является существенной тогда и только тогда, когда для всех оптимальных стратегий $\bar{y}$ игрока* II

$$u_k A\bar{y} = \omega$$

(т. е. именно та чистая стратегия является существенной, при которой достигается значение игры против каждой из оптимальных стратегий противника)[1]).

Доказательство. В силу нашего предыдущего замечания, читатель легко убедится в том, что интересующую нас лемму достаточно доказать для случая $\omega = 0$.

Предположим, во-первых, что u_k — существенная стратегия, а $\bar{x}$ — оптимальная стратегия с $\bar{\xi}_k > 0$. Тогда для $\bar{y} \in \bar{Y}$

$$0 = \bar{x}A\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i (a_i \bar{y}). \tag{1}$$

Поскольку $\bar{\xi}_i \geqq 0$ и $a_i\bar{y} \leqq 0$ для всех i, из (1) следует, что $\bar{\xi}_i (a_i\bar{y}) = 0$ для всех i. Поэтому, ввиду того, что $\bar{\xi}_k > 0$, должно быть и $a_k\bar{y} = 0$, но $a_k = u_k A$, следовательно, $u_k A\bar{y} = 0$, как и утверждалось.

Обратно, если чистая стратегия u_k не является существенной, то это значит, что система неравенств

$$xA \geqq \mathbf{0}, \qquad xu_k \geqq 1 \tag{2}$$

[1]) Заметим, что мы имеем здесь дело только с матричными играми, поэтому мы отождествляем чистые стратегии с ортами и обозначаем их через u_i и v_j вместо s_i и t_j.

имеет неотрицательное решение; тогда в силу теоремы 2.8 (см. стр. 77) существуют такие вектор $\bar{y} \geqq \mathbf{0}$ из R^n и число $\eta \geqq 0$, что

$$A\bar{y} + \eta u_k \leqq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{0}\bar{y} + \eta > 0,$$

или

$$A\bar{y} \leqq -\eta u_k \quad \text{и} \quad \eta > 0. \tag{3}$$

Это показывает, что вектор $\bar{y}$ отличен от нулевого. Поэтому, умножая его на положительное число, мы можем получить $\sum_{j=1}^{n} \bar{\eta}_j = 1$. Из неравенства (3) получаем, что $A\bar{y} \leqq \mathbf{0}$. Следовательно, $\bar{y}$ — оптимальная стратегия игрока II и, умножая неравенство (3) скалярно на u_k, мы получаем

$$u_k A\bar{y} \leqq -\eta u_k^2 = -\eta < 0.$$

Поэтому значение игры не достигается на u_k, если противник применяет стратегию $\bar{y}$. Это завершает доказательство леммы.

Мы можем теперь сформулировать основную теорему о структуре множества решений матричных игр. Пусть Γ — игра с множествами оптимальных стратегий $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ и пусть $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — числа существенных чистых стратегий, соответственно для игроков I и II.

Теорема 7.4 (структура решений). *Для любой матричной игры*

$$\bar{m} - \textit{ранг}\ \bar{X} = \bar{n} - \textit{ранг}\ \bar{Y}.$$

В теореме утверждается, как уже упоминалось выше, что множества оптимальных стратегий для двух игроков не могут быть произвольными многогранниками. Важным частным случаем сформулированного результата является:

Следствие. *Если решение* $(x_0, y_0; \omega)$ игры Γ *единственно, то* $\bar{m} = \bar{n}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится один вспомогательный результат.

Лемма 7.2. *Для любой матричной игры со значением* ω *существует такая оптимальная стратегия*

$\bar{x} = (\bar{\xi}_i)$, *что*

$$\bar{x}u_i > 0 \quad \text{для всех существенных } u_i. \tag{1}$$

$$\bar{x}Av_j > \omega \quad \text{для всех несущественных } v_j. \tag{2}$$

Доказательство. Для каждой существенной стратегии u_i существует по определению такая оптимальная стратегия $\bar{x}_i$, что $\bar{x}_i u_i > 0$. К тому же в силу предыдущей леммы для каждой несущественной стратегии v_j существует такая оптимальная стратегия $\bar{x}'_j$, что $\bar{x}'_j A v_j > \omega$. Определим вектор $\bar{x}$ следующим образом

$$\bar{x} = \frac{1}{2\bar{m}} \sum \bar{x}_i + \frac{1}{2(n-\bar{n})} \sum \bar{x}'_j.$$

Можно проверить, что вектор $\bar{x}$ является оптимальной стратегией с нужными свойствами.

Будем называть, наконец, *существенной подматрицей* $\bar{A}$ матрицы A такую подматрицу, которая состоит из всех элементов α_{ij} матрицы A, для которых стратегии u_i и v_j являются существенными. Иными словами, $\bar{A}$ — это матрица выигрышей в игре, получаемый из игры Γ, если оба игрока ограничиваются существенными чистыми стратегиями.

Доказательство теоремы 7.4. Будем снова предполагать, что $\omega = 0$. Покажем, что

$$\bar{m} - \text{ранг } \bar{X} = \text{ранг } \bar{A} = \bar{n} - \text{ранг } \bar{Y}.$$

Обозначим для этого через $R^{\bar{m}}$ — подпространство пространства R^m, порожденное существенными векторами u_i. По определению $\bar{X} \subset R^{\bar{m}}$ и матрица $\bar{A}$ умножается на векторы из пространств $R^{\bar{m}}$ справа. Далее, обозначим через $\tilde{X}$ линейное пространство, порожденное $\bar{X}$, т. е. определим $\tilde{X}$ как множество всех линейных комбинаций векторов, входящих в $\bar{X}$. По определению ранг $\tilde{X} =$ $=$ ранг $\bar{X}$.

Покажем теперь, что

$$\bar{m} - \text{ранг } \tilde{X} = \text{ранг } \bar{A}. \tag{1}$$

Вследствие симметрии соответствующее соотношение должно иметь место и для игрока II и наше утверждение будет доказано.

Чтобы убедиться в справедливости равенства (1), мы покажем, что линейное пространство $\widetilde{X}$ совпадает со множеством всех решений уравнения

$$x\overline{A}=0, \qquad x\in R^{\overline{m}}. \tag{2}$$

Тогда равенство (1) будет следовать из теоремы 2.4 (стр. 66). Нетрудно видеть, что каждый вектор $x\in\widetilde{X}$ удовлетворяет уравнению (2), поскольку для всех существенных векторов v_j в силу леммы 7.1 $x\overline{A}v_j=0$ (конечно, принимая во внимание, что $\omega=0$). Обратно, предположим, что вектор x является решением уравнения (2), и пусть $\overline{x}$ — оптимальная стратегия, удовлетворяющая заключению леммы 7.2. Тогда можно выбрать столь большое число λ, что вектор $x'=x+\lambda\overline{x}$ будет удовлетворять неравенствам

$$x'u_i>0 \quad \text{для всех существенных } u_i, \tag{3}$$
$$x'Av_j>0 \quad \text{для всех несущественных } v_j. \tag{4}$$

Далее, поскольку вектор x' полуположителен, вектор $\overline{x}'=x'/\sum\xi_i'$ является смешанной стратегией, и, как это следует из (2) и (4), $\overline{x}'\in X$. Но тогда $x=\left(\sum\xi_i'\right)\overline{x}'-\lambda x$ и, следовательно, вектор $x\in\widetilde{X}$, т. е. $\widetilde{X}$ совпадает с множеством всех решений уравнения (2), что и утверждалось. Оставшаяся часть рассуждения уже была проведена.

Можно показать, что теорема 7.4 полностью характеризует решение игры. Говоря более точно, если $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ являются произвольными многогранниками в $\langle U_{\overline{m}}\rangle$ и $\langle V_{\overline{n}}\rangle$ и если выполняется условие $\overline{m}$ — ранг $\overline{X}=\overline{n}$ — ранг $\overline{Y}$, то существует некоторая матричная игра, решение которой совпадает с $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.

Однако при этом, для того чтобы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ были данными многогранниками, может оказаться необходимым введение дополнительных несущественных стратегий для обоих игроков. Число этих дополнительных стратегий будет зависеть от числа «граней» многогранников $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Мы не будем останавливаться на формальном доказательстве соответствующего результата, но в одном из последующих параграфов покажем на примере, как можно фактически построить игру с заданными множествами решений.

Мы заканчиваем этот параграф замечанием об одном свойстве существенных подматриц игры, которое будет полезно в дальнейшем. Практически в играх с небольшим числом стратегий игроков решение можно угадать после нескольких попыток. Сначала можно попытаться угадать существенные чистые стратегии игроков. Если это удастся, то можно, решив соответствующую систему уравнений, найти значение игры. Точный результат формулируется следующим образом.

Теорема 7.5. *Пусть* $\bar{A}$ — *существенная подматрица игры* Γ, *а* x *и* λ — *решения уравнений*

$$\sum{}' \xi_i = 1, \qquad x\bar{a}^j = \lambda, \qquad j = 1, \ldots, \bar{n}. \tag{1}$$

Тогда λ *является значением игры.*

Доказательство. Мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$xu = 1, \qquad x\bar{A} = \lambda v, \tag{2}$$

где $u = \sum u_i$ и $v = \sum v_j$ для существенных u_i и v_j. В силу леммы 7.1 для оптимальной стратегии $\bar{y}$ игрока II мы имеем $\bar{A}\,\bar{y} = \omega u$. Отсюда следует, что

$$0 = 0\bar{y} = (x\bar{A} - \lambda v)\,\bar{y} = \omega\,(xu) - \lambda\,(v\bar{y}) = \omega - \lambda.$$

Таким образом, $\lambda = \omega =$ значению игры Γ, а это и утверждалось.

Доказанная теорема дает нам возможность находить, по крайней мере теоретически, значение игры за конечное число шагов. Этот метод состоит в последовательной проверке всех возможных множеств существенных стратегий для каждого из игроков. При каждой такой проверке задаются некоторым значением λ. Далее, с этим значением λ пытаются найти неотрицательное решение уравнений (2), а все базисные неотрицательные решения могут быть найдены в конечное число шагов. Затем, каждое из этих решений $\bar{x}$ должно быть проверено против *всех* чистых стратегий игрока II (не только существенных!). Одновременно следует производить эти же вычисления и для второго игрока. В конце концов мы найдем решение $(\bar{x}, \bar{y}; \omega)$. Естественно, что для практических целей этот метод совершенно неэффективен.

§ 5. Примеры

Проиллюстрируем теорему о структуре множества решений двумя примерами.

Пример 1. Игра на уклонение. Игроки I и II выбирают соответственно целые числа x и y, лежащие между 1 и 4, и выигрыш игрока I равен

$$|x-y|.$$

Матрица выигрышей здесь имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Название «игра на уклонение» оправдывается тем, что игрок I старается держаться как можно дальше от игрока II. Поэтому игроку I можно придерживаться стратегии, по которой он играет только конечные точки, т. е. 1 или 4. Предположим поэтому, что существенная подматрица состоит соответственно из первого и четвертого столбца и строк. Рассмотрев эту подматрицу

$$\begin{array}{|cc|} \hline 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

мы увидим, что значение соответствующей ей игры равно $^3/_2$, а оптимальной стратегией каждого из игроков является $(^1/_2, {}^1/_2)$. Это наводит на мысль проверить теперь стратегии $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = (^1/_2, 0, 0, {}^1/_2)$ на оптимальность в первоначальной игре. Непосредственный подсчет показывает, что $(\overline{x}_1, \overline{y}_1; {}^3/_2)$ является решением игры. Заметим, однако, что как $\overline{x}_1$, так и $\overline{y}_1$ обеспечивают получение игроком I выигрыша ${}^3/_2$ против *каждой* из чистых стратегий противника. Следовательно, в силу леммы 7.1 по крайней мере один из двух игроков должен, кроме найденных, иметь и другие оптимальные стратегии. Как нетрудно проверить непосредственно, стратегия $\overline{y}_2 = (0, {}^1/_2, {}^1/_2\ 0)$ игрока II также является для него оптимальной. Отметим, однако, что если игрок I применит против стратегии $\overline{y}_2$ стратегию u_2 или u_3, то он получит выигрыш только ${}^1/_2$, что меньше значения игры. Следовательно, стратегии u_2 и u_3 не являются существенными; поэтому существенной подматрицей матрицы игры является матрица

$$A = \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\,.$$

Каждая оптимальная стратегия игрока I имеет вид $\lambda u_1 + (1-\lambda) u_4$, и читателю легко убедиться в том, что действительно λ должно быть равно ${}^1/_2$ (см. упр. 13). Следовательно, оптимальная стратегия игрока I единственна и ранг $\overline{X} = 1$. Мы знаем также, что $\overline{m} = 2$ и $\overline{n} = 4$; отсюда в силу теоремы о структуре решений мы заключаем, что ранг $\overline{Y} = 3$. Поэтому, кроме стратегий $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$, игрок II должен иметь еще хотя бы одну оптимальную стратегию, которая от них линейно не зависит. Таковой является одна из стратегий

$$\overline{y}_3 = \left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0\right), \qquad \overline{y}_4 = \left(0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right).$$

Конечно, стратегии $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$, $\overline{y}_4$ должны быть зависимы; действительно,

$$\overline{y}_1 + 3\overline{y}_2 = 2\overline{y}_3 + 2\overline{y}_4.$$

Мы увидим далее, что в действительности

$$\overline{Y} = \langle \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4 \rangle.$$

Пример 2. Бесшумная дуэль на расстоянии в пять шагов. Этот пример является конечным вариантом бесшумной дуэли, описанной в гл. VI, пример 7. Игроки продвигаются навстречу друг другу на пять шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но выстрелить во время игры он может только один раз; вероятность того, что игрок убьет своего противника, если выстрелит, продвинувшись на k шагов, равна $k/5$.

Легко вычислить матрицу выигрышей. Если игрок I принимает решение стрелять на i-м шаге, а игрок II — на j-м шаге, где $i < j$, то выигрыш игрока I задается формулой

$$\frac{i}{5}-\left(1-\frac{i}{5}\right)\frac{j}{5}=\frac{5(i-j)+ij}{25}.$$

Матрица выигрышей в этой игре, умноженная на 25, имеет вид

0	−3	−7	−11	−20
3	0	1	−2	−5
7	−1	0	7	5
11	2	−7	0	15
20	5	−5	−15	0

Далее, первая стратегия каждого из игроков является *доминируемой* (см. упр. 16, гл. VI) и поэтому не может быть существенной (см. упр. 15, гл. VII). Попытаемся угадать, какие из стратегий игроков являются существенными. Анализируя наши возможности, мы остановимся в конце концов на подматрице, составленной из строк и столбцов с номерами 2, 3 и 5:

0	1	−5
−1	0	5
5	−5	0

Нетрудно видеть, что эта игра имеет единственное решение $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = (^5/_{11},\ ^5/_{11},\ ^1/_{11})$. Если мы теперь в исходной игре используем стратегии

$$\bar{x} = \bar{y} = (0,\ ^5/_{11},\ ^5/_{11},\ 0,\ ^1/_{11}),$$

то увидим, что стратегия $\bar{x}$ против стратегии v_4 приводит к выигрышу 10; следовательно, стратегии u_4 и v_4 не являются существенными; таким образом, единственным решением является именно $(\bar{x}, \bar{y}; 0)$.

Представляет некоторый интерес взглянуть на этот результат с точки зрения правил игры. Из него вытекает, что дуэлянту никогда не следует стрелять после первого шага, он должен стрелять с равной вероятностью после второго или третьего шага, никогда не стрелять после четвертого шага и лишь изредка стрелять в упор. Этот ответ является несколько неожиданным, и едва ли его можно было предугадать.

§ 6. Структура симметричных игр

Игра, рассмотренная в примере 2 предыдущего параграфа, была симметричной, и, поскольку для таких игр оптимальные и существенные стратегии обоих игроков совпадают, условия теоремы о структуре решений будут автоматически выполнены. Возникает вопрос, каждый ли выпуклый многогранник $\bar{X} \subset \langle U_m \rangle$ может быть множеством решений некоторой симметричной игры. Ответ будет отрицательным, поскольку имеет место следующая теорема.

Теорема 7.6 (структура решений симметричной игры). *Для симметричной игры число $\bar{m}$ — ранг $\bar{X}$ является четным.*

Эта теорема вытекает из следующего классического результата, относящегося к теории матриц.

Лемма 7.3. *Если A — кососимметричная матрица, то ее ранг четный.*

Доказательство. Обозначим через X множество всех решений уравнения $xA = \mathbf{0}$, а через $x_1, \ldots, x_k$ —

базис этого множества. Тогда ранг $A = m - k$. Покажем, что число $m - k$ четное.

Это вытекает непосредственно из определения кососимметричности, а именно из того, что для всех $x \in R^m$ выполняется равенство $xAx = 0$. Выберем теперь максимальное множество таких векторов $y_1, \ldots, y_s$, что

$$\text{векторы } x_1, \ldots x_k, \; y_1, \ldots, y_s \text{ линейно независимы} \tag{1}$$

и

$$y_i A y_j = 0 \quad \text{для всех } i, \, j. \tag{2}$$

Пусть далее $b_i = y_i A$, $i = 1, \ldots, s$. Векторы b_i линейно независимы, поскольку из $\sum \lambda_i b_i = \mathbf{0}$, следует, что

$$\sum \lambda_i (y_i A) = \left(\sum \lambda_i y_i\right) A = \mathbf{0},$$

следовательно, $\sum \lambda_i y_i \in X$, откуда вытекает линейная зависимость векторов x_i и y_i, а это противоречит (1).

Обозначим теперь через Y множество всех решений уравнений $xb_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Очевидно, в этом случае $x_i, y_i \in Y$ для всех i. Наоборот, если $y \in Y$, то вектор y является линейной комбинацией векторов x_i и y_i, так как в противном случае, полагая $y = y_{s+1}$, мы могли бы увеличить множество векторов, удовлетворяющих условиям (1) и (2), а это противоречит предположению о максимальности. Из теоремы 2.4 (стр. 66) вытекает, что ранг $Y = m - s = k + s$ и, следовательно, $m - k = 2s$.

Для доказательства теоремы 7.6 нам остается теперь заметить, что в симметричной игре существенная подматрица так же является кососимметричной, поскольку оба игрока имеют одни и те же существенные чистые стратегии. Но при доказательстве теоремы о структуре решений мы видели, что для игр, значение которых равно нулю, выполняется равенство

$$\overline{m} - \text{ранг } \overline{X} = \text{ранг } \overline{A},$$

причем разность оказывается в симметричном случае четной.

П р и м е р 3. Рассмотрим теперь игру, известную под названием «ножницы, мешок, камень». Для тех, кто не знаком с точными правилами игры[1]), достаточно дать лишь матрицу выигрышей в этой игре

0	1	−1
−1	0	1
1	−1	0

Ввиду очевидной симметрии как стратегий, так и игроков простым перебором мы находим следующие оптимальные стратегии

$$\bar{x} = \bar{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Таким образом, $\bar{m} = 3$ и, поскольку ранг $A = 2$, отсюда следует, что вектор $\bar{x}$ является в этой игре единственной оптимальной стратегией.

Рассмотрим один вариант этой игры, в которой каждый игрок располагает четырьмя стратегиями.

Пример 4. Каждый игрок выбирает одно число от 1 до 4. Игрок выигрывает у своего противника 1, если его число на единицу больше числа, выбранного его противником, либо если он выбрал 1, а его противник 4. В противном случае партия признается ничейной. Матрица этой игры имеет вид

	1	2	3	4
1	0	−1	0	1
2	1	0	−1	0
3	0	1	0	−1
4	−1	0	1	0

Стратегия $(^1/_4, {}^1/_4, {}^1/_4, {}^1/_4)$ является здесь, очевидно, решением. Поскольку, однако, ранг матрицы четный, должны существовать и другие решения этой игры. Вот эти

[1]) «Ножницы» режут «мешок», в «мешок» можно положить «камень», и «камень» ломает «ножницы». Другое название этой игры — «гангстерская баккара».— *Прим. перев.*

стратегии: $\overline{x}_1 = (0, {}^1/_2, 0, {}^1/_2)$ и $\overline{x}_2 = ({}^1/_2, 0, {}^1/_2, 0)$. Ввиду того что ранг матрицы A равен двум, а $\overline{m} = 4$, отсюда вытекает, что все решения являются линейными комбинациями векторов $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$; следовательно, $\overline{X} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2 \rangle$.

§ 7. Построение игры с наперед заданными решениями

В этом параграфе мы покажем, что условие теоремы 7.4 не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы многогранники $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ были решениями некоторой матричной игры. Мы не будем приводить полного доказательства этого факта, а ограничимся лишь иллюстративным числовым примером построения желаемой игры, заданной парой многогранников.

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи. Назовем игру *вполне смешанной*, если она имеет единственное решение и стратегия каждого из игроков является существенной.

Теорема 7.7. *Пусть $\overline{x} = (\overline{\xi}_i)$ и $\overline{y} = (\overline{\eta}_j)$ — смешанные стратегии, $\overline{\xi}_i > 0$ и $\overline{\eta}_j > 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Тогда существует вполне смешанная игра, имеющая тройку $(\overline{x}, \overline{y}, 0)$ в качестве своего единственного решения.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\dfrac{\overline{\eta}_1}{\overline{\eta}_m} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\dfrac{\overline{\eta}_2}{\overline{\eta}_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\dfrac{\overline{\eta}_{m-1}}{\overline{\eta}_m} \\ -\dfrac{\overline{\xi}_1}{\overline{\xi}_m} & -\dfrac{\overline{\xi}_2}{\overline{\xi}_m} & \ldots & -\dfrac{\overline{\xi}_{m-1}}{\overline{\xi}_m} & \dfrac{1}{\overline{\xi}_m \overline{\eta}_m} \sum\limits_{i=1}^{m-1} \overline{\xi}_i \overline{\eta}_i \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $(\overline{x}, \overline{y}; 0)$ является решением. С другой стороны, ранг матрицы A

равен $m - 1$ (почему?) и поэтому в силу теоремы 7.4 ранги множеств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ равны единице; следовательно, это решение единственно.

Опишем теперь удобный графический способ представления множеств $\langle U_m \rangle$ и $\langle V_n \rangle$. Рассмотрим случай четырех чистых стратегий и изобразим множество $\langle U_m \rangle$ в виде правильного тетраэдра Δ с высотой равной единице. Далее,

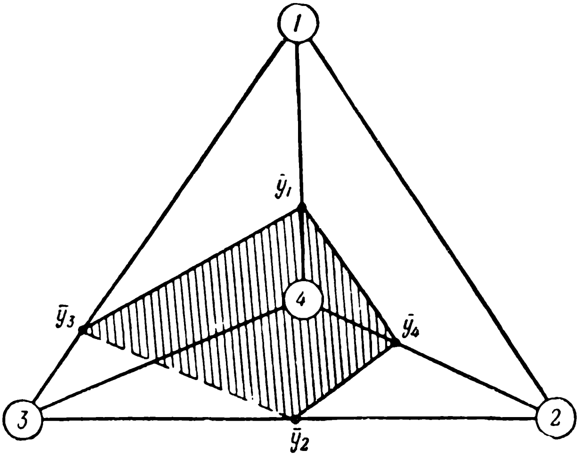


Рис. 23.

легко доказуемым фактом является утверждение, что для любой точки тетраэдра сумма расстояний этой точки до всех четырех граней равна единице. Если мы перенумеруем вершины тетраэдра цифрами 1, 2, 3 и 4, то верно также и то, что для $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \langle U_4 \rangle$ существует единственная точка тетраэдра, которая отстоит от вершины i на расстоянии ξ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Мы не доказываем эти утверждения, поскольку они не существенны для развития теории, а лишь поясняют геометрическое представление, которым мы пользуемся.

Воспользуемся теперь этим представлением для того, чтобы описать оптимальные стратегии второго игрока в примере 1 (§ 5, стр. 290).

На рис. 23 каждой чистой стратегии поставлена в соответствие вершина тетраэдра с обведенным номером. Крайние оптимальные стратегии $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ $\bar{y}_4$ представлены на рисунке соответствующими точками, а их выпуклой линейной оболочке $\overline{Y}$ соответствует заштрихованная часть тетраэдра. Как уже отмечалось, стратегии $\bar{y}_i$ линейно зависимы, поскольку $\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 = 2\bar{y}_3 + 2\bar{y}_4$, и, следовательно, заштрихованная часть тетраэдра является двумерной областью. (Термин «размерность» мы употребляем здесь в интуитивном смысле, так как это понятие пока еще формально не определено.) На самом деле, из чертежа видно, что множество $\overline{Y}$ является пересечением тетраэдра Δ с двумерной плоскостью. Теперь уже ясно, что множество $\overline{Y}$ содержит *все* оптимальные стратегии, так как если бы существовала хотя бы одна оптимальная стратегия вне множества $\overline{Y}$, то множество оптимальных стратегий должно было бы быть по крайней мере трехмерным. Следовательно, множество оптимальных стратегий имело бы ранг, равный четырем. С другой стороны, вычитая значение $\omega = {}^3/_2$ из всех элементов существенной матрицы $\overline{A}$, мы получим матрицу вида

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -{}^3/_2 & -{}^1/_2 & {}^1/_2 & {}^3/_2 \\ {}^3/_2 & {}^1/_2 & -{}^1/_2 & -{}^3/_2 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен единице. Поскольку $\bar{n} = 4$, в силу теоремы 7.4 мы имеем

$$\text{ранг } \overline{Y} = 4 - 1 = 3,$$

и, следовательно, оптимальных стратегий, кроме указанных на рисунке, быть не может.

Пример 5. Попытаемся теперь построить игру, оптимальные стратегии которой суть

$$\overline{X} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle, \quad \overline{Y} = \langle \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle, \quad \omega = 0,$$

где

$$\bar{x}_1 = ({}^1/_2, {}^1/_2, 0, 0), \quad \bar{x}_2 = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3, 0), \quad \bar{x}_3 = ({}^1/_2, {}^1/_4, 0, {}^1/_4),$$

а

$$\bar{y}_1 = ({}^1/_2, {}^1/_2, 0), \quad \bar{y}_2 = (0, {}^1/_2, {}^1/_2).$$

На рис. 24 и 25 дано геометрическое представление множеств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. На рис. 24 множеству $\overline{X}$ соответствует часть тетраэдра с двойной штриховкой. Часть тетраэдра с вертикальной штриховкой является пересечением тетраэдра с плоскостью, проходящей через точки $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$.

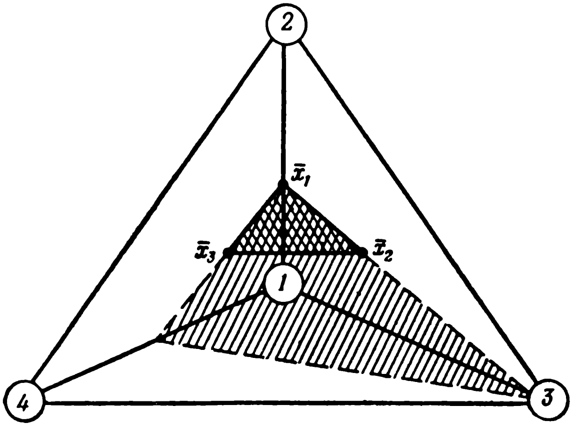


Рис. 24.

Попытаемся теперь построить существенную подматрицу этой игры. Так как ранг множества $\overline{X}$ равен 3 и существуют 4 существенные стратегии, отсюда вытекает, что ранг существенной подматрицы должен быть равен трем.

