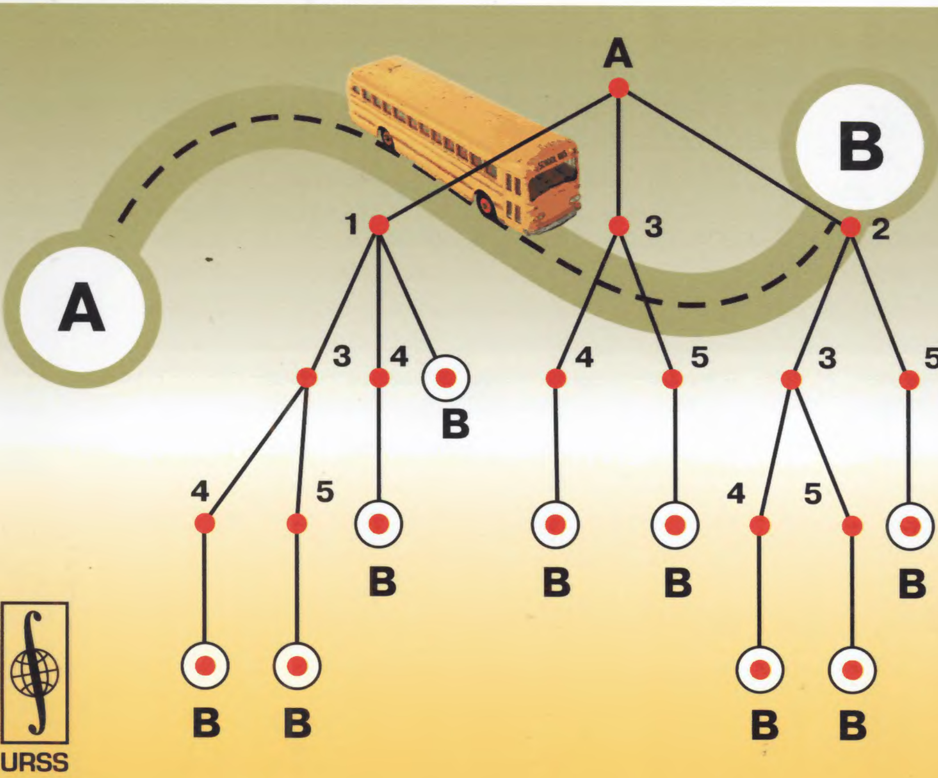
О. И. Мельников

Теория графов в занимательных задачах



URSS

О. И. Мельников

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Рекомендовано
Научно-методическим центром
учебной книги и средств обучения
Министерства образования Республики Беларусь
в качестве учебно-методического пособия
для общеобразовательных школ

Издание третье,
исправленное и дополненное

URSS
МОСКВА

ББК 22.174 22.176о

Мельников Олег Исидорович

Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 232 с.

В настоящей книге в занимательной форме изложены основы теории графов. Изучение этой дисциплины на факультативах в средней школе будет способствовать развитию математического мышления учащихся, умений моделирования и облегчит усвоение школьниками вычислительной техники.

Книга предназначена для школьников и учителей; задачи из нее могут быть использованы при подготовке к математическим олимпиадам различных уровней. Первое издание книги, вышедшее в 2001 году, входит в различные рекомендательные списки и виртуальные библиотеки не только для школьников и учителей, но и для студентов.

1-е издание выходило под заглавием
«Занимательные задачи по теории графов»

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 14,5. Зак. № 1813.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–397–00033–8

Содержание

Посвящается
Регине Иосифовне Тышкевич

Введение

Современная математика уже не такая, какой она была в начале XX века. В ней появилось большое количество новых дисциплин, широко применяющихся на практике. К таким дисциплинам, например, относятся дисциплины, объединенные под общим названием «Дискретная математика». Математическая энциклопедия говорит о дискретной математике как о ряде математических теорий, не связанных непосредственно с концепцией предельного перехода и непрерывности. Дискретная математика является в настоящее время очень интенсивно развивающимся разделом математики. Это связано с повсеместным распространением кибернетических систем, языком описания которых она является. Кроме того, дискретная математика является теоретической базой информатики, которая все глубже и глубже проникает не только в науку и технику, но и в повседневную жизнь.

Среди дисциплин дискретной математики видное место занимает теория графов. Родившись при решении головоломок, теория графов стала в настоящее время простым, доступным и мощным средством решения как теоретических, так и производственных задач.

Одной из целей предлагаемой книги является знакомство учеников с элементами теории графов. В ней можно найти большое количество различных сведений из теории. Автор хотел бы, чтобы представленный задачник можно было назвать *«Теорией графов для школьников»*. С помощью книги можно начинать знакомиться с теорией графов, начиная уже с пятого класса. Основные понятия иллюстрируются примерами, а доказательства теорем сознательно встроены в решения занимательных задач. Среди теорем встречаются достаточно глубокие. Мне кажется, что с этой точки зрения *книга будет полезна и студентам.*

Дискретная математика представлена в школьных программах незначительно. Это приводит к нарушению преемственности между средним и высшим образованием. Выпускники школ приходят в вузы плохо подготовленными к восприятию дискретных математических дисциплин, поэтому у них возникают затруднения при обучении, особенно на младших курсах. Одной из целей книги является развитие мышления учащихся, направленного на решение дискретных математических задач.

Кроме того, для подготовки специалистов высокого класса в вузах постепенно начинают обучать студентов методологии перехода от реальных производственных ситуаций к математическим моделям, их описывающим, и дальнейшему исследованию построенных моделей с помощью вычислительной техники. Автор считает, что начинать учить строить простейшие математические модели следует уже в младших классах. Теория графов предоставляет благодатную почву для этого. В виде графов можно изображать, например, схемы дорог и электрические цепи, географические карты и химические молекулы, отношения между разными объектами и людьми и т. д. Именно это привело к широкому использованию теории графов в физике и кибернетике, химии и биологии, экономике и социологии и других науках. Особенно велика роль теории графов в современном программировании. Примеры перехода от различных ситуаций к графовым моделям представлены в книге.

И, наконец, графовые задачи — частые гости на математических олимпиадах всех уровней. Книга может помочь при подготовке к ним, а также при чтении факультативов по математике и информатике в школе.

В книге представлены более 250 занимательных задач разной трудности и их решения. Большинство задач придумано или интерпретировано автором. Некоторые задачи (например, три дома и три колодца, обход мостов, задача о рукопожатиях и т. д.) относятся к математическому фольклору. Есть в сборники и задачи, заимствованные автором из различных источников. Некоторых из них имеют новые решения.

Для решения задач достаточно знаний по математике в объеме неполной средней школы. Лишь несколько задач решаются с помощью математической индукции. Знак $|X|$ всюду обозначает число элементов в множестве X. Часто вводимые понятия используются при решении нескольких задач. Поэтому в конце книги помещен словарь, где для каждого определения указана задача, в которой это понятие вводится.

Изучение элементов теории графов, по мнению автора, повысит общую математическую культуру школьников, облегчит освоение им вычислительной техники и подготовит к обучению в вузе.

* * *

Автор благодарит П. В. Скумса за помощь в работе над рукописью.

Условное разделение задач по степеням сложности

Первая степень:	1, 4, 5, 6, 26, 73, 74, 94, 97, 99, 101, 111, 119, 123, 130, 131, 132, 136
Вторая степень:	2, 3, 7, 8, 14, 18, 21, 22, 23, 24, 28, 30, 31, 36, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 86, 88, 89, 92, 93, 95, 96, 98, 100, 102, 103, 106, 110, 112, 114, 118, 120, 124, 128, 129, 133, 134, 139, 140, 142, 144, 145, 151, 153, 154, 155, 156, 157, 161, 162, 164, 167, 168, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 182, 186, 200, 201, 202, 206, 207, 211, 212, 213, 218, 220, 234, 235, 237, 240, 241, 243, 247, 258, 259, 264
Третья степень:	9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 25, 29, 32, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 51, 58, 59, 60, 61, 67, 82, 84, 85, 87, 90, 105, 107, 109, 113, 115, 116, 117, 137, 141, 143, 146, 147, 148, 149, 152, 158, 159, 160, 163, 165, 166, 169, 170, 179, 184, 185, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 194, 198, 199, 204, 205, 208, 214, 215, 216, 217, 219, 221,225, 227, 230, 231, 232, 233, 238, 242, 244, 248, 251, 252, 253, 254, 256, 260, 261, 262, 265, 266, 267, 268
Четвертая степень:	20, 27, 33, 44, 55, 66, 91, 104, 108, 121, 122, 125, 126, 127, 135, 138, 150, 180, 181, 183, 193, 195, 196, 197, 203, 209, 210, 222, 223, 224, 226, 228, 229, 236, 239, 245, 246, 249, 250, 255, 257, 263, 269

Задачи. Решения задач

1 Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Леша и Дима — по три, Семен и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Леша?

Решение. *Пусть задано некоторое непустое множество V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются **вершинами** графа, элементы множества E называются **ребрами** графа, а пара (V, E), т. е. множество вершин и множество ребер, называется **графом**.*

В дальнейшем мы будем часто использовать геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются в виде точек на плоскости. Если две вершины образуют ребро, то соответствующую пару точек соединяют линией.

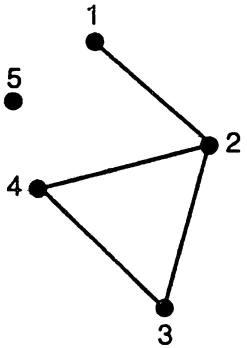


Рис. 1

Например, на рис. 1 изображен граф G, заданный множеством вершин

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

и множеством ребер

$$E = \{(1, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}.$$

*Если две вершины графа соединены ребром, то такие вершины называются **смежными**. В противном случае вершины называются **несмежными**. Вершины, которые соединены ребром, называются его **концами**. Если вершина является концом ребра, то будем говорить, что ребро **выходит** из вершины. Число ребер, выходящих из вершины v, называется **степенью** вершины v и обозначается $d(v)$. Для графа, изображенного на рис. 1, $d(1) = 1$, $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 2$, $d(5) = 0$. Вершина степени 0 называется **изолированной**, вершина степени 1 — **висячей**.*

Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости — вершину графа. Если два игрока встретились между собой, то соединим *соответствующие вершины линией — ребром графа. Таким образом, мы построили* ***граф встреч*** *игроков.*

Граф H называется ***подграфом*** *графа G, если вершины и ребра H принадлежат G. Подграф H графа G называется* ***подграфом, порожденным множеством вершин*** $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, *если он содержит вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все ребра графа G, соединяющие эти вершины. Подграф H графа G называется* ***подграфом, порожденным множеством ребер*** $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$, *если он содержит ребра $e_1, e_2, \ldots, e_s$ и все вершины графа G, являющиеся концами этих ребер.*

На рис. 2 изображен граф G и два его подграфа H_1 и H_2, причем подграф H_2 порожден множеством вершин $\{1, 2, 4, 5\}$ или множеством ребер $\{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$.

Пусть G — граф встреч игроков, в котором вершина 1 соответствует Ване, вершина 2 — Толе, вершина 3 — Леше, вершина 4 — Диме, вершина 5 — Семену, вершина 6 — Илье и вершина 7 — Жене.

Поскольку степень вершины 1 равна шести, то эта вершина соединена со всеми вершинами графа G, а так как вершина 7 имеет степень один, то она смежна только с вершиной 7. Рассмотрим подграф H_1, порожденный множеством вершин $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Этот подграф полу-

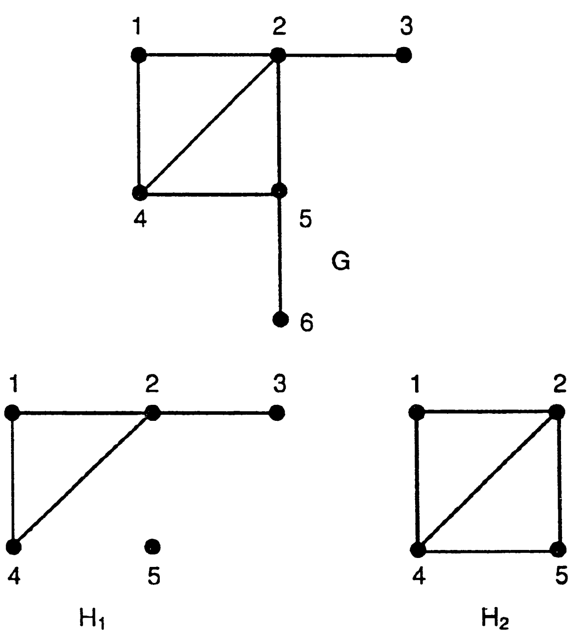


Рис. 2

чается из графа G удалением вершин 1 и 7 и всех ребер, выходящих из этих вершин. Поэтому в графе H_1, который имеет 5 вершин, степени вершин будут $d(2) = 4$, $d(3) = d(4) = 2$, $d(5) = d(6) = 1$. В графе H_1 вершина 2 будет смежной со всеми вершинами, а вершины 5 и 6 — только с вершиной 2. Рассмотрим граф H_2, порожденный множеством вершин $\{3, 4\}$. Этот граф получается из графа H_1 после удаления вершин 2, 5, 6 и всех ребер, выходящих из этих вершин. В графе H_2 степени вершин 3 и 4 равны единице. Это означает, что граф H_2 имеет вид как на рис. 3.

Рис. 3

Возвратив удаленные вершины 2, 5, 6, получим граф H_1 (рис. 4).

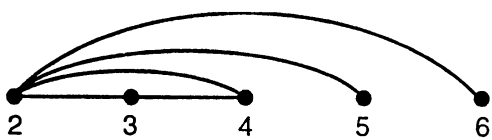


Рис. 4

Возвратив теперь удаленные вершины 1 и 7, получим требуемый граф G (рис. 5).

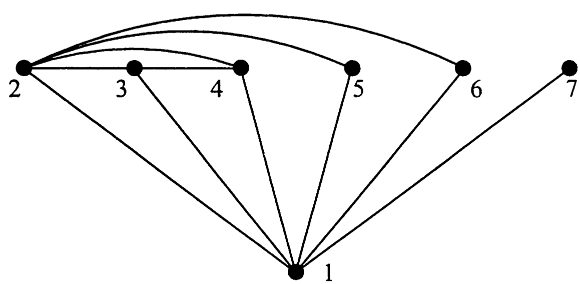


Рис. 5

Этот граф описывает встречи школьников. Поэтому Леша, которому соответствует вершина 3, встретился с Ваней, Толей и Димой, которым соответствуют вершины 1, 2 и 4. По этому графу можно также определить, с кем встречались остальные школьники. ▷

$\boxed{2}$ В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее число встреч?

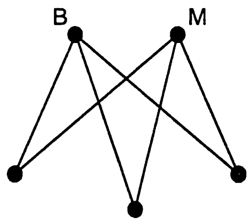


Рис. 6

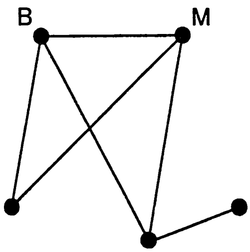


Рис. 7

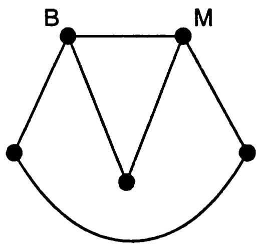


Рис. 8

Решение. Рассмотрим два случая: 1) Ваня и Миша не играли друг с другом; 2) Ваня и Миша сыграли друг с другом.

1) В этом случае каждый из остальных участников провел по 2 встречи (рис. 6).
2) Разобьем этот случай на два подслучая:
   2а) существует участник, не встречавшийся ни с Ваней, ни с Мишей;
   2б) каждый из участников встретился или с Ваней, или с Мишей (а может и с каждым из них).

   Изобразим все пять встреч, проведенных Ваней и Мишей.

2а) Этот случай невозможен, поскольку проведя шестое ребро, мы получим противоречие с условием задачи, так как будет еще один участник, также сыгравший 3 партии (рис. 7).

2б) Есть только одна возможность провести шестое ребро, не нарушая условий задачи (рис. 8).

Поэтому наименьшее число встреч, проведенных участником, равно 2. ▷

3 Спортивный турнир проводится по круговой системе. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

Решение. Изобразим турнир с помощью графа встреч игроков. В турнире может быть произвольное число участников, и любые пары из них могут встречаться или не встречаться между собой. Отсюда следует, что любой граф является графом встреч игроков некоторого турнира.

Для решения задачи нужно доказать, что существуют два игрока, проведших одинаковое количество встреч, т. е. *в графе обязательно найдутся две вершины, степени которых одинаковы.*

Докажем это утверждение от противного. Допустим, что существует граф H, степени всех n вершин которого различны. В промежутке от 0

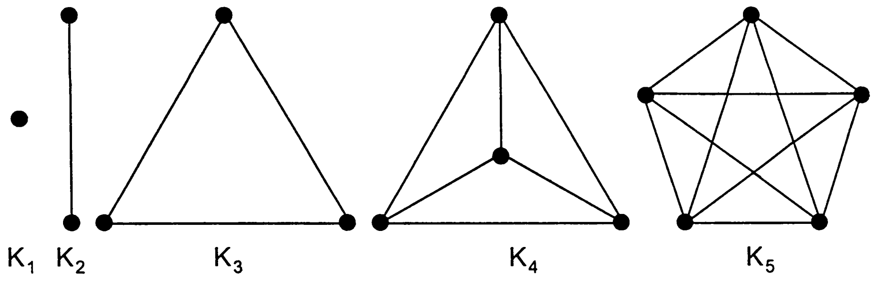


Рис. 9

до $n-1$ существует ровно n целых чисел: $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$. С другой стороны, степени n вершин графа тоже расположены в этом промежутке. Поэтому должны существовать такие вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, что $d(v_1) = 0$, $d(v_2) = 1$, ..., $d(v_n) = n - 1$.

Рассмотрим вершины v_1 и v_n. Степень вершины v_1 равна нулю, это значит, что вершина v_1 не соединена ребром ни с одной другой вершиной. Степень вершины v_n равна $n - 1$, это значит, что эта вершина соединена ребрами со всеми остальными вершинами, в том числе и с вершиной v_1, что противоречит предыдущему. Следовательно, существование графа H, у которого все вершины имеют различную степень, невозможно.

Это означает, что хотя бы два игрока в турнире проведут одинаковое число встреч. ▷

4 На плоскости расположено конечное число точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Докажите, что существуют две точки, из которых выходит одно и то же число отрезков.

Решение аналогично решению предыдущей задачи. ▷

5 В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

Решение. Построим граф встреч игроков так, как и в предыдущих задачах. Поскольку каждая пара игроков встретилась между собой, то в графе каждая пара вершин будет соединена ребром.

Граф, у которого каждая пара вершин соединена ребром, называется ***полным графом****. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. На рис. 9 изображены полные графы с небольшим числом вершин.*

Мы должны найти число ребер в графе K_{12}.

Из каждой вершины графа выходит 11 ребер. В произведении $12 \cdot 11$ каждое ребро учтено дважды, поэтому граф K_{12} имеет $(12 \cdot 11)/2 = 66$ ребер.

Следовательно, в соревновании было сыграно 66 встреч.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что *граф K_n содержит $n(n-1)/2$ ребер.*

Противоположностью полному графу является пустой граф. Граф, который не имеет ни одного ребра, называется ***пустым***. Пустой граф с n вершинами обозначается O_n. ▷

6 В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?

Решение. Если в турнире участвовало 8 человек, то они должны были бы сыграть $(8 \cdot 7)/2 = 28$ партий в случае, когда каждый участник сыграл все партии. Если в турнире участвовало 7 человек, то в этом случае они должны были бы сыграть $(7 \cdot 6)/2 = 21$ партию. Поэтому в турнире участвовало 8 человек, а выбывший провел три встречи. ▷

7 В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Решение. Если в турнире участвовало 16 шахматистов, то число сыгранных ими встреч не должно превосходить 120, если 15, то 105, если 14, то 91. Поэтому в турнире играли или 16, или 15 шахматистов. Во втором случае 13 шахматистов, закончивших турнир, провели между собой $(13 \cdot 12)/2 = 78$ партий. Следовательно, выбывшие вместе сыграли 16 встреч, т. е. кто-то из них провел больше половины возможных партий. В первом случае 14 шахматистов, закончивших турнир, провели между собой $(14 \cdot 13)/2 = 91$ партию. Следовательно, выбывшие провели вместе 3 встречи, что удовлетворяет условию задачи. Поэтому в турнире участвовало 16 человек. ▷

8 В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира после того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Решение. Если в турнире участвовало 15 человек, то выбывшие провели вместе 16 встреч (см. предыдущую задачу). Так как каждый участник должен встретиться с 14 соперниками, то половина турнира составляют 7 туров. Если выбывшие участники провели по 8 встреч, то они покинули турнир в его второй половине. Поэтому в турнире участвовало 15 человек. ▷

9 В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, три шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 130 встреч. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Решение. Если в турнире участвовало 16 шахматистов, то число сыгранных ими партий не должно превосходить $(16 \cdot 15)/2 = 120$. Поэтому в турнире играло больше 16 человек. Рассмотрим следующие случаи.

а) Турнир начало 17 участников. Тогда 14 из них, закончивших турнир, провели между собой $(14 \cdot 13)/2 = 91$ встречу, а выбывшие провели вместе 39 встреч, следовательно, кто-то из них провел не менее 13 встреч, т. е. выбыл во второй половине турнира.

б) Турнир начало 18 участников. Тогда 15 из них, закончивших турнир, провели между собой $(15 \cdot 14)/2 = 105$ встреч, а выбывшие провели вместе 25 встреч. Поскольку половина турнира составляет 8 туров, то выбывшие участники не могли вместе провести более 24 встреч.

в) Турнир начало 19 участников. Тогда 16 из них, закончивших турнир, провели между собой $(16 \cdot 15)/2 = 120$ встреч, а выбывшие провели вместе 10 встреч. Каждый из них мог выбыть в первой половине турнира.

г) Турнир начало 20 участников. Тогда 17 из них, закончивших турнир, провели между собой $(17 \cdot 16)/2 = 136$ встреч, т. е. больше, чем все участники нашего турнира.

Следовательно, в турнире участвовало 19 человек. ▷

10 Чемпионат молодежного лагеря по футболу проводился по круговой системе. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал 7 очков, второй призер — 5, третий — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

Решение. Пусть в чемпионате участвовало n команд. Построим граф встреч G. Поскольку команды провели все встречи, то граф G —

полный. Он имеет $n(n-1)/2$ ребер. Вне зависимости от исхода матча в любом матче разыгрывается два очка. Это значит, что во время всего чемпионата было разыграно $n(n-1)$ очков. На долю трех призеров приходится 15 очков, на долю всех остальных участников — $n(n-1)-15$. Каждая из остальных $(n-3)$ команд, не ставших призерами, не может набрать более трех очков. Поэтому

$$n(n-1)-15 \leqslant 3(n-3),$$
$$(n-2)^2 \leqslant 11, \quad n \leqslant 5.$$

Если бы в чемпионате участвовало 3 или 4 команды, то они набрали бы в сумме меньше 15 очков. Поэтому в чемпионате участвовало 5 команд, которые в сумме набрали 20 очков. На долю двух последних приходится 5 очков. Одна из команд набрала 3, другая — 2 очка. (При другом делении очков, например 4 и 1, изменится состав призеров.)

Следовательно, команда, занявшая последнее место набрала 2 очка.

Места	I	II	III	4	5	Очки
I	•	1	2	2	2	7
II	1	•	0	2	2	5
III	0	2	•	1	0	3
4	0	0	1	•	2	3
5	0	0	2	0	•	2

Представленная таблица показывает, что такое распределение очков возможно. ▷

11 Чемпионат молодежного лагеря по футболу, в котором участвовало нечетное число команд, проводился по круговой системе. За победу в матче давалось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Каждая команда одержала хотя бы одну победу. Чемпион набрал 10 очков, второй призер — 7, третий — 5. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

Решение. Пусть в чемпионате участвовало n команд. Рассмотрим граф встреч G. Поскольку команды провели все встречи, то граф полный. Он имеет $n(n-1)/2$ ребер. В зависимости от исхода матча в нем разыгрывается или 2, или 3 очка. Это значит, что во время всего чемпионата было разыграно от $n(n-1)$ до $3n(n-1)/2$ очков. На долю трех призеров приходится 22 очка, на долю всех остальных участников — не менее $n(n-1)-22$ очков.

Пусть команда, занявшая i-е место, набрала d_i очков. Тогда

$$n(n-1)-22 \leqslant d_4+d_5+\ldots+d_n.$$

Каждая из $(n-3)$ команд, не ставших призерами, набрала 5 или меньше очков. Поэтому

$$n(n-1)-22 \leqslant 5(n-3).$$

Решив неравенство, получим, что $n \leqslant 6$. Из условия задачи следует, что в чемпионате участвовало или 3, или 5 команд.

Если бы в чемпионате участвовало 3 команды, то они могли набрать самое большее 9 очков. Следовательно, в чемпионате участвовало 5 команд.

Команда, набравшая 5 очков, сыграла две встречи вничью, поэтому в чемпионате было разыграно не более, чем $3\cdot 5\cdot 4/2-2=28$ очков. На долю двух последних команд приходится не более 6 очков. Поскольку команда, занявшая последнее место, одержала победу, то она должна набрать не менее 3 очков. Поэтому команды, занявшие четвертое и пятое места, набрали по 3 очка.

Места	I	II	III	4	5	Очки
I	•	3	1	3	3	10
II	0	•	1	3	3	7
III	1	1	•	3	0	5
4	0	0	0	•	3	3
5	0	0	3	0	•	3

Представленная таблица показывает, что такое распределение очков возможно. ▷

12 В игре «Спортлото-Шиш» розыгрыш главного приза проходит по следующим правилам. Каждый присутствующий в студии пишет независимо от других любое число различных пар различных целых чисел из множества от 1 до 7. Если у нескольких участников выписанные ими пары совпадут, то эти участники делят между собой 1 000 000 рублей. Сколько участников должно быть в студии, чтобы приз заведомо оказался разыгранным?

Решение. *Граф с n вершинами называется* ***помеченным****, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и ребер у них совпадают.*

Задавая различные пары чисел, каждый участник игры фактически задает ребра помеченного графа, имеющего 7 вершин. Главный приз будет разыгран, если два игрока зададут один и тот же граф.

Теорема. Число помеченных графов с n вершинами равно 2^k, где $k = n(n-1)/2$.

Доказательство. Рассмотрим множество $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ всех вершин графа и множество всех его потенциально возможных ребер $E = \{(1,2), (1,3), \ldots, (n-1, n)\}$. Элементов k в множестве E столько, сколько ребер в полном графе K_n, т. е. $k = n(n-1)/2$. Для каждого ребра (a, b) из множества E существует две возможности: ребро (a, b) есть в графе и ребра (a, b) нет в графе. Поэтому число различных помеченных графов равно 2^k.

Теорема доказана. □

Полный граф с семью вершинами содержит $(7 \cdot 6)/2 = 21$ ребро. Поэтому существует $2^{21} = 2\,097\,152$ помеченных графов с семью вершинами. Поскольку пустое множество пар соответствует пустому графу, то для того чтобы главный приз был заведомо разыгран, в студии должно присутствовать столько участников. ▷

13 После жалоб на весьма малое число участников, выигравших главный приз в игре «Спортлото-Шиш», организаторы игры изменили правила. Теперь каждый присутствующий в студии пишет независимо от других 8 различных пар различных целых чисел из множества от 1 до 7. Если у нескольких участников выписанные ими пары совпадут, то эти участники делят между собой 1 000 000 рублей. Сколько теперь участников должно быть в студии, чтобы приз заведомо оказался разыгранным?

Решение. Как и в прошлой задаче, задавая различные пары чисел, каждый участник игры задает ребра помеченного графа, имеющего 7 вершин и 8 ребер. Главный приз будет разыгран, если два игрока зададут один и тот же граф.

Определим сколько существует помеченных графов с n вершинами и m ребрами. Для задания графа нужно из $k = n(n-1)/2$ потенциально возможных ребер выбрать m ребер. Число возможностей для выбора равно C_k^m. Столько же существует помеченных графов с n вершинами и m ребрами.

Поскольку $C_{21}^8 = 203\,490$, то для того чтобы главный приз оказался заведомо разыгранным, столько людей должно находиться в студии. ▷

14 В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, пока не сыгравшие между собой ни одного матча.

Решение. Рассмотрим граф встреч команд G. По условию степень каждой вершины графа равна 8. Нужно доказать, что в графе существуют три вершины, порождающие пустой граф O_3.

Рассмотрим произвольную вершину v. Она несмежна с множеством вершин V, содержащим 11 вершин. Среди этих вершин обязательно найдутся две вершины u и w, несмежные между собой, так как в противном случае степень каждой вершины из V была бы не меньше 10. Вершины v, u и w определяют нужную тройку команд. ▷

15 В городе 25 универсамов. Известно, что из любых трех универсамов можно выбрать два, расстояние между которыми меньше одного километра. Докажите, что среди универсамов найдутся 13, лежащих в круге радиуса 1 км.

Решение. Поставим в соответствие универсамам вершины графа, которые будут соединены ребром, если расстояние между соответствующими магазинами меньше 1 км. Покажем, что в построенном графе существует вершина, степень которой не меньше 12. Предположим, что максимальную степень, не большую 11, имеет вершина u. Тогда вершин, не смежных с вершиной u, будет не менее 13. Среди них обязательно найдутся две несмежные вершины v и w, так как в противном случае степень любой вершины, не смежной с u, будет не менее 12, что противоречит предположению. Так как вершины v и w несмежны, то не существует ни одного ребра, соединяющего хотя бы одну пару вершин из множества $\{u, v, w\}$. Получено противоречие с условием задачи. Поэтому существует вершина u_0, степень которой не менее 12. Универсам, соответствующий вершине u_0, и универсамы, соответствующие смежным ей вершинам, лежат в круге радиуса 1 км. ▷

16 В городском районе расположено 50 магазинов. Известно, что из любых четырех магазинов три находятся на расстоянии не большем 1 км от четвертого. Докажите, что все магазины находятся в радиусе 1 км.

Решение. Так же, как в предыдущей задаче, построим граф, определяющий взаимное расположение магазинов. Пусть u_0 — вершина наибольшей степени, и $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ — смежные с ней вершины.

Если $p = 49$, то все магазины находятся в радиусе 1 км от магазина, соответствующего вершине u_0. Пусть вершина v несмежна с вершиной u_0. Рассмотрим 4 вершины: u_0, u_1, u_2, v. По условию одна из этих вершин должна быть смежна с тремя остальными. Такой вершиной не могут быть ни u_0, ни v. Предположим, что нужная вершина — u_1. Аналогично доказывается, что вершина u_1 будет смежной с любой вершиной u_i из множества $\{u_3, \ldots, u_p\}$. Поэтому степень вершины u_1 по крайней мере равна $(p+1)$. Это противоречит выбору вершины наибольшей степени.

Следовательно, наибольшая степень вершин графа равна 49, и в районе все магазины расположены в круге радиуса 1 км. ▷

17 В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Решение. Построим ***граф знакомств*** G, в котором вершины будут изображать людей, а ребро будет соединять две вершины тогда и только тогда, когда соответствующие люди знакомы. Отметим, что из условий задачи следует, что подграф, порожденный любыми тремя вершинами графа G, не может быть ни полным, ни пустым.

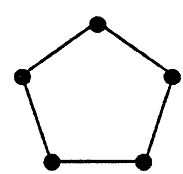


Рис. 10

Покажем, что степень каждой вершины графа равна двум. Предположим, что существует вершина v, степень которой не меньше трех. Пусть вершина v будет смежной с вершинами v_1, v_2 и v_3. Рассмотрим подграф, порожденный этими тремя вершинами. В этом подграфе должно быть хотя бы одно ребро. Пусть это будет ребро (v_1, v_2). Но тогда граф, порожденный вершинами v, v_1, v_2 будет полным, что противоречит условиям задачи.

Аналогично доказывается, что степень вершины графа не может быть меньше двух.

Легко показать, что существует ровно один граф с пятью вершинами, степень каждой вершины которого равна двум (см. рис. 10).

Этому графу соответствует расположение людей за столом. ▷

18 Известно, что в компании каждый человек знаком не менее чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

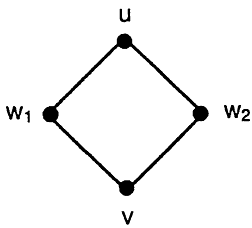


Рис. 11

Решение. Построим граф знакомств G, как в предыдущей задаче. Пусть граф имеет n вершин. Степень вершины v равна числу знакомств человека, соответствующего вершине. По условию задачи $d(v) \geqslant n/2$. Необходимо доказать, что в графе G существует подграф C из четырех вершин, в котором первая вершина смежна со второй, вторая с третьей, третья с четвертой, а четвертая с первой. Если в графе все вершины смежные, то любые 4 из них образуют нужный подграф и любых четырех человек можно посадить за стол.

Пусть вершины u и v несмежные. Обозначим через $N(u)$ и $N(v)$, соответственно, множество, состоящее из вершины u и всех смежных с ней вершин, и множество, состоящее из вершины v и всех смежных с ней вершин. Оценим число вершин в множествах $N(u)$ и $N(v)$:

$$|N(u)| \geqslant \frac{n}{2} + 1, \quad |N(v)| \geqslant \frac{n}{2} + 1.$$

Если в этих множествах все вершины различны, то число вершин в графе G будет не меньше, чем $(n + 2)$, что противоречит условию. То же самое произойдет, если множества $N(u)$ и $N(v)$ будут иметь только одну общую вершину.

Следовательно, вершины u и v должны иметь как минимум две общие вершины w_1 и w_2. Граф H, изображенный на рис. 11, определит людей, сидящих за круглым столом. (В графе H возможно существование ребра (w_1, w_2).) ▷

19 Имеется некоторая компания. Человека называют нелюдимым, если у него не более 3 знакомых в компании. Известно, что у каждого человека из компании не менее трех нелюдимых знакомых. Докажите, что в этой компании все нелюдимые.

Решение. Построим граф знакомств для данной компании. По условию для каждой вершины v построенного графа ее степень $d(v) \geqslant 3$, а для каждой вершины, соответствующей нелюдимому человеку (назовем такую вершину «нелюдимой»), $d(v) \leqslant 3$. Поэтому для любой «нелюдимой» вершины графа $d(v) = 3$.

Предположим, что существует вершина v, для которой $d(v) \geqslant 4$. По условию она должна быть смежной с «нелюдимой» вершиной u, которая кроме вершины v смежна еще с тремя «нелюдимыми» вершинами, т. е. $d(u) \geqslant 4$. Получено противоречие.

Следовательно, в компании все ее участники нелюдимые. ▷

20 Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все знакомые у него малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

Решение. Рассмотрим граф знакомств. Малообщительным людям будет соответствовать множество М вершин, степени которых не превосходят 10. Чудакам будет соответствовать множество Ч вершин, смежных только с вершинами из М. Необходимо доказать, что множество М содержит не меньше элементов, чем множество Ч.

Пусть множество $М_1 = М\backslash(М \cap Ч)$ (т. е. вершины из М, не принадлежащие Ч) содержит m элементов, а множество $Ч_1 = Ч\backslash(М \cap Ч)$ содержит k элементов. Подсчитаем число t ребер между вершинами множеств $М_1$ и $Ч_1$. Поскольку степень каждой вершины из $М_1$ не больше 10, то $t > 10m$. Так как в $Ч_1$ отсутствуют вершины степени меньшей, чем 10, то $10k \geqslant t$. Отсюда $k > m$. Одинаковое количество элементов в множествах М и Ч будет только тогда, когда эти множества совпадают.

Следовательно, чудаков не больше, чем малообщительных. ▷

21 В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

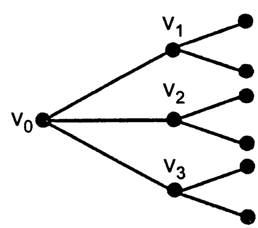


Рис. 12

Решение. Рассмотрим *граф авиалиний* G, в котором вершины задают города, а ребра — авиалинии, соединяющие города. Рассмотрим любую вершину v_0 графа G. По условию из нее выходит не более трех ребер. Пусть (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3) — ребра, выходящие из вершины v_0. Из каждой вершины v_i $(i = 1, 2, 3)$ выходит не более двух ребер (см. рис. 12). Таким образом, в графе G не может быть более 10 городов.

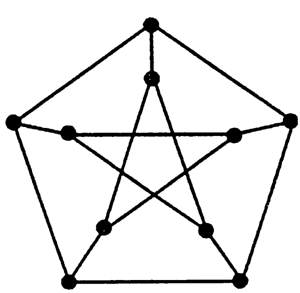


Рис. 13

На рис. 13 изображен граф, удовлетворяющий требуемым условиям. Он называется ***графом Петерсена.***

Следовательно, наибольшее возможное число городов в государстве равно десяти. ▷

22 Города страны соединены авиалиниями. Известно, что как бы не разделить города на две группы, всегда найдется авиалиния, соединяющая какой-нибудь город одной группы с каким-то городом второй группы. Докажите, что можно перелететь из любого города страны в любой другой (возможно, с пересадками).

Решение. *Граф называется* ***связным****, если от любой его вершины можно по ребрам перейти к любой другой. В противном случае граф называется* ***несвязным****. Будем говорить, что две вершины графа принадлежат одной* ***компоненте****, если от одной из них до другой можно перейти по ребрам графа. Каждая компонента является связным графом. Граф, изображенный на рис.* 14*, состоит из трех компонент.*

Рассмотрим граф G, задающий маршруты перелетов между городами. По условию для любого разбиения множества вершин графа G на два подмножества V и U существует ребро графа, соединяющее некоторую вершину из V с некоторой вершиной из U. Для решения задачи нужно доказать, что граф G связный.

Возьмем две произвольные вершины u и v и покажем, что из любой из них можно перейти в другую по ребрам. Построим множество V вершин, в которые по ребрам можно перейти из вершины v, по следующему правилу.

Вначале отнесем к множеству V вершину v, а к множеству U остальные вершины графа. Из условия вытекает, что в графе существует ребро (v, v_1).

Теперь отнесем к множеству V вершины v и v_1, а к множеству U остальные вершины. В графе существует или ребро (v, v_2), или ребро (v_1, v_2), где вершина v_2 принадлежит множеству U. Затем к множеству V отнесем вершины v, v_1, v_2.

Будем продолжать такие построения до тех пор, пока в множестве V не окажется вершина u.

Поскольку вершины v и u — произвольные вершины графа, то граф G будет связным. Это означает, что из любого города государства можно перелететь в любой другой. ▷

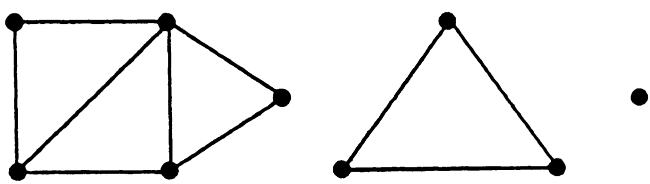


Рис. 14

23 Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т. е. существует цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

Решение. Построим граф G, вершины которого соответствуют школьникам, а две вершины соединены ребром, если соответствующие школьники обменялись адресами. Из каждой вершины графа выходит не менее 26 ребер. Для решения задачи мы должны доказать, что любой граф с 53 вершинами и со степенями вершин не меньшими, чем 26, является связным.

Предположим, что граф несвязный. Рассмотрим компоненту, содержащую наименьшее число вершин. В ней будет не более 26 вершин. Но в таком случае степень любой вершины из этой компоненты будет не больше, чем 25, что противоречит условию задачи. Это означает, что граф связный, и Иван узнает адрес Николая.

Подобным образом можно доказать, что *если для графа G наименьшая степень его вершин $\delta \geqslant (n-1)/2$, то граф G связный.* ▷

24 Какой наименьшей длины может быть цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами (см. предыдущую задачу).

Решение. Рассмотрим граф G, построенный при решении предыдущей задачи. Пусть вершина u графа соответствует Ивану, а вершина v — Николаю. Вершина u смежна по крайней мере с 26 вершинами: $u_1, u_2, \ldots, u_{26}, \ldots$. Точно также вершина v смежна по крайней мере с 26 вершинами: $v_1, v_2, \ldots, v_{26} \ldots$. Среди вершин, смежных с вершинами u и v, должна быть хотя бы одна общая, поскольку в противном случае в графе G окажется больше 53 вершин (см. рис. 15).

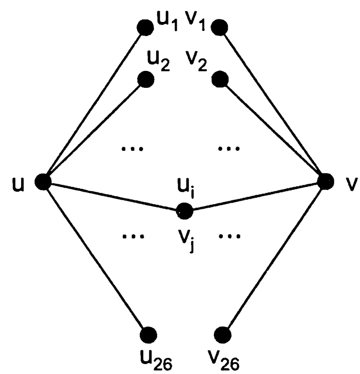


Рис. 15

Эта вершина соответствует школьнику в цепочке, который знает и Ивана, и Николая. а сама цепочка состоит из трех школьников. ▷

25 Маша отдыхала в молодежном лагере «Росинка», где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она не обменивалась адресами. Докажите, что с помощью отдыхающих в лагере Маша может найти адрес Ирины (см. предыдущую задачу).

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, мы должны доказать, что граф с 45 вершинами и с 950 ребрами будет связным. Доказательство проведем от противного. Рассмотрим несвязный граф с 45 вершинами, который имеет наибольшее число ребер. Очевидно, что этот граф имеет ровно две компоненты, каждая из которых является полным графом. Пусть бóльшая из компонент имеет p вершин (значит $p \geqslant 23$), тогда меньшая — $(45 - p)$ вершин. Число ребер в нашем графе будет

$$|E| = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{(45-p)(44-p)}{2} = p^2 - 45p + 45 \cdot 22.$$

При $p > 23$ значения квадратного трехчлена $f(p) = p^2 - 45p + 45 \cdot 22$ растут с увеличением числа p. Наибольшее p, при котором граф будет несвязным, равно 44. Одна компонента такого графа является графом K_{44}, а вторая — графом K_1. Этот граф имеет наибольшее число ребер среди несвязных графов с 45 вершинами. Число ребер в нем равно $(44 \cdot 43)/2 = 946$. А граф, который получается из условий задачи, имеет больше, чем 946 ребер, значит он связный.

Подобным образом можно доказать, что *если граф с n вершинами имеет больше, чем $(n-1)(n-2)/2$ ребер, то он связный.* ▷

26 Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех родных братьев. Докажите, что все мальчики — братья.

Решение. Построим граф G, вершины которого обозначают мальчиков, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им мальчики являются братьями. Каждая компонента графа G будет полным графом, поскольку, если один мальчик имеет несколько братьев, то все эти дети — братья. Предположим, что в графе G несколько компонент. Тогда существует компонента, содержащая не более трех вершин. Степень каждой вершины этой компоненты не более двух, что противоречит условию, так как степень вершины равна числу братьев соответствующего мальчика. Следовательно, граф G имеет одну компоненту, т. е. все мальчики — братья. ▷

27 В стране $2n + 1$ город. Каждая пара городов соединена рейсом только одной из трех авиакомпаний. Докажите, что можно выбрать одну авиакомпанию и $n+1$ город так, что из любого из них можно добраться в любой другой выбранный город рейсами указанной компании.

Решение. Рассмотрим три графа авиалиний G_1, G_2 и G_3, описывающих рейсы трех авиакомпаний. Для решения задачи нужно доказать, что какой-то из графов содержит компоненту, имеющую не меньше, чем $n+1$ вершину. Пусть граф G — это объединение графов G_1, G_2 и G_3.

Для решения задачи воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ доказательство утверждения тривиально. Пусть утверждение верно при $n = k$, и докажем его при $n = k + 1$.

Окрасим ребра графов в цвета $1, 2$ или 3, соответственно компаниям. Согласно индуктивному предположению в графе G существует множество X из k вершин, связанных ребрами, скажем, первого цвета. Удалим из них одну вершину и из оставшихся вершин графа выделим множество Y, тоже состоящее из k вершин, связанных ребрами одного цвета. (Не теряя общности, будем считать, что множества X и Y максимальные по включению, так как в противном случае задача будет решена.)