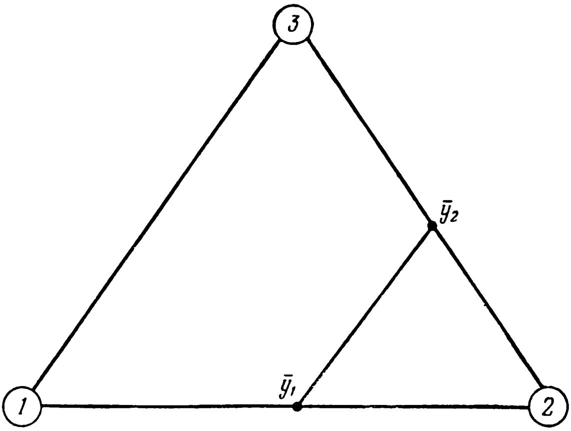


Рис. 25.

Обозначим через a^1 первый вектор-столбец существенной подматрицы. В силу леммы 7.1 мы имеем

$$\bar{x}_i a^1 = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Одним из решений этой системы уравнений является вектор

$$a^1 = (1,\ -1,\ 0,\ -1).$$

Поскольку ранг матрицы $\bar{A}$ должен быть равен единице, $a^2 = \lambda a^1$, $a^3 = \mu a^1$, где λ и μ — некоторые подлежащие определению числа. Пока мы имеем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ -1 & -\lambda & -\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & -\mu \end{pmatrix}.$$

Но ввиду того что все чистые стратегии являются для игрока I существенными, мы снова в силу леммы 7.1 получаем

$$a_1 \bar{y}_1 = (1,\ \lambda,\ \mu)\,(^1/_2,\ ^1/_2,\ 0) = 0, \quad \text{откуда } \lambda = -1,$$

и

$$a_2 \bar{y}_2 = (1,\ \lambda,\ \mu)\,(0,\ ^1/_2,\ ^1/_2) = 0, \quad \text{откуда } \mu = 1.$$

Следовательно, матрица $\bar{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы построили требуемую существенную подигру, но задача еще не решена, поскольку в игре с матрицей выигрышей $\bar{A}$ оптимальны все стратегии, лежащие в вертикально заштрихованном сечении (рис. 24), в то время как мы хотим, чтобы оптимальными были только те стратегии, которые лежат в сечении с двойной штриховкой. Необходимо, следовательно, каким-то образом отсечь ненужную часть сечения с вертикальной штриховкой. Попытаемся это сделать, проведя гиперплоскость через векторы $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ так, чтобы вектор $\bar{x}_1$ лежал с «положительной» стороны этой плоскости. Более точно, если обозначим через a^4 нормаль к этой гиперплоскости, то мы хотим, чтобы выполнялись условия

$$a^4\bar{x}_2 = 0, \quad a^4\bar{x}_3 = 0 \quad \text{и} \quad a^4\bar{x}_1 > 0.$$

Можно найти вектор a^4, удовлетворяющий первым двум уравнениям и неравенству, изменяя, если это необходимо, его знак. Этим условиям удовлетворяет вектор $a^4 = (-1, 2, -1, 0)$, и если мы введем теперь четыре несущественные стратегии для игрока II, то мы получим матрицу выигрышей в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно легко проверить (см. упр. 20), что множества оптимальных стратегий построенной игры совпадают с заданными множествами.

Изложенный выше процесс может быть грубо описан следующим образом: конструируем сначала существенную подматрицу. Игра с этой матрицей выигрышей будет иметь множества оптимальных стратегий, которые охватывают заданные множества, но ее собственный ранг может оказаться несколько больше, чем это нужно. Для того чтобы получить желаемый многогранник, вводим дополнительные несущественные стратегии для другого игрока, которые и усекут множество оптимальных стратегий как раз до желаемого многогранника. Проиллюстрируем этот процесс еще одним примером.

Пример 6. Пусть $\bar{X} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$, $\bar{Y} = \langle \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle$, где $\bar{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{x}_2 = (^1/_2, {}^1/_2, 0)$, $\bar{x}_3 = (^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$
и

$$\bar{y}_1 = (1, 0), \quad \bar{y}_2 = (^1/_2, {}^1/_2).$$

Этот случай изображен на рисунках 26 и 27, где участок с двойной штриховкой на рис. 26 и утолщенная прямая на рис. 27 соответствуют множествам оптимальных стратегий.

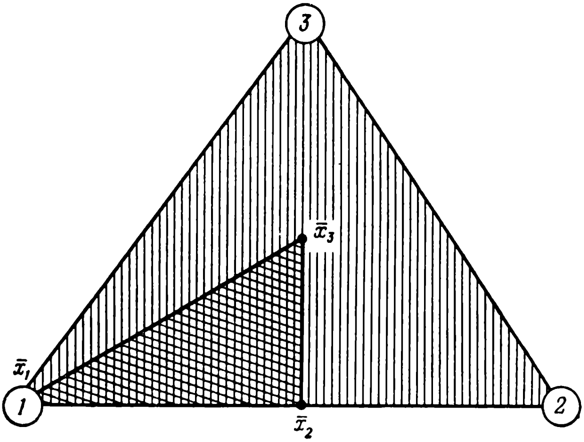


Рис. 26.

Ввиду того что ранг $\overline{X} = \overline{m} = 3$ и ранг $\overline{Y} = \overline{n} = 2$ в предположении, что $\omega = 0$, мы имеем

$$\text{ранг } \overline{A} = 0.$$

Следовательно, существенная подматрица должна быть тождественно равна нулю. Таким образом,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, для того, чтобы выделить множество оптимальных стратегий для игрока I, мы должны ввести две дополнительные стратегии для игрока II, соответствующие прямым $\overline{x}_1\,\overline{x}_3$ и $\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ на рис. 26. Таким образом, мы сначала находим вектор a^3 из следующих условий

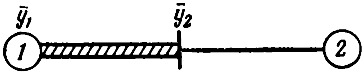


Рис. 27.

$$a^3\overline{x}_1 = 0,\ a^3\overline{x}_3 = 0 \text{ и } a^3\overline{x}_2 > 0.$$

Очевидно, решением этой системы является вектор $a^3 = (0,\ 1,\ -1)$.

Затем мы рассматриваем систему

$$a^4\bar{x}_2 = 0, \quad a^4\bar{x}_3 = 0 \quad \text{и} \quad a^4\bar{x}_1 > 0,$$

что дает нам вектор $a^4 = (1, \ -1, \ 0)$.

Итак, мы получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это еще не решение задачи, поскольку игрок II имеет в игре с такой матрицей еще слишком много оптимальных стратегий; например, к ним относится любая комбинация первых двух стратегий. Для того чтобы выделить множество оптимальных стратегий для игрока II, мы вводим четвертую строку $a_4 = (-1, \ 1, \ 0, \ 0)$ и в результате получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет требуемое множество решений (упр. 21).

Мы не доказали, конечно, что проиллюстрированный выше метод всегда приводит к цели, и фактически даже не попытались дать точное описание этого метода. Нам хотелось здесь сделать лишь правдоподобным достаточность условия, сформулированного в теореме о структуре решений. Доказательство достаточности не представляет особенных трудностей, но является довольно скучным занятием и, по-видимому, оно не настолько важно, чтобы его здесь приводить. Достаточно сказать, что существует алгорифм построения игры с указанным заранее решением даже в том случае, когда игроки имеют более четырех чистых стратегий. Описанный в этом параграфе графический метод в этих случаях, конечно, неприменим.

§ 8. Базисные оптимальные стратегии

Так как мы уже показали, что множества $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ оказываются выпуклыми многогранниками, то для нахождения всех решений игры достаточно найти все крайние точки этих многогранников[1]). Такие крайние точки мы будем называть *базисными оптимальными стратегиями*, или *базисными решениями*, и, как это вытекает из теории, изложенной в гл. II, все другие оптимальные стратегии оказываются выпуклыми линейными комбинациями базисных решений. Мы дадим здесь характеристику крайних оптимальных стратегий, что позволит нам по крайней мере теоретически в конечное число шагов построить все такие стратегии.

Для этого нам потребуется несколько дополнительных понятий.

Определения. Квадратная матрица A порядка m называется *невырожденной*, если ее ранг равен m. Матрица, которая не является невырожденной, называется *вырожденной* (см. гл. II, упр. 9).

Пусть A — матрица порядка $m \times n$, S — подмножество множества $M = \{1, \ldots, m\}$ и T — подмножество множества $N = \{1, \ldots, n\}$, тогда элементы *подматрицы* A_{ST} суть α_{ij}, где $i \in S$, $j \in T$.

Напоминаем читателю, что мы условились говорить о *зависимости* m-мерного вектора $x = (\xi_i)$ от множества S, если $\xi_i = 0$ для $i \notin S$.

Теперь мы можем уже дать характеристику базисных оптимальных стратегий.

Теорема 7.8. *Пусть игра Γ имеет значение $\omega \neq 0$. Тогда оптимальная стратегия $\bar{x}$ является базисной в том и только том случае, если существуют такие множества $S \subset M$ и $T \subset N$, что матрица A_{ST} невырожденная, вектор $\bar{x}$ зависит от S и*

$$\bar{x}a^j = \omega \quad \text{для всех } j \in T. \qquad (1)$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, коротко обсудим ее. Мы уже видели, что мы можем вычислить значение игры непосредственным опробованием, которое позволяет выделить существенные стратегии, используя теорему 7.6. Используя затем только что сформулированную теорему, мы можем в конечное число шагов

[1]) То есть их вершины.— *Прим. перев.*

получить все оптимальные стратегии. Прежде всего мы можем предполагать, что $\omega \neq 0$, ибо в случае $\omega = 0$ мы просто добавим ко всем элементам матрицы A некоторое фиксированное число. Далее мы проверяем все невырожденные подматрицы A_{ST} и решаем написанные выше уравнения (1) относительно $\bar{x}$ (поскольку матрица A_{ST} невырожденная, это решение будет единственным). Тогда, если $\bar{x}$ — оптимальная стратегия (а это легко может быть проверено), то $\bar{x}$ будет и базисным решением. В итоге мы получим все базисные стратегии.

Доказательство теоремы будет опираться на приведенную в теореме 2.16 (стр. 98) характеристику крайних решений системы неравенств. Заметим сначала, что все оптимальные стратегии игрока I являются решениями системы неравенств

$$\begin{aligned} \bar{x}u_i &\geqq 0 \quad \text{для всех } i, \\ \bar{x}(a^j - \omega u) &\geqq 0 \text{ для всех } j. \end{aligned} \tag{2}$$

В соответствии с теоремой 2.16 вектор $\bar{x}$ является крайним решением в том и только том случае, если множество написанных выше соотношений, в которых достигается равенство, имеет ранг $m - 1$. Мы должны показать, что в этом и только этом случае вектор $\bar{x}$ удовлетворяет условиям нашей теоремы.

Предположим сначала, что эти условия выполнены, т. е. что

$$\begin{aligned} \bar{x}u_i &= 0 \quad \text{для} \quad i \notin S, \\ \bar{x}(a^j - \omega u) &= 0 \quad \text{для} \quad j \in T. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку матрица A_{ST} квадратная, написанная выше система является системой m уравнений с m неизвестными и, поскольку существует ненулевое решение $\bar{x}$, ее ранг не превышает $m - 1$. Далее, если бы ранг системы был меньше $m - 1$, то мы могли бы найти второе решение x' системы (3), линейно независимое с $\bar{x}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$x'u = 0.$$

В этом случае из (3) мы имеем

$$\begin{aligned} x'u_i &= 0 \quad \text{для} \quad i \notin S, \\ x'a^j &= 0 \quad \text{для} \quad j \in T. \end{aligned} \tag{4}$$

Читатель может сам проверить, что эти уравнения выражают именно тот факт, что строки матрицы A_{ST} линейно зависимы. Это, однако, противоречит предположению о невырожденности матрицы A_{ST}.

Случай 2.

$$x'u \neq 0.$$

Здесь мы можем считать, что $x'u = 1$ (умножая в противном случае на подходящий множитель). Но тогда вектор $\bar{x} - x'$ будет удовлетворять написанной выше системе (4), что, как мы уже видели, невозможно. Следовательно, ранг системы (3) равен $m - 1$ и вектор $\bar{x}$ крайний.

Обратно, пусть вектор $\bar{x}$ крайний. Мы можем далее считать (изменяя, если это необходимо, нумерацию), что в неравенствах (2) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{x}u_i &= 0 \quad \text{для} \quad i = r, r+1, \ldots, m, \\ \bar{x}(a^j - \omega u) &= 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, s \end{aligned} \tag{5}$$

и только они. Так как вектор $\bar{x}$ крайний, ранг системы (5) равен $m-1$. Мы утверждаем, что ранг системы векторов $u_r, \ldots, u_m, a^1, \ldots, a^s$ равен m. В самом деле, если бы этот ранг был меньше, то существовал бы вектор $x' = (\xi_i') \neq \mathbf{0}$, где $\xi_i = 0$, $i \geq r$ и $x'a^j = 0$ для $j \leqslant s$. Возьмем теперь некоторую оптимальную стратегию $\bar{y} = (\bar{\eta}_j)$ для игрока II. Как мы знаем, для $j > s$ выполняется неравенство $\bar{x}a^j > \omega$ и, следовательно, стратегия v_j не является для игрока II существенной (лемма 7.1). Кроме того, $\bar{\eta}_j = 0$ для $j > s$. Далее, мы имеем

$$x'A\bar{y} = \sum_{j=1}^{s} (x'a^j)\bar{\eta}_j = 0. \tag{6}$$

Но, с другой стороны,

$$x'A\bar{y} = \sum_{i=1}^{r-1} \xi_i'(a_i\bar{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{r-1} \xi_i'\Big)\omega, \tag{7}$$

поскольку стратегия u_i существенна при $i<r$. Так как $\omega \neq 0$, это означает, что $\sum_{i=1}^{r-1} \xi'_i = \sum_{i=1}^{m} \xi'_i = 0$, т. е. $x'u = 0$ и, следовательно, $\bar{x} - x'$ также является решением системы (5). Но мы уже указывали, что ранг системы (5) равен $m-1$, и поэтому векторы $\bar{x} - x'$ и $\bar{x}$ линейно зависимы; следовательно, вектор x' пропорционален вектору $\bar{x}$, а это невозможно, поскольку сумма координат вектора $\bar{x}$ равна 1, а сумма координат вектора x' равна 0.

Итак, мы убедились, что ранг системы векторов $u_r, \ldots, u_m, a^1, \ldots, a^s$ равен m; выберем из них базис, скажем, $a^1, \ldots, a^k, u_{k+1}, \ldots, u_m$. Теперь уже совсем легко убедиться в том, что если $S = T = \{1, \ldots, k\}$, то матрица A_{ST} невырождена и удовлетворяет условиям теоремы.

Для того чтобы проиллюстрировать эту теорему, рассмотрим еще раз игру на уклонение, пример 1 (стр. 290), существенная матрица которой имела вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Четыре базисные оптимальные стратегии для игрока II соответствуют четырем невырожденным подматрицам

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Это проверяется непосредственно.

В заключение этого параграфа мы приведем несколько численных примеров, иллюстрирующих полученный выше результат. Сначала рассмотрим игру морра (см. пример 2 из гл. VI на стр. 233). Матрица этой игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.8 здесь непосредственно неприменима, поскольку значение этой игры равно нулю. Однако, добавляя к каждому элементу этой матрицы единицу, мы получим игру, оптимальные стратегии которой совпадают с оптимальными стратегиями исходной игры:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невырожденные подматрицы, соответствующие базисным решениям

$$\bar{x}_1 = (0,\ {}^3/_5,\ {}^2/_5,\ 0) \quad \text{и} \quad \bar{x}_2 = (0,\ {}^4/_7,\ {}^3/_7,\ 0),$$

как легко проверить, суть

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь пример 5 из предыдущего параграфа (стр. 298). Здесь также значение игры равно нулю, и, добавляя 1 к каждому элементу матрицы выигрышей, мы получим

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невырожденные подматрицы, соответствующие базисным оптимальным стратегиям

$$\bar{x}_1 = ({}^1/_2,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0), \quad \bar{x}_2 = ({}^1/_3,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3,\ 0),$$
$$\bar{x}_3 = ({}^1/_2,\ {}^1/_4,\ 0,\ {}^1/_4),$$

суть

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Отметим, что подматрица, соответствующая данной базисной стратегии, не единственна. Например, оптимальной стратегии $\bar{x}_3$ соответствуют две подматрицы:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

В каждом из приведенных выше случаев можно перечислить все вырожденные подматрицы. Если это сделать, то можно будет убедиться в том, что никаких новых базисных стратегий не появится.

§ 9. Итеративный метод решения игр[1])

Эти заключительные параграфы посвящены вопросам, которые почти не зависят от предыдущего материала.

Представим себе следующую ситуацию. Два человека, совершенно неосведомленные в теории игр, играют друг с другом в матричную игру достаточно большое число раз. Не зная ничего о характере своего противника, каждый игрок решает внимательно следить за выбором другого в каждой партии и выбирать свою собственную стратегию в каждой партии, исходя из информации, которую он таким путем получает. Существует много путей для осуществления этого. Самым наивным было бы предположить, что в каждой партии противник будет выбирать ту же самую стратегию, которую он использовал в предыдущей партии. Тогда игроку следовало бы выбирать свою наилучшую контрстратегию в соответствии с предыдущим выбором его противника. По поводу этой процедуры можно сразу же привести два возражения. Во-первых, в ней используется не вся информация, которая собирается о противнике, а лишь информация о его поведении в последней партии. Во-вторых, нет причин ожидать, что игрок будет неизменно повторять одну свою стратегию; это противоречило бы, по-видимому, и здравому смыслу. Схема, которая преодо-

---

[1]) В оригинале: A Method of «Learning» a Game, т. е. дословно «метод *обучения* игре».— *Прим. перев.*

левает эти возражения, состоит в следующем: предположим, что в игре было сыграно k партий и игрок I, систематизировав свои наблюдения, обнаружил, что его противник выбрал свою первую стратегию k_1 раз, вторую — k_2 раз и т. д. Предположить, что вероятность выбора игроком II j-й стратегии равна k_j/k, будет для игрока I уже несколько менее наивным. Очевидно, это эквивалентно предположению о том, что игрок II будет применять смешанную стратегию $x^k = (k_1/k, \ldots, k_n/k)$. Делая такое предположение, игрок I выбирает такую чистую стратегию, которая дает максимум выигрыша против стратегии x^k. Мы описали очень простую формулу «обучения на опыте». По-видимому, эта процедура весьма благоразумна, если известно заранее, что противник действительно применяет некоторую фиксированную смешанную стратегию. Игра против природы могла бы быть примером, где такое предположение представляется оправданным.

Развивая приведенную выше иллюстрацию, сделаем следующий шаг и предположим, что оба игрока решают продолжать игру только что описанным экспериментальным путем. Тогда, очевидно, после того, как каждый игрок выбрал свою начальную стратегию, стратегии, выбираемые ими во всех последующих партиях, по существу уже определены. Проиллюстрируем это одним простым примером. Рассмотрим игру в бейсбол (гл. VI, упр. 3) при $p = 2$, так что матрица выигрышей в этой игре имеет вид

	t_1	t_2	t_3
s_1	2	−1	−1
s_2	−1	2	−1
s_3	−1	−1	1

Для того чтобы нам было с чего начать, предположим, что в первой партии оба игрока выбирают свои первые стратегии. Запишем это следующим образом:

	Игрок I				Игрок II			
1	s_1	2	−1	−1	t_1	2	−1	−1

Число 1 слева указывает на номер партии. Число s_1, стоящее на втором месте, означает, что в первой партии игрок I использовал чистую стратегию s_1. В третьем столбце мы поместили строку из матрицы выигрышей, соответствующую стратегии, выбранной игроком I. Такая форма записи станет понятной из дальнейшего. Последние два столбца описывают стратегию, выбранную игроком II, а именно t_1, и соответствующий столбец из матрицы.

Теперь в соответствии с простой схемой игры опишем выбор игроком I своей стратегии в следующей партии. Игрок I замечает, что его противник использовал в первой партии стратегию t_1 и, полагая, что он поступит так же и во второй партии, сам решает выбрать стратегию s_1, которая дает ему выигрыш в размере 2. С другой стороны, игрок II хочет минимизировать выигрыш (игрока I). Замечая, что игрок I в первой партии использовал стратегию s_1, и предполагая, что игрок I будет использовать ту же стратегию и во второй партии, он осознает, что для него наилучшим будет применить стратегию t_2 или t_3. Для определенности будем считать, что в случае «ничьей» игрок всегда выбирает стратегию с меньшим номером. Из только что сказанного следует, что вторая партия выглядит следующим образом:

	Игрок I				Игрок II			
2	s_1	2	-1	-1	t_2	-1	2	-1

Из описаний этих двух партий удобно составить объединенную таблицу. Таким образом,

	Игрок I				Игрок II			
1	s_1	2	-1	-1	t_1	2	-1	-1
2	s_2	4	-2	-2	t_2	1	1	-2

Заметим, что во второй строке и третьем столбце мы поместили не строку, соответствующую стратегии s_1, а сумму строк, соответствующих стратегиям, выбранным в первой и второй партиях. Этими стратегиями в обоих случаях оказалась стратегия s_1. Для второго игрока в последнем столбце второй строки помещена сумма первого и второго столбцов матрицы. Объясним причины именно такого построения таблицы. Для этого выясним, какую стратегию выберет игрок I в третьей партии.

Согласно своим установкам, он должен теперь предположить, что игрок II выберет стратегию t_1 или t_2 с равной вероятностью. Его ожидаемый выигрыш для каждой из его трех стратегий определится тогда делением каждого элемента в последней строке и колонке на 2: $(^1/_2, {}^1/_2, -1)$. Для того чтобы выбрать свою следующую стратегию, он должен найти наибольшую компоненту этого вектора и применить соответствующую стратегию. Заметим, что для этого нет необходимости делить на 2. Игрок I просто отмечает, что первая и вторая компоненты вектора $(1, 1, -2)$ оказываются наибольшими, и, следовательно, он должен опять выбрать стратегию s_1. Аналогично игрок II замечает, что вторая и третья координаты в векторе $(4, -2, -2)$ (вторая строка, третий столбец) оказываются наименьшими, и поэтому он в третьей партии использует стратегию t_2:

		Игрок I				Игрок II		
3	s_1	6	-3	-3	t_2	0	3	-3

Здесь опять векторы выигрышей игроков I и II получаются добавлением к предыдущим соответственно первой строки и второго столбца матрицы выигрышей. Метод построения таблицы теперь должен быть ясен. На k-м шаге мы имеем вектор u^k у игрока I и вектор v^k у игрока II. Новый вектор u^{k+1} для игрока I получается добавлением к u^k i-й строки a_i матрицы выигрышей, где i соответствует максимальной компоненте вектора v^k. Аналогично $v^{k+1} = v^k + a^j$, где j соответствует минимальной компоненте вектора u^k. Приведем таблицу, в которой даны первые 21 векторов u^k и v^k для игры в бейсбол.

При этом, конечно, возникает вопрос: а что дает этот метод теории игр? Весьма примечательно, что при таком поведении даже в этом наивном эксперименте средний выигрыш (игрока I) будет стремиться к значению игры!

		Игрок I				Игрок II		
1	s_1	2	−1	−1	t_1	2	−1	−1
2	s_1	4	−2	−2	t_2	1	1	−2
3	s_1	6	−3	−3	t_2	0	3	−3
4	s_2	5	−1	−4	t_2	−1	5	−4
5	s_2	4	1	−5	t_3	−2	4	−3
6	s_2	3	3	−6	t_3	−3	3	−2
7	s_2	2	5	−7	t_3	−4	2	−1
8	s_2	1	7	−8	t_3	−5	1	0
9	s_2	0	9	−9	t_3	−6	0	1
10	s_3	−1	8	−8	t_3	−7	−1	2
11	s_3	−2	7	−7	t_3	−8	−2	3
12	s_3	−3	6	−6	t_3	−9	−3	4
13	s_3	−4	5	−5	t_3	−10	−4	5
14	s_3	−5	4	−4	t_1	−8	−5	4
15	s_3	−6	3	−3	t_1	−6	−6	3
16	s_3	−7	2	−2	t_1	−4	−7	2
17	s_3	−8	1	−1	t_1	−2	−8	1
18	s_3	−9	0	0	t_1	0	−9	0
19	s_1	−7	−1	−1	t_1	2	−10	−1
20	s_1	−5	−2	−3	t_1	4	−11	−2
21	s_1	−3	−3	−3	t_1	6	−12	−3

Имея это в виду, рассмотрим внимательно данные, содержащиеся в приведенной выше таблице. В течение 21 партии игрок I использовал 6 раз стратегию s_1, 6 раз стратегию s_2 и 9 раз стратегию s_3, что соответствует смешанной стратегии $(^2/_7, {}^2/_7, {}^3/_7)$, которой отвечает вектор средних выигрышей $(-^1/_7, -^1/_7, -^1/_7)$. Этот же вектор можно было получить, конечно, и делением вектора u^{21} на 21. Это снова указывает нам на то, что $\omega \geqq -^1/_7$. Используя аналогичную аргументацию для игрока II и деля вектор v^{21} на 21, мы получим $(^2/_7, -^4/_7, -^1/_7)$, что дает $\omega \leqq {}^2/_7$. По существу мы можем получить оценку лучше этой, если заметим, что после 18 партий средний выигрыш игрока II равен $(0, -^1/_2, 0)$, что указывает на неположительность значения игры. Таким образом, мы видим, что оценка значения игры дается неравенством

$$-\frac{1}{7} \leqq \omega \leqq 0$$

(точное значение этой игры легко вычисляется, и поэтому мы не будем отнимать у читателя удовольствие, сообщая ему значение игры). Эта оценка не очень хорошая, и поэтому изложенный метод мы для практических вычислений не можем рекомендовать. Тем не менее, принимая во внимание приведенные выше замечания, мы видим, что если мы играем достаточно большое число партий, то получим сколь угодно хорошую оценку значения игры, и это представляет значительный теоретический интерес. Доказано, что после достаточно большого числа партий выигрыши будут «стабилизироваться», становясь асимптотически близкими к значению игры. Это первый пример *теоремы об устойчивости*, с которым мы столкнулись. Результаты такого типа часто обнаруживаются в связи с экономическими моделями, и нам придется в следующих главах сказать об этом более подробно.

§ 10. Сходимость итеративного метода

В предыдущем параграфе мы изложили и проиллюстрировали примером метод решения матричных игр, который мы назвали итеративным. В этом параграфе мы дадим точное определение метода и докажем его сходимость.

Определение. Пусть Γ — игра с матрицей выигрышей A. *Итеративной последовательностью* называется последовательность пар неотрицательных векторов (x^0, y^0), (x^1, y^1), ..., (x^k, y^k), ..., для которой

x^0 и y^0 — нулевые векторы соответственно в R^m и R^n, (1)

$x^{k+1} = x^k + u_i$, где i — номер максимальной компоненты вектора Ay^k, (2)

$y^{k+1} = y^k + v_j$, где j — номер минимальной компоненты вектора x^kA. (3)

Мотивировка этого определения была приведена в предыдущем параграфе и нет необходимости в дальнейших пояснениях за этот счет.

В терминах итеративных последовательностей интересующая нас теорема о сходимости принимает следующий простой вид.