Рассмотрим две возможности.

1. Ребра, связывающие вершины из Y, первого цвета. Из максимальности множеств X и Y следует, что они не пересекаются. Вершина v, не входящая ни в X, ни в Y, соединена с $2k$ вершинами ребрами второго или третьего цветов. Но тогда ребер одного из этих цветов по крайней мере k, и соответствующие k вершин вместе с вершиной v образуют нужный набор из $k+1$ вершины.

2. Ребра, связывающие вершины из Y, второго цвета. Если вершины из X и Y не пересекаются, то они соединены между собой ребрами третьего цвета и образуют нужное нам множество.

   В противном случае обозначим через A вершины, которые принадлежат только X, через B — только Y, через С — пересечению X и Y, через D — остальные вершины. Из максимальности X и Y следует, что вершины A и B, C и D соединены ребрами третьего цвета. Одно из множеств $A \cup B$ или $C \cup D$ имеет не менее $k+1$ вершин. Это множество и будет искомым. ▷

28 В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что из любого города страны в любой другой можно доехать (возможно, с пересадками) только поездом или только автобусом.

Решение. *Пусть задан граф G. Рассмотрим граф $\breve{G}$, который имеет такое же множество вершин, что и граф G, а ребро соединяет две вершины* *графа $\breve{G}$ тогда и только тогда, когда эти вершины не соединены ребром в графе G. Граф $\breve{G}$ называется* ***дополнительным графом*** *к графу G.*

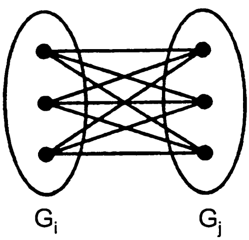


Рис. 16

Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам, и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда эти города соединены железнодорожным маршрутом. В этом случае граф $\breve{G}$, в котором города соединены ребром тогда и только тогда, когда города соединены автобусным маршрутом, будет дополнительным к графу G. Докажем утверждение: *из двух графов, G и дополнительного к нему графа $\breve{G}$, хотя бы один связен.* В случае истинности утверждения можно доехать из одного города в любой другой с помощью одного вида транспорта.

Пусть граф G является несвязным и состоит из нескольких компонент

$$G_1, G_2, \dots, G_p.$$

Тогда в дополнительном графе существуют ребра между любыми вершинами компонен G_i и G_j $(i \neq j)$ и граф $\breve{G}$ будет связным (см. рис. 16). ▷

29 Докажите, что в группе из шести человек всегда найдутся три человека, знакомые между собой, или три человека, не знакомые между собой.

Решение. Рассмотрим граф G, состоящий из шести вершин, каждая из которых соответствует человеку. Если два человека знакомы, то соединим соответствующие им вершины красным ребром, если два человека не знакомы — синим. Мы получили полный граф K_6, ребра которого окрашены в красный или синий цвета. Нужно доказать, что в G существует треугольник, вершинами которого являются вершины графа, состоящий только из красных ребер или состоящий только из синих ребер.

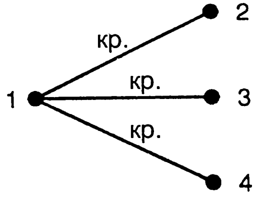


Рис. 17

Рассмотрим произвольную вершину графа G. Степень этой вершины равна пяти. Значит, из нее выходит, по крайней мере, три одноцветных ребра, допустим красных (см. рис. 17).

Если одна из пар вершин $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ соединена красным ребром, то в графе будет красный треугольник. В противном случае вершины 2, 3, 4 образуют синий треугольник.

Если в графе K_6 существует красный треугольник, то вершины треугольника определяют трех знакомых людей, если синий — трех незнакомых. ▷

30 В области 5 городов. Каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Известно, что не существует ни одной такой тройки городов, что из первого можно попасть во второй, из второго — в третий, а из третьего вернуться в первый, используя для переездов только один вид транспорта. Докажите, что из каждого города выходит ровно два автобусных и два железнодорожных маршрута и что существуют автобусный и железнодорожный маршруты, с помощью которых можно объехать все города, побывав в каждом ровно один раз.

Решение. Рассмотрим граф G, состоящий из пяти вершин, каждая из которых соответствует городу. Если два города связаны автобусным маршрутом, то соединим соответствующие им вершины синим ребром, если железнодорожным — красным ребром.

Предположим, что из какой-то вершины выходят три красных ребра: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ (см. рис. 17). Тогда, если одно из ребер $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ будет красным, то в графе окажется красный треугольник, если же эти ребра будут синими, то синий. И то, и другое запрещено условиями задачи. Следовательно, из каждой вершины выходит не более двух красных ребер. Аналогично показывается, что из каждой вершины выходит не более двух синих ребер.

Поэтому из каждой вершины выходит два красных и два синих ребра.

Мы доказали, что степень каждой вершины графа, образованного синими (красными) ребрами, равна двум. На рис. 10 изображен единственный граф с пятью вершинами, удовлетворяющий этому условию. Граф, показывающий возможность требуемого объезда городов, изображен на рис. 18. ▷

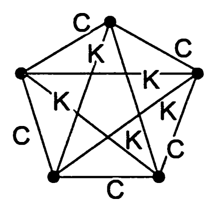


Рис. 18

31 В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из трех любых делегатов по крайней мере двое могут объясниться между собой на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют делегатам, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие делегаты могут объясниться между собой. Из задачи 29 следует, что в любом графе с шестью вершинами есть или порожденный полный подграф K_3, или порожденный пустой подграф O_3. Так как среди любых трех вершин хотя бы две соединены ребром, то в G отсутствуют порожденные пустые графы O_3. Поэтому в графе G имеется порожденный подграф K_3. Три делегата, соответствующие вершинам этого подграфа, могут объясниться между собой. ▷

32 Каждый из 17 ученых переписывается с остальными коллегами. Каждые двое переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом на одном и том же языке.

Решение. Построим граф G, вершины которого обозначают ученых. Если двое ученых переписываются на английском языке, то соединим соответствующие им вершины зеленым ребром, если на французском — красным, если на русском — синим. Мы получили полный граф K_{17}, ребра которого раскрашены тремя цветами. Докажем, что в этом графе есть треугольник, вершинами которого являются вершины графа, а сторонами — ребра графа, окрашенные в один цвет.

Рассмотрим произвольную вершину v графа. Из вершины должно выходить по крайней мере 6 ребер одного цвета, так как в противном случае из вершины v будет выходить не более 15 ребер, а степень вершины v в графе K_{17} равна 16. Пусть для определенности из вершины v выходит 6 зеленых ребер $(v, v_1), (v, v_2), \dots, (v, v_6)$. Если какая-либо пара вершин из множества $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ соединена зеленым ребром, то в графе G есть зеленый треугольник.

Если же эти вершины соединены между собой только красными или синими ребрами, то из задачи 29 следует, что в графе G есть красный или синий треугольник. Вершины одноцветных треугольников определяют ученых, которые переписываются на одном языке. ▷

33 Докажите, что в компании из 18 человек есть или четверо попарно знакомых, или четверо попарно не знакомых.

Решение. Построим граф K_{18} так, как в задаче 32. Ребра этого графа будут окрашены в два цвета: красный и синий. Для решения задачи нужно доказать, что в графе найдется подграф K_4, все ребра которого будут окрашены или в красный цвет, или в синий цвет. Рассмотрим произвольную вершину u. Поскольку из нее выходит 17 ребер, то по крайней мере 9 из них будут окрашены в один цвет, например, красный. Предположим, что это будут ребра $(u, v_1), \dots, (u, v_9)$.

Рассмотрим произвольную вершину v_i, $i = 1, \dots, 9$. Пусть она соединена синими ребрами хотя бы с шестью вершинами v_j. Из задачи 29 следует, что среди шести вершин существуют три, соединенные или красными, или синими ребрами. Вместе с вершиной u или с вершиной v_i эти три вершины образуют нужную четверку (см. рис. 19).

Пусть теперь вершина v_i соединена красными ребрами по крайней мере с четырьмя вершинами v_j. Если хотя бы одна пара этих

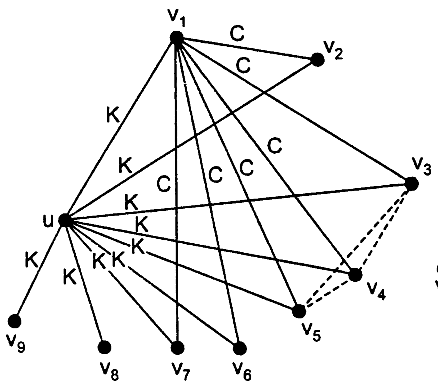


Рис. 19

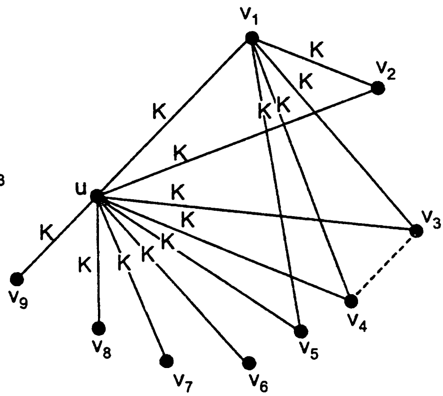


Рис. 20

вершин соединена красным ребром, то эти две вершины вместе с вершинами u и v_i порождают граф K_4, ребра которого окрашены в красный цвет (см. рис. 20). В противном случае вершины v_j порождают граф K_4, ребра которого окрашены в синий цвет.

Покажем, что оставшийся случай, когда любая из вершин v_i соединена с остальными вершинами v_j ровно тремя красными и пятью синими ребрами, невозможен. Рассмотрим граф H, порожденный девятью вершинами v_j и соединяющими их красными ребрами. Так как из каждой вершины выходит ровно три ребра, а в произведении $3 \cdot 9$ каждое ребро учитывается дважды, то в графе H будет 14,5 ребер, что невозможно.

Следовательно, в любой группе из 17 человек найдется четверка, в которой все будут попарно знакомы или попарно незнакомы. ▷

$\boxed{34}$ В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

Решение. Построим граф знакомств G, как в предыдущих задачах. Нужно доказать, что степени всех вершин графа одинаковы, Граф, степени всех вершин которого одинаковы, называется ***регулярным*** графом.

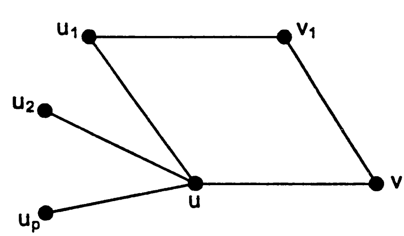


Рис. 21

Пусть u и v — две смежные вершины графа. Тогда, согласно условию, вершины $u_1, u_2, \dots, u_p$, смежные с вершиной u, не будут смежными с вершиной v. Рассмотрим несмежные вершины u_1 и v. Эти вершины, кроме вершины u, должны иметь еще одну общую смежную вершину, например v_1 (см. рис. 21), и эта вершина не будет смежной с вершиной u.

Аналогично, для каждого индекса i $(2 \leqslant i \leqslant p)$ найдется вершина v_i, смежная с вершинами u_i и v и не смежная с вершиной u. Вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ попарно различны, так как в противном случае люди, соответствующие вершинам u и v_1, будут иметь более двух общих знакомых (см. рис. 22).

Поэтому $d(v) \geqslant d(u)$. Точно так же можно доказать, что $d(v) \leqslant d(u)$. Следовательно, $d(v) = d(u)$.

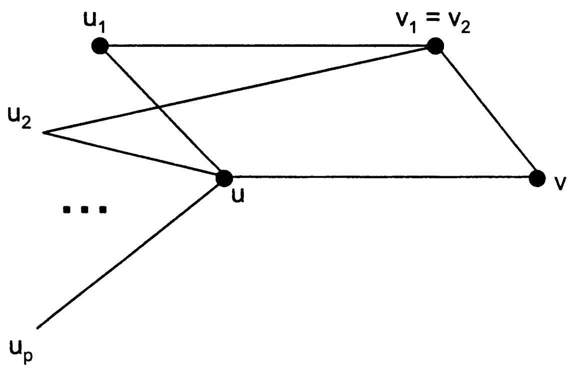


Рис. 22

Мы доказали, что степени двух смежных вершин одинаковы. Но для двух несмежных вершин u и v существует третья вершина w, которая будет смежной и с u, и с v. Поэтому будут одинаковы и степени всех несмежных вершин. Следовательно, в компании все имеют одинаковое число знакомых. ▷

35 Про некоторую компанию известно, что если два человека из нее знакомы, то они имеют одинаковое в этой компании число знакомых, а если незнакомы — то разное. Докажите, что если в такой компании семьдесят человек, то обязательно найдется один, имеющий не менее одиннадцати знакомых.

Решение. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. В этом графе степень вершины будет равна числу знакомых человека. Нужно доказать, что существует вершина, степень которой не менее одиннадцати.

Изучим строение графа G. В нем обязательно существует вершина, степень которой не менее двух, так как в противном случае граф G был бы объединением графов K_1 и K_2, и в нем бы существовали несмежные вершины одинаковой степени. Пусть вершина u смежна с вершинами v и w. Тогда по условию степени этих трех вершин равны. Из условий задачи также вытекает, что вершины v и w смежны. Следовательно, граф G распадается на несколько компонент $G_1, G_2, \ldots, G_p$, и каждая компонента является полным графом. Степени вершин в разных компонентах различные, так как люди, соответствующие вершинам различных компонент, незнакомы. Поэтому граф G представляет собой объединение полных графов:

$$G = K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \ldots \cup K_{p_t}.$$

Индексы p_i можно занумеровать таким образом, что

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_t.$$

Докажем, что $p \geqslant 12$.

Действительно, предположим, что в графе G отсутствует подграф K_p, в котором $p \geqslant 12$, и оценим число вершин в графе G. В самом благоприятном случае, когда в графе G будут подграфы $K_1, K_2, \ldots, K_{10}, K_{11}$, число вершин графа G будет равно

$$1 + 2 + \ldots + 11 = \frac{(1 + 11)11}{2} = 66.$$

Но по условию в графе G должно быть 70 вершин. Получено противоречие. Следовательно, в графе G должен быть полный подграф не менее, чем с двенадцатью вершинами. Вершины этого подграфа и соответствуют требуемым людям. ▷

36 Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми, и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

Решение. Как и в предыдущих задачах, построим граф G знакомств. Степень каждой вершины графа равна шести. Рассмотрим шесть вершин графа G: $u_1, u_2, \ldots, u_6$. По условию существует вершина u_0, смежная с каждой из этих шести вершин (см. рис. 23).

Возьмем теперь шестерку вершин $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_0$. По тому же условию есть вершина, которая смежна с этими вершинами. Этой вершиной может быть лишь вершина u_6, так как в противном случае степень вершины u_0 окажется большей, чем 6. Аналогично доказывается, что каждая пара остальных вершин также является смежной. Поэтому граф G будет графом K_7, и в компании будет семь человек. ▷

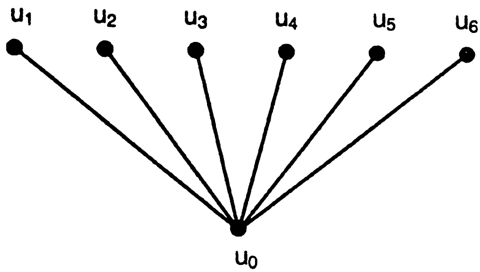


Рис. 23

37 В лагере отдыхают 50 школьников. Известно, что среди любых четырех школьников найдется по крайней мере один, знакомый с тремя остальными. Докажите, что найдется школьник, знакомый со всеми школьниками.

Решение. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. Необходимо доказать, что в графе найдется вершина, степень которой равна 49. Предположим, что вершина u имеет наибольшую степень p среди вершин графа, и $3 \leqslant p \leqslant 48$. Обозначим через $\Gamma(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ множество вершин, смежных с вершиной u. Пусть вершина v будет не смежной с вершиной u. Если в $\Gamma(u)$ есть две несмежные вершины, например u_1 и u_2, то четверка вершин u, v, u_1, u_2 не удовлетворяет условиям задачи (см. рис. 24).

Поэтому все вершины множества $\Gamma(u)$ попарно смежны. Рассмотрим далее четыре вершины: u, v, u_1, u_2. По условию задачи одна из этих вершин должна быть смежной с остальными. Поскольку u и v не смежные вершины, то такой вершиной является или u_1, или u_2. Для определенности, пусть вершина u_1 будет смежной с вершинами v, u и u_2.

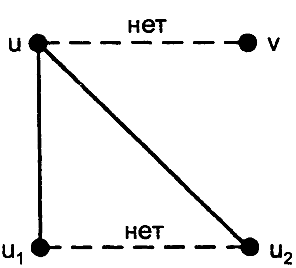


Рис. 24

Поскольку вершина u_1 является смежной с вершинами u, v и со всеми вершинами из множества $\Gamma(u)$, то ее степень будет больше, чем степень вершины u, что противоречит предположению о максимальности степени вершины u.

Следовательно, в графе G есть вершина, степень которой равна 49, а в лагере есть школьник, знакомый со всеми остальными школьниками. ▷

38 На конгресс собрались ученые, среди которых есть знакомые друг с другом. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих на конгрессе равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что найдется ученый, который имеет только одного знакомого.

Решение. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. Из условия вытекает, что две вершины графа, имеющие одинаковые степени, не могут быть смежными с одной и той же вершиной. Нужно доказать, что в графе есть вершина степени 1.

Рассмотрим вершину v_0, имеющую наибольшую степень d. Пусть она будет смежна с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_d$. Поскольку эти вершины смежны с одной и той же вершиной v_0, то все они будут иметь разные степени. Но если среди этих вершин не найдется вершины степени 1, то степень какой-то вершины окажется больше, чем d, что противоречит выбору вершины v. Следовательно, среди вершин $v_1, \ldots, v_d$ существует вершина степени 1, которая соответствует ученому, имеющему одного знакомого. ▷

39 В трехмерном пространстве 8 точек расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Проведено 17 отрезков, у каждого из которых оба конца лежат в упомянутых точках. Докажите, что найдутся три отрезка, образующие треугольник.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором точки являются вершинами, а отрезки — ребрами. Рассмотрим вершину v_0, из которой выходит наибольшее число ребер: $(v_0, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_n)$. Если отрезки не образовывают треугольников, то никакие из пар вершин v_i, v_j $(i, j \neq 0)$ не смежны. Из каждой из оставшихся $7 - n$ вершин выходит не более n ребер, поэтому количество ребер в графе G не больше, чем $n + (7 - n)n = (8 - n)n$. Наибольшее значение функции $y = (8 - n)n$ равно 16, а это противоречит тому, что в графе 17 ребер. Поэтому некоторые три отрезка образуют треугольник. ▷

40 В трехмерном пространстве 9 точек расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками ровно с четырьмя другими. Докажите, что найдутся три отрезка, образующие треугольник.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором точки являются вершинами, а отрезки — ребрами. Степень каждой вершины графа G равна четырем. Необходимо доказать, что в графе G есть полный подграф K_3.

Пусть произвольная вершина v_1 смежна с вершинами v_2, v_3, v_4, v_5. Если среди этих вершин есть хотя бы одна пара смежных, то эта пара вместе с вершиной v_1 порождает граф K_3.

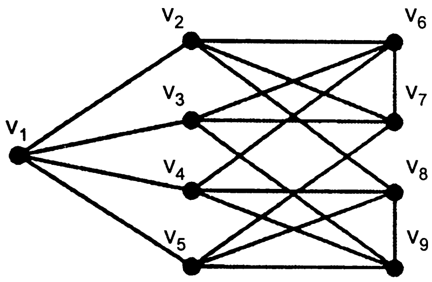


Рис. 25

Рассмотрим случай, когда такой пары нет. Тогда вершина v_2 смежна с тремя вершинами (пусть это будут вершины v_6, v_7, v_8) из множества $\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$ (см. рис. 25).

В графе H, порожденном множеством вершин $\{v_2, v_3, \ldots, v_9\}$, вершины v_2, v_3, v_4, v_5 имеют степень 3, а вершины v_6, v_7, v_8, v_9 — степень 4. Так как вершины v_2, v_3, v_4, v_5 не смежны между собой, то все 12 ребер, выходящих из этих вершин в графе H, должны выходить и из вершин множества $\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Но из вершин последнего множества должно выходить больше, чем 12 ребер, так как $4 \cdot 4 > 12$. Поэтому четыре последние вершины будут разбиты на две пары смежных вершин. Одна из этих пар обязательно принадлежит множеству $\{v_6, v_7, v_8\}$ и вместе с вершиной v_2 образует треугольник (см. рис. 25). ▷

41 Любые два жителя города либо дружат, либо враждуют, причем среди любых трех либо все трое дружат, либо все трое враждуют, либо дружат только двое. Докажите, что если не все жители города друзья, то найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

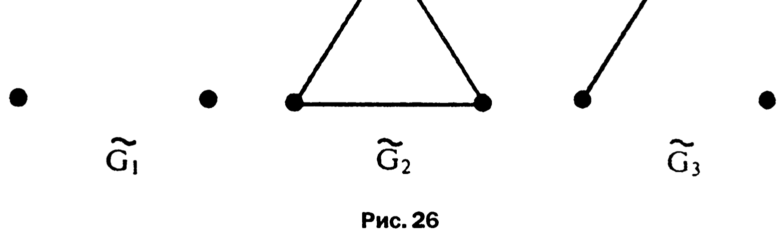


Рис. 26

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины, обозначающие горожан, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие горожане дружат. В графе G любые три вершины порождают один из трех графов рис. 26.

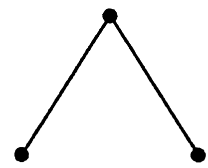


Рис. 27

Пусть не все жители города дружат, т. е. граф G не является полным. Мы должны доказать, что если граф имеет n вершин, то существует вершина v, степень которой $d(v) < (n-1)/2$.

Рассмотрим любую связную компоненту графа G. Так как в графе G нет подграфов вида, изображенного на рис. 27, то компонента будет полным графом.

Какая-то компонента графа G имеет не больше, чем $n/2$ вершин. Поэтому степень каждой вершины v этой компоненты будет не больше, чем

$$\frac{n}{2}-1=\frac{(n-2)}{2}, \quad \text{т.е.} \quad d(v)\leqslant\frac{n-2}{2}<\frac{n-1}{2}.$$

Следовательно, житель, соответствующий вершине v, имеет врагов больше, чем друзей. ▷

42 В городе среди любых трех человек либо никто не враждует, либо враждуют все трое, либо только двое. Какое наименьшее число жителей может быть в городе, если известно, что каждый из половины жителей имеет ровно 70 врагов, а каждый из второй половины — ровно 90.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины, изображающие горожан, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие горожане враждуют.

При решении предыдущей задачи показано, что любая компонента графа G является полным графом. Так как из условия следует, что половина вершин графа имеет степень 70, а вторая половина — 90, то граф G является объединением полных графов K_{71} и K_{91}. Пусть первых графов будет t, а вторых — s. Все графы K_{71} содержат одну половину вершин графа G, а все графы K_{91} — вторую. Поэтому $71t = 91s$.

Так как числа 71 и 91 взаимно простые, то минимально возможные значения s и t, соответственно, 71 и 91. В графе 12 922 вершин. Столько же жителей будет в городе. ▷

43 В некоторой стране между любыми двумя городами существует ровно один рейс, непосредственно связывающий эти города: или автобусом, или поездом, или самолетом. Известно, что не существует города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует трех таких городов, любые две пары из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Сколько городов в стране?

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам. Если два города соединены автобусной линией, то проведем между соответствующими вершинами графа синее ребро, если железнодорожной — то зеленое, если авиационной — то красное. Таким образом, мы получили полный граф, ребра которого окрашены в три цвета. По условиям задачи из одной вершины не могут выходить ребра трех цветов, и в графе не существует одноцветного треугольника.

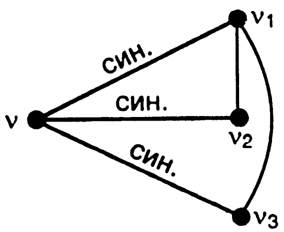


Рис. 28

Сначала покажем, что из одной вершины не может выходить более двух ребер одного цвета. Допустим противное: из некоторой вершины v выходят три одноцветных (например, синих) ребра: (v, v_1), (v, v_2), (v, v_3).

По условию задачи ребро (v_1, v_2) не может быть синим. Пусть оно красное. Ребро (v_1, v_3) также должно быть красным. Поэтому ребро (v_2, v_3) невозможно окрасить, не нарушая условий задачи (см. рис. 28). Получено противоречие. Следовательно, из любой вершины выходит не более двух одноцветных ребер, и степень каждой вершины графа не превышает четырех. Следовательно, в графе G может быть от трех до пяти вершин.

Рассмотрим случай, когда $G = K_5$. Выше было показано, что из одной вершины не может выходить более двух ребер одного цвета. Теперь покажем, что существует цвет, в который окрашены ребра, выходящие не более чем из трех вершин. Действительно, в противном случае в графе будет ребер одного цвета не меньше, чем $(4 \cdot 2)/2 = 4$, а ребер всех трех цветов — не меньше чем 12, что невозможно, так как в графе K_5 десять ребер.

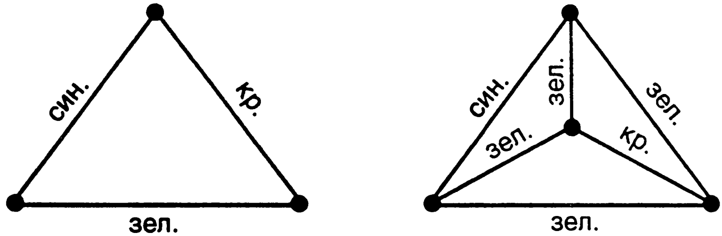


Рис. 29

Пусть ребра синего цвета выходят не более, чем из трех вершин. Рассмотрим ребро (u, v) синего цвета. Из вершин u и v должно выйти еще по одному ребру синего цвета, пусть это (u, w_1) и (u, w_2). В случае, когда w_1 и w_2 разные вершины, ребра синего цвета будут выходить из четырех вершин, что противоречит предположению. В случае, когда вершины w_1 и w_2 совпадают, в графе будет синий треугольник, что запрещено условием задачи. Таким образом, мы показали, что граф G не может быть графом K_5.

Для графов K_3 и K_4 существует раскраска их ребер требуемым образом (см. рис. 29).

Следовательно, в стране 3 или 4 города. ▷

44 На конференцию приехали 300 участников. Каждый знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на 3 группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для членов группы.

Решение. Изобразим языки вершинами графа, а пары языков — ребрами. Любой человек не владеет ровно двумя языками. На каждом ребре графа напишем, сколько человек не владеет соответствующими двумя языками. Сумма всех написанных чисел будет равна 300. Каждую вершину пометим числом, равным сумме чисел, написанных на ребрах, выходящих из этой вершины. Сумма пометок вершин будет равна 600, так как в этой сумме каждое ребро учитывается дважды.

Предположим, что участников нужным образом разделили на три группы (языки для общения в группах U, V, W, соответствующие им вершины графа u, v, w). Тогда на ребрах графа (u, v), (u, w), (v, w) должны быть написаны числа, не превосходящие 100, так как в противном случае люди, не владеющие двумя языками, например U и V, должны войти в группу пользующихся третьим языком (W), и их будет более 100.

Кроме того, поскольку сумма чисел, написанных на ребрах, выходящих из вершины графа, равна количеству человек, не владеющих соответствующим языком, то суммы чисел, выходящих из каждой из вершин u, v, w будут не больше 200. Иначе каким-то языком будет владеть менее 100 участников.

Докажем, что существуют три вершины, удовлетворяющие двум названным выше условиям. Назовем вершину «плохой», если ее метка окажется больше 200. Назовем ребро «плохим», если на нем написано число больше 100. В противном случае вершину и ребро назовем «неплохими».

В случае, если в графе больше трех «плохих» вершин, то сумма меток этих вершин будет больше 600, что невозможно, так сумма меток всех вершин равна 600. Поэтому в графе не более двух «плохих» вершин.

Если в графе есть хотя бы одна «плохая» вершина, то все «плохие» ребра выходят из нее, так как в противном случае сумма ребер, выходящих из «плохой» вершины (а она больше 200) и еще одного «плохого» ребра окажется больше 300. Следовательно, если в графе есть «плохая» вершина, то все «неплохие» вершины (их не меньше трех) соединены между собой «неплохими» ребрами.

Если в графе нет «плохих» вершин, то количество «плохих» ребер не больше двух, так как в противном случае сумма чисел, написанных на ребрах, окажется больше 300. Легко убедиться, что существует треугольник из «неплохих» ребер.

Итак, существуют вершины u, v и w, удовлетворяющие требуемым условиям. Теперь покажем, что участников можно разделить на три группы, в одной из которых будут говорить на языке U, во второй — на V, в третьей — на W.

Пусть несколько участников конференции определены в группы U, V, W. Возьмем человека A, которого нужно поместить в одну из групп. Предположим, что он говорит только на языке U. Если эта группа не заполнена, то поместим A в U. Предположим, что в группе уже 100 человек. Тогда найдем в U участника B, который владеет языком V или W. Такой человек существует, поскольку в противном случае ребро (v, w) окажется «плохим». Пусть B знает язык V. Если эта группа не заполнена, то отправим туда B, а на его место в группу U поместим A.

Предположим, что группа U тоже заполнена. Тогда существует человек C из группы U, который знает язык W, так как в противном случае язык W не знает более 200 человек и вершина W плохая.

Такие же рассуждения проводятся в случае, когда участник A знает два языка из языков U, V, W.

Поступая таким образом, распределим участников по группам. ▷

45 Группа, в составе которой Петр совершил туристскую поездку, состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Петр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

Решение. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. Если утверждение Петра верно, то каждая из пятнадцати вершин графа имеет степень 5. В произведении $15 \cdot 5 = 75$ каждое ребро учитывается дважды, так как оно соединяет две вершины. Поэтому в графе должно быть $75/2 = 37{,}5$ ребер, что невозможно. Следовательно, утверждение Петра неверно. ▷

46 Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки именно от тех, кому напишет сам.

Решение. Предположим, что на вопрос, поставленный в задаче, ответ положителен. Построим граф G, в котором вершины, соответствующие школьникам, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие школьники обменялись открытками. Тогда граф G будет состоять из 11 вершин степени 3, что невозможно (см. решение предыдущей задачи). $\triangleright$

47 Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

Решение. Построим граф G, в котором вершины изображают отрезки, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им отрезки пересекаются. Предположим, что можно нарисовать отрезки указанным способом. Тогда граф будет состоять из 9 вершин степени 3, что невозможно (см. предыдущие задачи). $\triangleright$

48 Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четное.

Решение. Построим граф G, в котором каждая вершина будет соответствовать какому-либо человеку, жившему на Земле, и две вершины будут соединять столько ребер, сколько раз жали друг другу руки люди, соответствующие этим вершинам.

Граф, у которого существуют пары вершин, соединенные несколькими ребрами, называется ***мультиграфом***.

Докажем утверждение, которое верно и для графов, и для мультиграфов.

Лемма о рукопожатиях. *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.*

Доказательство. Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Сложив степени вершин графа G $d(1), d(2), \ldots, d(n)$, мы получим сумму, в которую каждое ребро входит дважды, поскольку каждое ребро вносит по единице в степень ровно двух вершин. Поэтому

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = 2m.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие. Число вершин нечетной степени в графе четное.

Доказательство. Действительно, если предположить противное, то сумма степеней вершин графа окажется нечетным числом, что противоречит лемме о рукопожатиях. □

Из следствия сразу вытекает решение задачи. ▷

(*Примечание.* Задачи 45–47 можно решить, используя следствие из леммы о рукопожатиях.)

49 В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

Решение. Построим мультиграф G мостов, в котором острова будут соответствовать вершинам, а мосты между ними — ребрам.

Пусть на берег не ведет ни один мост. Тогда все семь вершин графа G будут иметь нечетную степень, что противоречит следствию из леммы о рукопожатиях. Следовательно, хотя бы один из мостов должен идти на берег. ▷

50 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог между городами?

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины изображают города, а ребра — дороги. Такой граф будем называть ***графом дорог.*** Из условий задачи следует, что степень каждой вершины графа G равна трем. Пусть граф G имеет n вершин. Из леммы о рукопожатиях следует, что $2 \cdot 100 = 3n$. Последнее равенство при целых n невозможно. Поэтому ответ на вопрос, поставленный в задаче, отрицательный. ▷

51 В шахматном турнире по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч, а все остальные разное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

Решение. По условию в этом графе ровно две вершины имеют одинаковые степени, а степени остальных вершин различны. Занумеруем вершины так, чтобы $d(1) \leqslant d(2) \leqslant \ldots \leqslant d(5)$. Каждая из степеней вершин графа принадлежит множеству $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Очевидно, что в графе одновременно не могут присутствовать вершина степени 0 и вершина степени 4.

Пусть в графе нет вершины степени 0. Рассмотрим возможные наборы степеней вершин. Существование графов с наборами степеней $(1, 1, 2, 3, 4)$ и $(1, 2, 3, 3, 4)$ невозможно из-за следствия из леммы о рукопожатиях.

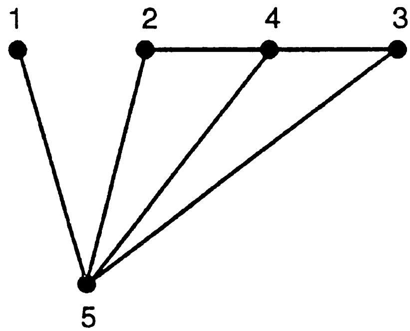


Рис. 30

Если граф имеет степени вершин $(1, 2, 3, 4, 4)$, то в таком графе только одна вершина степени 1, а каждая из вершин степени 4 должна быть смежна с любой вершиной графа. Поэтому такой граф невозможен.

В графе обязательно есть вершина любой степени из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, так как в противном случае в графе было бы больше, чем две вершины с одинаковой степенью. Следовательно, $d(1) = 1$, $d(5) = 4$. В графе не может быть двух вершин степени 4, поскольку в противном случае в графе не было бы вершины степени 1, так как любая вершина степени 1 будет смежной со всеми вершинами графа.

Граф со степенями вершин $(1, 2, 2, 3, 4)$ изображен на рис. 30.

Аналогично рассматриваем случай, когда в графе G нет вершины степени 4. Тогда граф G имеет вид как на рис. 31.

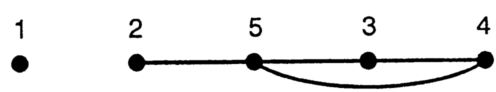


Рис. 31

В обоих случаях Ваня и Леша сыграли по две партии. ▷

52 В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем 3 каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке?

Решение. Построим граф G, в котором озера будут соответствовать вершинам, а каналы — ребрам. По условию задачи степень каждой вершины графа G не меньше 3. По лемме о рукопожатиях число ребер (каналов) равно сумме степеней вершин, деленной на 2. Минимальное число ребер получается, если степень одной вершины будет равна 4, а остальных вершин — 3. Поэтому в парке $(4\cdot 1+3\cdot 8)/2 = 14$ каналов. Для окончания решения нужно построить граф, имеющий требуемые степени вершин. Сделайте это в качестве упражнения.

53 Марсиане очень любят танцевать танцы, в которых нужно браться за руки. В танце «Дружба» может участвовать не более 7 марсиан, у каждого из которых не более трех рук. Какое наибольшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

Решение. Построим граф G, в котором вершины будут обозначать марсиан, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им марсиане взялись за руки. Тогда степень вершины будет соответствовать количеству рук марсианина, а сумма степеней — числу рук, участвующих в танце. По лемме о рукопожатиях граф не может иметь 7 вершин нечетной степени. Поэтому наибольшая возможная сумма степеней графа G получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 3 и одну вершину степени 2. У танцующих 20 рук. Для окончания решения нужно построить граф, имеющий требуемые степени вершин. Сделайте это в качестве упражнения.

54 В танце «Большая дружба» может участвовать не менее 7 марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук. Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

Решение. Построим граф, как в предыдущей задаче. Наименьшая возможная сумма степеней графа получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 5 и одну вершину степени 6. Поэтому у танцующих 36 рук. Для окончания решения нужно построить граф, имеющий требуемые степени вершин. Сделайте это в качестве упражнения.

55 Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два таких человека, которые будут иметь четное число общих знакомых.

Решение. Опишем знакомство людей в компании графом знакомств. Предположим, что существует граф с четным числом вершин, у которого для двух любых вершин число общих смежных вершин нечетное. Рассмотрим произвольную неизолированную вершину u. Обозначим через $N_1(u)$ множество, состоящее из вершин, смежных с u, через $N_2(u)$ — множество вершин, несмежных с u. Для любой вершины v из $N_1(u)$ и вершины u число общих смежных с ними вершин нечетно, и все они принадлежат $N_1(u)$. Поэтому степень любой вершины подграфа, порожденного множеством $N_1(u)$, нечетна. Из леммы о рукопожатиях следует, что множество $N_1(u)$ содержит нечетное количество вершин. Следовательно, степень вершины u также четная.

Поскольку u — произвольная вершина графа, то степень любой вершины графа четная.

Рассмотрим произвольную вершину w из $N_2(u)$. Вершины u и w имеют нечетное число общих смежных вершин, и все эти вершины принадлежат $N_1(u)$. Поэтому степень вершины w в подграфе, порожденном множеством $N_2(u)$, нечетная. Из леммы о рукопожатиях следует, что множество $N_2(u)$ содержит четное количество вершин. Отсюда вытекает, что граф знакомств содержит нечетное число вершин, что противоречит условию.

Поэтому в любой компании, состоящей из четного числа человек, найдутся два таких человека, которые будут иметь четное число общих знакомых. ▷

56 Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний, поставив в соответствие городам страны вершины графа, а авиалиниям — ребра. Вообще говоря, граф G может оказаться несвязным. Нужно доказать, что вершины графа, соответствующие столице и городу Дальнему, принадлежат одной компоненте графа. Это вытекает из следствия из леммы о рукопожатиях, так как в противном случае компоненты, содержащие вершины, обозначающие столицу и город Дальний, будут иметь ровно по одной вершине нечетной степени. Поэтому нужные нам вершины будут принадлежать одной компоненте графа G, и из столицы можно долететь до города Дальний. ▷

57 В стране из каждого города выходит ровно по 12 дорог, по которым из любого города можно добраться в любой другой. Для ремонта закрыли одну дорогу. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться в любой другой.

Решение. Для данной страны построим граф дорог. Степень каждой вершины графа равна 12. Для решения задачи следует доказать, что удаление любого ребра оставляет граф связным.

Предположим противное. Тогда после удаления ребра получаются два графа, у каждого из которых ровно одна вершина имеет нечетную степень — 11, что противоречит следствию из леммы о рукопожатиях.

Следовательно, после закрытия любой из дорог доступность городов друг для друга не нарушается. ▷

58 В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех участников по крайней мере двое не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

Решение. Построим граф G встреч участников. В этом графе рассмотрим вершину наибольшей степени k, которая соответствует игроку, сыгравшему наибольшее число партий. Никакие из k вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$, смежных с вершиной v, не могут быть смежными между собой, так как в этом случае в графе G будет подграф K_3, что запрещено условиями задачи. Каждая из вершин v_i может быть смежна, кроме вершины v, лишь с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_{10-k}$, не входящими в множество $\{v_1, \ldots, v_k\}$ (см. рис. 32).

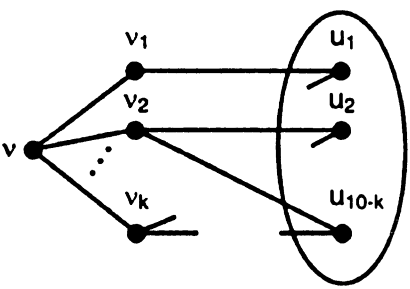


Рис. 32

Поэтому степень любой вершины v не превышает $(11-k)$. Из правила выбора вершины v следует, что степень любой вершины u не превышает k.

Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$2m = d(v) + d(v_1) + \ldots + d(v_k) + d(u_1) + \ldots + d(u_{10-k}) \leqslant$$
$$\leqslant k + k(11-k) + (10-k)k = k + 11k - k^2 + 10k - k^2 = 22k - 2k^2.$$

Отсюда $m \leqslant k(11-k)$.

Выражение $k(11-k)$ принимает свое наибольшее значение 30 при $k = 5$ и $k = 6$ (напомним, что k — целое). Следовательно, в графе G не больше 30 ребер, и участники провели не более 30 встреч. ▷

59 В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой.

Решение. Построим граф G встреч команд. По условию задачи в графе нет порожденных пустых подграфов O_3.

Рассмотрим вершину v_0, которая имеет наименьшую степень k. Смежные с ней вершины тоже будут иметь степень не меньшую, чем k. Каждая пара из оставшихся $(19-k)$ вершин должна быть смежна между собой, так как в противном случае несмежная пара вместе с вершиной v_0 будет порождать граф O_3. Поэтому степень каждой из оставшихся вершин не меньше, чем $(18-k)$.

Итак, граф G имеет $(k+1)$ вершину степени не меньшей, чем k, и $(19-k)$ вершин степени не меньшей, чем $(18-k)$.

Как и в задаче 58, воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$2m \geqslant k(k+1)+(19-k)(18-k)=$$
$$=2k^2-36k+18\cdot 19=2(k-9)^2+180 \geqslant 180.$$

Следовательно, в графе G должно быть не менее 90 ребер.

В качестве примера такого графа можно взять несвязный граф, две компоненты которого — полные графы K_{10}.

Поэтому наименьшее число игр, которое проведут команды равно 90. ▷

60 Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет ни одной такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой. Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся.

Решение. Поставим в соответствие мушкетерам вершины графа G. Если два мушкетера поссорились, то соответствующие вершины соединим ребром. По условию в графе G нет порожденных подграфов K_3. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G существует порожденный подграф O_4.

Предположим, что в графе G есть вершина u степени 4. Среди смежных с ней вершин u_1, u_2, u_3, u_4 нет ни одной пары вершин, смежных между собой, так как в противном случае в графе G был бы подграф K_3, что запрещено условиями задачи. В этом случае вершины u_1, u_2, u_3, u_4 порождают нужный граф O_4.

Пусть теперь наибольшая из степеней вершин графа не превосходит трех. В графе G обязательно есть вершина (пусть v), степень которой не больше двух, так как в противном случае в графе будет 9 вершин нечетной степени, что невозможно (см. следствие из леммы о рукопожатиях).

Вершина v не смежна по крайней мере с шестью вершинами. Рассмотрим граф H, порожденный этими вершинами. Из задачи 29 следует, что в H есть или порожденный подграф K_3, или порожденный подграф O_3. Но существование K_3 запрещено условиями задачи. Поэтому некоторые три вершины v_1, v_2, v_3 порождают граф O_3. Добавив к этим вершинам вершину v, получим подграф O_4.

Среди мушкетеров, соответствующих вершинам этого подграфа, нет поссорившихся. ▷

61 У каждого из депутатов парламента не более трех противников. (Если депутат A — противник депутата B, то депутат B — противник депутата A.) Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины обозначают депутатов и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им депутаты являются противниками. Из условия следует, что степень каждой вершины графа G не больше трех. Для решения задачи мы должны разбить вершины графа G на два множества A и B так, чтобы степени вершин графа, порожденного множеством A, и степени вершин графа, порожденного множеством B, были не больше единицы. Разобьем вершины на два множества произвольным образом. Вершины, которые не будут удовлетворять требуемому условию, назовем «плохими». Предположим, что существует «плохая» вершина в одном из множеств. Переместим ее в противоположное множество (см. рис. 33, где v — «плохая» вершина).

В результате переноса число ребер, соединяющих вершины множеств A и B, увеличится. Такие перемещения будем производить до тех пор, пока в графе будут оставаться «плохие» вершины.

Поскольку после каждого переноса количество ребер между вершинами множеств A и B увеличивается, а число ребер в графе ко-

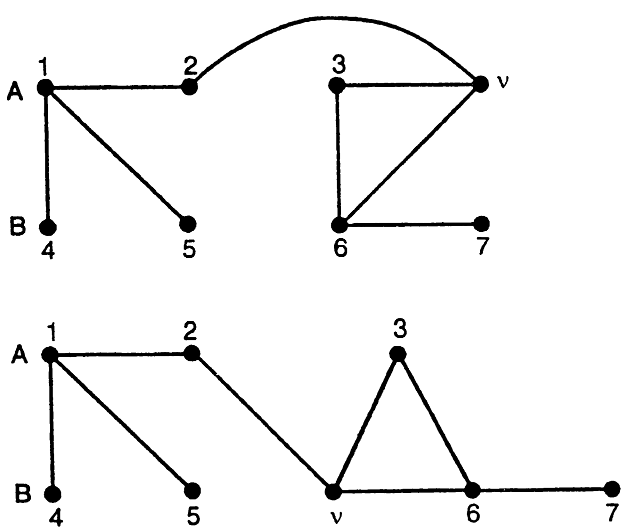


Рис. 33

нечно, то, в конце концов, мы придем к нужному разбиению, которое определит разбиение депутатов по палатам. ▷

62 В море живут осьминожки. У каждого из них или один, или два друга. Когда взошло солнце, те, у кого было двое друзей, посинели, а те, у кого один друг, — покраснели, и оказалось, что любые два друга — разноцветные. Однако друзья должны иметь одинаковый цвет, и поэтому 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, а 12 красных — в синий. Сколько осьминожек живет в море?

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины будут изображать осьминожек, и две вершины будут соединены ребром, если соответствующие им осьминожки дружат. Перекраска осьминожек определяет такую же перекраску соответствующих им вершин графа.

Исследуем строение графа G.

Маршрутом *в графе называется такая последовательность чередующихся вершин v_i и ребер e_j графа*

$$(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, e_{k-1}, v_k),$$

что каждое ребро соединяет вершины последовательности, между которыми оно находится, т. е. ребро e_i соединяет вершины v_{i1} и v_{i+1}.

Маршрут, в котором все ребра различные, называется ***цепью.***

Цепь в графе можно задавать перечислением только вершин или только ребер.

Цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают, называется ***циклом.***

Из условия вытекает, что степень каждой вершины графа равна или 1, или 2. Значит, компонентами графа могут быть только цепи или циклы. Однако после перекраски все вершины каждого цикла станут синими, что запрещено условиями задачи. Поэтому циклы в графе G отсутствуют. Так как после перекраски все вершины цепей, кроме концевых, станут синими, то в G отсутствуют цепи, состоящие более, чем из двух ребер. Итак, компонентами графа G являются цепи, состоящие из двух ребер. Концевые вершины цепей красные, а центральные — синие. В каждой цепи две вершины красные, а одна синяя. Поэтому в графе есть 6 цепей, в которых вершины перекрасятся в синий цвет, и 10 цепей, в которых вершины перекрасятся в красный цвет, всего 16 цепей. Поэтому в графе G будет 48 вершин, а в море 48 осьминожек. ▷

63 На симпозиуме каждый ученый знаком хотя бы с одним из остальных ученых, но не со всеми. Докажите, что ученых можно разбить на две группы так, что каждый участник симпозиума будет знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

Решение. Цепь графа называется ***простой*** цепью, если все ее вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Рассмотрим граф G знакомств участников. Пусть граф состоит из нескольких компонент. По условию в каждой компоненте не менее двух вершин. В этом случае произвольным образом распределим компоненты графа по группам, так чтобы в каждую группу попала хотя бы одна компонента.

Пусть граф связный, и в графе существует простая цепь $L = (v_1, v_2, \dots v_k)$, $k \geqslant 4$, состоящая более чем из двух ребер и не являющаяся циклом. Разделим цепь L на две цепи, каждая из которых содержит не менее двух вершин. Отнесем вершины одной цепи к первой группе, вершины второй цепи — ко второй группе.

Остальные вершины отнесем к группам по следующему правилу. Если вершина v принадлежит к какой-то группе, то поместим в эту группу все вершины, смежные с вершиной v и не отнесенные до этого ни к какой группе.

Если наибольшее число ребер в простой цепи равно 1, или 2, или 3 и граф является циклом, то нетрудно показать, что в графе найдется вершина, смежная с остальными вершинами. Это противоречит тому, что никто из участников не знаком со всеми остальными участниками.

Разбиение вершин определит разбиение участников на группы. ▷

64 Маршруты № 1 и № 2 полицейских патрульных машин начинаются и заканчиваются, соответственно, на перекрестках A и B (A не совпадает с B). Каждый из них включает отрезок улицы между перекрестками C и D и не содержит ни одного перекрестка дважды. Докажите, что можно создать маршрут патрулирования № 3, который не будет включать отрезок (C, D) и не будет содержать ни одного перекрестка дважды. Всегда ли можно так создать маршрут № 3, чтобы он проходил через перекрестки A и B?

Решение. *Цикл графа называется **простым** циклом, если все его вершины различны.*

Пусть перекрестки и улицы города естественным образом задают граф. Тогда маршруты патрулирования определяют разные простые циклы, содержащие некоторое общее ребро.

Решение задачи вытекает из следующего утверждения:

Утверждение. Если C_1 и C_2 — два несовпадающих простых цикла, имеющих некоторое общее ребро e, то объединение циклов C_1 и C_2 без ребра e содержит простой цикл.

Доказательство. Пусть ребро e соединяет вершины a и b. Тогда C_1 без ребра e и C_2 без ребра e — две разные простые цепи, $L_1 = (a = u_1, u_2, \ldots, b)$, $L_2 = (a = v_1, v_2, \ldots, b)$, соединяющие вершины a и b. Пусть u_k и v_k — первые из несовпадающих вершин этих цепей, считая от вершины a, u_p и v_s — первые из совпадающих вершин, следующих после u_k и v_k. Тогда $k > 1$ и объединение частей цепей L_1 и L_2 между вершинами $u_{k-1} = v_{k-1}$ и $u_p = v_s$ является простым циклом (см. рис. 34).

Утверждение доказано. □

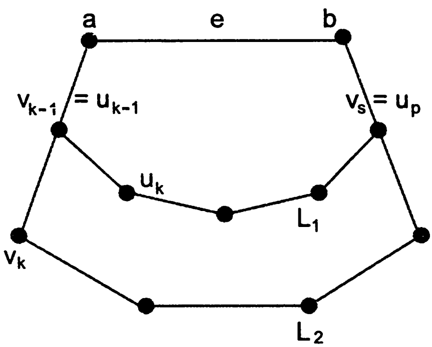


Рис. 34

Рис. 34 показывает, что построенный простой цикл не обязательно содержит вершины a и b. ▷

65 В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены авиалиниями, причем для каждого города число городов, с которыми он соединен, не меньше четырех. Докажите, что возможно путешествие с числом перелетов не менее пяти, которое начинается и оканчивается в одном городе, причем каждый промежуточный город будет посещаться только один раз.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний, в котором наименьшая степень $\delta(G)$ вершины не меньше четырех. Докажем, что в графе G существует простой цикл, содержащий не менее $(\delta(G) + 1)$ ребер.

Рассмотрим простую цепь $L = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ графа G наибольшей длины. Из вершины v_1 выходят четыре ребра, которые соединяют v_1 только с вершинами цепи L, так как в противном случае окажется, что существует простая цепь более длинная, чем L.

Пусть v_k — вершина с наибольшим индексом среди вершин цепи L. Тогда цикл $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ содержит не менее $(\delta(G) + 1)$ ребер.

Поэтому требуемое путешествие возможно. ▷

66 В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены беспересадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу одной компании. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из компаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.

Решение. Построим граф G авиалиний и раскрасим его ребра в соответствии с принадлежностью рейсов авиакомпаниям. Граф будет связным, и из каждой его вершины будут выходить N ребер разного цвета. Необходимо доказать, что после удаления $N - 1$ ребра разного цвета граф останется связным.

Предположим, что в графе удалено ребро $e = (u, v)$ красного цвета, а ребра зеленого цвета не удалялись. Рассмотрим подграф H графа G, порожденный ребрами красного и зеленого цветов. Так как из каждой вершины графа G выходит ровно одно красное и одно зеленое ребро, то степень вершин подграфа H равна двум, и поэтому компонентами подграфа H будут циклы. Следовательно, ребро (u, v) лежит на цикле из красных и зеленых ребер. Так как в графе возможно удаление только одного красного ребра, то после удаления ребра (u, v) в графе остается цепь, соединяющая u и v.

Рассмотрим теперь две произвольные вершины w_1 и w_2, соединенные в графе G цепью. Удаление ребер может разрушить эту цепь, однако каждое ребро, удаленное из цепи, можно заменить на некоторую цепь, соединяющую концы этого ребра, как было сделано ранее.

Отсюда вытекает, что получившийся граф является связным и, следовательно, из любого города можно долететь в любой другой. ▷

67 В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. (Если A — друг (враг) B, то B — друг (враг) A.) Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

Решение. *Граф, вершины которого можно разбить на два множества (две* ***доли****) таким образом, что каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств, называется* ***двудольным****.*

Очевидно, что графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 35, являются двудольными. (Вершины одной доли помечены I, второй — II.) На первый взгляд граф G_3 на том же рисунке не является двудольным. Однако его вершины *можно* разбить нужным образом (см. рис. 36), поэтому он также двудольный. А вот требуемое разбиение вершин графа G_4 не существует, и этот граф двудольным не будет.

Длиной *цепи называется число содержащихся в ней ребер.*

Расстоянием *между двумя вершинами графа называется наименьшая из длин цепей, соединяющих эти вершины. Расстояние между вершинами u и v обозначается $d(u, v)$.*

Для решения задачи построим граф знакомств G, в котором вершины будут соединены зеленым ребром, если соответствующие им люди дружат, и красным — если враждуют. Из каждой вершины графа

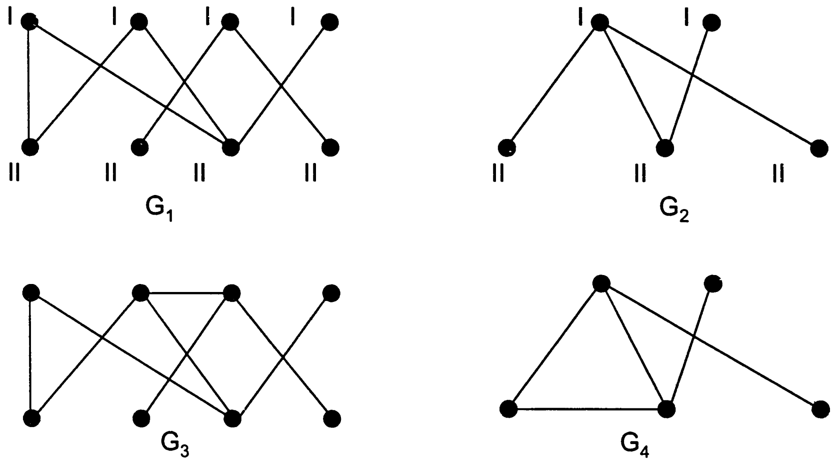


Рис. 35

выходит ровно по одному зеленому и красному ребру, поэтому степень каждой вершины равна двум. Следовательно, каждая компонента графа G является циклом, а так как в этом цикле зеленые и красные ребра чередуются, то циклом, содержащем четное число ребер. Покажем, что граф G — двудольный граф.

Теорема Кенига (1936). Для того чтобы граф был двудольным, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — двудольный граф, C — один из его циклов длины k. Пройдем все ребра этого цикла в той последовательности, в какой они в нем расположены, начиная с некоторой вершины v. Так как концы каждого ребра лежат в разных долях, то k — четное число.

Достаточность. Не теряя общности, можно рассматривать только связные графы. Пусть связный граф G не имеет циклов нечетной длины.

Рассмотрим произвольную вершину v_0 и построим разбиение вершин графа G на два класса A и B следующим образом: к классу A отнесем вершину v_0 и любую такую вершину u, что расстояние между u и v_0 четное, к классу B отнесем любую такую вершину u, что расстояние между u и v_0 нечетное. Остается доказать, что любые две вершины из множества A или любые две вершины из множества B не смежны.

Пусть, например, существуют две смежные вершины u и v, входящие в один класс. Тогда ни одна из них не совпадает с v_0, так как вершина v_0 принадлежит классу A, а все смежные с ней верши-

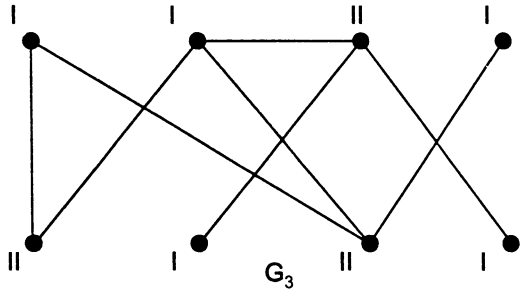


Рис. 36

ны — классу B. Пусть, далее, U — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и u, V — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и v. Обозначим через $v_1, v_2, \dots, v_p$ общие вершины цепей U и V, считая от вершины v_0 (см. рис. 37).

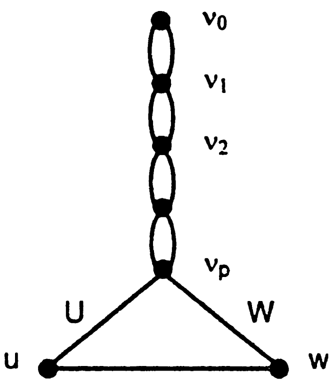


Рис. 37

Поскольку U и V — кратчайшие цепи, то их части от вершины v_0 до вершины v_1 имеют одинаковые длины. То же самое можно сказать и о частях цепей U и V от любой вершины v_i до вершины v_{i+1}. Поэтому части цепей от вершины v_p до вершин u и v имеют одинаковые четности. Но тогда объединение этих частей и ребра (u, v) является циклом нечетной длины, что запрещено условиями теоремы.

Теорема доказана. □

Из теоремы Кенига вытекает, что построенный граф знакомств является двудольным. Разбиение его вершин на доли A и B определит разбиение группы людей на две компании. ▷

68 В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

Решение. *Двудольный граф, у которого каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, называется* ***полным двудольным графом.*** *Полный двудольный граф, доли которого состоят из* p *и* q *вершин, обозначается* $K_{p,q}$*. На рис.* 38 *изображены некоторые полные двудольные графы. Граф* $K_{1,p}$ *называется* ***звездой.***

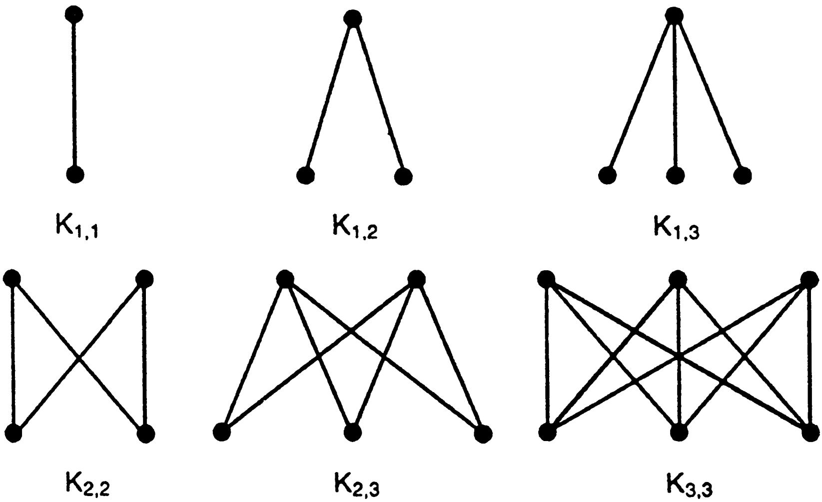


Рис. 38

Отметим, что одни и те же графы могут иметь различные обозначения. Например, $K_2 = K_{1,1}$.

Полный двудольный граф $K_{p,q}$ имеет $p \cdot q$ ребер.

Пусть в командах «синих» и «красных» по n игроков. Поставим в соответствие каждому игроку вершину графа и соединим ребрами вершины, соответствующие проведенным играм. Так как каждая пара игроков разных команд играла между собой, то получится полный двудольный граф $K_{n,n}$. Этот граф имеет n^2 ребер. Если встречу между двумя игроками выиграл «синий» игрок, то соответствующее ребро окрасим синим цветом, если «красный» — то красным. Обозначим через x число красных ребер, тогда синих будет $4x$. Всех ребер в графе n^2. Поэтому $4x + x = n^2$, $5x = n^2$. Отсюда $n = 5$.

В каждой команде было по пять игроков. ▷

69 Каждый город одной страны соединен с каждым городом другой страны ровно одним авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Рейсов первой компании в 6 раз больше, чем рейсов второй. Сколько городов может быть в странах, если известно, что в каждой из них не больше 10 городов и в одной стране на один город больше, чем в другой?

Решение. Пусть в одной стране p городов, а в другой — $p + 1$ город. Построим граф авиалиний. Так как соединены города различных стран, то это будет двудольный граф $K_{p,p+1}$. Если рейс принадлежит первой компании, то окрасим соответствующее ребро синим цветом, если второй — зеленым цветом. Пусть зеленых ребер будет x, тогда синих — $6x$, а всех ребер — $7x$.

С другой стороны, в графе $K_{p,p+1}$ будет $p(p+1)$ ребер. Следовательно, $p(p+1) = 7x$.

Отсюда, с учетом того, что числа p и x целые, вытекает, что в странах или 6 и 7 городов, или 7 и 8 городов. ▷

70 В двух делегациях вместе 22 человека. При встрече члены одной делегации обменялись рукопожатиями с членами другой делегации. Всего было сделано 121 рукопожатие. Докажите, что в делегациях одинаковое число членов.

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины обозначают членов делегаций, и две вершины будут соединены ребром, если соответствующие им люди обменялись рукопожатием.

Пусть в делегациях p и q членов $(p+q=22)$. Рассмотрим полный двудольный граф $K_{p,q}$, который, как показано в задаче 68, имеет $p \cdot q$ ребер. Поскольку $q = 22 - p$, то число ребер в графе $K_{p,q}$ является функцией от p и равно $f(p) = p(22-p) = -p^2 + 22p$. Функция $f(p)$ имеет максимум при $p = 11$, и этот максимум как раз равен 121. Поэтому в делегациях по 11 человек, и все члены разных делегаций обменялись рукопожатиями. ▷

71 За столом сидит 5 мальчиков и 7 девочек, а на столе в вазе лежат конфеты. Некоторые из детей знакомы. Каждая девочка дала по конфете из вазы знакомому мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете из вазы незнакомой девочке. После этого в вазе не осталось конфет. Сколько конфет было в вазе?

Решение. Поставим в соответствие детям вершины графа. Соединим две вершины зеленым ребром, если соответствующие мальчик и девочка знакомы, и красным, если незнакомы. Получим полный двудольный граф $K_{5,7}$, ребра которого раскрашены в два цвета. В графе $5 \cdot 7 = 35$ ребер. Каждому ребру графа соответствует ровно одна конфета, так как если ребро зеленое, то конфету получает мальчик, если красное — девочка. Следовательно, в вазе было 35 конфет. ▷

72 Каждый город одной страны соединен авиарейсами более чем с половиной городов другой страны. Из-за забастовки авиадиспетчеров в странах внутренние авиарейсы были отменены и остались только международные. Докажите, что, пользуясь ими, можно добраться из любого города одной страны в любой город этой же страны, сделав не более одной пересадки.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний. Необходимо доказать, что он будет связным.

Поскольку учитываются только рейсы между странами, то граф G двудольный. Рассмотрим две любые вершины u и v, принадлежащие какой-нибудь из долей. Так как каждая из этих вершин смежна более, чем с половиной вершин другой доли, то существует вершина w, смежная и с u, и с v. Поэтому граф G связный. Любые две вершины в нем соединяет цепь с одной промежуточной вершиной. Эта цепь определяет маршрут перелета. ▷

73 Каждый из учеников 9 «а» класса дружит ровно с тремя учениками 9 «б» класса, а каждый ученик 9 «б» класса дружит ровно с тремя учениками 9 «а» класса. Докажите, что число учеников в этих классах одинаково.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, описывающий дружбу учеников классов. Каждая из вершин графа G имеет степень, равную трем.

Теорема о сумме степеней вершин двудольного графа. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — вершины одной доли, а u_1, $u_2, \ldots, u_p$ — вершины другой доли. Тогда из одной доли выходит $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_k)$ ребер, а из другой — $d(u_1)+d(u_2)+\ldots+d(u_p)$ ребер. Равенство сумм следует из того, что это одни и те же ребра. Теорема доказана. □

Пусть 9 «а» классу соответствует доля A графа G, в которой будет m вершин, а 9 «б» — доля B, в которой будет n вершин. Число ребер, выходящих из вершин доли A, равно $3m$, а из вершин доли B — $3n$. Из теоремы следует, что $3m = 3n$. Отсюда следует, что $n = m$, и число учеников в классах одинаково. ▷

74 В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Каждая девочка дружит ровно с 3 мальчиками. Количество девочек, с которыми дружат мальчики, одинаково. Со сколькими девочками дружит каждый мальчик?

Решение. Пусть каждый мальчик дружит ровно с k девочками. Рассмотрим двудольный граф, описывающий дружбу мальчиков и девочек. Сумма степеней вершин доли, соответствующей девочкам, равна $16 \cdot 3 = 48$, а сумма степеней вершин доли, соответствующих мальчикам, равна $12k$. Из теоремы о сумме степеней вершин долей двудольного графа следует, что $16 \cdot 3 = 12k$. Отсюда $k = 4$, и каждый мальчик дружит с четырьмя девочками. ▷

75 Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными, а каждый вертикальный ровно с тремя горизонтальными?

Решение. Построим граф, в котором вершины обозначают отрезки, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им отрезки пересекаются. Поскольку горизонтальные отрезки пересекаются только с вертикальными, а вертикальные — только с горизонтальными, то построенный граф будет двудольным. Сумма степеней вершин, соответствующих горизонтальным отрезкам, равна 15, сумма степеней вершин, соответствующих вертикальным отрезкам, равна 16. Однако по теореме, доказанной в задаче 73, эти суммы должны быть равны.

Следовательно, заданный рисунок невозможен. ▷

76 В двух странах вместе 11 городов. Между некоторыми городами разных стран открыты авиарейсы (не более одного между двумя городами). Известно, что один город соединен рейсами с семью, один — с пятью, пять — с двумя, четыре — с одним городом. Сколько городов в странах?

Решение. Рассмотрим граф авиалиний. Так как учитывается сообщение только между городами разных стран, то граф будет двудольным. Из теоремы, доказанной в задаче 73, суммы степеней вершин долей графа должны быть одинаковы, т. е. равны 13.

Рассмотрим одну из возможностей получения одинаковых сумм:

$$S_1 = 7 + 5 + 1, \quad S_2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1.$$

Легко убедиться, что существует двудольный граф со степенями вершин, в одной доле равными $7, 5$ и 1, и во второй доле равными $2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$. (Соответствующий граф постройте самостоятельно.)

Рассмотрим другую возможность получения одинаковых сумм:

$$S_1 = 7 + 2 + 2 + 2, \quad S_2 = 5 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Графа, соответствующего предложенному разбиению, не существует, поскольку вершина степени 5 должна быть соединена с пятью вершинами другой доли, а их только 4.

Аналогично показывается невозможность и других разбиений вершин на две группы.

Следовательно, в одной стране 3 города, а во второй — 8. ▷

77 В классе каждый мальчик дружит ровно с четырьмя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. В классе 16 парт, а на последней экскурсии было 23 школьника. Сколько учеников в классе?

Решение. Поставим в соответствие ученикам вершины графа G, а если два ученика дружат, то соединим ребром соответствующие им вершины. Поскольку мы учитываем лишь дружбу мальчиков и девочек, то граф G будет двудольным.

Пусть мальчикам соответствует доля A графа, в которой m вершин, а девочкам — доля B, в которой n вершин. Из вершин доли A выходит $4m$ ребер, а из вершин доли B — $3n$. Так как это одни и те же ребра, то $4m = 3n$ и $n = 4m/3$.

Из условий задачи следует, что $23 \leqslant m + n \leqslant 32$. Отсюда $23 \leqslant 7m/3 \leqslant 32$. Решив последнее неравенство и учитывая целочисленность m, получаем, что $10 \leqslant m \leqslant 13$. Поскольку m должно делиться на 3, то $m = 12$. Отсюда $n = 16$. В классе 28 учеников. ▷

78 В школе, где учатся 6 друзей: Вася, Сережа, Женя, Коля, Петя и Миша, работают несколько кружков. Известно, что каждый из кружков посещает ровно пятеро из друзей, причем Вася посещает больше всех кружков — 8, а Миша меньше всех — 5. Сколько кружков в школе?

Решение. Построим двудольный граф, вершины одной доли которого (n штук) обозначают кружки, а вершины другой — мальчиков. Две вершины соединены ребром, если соответствующий одной вершине школьник посещает соответствующий другой вершине кружок. Из теоремы о сумме степеней вершин двудольного графа, следует, что

$$5n = d(\text{В}) + d(\text{С}) + d(\text{Ж}) + d(\text{К}) + d(\text{П}) + d(\text{М}),$$

где справа стоит сумма степеней вершин, обозначающих мальчиков.

Отсюда

$$5n = 8 + d(\text{С}) + d(\text{Ж}) + d(\text{К}) + d(\text{П}) + 5.$$

Слева в равенстве записано число, которое делится на 5. Поэтому сумма справа также должна делиться на 5. Из условий задачи вытекает, что

$$6 \leqslant d(\text{С}), d(\text{Ж}), d(K), d(\text{П}) \leqslant 7.$$

Поэтому $37 \leqslant 5n \leqslant 41$. Отсюда n равно 8. Далее нужно показать, что требуемый граф существует. Сделайте это самостоятельно.

Построенный граф показывает, что в школе 8 кружков. ▷

79 На олимпиаде восьмых классов первую задачу решили 9 учеников 8 «а» класса, вторую — 7, третью — 5, четвертую — 3, пятую — один ученик 8 «а» класса. Все ученики 8 «а» класса кроме Пети решили одинаковое число задач, а Петя на одну задачу больше. Стал ли Петя призером олимпиады, если призерами стали ученики, решившие 4 или 5 задач?

Решение. Пусть каждый из n учеников 8 «а» класса решил по x задач, тогда Петя решил $(x+1)$ задачу. Рассмотрим двудольный граф, в котором пять вершин одной доли обозначают задачи, $(n+1)$ вершина второй доли — учеников 8 «а» класса, и две вершины соединены ребром, если ученик решил соответствующую задачу.

Из теоремы о сумме степеней долей вершин двудольного графа следует, что

$$9+7+5+3+1 = nx + (x+1),$$

или

$$24 = (n+1)x.$$

Число 24 должно делиться на $(n+1)$. Из условия вытекает, что $(n+1) \geqslant 9$. Поэтому $(n+1) = 12$ или $(n+1) = 24$. Отсюда $x = 2$ или $x = 1$, и Петя решил или 3, или 2 задачи. Следовательно, Петя не стал призером олимпиады. ▷

80 Каждый из участников олимпиады решил различное число задач, и каждая из задач была решена различным числом участников. Докажите, что существует школьник, решивший ровно одну задачу.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, как в предыдущей задаче. Не теряя общности, можно считать, что в графе G нет вершин нулевой степени.

Пусть в доле A графа будет n, а в доле B — m вершин, d_n — максимальная из степеней вершин доли A. Поскольку степени вершин доли A различны, то $d_n \geqslant n$. С другой стороны, $d_n \leqslant m$, и следовательно, $n \leqslant m$. Аналогично доказывается, что $m \leqslant n$. Отсюда $n = m$ и $d_n = m$.

Поэтому минимальная из степеней вершин доли A равна единице. Точно так же доказывается, что минимальная из степеней доли B равна единице. Следовательно, есть участник олимпиады, решивший ровно одну задачу, и есть задача, которую решил ровно один участник. ▷

81 Каждый из учеников 9 «а» класса дружит не менее, чем с половиной учеников 9 «б» класса, а каждый из учеников 9 «б» класса дружит не более, чем с половиной учеников 9 «а» класса. Докажите, что каждый из учеников 9 «а» класса дружит ровно с половиной учеников

9 «б» класса, а каждый из учеников 9 «б» класса дружит ровно с половиной учеников 9 «а» класса.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, описывающий дружбу школьников так, как в задаче 77. Пусть 9 «а» классу соответствует доля A, в которой будет m вершин, а 9 «б» — доля B, в которой будет n вершин.

Для любой вершины u из доли A ее степень $d(u) \geqslant n/2$, а для любой вершины v из доли B ее степень $d(v) \leqslant m/2$. Для числа ребер E_1, выходящих из вершин доли A, выполняется неравенство

$$|E_1| \geqslant m \cdot \frac{n}{2},$$

а для числа ребер E_2, выходящих из вершин доли B, неравенство

$$|E_2| \leqslant n \cdot \frac{m}{2}.$$

По теореме о сумме степеней вершин двудольного графа $|E_1| = |E_2|$. Это равенство возможно лишь в том случае, когда степень любой вершины из доли A будет равна $n/2$, а степень любой вершины из доли B — $m/2$.

Поэтому каждый ученик дружит ровно с половиной учеников другого класса. Отсюда, в частности, следует, что в каждом классе четное число учеников. ▷

82 Каждый сотрудник фирмы выписывает две газеты, и каждую газету выписывают пять человек, причем каждую пару газет выписывает ровно один человек. Сколько человек в фирме и сколько газет они выписывают?

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в котором n вершин доли A обозначают людей, а m вершин доли B — газеты, и две вершины u и v ($u \in A$, $v \in B$) соединены ребром, если человек, соответствующий вершине u, выписал газету, соответствующую вершине v. Степени вершин доли A равны двум, а степени вершин доли B — пяти. По теореме о сумме степеней вершин двудольного графа $2n = 5m$. По условию задачи число пар вершин доли B равно числу вершин доли A, т. е. $n = m(m-1)/2$. Решив построенную систему уравнений, получаем, что $m = 6$, $n = 15$.

В фирме 15 сотрудников, которые выписывают 6 газет. ▷

83 Некоторые пары учеников двух классов обменялись рукопожатиями. Докажите, что ученик, сделавший наименьшее число рукопожатий, и ученик, сделавший наибольшее число рукопожатий, сделали вместе рукопожатий не больше, чем учеников в двух классах.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины обозначают учеников и две вершины соединены ребром, если соответствующие им ученики обменялись рукопожатиями. Так как рукопожатиями обменивались ученики разных классов, то данный граф является двудольным. Для решения задачи нужно доказать, что для двудольного графа G с n вершинами выполняется соотношение

$$\delta(G) + \Delta(G) \leqslant n,$$

где $\delta(G)$ — наименьшая, $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней вершин графа G.

Пусть в долях графа G будет n_1 и n_2 вершин и $n_1 \leqslant n_2$. Тогда $\delta(G) \leqslant n_1$, $\Delta(G) \leqslant n_2$. Отсюда $\delta(G) + \Delta(G) \leqslant n_1 + n_2 = n$.

Поэтому число рукопожатий выбранных школьников не превосходит суммы учеников в классах. ▷

84 На танцевальном вечере в школе ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся два таких мальчика $М_1$ и $М_2$ и две таких девочки $Д_1$ и $Д_2$, что $М_1$ танцевал с $Д_1$ и не танцевал с $Д_2$, а $М_2$ танцевал с $Д_2$ и не танцевал с $Д_1$.

Решение. Опишем танцующие пары двудольным графом G, в котором вершины множества M соответствуют мальчикам, а вершины множества D — девочкам. Для решения нужно показать, что существуют такие вершины $m_i, m_j \in M$ и $d_r, d_s \in D$, что вершина m_i будет смежной с вершиной d_r и не смежной с вершиной d_s, а вершина m_j — смежной с вершиной d_s и не смежной с вершиной d_r.

Обозначим через A_i множество вершин, смежных с вершиной m_i. Предположим, что нужных вершин нет. В этом случае для любых двух индексов i и j или $A_i \subseteq A_j$, или $A_j \subseteq A_i$. Поэтому вершины из множества M можно занумеровать так, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_M$. По условию задачи множество A_M не совпадает с множеством D. Поэтому существует вершина из D, не смежная ни с одной вершиной из M. Но это противоречит другому условию задачи.

Следовательно, наше предположение ошибочно и необходимые вершины существуют. Они определят нужных нам детей. ▷

85 В стране 1000 городов, некоторые пары из которых соединены дорогами. Оказалось, что один конец любой дороги является городом, из которого выходит не более десяти дорог. Какое наибольшее число дорог может быть в этой стране?

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины обозначают города, а ребра — дороги. Из условия задачи следует, что степень одного из концов каждого ребра не более десяти.

Рассмотрим полный двудольный граф $K_{10,990}$, который удовлетворяет условиям задачи. В графе 9900 ребер. Покажем, что ребер больше быть не может. Назовем вершину «большой», если из нее выходит более десяти ребер, остальные вершины назовем «малыми». Рассмотрим два случая.

1. Пусть «больших» вершин не менее десяти. Тогда «малых» вершин не более 990. По условию конец любого ребра является «малой» вершиной, из которой выходит не более десяти ребер. Поэтому всех ребер не более 9900.
2. Пусть количество «больших» вершин $k < 10$, а «малых» — $(1000 - k)$. Поскольку никакие две «большие» вершины не соединены ребром, то степень каждой из них не более $(1000 - k)$. Степень каждой «малой» вершины не более десяти.

Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(1000) = 2m,$$

где m — число ребер графа. Тогда

$$k(1000 - k) + (1000 - k)10 \geqslant 2m.$$

Отсюда

$$m \leqslant \frac{1}{2}(1000 - k)(k + 10) < \frac{19}{2}(1000 - k) < \frac{19}{2}1000 = 9500 < 9900.$$

Следовательно, наибольшее возможное число дорог в стране равно 9900. ▷

86 Десять кандидатов готовятся к двум космическим экспедициям на Марс. Поскольку экспедиции будут продолжаться несколько лет, а их участники окажутся в замкнутом пространстве небольшого объема, то важное значение приобретает психологическая совместимость членов экипажа. Путем тестирования были установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной и той же экспедиции было бы нежелательным. Результаты тестирования отражены в таблице на стр. 62. (Если на пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы находится знак «+», то участие i-го и j-го кандидатов в одной экспедиции нежелательно.)
Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедициях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+						
2	+				+					
3	+						+			
4	+					+				
5		+						+		
6				+						+
7			+					+		+
8					+		+		+	
9								+		+
10						+	+		+	

Решение. Построим граф G кандидатов. Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа, а если два участника не могут находиться в одной экспедиции, то соединим соответствующие вершины ребром (см. рис. 39).

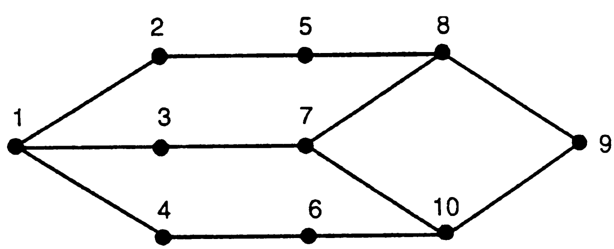


Рис. 39

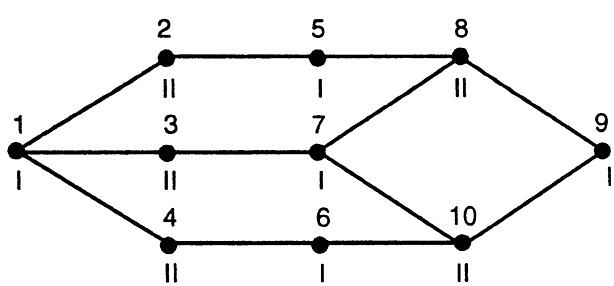


Рис. 40

Необходимо разбить вершины графа на два множества так, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных частей, т. е. показать, что граф G является двудольным.

Рассмотрим следующую процедуру, которая называется ***поиском в ширину***. Вершину 1 отнесем к первой группе. Затем смежные с ней вершины 2, 3, 4 отнесем ко второй группе. Смежные с одной из вершин 2, 3, 4 вершины 5, 6, 7 отнесем к первой группе и т. д., пока не разделим все вершины на две группы. В первую попадают вершины 1, 5, 7, 6 и 9, во вторую — 2, 3, 4, 8, 10 (рис. 40). Соответствующим будет и деление кандидатов на группы для участия в экспедициях.

Поиск в ширину позволяет проверить, является ли граф двудольным. Например, если бы в графе G было ребро $(7, 9)$, то деление его вершин по указанному правилу было бы невозможным. ▷

87 Города империи с ее k столицами соединены сетью дорог так, что из любого города в любой другой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что империю можно разделить на k республик P_1, $P_2, \ldots, P_k$ так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с любым городом республики ей принадлежал самый короткий путь из столицы в этот город. (Кратчайшим путем считается путь с минимальным числом дорог.)

Решение. Рассмотрим граф G дорог империи. Согласно условиям задачи, граф G является связным. Проведем специальный поиск в ширину в графе. Вершины, соответствующие столицам республик, назовем вершинами нулевого ранга (центрами) и отнесем к группам вершин $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Смежные с вершинами нулевого ранга вершины назовем вершинами первого ранга. Если некоторая вершина u первого ранга смежна только с одной вершиной v нулевого ранга, то отнесем u в ту же группу, что и v. Если вершина u первого ранга смежна с нескольким вершинами нулевого ранга, то отнесем ее в одну из групп, определяемую этими вершинами. Таким образом, мы отнесем вершины, смежные с центрами, к группам. На следующем шаге вершины, смежные с вершинами первого ранга и не попавшие в группы, назовем вершинами второго ранга, а затем распределим их по группам, как на предыдущем шаге. ▷

88 В школе три девятых класса: 9 «а», 9 «б» и 9 «в». Известно, что среди учеников 9 «а» класса есть такие, которые дружат более чем с половиной учеников 9 «б» класса и более чем с половиной учеников 9 «в». Кроме того, число учеников 9 «б» класса, каждый из которых дружит более чем с половиной учеников 9 «в» класса, больше половины всех учеников 9 «б» класса. Докажите, что из каждого класса можно выбрать по ученику так, чтобы они дружили друг с другом.

Решение. *Граф называется **n-дольным**, если его вершины можно разбить на n частей (**долей**) так, что каждое ребро будет иметь свои концы в разных долях.*

Рассмотрим граф G знакомств, как в предыдущих задачах. Поскольку мы учитываем лишь знакомства учеников различных школ, то граф G является 3-дольным. Обозначим через A, B, C его доли. Нужно доказать, что можно выбрать по одной вершине из каждой доли так, что они породят полный граф K_3.

По условию задачи существует вершина a из доли A, смежная более, чем с половиной вершин доли B и более, чем с половиной вершин доли C. Среди смежных с a вершин в доле B есть вершина b, смежная более, чем с половиной вершин доли C. Так как вершин, смежных с a и b, в доле C больше половины, то в доле C найдется вершина c, смежная и с a, и с b. Вершины a, b и c порождают полный граф, а ученики, соответствующие вершинам, дружат между собой. ▷

89 В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

Решение. Рассмотрим трехдольный граф знакомств, как в предыдущей задаче. По условию степень каждой вершины этого графа равна 301.

Выберем вершину, смежную с наибольшим числом вершин в одной из долей. Пусть, для определенности, это будет вершина u из доли A, которая смежна с p вершинами из доли B. Тогда она смежна с $(301 - p)$ вершинами из доли C. Рассмотрим любую вершину v из доли C, смежную с вершиной u. Если вершины u и v имеют общую смежную вершину из доли B, то задача решена. Пусть такой вершины не существует. Тогда вершина v смежна самое большее с $(300 - p)$ вершинами из доли B. Поскольку степень этой вершины 301, то она будет смежной самое меньшее с $(301-(300-p))=p+1$ вершиной из доли A. Но это противоречит выбору вершины u. Поэтому вершины u и v обязательно имеют общую смежную вершину в доле B, с которой порождают полный граф. Ученики, соответствующие этим вершинам, будут знакомы. ▷

90 В трех школах учатся 2005 учеников. Некоторые ученики разных школ дружат, причем число друзей у каждого из них одинаково. Докажите, что в любой школе существует ученик, который дружит с учениками двух других школ.

Решение. Рассмотрим трехдольный граф, как в предыдущих задачах, описывающий знакомство учеников. Пусть степень каждой вершины графа равна p. Предположим, что в доле A — k вершин, в доле B — s вершин, тогда в доле C — $(2005 - k - s)$ вершин. Из доли A выходит pk ребер, из доли B — ps, из доли C — $p(2005 - k - s)$ ребер. Пусть доля A соответствует той школе, в которой мы должны найти нужного ученика.

Предположим, что вершины долей A и B смежны только с вершинами доли C. Тогда $pk + ps = p(2005 - k - s)$. Отсюда $2k + 2s = 2005$, что невозможно, так как число 2005 нечетное. Следовательно, в доле A существуют вершины, смежные с вершинами долей B и C.

Предположим, что часть вершин доли A (k_1 штук) смежна только с вершинами доли B, а часть вершин ($k - k_1$ штук) — только с вершинами доли C. Тогда из доли B в долю A идет pk_1 ребер, а в долю C — $(ps - pk_1)$ ребер, из доли C в долю A идет $p(k - k_1)$ ребер, а в долю B — $p(2005 - k - s) - p(k - k_1)$ ребер.

Рассмотрим двудольный граф, образованный ребрами, соединяющими вершины долей B и C. По теореме, доказанной при решении задачи 73, вытекает, что

$$(ps - pk_1) = p(2005 - k - s) - p(k - k_1).$$

Отсюда $2s + 2k - 2k_1 = 2005$, что невозможно.

Следовательно, в доле A существует вершина, смежная с вершинами долей B и C, а в выбранной школе — ученик, который дружит с учениками двух других школ. ▷

91 Некоторые города страны соединены авиалиниями, принадлежащими четырем авиакомпаниям. Из каждого города вылетают самолеты всех компаний, и любое путешествие, состоящее из трех перелетов, начинается и заканчивается на самолетах разных компаний. Докажите, что города страны можно разбить на четыре группы так, что между городами каждой группы нет авиалиний.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний, и раскрасим его ребра в четыре цвета так, что каждый цвет будут обозначать авиалинии одной компании. Необходимо доказать, что такой граф является четырехдольным.

Рассмотрим граф G_1, порожденный ребрами, раскрашенными в цвет 1 и 2. Покажем, что в G_1 нет циклов нечетной длины. Легко убедиться, что в каждом цикле должны идти два ребра одного цвета, затем два ребра другого цвета и т. д. Поэтому каждый цикл имеет четное число ребер. Из теоремы Кенига вытекает, что граф G_1 двудольный.

Следовательно, его вершины можно так разбить на две доли A_1 и A_2, что в графе не окажется ребер, соединяющих вершины одной доли.

Теперь рассмотрим граф G_2, порожденный ребрами, раскрашенными в цвета 3 и 4. Как и раннее, можно показать, что вершины графа G_2 так разбиваются на две доли B_1 и B_2, что в графе нет ребер, соединяющих вершины разных долей.

Рассмотрим множества вершин $C_1 = A_1 \cap B_1$, $C_2 = A_2 \cap B_1$, $C_3 = A_1 \cap B_2$, $C_4 = A_2 \cap B_2$. Из доказанного ранее вытекает, что вершины каждого из множеств C_i несмежны между собой, т. е. G — четырехдольный граф.

Разбиение вершин графа G на доли определяет требуемое разбиение городов.

(*Примечание.* Условие, что из одного города вылетают самолеты всех компаний, требуется для того, чтобы пересечение долей было не пусто. Задача имеет решение и при невыполнении этого условия.) ▷

92 В футбольном турнире участвуют 36 команд, причем каждые две должны сыграть между собой по одному разу. Известно, что каждая команда сыграла 34 игры. Докажите, что команды можно разбить на 2 группы по 18 команд так, что внутри каждой группы все игры уже сыграны.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют командам, и две вершины соединены ребром, если соответствующие команды не сыграли матча. Так как каждая команда сыграла 34 матча, то степень каждой вершины графа G равна единице, и граф является объединением ребер. Не теряя общности, пусть это будут ребра $(1, 19)$, $(2, 20)$, ..., $(i, i + 18)$, ..., $(18, 36)$. Разобьем вершины на две доли: $(1, 2, \ldots, 18)$ и $(19, 20, \ldots, 36)$. Это разбиение определяет разбиение команд на нужные группы. ▷

93 Докажите, что футбольные команды из предыдущей задачи можно разбить на 3 группы по 12 команд так, что внутри каждой группы все игры уже сыграны.