Теорема 7.9 (о сходимости). *Если* (x^k, y^k) — *итеративная последовательность для игры* Γ *с матрицей* A (*значение этой игры обозначим через* ω), *то*

$$\lim_{k\to\infty}\min_j\left(\frac{x^kA}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\max_i\left(\frac{Ay^k}{k}\right)=\omega.$$

Что следует из этого результата? Заметим, во-первых, что вектор x^k/k оказывается смешанной стратегией и, следовательно, теорема утверждает, что для достаточно большого k стратегия x^k/k гарантирует игроку I выигрыш, который сколь угодно близок к ω. Точно так же стратегия y^k/k гарантирует игроку II выигрыш сколь угодно близкий к $-\omega$. Поэтому после достаточно большого числа партий выигрыш будет настолько близок к значению игры ω, насколько мы этого пожелаем.

Доказательство теоремы о сходимости является весьма трудным. Одно из возможных здесь упрощений состоит в симметризации игры, которая уже применялась при доказательстве теоремы о минимаксе. Симметризация дает здесь следующее.

Пусть A — кососимметричная матрица. *Итеративной последовательностью* $z^0, z^1, \ldots, z^k, \ldots$ называется последовательность неотрицательных m-мерных векторов, получающаяся следующим образом:

$$z^0=\mathbf{0}, \tag{1}$$

$$z^{k+1}=z^k+u_i, \tag{2}$$

где i — номер некоторой минимальной компоненты вектора z^kA.

Теперь мы можем сформулировать следующее простое утверждение о сходимости для этого симметричного случая.

Теорема 7.10.

$$\lim_{k\to\infty}\min_j \frac{z^k A}{k}=0.$$

Прежде всего, мы должны показать, как из теоремы 7.10 для симметричного случая вытекает общая теорема 7.9. Для того чтобы это выполнить, рассмотрим игру Г с матрицей A и обозначим через $\hat{A}$ кососимметричную матрицу, соответствующую симметризованной игре $\hat{\Gamma}$. Заглянув в § 7 гл. VI, читатель увидит, что $\hat{A}$ есть $mn\times mn$-матрица, в ij-й строке и kl-м столбце которой находится элемент, вычисленный по формуле

$$a_{ij\,:\,kl}=a_{il}-a_{kj}.$$

Сделаем теперь несколько простых замечаний. Если $z=(\zeta_{ij})$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$ является mn-мерным вектором, то мы можем определить m-мерный вектор $x_z=(\xi_i)$ и n-мерный вектор $y_z=(\eta_j)$, полагая

$$\xi_i=\sum_j \zeta_{ij}; \quad \eta_j=\sum_i \zeta_{ij}.$$

Если мы теперь вычислим ij-ю компоненту вектора $z\hat{A}$, то получим

$$\begin{aligned}\sum_{k,\,l}\zeta_{kl}a_{kl\,:\,ij}&=\sum_{k,\,l}\zeta_{kl}(a_{kj}-a_{il})=\\&=\sum_k \xi_k a_{kj}-\sum_l \eta_l a_{il}=x_z a^j-y_z a_i.\end{aligned} \tag{1}$$

Для того чтобы показать, что из теоремы 7.10 следует теорема 7.9, обозначим через $(x^k,\ y^k)$ итеративную последовательность в игре Г и определим для игры $\hat{\Gamma}$ последовательность (z^k) следующим образом:

$$z^0=\mathbf{0}, \tag{2}$$

$$z^{k+1}=z^k+w_{ij}, \tag{3}$$

где w_{ij} — орт в пространстве R^{mn} (единица стоит на ij-м месте), i — номер максимальной компоненты вектора Ay^k, а j — номер минимальной компоненты вектора x^kA.

Нетрудно убедиться в том, что последовательность (z^k) построена так, что $x_{z^k}=x^k$ и $y_{z^k}=y^k$. Ввиду равенства (1) это означает, что ij-я компонента вектора $z^k\hat{A}$ равна $x^k a^j - y^k a_i$. Последнее выражение достигает своего минимума для всех ij при $x^k a^j = \min x^k A$ и $y^k a_i = \max Ay^k$. Следовательно, (z^k) является итеративной последовательностью для игры с матрицей $\hat{A}$. Считая теорему 7.10 доказанной, мы имеем

$$\min_{ij}\frac{z^k\hat{A}}{k}=\min_{ij}\frac{x^k a^j - y^k a_i}{k}=\frac{\min\limits_j x^k a^j - \max\limits_i y^k a_i}{k}=$$

$$=\min_j\frac{x^k A}{k}-\max_i\frac{Ay^k}{k},$$

что стремится к нулю при $k\to\infty$. Сопоставляя это с неравенством $\min\limits_j\frac{x^k A}{k}\leqq\omega\leqq\max\limits_i\frac{Ay^k}{k}$ (почему оно справедливо?), мы получаем заключение теоремы 7.9.

Проведенное выше формальное описание, возможно, затрудняет понимание одной простой идеи, совершенно очевидной в случае симметризованной игры. Напомним, что симметризованную игру можно представлять как одновременное разыгрывание двух партий, причем каждый игрок в одной партии играет «за белых», а в другой — «за черных». Почти очевидно, что итеративный метод для этой «двойной игры» описывает совместные действия обоих игроков в несимметризованной игре.

Мы должны теперь продолжить доказательство теоремы 7.10. Оказывается, что мы должны на самом деле получить несколько более общий результат.

Определение. *Векторная последовательность* (z^k) для кососимметрической матрицы A есть итеративная последовательность, за исключением того, что z^0 может быть произвольным неотрицательным вектором.

Обозначение. Пусть A — матрица. Тогда *абсолютное значение* A (обозначение $|A|$) определяется как

$$|A|=\max_{ij}|a_{ij}|.$$

Словесная формулировка: абсолютным значением матрицы A является максимум абсолютных значений ее элементов.

Сформулируем теперь лемму, из которой будет вытекать теорема 7.10.

Лемма 7.4. *Если (z^k) — векторная последовательность для кососимметрической матрицы A с абсолютным значением $|A|$, то для любого положительного ε существует такое целое число N, зависящее только от m и $|A|$, что*

$$\frac{\min z^0 A - \min z^n A}{n} \leqq \varepsilon |A| \tag{1}$$

для всех $n > N$.

Легко видеть, что из этой леммы следует теорема 7.10, так как для случая итеративной последовательности (z^k), т. е. $z^0 = \mathbf{0}$, из неравенства (1) мы получаем

$$\frac{\min z^n A}{n} \geqq -\varepsilon |A| \quad \text{для} \quad n > N. \tag{2}$$

С другой стороны, мы знаем, что ввиду кососимметричности матрицы A $\min z^n A \leqq 0$ (так как если бы оказалось $z^n A > \mathbf{0}$, то имело бы место $z^n A z^n > 0$, что противоречит утверждению $zAz = 0$ для всех z). Следовательно,

$$-\varepsilon |A| \leqq \frac{\min z^n A}{n} \leqq 0$$

и, таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\min z^n A}{n} = 0.$$

Для доказательства леммы 7.4 нам потребуется следующий простой факт.

Лемма 7.5. *Если (z^k) — векторная последовательность для матрицы A, то для всех k*

$$\max z^k A \geqq \min z^0 A. \tag{3}$$

Доказательство. В лемме утверждается всего лишь то, что вектор $(z^k - z^0) A$ не может быть отрицательным. Но это следует из того, что вектор $z^k - z^0$ неотрицательный, а матрица A кососимметричная (см. аргументацию в предыдущем параграфе).

Доказательство леммы 7.4. Доказательство ведется индукцией по m, где m — число строк (и столбцов) матрицы A. Для $m = 1$ мы имеем $A = 0$ и доказательство очевидно. Для $m=2$ мы имеем $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ и сходимость опять-таки очевидна (см. упр. 28). Предположим, что теорема верна для матрицы с m строками, и пусть A — матрица с $m+1$ строками, а ε — некоторое положительное число. По индуктивному предположению существует такое N', что для любой кососимметричной подматрицы A' матрицы A и векторной последовательности (z^k) при $n > N'$ должно быть

$$\frac{\min z^0A' - \min z^nA'}{n} \leqq \frac{\varepsilon}{3} |A'|. \tag{4}$$

Выберем теперь $N \geqq \frac{3}{\varepsilon} N'$ и покажем, что N удовлетворяет заключению леммы.

Возьмем $n > N$; тогда из определения следует, что $z^k - z^{k-1}$ является некоторым единичным вектором, который мы будем обозначать через u^k. Далее обозначим через s такое наибольшее целое число, что векторы $u^s, u^{s-1}, \ldots, u^{s-N'}$ включают все $m+1$ единичных векторов. На теоретико-игровом языке это означает, что в течение всех N' партий будут использованы каждая из $m+1$ стратегий. Конечно, такого целого числа может и не оказаться; в этом случае мы полагаем $s = 0$.

Покажем сначала, что

$$\min z^0A - \min z^sA \leqq N' |A|. \tag{5}$$

Это будет следовать из предыдущей леммы 7.5, если мы сможем показать, что

$$\max z^{s-N'}A - \min z^sA \leqq N' |A|, \tag{6}$$

так как из (6) и (3) получается (5).

Для того чтобы установить (6), предположим, что максимальной компонентой вектора $z^{s-N'}A$ оказывается i-я его компонента. Обозначим ее через $\eta_i^{s-N'}$; точно так же обозначим через η_j^s минимальную компоненту вектора z^sA; пусть ею будет j-я компонента. Далее, по предположению, i-я стратегия в последовательности

$z^{s-N'}, \ldots, z^s$ использовалась. Следовательно, для некоторого p, лежащего между $s-N'$ и s, мы имеем неравенства

$$\eta_i^p \leqq \eta_j^p. \tag{7}$$

С другой стороны, $|\eta_i^{k+1} - \eta_i^k| \leqq |A|$ для всех k, и поэтому

$$\eta_i^p \geqq \eta_i^{s-N'} - (p-s+N')|A| \tag{8}$$

и

$$\eta_j^p \leqq \eta_j^s + (s-p)|A|.$$

Из (7), (8) и (9) получаем (9)

$$\eta_i^{s-N'} - (p-s+N')|A| \leqq \eta_j^s + (s-p)|A|,$$

или

$$\eta_i^{s-N'} - \eta_j^s \leqq N'|A|,$$

что совпадает с (6).

Далее, ввиду выбора s мы получаем, что последовательность $u^s, u^{s+1}, \ldots, u^{s+N'}$ не содержит по крайней мере одного орта u_i. Обозначая через A' матрицу, получающуюся из матрицы A вычеркиванием ее i-й строки и i-го столбца, мы видим, что векторы $z'^s, z'^{s+1}, \ldots$ $\ldots, z'^{s+N'}$ образуют векторную последовательность для матрицы A', где z'^k получается из z^k вычеркиванием i-й компоненты. Тогда по индуктивному предположению

$$\min z^s A - \min z^{s+N'} A \leqq N'|A| \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10}$$

где мы можем отбросить штрих, поскольку $|A| \geqq |A'|$, а i-я компонента векторов $z^s, z^{s+1}, \ldots$ остается постоянной. Аналогично получаем

$$\min z^{s+N'} A - \min z^{s+2N'} A \leqq N'|A| \frac{\varepsilon}{3} \tag{11}$$

и т. д.

Для того чтобы завершить доказательство, напишем равенство $n-s = qN'+r$, где q и r — целые числа, причем $r < N'$. Тогда

$$\begin{aligned}\min z^0 A - \min z^n A = (\min z^0 A - \min z^s A) &+ \\ +(\min z^s A - \min z^{s+N'} A) &+ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots &+ \\ +(\min z^{s+qN'} A - \min z^n A) &\leqq \\ \leqq N' |A| + qN' |A| \cdot \frac{\varepsilon}{3} + r|A|&.\end{aligned}$$

Но

$$q \leqq n/N', \quad r < N' \leqq \varepsilon N/3 \leqq \varepsilon \cdot n/3,$$

и, следовательно,

$$\min z^0 A - \min z^n A \leqq \left(\frac{\varepsilon n}{3} + \frac{\varepsilon n}{3} + \frac{\varepsilon n}{3}\right) |A| = \varepsilon n \, |A|,$$

или

$$\frac{\min z^0 A - \min z^n A}{n} \leqq \varepsilon \, |A|.$$

Это и завершает доказательство.

Мы закончим этот параграф некоторыми замечаниями об итеративном методе.

Итеративный метод был первоначально предложен для фактического вычисления значения игры. Однако, как уже упоминалось, с вычислительной точки зрения этот метод совершенно непрактичен из-за его чрезвычайно медленной сходимости. Был предложен ряд модификаций, по-видимому, улучшающих сходимость. Тем не менее для описанного здесь процесса этот вопрос остается в значительной мере открытым[1]).

Что касается используемой нами терминологии, то обычно этот метод называют «методом фиктивных игр». Его идея состоит в том, что для нахождения значения игры вычислитель в соответствии с указанными нами правилами имитирует процесс ведения игры за обоих игроков. Иногда употребляется термин «метод обучения игре», так как он подчеркивает теоретические, а не вычислительные стороны метода.

[1]) Оценка скорости сходимости дана в работе Shapiro H. N., Note on a computation method in the theory of games, *Comm. pure and appl. math.*, 11, № 4, 588—593 (1958) (имеется русский перевод в сборнике «Матричные игры», Физматгиз, М., 1961, стр. 118—127).— *Прим. перев.*

Библиографические замечания

Доказательство эквивалентности задач теории игр и линейного программирования дано Данцигом [2]. Теоремы, касающиеся структуры решений игр, впервые были доказаны Боненбластом, Карлином и Шепли [1]. Изложение в этой книге основано на работе Гейла и Шермана [1]. Теорема о структуре симметричных игр обязана своим появлением Гейлу, Куну и Таккеру [1]. Характеристику базисных оптимальных стратегий дали Шепли и Сноу [1].

Итеративный метод решения игр предложен Брауном [1]. Доказательство его сходимости дала Робинсон [1].

Упражнения

1. Доказать, что задача решения игры с матрицей A эквивалентна следующей общей задаче максимизации: Найти неотрицательный вектор x и число ω так, чтобы

$$\omega \text{ было максимальным} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} xA &\geqq \omega v, \\ xu &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Применяя общую теорему двойственности к задаче линейного программирования из упр. 1, дать другое доказательство теоремы о минимаксе.

3. Обозначим через (A, b, c) стандартную максимизационную задачу со значением μ. Показать, что значение игры с матрицей выигрышей

$$M = \begin{pmatrix} -A & c \\ b & -\mu \end{pmatrix}$$

равно нулю.

4. Показать, что если игра с матрицей M из упр. 3 имеет нулевое значение и последние стратегии для обоих игроков существенны, то задача (A, b, c) имеет значение μ.

5. Найти все оптимальные стратегии для игры в покер, рассмотренной в § 2, для случая $b = 3$ (окажется, что для каждого игрока имеется две базисные оптимальные стратегии).

6. Проанализировать решение игры в покер, определяя как функцию ставки b: а) значение игры; б) вероятность того, что игрок I «блефует», т. е. назначает ставку, имея младшую карту; в) вероятность того, что игрок I пасует, т. е. не назначает ставки, когда он имеет старшую карту.

7. *Правила.* Игрок II выбирает два целых числа между 1 и 4. Игрок I выбирает целое число i между 1 и 4 и выигрывает или проигрывает сумму i в соответствии с тем, равно или нет число i одному из чисел, выбранных игроком II. Решить эту игру симплекс-методом.

8. У генерала 4 дивизии, а у его противника — 5. Пусть имеется две дороги, ведущие в город, и генерал займет город, если хотя бы на одной из дорог его войска будут иметь численное превосходство. Как следует ему поступить?

9. Игроки I и II выбирают целые числа x и y между 0 и 3. Если $x \geqq y$, то игрок I выигрывает $x - y$. Если $x < y$, то игрок I выигрывает $x + y$. Решить эту игру симплекс-методом.

10. Опишем другую *игру на уклонение.*

Правила. Игроки I и II выбирают целые числа i, $j \leqslant n$. Если $i \neq j$, то игрок I выигрывает i, а если $i = j$, то игрок II выигрывает λi.

Показать, что эта игра вполне смешанная, если $\lambda > n - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > 0$, и найти ее общее решение.

11. Использовать симплекс-метод для решения игры из упр. 10, когда $n = 5$ и $\lambda = 2$.

12. Игроки выбирают целые числа i и j между 1 и n, и игрок I выигрывает $|i - j|$. Предположим, что n нечетно. Показать, что: а) значение игры равно $\omega = (n - 1)/2$, б) игрок II имеет чистую оптимальную стратегию; в) найти все существенные чистые стратегии для игрока 1; г) показать, что игрок I имеет единственную оптимальную стратегию; д) найти все существенные чистые стратегии для игрока II.

13. Если в игре из упр. 12 число n четное, то сформулированные выше утверждения а) и г) истинны, а утверждение б) ложно.

14. Найти все оптимальные стратегии для обоих игроков в игре из упр. 12, когда $n = 5$.

15. Показать, что доминируемая чистая стратегия не может быть существенной.

16. Пусть A — матрица, A_s— ее подматрица, составленная из первых s строк матрицы A, а A^t — подматрица, составленная из первых t столбцов матрицы A.

Предположим, что j-й столбец матрицы A_s является доминируемым для $j > t$, а i-я строка матрицы A^t является доминируемой при $i > s$. Доказать, что векторы u_i и v_j не являются существенными стратегиями при $i > s$, $j > t$. (Если $s = t = 1$, то это указывает на то, что матрица A имеет единственную седловую точку.)

17. Для произвольного числа α между 0 и 1 построить 2×2-игру, для которой множество оптимальных стратегий игрока I есть

$$\overline{X} = \{(\xi,\ 1-\xi) \mid \xi \leqq \alpha\}.$$

18. Для произвольных чисел $0 < \alpha < \beta < 1$ построить 2×3-игру, для которой

$$\overline{X} = \{(\xi,\ 1-\xi) \mid \alpha \leqq \xi \leqq \beta\}.$$

Каким должно быть множество $\overline{Y}$ в этой игре?

19. Если в матричной игре каждая оптимальная стратегия использует все чистые стратегии, то игра называется вполне смешанной (т. е. матрица A квадратная, а оптимальные стратегии единственны).

20. Дать доказательство того, что игра в примере 5 этой главы не имеет других оптимальных стратегий, кроме уже перечисленных.

21. То же, что и в упр. 20, для примера 6 из этой главы.

22. Построить игру со следующими базисными оптимальными стратегиями:

$$x_1 = (^1/_2,\ ^1/_2,\ 0,\ 0),\quad x_2 = (0,\ ^1/_2,\ ^1/_2,\ 0),\ x_3 = (0,\ 0,\ ^1/_2,\ ^1/_2),$$

$$y_1 = (^1/_2,\ ^1/_2,\ 0),\quad y_2 = (^1/_3,\ ^1/_3,\ ^1/_3).$$

23. Пусть $a \cdot b \cdot c \neq 0$; показать, что симметричная игра с матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

имеет единственное решение.

В каком случае эта игра имеет одну существенную стратегию? Две? Три? Дать решение в каждом случае.

24. Рассмотрим общую игру, соответствующую примерам 3 и 4.

Правила. Игроки выбирают целые числа i и j между 1 и n.

Игрок I выигрывает, если $i = j + 1$ или $i = 1$ и $j = n$,

игрок II выигрывает, если $j = i + 1$ или $j = 1$ и $i = n$.

В противном случае игра заканчивается вничью.

а) Показать, что решения единственны для нечетного n.

б) Если n четное, то решения не единственны. Найти их.

25. Перечислить все квадратные подматрицы в примерах 5 и 6, которые соответствуют базисным оптимальным стратегиям.

26. Для игры морра вычислить первые 200 членов итеративной последовательности (объем необходимых вычислений, как увидит читатель, совсем невелик). Какие получаются границы для значения игры?

27. Показать, что в итеративной последовательности для игры морра все стратегии используются бесконечно часто (это неожиданно, поскольку мы знаем, что первая и четвертая стратегии не являются существенными).

28. Показать, что для симметричной 2×2-игры после n итераций получаем следующую оценку для значения игры

$$-\frac{|A|}{n} < \omega < \frac{|A|}{n}.$$

29. Если игра Γ имеет единственную оптимальную стратегию $\bar{x}$ для игрока I, то для итеративной последовательности (x^k) мы имеем

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^k}{k} = \bar{x}.$$

(Здесь следует использовать то, что ограниченная бесконечная последовательность векторов имеет предельную точку.)

ГЛАВА VIII

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОБМЕНА

При изучении линейного программирования и матричных игр мы познакомились с двумя экономическими моделями, ради которых и были развиты эти обширные теории. В этой и следующей главах мы рассмотрим несколько других линейных моделей. Модели, к изучению которых мы сейчас приступаем, не похожи на модели, рассматриваемые в теории игр и в линейном программировании, но они весьма близки к проблемам, встречающимся в традиционных экономических курсах. В этой главе мы коснемся таких вопросов, как баланс торговли, поток товаров, равновесие цен и других вопросов, близких экономистам. Читателя следует предупредить, однако, что мы намерены оставаться в рамках линейной теории, и поэтому нами будут рассмотрены некоторые частные типы ситуаций обмена. Тем не менее в последние годы этим линейным моделям обмена уделяется значительное внимание, и знакомство с ними полезно не только само по себе, но так же, как предпосылка для анализа более общих моделей.

Как и в предыдущих главах, наше изложение мы начинаем с иллюстративных примеров.

§ 1. Примеры

Пример 1. Простая модель обмена. Проблема цен. Рассмотрим *экономику*, в которой имеется *n производителей* $P_1, \ldots, P_n$ и *n продуктов* $G_1, \ldots, G_n$, причем каждый производитель P_i производит только один продукт G_i. Мы будем рассматривать фиксированный период времени, скажем год, и выберем для удобства наши единицы так, чтобы каждый производитель P_i в течение года производил ровно одну единицу продукта G_i.

Пусть, далее, производитель P_i наряду с производством продукта G_i потребляет определенные количества других продуктов, одного или нескольких. Количество продукта G_j, потребляемое производителем P_i в год, мы обозначим через α_{ij}; очевидно,

$$\alpha_{ij} \geqq 0. \tag{1}$$

Мы будем предполагать также, что наша модель *замкнута*, что означает отсутствие потока продуктов из модели, а также притока продуктов извне. Следовательно, в условиях замкнутой модели для каждого продукта суммарное производство равно суммарному его потреблению, определяемому уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1. \tag{2}$$

Может показаться, что мы делаем слишком сильное предположение, считая, что каждый произведенный производителем P_i продукт будет потреблен. В действительности, однако, уравнение (2) будет выполняться автоматически, если мы условимся считать, что производитель P_i сам потребляет весь продукт G_i, который остается после того, как другие производители уже забрали свои доли α_{ij}. Потребление производителя P_i в этом случае можно обозначить через α_{ii}, полагая его равным всему остающемуся продукту G_i.

Матрица $A = (\alpha_{ij})$, образованная из коэффициентов α_{ij}, будет называться *матрицей обмена* модели. Более общо, каждую матрицу $A = (\alpha_{ij})$, элементы которой удовлетворяют условиям (1) и (2), будем называть *матрицей обмена*[1]).

Предположим, далее, что цена одной единицы продукта G_i равна π_i. Тогда годовой *доход* производителя P_i будет также равен π_i, поскольку производитель P_i производит и продает (включая, может быть, продажи самому себе) ровно одну единицу продукта G_i в год. Ежегодные *расходы* производителя P_i определяются, очевидно, выражением

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\pi_j.$$

[1]) В теории вероятностей такие матрицы называют «стохастическими». Мы предпочитаем другую терминологию, поскольку она более тесно связана с предыдущим изложением.

Мы будем говорить, что цены $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ обеспечивают *равновесие*, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\pi_j \leqq \pi_i \qquad \text{для всех } i. \tag{3}$$

Это неравенство отражает лишь то, что ни один производитель не тратит больше, чем он зарабатывает. Слово «равновесие» употреблено здесь для выражения этого простого бюджетного условия.

Задача. *Дана матрица обмена A. Существуют ли цены π_j, удовлетворяющие неравенствам* (3)?

На векторно-матричном языке мы имеем: дана матрица A, удовлетворяющая условиям

$$A \geqq \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\sum_i a_i = v. \tag{2}$$

Спрашивается, существует ли полуположительный вектор p, удовлетворяющий условию

$$Ap \leqq p. \tag{3}$$

Ясно, что мы имеем здесь дело с типичной задачей из рассмотренной в гл. II теории неравенств. Прежде чем перейти к подробному анализу задачи, сделаем одно простое замечание. Если неравенства (3) выполняются, то мы имеем на самом деле более сильное утверждение

$$Ap = p. \tag{4}$$

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что из (3) и (2) вытекает, что

$$\sum \pi_i \geqq \sum a_i p = \left(\sum a_i\right) p = vp = \sum \pi_i.$$

Следовательно, $\sum \pi_i = \sum (a_i p)$ и поэтому $\pi_i = a_i p$ для всех i.

Этот алгебраический факт эквивалентен следующему простому экономическому утверждению: если при ценах p некоторый производитель обогащается, то по крайней мере один из оставшихся производителей терпит убыток. Формально это утверждение состоит в следующем.

Лемма 8.1. *Если матрица обмена A и вектор цен p удовлетворяют условию $Ap \leqq p$, то $Ap = p$.*

Проблема цен сведена теперь к нахождению полуположительного вектора p, удовлетворяющего условию (4). (Такой вектор называется *характеристическим вектором*, или *собственным вектором*, матрицы A.) В следующем параграфе мы рассмотрим решение этой задачи во всех деталях. Однако прежде чем к нему перейти, рассмотрим второй пример, который, хотя и отличается экономической формулировкой, но приводит к той же самой алгебраической задаче.

Пример 2. Простая линейная модель международной торговли. Рассмотрим n стран $C_1, \ldots, C_n$, занятых торговлей друг с другом и предположим, что существует единая денежная единица, скажем доллар[1]). В этом примере в отличие от предыдущего мы предполагаем, что все цены заданы заранее и не изменяются. Будем считать, что весь свой *доход* η_j страна C_j получает от продажи своих собственных продуктов либо внутри страны, либо другим странам. Сделаем теперь сильное предположение.

Предположение о линейности. *Часть дохода η_j, которая тратится в стране C_j на импорт из страны C_i, является фиксированным числом α_{ij}, которое не зависит от η_j.*

По общему признанию это предположение является весьма своеобразным. Для того чтобы понять случаи его нарушения, представим себе индивидуума, который тратит долю $\alpha_{\text{п.}}$ своего дохода на пищу, $\alpha_{\text{о.}}$ — на одежду и $\alpha_{\text{у.}}$ — на увеселения. Далее, если доход индивидуума несколько уменьшится, то можно ожидать, что доля дохода, затрачиваемая на увеселения, также уменьшится; если же его доход станет совсем скудным, то весь он будет затрачиваться на питание. Вероятно, предположение о линейности является удовлетворительным приближением для достаточно больших объединений индивидуумов (таких, как, например, страна). Однако и в этом случае следует

[1]) Имеется в виду, что любая денежная единица может быть оценена в долларах по некоторому курсу.— *Прим. ред.*

признать, что это условие является весьма жестким. Тем не менее такие линейные модели изучаются довольно широко, частично ради них самих, частично в надежде приподнять завесу над более трудными, нелинейными задачами.

Поскольку числа α_{ij} определены как доли дохода η_j, из определения следует, что $\alpha_{ij} \geqq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$, и поэтому матрица $A = (\alpha_{ij})$ снова оказывается *матрицей обмена*.

Мы хотим для каждой страны C_i определить доход, который, как мы условились, получается от продажи на внутреннем и на внешнем рынках. Далее предположим, что величина экспорта из страны C_i в страну C_j равна $\eta_j\alpha_{ij}$. Следовательно, суммарный доход η_i страны C_i удовлетворяет уравнению

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \alpha_{ij}, \tag{1}$$

и это уравнение должно соблюдаться для всех стран C_i. Пользуясь векторной терминологией, мы утверждаем, что неотрицательный вектор доходов $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ должен удовлетворять уравнению

$$Ay = y,$$

где A — заданная матрица обмена. Таким образом, алгебраическая задача формально совпадает с задачей из примера 1.

§ 2. Равновесие для модели обмена

Два примера предыдущего параграфа подводят нас к следующей алгебраической задаче:

Дана матрица обмена A. Существует ли полуположительный n-мерный вектор y, удовлетворяющий условию $Ay = y$?

В этом параграфе мы дадим полное решение этой задачи, разобрав в том числе вопросы существования и единственности. Мы рассмотрим также экономическую интерпретацию полученного решения на примерах.

Ответ на вопрос о существовании исчерпывается следующей теоремой.

Теорема 8.1 (теорема существования). *Если A — матрица обмена, то полуположительный вектор y, удовлетворяющий условию $Ay = y$, существует всегда.*

Доказательство. Обозначив через I единичную матрицу, найдем вектор $y \geqslant \mathbf{0}$, удовлетворяющий условию $(I - A)\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В силу теоремы 2.9 (стр. 46) это векторное уравнение не имеет решения в том и только в том случае, когда существует такой вектор x, что $x\,(I - A) > \mathbf{0}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i < x, \qquad \text{где} \quad x = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{1}$$

Поскольку A — матрица обмена,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = v. \tag{2}$$

Положим теперь $\mu = \min(\xi_i)$ (пусть для определенности $\mu = \xi_1$). Тогда, умножив (2) на ξ_1 и вычтя полученное равенство из (1), мы получим

$$\sum_{i=2}^{n} (\xi_i - \xi_1)\, a_i < x - \xi_1 v.$$

В частности,

$$\sum_{i=2}^{n} (\xi_i - \xi_1)\, \alpha_{i1} < 0,$$

но это невозможно, поскольку как $\xi_i - \xi_1$, так и α_{i1} при всех i неотрицательны. Следовательно, такого вектора x не существует, откуда и следует утверждение теоремы.

Этот результат показывает, что в задачах из примеров 1 и 2 всегда существует решение. Назовем это решение *равновесным вектором*. Естественно возникает вопрос о возможности высказать более сильное утверждение: будет ли на самом деле равновесный вектор положительным? В случае проблемы цен это означало бы, что не существует *свободных продуктов*, а в проблеме международного обмена это означало бы, что каждая страна имеет положительный доход. Эта задача оказывается тесно связаной с вопросом о единственности. В связи с этим отметим, что вместе с вектором y равновесным будет также и вектор λy при любом $\lambda > 0$. Экономически это означает, что определяемые в наших моделях как цены, так и доход *относительны*, ибо умножение всех цен или доходов на одно и то же положительное число означает лишь переход к новой единице измерения. Однако это возможно и для нетривиального случая неединственности, который еще встретится. Предположим, что в модели международной торговли страны C_i разбиты на две или большее число групп, причем страны в каждой группе торгуют только со странами своей группы. В таком случае мы можем рассматривать две или большее число совершенно независимых моделей. В этом случае, очевидно, умножение доходов всех стран одной из групп на некоторый неотрицательный множитель не затрагивает интересов стран из других групп. В остальных теоремах этого параграфа показывается, что в действительности только этот случай неединственности и может встретиться.

Ради удобства все дальнейшее изложение мы будем вести в терминах модели торговли из примера 2, хотя наши результаты можно интерпретировать аналогичным образом и в других случаях. В свете соображений, изложенных в предыдущем абзаце, становится понятным вводимое ниже определение.

Определение. Пусть S — подмножество множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а S' — его дополнение. Говорят, что страны C_i, $i \in S$, образуют *независимое подмножество*, если в матрице обмена $A = (\alpha_{ij})$ для $j \in S$, $i \in S'$ все $\alpha_{ij} = 0$. Короче, мы будем в этом случае говорить, что сами номера этих стран, т. е. числа, входящие в множества S и S', образуют *независимое подмножество.*

Это определение выражает тот факт, что страны из S экспортируют только друг другу. Если должным образом изменить обозначения столбцов и строк матрицы A, то множество S будет образовано первыми k индексами, и матрица A приобретает следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где в левом нижнем углу находится подматрица порядка $(n-k)\times k$, состоящая сплошь из нулей.

Отметим, что все множество N также является своим независимым подмножеством.

Определение. Матрица обмена A называется *неприводимой*, если не существует отличных от множества N непустых независимых подмножеств.

Неприводимость матрицы обмена имеет интересную экономическую интерпретацию. Из неприводимости следует, что все страны торгуют между собой, хотя такая торговля может осуществляться и «косвенно». Это значит, что для любых двух стран C_i и C_j найдется такая последовательность индексов $i_1, \ldots, i_k$, что страна C_i импортирует из C_{i_1}, страна C_{i_1} импортирует из $C_{i_2}, \ldots,$ страна C_{i_k} импортирует из C_j. Доказательство эквивалентности этого факта и неприводимости оставлено в качестве упражнения (см. упр. 1).

Для неприводимых матриц обмена имеет место следующий результат.

Теорема 8.2. *Если матрица обмена A неприводима, то равновесный вектор y оказывается положительным и единственным с точностью до положительного множителя.*

Доказательство. Покажем сначала, что вектор y положителен. Пусть это не так, т. е. $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $\eta_j>0$ для $j\in S$, а $\eta_j=0$ для $j\in S'$. Тогда для $i\in S'$ имеем

$$a_i y=\eta_i=0=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\eta_j=\sum_{j\in S}\alpha_{ij}\eta_j,$$

и поэтому $\alpha_{ij}=0$ для $i\in S'$ и $j\in S$. Это значит, что множество S оказывается независимым подмножеством, а поскольку матрица A неприводима, $S=N$ и поэтому $\eta_j>0$ для всех j, т. е. $y>\mathbf{0}$.

Далее, если $y'=(\eta_1', \ldots, \eta_n')$—какой-либо другой равновесный вектор, то положим $\lambda=\min \eta_j/\eta_j'$ (скажем, $\lambda=$ $=\eta_1/\eta_1'$). Тогда

$$\lambda>0 \quad \text{и} \quad \eta_j-\lambda\eta_j'\geqq 0;$$

если положить

$$y'' = y - \lambda y' \geqq \mathbf{0},$$

то

$$Ay'' = y''.$$

Но вектор y'' не является положительным, поскольку $\eta_1'' = 0$. Из первой половины теоремы мы имеем $y'' = \mathbf{0}$, т. е. $y = \lambda y'$, что и требовалось доказать. Мы рассмотрели неприводимый случай. Остается рассмотреть случай, когда матрица приводима.

Определение. Независимое подмножество $S \subset N$ называется *неприводимым*, если не существует независимого подмножества S_1, содержащегося в S и отличного от S (такие подмножества называются собственными).

Из этого определения следует, что для каждой матрицы обмена существует по крайней мере одно неприводимое подмножество, которым возможно является само множество N. В следующей лемме содержится дальнейшая информация о строении матрицы A.

Лемма 8.2. *Если S и T — независимые подмножества, то независимы подмножества $S \cap T$ и $S \cup T$.*

Доказательство. Пусть $j \in S \cap T$, а $i \notin S \cap T$. Последнее означает, что либо $i \notin S$, либо $i \notin T$. В обоих случаях, поскольку подмножества S и T независимые, а j принадлежит им обоим, $\alpha_{ij} = 0$, и, следовательно, множество $S \cap T$ независимое. Второе утверждение устанавливается аналогично.

Следствие. *Различные неприводимые подмножества множества N не пересекаются*

Доказательство оставляем в качестве упражнения (см. упр. 2).

Дадим теперь истолкование этого результата как с точки зрения экономики, так и с точки зрения теории матриц.

Для нашей модели торговли этот результат означает, что мы можем разбить все множество стран на неприводимые блоки $S_1, S_2, \ldots, S_k$ плюс, быть может, некоторые страны, которые не входят в неприводимые блоки и могут быть объединены в множество T. Каждая страна из заданного блока S_i импортирует только из стран этого же блока.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть матрица торговли имеет вид

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,2	0,1		0,3			
2		0,2					0,5
3		0,2	0,5		0,9		
4						0,4	
5			0,5		0,1		0,2
6	0,8			0,7		0,6	
7		0,5					0,3

где пустые места означают нули. Эта матрица содержит два неприводимых подмножества $S_1 = \{1, 4, 6\}$ и $S_2 = \{3, 5\}$. Страны 2 и 7 не принадлежат неприводимым множествам. Если мы изменим нумерацию столбцов, то наша матрица будет иметь вид

	1	4	6	3	5	2	7
1	0,2	0,3	0			0,1	0
4	0	0	0,4			0	0
6	0,8	0,7	0,6			0	0
3				0,5	0,9	0,2	0
5				0,5	0,1	0	0,2
2						0,2	0,5
7						0,5	0,3

и неприводимые множества будут соответствовать двум квадратным блокам, расположенным вдоль главной диагонали. Этот процесс «развертывания» матрицы обмена в неприводимые подмножества, как мы в том убедились на примере, можно провести и непосредственно. Начиная с индекса 1, т. е. со страны C_1, мы находим все страны C_j, которые экспортируют в C_1. Этим странам соответствуют ненулевые элементы в первом столбце матрицы A. В нашем примере они соответствуют индексам 1 и 6. Затем мы находим страны, которые экспортируют в эти страны C_j. В нашем примере мы замечаем, что страна C_6 импортирует из C_4. Мы продолжаем этот процесс до тех пор, пока не перестанут появляться новые страны. В рассматриваемом примере видно, что описанный процесс выделил нам страны C_1, C_4 и C_6. Эти страны образуют независимое подмножество, которое, вообще говоря, может совпасть со всем множеством. Полученное подмножество не обязательно будет неприводимым. В этом случае следует повторить наш процесс для всех стран из этого подмножества. После выявления всех неприводимых подмножеств в первом независимом подмножестве, выбираем новую страну, не принадлежащую уже найденному независимому подмножеству (если таковая существует) и повторяем этот процесс сначала.

В общем случае читатель легко проверит, что при должным образом проведенной перенумерации, любую матрицу обмена можно представить в виде

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{A_1} & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \ddots & & B \\ & & & \boxed{A_k} & \end{array}\right),$$

где A_i соответствуют неприводимым подмножествам S_i, а B — соответствует остальным индексам.

На основе этих рассуждений мы можем построить равновесные векторы следующим образом: Пусть A_r — подматрица, соответствующая неприводимому подмножеству S_r, состоящему из s_r индексов $i_1, \ldots, i_{s_r}$. Далее, матрица A_r сама по себе является неприводимой матрицей обмена и, следовательно, имеет положительный равновесный вектор $y_r = (\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_{s_r}})$. Если мы теперь определим n-мерный вектор $\overline{y_r}$, так, что его компонента η_j равна соответствующей компоненте вектора y_r для $j \in S_r$ и равна нулю в остальных случаях, то, очевидно, вектор $\overline{y_r}$ будет равновесным вектором для всей матрицы A. Если построенные таким образом векторы $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k$ соответствуют равновесным векторам подматриц $A_1, \ldots, A_k$, то любой вектор $y = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \overline{y}_r$, где λ_r неотрицательные и не равные одновременно нулю числа, будет равновесным вектором для матрицы A. Далее мы покажем, что *любой* равновесный вектор для матрицы A действительно представим в таком виде.

Теорема 8.3. *Пусть A — матрица обмена с неприводимыми подмножествами $S_1, \ldots, S_k$, а $y = (\eta_j)$ — равновесный вектор. Тогда $y = \sum_{r=1}^{k} y_r$, где y_r — равновесный вектор, соответствующий множеству S_r.*

Доказательство. Определим n-мерный вектор $y_r = (\eta_{r1}, \ldots, \eta_{rn})$ по следующему правилу:

$$\eta_{rj} = \eta_j \quad \text{для } j \in S_r,$$

$$\eta_{rj} = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}$$

Далее, $y_r \leqq y$, и, следовательно, $a_i y_r \leqq a_i y$ для всех i. В частности,

$$\text{если } i \in S_r, \text{ то } a_i y_r \leqq a_i y = \eta_i = \eta_{ri};$$

$$\text{если } i \notin S_r, \text{ то } a_i y_r = 0.$$

Поэтому

$$Ay_r \leqq y_r,$$

но в силу леммы 8.1 отсюда следует, что $Ay_r = y_r$. Следовательно, вектор y_r является равновесным.

Нам остается показать, что $y = \sum_{r=1}^{k} y_r$. Обозначим снова через T множество индексов i, не принадлежащих ни одному из неприводимых подмножеств S_r, и $y' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_k) = y - \Sigma y_r$. Очевидно, $Ay' = y'$, причем $\eta'_i > 0$ только для $i \in T$. Если обозначить через Q множество всех индексов i, для которых $\eta'_i > 0$, то отсюда, как и в доказательстве теоремы 8.2, будет следовать, что множество Q оказывается независимым подмножеством множества T. Это означало бы, однако, что множество T содержит неприводимое подмножество, что противоречит предположению.

Отсюда мы заключаем, что $\eta'_i = 0$ для всех i, т. е. $y' = 0$, а это и завершает доказательство.

Применим теперь теорему 8.2 к нахождению всех равновесных векторов y для матрицы, рассмотренной в нашем числовом примере. Мы видим, что в этом случае существует два независимых подмножества, состоящих из индексов 1, 4, 6 и 3, 5. Первому из этих множеств соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} 0{,}2\eta_1 + 0{,}3\eta_4 \qquad\qquad &= \eta_1, \\ 0{,}4\eta_6 &= \eta_4, \\ 0{,}8\eta_1 + 0{,}7\eta_4 + 0{,}6\eta_6 &= \eta_6 \end{aligned}$$

с решением

$$\eta_1 = 0{,}15\alpha, \quad \eta_4 = 0{,}4\alpha, \quad \eta_6 = \alpha,$$

где α — любое положительное число. Второму независимому подмножеству соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} 0{,}5\eta_3 + 0{,}9\eta_5 &= \eta_3, \\ 0{,}5\eta_3 + 0{,}1\eta_5 &= \eta_5 \end{aligned}$$

с решением

$$\eta_3 = 1{,}8\beta, \quad \eta_5 = \beta$$

для любого положительного числа β.

В силу нашей теоремы каждый равновесный вектор y имеет поэтому вид

$$y = (0{,}15\alpha;\ 0;\ 1{,}8\beta;\ 0{,}4\alpha;\ \beta;\ \alpha;\ 0).$$

Следствие. *Если индекс i не принадлежит независимому подмножеству, то $\eta_i = 0$ для всех решений уравнения $Ay = y$.*

Сформулируем кратко полученные в этом параграфе результаты. Чтобы «решить» линейную модель торговли, следует прежде всего разбить ее на неприводимые подмножества. Каждая из полученных моделей может быть затем решена как независимая модель, имеющая единственное с точностью до положительного множителя решение. Общее решение получается, наконец, как линейная комбинация решений подмоделей.

§ 3. Динамическая теория

Сосредоточим в этом параграфе наше внимание на модели из примера 2. В предыдущем параграфе мы уже видели, что существует вектор доходов $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, который обеспечивает равновесие в том смысле, что если каждая страна ведет торговлю в соответствии с матрицей обмена, то ее доход остается на одном и том же уровне, равном η_i. Изучим теперь ситуацию, в которой страны начинают торговлю с произвольного распределения доходов, а затем эти доходы изменяются в результате торговли между странами. Оказывается, что почти во всех случаях, за исключением вполне определенных, доходы будут сходиться к своим равновесным значениям.

Теорема, которую мы будем доказывать, хорошо известна в теории вероятностей как эргодический принцип для цепей Маркова. Интересно отметить, что эта теорема встречается в нашем контексте, не имеющем ничего общего с неопределенностью.

В наиболее наивной формулировке мы можем представить себе страны C_i как игроков, сидящих вокруг стола, причем j-й игрок первоначально имеет η_j долларов. В каждой «партии» игрок j отдает игроку i долю α_{ij} того количества, которым он располагает, и игра повторяется неопределенно долго. Мы хотим узнать, сходятся ли количества, которыми располагают игроки, к некоторым предельным значениям и если сходятся, то каковы именно эти предельные значения. Более точно, пусть $y_0 = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — заданные начальные количества, имеющиеся в распоряжении n стран. Очевидно, что компонентами вектора $y_1 = Ay_0$ являются количества, имеющиеся в распоряжении каждой страны после одного тура обменов; вектор $y_2 = Ay_1 = A(Ay_0) = A^2y_0$ определяет количества после двух туров и т. д. В общем случае вектор $y_k = A^k y_0$ дает распределение доходов после k туров обмена. Возникает вопрос об условиях сходимости последовательности $y_k = A^k y_0$ к некоторому пределу, о зависимости этого предела от y_0 и т. д. Сформулируем теперь эти понятия точно.

Определение. Рассмотрим последовательность n-мерных векторов $y_1, y_2, \ldots$

$$y_k = (\eta_{1k}, \ \ldots, \ \eta_{nk}).$$

Будем говорить, что эта последовательность *сходится* к вектору $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, если последовательность чисел η_{jk} сходится к η_j для $j = 1, 2, \ldots, n$. Это обстоятельство мы будем записывать как $y_k \to y$.

Матрица обмена A называется *устойчивой*, если существует такой неотрицательный вектор $\bar{y}$, что для любого полуположительного вектора y_0, удовлетворяющего условию $y_0 v = \bar{y} v$, последовательность $A^k y_0$ сходится к $\bar{y}$.

Заметим, что если $A^k y_0$ сходится к $\bar{y}$, то вектор $\bar{y}$ оказывается для матрицы A равновесным (см. упр. 9).

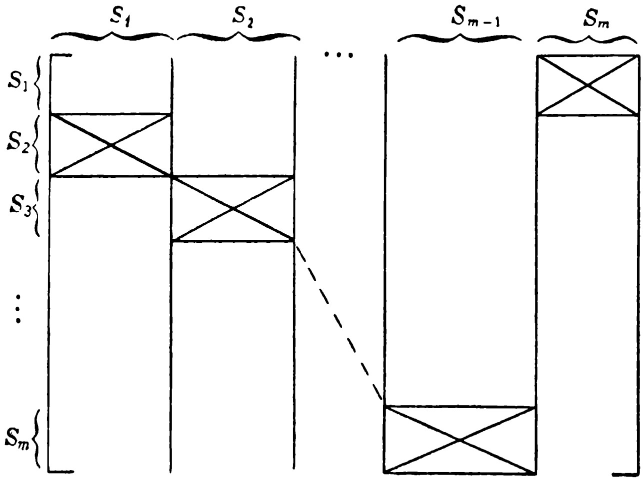
Легко построить матрицу, которая не является устойчивой. Самым простым примером такого рода может служить матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует модели, состоящей из двух стран, каждая из которых тратит весь свой доход на импорт из другой. Если первоначально одна из стран располагает, скажем, одним долларом и ничем больше, то понятно, что этот доллар будет переходить от одной страны к другой и обратно неопределенно долго. Можно обобщить эту картину следующим образом. Предположим, что n стран разбиты на m непересекающихся подмножеств $S_1, \ldots, S_m$ так, что страна из подмножества S_r $(r < m)$ импортирует только из стран, образующих подмножество S_{r+1}, а страна из подмножества S_m импортирует только из S_1. Если при этом весь доход первоначально сосредоточен в группе стран S_1, то он будет последовательно переходить от одной группы стран к другой и вернется к S_1 после m туров обмена. Таким образом, в этом случае устойчивости нет. Сформулируем сказанное выше следующим образом.

Определение. Матрица обмена A называется *периодической*, если можно так разбить множество N на m подмножеств $S_1, \ldots, S_m$, что $\alpha_{ij} \neq 0$ только для $j \in S_r$ и $i \in S_{r+1}$, либо $j \in S_m$, а $i \in S_1$. В этом случае число m называется *периодом* матрицы A.

Если мы переименуем индексы i так, чтобы было $S_1 = \{1, \ldots, n_1\}$, $S_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2\}$ и т. д., то периодическая матрица будет иметь следующий вид:



где вне отмеченных прямоугольников стоят нули.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда матрица обмена A неприводима. Мы могли бы свести общий случай к неприводимому и формально, но считаем достаточным ограничиться лишь описательными, нестрогими рассуждениями. Напомним прежде всего, что в общем случае множество всех рассматриваемых стран распадается на неприводимые подмножества S_1, ... S_k и множество T, образованное всеми остальными странами. Далее, все деньги, имеющиеся в начальный момент у стран, составляющих множество T, постепенно переходят в множества S_i и, поскольку в T нет притока из множеств S_i, количество денег в T стремится к нулю. К тому же, поскольку множества S_i образуют независимые подмножества, все деньги, которые притекают к этим странам, в них и остаются. Таким образом, предельное количество денег в S_i складывается из денег, имеющихся там в начальный момент, и некоторой части денег, имевшихся в начальный момент в странах из T. Обозначим через ζ_i предельное количество денег в S_i. Вопрос о предельном распределении этих денег среди членов множества S_i разрешается расмотрением непривoдимой подматрицы A_i. Таким образом, общая задача свелась к задаче, связанной с неприводимой матрицей A.

Выберем для удобства нашу денежную единицу так, чтобы в начальный момент имело место равенство $\sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1$ и, следовательно, сумма всех компонент вектора $A^k y$ при любом k также равнялась 1. Тогда в силу теоремы 8.2 существует единственный положительный равновесный вектор, сумма координат которого равна единице. Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 8.4. *Неприводимая матрица обмена либо устойчива, либо периодична.*

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько этапов. Прежде всего введем в пространстве R^n «норму».

Определение. Пусть $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in R^n$. Назовем *нормой вектора* y (обозначение $|y|$) сумму абсолютных величин его компонент

$$|y| = \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|.$$

Нетрудно проверить следующие свойства нормы:

$$|\lambda y| = |\lambda|\,|y|, \tag{I}$$

$$|y + y'| \leq |y| + |y'|. \tag{II}$$

Поскольку λ — скаляр, символ $|\lambda|$ означает здесь обычное абсолютное значение.

Отметим также, что $y_k \to \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $|\bar{y} - y_k| \to 0$, так как выражение $\sum_{j=1}^{n} |\bar{\eta}_j - \eta_{jk}|$ стремится к нулю в том и только том случае, когда каждое слагаемое $|\bar{\eta}_j - \eta_{jk}|$ стремится к нулю.

Пусть теперь A — неприводимая матрица обмена, а $\bar{y}$ — ее равновесный вектор. Обозначим через Y множество всех полуположительных векторов $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1$. Мы будем называть матрицу A *матрицей сжатия*, если существует такое число $\gamma \in (0, 1)$ (называемое коэффициентом сжатия), что для всех $y \in Y$ выполняется неравенство $|Ay - \bar{y}| \leqq \gamma |y - \bar{y}|$. Другими словами, A является матрицей сжатия, если она приближает все векторы из множества Y к устойчивому вектору $\bar{y}$. При таком определении мы получаем следующий простой и интуитивно понятный результат.

Лемма 8.3. *Если матрица A является матрицей сжатия, то она устойчива.*

Доказательство. Пусть γ — коэффициент «сжатия» матрицы A. Мы утверждаем, что для любого $y \in Y$ выполняется неравенство

$$|A^k y - \bar{y}| \leqq \gamma^k |y - \bar{y}|.$$

Для $k = 1$ это неравенство верно по определению. Полагая $y_k = A^k y$, мы получим

$$|A^{k+1} y - \bar{y}| = |Ay_k - \bar{y}| \leqq \gamma |y_k - \bar{y}| =$$

$$= \gamma |A^k y - \bar{y}| \leqq \gamma^{k+1} |y - \bar{y}|,$$

и наше утверждение доказано по индукции. Но $0 < \gamma < 1$, следовательно, $\gamma^k \to 0$ и матрица A устойчива.

Лемма 8.4. *Если матрица A имеет положительную строку, то она является матрицей сжатия.*

С точки зрения экономики эта лемма означает, что если существует некоторая страна, которая экспортирует во все другие страны, то матрица A устойчива.

Доказательство. Предположим, что в матрице A первая строка a_1 положительна. Мы должны теперь определить коэффициент сжатия γ. Пусть $\bar{\gamma} = \min_j \alpha_{1j}$. Искомым коэффициентом, как мы увидим, является $\gamma = 1 - \bar{\gamma}$. Для $y \in Y$ положим $z = y - \bar{y} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Поскольку $y \in Y$ и $\bar{y} \in Y$, то $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j = 0$. Положим теперь $\zeta_j^+ = \max(\zeta_j, 0)$ и $\zeta_j^- = \min(\zeta_j, 0)$. Тогда

$$\sum \zeta_j^+ = -\sum \zeta_j^- \text{ и } \sum \zeta_j^+ - \sum \zeta_j^- = \sum |\zeta_j| = |z|$$

и, следовательно,

$$-\sum \zeta_j^- = \frac{|z|}{2}. \tag{1}$$

Теперь мы можем считать, что $\sum\limits_j \alpha_{1j}\zeta_j \geqq 0$, ибо если это не так, то мы могли бы просто заменить всюду z на $-z$. Далее, в силу (1) мы имеем

$$\begin{aligned} |Az| &= \sum_i \Big|\sum_j \alpha_{ij}\zeta_j\Big| = \sum_{i=2}^{n}\Big|\sum_j \alpha_{ij}\zeta_j\Big| + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j \leqq \\ &\leqq \sum_{i=2}^{n}\Big(\sum_j \alpha_{ij}|\zeta_j|\Big) + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j = \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ij}|\zeta_j| + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j - \sum_j \alpha_{1j}|\zeta_j| = \\ &= \sum_j |\zeta_j|\Big(\sum_i \alpha_{ij}\Big) + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j - \sum_j \alpha_{1j}|\zeta_j| = \\ &= |z| + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j - \sum_j \alpha_{1j}|\zeta_j| = \\ &= |z| + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j - \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j^+ + \sum_j \alpha_{1j}\zeta_j^- = \end{aligned}$$

$$= |z| + 2\sum_i \alpha_{1j}\zeta_j^- \leqq \quad |z| + 2\bar{\gamma}\sum_j \zeta_j^- = |z| - \bar{\gamma}|z| = \gamma|z|.$$

Но строка a_1 по предположению положительная. Поэтому $\bar{\gamma} > 0$, так что $\gamma = 1 - \bar{\gamma} < 1$ и матрица A оказывается матрицей сжатия.

Следствие. *Если матрица A имеет положительную строку, то она устойчива.*

Будем продолжать ослаблять условия, налагаемые на матрицу A, до тех пор, пока не получим тех достаточных условий устойчивости, которые окажутся уже необходимыми.

Заметим прежде всего, что если матрица A является матрицей обмена, то матрицей обмена будет и матрица A^k. Действительно, матрица обмена характеризуется свойствами $A \geqq 0$ и $uA = u$, а эти свойства при возведении матрицы A в степень сохраняются. Верен также и следующий результат.