Решение. Граф G, построенный при решении предыдущей задачи, является трехдольным: одну долю образуют вершины $(1, 2, \ldots, 12)$, вторую — вершины $(13, 14, \ldots, 24)$, третью долю образуют вершины $(25, 26, \ldots, 36)$. Разбиение вершин на доли определяет разбиение команд на нужные группы. ▷

94 По дорожкам парка «Лотос» можно зайти в любой его уголок, но нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрестками парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют перекресткам и тупикам парка, а ребра — отрезкам дорожек между перекрестками и тупиками.

Связный граф, в котором отсутствуют циклы, называется ***деревом****. Граф, в котором отсутствуют циклы, называется* ***лесом****.*

Поскольку каждая компонента леса — связный граф, то лес является объединением деревьев.

По условию задачи в графе G нет циклов, он является связным графом, поэтому граф G — дерево. Существование тупиков в парке эквивалентно существованию висячих вершин (т. е. вершин степени 1) в построенном дереве.

Докажем, что в любом дереве есть висячая вершина. Предположим противное. Рассмотрим произвольную вершину v_1 и перейдем из нее по любому ребру (v_1, v_2) в вершину v_2. Поскольку степень вершины v_2 не меньше двух, то из нее по новому ребру можно перейти в вершину v_3 и т. д. Но число вершин в графе G конечно. Поэтому, в конце концов, мы придем в одну из тех вершин, в которых были раньше (см. рис. 41).

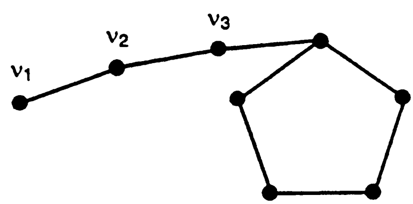


Рис. 41

Это означает существование цикла в дереве G, что противоречит условию. Следовательно, *в любом дереве есть висячая вершина.* Эта вершина будет соответствовать тупику в парке. ▷

95 Администрация парка «Лотос» (см. предыдущую задачу) решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Решение. В предыдущей задаче мы установили, что граф G, описывающий перекрестки, тупики и аллеи парка «Лотос», является деревом. Найдем соотношение между числом вершин и ребер любого дерева. Каждое дерево имеет висячую вершину (см. предыдущую задачу). Удалим висячую вершину v_0 из дерева G вместе с ребром, выходящим из этой вершины. Полученный граф G_1 будет связным, и в нем будут отсутствовать циклы, т. е. граф G_1 — дерево. Из графа G_1, найдя и затем удалив висячую вершину v_1 вместе с выходящим из нее ребром, получим дерево G_2 и т. д. Выполнив такие операции, мы получим последовательность деревьев, которая оканчивается деревом, состоящим из одной вершины и не имеющим ребер. Для этого дерева выполняется соотношение $m = n - 1$, где n — число вершин графа, а m — число его ребер. Теперь будем добавлять в обратном порядке ранее удаленные вершины и ребра. При каждом возвращении добавляется одна вершина и одно ребро. Следовательно, *в любом дереве число ребер будет на единицу меньше числа вершин.*

Поскольку в парке 18 перекрестков и тупиков, то дерево G будет иметь 18 вершин и 17 ребер. В парке необходимо установить $18 \cdot 4 + 17 \cdot 6 = 174$ светильника. ▷

96 В парке «Лотос-2» число перекрестков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрестками и тупиками. Кроме того, по дорожкам парка можно зайти в любой его уголок. Докажите, что в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют перекресткам и тупикам парка, а ребра — отрезкам дорожек между перекрестками и тупиками.

Для решения задачи нужно доказать, что *в связном графе, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин, нет циклов.*

Предположим обратное: граф G содержит цикл. Поставим в соответствие каждой вершине цикла ребро цикла, которое выходит из этой вершины, если проходить цикл по часовой стрелке.

Для каждой вершины, не принадлежащей циклу, выделим цепь, соединяющую вершину с циклом и содержащую наименьшее число ребер. (Если таких цепей будет несколько, возьмем любую из них.) Каждой такой вершине поставим в соответствие ребро выделенной цепи, идущее от вершины к циклу (см. рис. 42). (Возможно, что в графе окажутся ребра, которые не будут поставлены в соответствие вершинам.)

Таким образом, каждой вершине графа будет поставлено в соответствие ребро, причем различным вершинам будут поставлены в соответствие различные ребра. Поэтому в графе окажется ребер не меньше, чем вершин, что противоречит условию задачи. Утверждение доказано.

Следовательно, в парке не существует требуемый маршрут для прогулок.

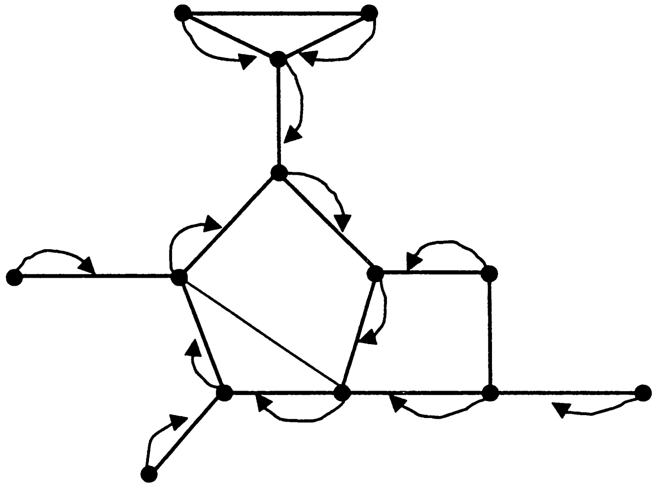


Рис. 42

Доказанные в этой и предыдущей задачах утверждения можно объединить в следующую теорему:

Теорема. Связный граф, имеющий n вершин и m ребер, является деревом тогда и только тогда, когда $m = n - 1$. ▷

97 Докажите, что между любыми двумя перекрестками или тупиками парка «Лотос» (см. предыдущие задачи) существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек.

Решение. Рассмотрим граф G, который описывает парк (см. предыдущие задачи).

Докажем, что две произвольные вершины любого дерева соединяет единственная цепь. Действительно, существование двух цепей между

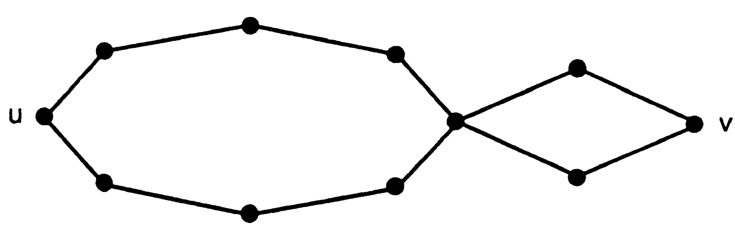


Рис. 43

некоторыми вершинами дерева приводит к существованию цикла, что невозможно (см. рис. 43).

Поскольку граф, описывающий парк, является деревом, то любые два перекрестка или тупика парка будут соединены одним нужным маршрутом. ▷

98 В парке «Лотос-3» число перекрестков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрестками и тупиками. Кроме того, в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрестками парка содержит не более раза. Докажите, что в парке любые два перекрестка или тупика соединены единственным маршрутом для прогулки.

Решение. Рассмотрим граф G, который описывает парк (см. предыдущие задачи). Из условия следует, что граф не содержит циклов и $m = n - 1$, где m — число ребер графа G, а n — число его вершин. Для решения задачи нужно доказать, что любые две вершины графа G соединены единственной цепью.

Доказательство того, что две произвольные вершины графа G не могут соединять две цепи, проводится так, как в предыдущей задаче.

Осталось доказать, что две произвольные вершины графа соединяет хотя бы одна цепь, т. е. граф G является деревом. Предположим, что это не так, и граф G является объединением компонент $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($k \geqslant 2$). Поскольку в графе нет циклов, то каждая компонента G_i будет деревом.

Пусть компонента G_i имеет n_i вершин и m_i ребер. Тогда из задачи 95 следует, что $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1, \ldots, m_k = n_k - 1$. Сложив написанные равенства, получим

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k, \quad \text{или} \quad m = n - k.$$

Последнее равенство противоречит условию. Таким образом, любые две вершины графа соединяет единственная цепь, причем она является простой, так как в противном случае в графе G окажется цикл.

Следовательно, в парке «Лотос-3» любые два перекрестка или тупика соединены единственным путем для прогулки. ▷

99 В парке «Лотос-4» любые два перекрестка, два тупика или перекресток с тупиком соединены единственным маршрутом для прогулки. Докажите, что в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрестками парка содержит не более раза.

Решение. Рассмотрим граф G, который описывает парк (см. предыдущие задачи). Из условия следует, что любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью. Для решения задачи нужно доказать, что граф G не имеет циклов. Однако существование цикла приводит к существованию нескольких цепей между некоторыми вершинами. Следовательно, граф G является деревом, и нужного маршрута для прогулок найти нельзя. ▷

(*Примечание.* При решении задач 95–99 доказана следующая теорема, дающая несколько эквивалентных определений дерева.)

Теорема. Для графа G, имеющего n вершин и m ребер следующие утверждения эквивалентны:

- G — дерево;
- G — связный граф и $m = n - 1$;
- G — граф без циклов и $m = n - 1$;
- Любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь.

100 В парке «Солнышко» число перекрестков и тупиков равно числу отрезков дорожек между перекрестками и тупиками. Кроме того, по дорожкам парка можно зайти в любой его уголок. Докажите, что в парке можно найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более одного раза, причем этот маршрут будет единственным таким маршрутом.

Решение. Построим связный граф G, описывающий перекрестки, тупики и дорожки парка, как в предыдущих задачах. Из теоремы, сформулированной в задаче 99, вытекает, что граф G не будет деревом, т. е. он содержит цикл. Удалим любое ребро (u, v) из цикла. Полученный граф G_1 по-прежнему является связным, число ребер в нем на единицу меньше числа вершин, следовательно, по той же теореме — это дерево. Из задачи 97 следует, что вершины u и v в графе G_1 соединены единственной простой цепью. Добавив к этой цепи ребро (u, v), получим единственный простой цикл в графе G.

Эта цепь определит нужный маршрут для прогулки. ▷

101 Кроты, живущие на лугу, решили создать систему тоннелей, соединяющих их жилища. Каждый тоннель должен соединять ровно два жилища, пользуясь тоннелями, каждый крот сможет навестить любого другого, и для каждых двух жилищ должен быть единственный путь от одного жилища к другому. Докажите, что будет существовать крот, к жилищу которого будет вести ровно один тоннель.

Решение. Рассмотрим граф, в котором жилища будут вершинами, а тоннели — ребрами. Этот граф является деревом. Связность графа следует из того, что любой крот может навестить любого другого. В графе отсутствуют циклы, так как в противном случае для любых двух жилищ, через которые проходит цикл, существует по крайней мере два пути перехода от одного жилища к другому. Существование в графе вершины степени 1 показывается, как в задаче 94.

Эта вершина определяет нужное жилище крота. ▷

102 Какое наибольшее количество разрезов можно сделать в волейбольной сетке (5×10) (см. рис. 44) так, чтобы она не распалась?

Решение. Волейбольную сетку естественным образом можно представить как связный граф, который имеет $11 \cdot 6 = 66$ вершин и $10 \cdot 6 + 11 \cdot 5 = 115$ ребер. Легко видеть, что удаление любого ребра связного графа, принадлежащего какому-нибудь циклу, не делает граф несвязным. Поэтому нам нужно удалять ребра из циклов до тех пор, пока циклы будут, т. е. пока не получится дерево. Так как в дереве любые две вершины соединены единственной цепью (см. задачу 97), то удаление любого ребра дерева делает граф несвязным. Поэтому удалять ребра дерева нельзя. Дерево с 66 вершинами имеет 65 ребер (см. задачу 95). Поэтому из графа можно удалить $(115 - 65) = 50$ ребер.

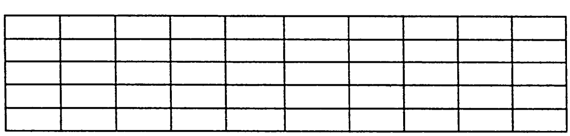


Рис. 44

Такое наибольшее число разрезов можно сделать в сетке так, чтобы она не распалась. ▷

103 В парке «Лотос» (см. предыдущие задачи) ищут место для медицинского пункта. Администрация хочет, чтобы он находился на перекрестке и путь от пункта до самой дальней точки парка был как можно короче. В парке длины аллей между соседними перекрестками или между перекрестками и соседними с ними тупиками одинаковы. Докажите, что в парке есть или один, или два соседних перекрестка, обладающие требуемым свойством.

Решение. Рассмотрим связный граф G. ***Эксцентриситетом*** вершины v называется расстояния от вершины v до самой дальней от v

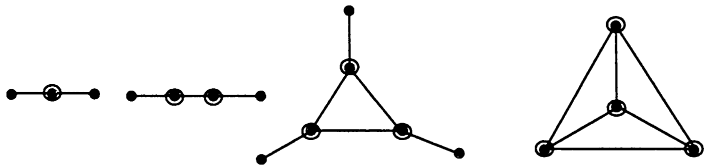


Рис. 45

вершины. ***Центральной вершиной*** графа называется вершина, имеющая наименьший эксцентриситет. Множество центральных вершин называется ***центром*** графа.

На рис. 45 изображены графы, которые имеют одну, две, три, четыре центральных вершины. Центральные вершины отмечены.

Теорема. Центр дерева состоит или из одной, или из двух смежных вершин.

Доказательство. Рассмотрим дерево. Очевидно, что самой дальней от любой его вершины будет некоторая висячая вершина. Поэтому, если из дерева удалить все висячие вершины (вместе с выходящими из них ребрами), то эксцентриситет каждой вершины в новом графе станет на единицу меньше, чем в старом. Поэтому центральными вершинами в новом графе останутся те же вершины, что и в старом (см. рис. 46, где около каждой вершины указан ее эксцентриситет и центральные вершины выделены).

Будем продолжать процесс удаления висячих вершин до тех пор, пока не придем к деревьям с одной или двумя вершинами. Так как на каждом шаге центральные вершины получающегося графа совпадают с центральными вершинами преобразуемого графа, то оставшиеся вершины будут центральными для исходного графа.

Теорема доказана. □

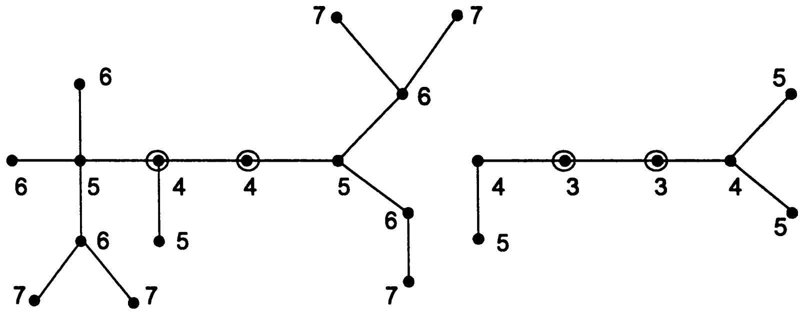


Рис. 46

Из теоремы следует, что требуемым администрацией парка условиям будут удовлетворять или один, или два соседних перекрестка парка. ▷

104 В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены между собой дорогами так, что между любыми городами есть единственный путь, причем он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восемью захолустными городами.

Решение. Наибольшее из расстояний между вершинами графа G называется ***диаметром*** графа и обозначается $d(G)$.

Рассмотрим граф G, описывающий города и дороги страны, в графе любые две вершины соединены единственной цепью.

Из теоремы, сформулированной в задаче 99, следует, что граф G является деревом, диаметр которого не превосходит 8.

Легко доказать, что дерево с четным диаметром $2k$ имеет ровно одну центральную вершину v, эксцентриситет которой, т. е. расстояние до самой дальней от нее вершины, равен k.

Назовем вершину v вершиной нулевого ранга, а вершины, находящиеся на расстоянии р от вершины v, вершинами р-го ранга. Дерево G имеет 4 ранга.

Назовем вершину u «захолустной», если ее степень $d(u) \leqslant 8$. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G существует вершина, смежная по крайней мере с восемью «захолустными» вершинами.

Предположим, что это не выполняется. Так как все вершины четвертого уровня имеют степень 1, то они являются «захолустными», и каждая вершина u третьего уровня смежна не более чем с семью вершинами четвертого уровня. А так как вершина u смежна еще с одной вершиной второго уровня, то она является «захолустной». Аналогично показывается, что «захолустными» являются вершины второго, затем первого уровня, затем вершина v. Таким образом, все вершины графа G «захолустные».

Подсчитаем теперь максимально возможное число вершин в графе G.

Вершина v смежна не более чем с семью вершинами первого уровня. Каждая вершина первого уровня смежна не более чем с семью вершинами, а значит, не более чем с шестью вершинами второго уровня. Следовательно, на втором уровне не более чем $7 \cdot 6$ вершин. Аналогично показывается, что на третьем уровне не более чем $7 \cdot 6 \cdot 6$, а на четвертом — не более чем $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ вершин. Таким образом, в графе G не более чем $7(6^3 + 6^2 + 6 + 1) + 1 = 1814 < 2000$ вершин. Получено противоречие.

Следовательно, в графе G существует вершина, смежная не менее чем с 8 «захолустными» вершинами, а в стране найдется нужный город. ⊳

105 В парке «Лотос» (см. предыдущие задачи) 18 перекрестков и тупиков и есть перекресток, на котором сходится самое большое число аллей: 6. Докажите, что в парке от 12 до 14 тупиков.

Решение. Рассмотрим граф G, который описывает парк (см. предыдущие задачи). Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_{18}) = 2(18 - 1).$$

Пусть в графе p висячих вершин. Тогда в графе есть вершина степени 6 и $(17 - p)$ вершин, степень которых не меньше трех.

Поэтому выполняются два неравенства:

$$p + 6 + 3(17 - p) \leqslant 34, \quad p + 6(18 - p) \geqslant 34.$$

Решив полученные неравенства, получаем: $12 \leqslant p \leqslant 14$.

Следовательно, в парке «Лотос» от 12 до 14 тупиков.

Для окончательного решения задачи необходимо нарисовать граф, представляющий парк и имеющий нужное число висячих вершин (тупиков). Сделайте это в качестве упражнения.

106 Все 10 городов государства, включая столицу, расположены на кольцевом шоссе. Столица еще соединена напрямик дорогой с каждым городом, исключая своих соседей по кольцу (см. рис. 47). Правительство решило разделить все дороги между двумя компаниями так, чтобы из любого города в любой другой можно было проехать, пользуясь дорогами только одной компании. Выполнимо ли это решение?

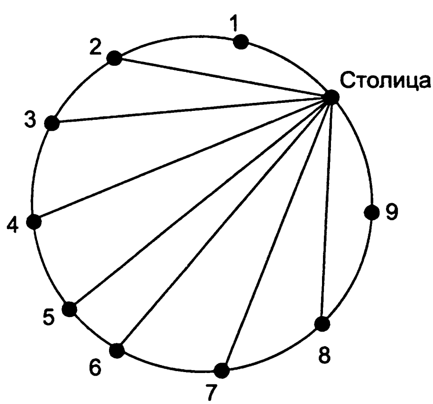


Рис. 47

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого обозначают города, а ребра — дороги между ними (см. рис. 47). Подграф, порожденный дорогами, принадлежащими каждой из двух компаний, имеет 10 вершин. Поскольку этот граф обязан быть связным, то в нем должно быть не менее 9 ребер. Однако граф G содержит только 17 ребер, и $17 < 2 \cdot 9$.

Следовательно, решение правительства невыполнимо. ▷

107 Несколько авиакомпаний решили связать авиалиниями 100 городов так, чтобы выполнялось два условия:

1) любые два города были соединены беспересадочной линией не более чем одной авиакомпании;
2) любая авиакомпания, пользуясь своими линиями, могла бы доставить пассажира из любого города в любой другой (возможно, с пересадками).

При каком наибольшем числе авиакомпаний такое решение осуществимо?

Решение. Пусть число авиакомпаний равно N. Рассмотрим N графов авиалиний $G_1, G_2, \ldots, G_N$, описывающих авиалинии компаний. Так как по условию задачи каждый граф G_i должен быть связным, то число ребер в нем не меньше 99 (см. задачи 95, 102). Все графы G_i в сумме имеют не больше ребер, чем полный граф K_{100}, т. е.

$$99N \leqslant \frac{100 \cdot 99}{2}.$$

Следовательно, число авиалиний не превосходит 50.

Докажем по индукции, что N авиалиний могут связать нужным образом $2N$ городов.

При $N = 1$ (одна компания и два города) это очевидно.

Предположим, что доказываемое утверждение верно для N авиакомпаний, и докажем его для $N + 1$.

Рассмотрим $2N + 2$ города. Пусть A и B — два из них. Остальные города произвольным образом разобьем на два подмножества: $A_1, A_2, \ldots, A_N$ и $B_1, B_2, \ldots, B_N$. По индуктивному предположению N компаний соединяют нужным образом $2N$ городов. Можно организовать еще одну авиакомпанию, отдав ей незанятые линии между A и B, а также между A и B_i, B и A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Утверждение доказано.

Следовательно, наибольшее число авиалиний равно 50. ▷

108 В стране четное число городов, некоторые пары из них соединены дорогами. Из любого города страны можно проехать в любой другой, причем существуют города, которые соединены более чем одним маршрутом переезда. Докажите, что города можно разбить на несколько групп, состоящих не менее чем из двух городов, таким образом, что из любого города каждой группы можно проехать в любой город этой группы, не выезжая за пределы группы.

Решение. Будем считать карту страны, на которой обозначены города и дороги между ними, графом G. По условию граф связен, не является деревом, и содержит четное число вершин $n = 2k$. Для решения задачи достаточно доказать, что множество вершин можно разбить на такие подмножества, содержащие не менее двух вершин каждое, что граф, порожденный любым подмножеством вершин, является деревом.

Докажем это утверждение с помощью математической индукции. При $k = 1$ граф является деревом. При $k = 2$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть в графе $n = 2p$ вершин, и для $k < p$ утверждение верно. Если граф является деревом, то все его вершины будут входить в одну группу.

Граф G — не дерево. Будем удалять из него ребра до тех пор, пока в получившемся графе G_1 не останется ровно один цикл. Окрестностью $T(u)$ вершины u, принадлежащей циклу, назовем вершину u и множество вершин графа G_1, соединенных с u цепями, не содержащими других вершин цикла (см. рис. 48, на котором ребра графа G_1

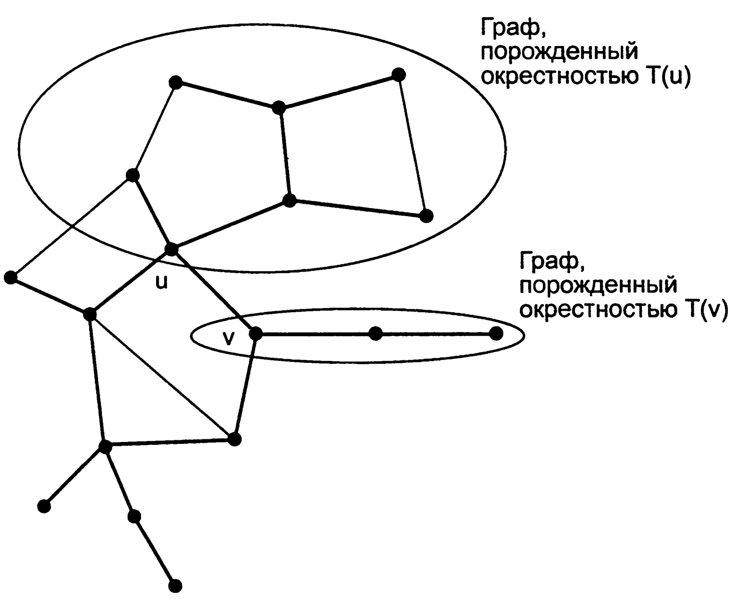


Рис. 48

выделены). Рассмотрим две соседние вершины цикла u и v и их окрестности $T(u)$ и $T(v)$. Если одна из окрестностей будет содержать четное число вершин, то обозначим через $G^{(1)}$ граф, порожденный (в графе G) этой окрестностью. (Это означает, что граф $G^{(1)}$ содержит все вершины окрестности и ребра графа G, соединяющие пары этих вершин.) Если обе окрестности содержат нечетное число вершин, то обозначим через $G^{(1)}$ граф, порожденный окрестностями $T(u)$ и $T(v)$. Через $G^{(2)}$ обозначим граф, порожденный (в графе G) вершинами, не принадлежащими графу $G^{(1)}$.

Каждый из графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ связен и имеет четное число вершин, которых меньше, чем $2k$. По индуктивному предположению множество вершин графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ можно разбить требуемым образом.

Разбиение вершин графа G определяет нужное разбиение городов страны. ▷

109 Шахматная доска раскрашена 10 красками так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причем все 10 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние клетки, т. е. клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

Решение. Рассмотрим произвольную раскраску шахматной доски десятью красками, при которой клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют краскам и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда две краски являются соседними при этой раскраске.

Докажем, что граф G будет связным. Пусть v_i и v_j — две вершины графа, соответствующие цветам i и j. Найдем на шахматной доске две клетки этих цветов. Они соединены путем L, проходящим через стороны клеток и не проходящим через их вершины. Поскольку при переходе из клетки в клетку в пути L меняется цвет клетки, то путь L в графе G будет соответствовать некоторому маршруту, соединяющему вершины v_i и v_j.

Наименьшее число ребер в связном графе будет в том случае, когда граф будет деревом (см. задачу 102). Поэтому минимально возможное число ребер в графе G — 9 (см. задачу 95), и меньше, чем 9 пар соседних красок, быть не может.

Зададим раскраску, в которой ровно 9 пар. Окрасим в цвет 1 клетки, расположенные в шахматном порядке, т. е. через одну, а остальные клетки окрасим, как угодно, лишь бы были использованы все цвета. Тогда цвет 1 будет соседним с каждым из остальных 9 цветов, а из этих 9 цветов никакая пара не будет соседней. ▷

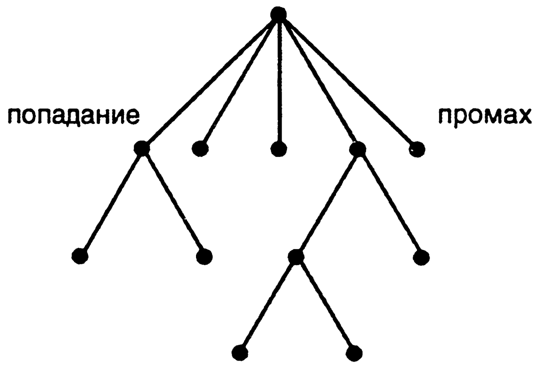


Рис. 49

110 Андрей пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Андрей делает пять выстрелов и за каждое попадание получает право еще на два выстрела. Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

Решение. Стрельбу Андрея можно описать деревом, которое называется ***корневым деревом*** (см. рис. 49). (Строгое определение корневого дерева будет дано в задаче 228.)

В этом дереве все вершины, кроме верхней, соответствуют выстрелам. Если Андрей попал, то степень соответствующей вершины равна трем, если промазал — единице. Степень верхней вершины равна пяти. Дерево имеет 26 вершин и 25 ребер (см. соотношение между числом вершин и ребер дерева, полученное в задаче 45). Пусть n — число попаданий Андрея. Тогда граф содержит n вершин степени 3, $(25 - n)$ вершин степени 1 и одну вершину степени 5. Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$3n + 1(25 - n) + 5 = 2 \cdot 25.$$

Решив это уравнение, получим $n = 10$.

Андрей попал 10 раз. ▷

111 Борцовский турнир с 13 участниками проводится по олимпийской системе, при которой проигравший выбывает. На одну встречу, с учетом подготовки к ней и отдыха участников, отводится час. Сколько времени нужно, чтобы провести турнир, если в распоряжении организаторов только 5 борцовских ковров?

Решение. Спортивное соревнование, проводимое по олимпийской системе, можно описать с помощью корневого дерева, в котором вершины степени 1 будут соответствовать участникам, а вершины других

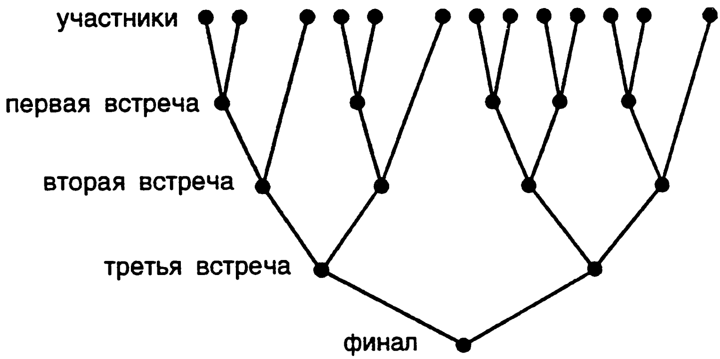


Рис. 50

степеней — встречам. Один из возможных вариантов корневого дерева, описывающего наш турнир, приведен на рис. 50.

Победителю турнира нужно провести не более, чем 4 встречи. Это значит, что турнир пройдет за четыре часа.

Покажем, что меньшим числом встреч обойтись нельзя. Предположим противное: каждый участник турнира провел не более трех встреч. Тогда в финале будут бороться 2 человека, во второй встрече — не более четырех, а в первой — не более восьми. Полученное число меньше числа борцов, участвующих в соревновании. ▷

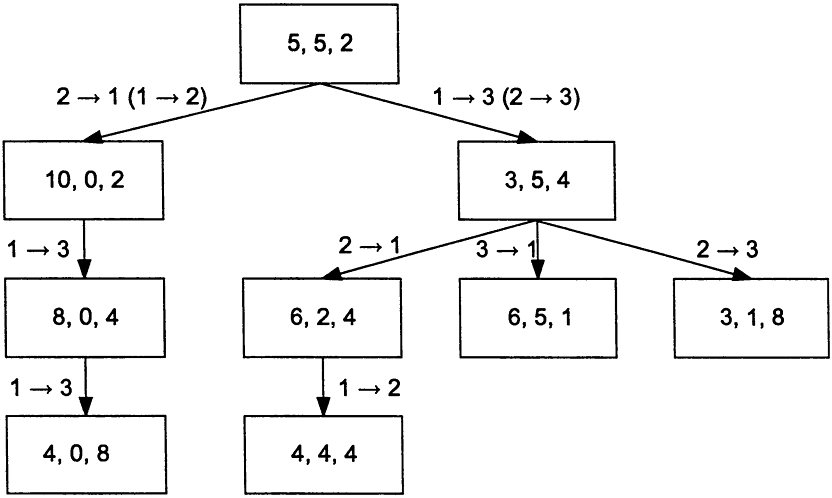


Рис. 51

112 В первое ведро налили 5 литров воды, во второе — тоже 5, в третье — 2 литра воды. В ведро разрешается добавлять столько воды, сколько в нем находится, причем переливать эту воду можно из любого другого ведра. Определите, каким образом можно получить в каждом ведре один и тот же объем жидкости?

Решение. Варианты переливаний последовательно переберем с помощью корневого дерева (см. рис. 51). В прямоугольниках указаны объемы воды в ведрах, а над прямоугольниками стрелками — из какого ведра в какое переливают (в скобках — варианты переливаний). Перебор заканчивается при получении нужного результата. Сначала из первого ведра в третье переливают 2 литра воды, затем из второго в первое — 3 литра и, наконец, из первого во второе — 2 литра. ▷

113 Среди шести монет находится одна фальшивая, но не известно, легче она настоящих или тяжелее. Среди этих монет известна также одна настоящая. Необходимо с помощью двух взвешиваний на рычажных весах определить фальшивую монету.

Решение. Занумеруем монеты, и пусть монета 6 — настоящая. Обозначим через $F(A)$ вес монет, принадлежащих множеству A. Процесс определения фальшивой монеты изображен с помощью корневого дерева на рис. 52. ▷

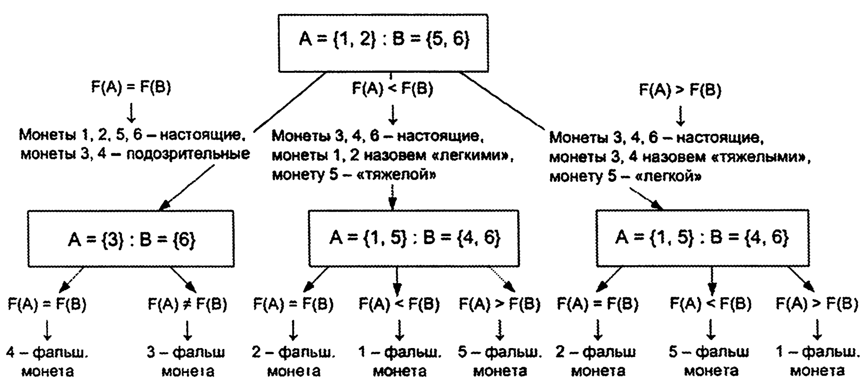


Рис. 52

114 Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две, в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на четыре.

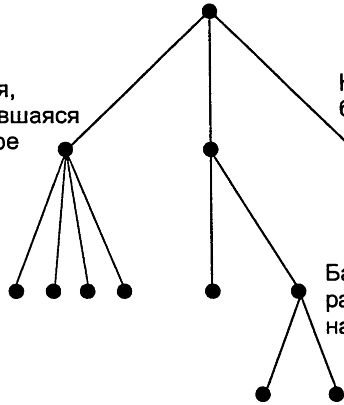


Рис. 53

Решение. Процесс деления бактерий можно изобразить корневым деревом (см. рис. 53).

Любая бактерия, разделившаяся на 4 бактерии, будет соответствовать вершине дерева степени 5, бактерия, разделившаяся на две, — вершине степени 3. Кроме этих вершин в дереве еще есть вершина степени 3, соответствующая начальной бактерии, и 102 вершины степени 1, соответствующие бактериям, которые не делились.

Пусть n — число бактерий, которые разделились на 4, тогда $6n$ — число бактерий, которые разделились на две. Дерево, описывающее деление бактерий, будет иметь $7n + 103$ вершину и $7n + 102$ ребер (см. соотношение между числом вершин и ребер дерева, выведенное в задаче 95).

Воспользовавшись леммой о рукопожатиях, имеем

$$5n + 3 \cdot 6n + 3 + 1 \cdot 102 = 2(7n + 102).$$

Решив это уравнение, получим, что $n = 11$.

Это означает, что 11 раз бактерии делились на четыре и 66 раз — на две. ▷

115 Из одной бактерии в результате деления получились 1000 бактерий: вначале бактерия разделилась на две, затем какая-то из них вновь разделилась на две, затем одна из трех бактерий снова разделилась на две и т. д. Докажите, что в некоторый момент существовала бактерия, число потомков которой в самом конце, т. е. среди 1000 бактерий, не меньше 100 и не более 199.

Решение. Процесс деления бактерий опишем корневым деревом, как в предыдущей задаче.

Условимся называть дочками бактерии те две бактерии, на которые она разделилась. Обозначим через $Б_1, Б_2, Б_3, \ldots$ такую последовательность бактерий:

$Б_1$ — исходная бактерия, число ее потомков $П_1 = 1000$;

$Б_2$ — та из дочек $Б_1$, у которой число потомков $П_2$ не меньше, чем у другой дочки $Б_1$;

$Б_3$ — та из дочек $Б_2$, у которой число потомков $П_3$ не меньше, чем у другой дочки $Б_2$ и т. д.

В силу выбора нами дочерних бактерий следует, что $П_n \leqslant 2П_{n+1}$.

Последовательность натуральных чисел $П_1, П_2, П_3, \ldots$ монотонно убывает. Первый член этой последовательности равен 1000, последний — 1. Значит, найдется такой номер k, когда число $П_k$ в первый раз станет меньше 200, т. е. когда выполняются неравенства $П_{k-1} \geqslant 200$ и $П_k < 200$. Учитывая, что $П_k \geqslant 1/2П_{k-1}$, получим $П_k \geqslant 100$, т. е. число потомков бактерии $Б_k$ не меньше 100 и не больше 199. ▷

116 Однажды ковбои устроили перестрелку, в результате которой остался в живых только один ковбой. Некоторые были убиты, так и не сделав ни одного выстрела, Каждый из остальных ковбоев застрелил ровно трех других. (Никакие два ковбоя не застрелили друг друга.) Перестрелку начало 28 ковбоев. Сколько из них не сделало ни одного выстрела?

Решение. Перестрелку ковбоев можно изобразить в виде корневого дерева (см. рис. 54). В этом дереве вершина, соответствующая уцелевшему ковбою, имеет степень 3, вершины, соответствующме ковбоям, не сделавшим ни одного выстрела, — степень 1, остальным ковбоям — степень 4.

Пусть каждый из k ковбоев застрелил по 3 соперника, а p не сделали ни одного выстрела. Построенное дерево имеет $(k+p-1)$ ребро, p вершин степени 1, одну вершину степени 3, $(k-1)$ вершину степени 4. Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$2(k+p-1) = 1p + 3 \cdot 1 + 4(k-1).$$

Кроме того, $k+p = 28$.

Решив построенную систему, определим число ковбоев, не сделавших ни одного выстрела: $p = 19$. ▷

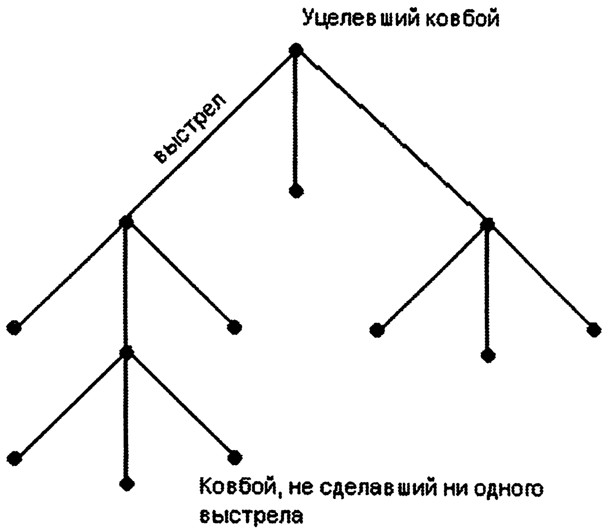


Рис. 54

117 Насыщенным углеводородом называется соединение углерода С, имеющего валентность 4, и водорода Н, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Решение. Графом молекулы называется граф, вершинами которого являются атомы, составляющие молекулу, а ребрами — соответствующие валентные связи между атомами. Докажем, что графом G молекулы насыщенного углеводорода является дерево. Предположим, что в графе G есть цикл C. Поскольку валентности атомов водорода равны 1, то цикл C может состоять только из атомов углеводорода. Разорвав некоторую связь между атомами углеводорода в цикле и соединив эти атомы

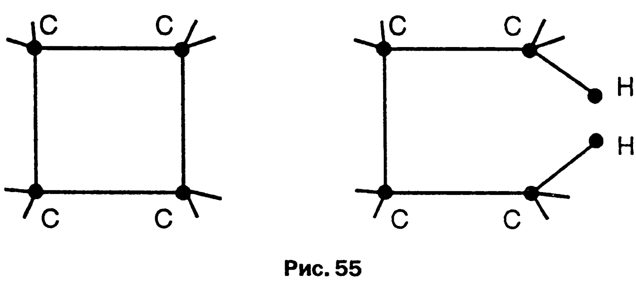


Рис. 55

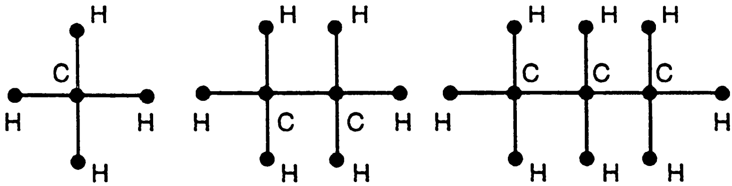


Рис. 56

с атомами водорода, мы получим соединение, в котором атомов водорода будет больше, чем в первоначальном соединении (см. рис. 55). Это противоречит тому, что граф G был графом молекулы насыщенного углеводорода.

Пусть молекула насыщенного углеводорода содержит n атомов углерода и m атомов водорода. Граф молекулы, являющийся деревом, имеет $n+m$ вершин и $n+m-1$ ребер (см. соотношение между числом вершин и ребер дерева, выведенное в задаче 95). Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$4n + 1m = 2(n + m - 1).$$

Отсюда получаем: $m = 2n + 2$.

Это значит, что формула насыщенного углеводорода, имеющего n атомов углерода, будет C_nH_{2n+2}.

Графы молекул насыщенных углеводородов при $n = 1, 2, 3$ изображены на рис. 56. ▷

118 Некоторые из сорока городов страны попарно соединены авиалиниями, принадлежащими одной из десяти авиакомпаний. Из каждого города можно перелететь в любой другой без пересадок, и каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Докажите, что существует компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе, с числом перелетов не менее трех, причем каждый промежуточный город в путешествии будет посещаться только один раз.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний. Вершины графа будут соответствовать городам, и две вершины графа будут соединены ребром, окрашенным в цвет i, тогда и только тогда, когда соответствующие города соединены авиалинией i-й компании. Из условий задачи следует, что каждые две вершины графа будут соединены хотя бы одним ребром. (Возможно, что некоторые пары вершин будут соединены несколькими ребрами.) Поэтому всех ребер будет не меньше, чем ребер в полном графе K_{40}, т. е. $(40 \cdot 39)/2 = 780$.

По условию задачи мы должны показать, что в каком-то из подграфов T, образованном ребрами одного цвета, будет цикл. Предположим, что ни в одном из одноцветных графов нет циклов. Это значит, что каждый одноцветный граф T будет деревом (если он связный) или лесом (если несвязный). Поэтому в любом графе T не больше, чем 39 ребер, а в объединении всех графов T не больше, чем $10 \cdot 39 = 390$ ребер. Это меньше, чем определенное ранее число ребер. Следовательно, в каком-то из одноцветных графов обязательно должен быть цикл, который и определит требуемый маршрут. ▷

119 Государство Филиппины расположено на островах. Между некоторыми из островов ежедневно курсируют теплоходы (один рейс в одном направлении и один — в противоположном). С любого острова можно добраться на любой другой, возможно с пересадками. Полиция Филиппин пригласила Крутого Уокера для помощи в поимке опасного преступника. Преступник суеверен и не плывет на теплоходе 13 числа каждого месяца и каждый понедельник. Уокер не суеверен. Кроме того, он с помощью агентуры всегда знает, на каком острове находится преступник. Докажите, что если Уокер и преступник будут пользоваться одними теплоходами, то Уокер, в конце концов, окажется на одном острове с преступником.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины обозначают острова и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие острова соединены теплоходным маршрутом. Из условия задачи следует, что граф G — связный.

Напомним, что расстояние между двумя вершинами графа — это наименьшая из длин цепей, соединяющих эти вершины. Расстояние между вершинами u и v обозначается $d(u, v)$.

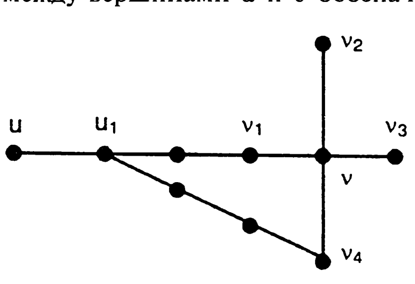


Рис. 57

Если расстояние между вершинами u и v равно d, то с острова, обозначенного вершиной u, на остров, обозначенный вершиной v, можно добраться за d дней.

Пусть в первый день операции Крутой Уокер находился на острове U, которому соответствует вершина u, а преступник — на острове V, которому соответствует вершина v, и $L = (u, u_1, \dots, v)$ — кратчайшая цепь, соединяющая эти вершины. Если Уокер переедет на остров U_1, соответствующий вершине u_1, то, куда бы не переехал преступник, расстояние между ним и Уокером или останется прежним, или (если повезет Уокеру) уменьшится (см. рис. 57).

Каждый понедельник и каждого 13 числа расстояние будет уменьшаться, так как преступник в эти дни не совершает переездов. Это означает, что, в конце концов, Уокер и преступник окажутся на одном острове. ▷

120 В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить всем им какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

Решение. Рассмотрим граф G знакомств жителей поселка. Из условия задачи следует, что граф G будет связным.

Для решения задачи достаточно доказать, что в графе G существует такое множество V из 90 вершин, что расстояние от любой вершины, не принадлежащей V, до некоторой вершины из V не превосходит десяти.

Предположим сначала, что граф G — дерево. Пусть $L = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$ — цепь графа G, содержащая наибольшее число ребер. Если $k \leqslant 19$, то расстояние от каждой вершины графа G до вершины v_{10} будет не больше 10. Это означает, что новость, сообщенная жителю, обозначенному вершиной v_{10}, через 10 дней будет известна всем жителям поселка.

Если $k \geqslant 20$, то удалим из G вершины $u, v_1, \ldots, v_{10}$ и все вершины, соединенные с одной из этих вершин цепями, не содержащими вершины v_{11}. Получившийся после удаления вершин граф является деревом. Повторяя описанную процедуру 89 раз (каждый раз выбирая свою вершину v_{10}), мы на каком-то шаге или исчерпаем все вершины графа, или получим дерево T, в котором не более, чем $(10\,000 - 89 \cdot 11) = 21$ вершина. В дереве T выберем вершину способом, описанным ранее.

Множество людей, соответствующих вершинам v_{10}, и будет нужным множеством жителей.

Если граф G не является деревом, то нужно превратить его в дерево, удаляя некоторые ребра, и повторить рассуждения. ▷

121 Есть две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть двойник в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены авиалинией, то в Зазеркалье эти города не соединены, а два любых несоединенных

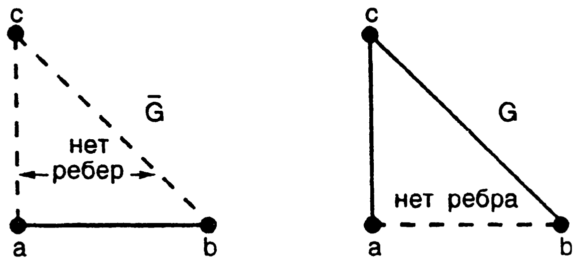


Рис. 58

в Обычной стране города обязательно соединены авиалинией в Зазеркалье. В Обычной стране Алиса не может добраться из города A в город B, сделав менее двух пересадок. Докажите, что в Зазеркалье Алиса сможет перелететь из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

Решение. Рассмотрим два графа авиалиний G и $\breve{G}$, описывающих авиалинии, соответственно, в Обычной стране и в Зазеркалье. Из условий задачи вытекает, что граф $\breve{G}$ является дополнительным к графу G.

Из условия задачи следует, что для перехода из вершины a, соответствующей городу A, в вершину b, соответствующую городу B, нужно пройти не менее трех ребер. Поэтому диаметр $d(G)$ графа не меньше трех.

Докажем, что $d(\breve{G}) \leqslant 3$. В графе $\breve{G}$ вершины a и b соединены ребром. Рассмотрим две произвольные вершины c и f графа $\breve{G}$, отличные от вершин a и b. В этом графе каждая из вершин c и f соединена хотя бы одним ребром с одной из вершин a или b, так как в противном случае в графе G была бы цепь из двух ребер, соединяющих a и b (см. рис. 58). Отсюда следовало бы, что $d(c, f) \leqslant 3$ и $d(G) \leqslant 3$.

Аналогично рассматривается случай, когда одна из вершин c и f совпадает с a или b.

Из сказанного следует, что расстояние между двумя произвольными вершинами графа $\breve{G}$ не превосходит трех. Поэтому $d(\breve{G}) \leqslant 3$ и из любого города Зазеркалья можно переехать в любой другой, сделав не более двух пересадок. ▷

122 На строительном участке нужно создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того чтобы телефонные линии не мешали строительству, их нужно проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рис. 59, где бытовкам соответствуют вершины графа и указаны длины дорог между ними.

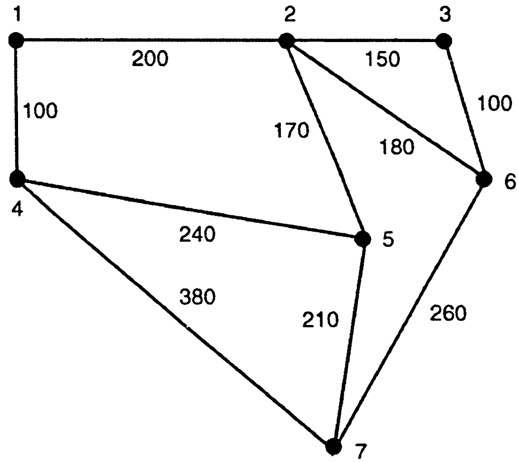


Рис. 59

Каким образом провести телефонные линии, чтобы их общая длина была минимальной?

Решение. Подграф графа G, содержащий все вершины графа, называется ***остовным***. Если остовный подграф является деревом, то он называется ***остовным деревом***. Очевидно, что наша задача заключается в построении остовного дерева, имеющего минимальную суммарную длину ребер (***минимального остовного дерева***).

Длину ребра e графа G будем обозначать $l(e)$, а суммарную длину ребер дерева T — $L(T)$.

Рассмотрим следующий алгоритм построения минимального остовного дерева.

На первом шаге выберем ребро минимальной длины. На каждом последующем шаге будем выбирать из оставшихся ребер ребро минимальной длины, не образующее цикла с ранее выбранными ребрами. Процесс оканчивается после построения остовного дерева.

Этот алгоритм носит название ***алгоритма Краскала***. Докажем, что он действительно строит минимальное остовное дерево. Доказательство проведем от противного.

Пусть T — дерево, построенное с помощью алгоритма Краскала, а S — минимальное остовное дерево, и $L(S) < L(T)$. Поскольку в графе может быть несколько минимальных остовных деревьев, то в качестве S выберем из них дерево, имеющее наибольшее число общих ребер с деревом T. Занумеруем ребра дерева T в том порядке, в котором они выбирались с помощью алгоритма Краскала: $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots$.

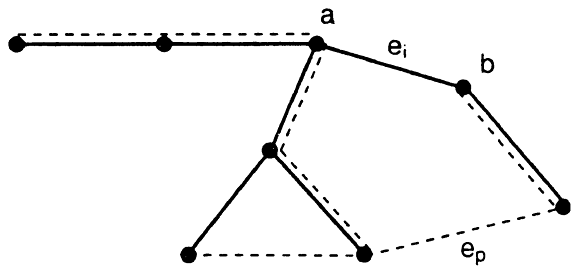


Рис. 60

Пусть $e_i = (a, b)$ — ребро с наименьшим номером в этом списке, не принадлежащее дереву S. В дереве S между вершинами a и b существует единственная цепь (см. задачу 97). Добавив ребро e_i к этой цепи, получим цикл C в новом графе S_1. Поскольку T — дерево, то какое-то ребро e_p цикла C не должно принадлежать T (см. рис. 60, на котором дерево T изображено сплошной линией, а дерево S — пунктирной).

Сравним длины ребер e_i и e_p. Ребро e_p принадлежит дереву S, следовательно, оно не образует циклов с ребрами $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$, также принадлежащими дереву S. Поэтому, если бы его длина была бы меньше, чем длина ребра e_i, то на i-м шаге алгоритма было бы выбрано не ребро e_i, а ребро e_p. Следовательно, $l(e_i) \leqslant l(e_p)$.

В графе S_1 удалим ребро e_p. Этим самым мы разрушаем единственный цикл графа S_1 и получаем дерево S_2. Деревья S и S_2 отличаются друг от друга только ребрами e_i и e_p. Из соотношения длин этих ребер следует, что $L(S_2) \leqslant L(S)$. Но дерево S было минимальным остовным деревом, поэтому $L(S_2) = L(S)$, и S_2 — также минимальное остовное дерево. Мы получили противоречие с выбором дерева S, так как дерево S_2 имеет больше общих ребер с деревом T, чем дерево S. Доказано, что алгоритм Краскала в самом деле строит минимальное дерево.

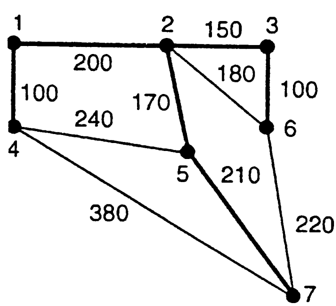


Рис. 61

Теперь с помощью алгоритма построим минимальное дерево для нашего графа. На первом шаге выбираем одно из ребер $(1, 4)$ или $(3, 6)$, на втором шаге — оставшееся из них. Третьим выбирается ребро $(2, 3)$, четвертым — $(2, 5)$. Теперь ребром минимальной длины из оставшихся является ребро $(2, 6)$, но оно образует цикл с ранее выбранными ребрами и поэтому не попадает в дерево. Затем в минимальное дерево выбираются ребра $(1,2)$ и $(5,7)$. На рис. 61 ребра минимального дерева выделены. Вдоль дорог, соответствующих выделенным ребрам, нужно проводить телефонные линии. ▷

123 В городе с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы из любой оставшейся станции можно было проехать на любую другую.

Решение. Схему линий метро можно считать связным графом G, в котором станции являются вершинами, а линии ребрами. Для решения задачи нужно доказать, что из графа G можно удалить некоторую вершину, что получившийся граф останется связным. Рассмотрим любое остовное дерево T графа G. Любая висячая вершина v этого дерева является нужной вершиной. Действительно, удаляя эту вершину из дерева вместе с выходящими из нее ребрами, мы удаляем только одно ребро из T. Получившийся из T граф также будет деревом, которое связывает все оставшиеся вершины графа G. Вершина v соответствует станции, которую можно закрыть. ▷

124 Город имеет форму квадрата $100n \times 100n$ метров с $(n+1)$ прямолинейной улицей, идущей параллельно одной стороне квадрата, и $(n+1)$ прямолинейной улицей, идущей параллельно другой стороне. Расстояние между любыми двумя соседними параллельными улицами — 100 метров, длина каждой улицы — $100n$ метров. Мэр города решил выполнить свое предвыборное обещание: заасфальтировать за свой счет улицы так, чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать по асфальту. Конечно, мэр хочет истратить, как можно меньше своих денег. Какой наименьшей длины асфальтовое покрытие улиц может сделать мэр?

Решение. Город естественным образом можно представить в виде графа G, вершины которого соответствуют перекресткам города, а ребра — отрезкам улиц, соединяющим перекрестки. Граф G имеет $(n+1)^2$ вершин. Заасфальтированные улицы будут соответствовать некоторому подграфу H графа G. Поскольку любые два перекрестка должны быть связаны заасфальтированными улицами, то H — связный остовный подграф графа G. По условию задачи этот подграф должен иметь как можно меньше ребер. Следовательно, подграф H должен быть деревом (см. задачу 102). Из соотношения числа вершин и ребер в дереве следует, что он имеет $((n+1)^2-1)$ ребер. Поэтому наименьшая возможная длина асфальтового покрытия $100((n+1)^2-1)$ метров. ▷

125 В стране 20 городов, некоторые из них так соединены авиалиниями, что из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что существуют два таких города, что добраться из одного в другой можно, только сделав не менее пяти пересадок. Докажите, что, вылетев из любого города, можно побывать в каждом другом, сделав не более 35 перелетов.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний. Из условий задачи следует, что G — связный граф, диаметр $d(G)$ которого не менее 6. ***Диаметральной цепью*** называется цепь наименьшей длины между двумя вершинами, расстояние между которыми равно диаметру графа.

Рассмотрим остовное дерево графа G и его диаметральную цепь $L = (u_1, \ldots, u_2)$. Длина цепи L не менее шести, так как в противном случае диаметр графа G оказался бы меньше шести. Пусть вершина u_0 делит цепь L на две цепи $L_1 = (u_1, \ldots, u_0)$ и $L_2 = (u_0, \ldots, u_2)$, длины которых одинаковы (если L имеет нечетное число вершин), или длины

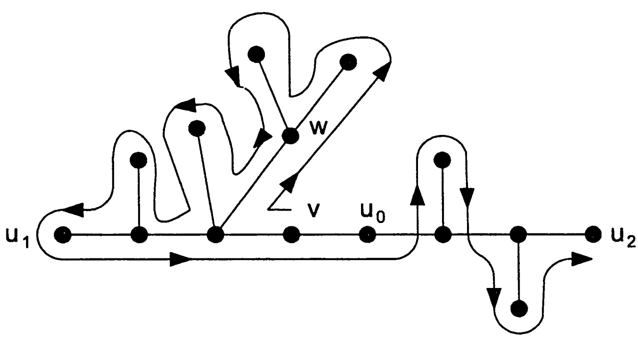


Рис. 62

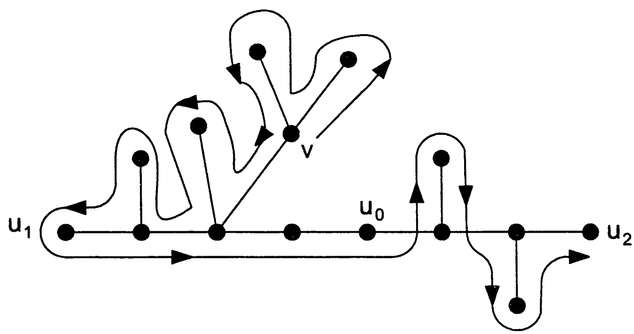


Рис. 63

которых отличаются не более чем на единицу (если L имеет четное число вершин). В каждом из этих случаев цепи L_1 и L_2 содержат не менее трех ребер.

Для любой вершины v графа построим маршрут, начинающийся в этой вершине, проходящий через все вершины графа и содержащий не более 35 ребер.

Пусть вершина v принадлежит какой-то из цепей, например L_1. Рассмотрим следующий маршрут. Из вершины v будем проходить ребра по направлению к вершине u_1. Если вершина, в которую мы попали (возможно, сама вершина v), смежна с некоторой вершиной w, не принадлежащей диаметральной цепи, то переходим в w и проходим все вершины, в которые можно попасть, до возвращения на диаметральную цепь. Возвратившись на цепь L_1, продолжаем аналогичное движение по направлению к u_1. Попав в вершину u_1, поворачиваем и проходим цепь L_1 от v_1 до v_0. Цепь L_2 от v_0 до v_2 проходим так, как цепь L_1 от v_0 до v_1 (см. рис. 62).

Остовное дерево содержит 19 ребер. По крайней мере 3 из них (принадлежащие цепи L_2) присутствуют в маршруте ровно один раз, а остальные не более двух раз. Поэтому в маршруте не более $16 \cdot 2 + 3 = 35$ ребер.

Точно так же строится маршрут и подсчитывается число его ребер при другом расположении начальной вершины (см. рис. 63).

Построенный маршрут прохождения вершин в графе определяет маршрут облета городов. ▷

126 На съезд приехали 500 делегатов, каждый из которых имеет не более трех знакомых среди участников. Оказалось, что для любых двух делегатов $Д_1$ и $Д_p$ существует такая цепочка делегатов $Д_1$, $Д_2, Д_3, \ldots, Д_p$, что делегат $Д_1$ знаком с делегатом $Д_2$, $Д_2$ — с делегатом $Д_3$ и т. д. Докажите, что участников съезда, может быть кроме одного, можно так рассадить за двух- и трехместными столами, что за двухместным столом люди будут знать друг друга, а за трехместным по крайней мере один человек будет знать двух остальных.

Решение. Рассмотрим граф знакомств делегатов. Граф является связным и содержит 500 вершин, степень каждой из которых не более трех.

Покажем, что вершины графа, за исключением, может быть, одной, можно разбить на группы из двух или трех вершин, порождающих связные графы. Рассмотрим остовное дерево T графа G и превратим его в корневое дерево следующим образом. Произвольную вершину u дерева T назовем вершиной ранга 1, смежные с ней вершины дерева назовем вершинами ранга 2, смежные с ними вершины дерева, не являющиеся вершинами ранга 1 и 2, вершинами ранга 3 и т. д. Пусть n —

наибольший из рангов вершин. Возьмем вершину u ранга n. Степень этой вершины в дереве T равна 1. Пусть u — смежная с v вершина ранга $(n-1)$ в дереве. Так как степень вершины u не больше трех, то она имеет в дереве одну смежную вершину ранга $(n-2)$ и, возможно, еще одну смежную вершину w ранга n. Если вершина w существует, то вершины u, v и w образуют нужную группу, если не существует, то вершины u и v.

Удалив вершины построенной группы из дерева, таким же образом построим следующую группу, и так до тех пор, пока в дереве не останутся вершины ранга 1 и 2. Если их будет 2 или 3, то они образуют группу, если 1 или 4, то одна из вершин останется вне групп.

Построенное разбиение вершин на группы определяет нужное разбиение делегатов. ▷

127 На съезд для выработки соглашений о работе на рынках прибыли 500 бизнесменов. Компании некоторых из них сотрудничают, но у каждого бизнесмена не более трех партнеров. Однако для любых двух бизнесменов $Б_1$ и $Б_p$ существует такая цепочка бизнесменов $Б_1, Б_2, Б_3, \ldots, Б_p$, что любые соседние члены цепочки сотрудничают. Было решено создать комиссию, в которую войдут более половины участников, но для объективности в комиссию было решено не включать бизнесменов, имеющих общие интересы. Известно, что хотя бы одну такую комиссию можно создать. Докажите следующее утверждение: существует такая группа коммерсантов, что, каким бы способом не выбиралась комиссия, в нее войдет менее половины членов этой группы.

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого, обозначающие бизнесменов, смежны, если компании соответствующих бизнесменов сотрудничают. Граф является связным и содержит 500 вершин, степень каждой из которых не более трех.

Разобьем вершины графа на группы так, как это сделано при решении задачи 126. Будем называть вершины «белыми», если они соответствуют делегатам, попавшим в комиссию, и «черными» — если соответствуют не попавшим.

Рассмотрим группы, содержащие по две вершины, соединенные ребром. При любом выборе комиссии каждая такая группа содержит не менее одной «черной» вершины, следовательно, число «черных» вершин не меньше числа «белых». Суммарное число вершин в таких группах четное.

Теперь рассмотрим группы, содержащие по три вершины. Такие группы существуют, так как в противном случае было бы невозможно создать комиссию более чем из половины участников съезда. В каждой группе есть вершина, имеющая степень 2 в дереве, которую назовем центром группы. Выберем в качестве искомого множества M множество центров групп.

Предположим противное: существует комиссия, для которой в множестве M будет не меньше «белых» вершин, чем «черных». Пусть в M — k «черных» вершин и $(k+p)$ «белых». В группе с «белым» центром две других вершины обязательно «черные», в группе с «черным» центром не более двух «белых» вершин. Таким образом, в трехвершинных группах «черных» вершин не менее $k + 2(k + p)$, а «белых» не более $(k+p)+2k$. Таким образом «черных» вершин не меньше, чем «белых», причем равенство возможно лишь при $p = 0$. Но по условию «белых» должно быть больше, чем «черных». Это возможно лишь в случае, когда «белых» и «черных» в множестве M одинаковое число, и не попавшая в группы вершина — «белая». Однако в этом случае в графе нечетное число вершин, что противоречит условию.

Следовательно, допущенное предположение неверно, и множество M определяет нужную группу бизнесменов. ▷

128 Шесть островов на реке в парке «Лотос» соединены мостами (рис. 64).

Можно ли, начав прогулку на одном из островов, пройти по каждому из мостиков ровно один раз и вернуться на тот же остров? В случае отрицательного ответа определите, сколько мостиков и между какими островами нужно построить, чтобы такая прогулка стала возможной.

Решение. Построим граф G, в котором каждому участку суши поставим в соответствие вершину и соединим две вершины ребром тогда

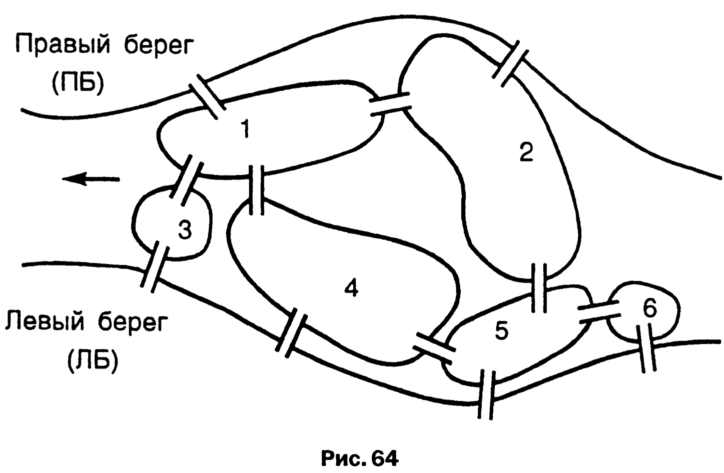


Рис. 64

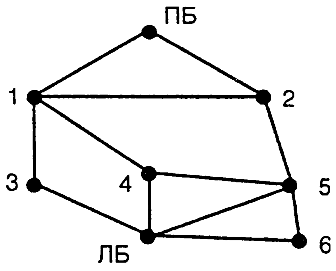


Рис. 65

и только тогда, когда соответствующие участки суши будут соединены мостом (см. рис. 65).

Связный граф, в котором существует цикл, проходящий через все ребра графа, называется ***эйлеровым***. Сам цикл тоже называется ***эйлеровым***. (Напомним, что в цикле каждое ребро графа проходится не более одного раза.)

Задача заключается в определении, будет ли граф G эйлеровым. Найдем необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла.

Теорема Эйлера. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждое прохождение вершины по циклу вносит слагаемое 2 в ее степень. Поскольку цикл содержит все ребра графа, то степени всех вершин будут четными.

Достаточность. Предположим, что степени всех вершин связного графа G четные. Начнем цепь P_1 из произвольной вершины v_1 и будем продлевать ее, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени вершин четные, то, попав в некоторую вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Таким образом, построение цепи P обязательно закончится в вершине v_1, и P_1 окажется циклом. Если P_1 содержит все ребра графа G, то построен эйлеров цикл. В противном случае, удалив из G ребра P_1, получим граф G_2. Так как степени всех вершин графов G и P_1 были четными, то и G_2 будет обладать этим свойством. В силу связности G графы P_1 и G_2 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2. Теперь, начиная из v_2, построим в G_2 цикл P_2 подобно тому, как построили P_1.

Объединим циклы P_1 и P_2 следующим образом: пройдем часть P_1 от вершины v_1 до вершины v_2, затем пройдем цикл P_2, затем — оставшуюся часть P_1 от v_2 до v_1 (см. рис. 66).

Если объединенный цикл не эйлеров, то, проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл. Поскольку степени вершин во всех графах, составленных из ребер, не попавших в строящийся цикл, четные, и число ребер в этих графах убывает, то процесс закончится построением эйлерова цикла.

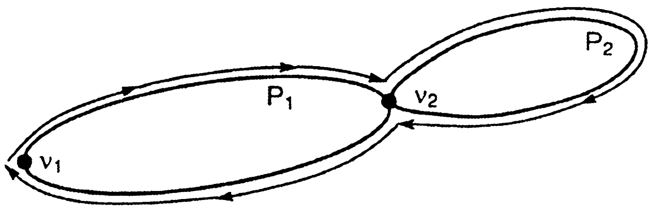


Рис. 66

Теорема доказана. □

Эта теорема носит имя великого математика Леонарда Эйлера и доказана им в 1736 году.

Рассмотрим построенный граф G. В этом графе вершины 2 и 4 имеют нечетную степень, следовательно, граф G не является эйлеровым. Это означает, что желаемую прогулку по мостикам совершить нельзя.

Если же соединить ребром вершины 2 и 4, то степень всех вершин нового графа будет четной, а сам граф будет эйлеровым. Поэтому после постройки моста, соединяющего острова 2 и 4, можно найти маршрут прогулки по мостикам, начинающийся и заканчивающийся в одном месте, при котором каждый мостик будет пройден ровно один раз. ▷

129 В парке «Лотос» (см. предыдущую задачу) построили мостик, соединяющий острова 2 и 4. Найдите маршрут прогулки, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит каждый мостик ровно один раз.

Решение. Для того чтобы отыскать нужный маршрут, необходимо найти эйлеров цикл в графе G, описывающем острова и мостики парка (рис. 67).

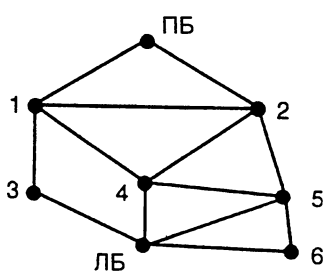


Рис. 67

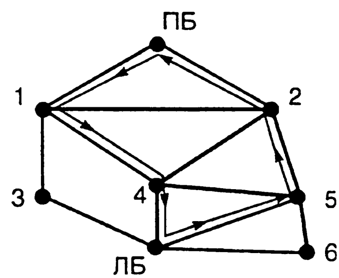


Рис. 68

Для поиска цикла воспользуемся способом доказательства теоремы в предыдущей задаче. Поиск эйлерова цикла начнем в вершине ПБ. Выйдя из этой вершины, для продолжения цепи будем каждый раз выбирать еще не использованное ребро. Предположим, что мы получили цикл $C_1 = (\text{ПБ}, 1, 4, \text{ЛБ}, 5, 2, \text{ПБ})$.

Удалим ребра цикла C_1 из графа. В оставшемся графе построим цикл $C_2 = (1, 3, \text{ЛБ}, 6, 5, 4, 1)$. Объединим циклы C_1 и C_2 в цикл $C = (\text{ПБ}, 1, 3, \text{ЛБ}, 6, 5, 4, 2, 1, 4, \text{ЛБ}, 5, 2, \text{ПБ})$ по правилу, предложенному в предыдущей задаче (в качестве вершины v_2 используется вершина 1).

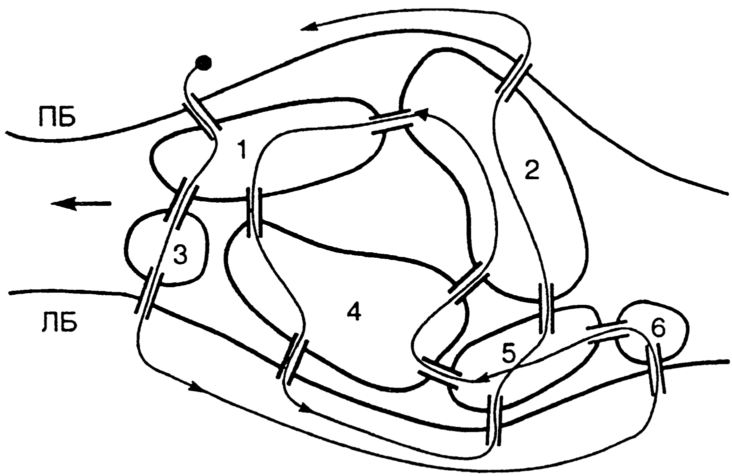


Рис. 69

Построенному циклу будет соответствовать требуемый маршрут прогулки (см. рис. 69). ▷

130 В городе на каждом перекрестке сходится четное число улиц, а тупиков в городе нет. Докажите, что улицы города можно так разбить на маршруты патрулирования полицейскими машинами, что любой маршрут начинается и заканчивается на одном и том же перекрестке, содержит каждый свой промежуточный пункт ровно один раз, при этом маршруты для разных машин не будут иметь одних и тех же отрезков улиц между перекрестками.

Решение. Естественным образом зададим перекрестки и улицы города в виде графа G. Так как граф G связный и степень его каждой вершины четная, то граф является эйлеровым. Докажем следующую теорему.

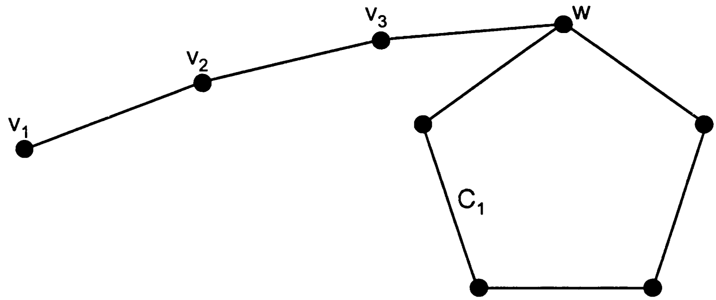


Рис. 70

Теорема. Связный граф является эйлеровым тогда и тогда, когда его ребра можно разбить на непересекающиеся простые циклы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — эйлеров граф. Начнем проходить эйлеров цикл графа, начиная с любой вершины v_1, до тех пор, пока не попадем в вершину w, в которой уже были (см. рис. 70).

Часть эйлерова цикла от вершины w до вершины w образует простой цикл C_1.

Удалим из графа G ребра цикла C_1. В полученном графе G_2 все вершины имеют четную степень, следовательно, все его компоненты будут эйлеровыми графами. Так, как и ранее, выделим в G_2 цикл C_2. Указанный процесс будем продолжать, пока не разобьем все ребра графа на простые циклы.

Достаточность. Пусть ребра графа разбиты на простые циклы. Объединим их в эйлеров цикл, как это делали при доказательстве достаточности в задаче 128.

Теорема доказана. □

Из теоремы вытекает возможность построения маршрутов патрулирования требуемым образом. ▷

131 Экспозиция картинной галереи представляет собой систему коридоров, на обеих стенах которых развешаны картины (схему коридоров смотри на рис. 71).

Можно ли предложить такой маршрут осмотра экспозиции, при котором посетитель проходит вдоль каждой стены ровно один раз?

Решение. Превратим схему коридоров в мультиграф, заменив каждый коридор двумя ребрами (см. рис. 72).

Полученный мультиграф является эйлеровым, поскольку степень каждой его вершины четная. Можно найти эйлеров цикл в мультиграфе так, как в задаче 129. Этот цикл и определит нужный маршрут. ▷

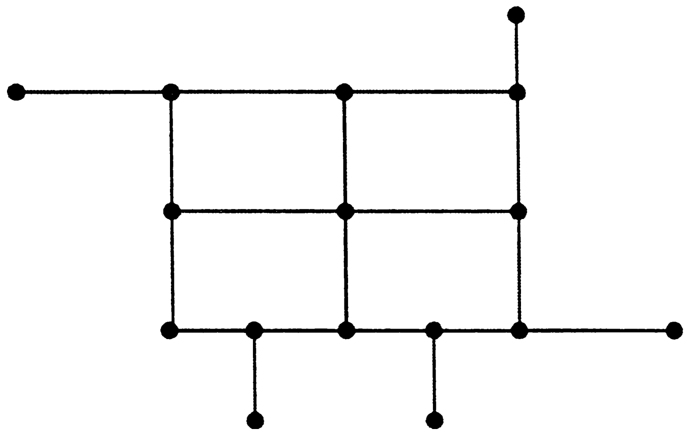


Рис. 71

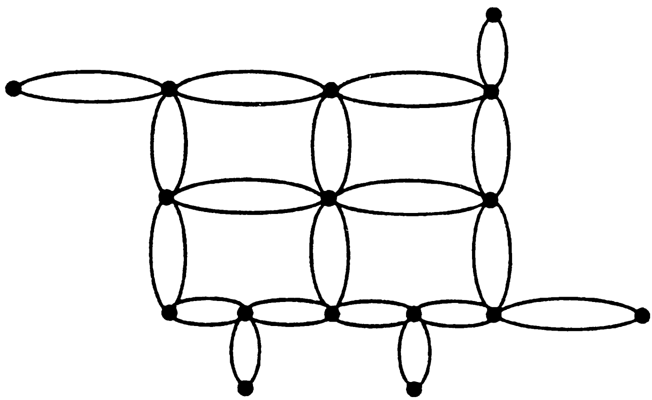


Рис. 72

132 Можно ли нарисовать фигуру, изображенную на рис. 73, не отрывая карандаша от бумаги, причем каждую точку фигуры карандаш должен проходить только один раз?

Решение. Цепь в графе, содержащая каждое его ребро, называется ***эйлеровой цепью.***

Теорема. Связный граф имеет эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин нечетной степени.

Доказательство. Если в графе отсутствуют вершины нечетной степени, то утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы Эйлера

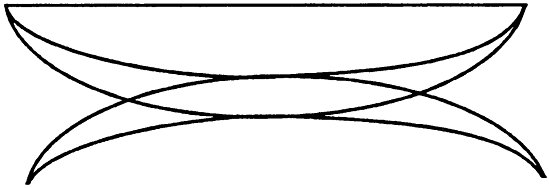


Рис. 73

(см. задачу 128). В этом случае начальная и конечная вершины цепи совпадают.

Из леммы о рукопожатиях вытекает, что в графе не может быть ровно одна вершина нечетной степени.

Достаточность. Пусть G — граф, у которого ровно две вершины нечетной степени. Если соединим их ребром, то в полученном мультиграфе все вершины будут иметь четную степень. Построим в мультиграфе эйлеров цикл, как в задаче 130. Удалив из цикла добавленное ранее ребро, получим эйлерову цепь.

Доказательство необходимости проводится как при доказательстве теоремы Эйлера.

Теорема доказана. □

Рассмотрим граф, связанный с фигурой на рис. 74.

Степени вершин 1 и 2 графа нечетные. В мультиграфе, полученном при добавлении еще одного ребра $(1, 2)$, построим эйлеров цикл, а затем, удалив из цикла добавленное ребро, получим цепь, которая начинается в вершине 1, заканчивается в вершине 2 и содержит каждое ребро графа ровно один раз. Построенная цепь

$$L = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5, 3, 1, 4, 7, 5, 2)$$

определит движение карандаша при вычерчивании фигуры (рис. 75). ▷

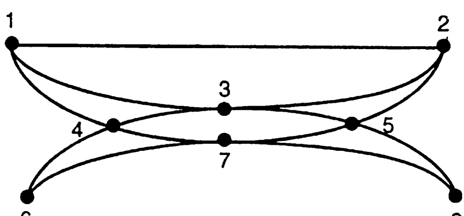


Рис. 74

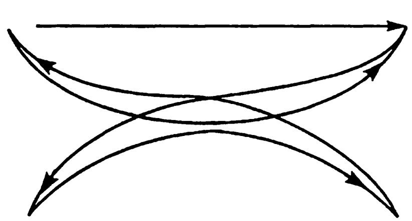


Рис. 75

133 В небольшой роще находится заяц. Выскочив из норы и бегая от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под деревом (см. рис. 76).

Опытный охотник определил, что между каждыми двумя деревьями заяц пробегал не более раза. Под каким деревом находится нора зайца, и где сейчас он спрятался?

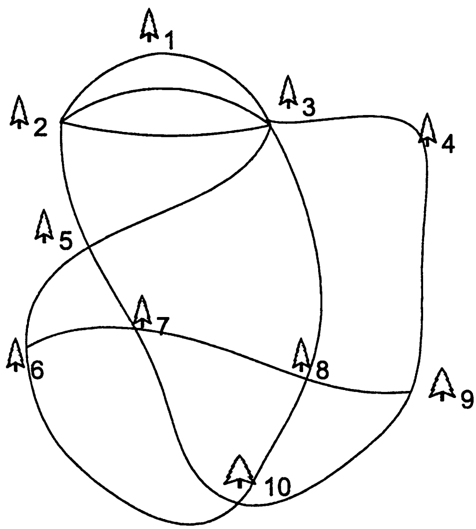


Рис. 76

Решение. Поскольку заяц пробегал ровно один раз между любыми двумя деревьями, то в графе, вершинами которого являются деревья, а ребрами — следы между ними, маршрут зайца является эйлеровой цепью. Из предыдущей задачи следует, что она может начинаться и оканчиваться только в вершинах нечетной степени. В графе ровно две вершины нечетной степени. Поэтому нора зайца должна быть под деревом 6, а он спрятался под деревом 9, или нора под деревом 9, а он спрятался под деревом 6. ▷

134 В Зеленом городе (см. карту на рис. 77) решили пустить автобус. По решению мэрии, по каждой улице, за исключением набережной, должен проходить автобусный маршрут и притом только один. Определите наименьшее число маршрутов, удовлетворяющих этому условию. Найдите сами маршруты.

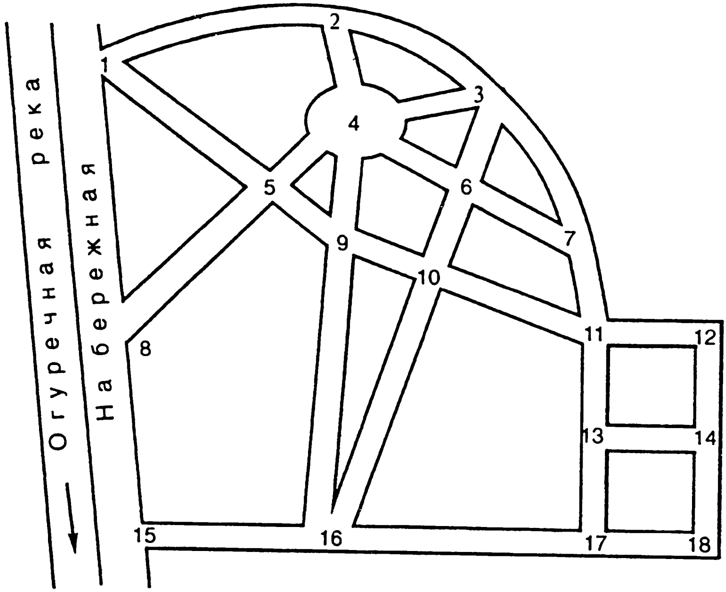


Рис. 77

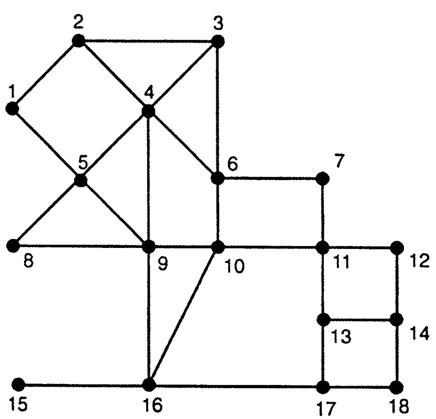


Рис. 78

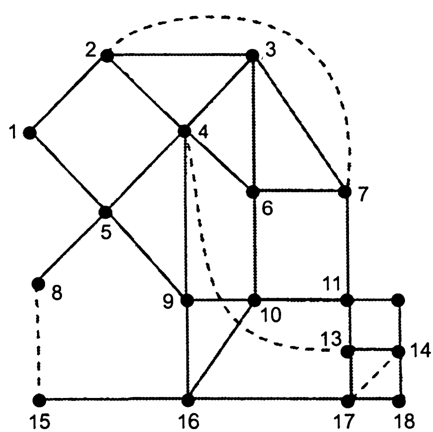


Рис. 79

Решение. Естественным образом представим Зеленый город (без набережной) в виде графа G, вершины которого обозначают перекрестки города, а ребра — улицы (рис. 78).

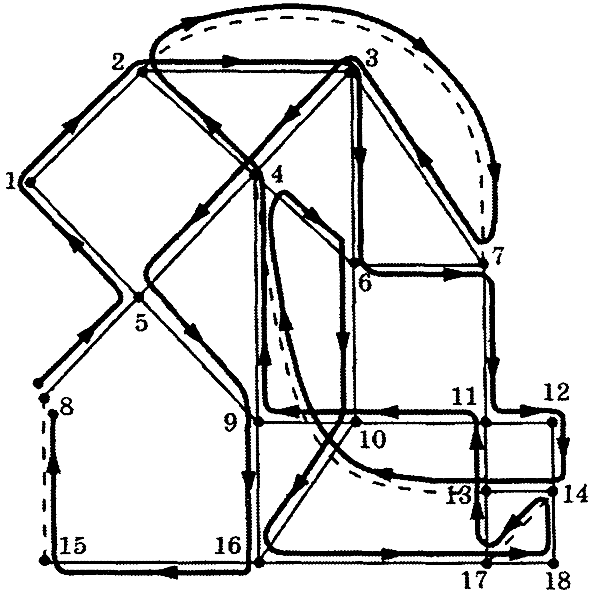

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Рис. 80

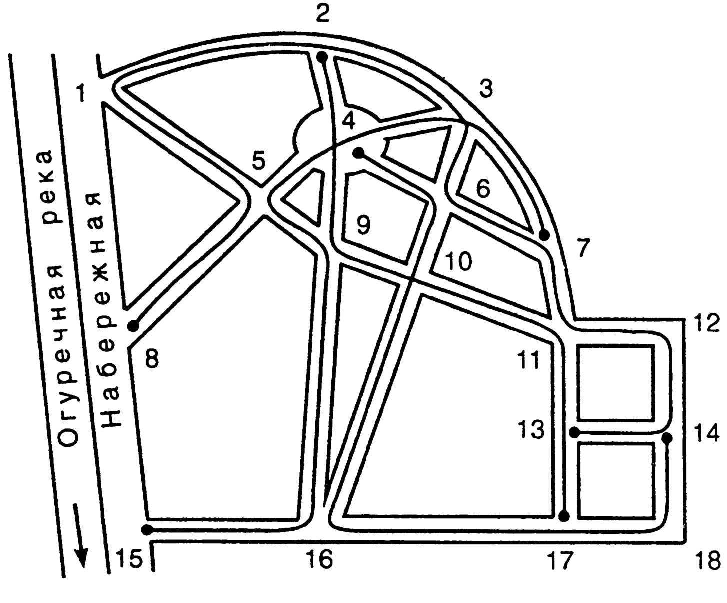

Огуречная река
Набережная
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Рис. 81

В построенном графе 8 вершин нечетной степени, следовательно, граф не является эйлеровым. Соединим попарно вершины нечетных степеней, например 2 и 7, 8 и 15, 4 и 13, 14 и 17 (см. рис. 79).

Поскольку степени всех вершин нового графа четные, то он будет эйлеровым. Так, как и в задаче 124, построим эйлеров цикл в новом графе (один из возможных вариантов цикла изображен на рис. 80).

Удалим добавленные ребра. Цикл распадется на четыре цепи, которые будут соответствовать автобусным маршрутам.

Покажем, что ребра графа невозможно разбить менее чем на 4 цепи. Если вершина графа является только промежуточной вершиной цепей, то ее степень будет четной. Поэтому любая вершины нечетной степени обязательна должна быть конечной вершиной какой-нибудь цепи. Поскольку у цепи только два конца, то для того чтобы соединить 8 вершин, необходимо по крайней мере 4 цепи.

В общем случае таким же образом можно доказать теорему:

Если связный граф содержит ровно $2k$ ($k \geqslant 1$) вершин нечетной степени, то минимальное число цепей, не имеющих общих ребер, на которые можно разбить ребра графа, равно k. ▷

135 Турист, который приехал в Минск на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на площади Бангалор, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Решение. Естественным образом представим город в виде графа G, вершины которого обозначают перекрестки города, а ребра — улицы. Каждое ребро графа пометим числом, равным количеству проходов туристом соответствующего отрезка улицы. Назовем ребро четным, если оно помечено четным числом, и нечетным, если помечено нечетным числом. Исследуем свойства подграфа H, образованного нечетными ребрами.

Рассмотрим маршрут L в графе G, соответствующий маршруту туриста по городу. Возьмем произвольную вершину w, лежащую на маршруте, и вычислим сумму $S(w)$ чисел, помечающих ребра, выходящие из этой вершины. Если вершина w не соответствует ни вокзалу, ни площади Бангалор, то сумма $S(w)$ будет четной, поскольку число заходов в любую промежуточную вершину маршрута равно числу выходов из нее. Поэтому число нечетных ребер, выходящих из каждой вершины графа, не соответствующей вокзалу или площади Бангалор, будет четным, так как в противном случае сумма $S(w)$ окажется нечетной.