Лемма 8.5. *Если матрица A^m устойчива для некоторого положительного целого m, то матрица A также устойчива.*

Доказательство. Для любого $y \in Y$ мы имеем

$$|Ay-\bar{y}| = |A(y-\bar{y})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\eta_j - \bar{\eta}_j) \right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i,\, j} \alpha_{ij} |\eta_j - \bar{\eta}_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|\eta_j - \bar{\eta}_j| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \right) =$$
$$= \sum_j |\eta_j - \bar{\eta}_j| = |y - \bar{y}|.$$

Далее, если матрица A^m устойчива, то для данного $\varepsilon > 0$ при всех k, превосходящих некоторое N_1, мы имеем неравенство $|A^{km}y - \bar{y}| \leqq \varepsilon$. Положим теперь $N = N_1 m$. Если $k > N$ и $r < m$, то, очевидно, можно написать $k = N_1 m + r$ и

$$|A^{N_1 m + r}y - \bar{y}| = |A^r(A^{N_1 m}y - \bar{y})| \leqq |A^{N_1 m}y - \bar{y}| \leqq \varepsilon.$$

Комбинируя этот результат с леммой 8.4, получаем

Следствие. *Матрица обмена A устойчива, если некоторая степень матрицы A имеет положительную строку.*

Для завершения доказательства теоремы 8.4 нам остается показать, что если никакая степень матрицы A не имеет положительной строки, то матрица A периодична.

Обозначая через $\alpha_{ij}^{(r)}$ элементы матрицы A^r, по определению умножения матриц имеем

$$\alpha_{ik}^{(r+s)} = \alpha_{ij}^{(r)}\alpha_{jk}^{(s)} + \text{остальные неотрицательные члены.}$$

Таким образом,

$$\text{из } \alpha_{ij}^{(r)} > 0 \text{ и } \alpha_{jk}^{(s)} > 0 \text{ следует } \alpha_{ik}^{(r+s)} > 0. \qquad (1)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 8.6. *Если матрица A неприводима, то для любых i и j существует такое r, что $\alpha_{ij}^{(r)} > 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для $i = 1$. Обозначим через S множество всех j, для которых $\alpha_{1j}^{(r)} = 0$ при всех r. Если $j \in S$ и $i \in S'$, то для некоторого r мы имеем $\alpha_{1i}^{(r)} > 0$ и поэтому $\alpha_{ij} = 0$.

В противном случае из (1) мы имели бы $\alpha_{1j}^{(r+1)} > 0$, что противоречит предположению. Отсюда следует, что множество S является независимым подмножеством. Множество S не совпадает со всем множеством N, так как тогда для всех j должно быть $\alpha_{1j}=0$ и множество $\{2, \ldots, n\}$ было бы независимым. Поэтому из неприводимости матрицы A следует, что множество S пусто. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 8.4. Поскольку матрица A неприводима, мы для некоторого целого r имеем неравенство $\alpha_{11}^{(r)} > 0$. Пусть $R = \{r \mid \alpha_{11}^{(r)} > 0\}$. Обозначим через p наибольший общий делитель чисел, составляющих множество R.

Случай 1. Пусть $p > 1$. Заметим прежде всего, что если $\alpha_{1j}^{(r)} > 0$ и $\alpha_{1j}^{(s)} > 0$, то $r \equiv s \pmod p$ (т. е. $r-s$ делится на p). Действительно, в силу предыдущей леммы для некоторого k мы имеем $\alpha_{j1}^{(k)} > 0$ и, следовательно, $\alpha_{11}^{(r+k)} > 0$ и $\alpha_{11}^{(s+k)} > 0$. Поэтому оба числа $r+k$ и $s+k$ делятся на p, а следовательно, и их разность, $r-s$, также делится на p. Далее обозначим через S_r для $r = 1, 2, \ldots, p$ множество всех индексов i, для которых $\alpha_{1i}^{(r+kp)} > 0$ при некотором k. Ранее мы уже видели, что множества $S_1, \ldots, S_p$ не пересекаются. Если $\alpha_{ij} > 0$ и $i \in S_r$, то для некоторого k мы имеем неравенство $\alpha_{1i}^{(r+kp)} > 0$. Поэтому из (1) следует, что $\alpha_{1j}^{(r+1+kp)} > 0$. Ввиду того, что $j \in S_{r+1}$ при $r < p$ и $j \in S_1$ при $r = p$, мы получаем, что матрица A периодична с периодом p.

Случай 2. Пусть $p = 1$. Нам потребуется следующий результат из теории чисел.

Лемма 8.7. *Если числа, составляющие множество R, взаимно просты, то существует такое целое ϱ, что из $m \geqq \varrho$ следует $m = \sum_{i=1}^{r} m_i a_i$, где m_i — целые положительные числа и $a_i \in R$.*

Предположив справедливость леммы, завершим доказательство теоремы. Выберем в соответствии с леммой число ϱ, взяв в качестве R определенное выше множество. Тогда ввиду (1) мы для $m \geqq \varrho$ имеем

$\alpha_{11}^{(m)} = \alpha_{11}^{(\Sigma m_i a_i)} > 0$. Так как, кроме того, матрица A неприводима, для каждого индекса j существует такое целое число δ_j, что $\alpha_{1j}^{(\delta_j)} > 0$. Пусть $\delta = \max\limits_j \delta_j$. Мы утверждаем, что $\alpha_{1j}^{(m+\delta)} > 0$ для всех j ввиду того, что $m + \delta = m + \delta'_j + \delta_j$ и $\alpha_{11}^{(m+\delta'_j)} > 0$, и $\alpha_{1j}^{(\delta_j)} > 0$. Но отсюда следует, что в матрице $A^{(m+\delta)}$ первая строка положительна и в силу предыдущих лемм матрица A устойчива.

Доказательство леммы 8.7. Рассмотрим сначала случай, в котором множество R состоит из двух взаимно простых чисел a и b. Если $k \geqq N = (b-1)a$, то неотрицательные целые числа k, $k-a$, $k-2a$, ..., $k-(b-1)a$ при делении на b дают различные остатки. В самом деле, если $k - ma$ и $k - na$, $n \neq m$, дают при делении на b один и тот же остаток, то b оказалось бы делителем числа $(n-m)a$, что невозможно, так как b и a взаимно просты, а $n - m \geqq b$. Поэтому существует b различных остатков. Но все эти остатки меньше b; следовательно, один из них равен нулю. Значит для некоторого $m < b$ разность $k - ma$ делится на b. Но тогда $k = ma + nb$ и утверждение доказано.

Предположим теперь, что множество R содержит r взаимно простых чисел $a_1, \ldots, a_r$ и теорема доказана для любого его подмножества, содержащего меньшее число элементов. Если наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots$ $\ldots, a_{r-1}$ равен d, то числа $a_1/d, \ldots, a_{r-1}/d$ взаимно просты и, следовательно, существует такое N_1, что для любого $k_1 \geqq N_1$ мы можем написать

$$k_1 = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{m_i a_i}{d}.$$

В частности, мы можем выбрать k_1 взаимно простым с a_r, тогда $dk_1 = \sum\limits_{i=1}^{r-1} m_i a_i$ также будет взаимно просто с a_r. Но мы уже видели, что для k, бóльшего некоторого N, существуют такие неотрицательные числа n_1 и n_2, что

$$k = n_1 dk_1 + n_2 a_r.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

§ 4. Динамика в приводимом случае

Обратимся, наконец, к краткому рассмотрению динамической ситуации для приводимой модели. В том случае когда рассматриваемая модель *вполне приводима*, т. е. когда каждая страна принадлежит некоторому неприводимому подмножеству, легко определить устойчивое распределение дохода, рассматривая каждую подмодель отдельно от остальных. Поэтому нам остается рассмотреть лишь тот случай, когда некоторые страны не принадлежат к неприводимым подмоделям. В этом случае все первоначально имеющиеся в этих странах деньги распределяются в конечном счете [1]) среди стран, принадлежащих к различным неприводимым подмоделям. Представляет интерес точно определить, каким окажется это распределение.

В качестве конкретного примера рассмотрим снова численный пример из § 2. Мы отмечали там, что страны 2 и 7 не принадлежат ни к одной из неприводимых подмоделей. Предположим, что первоначально каждая из этих стран располагала одной единицей денег. Как же в конце концов распределятся эти две единицы между двумя неприводимыми подмоделями, охватывающими страны (1,4,6) и (3,5)?

Вместо попытки разрешения этого конкретного вопроса рассмотрим снова общую ситуацию. Пусть страны $C_1, \ldots, C_k$ не принадлежат к какой-либо неприводимой подмодели. Обозначим через C_0 некоторую другую страну. Рассмотрим теперь $k \times k$-подматрицу B матрицы обмена A

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & C_1 & \ldots & C_k \\
\hline
C_1 & a_{11} & \ldots & a_{1k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
C_k & a_{k1} & \ldots & a_{kk} \\
\hline
\end{array} = B$$

и предположим, что страна C_j $(j = 1, \ldots, k)$ располагает вначале суммой η_{j0}. Это значит, что вектор $y_0 = (\eta_{10}, \ldots, \eta_{k0})$ описывает распределение дохода среди стран $C_1, \ldots, C_k$

[1]) Так сказать, асимптотически.— *Прим. ред.*

за один тур. Как это уже отмечалось, распределение дохода после n туров обмена между этими странами будет определяться вектором $B^n y_0$. Спрашивается, какая часть денег, имеющаяся первоначально в стране C_j, будет передана стране C_0 после n туров обмена. Понятно, что это зависит от чисел $\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0k}$, где, как всегда, через α_{0j} обозначена доля дохода страны C_j, которая передается в страну C_0. Обозначим через η_{jn} доход страны C_j после n туров обмена. Понятно, что после $n+1$-го тура страна C_0 получит

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{0j}\eta_{jn}$$

и, полагая $a_0 = (\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0k})$, получим

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{0j}\eta_{jn} = a_0 B^n y_0.$$

Наконец, общее количество μ_n, которое получит страна C_0 из стран C_j после n туров обмена, складывается из количеств, полученных в каждом туре, т. е.

$$\mu_n = a_0 (I + B + \ldots + B^n)\, y_0.$$

Для μ_n можно получить более простое выражение, если вспомнить тождество

$$(I - B)(I + B + \ldots + B^n) = I - B^{n+1}.$$

Предполагая невырожденность матрицы $I - B$ (см. упр. 14), мы можем написать

$$(I + B + \ldots + B^n) = (I - B)^{-1}(I - B^{n+1}).$$

Таким образом,

$$\mu_n = a_0 (I - B)^{-1}(I - B^{n+1})\, y_0 =$$
$$= a_0 (I - B)^{-1} y_0 - a_0 (I - B)^{-1} B^{n+1} y_0.$$

С другой стороны, нам известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} B^{n+1} y_0 = \mathbf{0}$, т. е. что все деньги, имеющиеся первоначально в странах C_j, из них уходят.

Таким образом, мы получили формулу

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n = a_0 (I - B)^{-1} y_0, \qquad (1)$$

описывающую искомое распределение денег.

В примере из § 2 матрица B имела вид

$$\begin{array}{c|cc|} & C_2 & C_7 \\ \hline C_2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ C_7 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ \hline \end{array},$$

так что

$$(I-B)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{0{,}7}{0{,}31} & \frac{0{,}5}{0{,}31} \\ \frac{0{,}5}{0{,}31} & \frac{0{,}8}{0{,}31} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что первоначально в странах C_2 и C_7 было по единице. Тогда

$$(I-B)^{-1}y_0=\left(\frac{1{,}2}{0{,}31},\ \frac{1{,}3}{0{,}31}\right),$$

и мы видим, что

$$C_1 \text{ получает } 0{,}1\times\frac{1{,}2}{0{,}31}=\frac{0{,}12}{0{,}31},$$

$$C_3 \text{ получает } 0{,}2\times\frac{1{,}2}{0{,}31}=\frac{0{,}24}{0{,}31},$$

$$C_5 \text{ получает } 0{,}2\times\frac{1{,}3}{0{,}31}=\frac{0{,}26}{0{,}31}.$$

Заметим, что сумма этих чисел равна $\frac{0{,}62}{0{,}31}=2$, что соответствует сумме денег, имевшихся первоначально в странах C_2 и C_7.

Таким образом, мы можем вычислить устойчивое распределение дохода, начиная с любого начального распределения (см. упр. 6,7).

§ 5. Равновесие цен в линейных моделях обмена

В заключительных параграфах этой главы мы рассмотрим вопросы, которые не связаны непосредственно с материалом предыдущих параграфов, но занимают центральное место в общей экономической теории. В примере с приобретением домов из § 6 гл. V читатель познакомился с одним частным случаем проблемы равновесия цен. В этом параграфе мы рассмотрим другой частный случай этой задачи. Общая задача равновесия цен является одним из самых интересных и сложных вопросов математической экономики. К сожалению, математический аппарат,необходимый для рассмотрения это.о вопроса в полном объеме, выходит за рамки материала, изложенного в этой книге, и поэтому мы вынуждены ввести в нашу задачу некоторые ограничительные и притом несколько неестественные условия. Тем не менее используемые нами идеи и методы представляются весьма интересными с той точки зрения, что позволяют познакомить читателя с важными разделами экономической теории.

Обратимся к экономике, в которой участвуют *n продуктов* $G_1, \ldots, G_n$, *m потребителей*, обозначаемых через $C_1, \ldots, C_m$, и одна условная личность, которую мы будем называть «производитель». Каждый год производитель производит одну единицу каждого продукта G_j (в качестве единицы мы просто выбираем годовое производство соответствующего продукта). Годовой *доход* i-го потребителя C_i предполагается равным некоторому фиксированному количеству β_i.

Предположим, что свой доход β_i каждый потребитель C_i тратит полностью на приобретение тех или иных количеств продуктов G_j. Для того чтобы знать, как он будет это осуществлять, мы должны знать, какова полезность каждого продукта для потребителя. Мы будем предполагать, что *полезность* единицы продукта G_j для потребителя C_i задается неотрицательным числом α_{ij}.

Подчеркнем сразу же, что числа α_{ij} не обязаны иметь денежное выражение. Принимая эту точку зрения, мы не хотели бы оказаться вовлеченными в философские проблемы теории полезности. Мы просто говорим, что число α_{ij} измеряет в каком-то смысле субъективную ценность продукта G_j для потребителя C_i. Конечно, сами по себе числа α_{ij} не содержат еще никакой информации. Но, с другой стороны, если, например, $\alpha_{i1} = 2$, а $\alpha_{i2} = 4$, то мы говорим, что для потребителя C_i продукт G_2 является в два раза более «ценным», чем продукт G_1.

Наложим довольно жесткое ограничение на субъективность оценки продукта потребителем. Назовем *ассортиментным набором продуктов* неотрицательный n-мерный вектор

$y=(\eta_j)$, в котором η_j есть количество продукта G_j. Пусть

$$a_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}).$$

Условие I. Полезность μ_i ассортиментного набора продуктов y для потребителя C_i описывается выражением

$$\mu_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\eta_j=a_i y_i.$$

Едва ли необходимо отмечать тот факт, что, вообще говоря, субъективные полезности не будут подчиняться такому простому закону. Сто фунтов картофеля не обязательно должны быть в сто раз более желанными для потребителя, чем один фунт. Но, с другой стороны, можно представить себе, что линейность могла бы быть принята в качестве приближения к истинному положению при небольших изменениях величин η_j. Условие I потребовалось здесь только для того, чтобы мы могли остаться в рамках линейной модели.

Предположим далее, что задан вектор цен $p=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, где π_j — цена одной единицы продукта G_j. Как будет в этом случае потребитель C_i распределять свой доход, довольно ясно. Он будет выбирать ассортиментный набор y_i, который

$$\text{максимизирует } a_i y_i, \tag{1}$$

удовлетворяя при этом *бюджетному ограничению*

$$p y_i \leqq \beta_i. \tag{2}$$

Таким образом, каждый потребитель тратит свой доход так, как будто он решает эту довольно простую задачу линейного программирования. Она действительно проста, так как переменные должны удовлетворять в ней только одному ограничению. Пользуясь привычной терминологией, мы будем называть ассортиментный набор *допустимым*, если он удовлетворяет неравенству (2).

Напомним, что производитель выпускает в продажу только одну единицу каждого продукта. С другой стороны, потребителям необходимо иметь m ассортиментных наборов $y_1, \ldots, y_m$, которые должны удовлетворять условиям (1) и (2). Это будет выполнено только в том случае, если *суммар-*

ное потребление $y = \sum_{i=1}^{m} y_i$ содержит не более одной единицы каждого продукта, т. е. если

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq v \tag{3}$$

(где, как обычно, через v обозначен единичный вектор).

Понятно, что при произвольном векторе цен p мы не можем рассчитывать на выполнение неравенства (3), и спрос на некоторые продукты будет, вообще говоря, превышать предложение, а на другие будет меньше предложения.

Далее, в соответствии с классической теорией в этом случае цены продуктов, спрос на которые выше предложения, поднимаются, а на другие продукты снижаются до тех пор, пока в конце концов не будет достигнуто равновесие между спросом и предложением. Эта ситуация полностью описывается следующим определением.

Определение. Вектор цен p называется *равновесным*, если существуют ассортиментные наборы y_i, удовлетворяющие для всех потребителей C_i условиям (1) и (2) и для которых, кроме того,

$$\sum y_i = v. \tag{4}$$

В таком случае и ассортиментные наборы называются *равновесными*.

Интересно отметить, что хотя понятие равновесных цен восходит к первым дням существования экономической теории, лишь совсем недавно было дано доказательство существования таких цен.

Мы докажем существование и единственность равновесных цен для нашей модели после некоторых предварительных упрощений. Предположим прежде всего, что в *матрице субъективных полезностей* $A = (\alpha_{ij})$ существует по крайней мере один положительный элемент в каждой строке и каждом столбце. Это предположение не является существенным; ведь если бы матрица A содержала строку из нулей, то это означало бы, что один из потребителей C_i не нашел на рынке ничего для себя подходящего. В таком случае мы просто не рассматривали бы потребителя C_i и изучали бы модель, состоящую из оставшихся потребителей. Аналогично, если бы j-й столбец матрицы A состоял из нулей, то эго означало бы отсутствие спроса на продукт G_j, и в этом случае мы его не рассматривали бы. Это условие можно формализовать следующим образом.

Условие II. Матрица полезностей $A = (\alpha_{ij})$ имеет в каждом столбце и каждой строке хотя бы один положительный элемент.

Выберем далее для удобства денежную единицу так, чтобы суммарный доход всех потребителей равнялся единице:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$$

Будем, наконец, предполагать, что производитель хочет продать весь набор v произведенных им продуктов. Понятно, что для этого необходимо, чтобы суммарная денежная ценность этого набора не превышала суммарного дохода всех потребителей. Иначе говоря, мы должны ввести

Условие III. Вектор цен $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ должен удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1. \tag{5}$$

Сформулируем теперь коротко все то, что было высказано выше.

Определение. Пусть $A=(\alpha_{ij})$ — неотрицательная матрица, в каждом столбце и каждой строке которой имеется по крайней мере один положительный элемент. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — положительные числа, сумма которых равна единице.

Неотрицательный n-мерный вектор $p=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ называется *равновесным вектором цен*, а неотрицательные n-мерные векторы $y_1, \ldots, y_m$ называются *равновесными ассортиментными наборами*, если

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1, \tag{а}$$

$$y_i \text{ максимизирует } a_i y_i \tag{б}$$

при ограничениях

$$py_i \leqq \beta_i \tag{в}$$

и при дополнительном условии

$$\sum_i y_i = v. \tag{г}$$

Будем говорить, что ассортиментные наборы и цены, удовлетворяющие перечисленным выше условиям (а) — (г), обеспечивают *равновесие цен.*

Теорема 8.5 (теорема равновесия). *Для любой матрицы A и системы чисел β_i, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, существует равновесие цен.*

Доказательство. Определим заданную на ассортиментных наборах $y_1, \ldots, y_m$ функцию φ следующим образом:

$$\varphi(y_1, \ldots, y_m) = (a_1 y_1)^{\beta_1} \ldots (a_m y_m)^{\beta_m}. \tag{1}$$

Обозначим через $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ ассортиментные наборы, которые максимизируют функцию φ на множестве всех ассортиментных наборов, удовлетворяющих условию (г). (Существование такого максимизирующего набора вытекает из теоремы Вейерштрасса, утверждающей, что непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве в конечномерном евклидовом пространстве, достигает своего наибольшего значения. Доказательство можно найти в любом курсе математического анализа.) Из условий, наложенных на матрицу A, мы имеем $a_i \neq 0$. Следовательно, наибольшее значение функции φ положительно и поэтому число $a_i \bar{y}_i$ также положительно. Положим

$$\pi_j = \max_i \frac{a_{ij}\beta_i}{a_i \bar{y}_i} \tag{2}$$

и докажем, что ассортиментные наборы $\bar{y}_i = (\bar{\eta}_{ij})$ и цены π_j действительно обеспечивают равновесие цен. (Здесь $\pi_j > 0$. См. упр. 20.)

Заметим прежде всего, что условие (г) здесь удовлетворено по самому способу определения векторов $\bar{y}_i$.

Проверка соблюдения остальных условий опирается на то, что

$$\pi_j = \frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\bar{y}_i} \tag{3}$$

при $\bar{\eta}_{ij} > 0$. Считая это утверждение установленным, мы без труда закончим доказательство. Проверим прежде всего выполнение неравенства (в). Из (3) мы имеем

$$\pi_j\bar{\eta}_{ij} = \frac{\beta_i}{a_i\bar{y}_i}\alpha_{ij}\bar{\eta}_{ij} \quad \text{для всех } i \text{ и } j,$$

а суммирование по j при фиксированном i дает

$$p\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\bar{\eta}_{ij} = \frac{\beta_i}{a_i\bar{y}_i}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\bar{\eta}_{ij} = \beta_i. \tag{4}$$

(Неравенство (в) на самом деле могло бы быть получено и из предположений относительно матрицы A.)

Для того чтобы доказать (а), мы просуммируем равенства (4) по i. Тогда

$$1 = \sum \beta_i = \sum p\bar{y}_i = pv = \sum_{j=1}^{n} \pi_j.$$

Проверим, наконец, условие (б). При этом достаточно установить его для $i = 1$, ибо мы можем считать, что именно $\alpha_{11}/\pi_1 = \max\limits_j \alpha_{1j}/\pi_1$ (в противном случае мы переупорядочили бы индексы j). Тогда для любого ассортиментного набора y_1, удовлетворяющего бюджетному неравенству для C_1, мы имеем

$$a_1y_1 = \sum_j \alpha_{1j}\eta_{1j} \leqq \frac{\alpha_{11}}{\pi_1}\sum_j \pi_j\eta_{1j} \leqq \frac{\alpha_{11}}{\pi_1}\beta_1. \tag{5}$$

С другой стороны, из определения π_1 получается, что

$$\pi_1 \geqq \frac{\alpha_{i1}\beta_i}{a_i\bar{y}_i} \quad \text{для всех } i,$$

или, в частности,

$$a_1\bar{y}_1 \geqq \frac{\alpha_{11}\beta_1}{\pi_1}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) мы получаем неравенство $a_1\bar{y}_1 \geqq a_1 y_1$ и, следовательно, вектор $\bar{y}_1$ максимизирует $a_1 y_1$, удовлетворяя при этом бюджетному неравенству. Тем самым (б) установлено.

Нам остается доказать утверждение (3). Доказательство будем вести от противного. Предположим, что

$$\bar{\eta}_{11} > 0, \quad \text{а} \quad \pi_1 > \frac{\alpha_{11}\beta_1}{a_1\bar{y}_1}. \tag{7}$$

Но из (2) для некоторого i должно иметь место равенство $\pi_1 = \alpha_{i1}\beta_i / a_i\bar{y}_i$. Пусть для определенности

$$\pi_1 = \frac{\alpha_{21}\beta_2}{a_2\bar{y}_2}. \tag{8}$$

Тогда из (7) и (8) мы получаем, что

$$\alpha_{11}\beta_1 (a_2\bar{y}_2) < \alpha_{21}\beta_2 (a_1\bar{y}_1). \tag{9}$$

Покажем, что это противоречит утверждению о том, что ассортиментные наборы $\bar{y}_i$ максимизируют функцию φ.

Пусть

$$y_1' = (\bar{\eta}_{11} - \varepsilon, \bar{\eta}_{12}, \ldots, \bar{\eta}_{1n}), \quad y_2' = (\bar{\eta}_{21} + \varepsilon, \bar{\eta}_{22}, \ldots, \bar{\eta}_{2n}),$$

где

$$0 < \varepsilon < \bar{\eta}_{11}.$$

Очевидно, что ассортиментные наборы $y_1', y_2', \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m$ все еще удовлетворяют условию (г). Далее,

$$\varphi(y_1', y_2', \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m) =$$
$$= [(a_1\bar{y}_1 - \alpha_{11}\varepsilon)^{\beta_1} (a_2\bar{y}_2 + \alpha_{21}\varepsilon)^{\beta_2} - (a_1\bar{y}_1)^{\beta_1} (a_2\bar{y}_2)^{\beta_2}] \times$$
$$\times (a_3\bar{y}_3)^{\beta_3} \ldots (a_m\bar{y}_m)^{\beta_m}.$$

Если мы применим к членам в квадратных скобках формулу бинома, то получим

$$\{(a_1\bar{y}_1)^{\beta_1 - 1} (a_2\bar{y}_2)^{\beta_2 - 1} [(a_1\bar{y}_1)\alpha_{21}\beta_2 - (a_2\bar{y}_2)\beta_1\alpha_{11}]\varepsilon +$$
$$+ \text{члены с более высокими степенями } \varepsilon\}.$$

Но из неравенства (9) следует, что первый член выражения, написанного в квадратных скобках, положителен.

Следовательно, для достаточно малого ε и все выражение будет положительным, а это противоречит предположению, что ассортиментные наборы $\overline{y}_i$, максимизируют φ. Это завершает доказательство.

Сделаем несколько замечаний по поводу теоремы равновесия. Прежде всего заметим, что в нашей задаче ничто не изменится, если строки матрицы умножить на произвольные числа. Очевидно, пропорциональное изменение субъективных полезностей каждого потребителя не повлияет на задачу, поскольку, как мы уже видели, они являются лишь относительными ценностями продуктов и не влияют на экономическое поведение потребителя.

Возможно, наиболее интересная особенность теоремы о равновесии состоит в появлении функции φ. Из нашего доказательства вытекает следующее утверждение:

При равновесии цен продукты распределяются таким образом, чтобы максимизировать произведение полученных каждым индивидуумом удовлетворений, возведенных в степень, равную его бюджету.

Едва ли этот результат можно было предсказать заранее. Его появление является иллюстрацией того, каким образом математический аппарат может привести к обнаружению новых экономических фактов.

Заметим, наконец, что можно также показать, что задача нахождения множества равновесных ассортиментных наборов, которые максимизируют функцию φ, эквивалентна задаче нахождения равновесных цен.

§ 6. Пример равновесия цен

Рассмотрим числовой пример со следующей матрицей полезностей

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & G_1 & G_2 & G_3 \\
\hline
C_1 & 4 & 3 & 1 \\
C_2 & 2 & 3 & 2 \\
C_3 & 3 & 1 & 2
\end{array}
$$

Мы будем при этом предполагать, что у каждого потребителя имеется одна единица денег. Отсюда будет следовать, что сумма равновесных цен будет равна 3, а не 1. Мы утверждаем, что равновесные цены таковы:

$$\pi_1 = 1{,}2, \quad \pi_2 = 1{,}0, \quad \pi_3 = 0{,}8.$$

Следующая простая лемма даст возможность проверить, что эти цены действительно обеспечивают равновесие.