Для вершины v, обозначающей площадь Бангалор, число заходов в нее будет на единицу больше. $S(v)$ нечетная, и число нечетных ребер, выходящих из вершины v, нечетное.

Аналогично доказывается, что число нечетных ребер, выходящих из вершины u, обозначающей вокзал, нечетное.

Таким образом, в графе H, образованном нечетными ребрами, ровно две вершины (u и v) имеют нечетную степень. Из следствия из леммы о рукопожатиях вытекает, что вершины u и v принадлежат одной компоненте графа H (см. также задачу 56). Поэтому в графе H существует цепь P, соединяющая вершины u и v. Цепь P и определит маршрут возвращения туриста. ▷

136 Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас куба? (Толщина всех ребер каркаса должна быть одинаковой.)

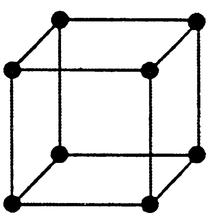


Рис. 82

Решение. Считая вершины куба вершинами графа, а ребра куба ребра куба ребрами графа, получим граф куба (рис. 82).

В этом графе 8 вершин нечетной степени. Из предыдущей задачи следует, что минимальное число цепей, на которое можно разбить ребра графа — 4. Следовательно, наименьшее число кусков проволоки — тоже 4. ▷

137 Почтальон должен разнести почту по всем улицам своего участка. (Схема участка изображена на рис. 83. На схеме указаны расстояния между перекрестками. Буквой П обозначена почта.) Найдите кратчайший маршрут почтальона.

Решение. Если бы граф G участка был бы эйлеровым, то маршрут почтальона определялся бы эйлеровым циклом. Но степени вершин 1 и 6 нечетные, поэтому эйлерова цикла не существует и некоторые улицы почтальон должен будет пройти дважды. Допустим, что мы нашли маршрут обхода. Если улица проходится почтальоном дважды, то добавим соответствующее ребро к графу G. Таким образом, мы получим эйлеров мультиграф. Следовательно, для решения задачи нужно удвоить некоторые ребра так, чтобы степени всех вершин стали четными. При этом сумма добавленных ребер должна быть наименьшей. В нашем графе степени вершин 1 и 6 должны стать четными. Но при удвоении некоторого ребра, выходящего из вершины 1, например ребра $(1, 2)$, степень вершины 2 станет нечетной и придется удваивать какое-то ребро, выходящее из вершины 2, и т. д. Процесс удваивания

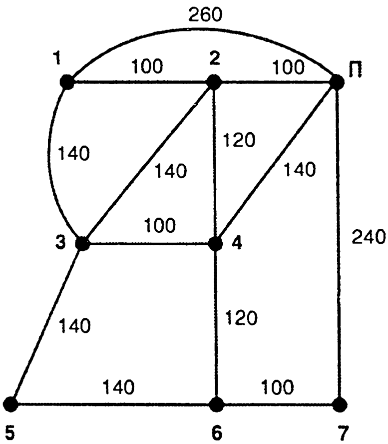


Рис. 83

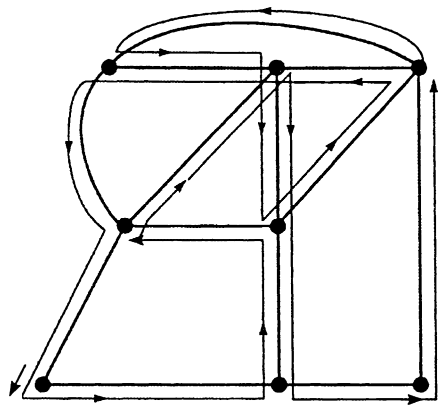


Рис. 84

ребер может окончиться только в вершине 6. Следовательно, мы должны найти кратчайшую цепь, соединяющую вершины 1 и 6, и удвоить ребра этой цепи. Такой цепью является цепь $L = (1, 2, 4, 6)$. В полученном мультиграфе так, как в задаче 129, найдем эйлеров цикл, который и определит маршрут почтальона (один из возможных маршрутов изображен на рис. 84). ▷

138 В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причем каждый город соединен не менее чем с половиной других городов. Докажите, что можно найти такой маршрут облета городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе и каждый город посещается ровно один раз.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний, в котором вершины, соответствующие городам, будут соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие города будут соединены авиалинией.

Граф, в котором существует цикл, содержащий каждую вершину графа ровно один раз, называется ***гамильтоновым***. Сам цикл также называется ***гамильтоновым***.

Нам необходимо доказать, что граф G является гамильтоновым.

Докажем одно достаточное условие гамильтоновости графа.

Теорема. Если в графе G, имеющем n вершин, степень каждой вершины не меньше, чем $n/2$, то граф G — гамильтонов.

Доказательство. Предположим противное: граф G не является гамильтоновым. Добавим к графу новую вершину, соединив ее ребрами со всеми вершинами графа G. Если получившийся граф не гамильтонов, то добавим еще одну новую вершину, как и ранее, соединив ее ребрами со всеми вершинами графа G, и т. д., до тех пор пока не получим гамильтонов граф, который обозначим G_1. Это обязательно произойдет, так как при добавлении n вершин гамильтонов цикл можно построить, даже не используя ребра графа G (см. рис. 85). Заметим, что никакие две новые вершины не соединены ребром.

Пусть k — минимальное число новых вершин, которые нужно добавить, чтобы получить гамильтонов граф G_1. В графе G_1 будет $(n+k)$ вершин.

Рассмотрим гамильтонов цикл $C = (u, w, v, \ldots, u)$ в графе G_1, где u и v — вершины графа G, а w — новая вершина. Вершины u и v не смежные, так как в противном случае существует гамильтонов цикл в графе, не включающем вершину w, что противоречит минимальности числа k. По этой же причине за каждой вершиной, смежной с вершиной u, в цикле обязательно должна стоять вершина, не смежная с вершиной v. (На рис. 86 изображена ситуация, когда за вершиной, смежной с вершиной u, стоит вершина, смежная с вершиной v.)

Из условия теоремы следует, что число вершин в графе G, смежных с вершиной u, будет не меньше, чем $n/2$. Тогда число вершин, смежных с вершиной u, в графе G_1 будет не меньше, чем $n/2 + k$. Поскольку за каждой вершиной, смежной с u, в цикле находится вершина, не смежная с v, то можно оценить число d_1 вершин, не смежных с вершиной v, в графе G_1:

$$d_1 \geqslant \frac{n}{2} + k.$$

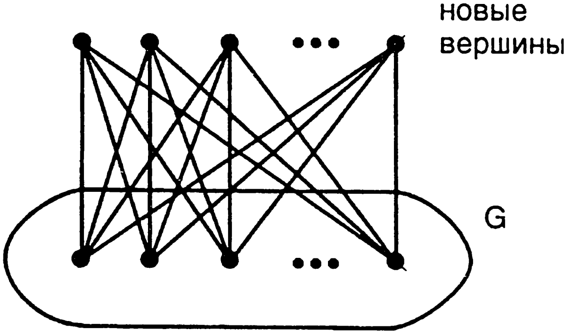


Рис. 85

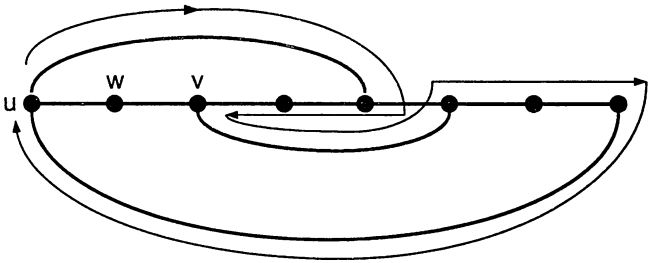


Рис. 86

Для числа d_2 вершин графа G_1, смежных с вершиной v, верна оценка

$$d_2 \geqslant \frac{n}{2} + k.$$

Так как каждая вершина или смежная с v, или не смежная с v, то число всех вершин графа G_1 будет не меньше, чем $(n + 2k)$, что противоречит числу вершин графа G_1.

Теорема доказана. □

Поскольку каждый город соединен авиалинией не менее чем с половиной городов страны, то для рассматриваемого графа авиалиний выполняются условия теоремы. Гамильтонов цикл в этом графе будет соответствовать нужному маршруту облета. ▷

139 На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют рыцарям, и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда сответствующие рыцари дружат. Если граф G имеет $2n$ вершин, то для степени любой его вершины v выполняется неравенство $d(v) \geqslant n$.

Первое решение. Из теоремы, доказанной при решении предыдущей задачи, следует, что в графе G существует гамильтонов цикл. Рыцарей можно рассадить вокруг стола в соответствии с порядком вершин в этом цикле.

Второе решение. Рассмотрим произвольную расстановку вершин графа G на окружности. Пусть вершины u и v не смежны и вершина v находится справа от вершины u. Теперь найдем такую смежную

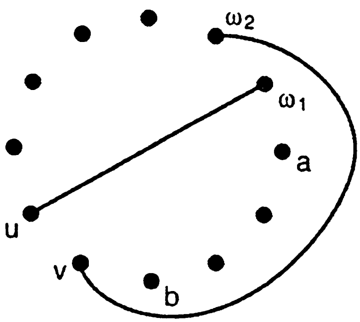


Рис. 87

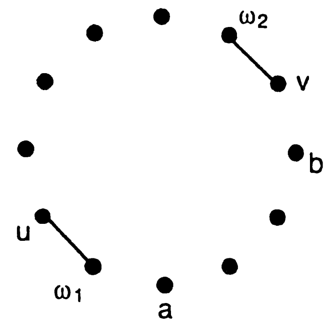


Рис. 88

с вершиной u вершину w_1, что вершина w_2, которая находится справа от вершины w_1, является смежной с вершиной v (см. рис. 87). Такую вершину всегда можно найти, поскольку смежных с u вершин не меньше, чем n, а несмежных с v — больше, чем $(n - 1)$.

«Развернем» участок окружности от w_1 до v в обратном порядке (см. рис. 88).

После поворота число пар несмежных вершин на окружности уменьшится. Проделав подобную операцию необходимое число раз, получим такое расположение вершин, что все соседние вершины будут смежными. Расположение вершин на окружности определяет расположение рыцарей за круглым столом. ▷

140 Можно ли перевести шахматного коня с клетки a1 на клетку h8, побывав при этом на каждой клетке шахматной доски ровно один раз? (Клетки a1 и h8 — крайние клетки большой диагонали шахматной доски.)

Решение. Построим граф G по следующему правилу. Каждой клетке шахматной доски поставим в соответствие вершину графа. Две вершины соединим ребром тогда и только тогда, когда конь может перейти из клетки, соответствующей одной вершине, в клетку, соответствующую второй. Если конь находится в клетке какого-то цвета, то, сделав ход, он попадет в клетку другого цвета. Поэтому граф G будет двудольным графом. Его доле A будут соответствовать 32 черные клетки, а доле B — 32 белые.

Цепь, содержащая каждую вершину графа ровно один раз, называется ***гамильтоновой цепью.***

Существование нужного маршрута перевода коня из a1 в h8 эквивалентно существованию в графе G гамильтоновой цепи, соединяющей вершины, соответствующие клеткам a1 и h8. Названные клетки являются черными.

Покажем, что существование такой цепи невозможно. Действительно, цепь должна иметь 63 ребра, так как для требуемого перехода из a1 в h8 нужно сделать 63 хода. Каждое нечетное ребро (в том числе и 63-е) цепи, которая начинается в вершине доли A, приводит в долю B. Это эквивалентно тому, что каждый нечетный ход коня, в том числе и 63-й, приводит в белую клетку. Поскольку клетка h8 черная, то нужный маршрут коня не существует. ▷

141 Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

Решение. Построим граф G по следующему правилу. Каждому единичному кубику, кроме центрального, поставим в соответствие вершину графа. Если два единичных кубика имеют общую грань, то соответствующие вершины графа соединим ребром.

Поскольку мышка съедает каждый кубик только один раз, то ее маршрут, если он существует, будет описан гамильтоновой цепью. Докажем, что в графе G не существует гамильтоновой цепи.

Каждый из 26 единичных кубиков, отличных от центрального, будем считать либо белым, либо черным в шахматном порядке: 12 кубиков, имеющих ровно по две грани на поверхности большого куба назовем белыми, а остальные 14 кубиков — черными. Поскольку в любой паре кубиков, имеющих общую грань, один кубик будет белым, а другой — черным, то граф G является двудольным графом. Так как в любой цепи двудольного графа чередуются вершины разных долей, то гамильтоновой цепи в двудольном графе, одна доля которого имеет на две вершины больше, чем другая, быть не может. Следовательно, мышка не может съесть сыр указанным способом. ▷

142 Имеются три дома и три колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трех колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возможно ли это?

Решение. Граф называется ***планарным***, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие его два ребра (за исключением ребер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек. Граф, нарисованный таким образом, называется ***плоским***.

Решение задачи о трех домах и трех колодцах сводится к ответу на вопрос: является ли планарным граф $K_{3,3}$ (рис. 89)?

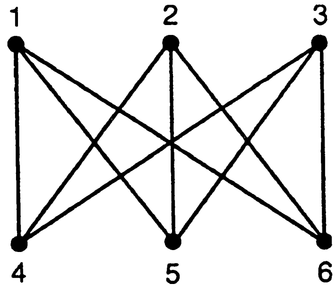


Рис. 89

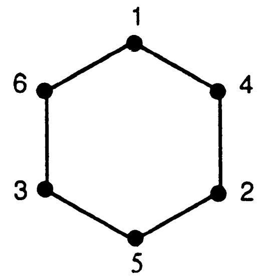


Рис. 90

Попробуем нарисовать граф $K_{3,3}$ на плоскости так, как этого требует определение планарности. На любом рисунке графа должен обязательно присутствовать цикл $C = (1, 4, 2, 5, 3, 6, 1)$, который делит плоскость на две части: внутри и вне цикла (рис. 90).

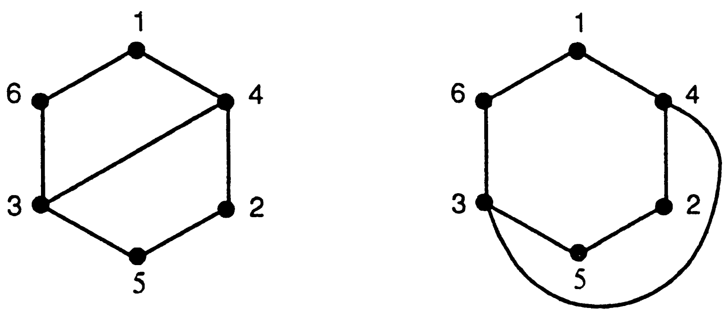


Рис. 91

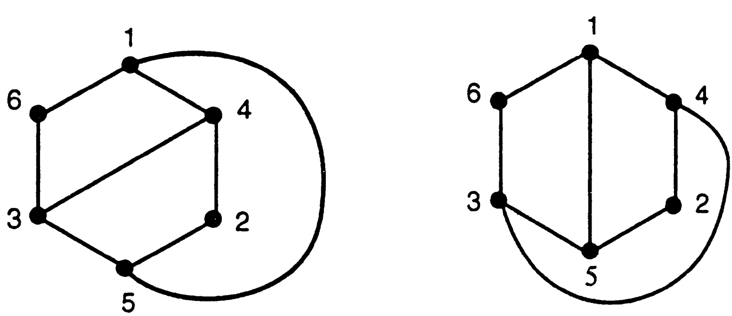


Рис. 92

Нам осталось еще нарисовать ребра (3, 4), (1, 5), (6, 2). Для изображения ребра (3, 4) есть две возможности: внутри цикла и вне цикла (рис. 91).

Тогда ребро (1, 5) в первом случае можно нарисовать только вне цикла, а во втором — только внутри (рис. 92).

Последнее ребро (6,2) невозможно нарисовать так, чтобы оно не имело общих точек с ранее нарисованными ребрами ни в одном из этих случаев.

Мы доказали, что граф $K_{3,3}$ не является планарным. Это означает, что невозможно провести дорожки от домов до колодцев нужным образом. ▷

143 Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

Решение. Карту города можно считать плоским графом G, в котором перекрестки будут вершинами, а отрезки улиц — ребрами.

Гранью плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, каждую пару из которых можно соединить кривой, не пересекающей ребра графа. Грань, которая имеет бесконечную площадь, называется ***внешней***, остальные грани называются ***внутренними***.

Плоский граф, изображенный на рис. 93, имеет 3 грани, причем грань 1 — внешняя, а грани 2 и 3 — внутренние.

Теорема Эйлера. Для всякого связного плоского графа верно равенство

$$n - m + f = 2, \qquad (*)$$

где n — число вершин, m — число ребер, f — число граней графа.

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T графа G (см. задачу 122). Очевидно, что граф T имеет n вершин и одну грань (внешнюю). Поскольку T — дерево, то число ребер T равно $(n-1)$ (см. задачу 95). Поэтому для графа T доказываемая формула верна. Теперь

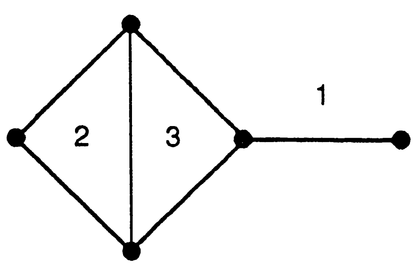


Рис. 93

будем поочередно добавлять к T недостающие ребра графа G. При каждом добавлении число вершин не меняется, а число ребер и граней увеличивается на единицу. Это значит, что доказываемая формула будет верна для всякого графа, получаемого в результате операций добавления ребер, а значит, и для исходного графа.

Теорема доказана. □

Формула (*) называется ***формулой Эйлера***.

Поскольку кварталы города соответствуют внутренним граням плоского графа G, то найдем число граней по формуле Эйлера. Граф G имеет 155 вершин и 260 ребер. Число граней в нем:

$$f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 107.$$

В городе нужно построить 106 универсамов. ▷

144 В стране 7 озер, соединенных между собой 11 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины обозначают озера, а ребра — каналы. В графе 7 вершин и 11 ребер, и он является плоским. Поэтому для графа выполняется формула Эйлера, по которой число граней графа равно $11 - 7 + 2 = 6$. Одна из этих граней внешняя, а остальные внутренние. Следовательно, в стране 5 островов. ▷

145 Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живет один муравей. Каждая ячейка представляет собой многоугольник (см. рис. 94). Палочки соединяются между собой с помощью специального раствора, причем можно соединять только концы

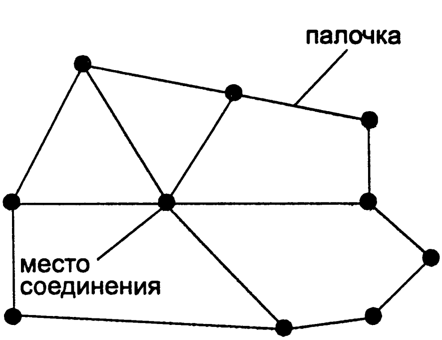


Рис. 94

палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьев живет в колонии?

Решение. Схему колонии можно считать плоским графом, в котором палочки являются ребрами, а места их соединения — вершинами.

Граф, построенный в нашей задаче, имеет 30 вершин и 58 ребер. С помощью формулы Эйлера найдем число граней в нем:

$$f = m - n + 2 = 58 - 30 + 2 = 30.$$

Так как каждая грань графа, за исключением внешней, соответствует ячейке, то в колонии живут 29 муравьев. ▷

146 На острове Щекотан планеты Тямти-Лямти расположено 5 колоний разумных муравьев (см. предыдущую задачу). Известно, что эти колонии составлены из 1200 палочек и имеют 300 мест их соединения. Сколько муравьев живет на острове?

Решение. Поселения муравьев на острове Щекотан можно изобразить несвязным графом G, каждая из пяти компонент которого соответствует одной колонии.

Покажем, что формула Эйлера следующим образом обобщается на случай несвязного плоского графа:

$$n - m + f = k + 1,$$

где k — число компонент графа, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и раньше.

Соединим компоненты ребрами (см. рис. 95).

В полученном связном графе будет n вершин, $(m + k - 1)$ ребро и f компонент. Для этого графа будет верна формула Эйлера

$$n - (m + k - 1) + f = 2.$$

Выполнив преобразования, получим $n - m + f = k + 1$.

Воспользуемся выведенной формулой:

$$f = m - n + k + 1 = 1200 - 300 + 5 = 1 = 906.$$

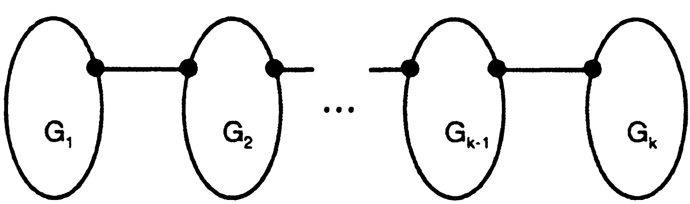


Рис. 95

Поскольку каждая грань, за исключением внешней, соответствует ячейке, то на острове живут 905 муравьев. ▷

147 Из-за недостатка земли и строительного материала на острове Болтай каждая ячейка в колонии разумных муравьев (см. предыдущие задачи) построена из трех палочек. Сколько палочек нужно для построения колонии и сколько муравьев живет в ней, если колония имеет 1200 мест соединения палочек, а снаружи ограничена 500 палочками?

Решение. Как и ранее, изобразим схему колонии плоским графом.

Плоский граф, в котором каждая грань, в том числе и внешняя, ограничена тремя ребрами, называется ***плоской триангуляцией***.

Определим число ребер m и число граней f в плоской триангуляции, имеющей n вершин. Поскольку каждая ее грань ограничена тремя ребрами, а каждое ребро принадлежит двум граням, то выполняется равенство $3f = 2m$. Отсюда $f = 2m/3$. Подставив это значение в формулу Эйлера, получим, что $m = 3n - 6$, а $f = 2n - 4$.

Превратим граф G, изображающий колонию, в плоскую триангуляцию, нарисовав во внешней грани новую вершину и соединив ее ребрами с каждой вершиной внешней грани (см. рис. 96). Так как

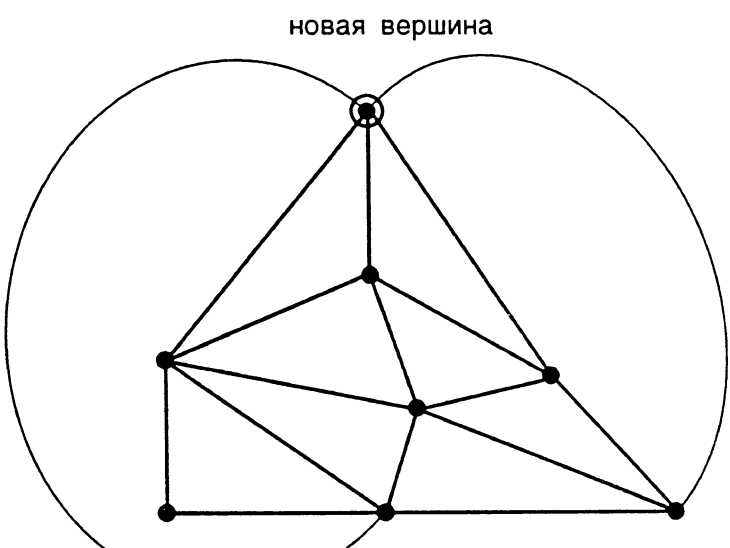


Рис. 96

внешняя грань графа G имеет 500 вершин, то мы проведем 500 новых ребер.

Полученная плоская триангуляция имеет 1201 вершину. Число ребер в ней будет $m = 3 \cdot 1201 - 6 = 3597$. Вычтя из этого числа 500 добавленных ребер, получим, что для построения колонии необходимо 3097 палочек.

Число граней в триангуляции — $f = 2 \cdot 1201 - 4 = 2398$. Вычтя из этого числа 501 грань, образовавшиеся из внешней грани графа G после добавления новой вершины, получим, что в колонии живет 1897 муравьев. ▷

148 Государства, расположенные на острове, имеют форму треугольников, причем внутри острова нет точек, в которых сходятся границы трех или более государств. На берегу моря в местах, где сходятся границы нескольких государств, установлены монументы Дружбы. Таких монументов шесть. Сколько государств на острове?

Решение. Плоский граф, все вершины которого принадлежат одной грани, называется ***внешнепланарным***. Обычно граф изображают так, что такой гранью оказывается внешняя грань графа. Внешнепланарный граф, к которому нельзя добавить ни одного ребра, не теряя свойства внешнепланарности, называется ***максимальным внешнепланарным*** графом (см. рис. 97). Очевидно, что каждая его внутренняя грань ограничена тремя ребрами.

Теорема. Пусть G — максимальный внешнепланарный граф с n $(n \geqslant 3)$ вершинами, принадлежащими внешней грани. Тогда граф G имеет $(n-2)$ внутренние грани.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Утверждение теоремы справедливо при $n = 1$. Предположим, что оно верно при $n = p$, и докажем его при $n = p + 1$. Легко доказать, что граф G содержит две вершины степени 2 (см. рис. 97). Удалив одну из них из графа (вместе

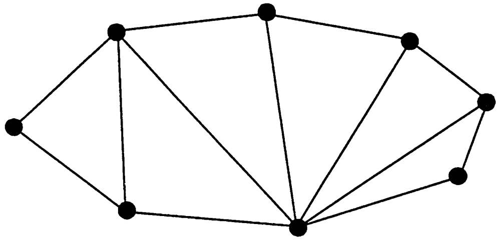


Рис. 97

с выходящими из нее ребрами), получим внешнепланарный граф G_1, имеющий на одну вершину и одну внутреннюю грань меньше, чем граф G. По индуктивному предположению число внутренних граней в графе G_1 будет $(p-2)$. Вернувшись к графу G, получим, что он содержит $(p-1)$ внутреннюю грань.

Теорема доказана. □

Из условия задачи следует, что граф G, порождаемый береговой линией острова и границами государств, будет двусвязным максимальным внешнепланарным графом. Граф G имеет 8 вершин. Из теоремы вытекает, что он имеет 6 граней.

Следовательно, на острове 6 государств. ▷

149 Каждое из государств, расположенных на острове, имеет четное число соседей. (Внутри любого государства можно путешествовать, не пересекая границ с другими государствами. Два государства считаются соседними, если они имеют общую границу ненулевой длины.) Несколько государств, не имеющих выхода к морю, решили объединиться. Докажите, что новое государство также будет иметь четное число соседей.

Решение. Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть каждая грань плоского графа ограничена циклом с четным числом ребер. Тогда любой простой цикл графа имеет четное число ребер.

Доказательство. Рассмотрим простой цикл C графа. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_p$ — грани плоского графа, расположенные внутри цикла, $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — циклы, ограничивающие эти грани, и $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — число ребер в этих циклах.

В сумме $k_1 + k_2 + \ldots + k_p$, которая является четным числом, каждое ребро, находящееся внутри цикла, учитывается два раза, так как принадлежит двум граням. Поэтому сумма числа ребер, находящихся внутри цикла, четная. Отсюда следует, что число ребер, принадлежащих циклу, также четное.

Утверждение доказано. □

Рассмотрим граф, порождаемый границами объединяемых государств и применим доказанное утверждение к каждой его компоненте. Из утверждения следует, что новое государство будет иметь четное число соседей. ▷

150 В стране некоторые города соединены дорогами, причем нельзя построить ни одной новой дороги так, чтобы она не пересекала какую-либо из существующих дорог. С одной дороги переехать на другую можно только в городе, где эти дороги сходятся. Докажите, что дороги могут быть так приватизированы двумя компаниями, что из любого города страны в любой другой можно проехать, пользуясь дорогами только одной компании.

Решение. Карта страны с городами и дорогами естественным образом задает некоторый граф. Из условия задачи вытекает, что граф является плоской триангуляцией. Необходимо показать, что ребра графа можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает связный остовный подграф. Будем индуктивно строить нужные подмножества, окрашивая ребра одного из них в синий, а другого — в красный цвет.

Рассмотрим любую вершину графа v_0. Пусть эта вершина смежна с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Окрасим ребра цепи $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_p)$ в синий цвет, а ребра $(v_p, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_p)$ — в красный.

Предположим, что некоторые ребра графа покрашены в синий и красный цвета, причем выполняется условие A: любые две вершины, из которых выходят окрашенные ребра, соединены как цепью только с синими ребрами, так и цепью только с красными ребрами.

Рассмотрим грань, имеющую одно или два окрашенных ребра. Если окрашено одно ребро, то окрасим еще одно ребро грани в синий цвет, а другое в красный. Если окрашено два ребра, то окрасим третье ребро грани в любой цвет. Для получившегося подграфа, порожденного окрашенными ребрами, условие A выполняется.

Продолжая процесс подобным образом, окрасим все ребра графа. Следовательно, дороги можно распределить между двумя компаниями требуемым образом. ▷

151 Докажите, что число вершин (n), ребер (m) и граней (f) любого выпуклого многогранника связано формулой $n-m+f=2$.

Решение. Поместим многогранник в сферу так, чтобы ее центр находился внутри многогранника. Будем считать вершины многогранника вершинами, а ребра — ребрами графа G. Спроектировав граф G из центра сферы на сферу так, что центр, проектируемая точка и ее проекция на сфере будут находиться на одном луче, выходящем из центра сферы (см. рис. 98), получим изображение G_1 графа G на сфере.

Так как многогранник выпуклый, то ребра графа G_1 не пересекаются, и граф G_1 имеет столько же вершин, ребер и граней на сфере, сколько и граф G. (Определение граней графа на сфере аналогично определению граней графа на плоскости.)

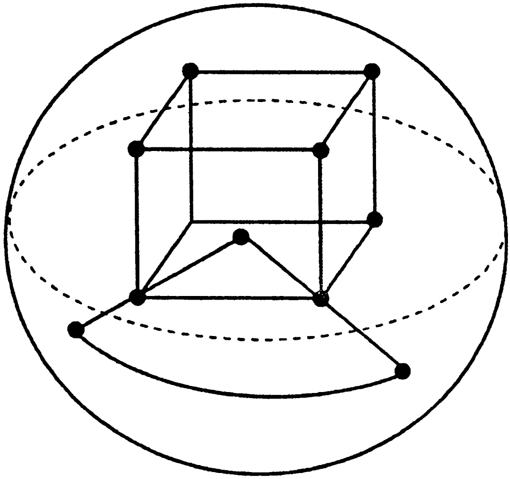


Рис. 98

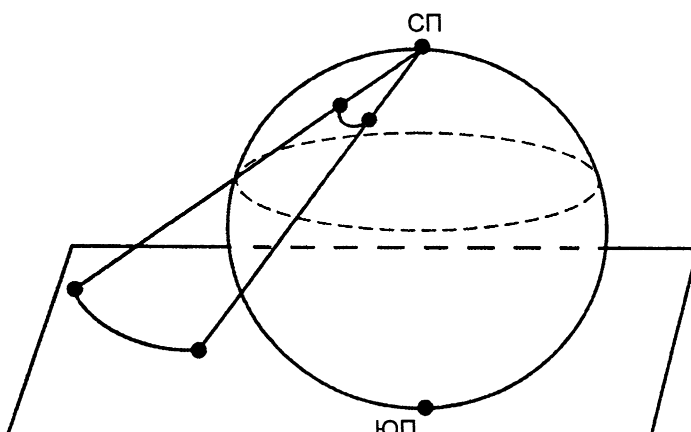


Рис. 99

Теперь поместим сферу на плоскость так, чтобы Северный полюс (точка, диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа G_1, и спроектируем граф G_1 на плоскость так, чтобы Северный полюс, проектируемая точка и ее проекция на плоскости лежали на одном луче, выходящем из Северного полюса (см. рис. 99). Такая проекция называется ***стереографической проекцией***.

В полученном плоском графе G_2 число вершин, ребер и граней совпадает с числом вершин, ребер и граней многогранника, соответственно. Поскольку формула Эйлера (см. задачу 143) верна для графа G_2, то она будет верна и для многогранника.

Именно для выпуклого многогранника доказал свою формулу Эйлер в 1758 году. ▷

152 Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной ее стороне?

Решение. Схему печатной платы можно представить в виде графа, вершины которого будут изображать приборы, а ребра — проводники, их соединяющие. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: будет ли граф G, изображающий плату инженера Иванова, планарным?

Докажем следующее утверждение: для связного планарного графа, содержащего n вершин и m ребер, при $n \geqslant 3$ выполняется неравенство $m \leqslant 3n - 6$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_f$ — грани графа G, и $m_1, m_2, \ldots, m_f$ — число ребер, ограничивающих, соответственно, каждую грань. Найдем сумму $S = m_1 + m_2 + \ldots + m_f$.

Поскольку всякая грань графа ограничена по крайней мере тремя ребрами, то $3f \leqslant S$. С другой стороны, каждое ребро принадлежит или двум граням, или одной грани, т. е. в сумме S учитывается два раза или один. Поэтому $S \leqslant 2m$. Мы получили, что $3f \leqslant 2m$. Далее воспользуемся формулой Эйлера (см. задачу 143):

$$f = m - n + 2, \quad 3f = 3m - 3n + 6, \quad 2m \geqslant 3m - 3n + 6, \quad m \leqslant 3n - 6.$$

Для $n = 3$ неравенство проверяется непосредственно.

Неравенство доказано. □

Для графа G, описывающего плату инженера Иванова, $n = 12$, $m = 32$, и полученное неравенство не выполняется.

Поэтому граф G не является планарным и изготовить одностороннюю плату невозможно. ▷

153 Можно ли так соединить дорожками 5 домов, чтобы дорожки не пересекались?

Решение. Решение задачи сводится к проверке: является ли граф K_5 планарным. По формуле, выведенной в предыдущей задаче, для планарного графа должно выполняться неравенство $m \leqslant 3n-6$. Но граф K_5 имеет 5 вершин и 10 ребер, т. е. нужное неравенство не выполняется.

Поэтому граф K_5 не является планарным графом и соединить 5 домов непересекающимися дорожками невозможно. ▷

154 Инженер Иванов (см. задачу 152) усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников (схему платы см. на рис. 100). Можно ли изготовить плату так, чтобы все проводники размещались на одной ее стороне?

Решение. Будем считать схему платы графом G. Неравенство $m \leqslant 3n-6$ не позволяет ответить, является ли граф G планарным, поскольку $17 \leqslant 3 \cdot 9 - 6 = 21$.

Рассмотрим подграф графа G, выделенный жирными линиями на рис. 101.

Этот подграф можно получить из графа K_5, поставив на некоторых его ребрах дополнительные вершины. (На рисунке вершины графа K_5 выделены, а дополнительные вершины помечены знаком «+».)

Введение дополнительных вершин не может превратить непланарный граф K_5 в планарный. Следовательно, граф G, подграфом которого является непланарный граф, также непланарный. Это означает, что изготовить одностороннюю плату невозможно.

Известна теорема, описывающая строение планарных графов.

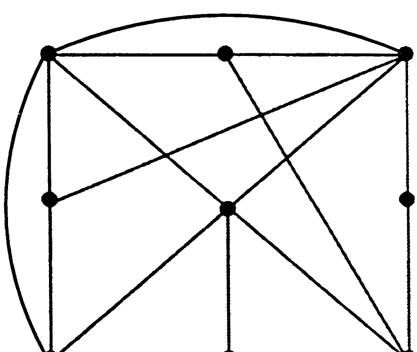


Рис. 100

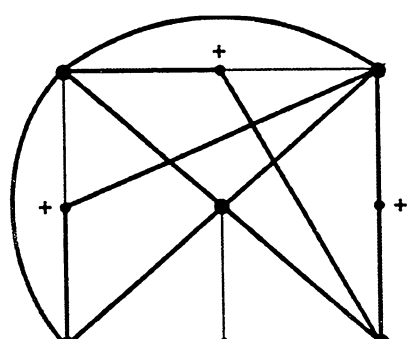


Рис. 101

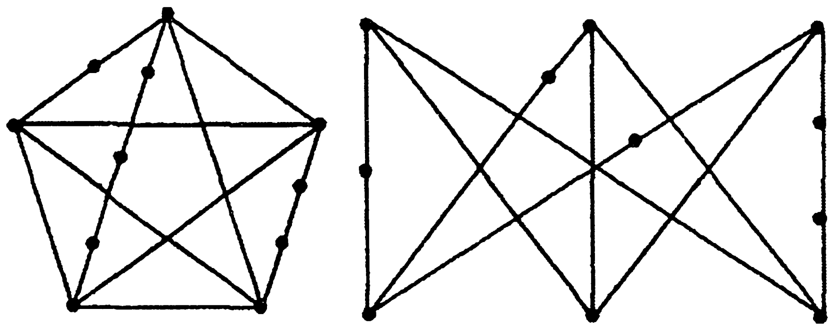


Рис. 102

Разобьем некоторые из ребер графов $K_{3,3}$ и K_5 новыми вершинами (см. рис. 102). Получившиеся графы будем называть, соответственно, графами типов $K_{3,3}$ и K_5.

Теорема Понтрягина—Куратовского (1927, 1930) Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов типов $K_{3,3}$ и K_5. ▷

155 При изготовлении некоторой однослойной платы по технологическим условиям один заданный проводник обязательно должен находиться на краю платы. Докажите, что это всегда можно сделать.

Решение. Пусть плоский граф G задает печатную плату (см. задачу 152). Докажем, что произвольный планарный G граф так можно изобразить на плоскости, что его любая наперед заданная грань станет внешней. Для этого рассмотрим любое изображение графа G на плоскости. Спроектируем граф G с помощью стереографической проекции на сферу (см. задачу 151). Теперь, установив сферу на плоскости так, чтобы Северный полюс находился внутри выбранной грани и опять с помощью стереографической проекции спроектировав граф на плоскость, получим граф G_1. Очевидно, что выбранная грань будет внешней гранью графа G.

Рассмотрим любую грань, содержащую ребро, соответствующее нужному проводнику. Мы доказали, что эту грань можно сделать внешней. Следовательно, при изготовлении платы нужный проводник будет находиться на ее краю. ▷

156 Инженер Иванов придумал схему печатной суперплаты. Плата состоит из 200 приборов и 2000 проводников. Ясно, что для реализации такой схемы нужно будет использовать многослойную плату, на которой проводники будут размещены в разных слоях. Докажите, что разработанную инженером Ивановым схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы.

Решение. *Толщиной* графа G называется наименьшее число планарных подграфов, на которые можно разбить ребра графа G.

(Разбить ребра графа на подграфы означает, что каждое ребро графа будет принадлежать ровно одному подграфу.)

Для решения задачи нужно доказать, что толщина графа G, изображающего схему инженера Иванова, будет больше трех. Действительно, предположим, что, объединив три планарных графа, получим граф G. Но каждый из графов, попавших в объединение, должен содержать не больше, чем $(3\cdot 200-6)=594$ ребра (см. задачу 152), а объединение трех графов — не больше, чем $594\cdot 3=1792$ ребра. Но это число меньше, чем число ребер графа G.

Следовательно, схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы. ▷

157 Схема печатной платы состоит из 11 приборов, каждый из которых соединен с каждым. Докажите, что схему нельзя изготовить в виде двухслойной платы.

Решение. Для решения задачи следует показать, что толщина графа K_{11} больше двух. Предположим, что граф K_{11} можно представить в виде объединения двух планарных графов. Тогда в каждом из них будет не более $(3\cdot 11-6)=27$ ребер, а вместе не более 54 ребер, в то время как число ребер графа K_{11} равно 55. Поэтому толщина графа не менее трех, и схему нельзя изготовить в виде двухслойной платы. ▷

158 Докажите, что в любой схеме, изготовленной в виде однослойной платы, есть прибор, соединенный не более чем с пятью другими приборами.

Решение. Для решения задачи докажем, что в любом плоском графе существует вершина, степень которой $d(v)\leqslant 5$. Предположим противное: для любой вершины v степень ее $d(v)\geqslant 6$. Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m,\qquad 6+6+\ldots+6\leqslant 2m,$$
$$6n\leqslant 2m,\qquad 3n\leqslant m\leqslant 3n-6.$$

(Последнее неравенство доказано в задаче 152.)

Получено противоречие. Следовательно, *в любом плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит* 5. Это означает, что на плате есть прибор, соединенный не более чем с пятью приборами. ▷

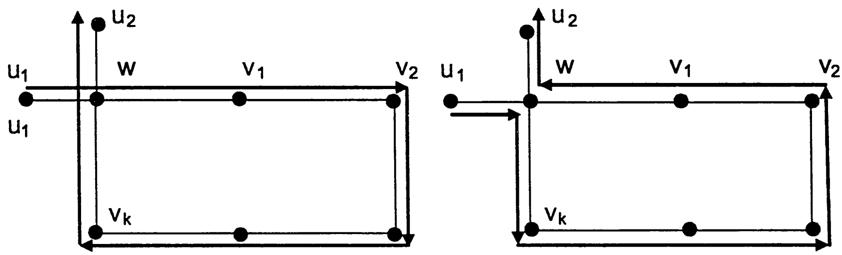


Рис. 103

159 В небольшом курортном городке, в котором на каждом перекрестке сходится четное число улиц, организаторы решили провести велогонку так, чтобы ее трасса проходила по каждой улице ровно один раз. В целях увеличения безопасности дорожная полиция потребовала, чтобы трасса гонки не имела самопересечений. (Возможно лишь «касание» трассы с собой.) Докажите, что это можно сделать.

Решение. Будем считать схему города связным плоским графом, вершинами которого являются перекрестки, а ребрами — отрезки улиц между ними. Так как степени всех вершин графа четные, то он будет эйлеровым графом. Покажем, что *плоский эйлеров граф содержит эйлеров цикл, не имеющий самопересечений.*

Построим эйлеров цикл графа (см. задачу 128). Предположим, что он имеет самопересечение: $L = (u_1, w, v_1, v_2, \ldots, v_k, w, u_2)$. Если мы заменим часть L цикла на часть $L_1 = (u_1, w, v_k, \ldots, v_2, v_1, w, u_2)$, то новый цикл будет иметь на одну точку самопересечений меньше, чем начальный (см. рис. 103). Проделав аналогичную процедуру нужное число раз, получим эйлеров цикл без самопересечений. Этот цикл определит трассу велогонки. ▷

160 Имеется информационная сеть, состоящая из центров хранения и переработки информации. Некоторые пары центров соединены каналами связи. Обмен информацией между любыми двумя центрами осуществляется либо непосредственно по соединяющему их каналу, либо через другие каналы и центры. Сеть считается исправной, если каждая пара центров в состоянии обмениваться информацией. Известно, что в информационной сети каждый из n центров непосредственно связан каналом с каждым другим центром. Какое наименьшее число каналов связи надо разрушить, чтобы сеть стала неисправной?

Решение. Информационной сети естественно сопоставить граф G следующим образом: вершины графа соответствуют центрам сети,

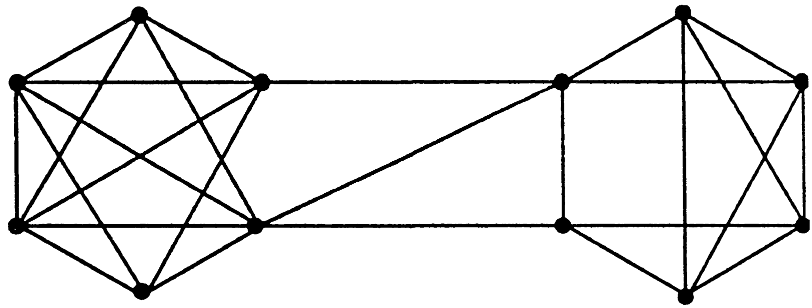


Рис. 104

а ребра графа — каналы связи. Тогда иcправной сети будет соответствовать связный граф.

Разрушить сеть можно двумя способами: или уничтожить несколько центров хранения и переработки информации, или повредить несколько каналов связи. Первому способу эквивалентно удаление некоторого множества вершин графа вместе с выходящими из них ребрами, второму — удаление некоторого множества ребер. В каждом из способов получившиеся графы должны оказаться несвязными.

Числом связности (***числом вершинной связности***) $\kappa(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с выходящими из них ребрами) приводит к несвязному или одновершинному графу.

Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Для графа G, изображенного на рис. 104, $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$.