Лемма 8.8. *Пусть* $\mu_i = \max\limits_j (\alpha_{ij}/\pi_j)$. *Ассортиментный набор* y_i, *удовлетворяющий бюджетному неравенству, максимизирует* $a_i y_i$ *в том и только том случае, когда из неравенства* $\eta_{ik} > 0$ *следует* $\frac{\alpha_{ik}}{\pi_k} = \mu_i$. (1)

Доказательство. По определению μ_i мы имеем

$$\frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} \leqq \mu_i \quad \text{для всех } j.$$

Умножая эти неравенства на η_{ij} и суммируя по j, получим

$$a_i y_i = \sum_j \alpha_{ij}\eta_{ij} \leqq \mu_i \sum_j \eta_{ij}\pi_j = \mu_i\beta_i. \qquad (2)$$

В неравенстве (2) знак равенства имеет место в том и только том случае, если выполняется (1).

С экономической точки зрения эта лемма очевидна, поскольку в ней утверждается, что потребитель будет покупать только тот продукт или только те продукты, которые доставляют ему максимальное удовлетворение в долларах. В нашем примере потребитель C_1 будет тратить весь свой бюджет на продукт G_1, поскольку отношения α_{1j}/π_j суть

$$\frac{4}{1{,}2}, \ \frac{3}{1}, \ \frac{1}{0{,}8},$$

а наибольшим из них является $4/1{,}2$. Следовательно, потребитель C_1 купит $^5/_6$ единицы продукта G_1. Аналогично потребитель C_2 будет покупать только продукт G_2, поскольку его отношения суть

$$\frac{2}{1{,}2}, \ \frac{3}{1}, \ \frac{2}{0{,}8}.$$

При этом потребитель C_2 купит одну единицу продукта G_2. Наконец, потребителю C_3 безразлично что покупать, продукт G_1 или G_2, поскольку соответствующие отношения $3:2{,}1$ и $2:0{,}8$ равны. Если он купит $^1/_6$ единицы продукта G_1 и одну единицу продукта G_3, то его суммарные затраты составят

$$^1/_6 \times 1{,}2 + 0{,}8 = 1,$$

таким образом, бюджетное соотношение выполнено. Заметим также, что соответствующие ассортиментные наборы, являющиеся *равновесными*, суть

$$y_1 = (^5/_6,\ 0,\ 0), \quad y_2 = (0,\ 1,\ 0), \quad y_3 = (^1/_6,\ 0,\ 1),$$

и поэтому

$$y_1 + y_2 + y_3 = (1,\ 1,\ 1),$$

как и требуется. Следовательно, равновесные цены нами найдены.

Читатель, несомненно, прежде всего заинтересуется, как нам удалось найти вектор цен p и как можно найти его для этой задачи в общем случае. Вопрос о фактическом вычислении решения является одним из тех вопросов, которые мы не имеем возможности здесь рассмотреть. Некоторый подход к решению дает теорема существования. Вместо решения исходной задачи решается эквивалентная задача на отыскание максимума и максимизируется функция φ, переменные которой подчинены линейным ограничениям (г). Эта задача была бы задачей линейного программирования, если бы функция φ оказалось линейной. Эта функция, однако, принадлежит к классу так называемых вогнутых функций. Вогнутое программирование привлекает теперь значительное внимание, хотя мы и не можем останавливаться здесь на этих вопросах.

§ 7. Единственность равновесных цен

В качестве заключительного результата, относящегося к равновесию цен, нами будет доказан следующий факт.

Теорема 8.6. *Для данной матрицы A и доходов β_i существует только один равновесный вектор цен p.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что цены всех продуктов должны быть положительными, ибо если π_j было бы нулем, то благодаря положительности α_{ij} для некоторого i потребитель C_i потребовал бы бесконечное количество продукта G_j, что, конечно, противоречило бы условию (г).

Предположим теперь, что p и p' — два равновесных вектора цен. Положим $\theta = \max_j(\pi'_j/\pi_j)$ и обозначим через J множество всех таких индексов j, что $\pi'_j/\pi_j = \theta$. В предыдущем параграфе мы уже видели, что потребитель C_i будет вкладывать свой капитал в продукт G_j только в том случае, если

$$\frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} \geqq \frac{\alpha_{ik}}{\pi_k} \quad \text{для всех } k. \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется, то мы будем говорить, что для потребителя C_i *предпочтительнее* продукт G_j. Обозначим далее через I множество всех таких индексов i, при которых потребитель C_i предпочитает по крайней мере один продукт G_j для $j \in J$ при ценах p'.

Суммарного дохода потребителей C_i, $i \in I$, должно хватить на то, чтобы заплатить за все продукты G_j, $j \in J$ при ценах p'. Поэтому

$$\sum_I \beta_i \geqq \sum_J \pi'_j = \theta \sum_J \pi_j. \tag{2}$$

Пусть далее $i \in I$. Тогда по определению множества I существует такое $j \in J$, что

$$\frac{\alpha_{ij}}{\pi'_j} \geqq \frac{\alpha_{ik}}{\pi'_k} \quad \text{для всех } k. \tag{3}$$

Если потребитель C_i предпочитает продукт G_r при ценах p, то

$$\frac{\alpha_{ir}}{\pi_r} \geqq \frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} = \frac{\theta\alpha_{ij}}{\pi'_j} \geqq \frac{\theta\alpha_{ir}}{\pi'_r}. \tag{4}$$

Следовательно, $\pi'_r/\pi_r \geqq \theta$, а это означает, что $r \in J$. Таким образом, мы показали, что каждый продукт, который предпочтителен для потребителей, образующих множество I при ценах p, является продуктом, входящим и в множество J. Это означает в свою очередь, что

$$\sum_I \beta_i \leqq \sum_J \pi_j, \tag{5}$$

поскольку потребители из множества I покупают продукты только из множества J при ценах p и должны тратить весь свой доход на них. Но из неравенств (2) и (5) мы получаем $\theta = 1$ и $p = p'$, что и требовалось.

Библиографические замечания

Рассмотренная здесь простая модель обмена была предложена по существу уже Ремаком [1]. В последнее время эта модель стала известной под именем замкнутой леонтьевской модели, рассмотренной в работе Леонтьева [1][1]). Более ранней работой, касающейся математической эквивалентности этой модели проблеме цен, является работа Брэя [1]. Модель международной торговли введена Фришем [1]. Динамические теоремы об устойчивости, как мы уже упоминали, являются фундаментальным результатом в теории вероятностей. Эту связь с проблемой обмена впервые обнаружил Солоу [1]. Частный случай проблемы равновесных цен, изложенный в этой главе, рассматривался в несколько иной форме Эйзенбергом и Гейлом [1].

Упражнения

1. Доказать, что матрица обмена A неприводима в том и только том случае, если для каждых двух индексов i и j существует такая последовательность $i = i_1, i_2, \ldots, i_r = j$, что $\alpha_{i_k i_{k+1}} > 0$ для $k = 1, \ldots, r-1$.

2. Если S и T — различные неприводимые подмножества множества индексов $1, \ldots, n$, то S и T не пересекаются. Доказать.

---

[1]) По-видимому, впервые аналогичные построения встречаются, по существу, уже у Вальраса (см. W a l r a s L., Elements d' économie politique pure ou théorie de la richesse sociale, Paris, 1874) и В. К. Дмитриева (см. Экономические очерки, М., 1904). Их можно найти также в монографии «Баланс народного хозяйства Союза ССР 1923—1924 гг.» (см. Труды ЦСУ СССР, т. XXIX, М., 1926).— *Прим. перев.*

3. Найти неприводимые подмножества и соответственно переупорядочить следующую матрицу обмена

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^3/_4 & 0 & {}^1/_3 \\ {}^2/_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & {}^1/_3 \\ 0 & 1 & 0 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_3 \\ {}^1/_3 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти все равновесные векторы в условиях написанной выше матрицы.

Ответ: $y=(3\alpha,\ 3\beta,\ 6\alpha,\ 4\beta,\ 4\alpha,\ 0)$.

5. Пусть в упражнении 3 каждая страна первоначально имеет одну единицу денег. Найти устойчивое распределение.

Ответ: $({}^{30}/_{39},\ {}^{24}/_{21},\ {}^{60}/_{39},\ {}^{32}/_{21},\ {}^{40}/_{39},\ 0)$.

6. В числовом примере из § 2 найти устойчивое распределение дохода, если начальное распределение было равно единице для каждой страны.

Ответ: $({}^{315}/_{961},\ 0,\ {}^{72}/_{31},\ {}^{810}/_{961},\ {}^{40}/_{31},\ {}^{2100}/_{961},\ 0)$.

7. Как и в упражнении 6, найти устойчивое распределение дохода, если начальное распределение равно

$$(2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 3,\ 6,\ 4).$$

8. Пусть A — неприводимая матрица с равновесным вектором $\bar{y} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$, где $\Sigma\,\bar{\eta}_i = 1$. Показать, что матрица A устойчива в том и только том случае, когда

$$A^k \to \bar{A} = (\bar{\alpha}_{ij}), \quad \text{где} \quad \bar{\alpha}_{ij} = \bar{\eta}_i.$$

9. Если $A^k y \to \bar{y}$ для некоторого полуположительного вектора y, то $\bar{y}$ — равновесный вектор. Доказать.

10. Показать, что периодическая матрица не может быть устойчивой.

11. Показать, что если $\alpha_{ij}^{(p)} > 0$, то существует такая последовательность индексов $i = i_1, i_2, \ldots, i_r = j$, что

$$\alpha_{i_k i_{k+1}} > 0 \quad \text{для } k = 1, \ldots, r-1.$$

12. Доказать утверждение, обратное лемме 8.4. Если для любых i и j существует такое k, что $\alpha_{ij}^{(k)} > 0$, то матрица A неприводима.

13. Пусть

$$A \text{ — неотрицательная матрица,} \tag{1}$$

$$\sum_i a_{ij} < 1 \quad \text{для всех } j. \tag{2}$$

Доказать, что $A^k \to 0$.

Указание: показать, что $|Ax| \leqq \gamma\, |x|$ для $0 < \gamma < 1$.

14. Если $A^k \to 0$, то матрица $(I - A)$ невырожденная. Доказать.

15. Доказать, что для некоторого целого k выполняется неравенство $A^k > 0$, если матрица A неприводима и устойчива.

16. Пусть матрица обмена A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать периодичность матрицы A и найти ее период.

17. Показать, что неприводимая матрица обмена имеет период p в том и только том случае, когда матрица A^p вполне приводима и имеет p неприводимых подмножеств.

18. Показать, что неприводимая матрица обмена устойчива в том и только том случае, когда A^k неприводима для всех k.

19. Пусть матрица A приводима. Показать, что матрица A «устойчива» в том и только том случае, если все ее непри-

водимые подматрицы устойчивы, но предельное значение $A^k y_0$ зависит от начального вектора y_0.

20. Почему числа π_j, определяемые соотношениями (2) в теореме 8.5, положительны?

21. Пусть в числовом примере из § 6 начальные доходы суть $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 4$. Показать, что равновесные цены даются вектором $p = {}^9/_{29}\ (12,\ 9,\ 8)$, и найти соответствующие равновесные ассортиментные наборы.

22. Построить пример, для которого единственность равновесных ассортиментных наборов не имеет места.

23. Предположим, что в модели с двумя потребителями и двумя продуктами для первого потребителя оба продукта равноценны. Показать, что независимо от оценок второго потребителя равновесные цены будут определяться вектором $(^1/_2,\ ^1/_2)$, если оба потребителя имеют вначале доход, равный $^1/_2$.

24. Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & 1-\alpha_1 \\ \alpha_2, & 1-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

—матрица субъективных полезностей в модели с двумя потребителями и двумя продуктами (заметим, что самая общая 2×2-матрица обмена может быть записана в таком виде подходящим умножением строк), и предположим, что бюджет потребителей определяется вектором $(^1/_2,\ ^1/_2)$. Показать, что единственные возможные равновесные цены суть (1) $(\alpha_1,\ 1-\alpha_1)$, (2) $(\alpha_2,\ 1-\alpha_2)$, (3) $(^1/_2,\ ^1/_,)$. Показать, что если $\alpha_2 \geqq \alpha_1 \geqq {}^1/_2$, то равновесные цены имеют вид (1); если $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq {}^1/_2$, то равновесные цены имеют вид (2); если, наконец, $\alpha_1 \geqq {}^1/_2 \geqq \alpha_2$ или $\alpha_2 \geqq {}^1/_2 \geqq \alpha_1$, то равновесные цены имеют вид (3). Найти равновесные ассортиментные наборы в каждом из этих случаев.

Решить следующий ниже пример, не пытаясь использовать теорему существования, но полагаясь лишь на догадки, пробы и ошибки.

25. Решить равновесную задачу с 2×2-матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

если бюджеты потребителей суть (а) $\beta_1 = {}^1/_3$, $\beta_2 = {}^2/_3$, (б) $\beta_1 = {}^2/_3$, $\beta_2 = {}^1/_3$.

26. Рассмотрим четырех потребителей с равными доходами. Найти равновесные цены двух продуктов, если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Рассмотрим пять продуктов и двух потребителей с равными бюджетами. Матрица субъективных полезностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти равновесные цены.

ГЛАВА IX

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Мы уделили уже достаточно места анализу моделей производства в связи с задачами линейного программирования. При этом нас интересовали вопросы максимизации доходов, минимизации цен и аналогичные проблемы.

В этой главе мы рассмотрим вопросы, связанные с моделями производства, не сводящимися к простой оптимизации. В отличие от предыдущего, вместо того, чтобы заранее описывать изучаемый материал с содержательной точки зрения, мы перейдем непосредственно к интересующим нас математическим вопросам.

§ 1. Простая линейная модель производства

Предварительно читателю следует освежить в памяти определение *линейной модели производства.* Напомним, что если в такой модели участвуют n продуктов $G_1, \ldots, G_n$ и m технологических процессов $P_1, \ldots, P_m$, то эта модель полностью описывается производственной матрицей $A = (\alpha_{ij})$, где α_{ij} — количество продукта G_j, потребленное или произведенное технологическим процессом P_i в зависимости от того, отрицательно α_{ij} или положительно.

Сказанное является описанием *линейной модели производства. Простая линейная модель производства*, естественно, будет частным случаем общей модели. Этот частный случай выделяется следующими дополнительными предположениями:

Условие I. *Каждый технологический процесс P_i производит только один продукт G_j.*

Говоря попросту, мы предполагаем, что в процессе не допускается совместного производства нескольких продуктов и что в каждом технологическом процессе нет побочных продуктов. В терминах матрицы A это предположение означает, что в каждой строке матрицы A имеется только один положительный элемент, а остальные элементы этой строки либо равны нулю, либо отрицательны.

Условие II. *Каждый продукт G_j производится одним и только одним технологическим процессом P_i.*

Это означает, в частности, что число продуктов равно числу технологических процессов, и поэтому естественно технологические процессы и соответствующие им продукты отмечать одним и тем же индексом. Мы будем обозначать через P_i технологический процесс, в котором производится продукт G_i. Таким образом, производственная матрица для простой модели оказывается квадратной.

Учитывая условия I и II, удобно несколько изменить определение матрицы A: будем обозначать через α_{ij} *то количество продукта G_j, которое необходимо израсходовать для получения единицы продукта G_i*. Так как для потребления теперь уже будут использоваться положительные, а не отрицательные числа, то естественно матрицу A называть *матрицей потребления* рассматриваемой модели. Таким образом, i-я строка a_i матрицы A характеризует затраты различных продуктов, необходимых для производства единицы продукта G_i. Мы не исключаем возможности того, что и α_{ii} положительно; действительно, может оказаться необходимым израсходовать некоторое количество стали, чтобы произвести еще больше стали. Следовательно, в качестве *матрицы потребления* A простой линейной модели может быть произвольная неотрицательная квадратная матрица.

Займемся сначала вопросом допустимости. Предположим, что в модели с матрицей A требуется произвести набор продуктов $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, т. е. произвести η_1 единиц продукта G_1, η_2 единиц продукта G_2 и т. д. Существует ли производственная программа, при которой эти требования смогут быть выполнены? Далее, если технологический процесс P_i используется с *интенсивностью* ξ_i (мы пользуемся терминологией из гл. I), то будет произведено ξ_i единиц продукта G_i. В то же время технологический процесс P_i будет потреблять вектор $\xi_i a_i$, а количество продукта, потребленное всей моделью, будет, очевидно, равно

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i = xA,$$

где $x = (\xi_i)$ есть вектор интенсивностей использования каждого технологического процесса. Тогда *чистая продукция*, т. е. продукция минус потребление, дается вектором

$$x - xA = x(I - A),$$

и вопрос о допустимости оказывается весьма простым: существует ли для заданного $y \geqq 0$ неотрицательное решение уравнения

$$x(I - A) = y. \tag{1}$$

Понятно, что уравнение (1) не обязано иметь решение. Возьмем, например,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и, конечно, неравенство

$$x(I - A) \geqslant 0$$

неотрицательных решений не имеет. Мы могли бы прийти к этому же заключению и из такого простого соображения. Если берется 2 единицы продукта G_1 для изготовления 1 единицы продукта G_2, а также 2 единицы продукта G_2 для производства 1 единицы продукта G_1, то невозможно одновременно произвести некоторое положительное количество как продукта G_1, так и продукта G_2. Поэтому если мы хотим, чтобы наша технология была для всех полезной, то нужно потребовать существования хотя бы одного положительного вектора выпуска продукции. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Простая линейная модель с матрицей потребления A будет называться *продуктивной*, если существует такой неотрицательный вектор $\bar{x}$, что $\bar{x} > \bar{x}A$. В этом случае мы будем также говорить, что сама матрица A является *продуктивной*.

Основное свойство простых моделей производства состоит в следующем. Если модель является продуктивной, то для нее существует произвольный положительный вектор выпуска продукции y, т. е. имеет место следующая

Теорема 9.1. *Если матрица A продуктивная, то для любого $y \geqq \mathbf{0}$ уравнение*

$$x(I - A) = y$$

имеет единственное неотрицательное решение.

Эта теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 9.1. *Если матрица A продуктивная и $x \geqq xA$, то $x \geqq \mathbf{0}$.*

Доказательство. По определению существует такой вектор $\bar{x} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n) \geqq \mathbf{0}$, что $\bar{x} > \bar{x}A$. Это означает, что $\bar{\xi}_j > \bar{x}a^j$, откуда $\bar{\xi}_j > 0$ и, следовательно, $\bar{x} > \mathbf{0}$. Предположим теперь, что вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет неравенству $x \geqq xA$, но условие $x \geqq \mathbf{0}$ не выполняется. Тогда некоторая компонента вектора x должна быть отрицательной. Пусть $\theta = \max[-\xi_i/\bar{\xi}_i]$ и для определенности $\theta = -\xi_1/\bar{\xi}_1$. Тогда $\theta > 0$ и

$$x' = x + \theta\bar{x} = (\xi_1', \ldots, \xi_n') \geqq \mathbf{0},$$

причем $\xi_1' = 0$. Но, с другой стороны,

$$x' = x + \theta\bar{x} > xA + \theta\bar{x}A = x'A \geqq \mathbf{0},$$

откуда мы получаем неравенство $\xi_1' > x'a^1 \geqq 0$, что противоречит полученному ранее.

Следствие. *Если матрица A продуктивная, то матрица $I - A$ будет невырожденной (т. е. ее ранг равен n).*

Доказательство. Если $x(I - A) = \mathbf{0}$, то и $-x(I - A) = \mathbf{0}$. Но по лемме это означает, что $x \geqq \mathbf{0}$ и $-x \geqq \mathbf{0}$, следовательно, $x = \mathbf{0}$.

Доказательство теоремы. Поскольку матрица $I - A$ — невырожденная, существует единственный вектор x, такой, что $x(I - A) = y$, и так как $y \geqq \mathbf{0}$, то отсюда в силу леммы следует, что $x \geqq \mathbf{0}$.

Следствие. *Матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда матрица $(I - A)^{-1}$ неотрицательна.*

Доказательство. В матрице $(I - A)^{-1}$ i-я строка, являющаяся вектором x_i, удовлетворяет равенству $x_i(I - A) = u_i$. Мы только что убедились в том, что вектор x_i должен быть неотрицательным. Наоборот, если матрица $(I - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, то вектор $x = u(I - A)^{-1}$ неотрицателен; следовательно, $x(I - A) = u > \mathbf{0}$ и матрица A оказывается продуктивной (через u снова обозначен единичный вектор). Это следствие дает простой способ распознавания, является ли матрица продуктивной. Для этого достаточно вычислить обратную матрицу $(I - A)^{-1}$.

Обратим внимание на тот факт, что при доказательстве теоремы 9.1 весьма существенным было отсутствие совместного производства, обеспечиваемое предположением 1. Если бы, например, производственная матрица имела вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где положительные числа обозначают выпуск продукции, то произвести вектор (1,0) было бы невозможно.

Читатель может возразить против такого примера, поскольку здесь первый технологический процесс дает нам что-то из ничего. Более реалистический опровергающий пример приведен в упражнениях (см. упр. 4).

Могло бы показаться, что ради большей общности следовало бы рассматривать не только продуктивные матрицы, но также и *полупродуктивные матрицы*, считая полупродуктивной такую матрицу A, что $x \geqq xA$ для некоторого $x \geqq \mathbf{0}$. Оказывается, однако, что этот случай можно сразу же свести к предыдущему, что мы сейчас и покажем.

Определение. Пусть матрица A полупродуктивная. Мы называем технологический процесс *продуктивным*, если существует вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq \mathbf{0}$, для которого $x \geqq xA$ и $\xi_j > \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$. Соответствующий продукт G_j называется *производимым*. Остальные технологические процессы и продукты мы будем называть соответственно *непродуктивными* и *непроизводимыми*.

Теорема 9.2. *Если технологический процесс P_i продуктивный, а P_j непродуктивный, то $\alpha_{ij} = 0$.*

По терминологии предыдущей главы индексы j соответствуют технологическим процессам, образующим независимое подмножество. На экономическом языке это означает, что непроизводимый продукт не используется ни в каком продуктивном технологическом процессе. Следовательно, производственную матрицу мы можем привести к виду

$$\begin{array}{r} \text{продуктивные процессы } \{ \\ \text{непродуктивные процессы } \{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \mathbf{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A_2} \end{array} \right),$$

где A_1 — квадратная матрица.

Доказательство. Поскольку P_i — продуктивный технологический процесс, существует такой вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq \mathbf{0}$, что

$$\xi_i > \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_{ki}, \quad \text{в частности,} \quad \xi_i > 0, \tag{1}$$

$$\xi_r \geqq \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_{kr} \quad \text{для всех } r. \tag{2}$$

Так как P_j — непродуктивный технологический процесс, мы должны иметь

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_{kj}. \tag{3}$$

Далее, при достаточно малом и положительном ε мы можем, не нарушая неравенства (1), заменить ξ_i на $\xi_i - \varepsilon$. При этом неравенства (2) могут только усилиться; если $\alpha_{ij} > 0$, то из (3) мы получаем неравенство

$$\xi_j > \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_{kj} - \varepsilon \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Но это означает, что P_j — продуктивный технологический процесс, что противоречит условию теоремы.

Экономическое содержание этой теоремы состоит в том, что, используя непродуктивные технологические процессы, нельзя ничего получить. Именно, обозначим через $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ такой вектор интенсивностей, что $x \geqq xA$, или $\xi_j \geqq \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_{ij}$. Если мы для всех непродуктивных i

положим $\xi_i = 0$, то для продуктивных технических процессов P_j написанные выше неравенства можно усилить, в то время как для непродуктивных технологических процессов P_i мы будем иметь $0 = 0$. Таким образом, этот новый вектор интенсивностей оказывается не хуже исходного, а возможно даже и лучше.

До сих пор наши рассуждения касались лишь технологии. Введя цены, обратимся теперь к экономическому рассмотрению. Как обычно, через $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ мы обозначаем вектор цен, где π_i — цена единицы продукта G_i. Тогда *прибыль* от технологического процесса P_i дается выражением $\pi_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\pi_j$, а *вектор прибыли* $q = (I - A)\,p$. Напомним, что в линейных моделях обмена предыдущей главы невозможно было сделать прибыльными *все* производственные способы одновременно. Здесь, как мы сейчас увидим, ситуация совершенно иная.

Теорема 9.3. *Если матрица A продуктивная, то для любого неотрицательного вектора (прибыли) q существует единственный неотрицательный вектор (цен) p, для которого*

$$q = (I - A)p.$$

Доказательство. Так как матрица $I - A$ невырожденная, существует единственный вектор p такой, что $q = (I - A)p$. Нам остается показать, что этот вектор неотрицателен. В силу теоремы 9.1 существует такой вектор $x_i \geqq \mathbf{0}$, что $x_i(I - A) = u_i$. Следовательно,

$$0 \leqq x_i q = x_i (I - A)\, p = u_i p$$

и теорема доказана, поскольку все компоненты вектора p неотрицательны.

Эта теорема показывает, что при подходящем выборе цен прибыль различных технологических процессов может оказаться любым наперед заданным неотрицательным числом.

§ 2. Одно динамическое свойство простой модели

Предположим теперь, что мы имеем дело с простой моделью, матрица которой A, и внешние потребители затребовали множество продуктов, определяемое неотрицательным вектором y_0. Если мы будем считать, что наша модель используется центральным планирующим органом, то трудностей при удовлетворении спроса y_0 в условиях, когда матрица A продуктивная, не возникает. Планирующий орган просто решает уравнение

$$x(I-A)=y_0,$$

и если $\bar{x}=(\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_n)$ является его решением, то каждому технологическому процессу P_i приписывается интенсивность $\bar{\xi}_i$ его использования.

Однако мы можем представить себе ситуацию, в которой все технологические процессы P_i функционируют независимо как от центрального планирующего органа, так и друг от друга. В этом случае мы также можем указать метод, с помощью которого возможно, хотя бы приближенно, решить задачу о производстве. Этот метод состоит в следующем: обозначим через $y_0=(\eta_{10},\ \eta_{20},\ \ldots,\ \eta_{n0})$ начальный спрос внешних потребителей. Тогда, в частности, существует некоторый спрос объема η_{10} единиц и на продукт G_1. Далее, если это количество производится технологическим процессом P_1, то потребление в этом процессе определяется вектором $\eta_{10}a_1$. Таким образом, получив заказ на η_{10} единиц продукта G_1, лицо, осуществляющее технологический процесс P_1, должно будет в свою очередь разместить заказ на другие продукты в количестве $\eta_{10}a_1$. Аналогично все лица, осуществляющие технологические процессы P_i, разместят заказы, определяемые вектором $\eta_{10}a_i$. Таким образом, для того чтобы удовлетворить начальный спрос, задаваемый вектором y_0, лица, осуществляющие технологические процессы, должны разместить заказы, определяемые вектором

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}\eta_{i0}a_i=y_0A.$$

Теперь для того чтобы выполнить заказ $y_1=(\eta_{i1})$, лица, осуществляющие технологические процессы, должны снова разместить заказ, определяемый вектором

$$y_2=\sum\eta_{i1}a_i=y_1A=y_0A^2.$$

Ясно, что такой процесс перераспределения заказов будет продолжаться бесконечно. Общее количество заказываемых продуктов будет суммой всех заказов. Таким образом, мы пришли к рассмотрению бесконечного ряда

$$y_0 + y_0 A + \ldots + y_0 A^n + \ldots .$$

Если нам посчастливится, то этот ряд окажется сходящимся и укажет нам истинные количества продуктов, которые следует произвести технологическим процессам P_i для того, чтобы в рассматриваемой модели удовлетворить начальный спрос y_0.

Конечно, не всякая бесконечная последовательность может на самом деле появиться, и проведенное выше описание не следует понимать буквально. С другой стороны, можно представить себе некоторый процесс, подобный описанному, который продолжается в течение длительного периода времени.