Вершина графа называется ***точкой сочленения***, если после удаления этой вершины из графа (вместе с выходящими из нее ребрами) число компонент графа увеличивается. Ребро графа называется ***мостом***, если после удаления этого ребра число компонент графа увеличивается. Для графа, изображенного на рис. 105, вершины a, b и c являются точками сочленения, а ребро (b, c) — мостом.

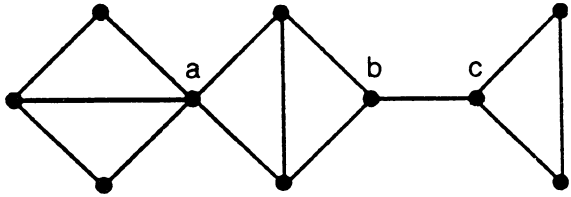


Рис. 105

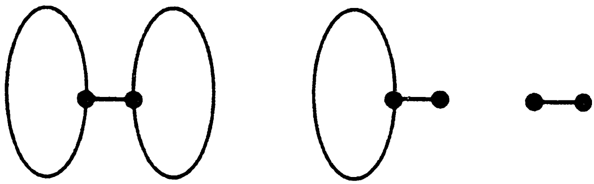


Рис. 106

Теорема. Для любого связного графа выполняется соотношение

$$\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G),$$

где $\delta(G)$ — минимальная из степеней вершин графа.

Доказательство. Правое неравенство очевидно, так как удаление всех ребер, выходящих из вершины минимальной степени, приводит к несвязному графу.

Если граф имеет мост, т. е. $\lambda(G) = 1$, то и $\varkappa(G) = 1$ (см. рис. 106). (В первых двух случаях изображенные графы имеют точки сочленения, в третьем удаление вершины приводит к одновершинному графу.)

Рассмотрим случай, когда $\lambda(G) = \lambda \geqslant 2$. Выберем из графа G множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_\lambda\}$ ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Затем удалим из графа ребра множество $E_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_{\lambda-1}\}$. Так как λ — это наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу, то получившийся граф G_1 является связным и ребро $e_\lambda = (u, v)$ будет в нем мостом.

Для каждого ребра e_i из множества E_1 выберем вершину v_i, отличную от вершин u и v. (Вершины v_i не обязательно различны). Удалим теперь выбранные вершины вместе с выходящими из них ребрами из графа G. Тем самым, в числе прочих, будут удалены ребра из множества E_1.

Если получившийся граф несвязен, то $\varkappa(G) < \lambda$.

Если же он связен, то ребро (u, v) является в нем мостом. Поэтому удаление одной из вершин u или v вместе с выходящими ребрами приводит к несвязному или одновершинному графу. Поэтому

$$\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) = \lambda.$$

Теорема доказана. □

Так как в нашей информационной сети каждая пара центров соединена каналом связи, то сети соответствует полный граф K_n. Для него $\varkappa(K_n) = n-1$, поскольку какое бы количество вершин не удалить, получившийся граф будет связным. Поэтому нужно удалять вершины до тех пор, пока не останется одна вершина т. е. $\varkappa(K_n) = n - 1$.

Из доказанной теоремы следует, что

$$n - 1 = \varkappa(K_n) \leqslant \lambda(K_n) \leqslant \delta(G) = n - 1.$$

Следовательно, $\lambda(K_n) = n - 1$ и для разрушения сети нужно разрушить $(n - 1)$ канал. ▷

161 Минимальное число центров, которые нужно уничтожить, для того чтобы вывести из строя информационную сеть (см. предыдущую задачу), содержащую n центров, равно k. Докажите, что в сети не менее $kn/2$ каналов связи.

Решение. Зададим информационную сеть графом G, для которого $\varkappa(G) = k$. Из доказанного в предыдущей задаче соотношения

$$\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

следует, что $k \leqslant \delta(G)$. Воспользуемся леммой о рукопожатиях:

$$2m = d(v_1) + \ldots + d(v_n) \geqslant \delta(G)n \geqslant kn.$$

Отсюда следует, что в сети не менее $kn/2$ каналов связи. ▷

162 В информационной сети (см. предыдущие задачи) каждый центр соединен каналами связи с четным числом центров. Докажите, что после уничтожения любого канала сеть не выйдет из строя.

Решение. Поставим в соответствие информационной сети граф G, как в предыдущей задаче. Мы должны доказать, что после удаления любого ребра граф G останется связным. Предположим противное: после удаления ребра $e = (u, v)$ получившийся граф G несвязный и вершины u и v принадлежат его разным компонентам. Но в этом случае каждая компонента будет графом, содержащим ровно одну вершину нечетной степени, что невозможно вследствие леммы о рукопожатиях.

Следовательно, уничтожение одного канала не выведет сеть из строя. ▷

163 Информационная сеть (см. предыдущие задачи) имеет 12 центров, каждый из которых соединен каналами связи не менее чем с семью центрами. Докажите, что, для того чтобы вывести сеть из строя, надо уничтожить не менее четырех центров.

Решение. Зададим информационную сеть графом G, минимальная степень вершины которого $\delta(G)$ равна семи. Докажем, что для графа G, не являющегося полным и имеющего n вершин, выполняется неравенство

$$\varkappa(G) \geqslant 2\delta(G) - n + 2,$$

где $\varkappa(G)$ — связность графа G.

Пусть S — такое множество вершин графа G, состоящее из $\kappa(G)$ вершин, удаление которого (вместе с ребрами) делает граф несвязным, G^* — получившийся при этом граф, G_1 — его компонента, имеющая наименьшее число вершин. Очевидно, что число вершин n_1 графа G_1 не превосходит $(n - \chi(G))/2$.

Пусть v — произвольная вершина графа G_1 и $d(v)$ — ее степень в графе G. Тогда выполняются соотношения

$$\delta(G) \leqslant d(v) \leqslant n_1 - 1 + \chi(G) \leqslant \frac{(n - \chi(G))}{2} - 1 + \chi(G) \leqslant \frac{(n + \chi(G))}{2} - 1.$$

Отсюда

$$\chi(G) \geqslant 2\delta(G) - n + 2.$$

Подставив заданные параметры графа в выведенную формулу, получим $\chi(G) \geqslant 4$. Поэтому для разрушения сети нужно вывести из строя не менее четырех центров. ▷

164 Нефтяная компания имеет несколько перекачивающих станций, которые соединены нефтепроводами. (Трубы нефтепроводов находятся в одной плоскости и не могут пересекаться.) Группа диверсантов должна вывести из строя систему нефтепроводов, взорвав несколько станций так, чтобы образовались хотя бы две станции, между которыми нельзя было перекачать нефть. Докажите, что для этой цели достаточно взорвать не более пяти станций.

Решение. Систему нефтепроводов можно изобразить в виде плоского графа G, вершины которого будут соответствовать станциям, а ребра — нефтепроводам. Из задачи 158 известно, что в графе есть вершина, степень которой не превышает пяти. Поэтому из неравенства, доказанного в задаче 160 вытекает, что

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant 5.$$

Следовательно, для того чтобы разрушить систему нефтепроводов достаточно вывести из строя не более пяти перекачивающих станций.

Доказанное в задаче неравенство означает, что *число связности планарного графа не превышает пяти.* ▷

165 Известно, что, для того чтобы вывести из строя систему нефтепроводов (см. предыдущую задачу), нужно взорвать не менее пяти перекачивающих станций. Докажите, что система имеет не менее двенадцати станций.

Решение. Как и в предыдущей задаче, опишем систему нефтепроводов плоским графом G. Из условия задачи следует, что $\kappa(G) \geqslant 5$,

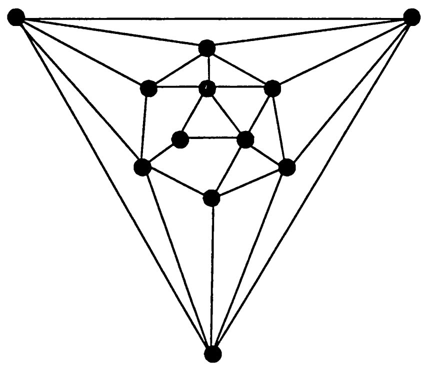


Рис. 107

а из задачи 158, что $\delta(G) \leqslant 5$. Отсюда из теоремы, доказанной при решении задачи 160, следует, что $\delta(G) = 5$.

Пусть граф G имеет n вершин. Из леммы о рукопожатиях вытекает, что $5n \leqslant 2m$, где m — число ребер графа, а из утверждения, доказанного в задаче 152, что $m \leqslant 3n - 6$.

Отсюда,

$$5 \leqslant \frac{2m}{n} \leqslant \frac{2(3n-6)}{n} = 6 - \frac{12}{n}.$$

Поэтому $n \geqslant 12$.

Пример пятисвязного плоского графа с двенадцатью вершинами дан на рис. 107. ▷

166 Нефтяная компания имеет несколько перекачивающих станций, которые соединены нефтепроводами, причем из каждой станции выходит ровно три нефтепровода. Группа диверсантов получила задание взорвать станцию A. Известно, что после этого система нефтепроводов выйдет из строя, так как найдутся станции, между которыми нельзя будет перекачать нефть. Докажите, что для достижения этой же цели достаточно взорвать один нефтепровод.

Решение. Граф называется ***кубическим***, если степень каждой его вершины равна трем. Систему нефтепроводов описывает кубический граф G, в котором станции A будет соответствовать точка сочленения. Докажем, *что кубический граф, имеющий точку сочленения, имеет мост.*

Пусть v — точка сочленения графа, (v, u_1), (v, u_2), (v, u_3) — ребра, выходящие из нее. Будем считать, что граф G связный. В противном случае рассмотрим компоненту графа, которая содержит вершину v.

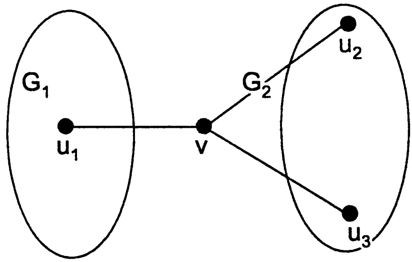


Рис. 108

Удаление вершины v делает граф несвязным. Граф G^*, получившийся после удаления v, состоит из двух или из трех компонент. Пусть граф G^* состоит из двух компонент G_1 и G_2. Тогда одной из компонент принадлежит ровно одна вершина из вершин u_1, u_2, u_3 (пусть это будет вершина u_1, принадлежащая компоненте G_1), а второй — ровно две вершины из них (см. рис. 108). Тогда удаление ребра (v, u_1) делает граф несвязным.

Такие же рассуждения проводим в случае, когда граф G^* состоит их трех компонент.

Отсюда вытекает, что для повреждения системы нефтепроводов достаточно вывести из строя один нефтепровод. ▷

167 Известно, что в некоторой стране, расположенной на двух островах, из каждого города выходит ровно три дороги. Одна из дорог проходит по единственному мосту, соединяющему острова, и ее закрытие лишает возможности жителей одного острова попасть на автомобиле на второй остров. Какое наименьшее число городов может быть в такой стране?

Решение. Опишем систему городов и дорог в стране графом G. Дорога, проходящая по мосту, соответствует мосту в графе. Удаление моста приводит к тому, что граф G, распадается на два графа: G_1 и G_2. В каждом из этих графов одна вершина имеет степень 2, а осталь-

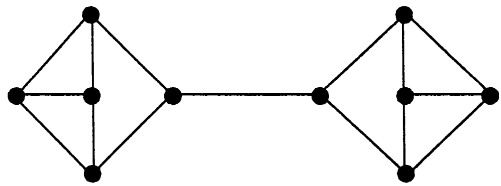


Рис. 109

ные — степень 3. Из леммы о рукопожатиях следует, что вершин степени 3 четное число. Поэтому наименьшее возможное их число в каждом из графов G_1 и G_2 — 4, и наименьшее возможное число всех вершин в графе G — 10.

Рисунок 109 показывает, что такой граф существует.

Поэтому в стране 10 городов. ▷

168 Две страны соединены системой авиалиний одной компании. (Внутри стран линий этой компании нет.) Каждый аэропорт одной страны соединен ровно тремя линиями с аэропортами другой страны, и из любого города авиалиниями компании можно долететь до любого другого города (возможно, с пересадками). Из соображений экономии компании пришлось закрыть одну линию. Докажите, что и теперь линиями компании можно долететь из любого города в любой другой.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний компании, который является кубическим двудольным графом. Для решения задачи нужно доказать, что *кубический двудольный граф не имеет мостов.*

Предположим, что граф G имеет мост. После удаления моста граф G распадается на два двудольных графа: G_1 и G_2. Рассмотрим один из них. У него в одной доле ровно одна вершина степени 2 и остальные (пусть k) вершины степени 3, во второй доле все вершины (пусть таких вершин s) степени 3. Так как суммы степеней вершин долей равны, то $3k + 2 = 3s$.

Такое равенство в целых числах невозможно, так как справа в нем находится число, кратное трем, а число слева на три не делится.

Следовательно, в графе G нет мостов, и закрытие любой авиалинии компании не помешает попасть из любого города в любой другой. ▷

169 В стране не менее трех аэропортов, и система авиалиний устроена так, что закрытие любого аэропорта не мешает добраться из любого оставшегося аэропорта в любой другой (возможно, с пересадками). Докажите, что для любых двух аэропортов A и B можно предложить такой маршрут путешествия $L = (A = A_1, A_2, \dots, B = A_i, \dots, A)$, начинающийся и заканчивающийся в одном из аэропортов, состоящий не менее чем из трех аэропортов и содержащий каждый промежуточный аэропорт ровно один раз.

Решение. Рассмотрим граф G авиалиний, который согласно условию не имеет точек сочленения. Для решения задачи нужно доказать следующее утверждение:

Утверждение. Любые две вершины графа, не имеющего точек сочленения, принадлежат некоторому простому циклу.

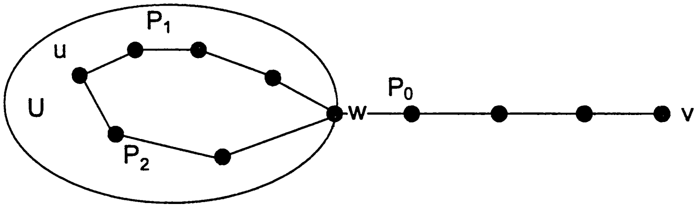


Рис. 110

Пусть u и v — две различные вершины графа G, а U — множество вершин, отличных от u, которые лежат на различных простых циклах, содержащих u. Любая вершина s, смежная с вершиной u, лежит на некотором простом цикле, содержащем u. В противном случае ребро (u, s) окажется мостом в графе G, и в нем будут точки сочленения. Следовательно, множество U не пусто.

Предположим, что вершина v не принадлежит U. Пусть w — такая вершина из U, которая соединена с вершиной v цепью P_0, имеющей наименьшее число ребер среди цепей, соединяющих v с вершинами из U. Пусть P_1 и P_2 — две простые цепи, соединяющие вершины u и w и составляющие цикл, содержащий u и w (см. рис. 110).

Так как вершина w не является точкой сочленения, то существует простая цепь p^*, соединяющая вершины u и v и не проходящая через вершину w. Обозначим через w^* ближайшую к u вершину цепи P^*, которая также принадлежит P_0, а через u^* последнюю вершину цепи P^*, которая принадлежит также P_1 или P_2. Не теряя общности, предположим, что u^* принадлежит P_1 (см. рис. 111).

Теперь построим цикл Q, как изображено на рис. 112. Цикл содержит часть цепи P_1 от вершины u до вершины u^*, затем часть цепи P^* от вершины u^* до вершины w^*, затем часть цепи P_0 от вершины w^* до вершины w и, наконец, цепь P_2. Так как вершины u и w^* принадлежат циклу, то w^* принадлежит множеству U.

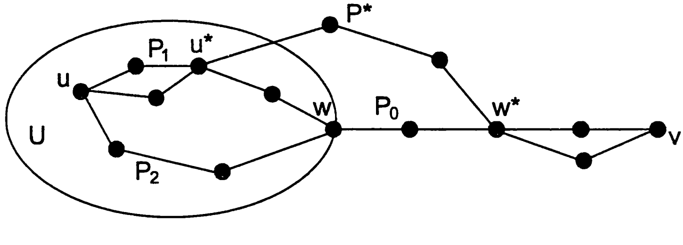


Рис. 111

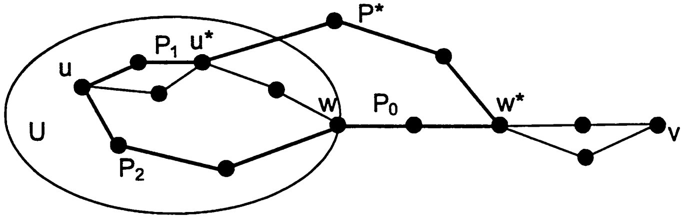


Рис. 112

Вершина w^* находится на цепи P_0, соединяющей вершины v и w. Поэтому она будет ближе к v, чем w. Это противоречит выбору вершины w. Утверждение доказано, т. е. вершина v принадлежит U и находится на одном простом цикле с вершиной v.

Из доказанного утверждения вытекает существование требуемого маршрута путешествия. ▷

170 В стране четное число городов, некоторые пары из которых соединены дорогами. Из каждого города можно проехать в любой другой, причем эта возможность сохраняется, если даже закрыть на ремонт все дороги, идущие из произвольного города. (Естественно, за исключением этого города, в который проехать становится невозможно.) Докажите, что страну можно так разделить на две республики, содержащие равное число городов, что в каждой республике можно проехать из любого города в любой другой город этой республики, не выезжая за ее пределы.

Решение. Будем считать карту страны с городами и дорогами графом G. По условию граф связный и не имеет точек сочленения. Нужно доказать, что его вершины можно так разбить два равных подмножества, что каждое порождает связный подграф.

С помощью индукции докажем более общее утверждение:

Утверждение. Пусть связный граф G без точек сочленения имеет n вершин. Тогда его вершины можно так разбить на два подмножества, содержащие k и $n-k$ вершин $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, что каждое подмножество порождает связный граф.

Так как граф не имеет точек сочленения, то в качестве одновершинного подмножества можно выбрать любую вершину. По индуктивному предположению множество вершин графа G можно разбить на два подмножества V_1 и V_2, содержащие p и $(n-p)$ вершин, каждое из которых порождает связные подграфы G_1 и G_2. Докажем теперь, что множество вершин можно разбить на подмножества, содержащие

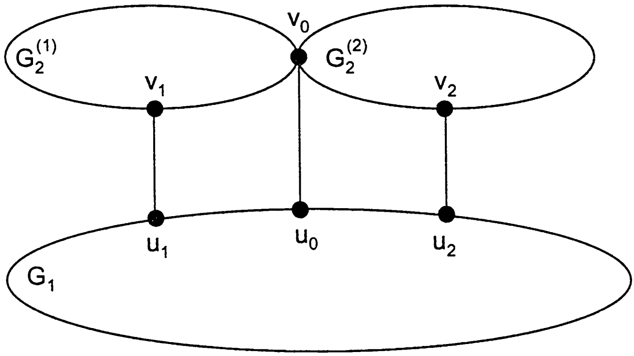


Рис. 113

$(p+1)$ и $(n-p-1)$ вершин, каждое из которых порождает связный подграф.

Поскольку граф G связный, то есть ребро (u_0, v_0), где $u_0 \in V_1$, $v_0 \in V_2$. Покажем, что вершину v_0 можно выбрать так, что она не будет точкой сочленения графа G_2. Предположим, что при удалении вершины v_0 граф G_2 распадется на графы $G_2^{(1)}$ и $G_2^{(2)}$. Тогда в графе G должны существовать ребра (u_1, v_1) и (u_2, v_2), соединяющие G_1 и $G_2^{(1)}$, G_1 и $G_2^{(2)}$, так как в противном случае вершина v_0 окажется точкой сочленения графа G (см. рис. 113).

Такие же рассуждения проведем для вершины v_2. Если она будет точкой сочленения графа G_2, то при ее удалении граф G_2, а значит и $G_2^{(2)}$ распадется на две компоненты. Этот процесс продолжаем далее, пока в исследуемых графах оказываются точки сочленения графа

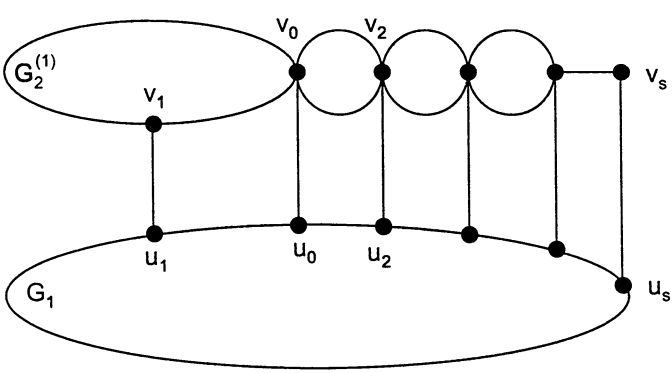


Рис. 114

G_2, выбирая каждый раз компоненту, смежную только с одной точкой сочленения. Число вершин в исследуемых компонентах будет уменьшаться. Когда в компоненте окажется только одна вершина (v_s), то она не может быть точкой сочленения графа G_2 (см. рис. 114).

Мы доказали, что графы, порожденные множествами вершин $(V_1 \cup v_s)$, и вершин $(V_2 \backslash v_s)$, — связные. Один из них имеет $(p+1)$ вершину, другой — $(n-p-1)$. Утверждение доказано.

Поэтому страну можно разделить на две республики требуемым образом. ▷

171 Может ли существовать такая пятерка государств, в которой каждая пара государств соседствует друг с другом? (Граница каждого государства является замкнутой кривой. Соседними считаются государства, имеющие общую границу ненулевой длины.)

Решение. Предположим, что пятерка государств с указанным свойством существует. Рассмотрим ее изображение на карте. Это изображение естественно считать плоским графом G. В этом графе вершинами будут точки карты, в которых сходятся границы трех или более государств, а ребрами — сами границы. Государствам будут соответствовать грани графа. Если два государства соседние, то соответствующие им грани будут иметь общее ребро.

Построим граф G^* по следующему правилу. Внутри каждой грани выделим по одной вершине нового графа. Если две грани имеют общее ребро, то соответствующие им новые вершины соединим ребром нового графа. Ясно, что ребра можно провести так, чтобы они не пересекались. Поэтому граф G^* плоский. Но каждая пара граней имеет общее ребро, поскольку каждые два государства являются соседними.

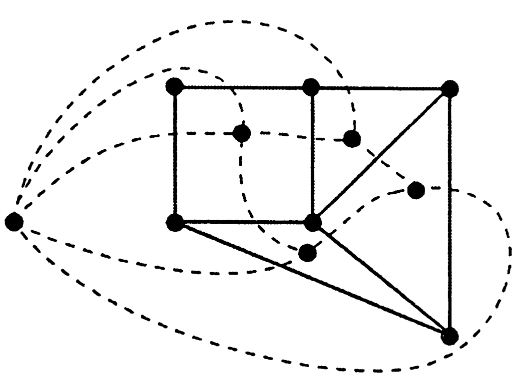


Рис. 115

Это означает, что граф G^* будет графом K_5. Граф K_5 не планарный (см. задачу 153) и поэтому его нельзя нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Получено противоречие. Следовательно, нужной пятерки государств существовать не может.

Подобным образом граф G^* можно построить для любого плоского графа G. Граф G^* называется ***двойственным*** к графу G.

В том случае, если граф G имеет вершины степени 2, то G^* будет мультиграфом. На рис. 115 сплошной линией изображен граф G, а пунктирной — граф G^*. ▷

172 На карте Англии нет точек, в которых сходятся границы более чем трех графств. Докажите, что:

а) четное число графств имеет нечетное число соседей;

б) существует графство, которое имеет не более пяти соседей.

Решение. Перейдем от карты Англии к плоскому графу G и построим граф G^*, двойственный к графу G (см. предыдущую задачу). Поскольку внешняя грань графа G не соответствует никакому графству, то удалим из G^* вершину, находящуюся в этой грани вместе с выходящими из нее ребрами. Согласно следствию из леммы о рукопожатиях полученный граф имеет четное число вершин нечетной степени. Эти вершины соответствуют графствам, имеющим нечетное число соседей. Кроме того, в плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит пяти (см. задачу 158). Этой вершине соответствует графство, у которого не более пяти соседей. ▷

173 Любимым занятием малолетнего хулигана Вадима во время прогулки по парку является лазание через заборы и живые изгороди. Может ли Вадим во время прогулки по парку и его окрестностям зайти в парк через один вход, перелезть через каждую из 16 изгородей ровно один раз и выйти через другой вход? (Схема парка изображена на рис. 116.)

Решение. Будем считать схему парка графом G, и построим двойственный мультиграф G^* (см. рис. 117).

В мультиграфе G^* ровно две вершины имеют нечетную степень. Поэтому G^* содержит эйлерову цепь, соединяющую эти вершины (см. задачу 132). Эта цепь и определит один из возможных вариантов прогулки хулигана Вадима (рис. 118). ▷

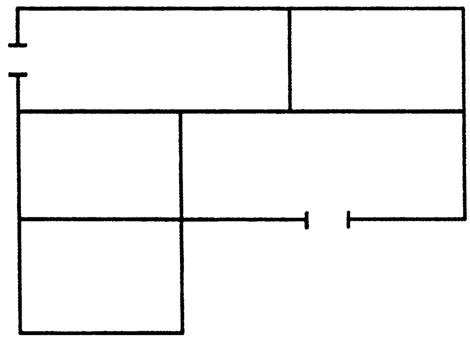


Рис. 116

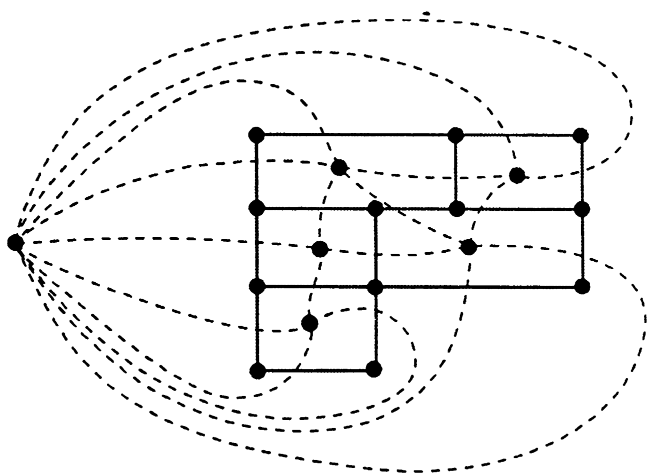


Рис. 117

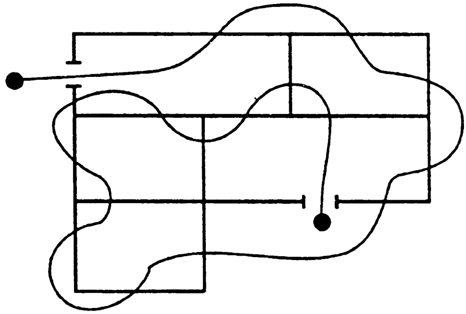


Рис. 118

174 Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.

Решение. С помощью стереографической проекции, как в задаче 151, перейдем от выпуклого многогранника к графу G, его изображающему на плоскости. Построим граф G^*, двойственный к графу G. Известно, что любой граф имеет хотя бы две вершины одинаковой степени (см. задачу 3). Этим вершинам и будут соответствовать грани многогранника, имеющие одинаковое число ребер. ▷

175 Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани — шестиугольники.

Первое решение. Как и в предыдущей задаче перейдем от выпуклого многогранника к плоскому графу G. Известно (см. задачу 158), что в графе G существует вершина, степень которой не превосходит пяти. Этой вершине соответствует грань многогранника, не являющаяся шестиугольником. ▷

Второе решение. Пусть n — число граней выпуклого многогранника. Тогда сумма плоских углов в каждой грани равна 4π, а сумма всех плоских углов равна $4\pi n$. С другой стороны, число вершин многогранника не превосходит $6n/3 = 2n$, а сумма плоских углов при одной вершине строго меньше 2π. Поэтому сумма всех плоских углов многогранника должна быть строго меньше $4\pi n$. Получено противоречие. ▷

176 Коробка скоростей — механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при неизменной частоте вращения ведущего. Это изменение происходит за счет того, что находящиеся внутри коробки шестерни (зубчатые колеса) вводятся в зацепление специальным образом. Одна из задач, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к минимизации числа валов, на которых размещаются шестерни. Некоторые шестерни не должны находиться на одном валу, например, они могут быть в зацеплении или их общий вес велик для одного вала и т. д. В таблице (см. стр. 140) крестиками указаны такие пары шестерен.
Найдите минимальное число валов, на которые можно поместить шестерни.

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют шестерням, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие шестерни не должны находиться на одном валу (рис. 119).

Окрасим каждую вершину произвольного графа в какой-либо цвет, причем смежные вершины окрасим в разные цвета. Такая раскраска

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+	+		+
2	+		+		+		+
3		+			+	+	
4	+					+	
5	+	+	+				+
6			+	+			+
7	+	+			+	+	

вершин графа называется ***правильной***. Граф, для которого существует правильная раскраска в k-цветов, называется ***k-раскрашиваемым***. Минимальное k, при котором граф является k-раскрашиваемым, называется ***хроматическим числом*** графа и обозначается $\chi(G)$.

Очевидно, что в нашей задаче любая правильная раскраска построенного графа G определяет возможность размещения шестерен. Вершины графа, окрашенные в один цвет, задают множество шестерен, которые можно размещать на одном валу. Верно и обратное: от заданного способа размещения шестерен можно перейти к правильной раскраске вершин графа. Поэтому хроматическое число $\chi(G)$ графа G равно минимальному числу валов, необходимых для проектирования коробки скоростей.

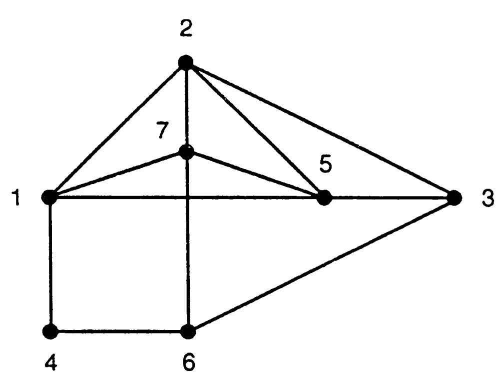


Рис. 119

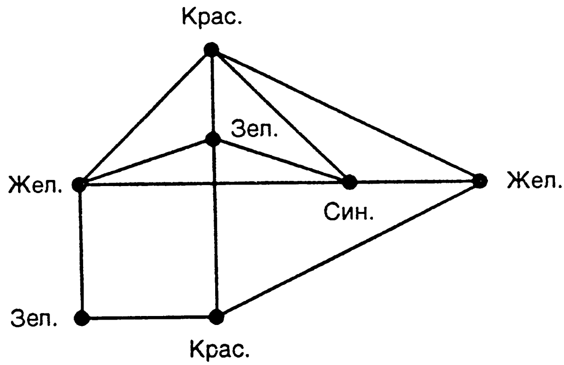


Рис. 120

Так как все вершины полного графа попарно смежны, то для правильной раскраски полного графа с n вершинами необходимо n цветов. Граф G содержит полный подграф K_4, значит раскрасить его вершины менее, чем в 4 цвета невозможно. Одна из раскрасок в 4 цвета показана на рис. 120. Следовательно, $\chi(G) = 4$, и минимальное число валов, на которые можно установить шестерни, равно четырем. ▷

177 Коммерческий университет арендует здание для проведения занятий. В четверг проводится 7 лекций: право, английский язык, французский язык, экономика, менеджмент, маркетинг, этикет. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно, например, их читает один и тот же лектор, или есть студенты, которые должны посещать разные лекции, или для их проведения нужна одна и та же аудитория и т. д. (В таблице (см. стр. 142) крестиком отмечены лекции, которые не могут читаться одновременно.)

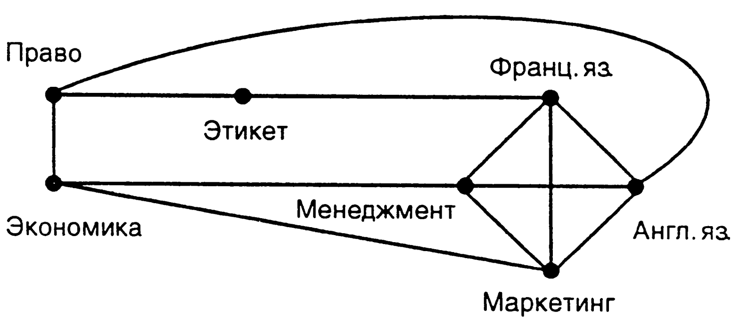


Рис. 121

	Право	Англ. язык	Фран. язык	Эконо-мика	Менедж-мент	Марке-тинг	Этикет
Право		+		+			+
Англ. язык	+		+		+	+	
Фран. язык		+			+	+	+
Экономика	+				+	+	
Менеджмент		+	+	+		+	
Маркетинг		+	+	+	+		
Этикет	+		+				

Определите минимальное время, за которое могут быть прочитаны лекции в четверг.

Решение. Построим граф G_1 несовместимости лекций (рис. 121). Вершины графа соответствуют лекциям, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно.

Очевидно, что в нашей задаче любая правильная раскраска определяет некоторое расписание лекций: лекции, соответствующие вершинам, окрашенным в один цвет, можно читать одновременно. Верно и обратное: любое расписание определяет правильную раскраску вершин графа G_1. Минимальное число часов, необходимых для прочтения всех лекций, равно $\chi(G_1)$.

Поскольку граф G_1 содержит полный подграф K_4, то его вершины нельзя правильно раскрасить менее, чем в 4 цвета. На рис. 122 изобра-

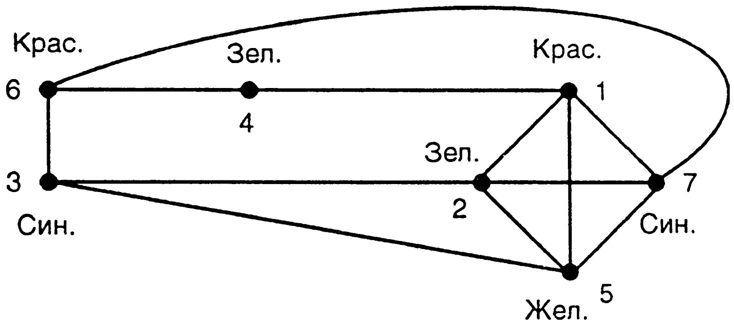


Рис. 122

жена одна из таких возможных раскрасок. Следовательно, минимальное число часов, необходимо для прочтения всех лекций в четверг, равно четырем.

Рассмотрим два графа: граф G_1 и граф G из предыдущей задачи.

Два графа G и H называются ***изоморфными***, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором. В случае изоморфизма графов G и H пишут $G \cong H$.

Графы G и G_1 изоморфны. На рис. 119 задана одна из нумераций вершин графа G, а на рис. 122 — нужная нумерация вершин графа G_1. ▷

178 При проектировании коробки передач (см. задачу 176) было определено, что шестерни должны быть расположены на десяти валах, и меньшим числом валов обойтись нельзя. Докажите, что существует не менее 45 пар шестерен, которые попарно не могут находиться на одном валу.

Решение. Как и в задаче 176, построим граф G, описывающий запрещенные пары шестерен для размещения на одном валу. Пусть хроматическое число этого графа равно k (в нашем случае десяти). Раскрасим граф в k цветов. Для любых двух цветов обязательно найдется ребро, соединяющее две вершины этих цветов, так как в противном случае можно вершины одного цвета перекрасить в другой и тем самым сократить число цветов, необходимых для раскраски, что будет противоречить условию задачи.

Поэтому в графе найдется, по крайней мере, $k(k-1)/2$ ребер.

Отсюда следует, что существует хотя бы 45 запрещенных пар шестерен. ▷

179 При проектировании коробки передач (см. предыдущие задачи) было определено, что шестерни должны быть расположены на десяти валах, и меньшим числом валов обойтись нельзя. Однако выяснилось, что если убрать любую шестерню, то можно обойтись девятью валами. Докажите, что для каждой шестерни существует не менее девяти шестерен, с которые она не может находиться на одном валу в паре.

Решение. Как и в задаче 176, построим граф G, описывающий запрещенные пары шестерен для размещения на одном валу. Хроматическое число графа равно десяти, но после удаления любой вершины (вместе с выходящими из нее ребрами) хроматическое число полученного графа равно девяти. Необходимо доказать, что степень каждой вершины графа не менее девяти.

Предположим, что существует вершина v, степень которой меньше девяти, удалим ее из графа. Так как хроматическое число нового графа равно девяти, то правильно раскрасим его вершины в девять цветов. Для раскраски вершин, смежных с вершиной v, в полученном графе будет использовано не более восьми цветов. Окрасив вершину v в цвет, не использованный для окраски смежных с ней вершин, получим правильную раскраску графа G девятью цветами, что противоречит условию задачи. Поэтому любая вершина графа имеет степень не меньше, чем девять, и каждая шестерня имеет не менее девяти несовместных с ней на одном валу шестерен. ▷

180 Пять лекций, каждая из которых длится час, можно прочитать или в первую смену за 3 часа с 9.00 до 12.00, или во вторую смену за 4 часа с 14.00 до 18.00. Невозможность одновременного чтения лекций задана таблицей.

	Математика	Программир.	Физика	Биология	Химия
Математика		+	+	+	
Программир.	+		+	+	+
Физика	+	+			
Биология	+	+			+
Химия		+	+	+	

Найдите число вариантов распределения лекций по промежуткам времени в первую и во вторую смену.

Решение. Построим граф G несовместимости лекций (см. задачу 177) — рис. 123.

Каждому часовому промежутку времени (с 9.00 до 10.00, с 10.00 до 11.00 и т. д.) поставим в соответствие свой цвет. Тогда число вариантов распределения лекций по временным промежуткам в первую смену будет равно числу различных способов правильной раскраски графа G тремя цветами, а во вторую смену — четырьмя цветами.

Количество попарно различных способов правильной раскраски графа G в t цветов называется ***хроматической функцией*** графа и обозначается $f(G, t)$. Очевидно, что наименьшее t, для которого $f(G, t) > 0$, есть $\chi(G)$.

Для некоторых графов хроматическая функция определяется легко. Например, $f(O_n, t) = t^n$, так как цвета всех вершин пустого графа можно выбирать независимо друг от друга.

При правильной раскраске полного графа K_n первая вершина может быть окрашена в любой из t заданных цветов, а для окраски каждой из последующих вершин разрешается использовать на один цвет меньше, чем для предыдущей. Поэтому

$$f(K_n, t) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1),$$
$$\text{если } t \geqslant n, \text{ и } f(K_n, t) = 0, \text{ если } t < n.$$

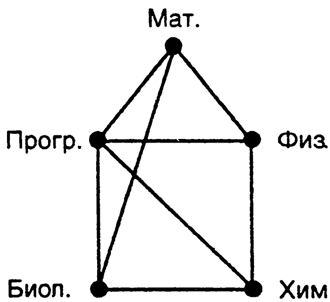


Рис. 123

В общем случае вычисление хроматической функции связано с трудностями. Докажем теорему, позволяющую несколько упростить вычисление $f(G, t)$.

Рассмотрим ***операцию слияния*** двух несмежных вершин u_1 и u_2. При этой операции вершины u_1 и u_2 объединяются в одну вершину u_0, которая будет смежна со всеми вершинами, с которыми были смежны вершины u_1 и u_2 (см. рис. 124).

Теорема. Пусть u и v — две несмежные вершины графа G. Если граф G_1 получается из графа G добавлением ребра (u, v), а граф G_2 — слиянием вершин u и v, то

$$f(G, t) = f(G_1, t) + f(G_2, t).$$

Доказательство. Число правильных раскрасок графа G в t цветов, при которых цвета вершин u и v различны, не изменится если к G присоединить ребро (u, v), поэтому оно равно $f(G_1, t)$. Аналогично,

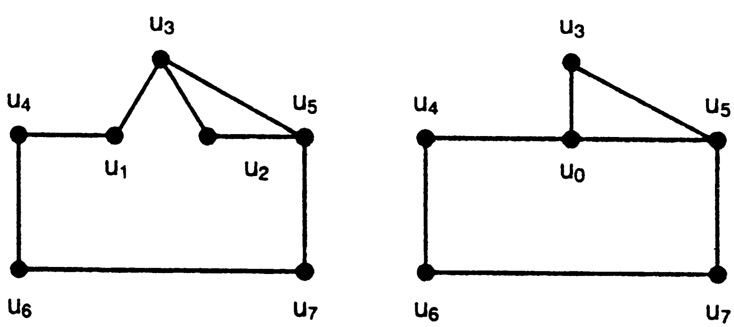


Рис. 124

число правильных раскрасок графа G в t цветов, при которых цвета вершин u и v совпадают, равно $f(G_2, t)$. Складывая эти два числа, получим число правильных раскрасок графа G в t цветов.

Теорема доказана. □

Теорема позволяет свести вычисление функций $f(G,t)$ произвольных графов к вычислению хроматических функций графов с большим числом ребер или с меньшим числом вершин, и следовательно, в конце концов, к хроматическим функциям полных графов. Поскольку $f(K_n, t)$ — многочлен от t, то хроматическая функция является многочленом от t.

Найдем хроматическую функцию построенного графа G. При этом вместо

$$f(G,t) = f(G_1,t) + f(G_2,t)$$

будем писать

$$G = G_1 + G_2$$

или рисовать соответствующие графы (рис. 125).

Таким образом, $f(G,t) = f(K_5,t) + 2f(K_4,t) + f(K_3,t)$.

Используя вычисленные ранее значения хроматических функций полных графов, имеем:

$$f(G,t) = t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 2t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2).$$

Отсюда

$$f(G,3) = 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$f(G,4) = 0 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

Следовательно, есть 6 способов распределения лекций в первую смену и 72 способа — во вторую. ▷

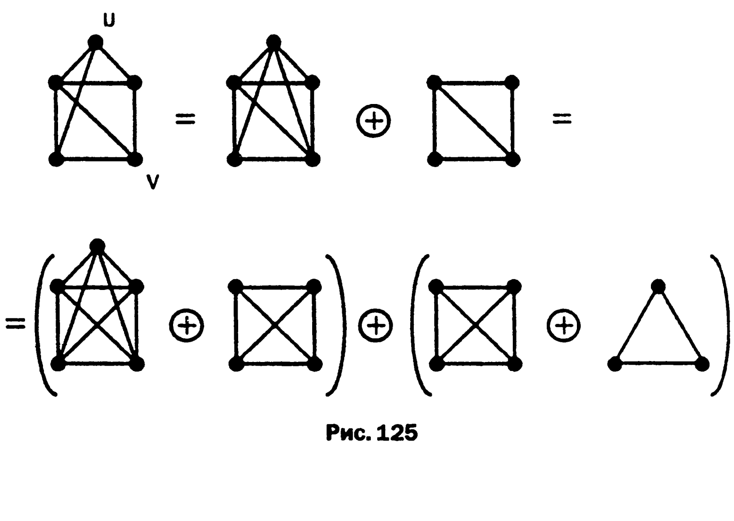


Рис. 125

181 Шесть банков разделили между собой станции метрополитена для установки банкоматов так, что на двух соседних станциях установили банкоматы различных банков. Оказалось, что для пяти банков такое распределение станций невозможно. Докажите, что можно, получив деньги в банкомате одного банка, проехать одну остановку и получить деньги в банкомате второго банка, затем проехать еще одну остановку и получить деньги в банкомате третьего банка, затем проехать еще одну остановку и получить деньги в банкомате четвертого банка и т. д.

Решение. Будем рассматривать систему станций и линий метро как граф G, хроматическое число которого равно 6. Рассмотрим правильную раскраску графа в шесть цветов: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Покажем, что в графе существует цепь из шести вершин, которые окрашены в цвета $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Получим новую правильную раскраску графа G, перекрасив в цвет 1 те вершины цвета 2, которые не смежны ни с одной вершиной цвета 1. В новой раскраске останется хотя бы одна вершина цвета 2, так как в противном случае получилась бы правильная раскраска графа в пять цветов, невозможность которой вытекает из условия задачи.