Докажем в связи с этим следующую теорему.

Теорема 9.4. *Пусть y — произвольный вектор, а $x_n = y(I + A + \ldots + A^n)$. Тогда если матрица A продуктивная, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n (I - A) = y.$$

Эта теорема показывает, что если процесс перезаказывания мы будем повторять достаточно много раз, то мы сможем сколь угодно близко подойти к удовлетворению спроса y. Доказательство можно получить без труда на основе следующей леммы.

Лемма 9.2. Если матрица A продуктивная, то

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \mathbf{0}\ ^{1)}.$$

Доказательство. Поскольку матрица A продуктивная, существует такое $x > \mathbf{0}$, что $xA < x$. Но тогда существует и такое $\lambda (0 < \lambda < 1)$, что

$$xA < \lambda x. \qquad (1)$$

Из неравенства (1) мы по индукции получаем, что

$$xA^n < \lambda^n x.$$

[1]) Сравни с упражнением 6. — *Прим. перев.*

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} xA^n = 0$. Но поскольку $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, мы имеем

$$xA^n = \sum \xi_i (u_i A^n) \to 0.$$

Так как все члены в этой сумме неотрицательны, то каждый из них должен стремиться к нулю; следовательно, $(u_i A^n)$ стремится к нулю для всех i. Тем самым к нулю стремится и A^n, что и требовалось.

Доказательство теоремы. Достаточно заметить, что

$$x_n (I - A) = y (I + A + \ldots + A^n)(I - A) = y - yA^{n+1},$$

и, поскольку yA^{n+1} стремится к нулю, теорема доказана.

§ 3. Модель Леонтьева

Одна из неестественных черт простой модели, рассмотренной в предыдущем параграфе, состоит в следующем: если модель имеет возможность произвести любой положительный вектор продукции, то она может произвести любое сколь угодно большое количество любых продуктов и притом в любой пропорции. В этом нет ничего плохого, если модели предоставлено достаточно много времени. Однако в реальных производственных задачах фактор времени, вообще говоря, существен. Если потребители требуют некоторый вектор продукции y, то они надеются получить эти продукты не просто в будущем, а в течение некоторого вполне определенного времени, скажем, в течение года.

Для того чтобы перейти к более реальным моделям, в которых время уже учитывается, нет необходимости менять что-либо в нашей математической модели, а достаточно изменить лишь нашу интерпретацию рассматриваемых величин. Число α_{ij} будет указывать количество продукта G_j, необходимого, скажем, *в год*, для *ежегодного* выпуска одной единицы продукта G_i. При такой интерпретации, очевидно, уже нет причин для появления возможности произвести сколь угодно большие количества в ограниченное время. Почему? Ввиду ограниченности *мощности*. Не имеет значения, каким количеством стали мы располагаем для производства, скажем, автомобилей, а существенно только наличие станков, оборудования и особенно *труда* для производства определенного конечного числа автомобилей в год.

Изложенные выше идеи легко поддаются формализации. Такие продукты как оборудование заводов и труд характеризуются следующими двумя свойствами:

1. Они не могут быть воспроизведены ни в каком технологическом способе нашей модели.

2. Они имеются в ограниченном количестве.

Продукты, удовлетворяющие обоим условиям, называются *производственными факторами* (иногда они называются также *первичными продуктами*).

Теперь мы подготовлены для того, чтобы описать *простую модель Леонтьева.*

Определение. *Простая модель Леонтьева* является простой моделью производства, в которой существует единственный производственный фактор G_0, называемый *трудом.*

Мы будем предполагать, что затраты труда необходимы во всех технологических процессах, т. е. коэффициенты α_{i0} всегда положительны. Мы выберем единицу труда так, чтобы общее количество имеющегося труда было равно единице.

Первый вопрос, касающийся модели Леонтьева, на который можно быстро ответить,— это вопрос о ценах. В случае простой модели без производственных факторов прибыль, как мы видели, может быть любым числом. Для модели Леонтьева, где труд фигурирует в качестве затрачиваемого производственного фактора, естественно предположить, что прибыль каждого технологического процесса с учетом стоимости труда будет равна нулю. Другими словами, вся прибыль, создаваемая в результате производства, возвращается труду в виде заработной платы.

Теорема 9.5. *Существует единственный (с точностью до положительного множителя) вектор цен p, при котором прибыль каждого технологического процесса равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что цена труда π_0 равна единице. Тогда условие, что прибыль каждого технологического процесса равна нулю, примет вид

$$\alpha_{i0}+\sum_j \pi_j\alpha_{ij}=\pi_i \qquad \text{для всех} \quad i>0$$

или

$$(I-A)\,p=a^0, \tag{1}$$

где $a^0=(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{n0})$ и в матрице A отсутствует столбец a^0. В силу теоремы 9.3 уравнение (1) имеет единственное неотрицательное решение и, поскольку вектор a^0 положителен, вектор p также должен быть положительным.

До сих пор условие II в явном виде нигде нами не использовалось. Это условие состояло в том, что существует *только один* технологический процесс, производящий каждый данный продукт. В реальных условиях для производства данного продукта может существовать ряд альтернативных возможностей. Определим теперь *общую* (в отличие от простой) *модель Леонтьева*, которая будет удовлетворять всем условиям, наложенным на простую, кроме того, что продукт G_j не может производиться более чем в одном технологическом процессе. Тогда в общей модели число технологических процессов будет превосходить число продуктов. Обозначим через S_j множество всех технологических процессов, в которых производится продукт G_j или, точнее, множество всех таких индексов i, что технологический процесс P_i производит продукт G_j. Тогда, если задан вектор интенсивностей $x=(\xi_i)$, определяющий различные степени использования технологических процессов и такой, что использование труда не превышает имеющихся возможностей, то соответствующий вектор выпуска *чистой продукции* $y=(\eta_j)$ определяется следующим образом:

$$\eta_j=\sum_{i\in S_j}\xi_i-\sum_{i=1}^{m}\xi_i\alpha_{ij}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{m}\xi_i\alpha_{i0}\leqq 1.$$

Множество Y, состоящее из всех таких векторов, будем называть *пространством выпуска продукции*.

Естественно было бы ожидать, что анализ общей модели позволит существенно расширить круг рассматриваемых вопросов по сравнению с простой моделью. Несколько неожиданным оказывается, однако, то, что почти все вопросы относительно общих моделей можно свести к соответствующим вопросам относительно простых подмоделей, как показывает следующая интересная теорема.

Теорема 9.6 (теорема о замещении). *Если общая модель Леонтьева является продуктивной, то существует такое множество из n технологических процессов $P_{i_1}, \ldots, P_{i_n}$ $(i_j \in S_j)$, что простая модель Леонтьева, составленная из этих технологических процессов, имеет то же пространство выпуска продукции, что и исходная модель.*

Существует несколько доказательств этой теоремы. Самое поучительное из них основано на теореме двойственности из линейного программирования.

Поэтому мы несколько уклонимся от темы, чтобы снова рассмотреть каноническую задачу о нахождении неотрицательного вектора x, который

$$\text{минимизирует } xc \tag{1}$$

при условии

$$xA = b. \tag{2}$$

Множество линейно независимых строк a_i матрицы A назовем *оптимальным* (*допустимым*) *базисом*, если существует единственный оптимальный (допустимый) вектор x, зависящий от этих строк.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 9.3. *Обозначим через $\mathscr{B}$ множество строк a_i матрицы A, которое является оптимальным базисом для сформулированной выше задачи* (1), (2), *и рассмотрим новую задачу*:

$$\text{минимизировать } xc \tag{1'}$$

при условии

$$xA = b'. \tag{2'}$$

Тогда, если множество $\mathscr{B}$ оказывается допустимым базисом для задачи (1′) *и* (2′), *то оно оказывается также и оптимальным базисом для этой задачи.*

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — оптимальный вектор в задаче (1), (2) и связан с базисом $\mathscr{B}$, а $\bar{y}$ — решение двойственной задачи. Тогда из теоремы равновесия 3.2 (стр. 118) вытекает, что

$$\text{если } a_i\bar{y} < \gamma_i, \quad \text{то } \bar{\xi}_i = 0. \tag{3}$$

Предположим теперь, что x' — допустимый вектор в задаче (1'), (2') и связан с базисом $\mathscr{B}$. Аналогично мы имеем:

$$\text{если } a_i\bar{y} < \gamma_i, \quad \text{то} \quad \xi_i' = 0, \tag{3'}$$

так как по предположению $\xi_i' = 0$ всякий раз, когда $\bar{\xi}_i = 0$. Но это и означает, что x' и $\bar{y}$ являются решениями исходной и двойственной задач (1'), (2') (снова в силу теоремы 3.2) и, в частности, что x' — оптимальный вектор. Это и требовалось доказать.

Доказательство теоремы о замещении. Обозначим через $\bar{y}$ положительный вектор в пространстве выпуска продукции Y и рассмотрим каноническую задачу о минимизации количества используемого труда для производства вектора $\bar{y}$, т. е.

$$xa^0 = \text{minimum}.$$

Обозначим теперь через $\bar{x}$ базисный оптимальный вектор для этой задачи. Он зависит не более, чем от n строк $i_1, i_2, \ldots, i_n$ производственной матрицы. Поскольку вектор $\bar{y}$ положительный, вектор $\bar{x}$ позволяет произвести все продукты и, следовательно, $\bar{\xi}_i$ должно быть положительным хотя бы для одного индекса i в каждом из множеств S_j. Обозначим через $\bar{A}$ матрицу со строками a_{i_j}; нам останется показать, что матрица $\bar{A}$ имеет в качестве пространства выпуска продукции пространство Y. Пусть y' — любой другой вектор из пространства Y. Мы знаем, что матрица $\bar{A}$ является продуктивной, поскольку она производит положительный вектор $\bar{y}$. Следовательно, в силу теоремы 9.1 существует такой вектор x', что

$$x'(I - \bar{A}) = y',$$

но это и означает, что базис, определяемый строками a_{i_j}, является допустимым для новой задачи линейного программирования, где вектором, который следует произвести, является вектор y', а не $\bar{y}$. Поэтому на основании предыдущей леммы вектор x' является также и оптимальным, т. е.

$$x' \text{ минимизирует } xa^0$$

по всем допустимым векторам x для исходной модели. Поскольку $y' \in Y$, существует некоторый вектор интенсивностей x, который производит y' и для которого $xa^0 \leqq 1$ (использование труда не превышает имеющихся возможностей). Отсюда следует, что

$$x'a^0 \leqq 1,$$

и поэтому y' производится с матрицей $\overline{A}$ и одной единицей труда. Доказательство завершено.

Следует сделать несколько замечаний относительно полученного выше результата.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что фактически мы доказали несколько больше, чем утверждается в теореме. Именно, оказывается, что мы можем не только произвести все, что нужно, с помощью простой модели, которую смогли построить из общей, но мы можем также произвести это с помощью простой модели экономично, в том смысле, что количество труда, необходимого для вектора выпуска продуктов в простой модели, не превосходит соответствующего количества в общей модели. Таким образом, в «леонтьевской экономике» нельзя ничего выиграть, используя для производства одного и того же продукта несколько технологических процессов.

З а м е ч а н и е 2. Как прямая, так и двойственная задачи линейного программирования, использованные в доказательстве теоремы замещения, допускают естественную экономическую интерпретацию. В прямой задаче требуется указать путь производства заданного набора продуктов с минимальными затратами труда. В двойственной задаче требуется указать множество цен, которые будут максимизировать суммарную стоимость этого набора продуктов; при этом удовлетворяется обычное условие: не существует технологического процесса с положительной прибылью.

З а м е ч а н и е 3. Как показывает следующий пример, справедливость теоремы о замещении существенно зависит от предположения о существовании только одного производственного фактора. Рассмотрим модель, в которой участвуют два производственных фактора, скажем, *квалифицированный труд* G_0 и *неквалифицированный труд* G_0', с помощью которых производится два продукта G_1 и G_2. Пусть существует только один технологический процесс P_1, производящий продукт G_1, затрачивая при этом одну единицу квалифицированного труда, и два технологических процесса P_2 и P_2' для производства продукта G_2. Технологический процесс P_2 требует затраты одной единицы квалифицированного труда; технологический процесс P_2' требует затрат двух единиц неквалифицированного труда. Предоставляем читателю самому показать, что в этом примере пространство выпуска становится меньше, если исключить либо технологический процесс P_2, либо P_2' (см. упр. 10).

Заметим, наконец, что путь нахождения простой подмодели со свойствами, указанными в теореме замещения, состоит в решении задачи линейного программирования, заключающейся в минимизации затрат труда. В этом месте читателю будет полезно решить численный пример из упражнения 9.

§ 4. Общая линейная модель производства. Экстремальные точки

Мы приступаем теперь к рассмотрению наиболее общей линейной модели производства, в которой мы не накладываем ограничений на природу производственных технологических процессов. В каждом технологическом процессе могут как потребляться, так и производиться любые количества различных продуктов; не налагается ограничений и на число имеющихся производственных факторов. При фактическом описании модели удобнее не проводить различия между производственными факторами и конечными продуктами.

Рассмотрим обычную линейную модель производства. По причинам, которые вскоре выяснятся, будем обозначать *производственную матрицу* этой модели через B. Строки этой матрицы соответствуют технологическим процессам, а столбцы — продуктам. При заданном неотрицательном *векторе затрат* x мы получаем *вектор выпуска* y следующим образом:

$$y = xB. \tag{1}$$

Далее, ввиду существования производственных факторов могут оказаться допустимыми не все неотрицательные векторы. Например, в случае модели Леонтьева, как мы видели, должно выполняться условие

$$xa^0 \leqq 1.$$

Обобщение на случай более одного производственного фактора очевидно. Нам заданы *матрица затрат* A и *вектор ресурсов* b, и мы требуем выполнения неравенства

$$xA \leqq b. \tag{2}$$

Матрица A имеет те же m строк. Однако число ее столбцов будет соответствовать лишь тем продуктам, которые имеются в ограниченных количествах.

Описываемая модель полностью совпадает с моделью, рассмотренной в § 5, гл. III. Неравенство (2) соответствует тому неравенству, которое мы ранее называли ограничением производственной мощности. Завершив описание интересующей нас модели, обратимся к изучению некоторых ее свойств.

Определение. Множество неотрицательных решений неравенства (2) будем называть *пространством затрат* модели и обозначать через X.

Пространство выпуска модели Y состоит из всех векторов y, которые удовлетворяют уравнению $y = xB$, где $x \in X$ (мы не требуем неотрицательности y).

Напомним коротко терминологию из гл. II. Пространство затрат, являющееся множеством всех решений некоторой системы неравенств, называлось там *множеством решений* (см. упр. 36, гл. II). Из упражнения 40, гл. II следует, что пространство выпуска Y также является множеством решений. Это означает, что существуют такая матрица C с n строками и такой вектор c, что множество Y совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$yC \leqq c. \tag{3}$$

Именно эту характеристику пространства выпуска Y мы и будем использовать в дальнейшем.

Теперь мы подошли к основному экономическому понятию этой главы.

Определение. Вектор $y_0 \in Y$ называется *экстремальным*, если не существует такого вектора $y' \in Y$, что $y' \gg y_0$.

В словесной формулировке вектор y_0 является экстремальным, если невозможно увеличить выпуск какого-либо продукта без одновременного уменьшения выпуска другого продукта.

Основной результат, касающийся экстремальных точек, связывает их с ценами и затратами. С экономической точки зрения представляется интуитивно очевидным, что всякий вектор выпуска, который максимизирует доход при некотором наборе цен, будет экстремальным. Оказывается, что и, наоборот, каждому экстремальному вектору y_0 соответствует множество цен, для которых вектор y_0 максимизирует доход.

Теорема 9.7. *Если множество Y является пространством выпуска общей линейной модели, то для того чтобы вектор $y_0 \in Y$ был экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал положительный вектор цен p, удовлетворяющий неравенству $y_0 p \geqq yp$ для всех $y \in Y$.*

Доказательство. Если вектор p задан и $y_0 p \geqq yp$ для всех $y \in Y$, то вектор y_0 является экстремальным, так как в противном случае существовал бы такой вектор $y' \in Y$, что $y' \gg y_0$ и, следовательно, $y'p > y_0 p$. Но это противоречит предположенному.

Обратно, предположим, что вектор y_0 экстремальный. Из неравенства (3) мы имеем

$$y_0 c^j \leqq \gamma_j \qquad \text{для всех } j.$$

Разобьем теперь все индексы j на два множества: S и S', положив

$$j \in S, \qquad \text{если } y_0 c^j = \gamma_j$$
$$j \in S', \qquad \text{если } y_0 c^j < \gamma_j.$$

Множество S не может оказаться пустым, так как в противном случае мы имели бы неравенство $y_0 C < c$ и, следовательно, для достаточно малого положительного ε выполнялось бы неравенство

$$(y_0 + \varepsilon v)\, C \leqq c.$$

В этом случае вектор $y_0 + \varepsilon v$ принадлежал бы множеству Y, что противоречит экстремальности вектора y_0.

Покажем, что неравенства

$$zc^j \leqq 0 \qquad \text{для всех } j \in S \tag{4}$$

не имеют полуположительного решения, так как если бы такое решение z существовало бы, то для любого положительного числа ε мы имели бы неравенство

$$(y_0 + \varepsilon z)\, c^j \leqq \gamma_j \quad \text{для } j \in S,$$

а для достаточно малого ε было бы

$$(y_0 + \varepsilon z)\, c^j \leqq \gamma_j \qquad \text{при } j \in S'.$$

Это, однако, означало бы, что $y_0 + \varepsilon z \in Y$, что снова противоречит экстремальности вектора y_0.

Поскольку неравенства (4) не имеют полуположительного решения, в силу теоремы 2.1 (стр. 30) существуют такие числа λ_j $(j \in S)$, что

$$\sum_{j \in S} \lambda_j c^j > 0.$$

Положив $p = \sum\limits_{j \in S} \lambda_j c^j$, отметим, что для любого $y \in Y$ выполняется неравенство

$$yp = \sum_{j \in S} \lambda_j (yc^j) \leqq \sum_{S} \lambda_j \gamma_j = \sum_{S} \lambda_j (y_0 c^j) = y_0 p,$$

т. е. вектор y_0 максимизирует доход при ценах p, а это и завершает доказательство.

Доказанная теорема оправдывает некоторые положения классической теории цен. В этой теории утверждается, что любой эффективный способ производства может быть достигнут за счет подобранных соответствующим образом цен. Этот набор цен должен максимизировать доход от этого способа производства.

Эта теорема имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть вектор y_0 является экстремальным и $y \in Y$. Множество всех векторов y', для которых $y' \geqslant y_0$, очевидно, заполняет некоторый выпуклый конус C с вершиной в точке y_0. Из экстремальности вектора y_0 следует, что конус C и множество Y не пересекаются (см. рис. 28). Из геометрических соображений следует, что существует проходящая через точку y_0 гиперплоскость H, которая отделяет конус C от множества Y. Нормаль к этой гиперплоскости, лежащая по ту же сторону, что и конус C, и дает нам требуемый вектор цен.

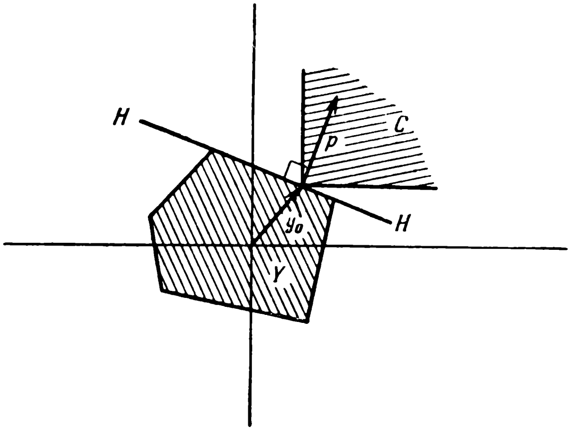


Рис. 28.

Отметим в заключение, что ни экстремальная точка, соответствующая заданному множеству цен, ни множество цен, соответствующих заданной экстремальной точке, не определяются, вообще говоря, единственным образом (см. упр. 11, 12, 13).

§ 5. Расширяющаяся модель Неймана

Предыдущий параграф был посвящен статической теории моделей производства. Рассмотрим теперь тот случай, когда выпуск продукции в модели изменяется во времени, а также возможность устойчивого расширения такой модели по отношению к ценам продуктов.

Как и в предыдущем параграфе, мы рассматриваем общую линейную модель, охватывающую n продуктов $G_1, \dots, G_n$ и m технологических процессов $P_1, \dots, P_m$. Теперь мы явно разграничим продукты, которые в технологическом процессе затрачиваются, и те, которые в нем выпускаются. Обозначим для этого через α_{ij} количество продукта G_j, затрачиваемого в технологическом процессе P_i, а через β_{ij} — количество продукта G_j, выпускаемого в нем. В соответствии с этим технологический процесс P_i характеризуется парой неотрицательных векторов, *вектором затрат* $a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ и *вектором выпуска* $b_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in})$. Матрицы $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ будем называть соответственно *матрицей затрат* и *матрицей выпуска*. Снова *вектор интенсивностей* x будет полуположительным вектором размерности m, а векторы затрат и выпуска равны, соответственно, xA и xB. В дальнейшем мы будем символически обозначать модель парой (A, B).

Модель, которую мы рассматриваем, предполагается *замкнутой*. Это означает, что не существует потоков продуктов, выходящих из модели или входящих в нее. Все продукты, затрачиваемые в модели, должны быть в ней заранее произведены и все выпускаемые за один цикл продукты вводятся обратно в модель уже как затраты на следующем цикле. Поэтому нас будет интересовать один тип самоподдерживающегося механизма, единственная цель которого состоит в увековечивании себя некоторым образом. Такая модель является в известном смысле приближением к реальной макроэкономике, в которой труд производит потребительские продукты и затем эти продукты потребляются потребителями, давая возможность или побуждая их работать более производительно. В результате мы получаем грубо циклический процесс, описываемый моделью.

Понятно, что для того, чтобы модель функционировала желательным образом, необходимо обеспечить возможность выбора вектора интенсивностей x так, чтобы производился каждый продукт, который потребляется. Условие, которое это гарантирует, состоит в следующем.

Условие I. *Для всех j выполняются неравенства* $b^j \geqslant \mathbf{0}$. Здесь утверждается лишь то, что всякий продукт выпускается хотя бы одним технологическим процессом.

Сделаем второе предположение, утверждающее, что невозможно из ничего сделать что-либо.

Условие II. *Для всех i выполняется неравенство* $a_i \geqslant \mathbf{0}$. Здесь говорится о том, что во всяком технологическом процессе хотя бы один продукт затрачивается.

Предположим теперь, что у нас имеется некоторый вектор интенсивностей x, для которого $xB \geqq \alpha xA$ при некотором $\alpha > 0$. В этом случае мы говорим, что *модель расширяется с темпом роста, не меньшим, чем* α. Введенная терминология соответствует обстоятельствам дела, ибо приведенное выше неравенство означает, что $xb^j \geqq \alpha xa^j$; таким образом, выпуск каждого продукта G_j по крайней мере в α раз больше, чем его затраты. Заметим, что сказанное не исключает возможности обращения в нуль как затрат, так и выпуска того или иного продукта.

Определение. Для модели (A, B) *задача технологического роста* состоит в нахождении полуположительного вектора x и числа α, для которых выполняется условие

$$\alpha \text{ является максимальным;} \tag{1}$$

при этом должно выполняться неравенство

$$xB \geqq \alpha xA. \tag{2}$$

Если существует максимальное значение α, то оно называется *технологическим темпом роста*[1]) модели и обозначается через α_0. Соответствующий вектор интенсивностей x_0 будем называть *оптимальным*.

Теорема 9.8 (теорема существования). *Для модели, удовлетворяющей условиям* I *и* II, *число* α_0 *существует и положительно.*

Доказательство. Для каждого положительного числа α рассмотрим задачу нахождения неотрицательного решения x неравенства

$$x(B - \alpha A) \geqq \mathbf{0}. \tag{3}$$

Для достаточно малого α неравенство (3) имеет решение, поскольку при положительном x из предположения 1 следует, что вектор xB также положителен; следовательно, $xB \geqq \alpha xA$ для некоторого положительного числа α. С другой стороны, для достаточно большого α неравенство (3) не имеет решения. Это нетрудно доказать. Поскольку

[1]) Хотя мы всюду употребляем термин «рост», мы нигде не требуем, чтобы α было больше единицы. Таким образом, вся теория этих моделей справедлива и для «сокращающихся» моделей, хотя экономический интерес представляет именно случай $\alpha \geqq 1$.

в каждой строке матрицы A существует положительное число (условие II), мы можем выбрать α настолько большим, что сумма элементов в каждой строке матрицы $B - \alpha A$ будет отрицательной, т. е.

$$(B - \alpha A) v < \mathbf{0},$$

где v — единичный вектор из R^n и, следовательно, для любого $x \geq \mathbf{0}$ справедливо неравенство

$$x(B - \alpha A) v < 0.$$

Отсюда следует, что неравенство (3) не имеет решений.

Обозначим через α_0 точную верхнюю границу всех чисел α, для которых неравенство (3) имеет решение; ясно, что и α_0 является искомым технологическим темпом роста[1]).

До сих пор мы рассматривали технологические аспекты модели; обратимся теперь к экономической стороне вопроса. Здесь мы получим результаты, которые замечательным образом напоминают теоремы двойственности в линейном программировании.

Как обычно, введем в рассмотрение полуположительный вектор цен $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$. При этих ценах p *издержки производства* технологического процесса P_i равны $a_i p$, а *доход* от него равен $b_i p$. Таким образом, мы приходим к *вектору издержек производства* Ap и *вектору прибылей* Bp. Опишем теперь экономическую задачу, которая окажется двойственной к сформулированной выше задаче расширения.

Определение. Для модели (A, B) *задача экономического роста* состоит в нахождении неотрицательного вектора p, имеющего n координат, и числа β, для которых выполняются условия

$$\beta \text{ минимально} \tag{1*}$$

при условии, что

$$Bp \leqq \beta Ap. \tag{2*}$$

Минимальное значение β называется *экономическим темпом роста* и обозначается через β_0. Соответствующий вектор

---

[1]) Здесь необходима стандартная ссылка на «компактность», чтобы показать существование такого полуположительного вектора x_0, что $x_0(B - \alpha_0 A) \geqq 0$.

цен p_0 называется *оптимальным*. Заметим, что для любого вектора цен p в силу условия I для некоторого индекса i должно выполняться неравенство $b_i p > 0$ и, следовательно, $\beta_0 > 0$. Аргументация, аналогичная использованной в теореме 9.8, показывает, что β_0 всегда существует.

Существуют различные экономические интерпретации этой двойственной задачи. Если $a_i p > 0$, то отношение $b_i p / a_i p$ является валовым доходом, отнесенным к себестоимости, т. е. является темпом, с которым возрастает ценность продуктов при технологическом процессе P_i. Это отношение служит одним из показателей прибыльности. Далее, если предположить, что мы рассматриваем экономику со свободным предпринимательством, то силы конкуренции между технологическими способами будут стремиться к уменьшению этого показателя прибыльности. В качестве другой интерпретации мы можем рассматривать показатель β как *темп накопления*. Предположим, что технологические процессы фиксируются посредством займов и в конце каждого периода производства технологические процессы за каждый полученный доллар должны выплатить β долларов (обычный процент на капитал был бы равен $\beta - 1$). Тогда условие (2*) является выражением уже известного факта, что ни один из технологических процессов не должен быть прибыльным.

Заметим, что хотя пара двойственных задач, рассмотренных здесь, чрезвычайно напоминает двойственные задачи линейного программирования, между ними имеется и принципиальное различие. Это различие состоит в том, что ограничения в рассматриваемой модели производства не линейны.

В дальнейшем мы увидим, что модель с матрицей, элементы которой являются целыми числами, может иметь иррациональный темп роста.

Отметим еще один тривиальный факт. Обе наши задачи являются однородными, так что если вектор x_0 или p_0 является оптимальным, то оптимальными будут и любые положительные кратные этого вектора.

Приступим теперь к установлению связи между двойственными задачами. Ситуация здесь оказывается несколько более сложной, чем в случае линейного программирования.

Лемма 9.4. *Для моделей, удовлетворяющих условиям* I *и* II, *имеет место неравенство* $\beta_0 \leqq \alpha_0$. (На примерах мы увидим, что равенство имеет здесь место не всегда.)

Доказательство. Определим матрицу C, положив $C = B - \alpha_0 A$. Тогда неравенство $xC > \mathbf{0}$ не имеет неотрицательных решений, поскольку если бы вектор x' был таковым, то мы имели бы $x'B > \alpha_0 x'A$ или $x'B \geq (\alpha_0 + \varepsilon)x'A$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и число α_0 не было бы максимальным. Воспользуемся теперь теоремой 2.10 (стр. 47), которая утверждает, что существует такой вектор $p \geqslant \mathbf{0}$, что $Cp \leqq \mathbf{0}$, или $Bp \leqq \alpha_0 Ap$. Отсюда в силу определения темпа экономического роста мы получаем неравенство $\alpha_0 \geqq \beta_0$, которое и требовалось получить.

Хотя без некоторых дополнительных предположений и нельзя утверждать, что $\alpha_0 = \beta_0$, но существует интересная аналогия с теоремой равновесия 1.2 из линейного программирования. Эту теорему мы сейчас и рассмотрим.

Теорема 9.9 (фон Неймана). *Если модель* (A, B) *удовлетворяет условиям* I *и* II, *то существуют полуположительный* m*-мерный вектор* $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, полуположительный n*-мерный вектор* $p_0 = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *и некоторое число* γ, *для которых*

$$x_0 B \geqq \gamma x_0 A \tag{I}$$

и из $x_0 b^j > \gamma x_0 a^j$ *следует* $\pi_j = 0$; (II)

$$Bp_0 \leqq \gamma A p_0 \tag{I*}$$

и из $b_i p_0 < \gamma a_i p_0$ *следует* $\xi_i = 0$. (II*)

Доказательство. Пусть $\gamma = \alpha_0$ — коэффициент технологического роста, а x_0 и p_0 — оптимальные векторы интенсивностей и цен. Тогда неравенство (I) справедливо в силу определения числа α_0. Аналогично из леммы 9.4 получаем

$$Bp_0 \leqq \beta_0 A p_0 \leqq \alpha_0 A p_0 = \gamma A p_0;$$

тем самым установлено и (I*).

Далее, из (I) и (I*) мы имеем $\gamma x_0 A p_0 \leqq x_0 B p_0 \leqq \gamma x_0 A p_0$; следовательно, $x_0(B - \gamma A)p_0 = 0$ или

$$\sum \xi_i (b_i - \gamma a_i)\, p_0 = 0 = \sum x_0 (b^j - \gamma a^j)\, \pi_j,$$

поскольку $(b_i - \gamma a_i)p_0 \geqslant 0$ и $x_0(b^j - \gamma a^j) \geqslant 0$. Отсюда получаем (II) и (II*).

Интерпретация. Постоянная γ является как темпом роста, так и темпом накопления. Условие (I) утверждает, что количества всех продуктов увеличиваются не менее чем в γ раз. Условие (I*) требует, чтобы не существовало технологического процесса с положительной прибылью. Условие (II) утверждает, что в случае роста некоторого продукта более чем в γ раз (т. е. продукт перепроизводится), его цена равна нулю, а условие (II*) является выражением того очевидного факта, что технологический процесс с отрицательной прибылью не используется.

Для того чтобы полностью получить теорему двойственности, нам потребуется новое понятие, являющееся обобщением понятия независимого подмножества из предыдущей главы.

Определение. Пусть дана модель (A, B). Множество индексов $S \subset \{1, \dots, n\}$ называется *независимым подмножеством*, если возможно произвести каждый продукт G_i, $i \in S$, не потребляя при этом ни одного из продуктов G_j, $j \notin S$. Говоря более формально, множество S называется независимым, если существует такое множество $T \subset \{1, \dots, m\}$, что $\alpha_{ij} = 0$ для $i \in T$ и $j \in S'$ и $\beta_{ij} > 0$ для всех $j \in S$ и некоторого $i \in T$. Модель называется *неприводимой*, если в ней не существует собственных независимых подмножеств.

Занумеруем строки и столбцы матрицы A так, чтобы индексы из множества T соответствовали первым t строкам матрицы A, а индексы из множества S — первым s ее столбцам. Тогда наша матрица примет вид

$$t\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{A_1}^{s} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A'} \end{pmatrix}\right. .$$

На экономическом языке это можно выразить так: множество продуктов S является независимым, если эти продукты можно произвести из самих себя, т. е. без затрат каких-нибудь других продуктов.

Теорема 9.10 (теорема двойственности). *Если модель (A, B) неприводима, то* $\alpha_0 = \beta_0$.

Доказательство. Мы уже показали, что $\beta_0 \leqq \alpha_0$, нам остается установить обратное неравенство. Если x_0 и p_0 — оптимальные векторы, то $x_0B \geqq \alpha_0 x_0 A$ и $Bp_0 \leqq \leqq \beta_0 A p_0$ и, следовательно,

$$\alpha_0 x_0 A p_0 \leqq x_0 B p_0 \leqq \beta_0 x_0 A p_0.$$

Если мы сможем показать, что $x_0 A p_0 > 0$, то отсюда будет следовать требуемое неравенство. Обозначая через S множество всех индексов j, для которых $x_0 b^j > 0$, мы видим, что множество S является независимым подмножеством. Если бы в качестве множества T мы взяли множество всех индексов i, для которых $\xi_i > 0$, то мы должны были бы получить $\alpha_{ij} = 0$ при $i \in T$, $j \in S'$, поскольку в противном случае мы имели бы $x_0 a^j > 0$, $x_0 b^j = 0$ и неравенство $x_0 b^j \geqq \alpha_0 x a^j$ не выполнялось бы. В силу неприводимости имеем $x_0 b^j > 0$ для всех j, или $x_0 B > \mathbf{0}$. А так как $p_0 \geqslant \mathbf{0}$, должно быть справедливо и $x_0 B p_0 > 0$ и, следовательно, $\beta_0 x_0 A p_0 \geqq x_0 B p_0 > 0$. Отсюда $x_0 A p_0 > 0$. Доказательство завершено.

§ 6. Некоторые примеры

Рассмотрим модель со следующими матрицами затрат и выпуска

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта модель, как легко видеть, является неприводимой. Мы утверждаем, что оптимальными векторами интенсивностей и цен являются здесь

$$x_0 = (2^{-1/3},\ 2^{-2/3},\ 1),$$
$$p_0 = (1,\ 2^{-1/3},\ 2^{-2/3},\ 0),$$

векторами затрат и выпуска

$$x_0 A = (2^{-2/3},\ 2^{-1/3},\ 1,\ 2^{-2/3}),\quad x_0 B = (2^{-1/3},\ 1,\ 2^{1/3},\ 1),$$

а соответствующий технологический темп роста α определяется так:

$$\alpha = \min\{2^{1/3},\ 2^{1/3},\ 2^{1/3},\ 2^{2/3}\} = 2^{1/3}.$$

Аналогично

$$Ap_0 = (2^{-1/3},\ 1,\ 2^{-2/3}), \qquad Bp_0 = (1,\ 2^{1/3},\ 2^{-1/3}),$$

и экономический темп роста β равен

$$\beta = \max\{2^{1/3},\ 2^{1/3},\ 2^{1/3}\} = 2^{1/3}.$$

Поскольку $\alpha = \beta$, из теоремы двойственности следует, что это общее значение равно α_0 и β_0. Заметим, что продукт G_4 здесь перепроизводится, поскольку его темп роста равен $2^{2/3}$. Следовательно, его цена в соответствии с теорией равна нулю.

Легко построить модели, для которых $\beta_0 < \alpha_0$. Если просто «сложить вместе» две модели, у которых нет общих технологических способов и продуктов и которые имеют различные темпы роста, то для объединенной модели α_0 будет больше, а β_0 меньше этих темпов роста. Несколько более сложным примером модели без единственности является следующий:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что подмодель, составленная из последних трех строк, полностью совпадает с моделью предыдущего примера и, следовательно, имеет темп роста, равный $2^{1/3}$. С другой стороны, подмодель, состоящая из первых трех строк, имеет темп роста, равный 1, в чем нетрудно убедиться, положив $x = (1,1,1,0,0)$, $p = (1,1,0,0,0,0)$. Следовательно, $\alpha_0 = 2^{1/3}$, $\beta_0 = 1$.

§ 7. Простая расширяющаяся модель

Простая линейная модель является частным случаем общей модели $(A,\ B)$, в которой имеется ровно n технологических процессов, а матрица B является единичной матрицей I. Для простых моделей задача расширения принимает вид: дана неотрицательная матрица A, требуется найти такой полуположительный вектор x и такое число α, что

$$\alpha \text{ максимальное} \tag{1}$$

при условии, что

$$x \geqq \alpha x A. \tag{2}$$

Простая модель обладает следующим важным частным свойством.

Теорема 9.11. *Если x_0 и α_0 являются решениями* (1) *и* (2), *то*

$$x_0 = \alpha_0 x_0 A.$$

Эта теорема говорит нам о том, что в простой расширяющейся модели с максимальным темпом роста нет перепроизводства и выпуск всех продуктов растет с максимальным темпом.

Замечание. Мы можем переписать приведенное выше уравнение в виде $x_0 A = (1/\alpha_0) x_0$. Отсюда следует, что $1/\alpha_0$ является положительным *собственным значением* матрицы A, а x_0 — соответствующим ему неотрицательным *собственным вектором*. Таким образом, мы установим классический результат: любая неотрицательная матрица всегда имеет неотрицательное собственное значение и соответствующий ему неотрицательный собственный вектор.

Доказательство. Предположим, что существовал бы такой вектор x_0, что $x_0 \geqslant \alpha_0 x_0 A$. Мы не можем иметь $x_0 > \alpha_0 x_0 A$, так как тогда α_0 можно было бы заменить на большее число. Выберем теперь такой оптимальный вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, что строгое неравенство

$$\xi_j > \alpha_0 x a^j = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ij} \tag{3}$$

имеет место для возможно бóльшего числа индексов (обозначим множество этих индексов через S, а множество остальных индексов обозначим через S'):

$$\xi_j = \alpha_0 x a^j = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ij} \quad \text{для } j \in S'. \tag{4}$$

Мы утверждаем, что

$$\xi_i \alpha_{ij} = 0 \quad \text{для } i \in S,\ j \in S'. \tag{5}$$

Предположим противное, т. е. что для $i_0 \in S$ и $j_0 \in S'$ выполняется неравенство $\xi_{i_0} \alpha_{i_0 j_0} > 0$. Тогда мы можем заменить ξ_{i_0} на $\xi_{i_0} - \varepsilon$, где ε — положительное, но настолько малое число, что выполняется неравенство (3). Но из (4) мы имеем

$$\xi_{j_0} = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_{i j_0} >$$

$$> \alpha_0 [\xi_1 \alpha_{1 j_0} + \ldots + (\xi_{i_0} - \varepsilon) \alpha_{i_0 j_0} + \ldots + \xi_n \alpha_{n j_0}].$$

Тем самым мы получили вектор, который увеличивает число строгих неравенств (3), а это противоречит выбору вектора x. Соотношение (5) доказано.

Пусть $x' = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$, где $\xi_i' = \xi_i$ для $i \in S$ и $\xi_i' = 0$ для $i \in S'$. При замене вектора x на x' неравенства (3) могут лишь усилиться, а равенства (4) в силу (5) приводятся к виду $0 = 0$. Но это означает, что мы можем снова увеличить α_0, а это противоречит определению α_0. Поэтому строгих неравенств (3) не существует и теорема доказана.

Используя полученный выше результат, мы можем теперь дать полное описание возможных оптимальных векторов интенсивностей и цен в простой модели. Доказательства совершенно аналогичны доказательствам теорем 8.2 и 8.3, и мы оставляем их в качестве упражнения читателю.

Теорема 9.12. *Если матрица A неприводима, то $\alpha_0 = \beta_0$ и оптимальный вектор интенсивностей будет положительным и единственным с точностью до постоянного положительного множителя.*

В случае когда матрица A приводима, причем $S_1, \ldots S_k$ неприводимые множества, обозначим через A_i подматрицы матрицы, отвечающие множествам S_i, а через α_i и β_i — соответственно технологический и экономический темпы роста, соответствующие подматрицам A_i.

Теорема 9.13. *Если матрица A такая, как указано выше, то $\alpha_0 = \max \{\alpha_i\}$ и $\beta_0 = \min \{\beta_i\}$.*

Библиографические замечания

Теоремы, касающиеся простых линейных моделей производства, представляют собой классические результаты из теории положительных матриц. Как уже отмечалось, наши доказательства аналогичны доказательствам, предложенным Эрроу [1]. Теорема о замещении впервые была сформулирована Самуэльсоном [1], а общее ее доказательство дал Эрроу [1]. Теоремы, основанные на принципе двойственности, были сообщены автору в устной беседе Данцигом. Связь между экстремальным производством и максимизацией прибыли довольно подробно изложена Купмансом в его фундаментальной работе [1]. Линейная расширяющаяся модель была введена фон Нейманом в работе [3], которая затем была переведена на английский язык [4]. Отдельные результаты и формулировки взяты автором из [3]. Исследование в несколько ином направлении было проведено Кемени, Моргенштерном и Томпсоном [1].

Упражнения

1. Показать, что производственная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда является продуктивной, когда *определитель*

$$|I - A| = (1 - \alpha_{11})(1 - \alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

оказывается положительным.

2. Доказать: если матрица A продуктивная, то сумма элементов хотя бы для одного столбца будет меньше единицы.

3. Является ли продуктивной матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 1 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}?$$

4. Рассмотрим 3×3-модель с технологическими процессами

$$P_1 = (\ \ 4,\ -3,\ -1),$$
$$P_2 = (-1,\ \ 3,\ -1),$$
$$P_3 = (-2,\ \ 2,\ \ 3).$$

Показать, что в этой модели выпускаемые продукты не могут быть все положительными. Почему это не противоречит теореме 9.1?

5. Матрица M называется *положительно определенной*, если $xMx > 0$ для всех $x \neq 0$ (см. гл. II, упр. 25).

Показать, что в простой модели производства матрица A будет продуктивной, если производственная матрица $I - A$ положительно определенная.

6. Показать, что в производственной модели матрица затрат A является продуктивной, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0.$$

Указание: показать, что матрица $(I - A)^{-1}$ неотрицательна.

7. Рассмотрим простую модель с матрицей затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор интенсивностей, необходимый для производства одной единицы каждого продукта. Вычислить x_n из теоремы 9.4 при $n = 3, 4, 5$ и сравнить с полученным выше решением.

8. Показать на примере, что теорема замещения 9.6 не верна для моделей, в которых имеется совместное производство.

9. Пусть в общей модели Леонтьева матрица затрат задана следующей таблицей:

	G_0	G_1	G_2
P_1	0,4	0,1	0,6
P_2	0,3	0,2	1,0
P_3	0,6	0,4	0
P_4	0,5	0,3	0,2

где технологические процессы P_1 и P_2 производят одну единицу продукта G_1, технологические процессы P_3 и P_4 производят одну единицу продукта G_2, а продукт G_0 — труд.

Выбрать из четырех имеющихся два таких технологических процесса, пространство выпуска которых совпадает с пространством выпуска исходной модели.

Какое минимальное количество труда необходимо для производства одной единицы каждо о продукта?

10. Показать, что для примера, приведенного в замечании 3, § 3, теорема замещения не верна.

11. Построить пример линейной модели производства, в которой участвуют два продукта, для которой точка $(1,1)$ является экстремальной, и существует бесконечно много векторов цен, для которых точка$(1,1)$ максимизирует доход.

12. Построить пример линейной модели производства с двумя продуктами, в которой существует много векторов затрат, максимизирующих доход при векторе цен $p = (1,1)$.

13. Обозначим через y вектор из пространства выпуска Y линейной модели. Пусть y максимизирует доход при векторе цен p. Показать, что по крайней мере один из векторов y или p *не является* единственным, т. е. либо существует вектор $y' \neq y$ и $y' \in Y$, который также максимизирует доход при ценах p, либо существует такой вектор цен $p' \neq p$, что вектор y максимизирует доход и при векторе цен p'.

Указание. Рассмотреть конечный конус, образованный множеством $Y - y$, и изучить сопряженный конус.

14. Рассмотрим линейную модель с матрицами затрат и выпуска

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли эта модель приводимой? Найти темпы роста α_0 и β_0.

15. Используя приведенный выше пример, показать, что множество $S_1 \bigcap S_2$ не обязательно будет независимым, даже если множества S_1 и S_2 суть независимые. Что можно сказать о множестве $S_1 \bigcup S_2$?

16. Доказать теоремы 9.12 и 9.13.

17. Показать, что в простой расширяющейся модели оптимальный вектор цен оказывается положительным и единственным с точностью до положительного множителя, если матрица A неприводима.

18. Показать, что темп роста неприводимой простой модели тогда и только тогда больше единицы, когда матрица A оказывается продуктивной.

19. Найти темпы роста и оптимальные векторы интенсивностей и цен в простой модели с матрицей затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

20. Показать, что, если отказаться хотя бы от одного из условий I и II, то теорема 9.3 перестает быть верной.

21. Показать, что в расширяющейся линейной модели с n продуктами всегда можно найти оптимальный вектор интенсивностей, который зависит не более чем от n технологических процессов.

Указание. Положить $\xi_i > 0$ для $i \in S$. Показать затем, что векторы $b_i - \alpha a_i$, $i \in S$, принадлежат пространству размерности не выше $n - 1$. Затем использовать теорему о базисных решениях системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

Боненбласт, Карлин, Шепли (Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S.)

Solutions of discrete two-person games, в сб. Кун и Таккер (ред.) [2], 51—72 (русский перевод: Решения дискретных игр двух лиц, в сб. Матричные игры, ФМ, М., 1961).

Браун (Brown G. W.)

Iterative solutions of games by fictitious play, в сб. Купманс [2], 374—376.

Брэй (Bray H. E.)

Rates of exchange, *Am. Math. Monthly*, **29**, № 10, 365—371 (1922).

Вайда (Vajda S.)

Theory of games and linear programming, New York, 1956 (русский перевод: Теория игр и линейное программирование, в сб. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959).

Вилль (Ville J.)

Sur la théorie générale de jeux, в сб. E. Borel, Traité du calcul des probabilités, vol. **4**, part 2, Paris, 1938, p. 105—113.

Воган, см. Халмош и Воган.

Вулф, см. Данциг, Орден и Вулф.

Гаддум (Gaddum J.)

A theorem on convex cones with applications to linear inequalities, *Proc. Am. Math. Soc.*, **3**, 37—49 (1950).

Гейл (Gale D.)

1. The basic theorems of real linear equations, inequalities, linear programming and game theory, *Naval Research Logist. Quart.*, **3**, 193—200 (1956).

2. A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.*, 7, 1073—1082 (1957).

3. The closed linear model of production, в сб. Кун и Таккер (ред.) [1], 285—330 (русский перевод: Замкнутая линейная модель производства, в сб. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959).

Гейл, Кун, Таккер (Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W.)

1. On symmetric games, в сб. Кун и Таккер (ред.) [2] 81—88 (русский перевод: О симметричных играх, сб. Матричные игры, ФМ, М., 1961).

2. Linear programming and the theory of games, в сб. Купманс (ред.) [2], p. 317—329.

Гейл, Шерман (Gale D., Sherman S.)

Solutions of finite two-person games, в сб. Кун и Таккер (ред.) [2], 37—50 (русский перевод: Решения конечных игр двух лиц, в сб. Матричные игры, ФМ, М., 1961).

Голдман, Таккер (Goldman A. J., Tucker A. W.)

1. Kuhn and Tucker [1], p. 3—52. Главы I — III в сб. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959).

2. Theory of linear programming, в сб. Кун и Таккер (ред.) [1], p. 53—98 (русский перевод: Теория линейного программирования, там же).

Гомори, Баумоль (Gomory R. E., Baumol W. J.)

Integer programming and pricing, *Econometrica*, 28, № 23 (1960), 521—550 (русский перевод в сб. «Численные методы оптимального планирования», Новосибирск, 1962).

Данциг (Dantzig G. B.)

1. Programming in a linear structure, *Econometrica*, 17, 73—74 (1949).

2. Maximization of linear functions of variables subject to linear inequalities, в сб. Купманс (ред.) [2], p. 339—347.

3. A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem, в сб. Купманс (ред.) [2], p. 330—335.

Данциг, Орден, Вулф (Dantzig G. B., Orden A., Wolfe P.)

Generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints, *Pacific J. Math.*, 5, 183—195 (1955).

Джекобс (Jacobs W. W.)
The caterer problem, *Naval Research Logist. Quart.*, **1**, 154—165 (1954).

Какутани (Kakutani S.)
A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, *Duke Math. J.*, **8**, 451—459 (1941).

Карлин, см. Боненбласт, Карлин и Шепли.

Кемени, Моргенштерн, Томпсон (Kemeny J. G., Morgenstern O., Thompson G. L.)
A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica*, **24**, 115—135 (1956).

Кун (Kuhn H. W.)
1. Extensive games and the problem of information, в сб. Кун и Таккер [3], 193—216.
2. Solvability and consistency for systems of linear equations and inequalities, *Am. Math. Monthly*, **63**, 217—232 (1956).
3. The Hungarian method for solving the assignment problem, *Naval Research Logist, Quart.*, **2**, 83—97 (1955).

Кун и Таккер (ред.)
1. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959.
2. Contributions to the theory of games, *Ann. Math. Studies*, **1**, № 24 (1950).
3. Contributions to the theory of games, *Ann. Math. Studies*, **2**, № 28 (1953). См. также Гейл, Кун и Таккер.

Купманс (Koopmans T. C.)
Analysis of production as an efficient combination of activities, в сб. Купманс (ред.) [2], 33—97.

Купманс (ред.)
Activity analysis of production and allocation, N. Y., 1951.

Леонтьев (Leontief W. W.)
The structure of the american economy 1919—1929, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1941.

Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)
Introduction to the theory of games, the RAND Series, N. Y., 1952 (русский перевод: Введение в теорию игр, ФМ, 1960).

Моргенштерн, см. Кемени, Моргенштерн и Томсон и фон Нейман и Моргенштерн.

Нейман (Neumann J. von)

1. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.*, **100**, 295—320 (1928) (русский перевод: К теории стратегических игр, в сб. Матричные игры, ФМ, М., 1961).

2. Privately circulated notes.

3. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergeb. Math. Kolloquiums*, 1937, № 8.

4. Перевод [3] в *Rev. Econ. Studies*, 1945—1946.

Нейман, Моргенштерн (Neumann J., von, Morgenstern O.)

Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1944.

Орден, см. Данциг, Орден и Вулф.

Прагер (Prager W.)

On the caterer problem, *Management Sci.*, **3**, 15—23 (1956).

Ремак (Remak R.)

Kann die Volkwirtschaftlehre eine exakte Wissenschaft werden? *Jahrb. für Nationalökonomie und Stat.*, Band. III, Folge Band 76, 703—735 (1929).

Робинсон (Robinson J.)

An iterative method of solving a game, *Ann. Math.*, **54**, 296—301 (1951) (русский перевод: Итеративный метод решения игр, в сб. Матричные игры, ФМ, М., 1961).

Самуэльсон (Samuelson P. A.)

Abstract of a theorem concerning substitutability in open Leontief models, в сб. Купманс (ред.) [2], 142—146.

Сноу, см. Шепли и Сноу.

Солоу (Solow R.)

On the structure of linear models, *Econometrica*, **20**, 22—46 (1952).

Стиглер (Stiegler G. J.)

The cost of subsistence, *J. Farm. Econ.*, **27**, 303—314 (1945).

Таккер, см. Гейл, Кун и Таккер, Кун и Таккер и Голдман и Таккер.

Томпсон, см. Кемени, Моргенштерн и Томпсон.

Торнхейм, см. Тролл и Торнхейм.

Тролл, Торнхейм (Thrall R. M., Tornheim L.)

Vector spaces and matrices, New York, 1957.

Форд (Ford L. R., Jr.)

Network flow theory, RAND Paper P-923, Santa Monica, Calif., 1956.

Ф о р д, Ф у л к е р с о н (F o r d L. R., Jr., F u l k e r s o n D. R.)
1. Maximal flow through a network, *Canad. J. Math.*, 8, 399—404 (1956).
2. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canad. J. Math.*, 9, 210—218 (1957).

Ф у л к е р с о н , см. Форд и Фулкерсон.

Ф у р ь е (F o u r i e r J.-B.)
Solution d'une question particulière du calcul des inégalités, *Nouveau bulletin des sciences par la société philomathique de Paris*, 1826, p. 99.

Ф р и ш (F r i s c h R.)
Circulation planning: proposal for a national organization of a commodity and service exchange, *Econometrica*, 2, 258—336 (1934).

Х а л м о ш, В о г а н (H a l m o s P. R., V a u g h a n H. E.)
The marriage problem., *Am. J. Math.*, 72, 214—215 (1950).

Х и ч к о к (H i t c h c o c k F. L.)
Distribution of a product from several sources to numerous localities, *J. Math. Phys.*, 20, 224—230 (1941).

Х о л л (H a l l P.)
On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.*, 10, 26—30 (1935).

Ч а р н с (C h a r n e s A.)
Optimality and degeneracy in linear programming, *Econometrica*, 20, 160—170 (1952).

Ш е п л и, С н о у (S h a p l e y L. S., S n o w R. N.)
Basic solutions of discrete games, в сб. Кун и Таккер (ред.) [2], 27—35. См. также Боненбласт, Карлин и Шепли.

Ш е р м а н, см. Гейл и Шерман.

Э й з е н б е р г, Г е й л (E i s e n b e r g E., G a l e D.)
Consensus of subjective probabilities, the Pari-mutuel method, *Ann. Math. Statist.*, 1959, 30, № 1 (1959).

Э р р о у (A r r o w K. J.)
Alternative proof of the substitution theorem for Leontief models in the general case (Купманс [2], 155—164).

Литература, добавленная редактором

1. К а н т о р о в и ч Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, М., 1959.

2. Ш и л о в Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, 2 изд., Гостехиздат, М., 1956.
3. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959.
4. Матричные игры, ФМ, М., 1961.
5. Исследования структуры американской экономики, Гостехиздат, М., 1958.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Д. Гейл

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Редакторы *Г. К. Москатов и А. А. Рывкин*
Художник *Н. А. Зорин*
Технический редактор *Ф. Х. Джатиева*
Корректор Л. Б. Поль
Сдано в производство 2/XI 1962 г.
Подписано к печати 23/III 1963 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$=6,6 бум. л.
21,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 18,9. Изд. № $^1/_{1458}$
Цена 1 р. 52 к. Зак. 495

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9

1р. 52 к.