Аналогично, те вершины цвета 3, которые не будут смежными с вершинами цвета 2 при новой раскраске, перекрасим в цвет 2. По той же причине, что и ранее, в графе останется вершина цвета 3, причем она будет смежной с некоторой вершиной, которая имеет цвет 2 в начальной раскраске. Продолжим процесс перекраски вершин до последнего цвета.

Рассмотрим теперь вершину цвета 6. Она не перекрашена, следовательно, она является смежной с некоторой вершиной цвета 5. Эта вершина тоже не перекрашена, поскольку в случае перекраски ее первоначальный цвет был бы 6, и она не смогла быть смежной с вершиной цвета 6. Продолжая этот процесс, построим нужную цепь из шести вершин.

Построенная цепь определяет требуемый порядок посещения банкоматов. ▷

182 Докажите, что для раскраски произвольной географической карты, при которой две любые соседние страны окрашены в различные цвета, достаточно шести красок. (Рассматриваются карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины).

Решение. Перейдем от карты к плоскому графу G (см. задачу 171). Задача заключается в раскраске граней графа G таким образом, что две грани, имеющие общее ребро будут окрашены в разные цвета. Такую раскраску будем называть ***правильной раскраской граней.***

Построим граф G^*, двойственный к графу G. От правильной раскраски граней графа G можно естественным образом перейти к раскраске вершин графа G^*, окрасив вершину графа G^* в цвет той грани, в которой находится эта вершина. Очевидно, что такая раскраска графа G^* является правильной. Аналогично можно показать, что от любой правильной раскраски графа G^* можно перейти к правильной раскраске граней графа G.

Таким образом, мы показали, что раскраска географической карты нужным нам образом эквивалентна правильной раскраске вершин плоского графа G^* шестью красками. Пусть граф G^* имеет n вершин. В графе G^* есть вершина v_1, степень которой не больше пяти (см. задачу 158). Удалим вершину v_1 вместе с выходящими из нее ребрами. Полученный граф обозначим G_{n-1}. В нем есть вершина v_2, степень которой не больше пяти. Удалим ее вместе с выходящими ребрами из графа G_{n-1} и полученный граф обозначим G_{n-2}. Эту процедуру мы будем продолжать до тех пор, пока не получится граф G_6, содержащий 6 вершин. Рассмотрим последовательность графов $G_6, G_7, \ldots, G_{n-1}, G^*$. Каждый последующий граф этой последовательности можно получить из предыдущего добавлением одной новой вершины и соединением ее ребрами не более, чем с пятью старыми.

Раскрасим вершины графа G_6 шестью красками. Новая вершина, появившаяся в графе G_7, будет смежна не более, чем с пятью вершинами графа G_6. Даже если эти вершины будут окрашены в разные цвета, то новую вершину можно окрасить в шестой цвет. Таким же образом можно окрасить новую вершину при переходе от графа G_7 к графу G_8 и т.д. Это значит, что граф G^* можно правильно раскрасить шестью цветами. Из доказанной ранее эквивалентности задач следует, что произвольную географическую карту можно так раскрасить шестью красками, что соседние страны будут окрашены в разные цвета. ▷

183 Докажите, что для раскраски произвольной географической карты (см. предыдущую задачу) достаточно пяти красок.

Решение. Как и в предыдущей задаче, докажем, что пятью красками можно правильно раскрасить вершины двойственного графа G^*, полученного из карты.

Проведем доказательство индукцией по числу вершин графа. Утверждение справедливо для графов не более, чем с пятью вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих не более n вершин.

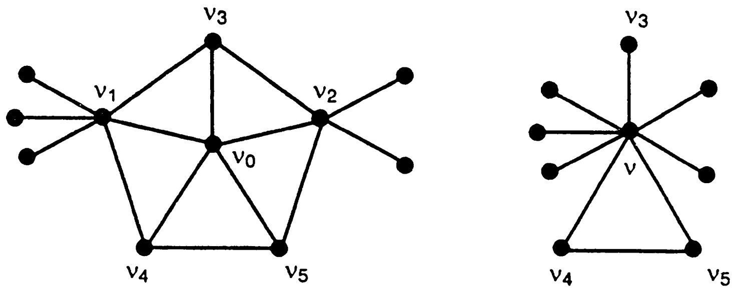


Рис. 126

Рассмотрим произвольный плоский граф с $(n+1)$ вершиной. Согласно задаче 158 этот граф содержит вершину v_0, степень которой не превосходит пяти. Отдельно рассмотрим два случая.

1. Степень вершины v_0 не превосходит четырех.

   Удалим вершину v_0 из графа вместе с выходящими из нее ребрами. По индуктивному предположению вершины получившегося графа можно правильно раскрасить пятью красками. После этого окрасим вершину v_0 в тот из пяти цветов, который не использован при окраске смежных с ней вершин.

2. Степень вершины v_0 равна пяти.

   Среди смежных с v_0 вершин обязательно найдутся две несмежные между собой вершины v_1 и v_2, так как в противном случае граф G содержал бы подграф K_5, т. е. не был бы планарным (см. задачу 153). Удалим из графа G^* вершину v_0 вместе с выходящими из нее ребрами и в получившемся графе, как в задаче 174, сольем вершины v_1 и v_2 в одну вершину v (см. рис. 126).

Граф G_1, получившийся в результате таких операций, является плоским, содержит $(n-1)$ вершину, и по индуктивному предположению его можно правильно раскрасить в 5 цветов. Теперь окрасим в графе G^* вершины v_1 и v_2 в цвет вершины v, остальные вершины в те же цвета, что и в графе G_1, а вершину v_0 в цвет, не использованный при окраске смежных с ней вершин. Мы получили правильную раскраску вершин графа G^*. Следовательно, любую географическую карту можно раскрасить пятью красками нужным нам образом. ▷

Замечание. *На самом деле произвольную географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, что любые две соседние страны будут окрашены в разные цвета. Это формулировка знаменитой задачи о четырех красках, впервые опубликованной в* 1879 *году британским математиком А. Кэли (сама задача была известна и ранее). Утвержде-*

ние было доказано в 1976 *году американскими математиками К. Аппелем и В. Хейкеном с помощью компьютера.*

184 Все страны, расположенные на острове, имеют форму треугольников, причем любые две граничащие страны имеют целую общую сторону (т. е. вершина одного треугольника не лежит на стороне другого). Докажите, что для раскраски карты этого острова (см. предыдущие задачи) достаточно трех красок.

Решение. Перейдем от карты острова к плоскому графу G, а затем к двойственному графу G^* (см. задачу 171). Из задачи 182 следует, что правильная раскраска графа G^* тремя красками эквивалентна нужной раскраске карты острова. Граф G^* содержит вершину v_1, степень которой не больше двух. Такой вершиной может быть вершина, соответствующая стране, расположенной на берегу моря. Удалим из графа G^* вершину v_1 вместе с выходящими из нее ребрами. В полученном графе G_{n-1} опять найдется вершина v_2, степень которой не больше двух. Как и в задаче 182, получим последовательность графов $G_3, G_4, \ldots, G_{n-1}, G^*$. Каждый граф в этой последовательности, кроме первого, можно получить из предыдущего добавлением одной новой вершины и соединением ее ребрами не более, чем с двумя старыми вершинами.

Раскрасим три вершины графа G_3 тремя красками. Так как новая вершина в графе G_4 смежна не более, чем с двумя вершинами графа G_3, то ее можно окрасить в цвет, не использованный при окраске этих вершин. Таким же образом можно правильно раскрасить тремя красками графы G_5, G_6 и т. д. Правильная раскраска в три цвета графа G^* определит правильную раскраску карты тремя красками. ▷

185 Известно, что на карте одной области нет точек, в которых сходятся границы нечетного числа районов. Докажите, что такую карту можно раскрасить двумя красками так, что любые два соседние района будут покрашены разными красками. (См. предыдущие задачи.)

Решение. Будем считать карту области графом G. По условию все вершины этого графа, не принадлежащие внешней грани, имеют четную степень. Построим граф G^*, двойственный к графу G, без внешней грани (см. рис. 127).

Из предыдущих задач вытекает, что если мы докажем, что граф G^* можно правильно раскрасить двумя красками, то решим и нашу задачу. Для этой цели докажем, что граф G^* двудольный.

Покажем, что любой цикл в графе G^* содержит четное число ребер. Если внутри цикла находится только одна вершина v графа G, то

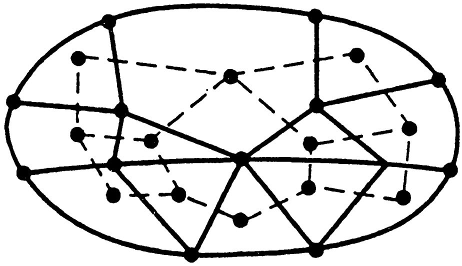


Рис. 127

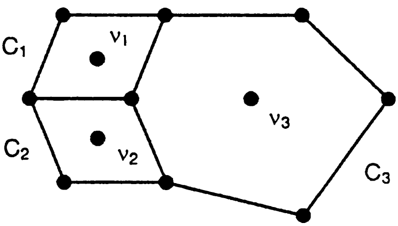


Рис. 128

каждое ребро цикла пересекает ровно одно ребро, выходящее из вершины v, а по условию из v выходит четное число ребер (см. рис. 127, где в качестве вершины v можно рассматривать любую вершину графа, не принадлежащую внешней грани).

Пусть внутри цикла находится несколько вершин графа G: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (см. рис. 128).

Каждая вершина v_i окружена циклом C_i, имеющим внутри себя только эту вершину и содержащим четное число ребер. Сложив число ребер циклов C_i, получим в сумме четное число, равное числу ребер цикла C, сложенному с удвоенным числом ребер циклов C_i, не вошедших в C. Поэтому число ребер цикла C — четное.

Аналогично рассматривается случай, когда цикл C имеет повторяющиеся вершины.

Поскольку граф G^* имеет только циклы четной длины, то из теоремы Кенига (задача 67) вытекает его двудольность. Раскрасив вершины каждой доли своим цветом, получим правильную раскраску графа G^*. Отсюда следует, что карту области можно раскрасить двумя красками. ▷

186 Докажите, что для раскраски карты, получающейся при пересечении прямых или окружностей на плоскости (см. предыдущие задачи), достаточно двух цветов.

Решение. Как и ранее, считаем карту графом G. Тогда степень каждой вершины графа G будет четной. Из предыдущей задачи следует, что такую карту можно раскрасить двумя красками. ▷

187 На острове расположено несколько стран. Можно ли разбить некоторые из этих стран на меньшие так, чтобы все старые границы сохранились, а получившуюся карту острова можно было раскрасить двумя красками (см. предыдущие задачи)?

Решение. «Раздвоим» границы каждой страны (см. рис. 129).

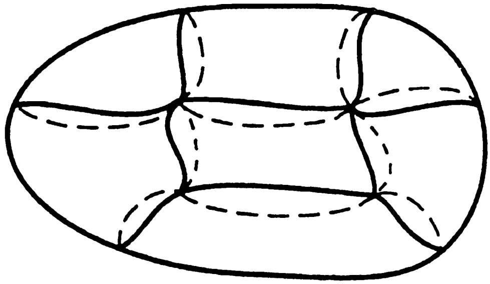


Рис. 129

Теперь внутри острова будут сходиться границы только четного числа стран. Согласно задаче 185 такую карту можно раскрасить двумя красками. ▷

188 Дорожная полиция для наблюдения за порядком в городе собирается установить телекамеры на его перекрестках. Каждая телекамера контролирует перекресток, на котором она установлена, все улицы, выходящие из этого перекрестка, включая и соседние перекрестки. Сколько нужно установить телекамер, если в городе 75 перекрестков, а наибольшее число телекамер, которые можно установить так, чтобы ни одна из них не наблюдала за другой, равно 30.

Решение. Естественным образом поставим в соответствие городу граф G, в котором вершины будут соответствовать перекресткам, а ребра — отрезкам улиц, соединяющим перекрестки.

Пусть G — произвольный граф. Множество вершин графа называется ***независимым***, если никакие две вершины из этого множества не смежны. Независимое множество называется ***наибольшим*** если оно содержит наибольшее число вершин среди всех независимых множеств. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется ***числом независимости*** графа G и обозначается $\alpha_0(G)$.

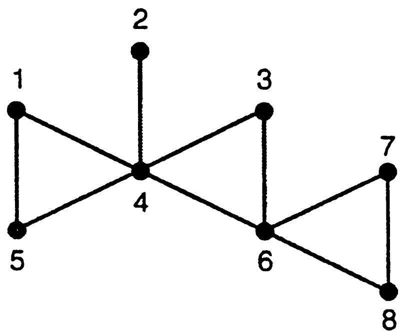


Рис. 130

Множество вершин графа называется ***покрытием*** графа, если каждое ребро графа выходит из некоторой вершины этого множества. Покрытие графа G называется ***наименьшим***, если число вершин в нем наименьшее среди всех покрытий графа.

Число вершин в наименьшем покрытии графа G называется ***числом покрытия*** и обозначается $\beta_0(\mathrm{G})$.

Например, для графа G, изображенного на рис. 130, множества вершин $\{4, 7\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$, $\{5, 2, 3, 8\}$ являются независимыми, причем последние два — наибольшими. Множества вершин $\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$, $\{4, 5, 6, 8\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$являются покрытиями, причем последние два — наименьшими. Для этого графа $\alpha_0(G) = 4$, $\beta_0(G) = 4$.

Теорема. Множество U вершин графа G является наименьшим покрытием тогда и только тогда, когда множество $\overline{U}$ остальных вершин является наибольшим независимым множеством. Следовательно,

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n,$$

где n — число вершин графа G.

Доказательство. По определению множество $\overline{U}$ независимо тогда и только тогда, когда в графе нет ребра, оба конца которого содержатся в $\overline{U}$, т. е. хотя бы один из концов каждого ребра принадлежит U. Последнее означает, что U — покрытие.

Поскольку сумма числа вершин множеств U и $\overline{U}$ равна n, то, очевидно, наибольшим множествам $\overline{U}$ соответствуют наименьшие множества U. и наоборот.

Теорема доказана. □

Из условия задачи следует, что для построенного графа G, у которого $n = 75$ и $\alpha_0(G) = 30$, нужно найти $\beta_0(G)$. Из формулы, доказанной в теореме, следует, что $\beta_0(G) = 45$. Поэтому в городе нужно установить 45 телекамер. ▷

189 В классе у каждого мальчика все девочки, с которыми он дружит, дружат между собой. У каждой девочки среди ее друзей мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в классе мальчиков не меньше, чем девочек.

Решение. Рассмотрим граф, в котором две вершины будут смежными, если соответствующие им дети дружат. Пусть в этом графе вершины множества V обозначают девочек, а вершины множества U — мальчиков.

Независимое множество W вершин графа называется ***максимальным***, если при добавлении к нему любой вершины графа множество перестает быть независимым. Максимальное независимое множество не всегда является наибольшим независимым. Построить максимальное независимое множество просто. Следует выбрать произвольную вершину графа, затем добавить к ней любую несмежную вершину, затем добавить к выбранным вершинам любую несмежную с ними вершину и так продолжать до тех пор, пока это возможно.

В подграфе H, порожденном множеством вершин V, рассмотрим любое максимальное независимое множество вершин $W = \{w_1, w_2, \dots w_p\}$. Из максимальности множества W вытекает, что любая вершина графа H смежна с некоторой вершиной из W. Поэтому

$$|V| \leqslant (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \ldots + (d_p + 1),$$

где d_i — степень вершины w_i

Если бы две вершины из множества W имели общую смежную вершину из множества U, то из условия задачи следовала бы их смежность, что невозможно. Поэтому множества вершин из U, смежные с вершинами из W, не пересекаются.

Согласно условия задачи $d_i < m_i$, поэтому $(d_i + 1) \leqslant m_i$, где m_i — число вершин из множества U, смежных с вершиной w_i.

Следовательно

$$|V| \leqslant (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \ldots + (d_p + 1) \leqslant m_1 + m_2 + \ldots m_p \leqslant |U|.$$

Отсюда вытекает, что мальчиков в классе не меньше, чем девочек. ▷

190 На плоскости так расположено 100 точек, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Известно, что в любом множестве из 10 точек существует хотя бы одна пара точек, соединенных отрезком. Докажите, что существует ломаная, состоящая не менее чем из 11 отрезков.

Решение. Точки вместе с отрезками задают граф G. Поскольку среди любых 10 вершин графа G существует пара смежных, то $\alpha_0(G) < 10$. Обозначим через $L_1, L_2, \ldots, L_p$ максимальные по включению цепи в графе (цепь может состоять из одной вершины). Если цепей окажется больше 10, то рассмотрим начальные вершины цепей. Поскольку $\alpha_0(G) \leqslant 9$, то некоторая пара этих вершин смежна, и две цепи можно будет объединить в одну. Поэтому р $\leqslant 9$. Следовательно, какая-то цепь состоит не менее чем из 12 вершин, т. е. не менее чем из 11 отрезков. ▷

191 Дорожная полиция установила 30 телекамер на перекрестках города (см. задачу 188). Известно, что это наибольшее количество камер, которые можно расставить так, чтобы ни одна из них не наблюдала другую. Докажите, что можно так проложить не более тридцати маршрутов патрулирования, чтобы каждый перекресток посещался только одной патрульной машиной и каждый маршрут содержал любой отрезок улицы между двумя перекрестками не более одного раза. (Некоторые участки улиц могут не посещаться патрульными машинами.)

Решение. Так, как и в задаче 188, построим граф G, описывающий перекрестки и улицы города. Из условий задачи следует, что число независимости графа $\alpha_0(G) = 30$. Маршруты патрулирования будут соответствовать цепям графа G. Нужно доказать, что вершины графа можно разбить не более, чем на 30 цепей, так чтобы эти цепи не имели общих вершин.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — разбиение вершин графа на минимальное число цепей, и $k > 30$. Рассмотрим первые вершины цепей: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поскольку их больше тридцати, то среди них обязательно найдется хотя бы одна пара смежных. Пусть это будут вершины a_1 и a_2. Объединив цепи $L_1 = (a_1, \ldots, b_1)$ и $L_2 = (a_2, \ldots, b_2)$ в одну цепь $L = (b_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, b_2)$, получим разбиение вершин на меньшее число цепей, что противоречит первоначальному выбору разбиения.

Следовательно, число цепей, на которые можно разбить вершины графа, будет не больше тридцати. Поэтому возможно обойтись не более, чем тридцатью маршрутами патрулирования. ▷

192 Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на перекрестках улиц города, который имеет 282 отрезка улиц. Решено было не устанавливать более одной колонки на соседних перекрестках. Известно, что в городе на каждом перекрестке сходится не менее четырех улиц. Докажите, что при этих условиях компания не сможет установить более 70 колонок.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий улицы и перекрестки города, как в предыдущих задачах. Из условий задачи следует, что минимальная степень вершин этого графа $\delta(G) = 4$. Поскольку колонки на соседних перекрестках устанавливать нельзя, то установленным колонкам будет соответствовать независимое множество вершин графа G.

Теорема. Для любого графа G верно неравенство

$$\alpha_0(G) \leqslant \frac{m}{\delta(G)},$$

где m — число ребер графа G.

Доказательство. Из каждой вершины наибольшего независимого множества V выходит по крайней мере $\delta(G)$ ребер. Так как вершины из V несмежны, то все эти ребра различные. Поэтому

$$m \geqslant \alpha_0(G) \cdot \delta(G).$$

Отсюда и получается нужное неравенство.

Теорема доказана. □

В нашей задаче $\alpha_0(G) \leqslant 282/4 = 70{,}5$.

Поэтому в городе можно установить не более 70 колонок. ▷

193 Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на улицах города так, чтобы на отрезках улиц, выходящих из одного перекрестка, было не более одной колонки. Известно, что в городе 210 отрезков улиц и на одном перекрестке сходится самое большее 6 улиц. Докажите, что при этих условиях может быть установлено не менее 20 колонок.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий улицы и перекрестки города, как в предыдущих задачах.

Реберным графом $L(G)$ произвольного графа G называется граф, вершины которого соответствуют ребрам графа G, и две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра графа G имеют общий конец. Следовательно, реберный граф $L(G)$ имеет столько вершин, сколько ребер имеет граф G.

На рис. 131 совмещены два графа — G и $L(G)$. Вершины графа G — темные кружочки, вершины графа $L(G)$ — светлые кружки. Ребра графа G — тонкие линии, ребра графа $L(G)$ — жирные линии.

Рассмотрим какое-либо размещение колонок в городе, удовлетворяющее условию. Отметим множество S вершин графа $L(G)$, соответствующее отрезкам улиц с колонками. Так как на двух отрезках улиц, выходящих из одного переулка, не может находиться двух колонок, то множество S является независимым множеством вершин графа $L(G)$. Поэтому для решения задачи мы должны доказать, что $\alpha_0(L(G)) \geqslant 20$.

Теорема. Для любого графа G, имеющего n вершин, выполняется соотношение

$$\alpha_0(G) \geqslant \frac{n}{\Delta(G)+1},$$

где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\alpha_0}\}$ — наибольшее независимое множество вершин графа G, содержащее α_0 вершин. Для каждой вершины v_i из S рассмотрим множество $N(v_i)$, которое содержит

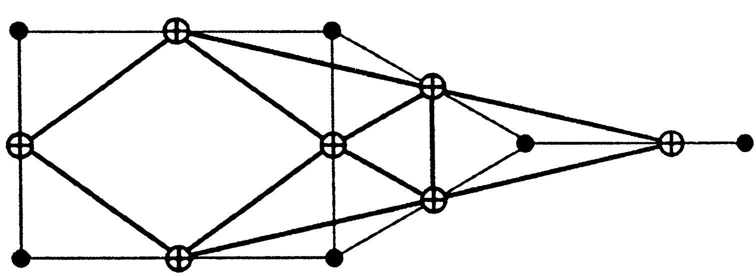


Рис. 131

вершину v_i и все смежные с ней вершины. (См. рис. 132, на котором $S = \{1, 5\}$, $N(1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $N(5) = \{5, 2, 4\}$.)

Каждая вершина графа G обязательно попадет хотя бы в одно множество $N(v_i)$, так как в противном случае не попавшую вершину можно добавить к S и получить еще большее независимое множество.

Число вершин в множестве $N(v_i)$ равно $d(v_i) + 1$, где $d(v_i)$ — степень вершины v_i. Поэтому

$$n \leqslant (d(v_1) + 1) + (d(v_2) + 1) + \ldots + (d(v\alpha_0) + 1) \leqslant$$
$$\leqslant (\Delta(G) + 1) + (\Delta(G) + 1) + \ldots + (\Delta(G) + 1) = \alpha_0 \cdot (\Delta(G) + 1).$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство.

Теорема доказана. □

Граф $L(G)$ имеет 210 вершин, и наибольшая из степеней его вершин $\Delta(L(G)) \leqslant 10$, поскольку отрезок улицы может соединять два перекрестка, из которых выходит еще по пять улиц.

Из доказанной теоремы следует

$$\alpha_0(G) \geqslant \frac{210}{10+1} = 19\frac{1}{11}.$$

Поэтому в городе может быть установлено не менее 20 автоколонок. ▷

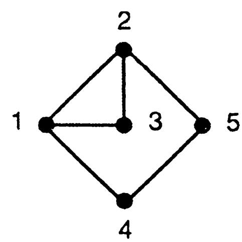


Рис. 132

194 Полицейские участки размещаются на перекрестках города, причем для любого перекрестка участок находится или на этом перекрестке, или на соседнем. Известно, что в городе 155 перекрестков и на каждом из них сходится не более шести улиц. Докажите, что в городе не менее 23 полицейских участков.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий перекрестки и улицы города, как в предыдущих задачах.

Множество V вершин графа G называется ***доминирующим множеством***, если любая вершина, не принадлежащая V, смежна с какой-либо вершиной из V. Доминирующее множество, которое имеет наименьшее число вершин среди всех доминирующих множеств графа G, называется ***наименьшим доминирующим множеством***, а число вершин в нем называется ***числом доминирования*** и обозначается $\gamma(G)$.

Докажем неравенство

$$\gamma = \gamma(G) \geqslant \frac{n}{\Delta(G) + 1},$$

где n — число вершин графа G, а $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней его вершин. Объединение вершин наименьшего доминирующего множества и вершин, смежных с ними, дает множество все вершин графа G. Поэтому

$$n \leqslant (d(v_1)+1)+(d(v_2)+1)+\ldots+(d(v_\gamma)+1) \leqslant$$
$$\leqslant (\Delta(G)+1)+(\Delta(G)+1)+\ldots+(\Delta(G)+1)=\gamma(G)(\Delta(G)+1).$$

Отсюда вытекает нужное соотношение.

По условию задачи полицейские участки соответствуют вершинам доминирующего множества. Поэтому

$$\gamma(G) \geqslant \frac{155}{6+1} = 22\frac{1}{7}.$$

Следовательно, в городе не менее 23 участков. ▷

195 На вечере собралось несколько юношей и девушек. При этом оказалось, что для любой группы юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из юношей этой группы, будет не меньше числа юношей в группе. Докажите, что все юноши могут одновременно танцевать в парах со знакомыми девушками.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, вершины одной доли (A) которого соответствуют юношам, другой доли (B) — девушкам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие юноша и девушка знакомы. Пусть некоторое число знакомых юношей и девушек танцуют в парах. Выделим ребра, соединяющие вершины, соответствующие танцующим. Выделенные ребра не будут иметь общих вершин.

Паросочетанием в графе называется множество его ребер, в котором каждая пара ребер не имеет общей вершины. Поскольку каждый юноша на вечере должен танцевать, то нужно доказать, что в графе G существует паросочетание, ребра которого выходят из каждой вершины доли A. Такое паросочетание называется ***паросочетанием из A в B***.

Пусть X — любое подмножество множества A. Через $N(X)$ обозначим подмножество вершин из B, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из X.

Теорема. Для существования паросочетания из A в B в двудольном графе необходимо и достаточно, чтобы для любого множества вершин X из A множество $N(X)$ имело вершин не меньше, чем X, т. е. выполнялось неравенство

$$|X| \leqslant |N(X)|, \qquad (**)$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Доказательство проведем индукцией по n — числу вершин в доле A. Для $n = 1$ утверждение вытекает из того, что для одной вершины u в A согласно условию (**) обязательно найдется смежная ей вершина v в B, и ребро (u, v) будет нужным паросочетанием. Пусть утверждение доказано для всех чисел, меньших n. Докажем его для числа n. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любого множества X ($|X| < n$) выполняется неравенство $|X| < |N(X)|$. Рассмотрим произвольное ребро (u, v) и удалим из графа вершины u и v вместе с выходящими из них ребрами. Полученный граф обозначим G_1. Его доли A_1 и B_1 получены из долей A и B графа G. Рассмотрим любое подмножество X_1 множества A_1. В графе G для X_1 выполняется неравенство $|X_1| < |N(X_1)|$. Так как из B удалена только одна вершина, то в графе G_1 будет выполняться соотношение $|X_1| \leqslant |N(X_1)|$. По индуктивному предположению в графе G_1 существует паросочетание из A_1 в B_1. Добавив к этому паросочетанию ребро (u, v), получим нужное паросочетание в графе G.
2. Существует такое множество X ($|X| = k < n$), для которого $|X| = |N(X)|$. Для графа G_1, порожденного множествами вершин X и $N(X)$, существует паросочетание из X в $N(X)$. Это следует из индуктивного предположения.

Покажем, что для двудольного графа G_2, порожденного остальными вершинами, будет выполняться условие (**). (В этом графе доля A_2 состоит из вершин доли A без X, доля B_2 — из вершин доли B без $N(X)$.)

Рассмотрим произвольное множество X_1 из A_2, пусть $|X_1| = i$. Тогда

$$i + k = |X_1| + |X| \leqslant |N(X_1 U X)|.$$

Вершины из множества X смежны в совокупности с k вершинами из множества B. Поэтому i вершин из множества X_1 смежны не менее, чем с i вершинами из множества B_2, т. е. в графе G_2 для любого подмножества X_1 вершин множества A_2 выполняется соотношение

$$|X_1| \leqslant |N(X_1)|.$$

По индуктивному предположению в графе G_2 есть паросочетание из A_2 в B_2.

Объединив паросочетания в графах G_1 и G_2, получим паросочетание из A в B в графе G.

Теорема доказана. □

Поскольку из условия задачи следует, что для графа G, описывающего знакомства молодых людей, выполняется условие теоремы, то в графе G существует паросочетание из A в B, и все юноши могут одновременно танцевать в парах со знакомыми девушками. ▷

196 На вечере среди собравшихся было 20 юношей. Оказалось, что для любых k юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих юношей, не меньше, чем $(k-10)$. Докажите, что не менее половины юношей могут одновременно танцевать в паре со знакомой девушкой.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, описывающий знакомства молодых людей, как в предыдущей задаче. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G существует паросочетание, состоящее не менее чем из 10 ребер.

Теорема. Пусть G — двудольный граф, A и B — его доли, t — натуральное число, $t \leqslant |A|$. Для существования в графе G паросочетания, содержащего t ребер, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества X множества A выполнялось соотношение

$$|N(X)| \geqslant |X| + t - |A|, \qquad (***)$$

где $N(X)$ — множество вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из X.

Доказательство. Рассмотрим двудольный граф G_1, добавив $(|A| - t)$ новых вершин к доле B и соединив каждую из них ребром с каждой

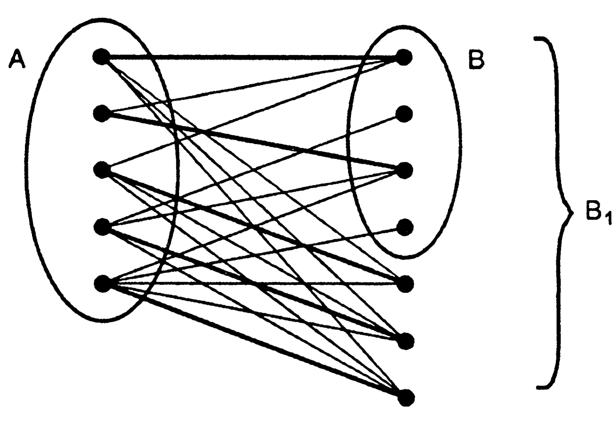


Рис. 133

вершиной из A. Очевидно, что существование в графе G паросочетания, содержащего t ребер, эквивалентно существованию в графе G_1 паросочетания из A в получившуюся долю B_1 (см. рис. 133).

Согласно теореме, доказанной в предыдущей задаче, для существования такого паросочетания необходимо и достаточно выполнение следующего условия для любого множества X из A:

$$|X| \leqslant |N_1(X)|,$$

где $N_1(X)$ — множество вершин из доли B_1, смежных хотя бы с одной вершиной из X.

Последнее соотношение эквивалентно условию (***).

Теорема доказана. □

Для нашей задач $|A| = 20$, $t = 10$, и условия (***) выполняются. Поэтому в графе G существует паросочетание из 10 ребер. Это означает, что не менее 10 юношей могут одновременно танцевать в паре со знакомыми девушками. ▷

197 На вечере ни один юноша не танцевал со всеми девушками, и каждая девушка танцевала, по крайней мере, с одним юношей. Докажите, что найдутся две такие пары M_i, D_i и M_j, D_j, что юноша M_i танцевал с девушкой D_i, юноша M_j танцевал с девушкой D_j, но M_i не танцевал с D_j, а M_j не танцевал с D_i.

Решение. Занумеруем юношей и девушек. Обозначим танцующих вершинами графа и дадим им те же номера, которые имеют молодые люди. Соединим две вершины ребром, если соответствующие им юноша и девушка танцевали в паре. Нужно доказать, что существует такое паросочетание (M_i, D_i), (M_j, D_j), что вершина M_i не смежна с вершиной D_j, а вершина M_j не смежна с вершиной D_i.

Обозначим через C_i множество вершин, с которыми смежна вершина M_i. Согласно условия задачи, для любого индекса i выполняются условия: $|C_i| < |D|$, $d(D_i) \geqslant 1$, где D — множество вершин, соответствующих девушкам.

Предположим, что нужных нам пар нет. Это возможно тогда и только тогда, когда для любых индексов i и j или $C_i \subseteq C_j$, или $C_j \subseteq C_i$. Поэтому существует некоторое множество C_p, которое содержит все множества C_i. По условию задачи множество C_p не совпадает с множеством D, т. е. в множестве D есть вершина нулевой степени. Это противоречит условию задачи.

Отсюда вытекает, что нужные нам пары танцующих существуют. ▷

198 На вечере первые два танца каждый из танцующих юношей танцевал с одной из своих знакомых девушек, возможно, первый танец с одной, а второй — с другой. Некоторые юноши танцевали два танца, некоторые — один, а очень застенчивые не танцевали ни разу. Докажите, что третий танец могут танцевать все юноши, танцевавшие первый танец, и все девушки, танцевавшие второй.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий знакомства молодых людей, как в предыдущих задачах.

Пусть первый танец танцевали юноши, соответствующие множеству X_1 из A, и девушки, соответствующие множеству Y_1 из B, а паросочетание M_1 определяет танцующие пары. Аналогично для второго танца: юношам соответствует множество X_2 из A, девушкам — Y_2 из B, танцующим парам — паросочетание M_2. (Возможно, что M_1 и M_2 будут иметь некоторые одинаковые ребра.) Для решения задачи докажем, что в графе G можно построить такое паросочетание M, что из каждой вершины множеств X_1 и Y_2 будут выходить ребра паросочетания M.

Рассмотрим двудольный граф G_1, образованный ребрами паросочетаний M_1 и M_2. Исследуем строение этого графа.

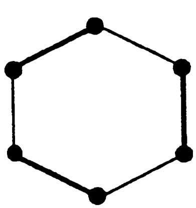


Рис. 134

Каждое ребро, принадлежащее двум паросочетаниям, будет являться компонентой графа G_1. Включим такое ребро в паросочетание M.

Степени вершин остальных компонент графа G_1 равны 1 или 2, поэтому компонентами графа являются или циклы четной длины, или цепи. И в циклах, и в цепях ребра поочередно принадлежат паросочетаниям M_1 и M_2. Каждая вершина цикла принадлежит двум множествам (X_1 и X_2) или (Y_1 и Y_2). То же самое выполняется для всех неконцевых вершин цепей.

Рассмотрим различные случаи строения компонент.

1. Компонента является циклом. (См. рис. 134, на котором ребра паросочетания M выделены.)

   В этом случае в паросочетание M можно включить все ребра одного из паросочетаний, принадлежащих этой компоненте.

2. Цепь L начинается в вершине v из Y_2 и оканчивается или в вершине u из X_2, или в вершине w из Y_1 (см. рис. 135).

   В этом случае в M включим все ребра паросочетания M_2, принадлежащие L.

3. Цепь L начинается в вершине u из X_1 и оканчивается или в вершине v из Y_1, или в вершине w из X_2 (см. рис. 136).

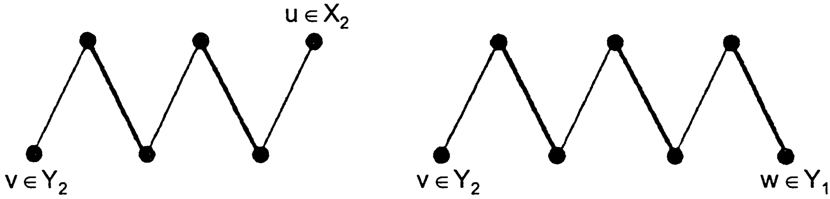


Рис. 135

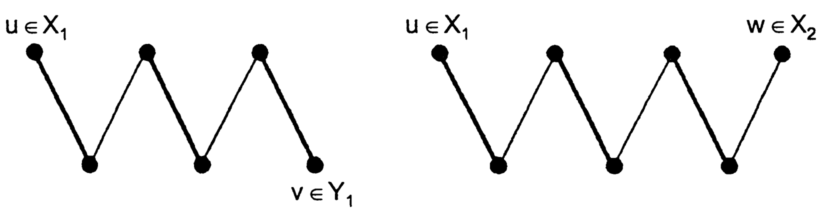


Рис. 136

В этом случае в M включим все ребра паросочетания M_1, принадлежащие L.

Других вариантов расположения концевых вершин цепей не существует.

Ребра построенного паросочетания выходят из нужных вершин и определяют танцующие в третьем танце пары. ▷

199 Докажите, что все участники вечера, которые имеют наибольшее число знакомых противоположного пола, могут одновременно танцевать в паре со своими знакомыми.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий знакомства юношей и девушек, как в предыдущей задаче. Пусть множество X из A соответствует юношам, имеющим наибольшее число знакомых девушек, а множество Y из B — девушкам, имеющим наибольшее число знакомых юношей. Степени вершин множеств X и Y являются наибольшими в графе G. Пусть они будут равны d. Нужно доказать, что можно построить такое паросочетание, что из каждой вершины множеств X и Y будут выходить его ребра.

Рассмотрим граф G_1, порожденный вершинами множества X и вершинами множества $N(X)$, смежными с X. Возьмем любое подмножество X_1 из X. Пусть X_1 содержит k вершин. Обозначим через $N(X_1)$ множество вершин из B, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из X_1. Если в $N(X_1)$ будет меньше, чем k вершин, то из них выйдет меньше, чем $d \cdot k$ ребер, что невозможно, так как все ребра, выходящие из X, должны выходить и из $N(X_1)$. Поэтому в множестве $N(X_1)$ не менее, чем k вершин.

Следовательно, в графе G_1 выполняются условия теоремы, доказанной в задаче 195. Поэтому в G_1 существует паросочетание из X в $N(X)$. Обозначим это паросочетание через M_1. Из каждой вершины множества X выходит ребро паросочетания M_1.

Аналогично можно построить такое паросочетание M_2, что из каждой вершины множества Y будет выходить ребро паросочетания M_1.

Теперь воспользуемся предыдущей задачей. С ее помощью из паросочетаний M_1 и M_2 можно построить паросочетание M, ребра которого будут выходить из вершин множеств X и Y. Паросочетание M определит пары танцующих юношей и девушек. ▷

200 Среди участников вечера несколько юношей и девушек имеют наибольшее число знакомых противоположного пола: по 6. Докажите, что наименьшее число танцев, за которое могут перетанцевать все знакомые пары, равно шести.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий знакомства юношей и девушек. Из предыдущей задачи следует, что можно построить паросочетание M_1, ребра которого выходят из вершин наибольших степеней. Удалим ребра M_1 из графа G. Точно также в полученном графе G_2 можно построить паросочетание M_2, ребра которого выходят из вершин наибольших степеней в этом графе. Удалим ребра M_2 и построим паросочетание M_3 в получившемся графе G_3 и т. д. Поскольку при каждом переходе от графа к графу максимальная степень вершин будет уменьшаться на единицу, то мы построим шесть паросочетаний, которые определят пары танцующие в шести танцах. ▷

201 На математической олимпиаде предлагалось 16 задач. Оказалось, что каждый из 16 школьников решил две задачи, и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач и каждая задача будет разобрана одним школьником.

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, в котором вершины доли A будут соответствовать школьникам, вершины доли B — задачам, и вершины u и v будут соединены ребром, если школьник, соответствующий вершине u, решил задачу, соответствующую вершине v.

Пусть несколько учеников разобрали некоторые задачи. Выделим ребра, соответствующие этим ученикам и этим задачам. Поскольку каждый ученик может разобрать только одну задачу и каждая задача может быть разобрана одним учеником, то выделенные ребра образуют паросочетание. Для решения задачи мы должны доказать, что в графе G существует паросочетание из A в B.

Исследуем строение графа G. Степень каждой его вершины равна двум. Поэтому граф является объединением циклов. В каждом цикле, начиная с произвольного ребра, будем поочередно включать и не включать ребра в паросочетание. Поскольку каждый цикл двудольного графа имеет четное число ребер (см., например, теорему Кенига), то половина ребер войдет в паросочетание, а половина не войдет, и из каждой вершины графа будет выходить одно ребро паросочетания.

Таким образом, в графе G построено паросочетание из A в B. Ребра этого паросочетания будут соответствовать школьникам, разбирающим задачи. ▷

202 На математической олимпиаде предлагалось n задач. Оказалось, что каждый из n школьников решил k задач и каждую задачу решили k школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных задач и каждая задача будет разобрана одним школьником.

Решение. Рассмотрим граф G, описывающий решение задач школьниками, как в предыдущей задаче. Мы должны доказать, что в графе G существует паросочетание из A в B.

Рассмотрим произвольное множество X из A. Через $N(X)$ обозначим множество вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из X. Число ребер, выходящих из вершин множества X, равно $k|X|$, число ребер, выходящих из вершин множества $N(X)$, равно $k|N(X)|$.

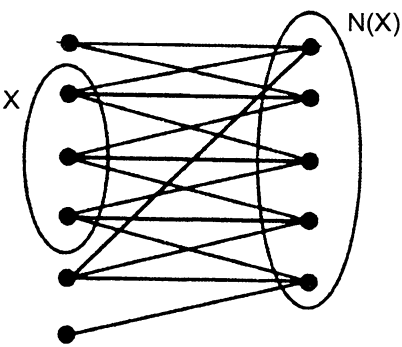


Рис. 137

Но если все ребра, выходящие из X, попадают в $N(X)$, то возможно существование ребер, выходящих из $N(X)$ и не попадающих в X (см. рис. 137).

Поэтому $k|X| \leqslant k|N(X)|$ и $|X| \leqslant |N(X)|$.

По теореме, доказанной в задаче 195, в графе G существует паросочетание из A в B. Ребра этого паросочетания будут соответствовать школьникам, разбирающим задачи. ▷

203 Для участия в водном походе руководитель должен рассадить 10 туристов по пяти двухместным лодкам. Однако у него возникли некоторые проблемы. Оказалось, что нельзя посадить в одну лодку двух неопытных участников, или двух слишком тяжелых туристов, или людей, несимпатичных друг другу, и т. д. Пары, которые могут плыть в одной лодке, определены таблицей.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+			+					
2	+				+	+				
3				+		+	+			
4			+				+			
5	+	+				+				
6		+	+		+		+	+	+	
7			+	+		+				
8						+			+	+
9						+		+		+
10								+	+	

Докажите, что как бы руководитель ни старался, ему не удастся составить 5 экипажей.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют туристам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующих участников можно посадить в одну лодку (см. рис. 138).

Любое размещение людей по лодкам соответствует некоторому паросочетанию в графе G. И наоборот: любое паросочетание определяет пары участников, которые могут плыть в одной лодке. На рис. 139 изображено паросочетание, содержащее 4 ребра. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G не существует паросочетания, имеющего 5 ребер.

Пусть M — паросочетание в произвольном графе G. Цепь в графе G, ребра которой поочередно входят и не входят в M, называется ***чередующейся цепью***. Если чередующаяся цепь соединяет две вершины, из которых не выходят ребра паросочетания M, то она называется

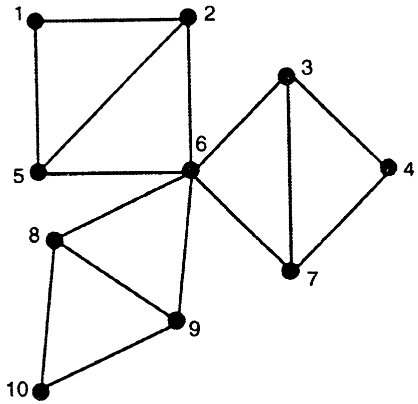


Рис. 138

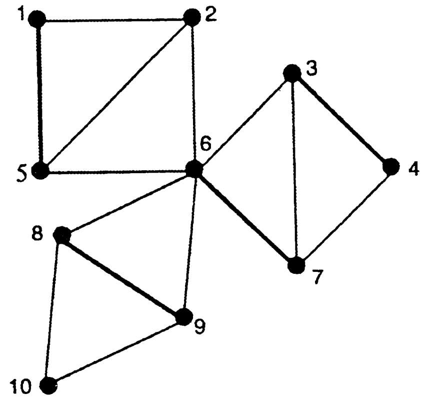


Рис. 139

увеличивающей относительно M цепью. Очевидно, что если в графе есть увеличивающая относительно M цепь, то в графе можно построить паросочетание с бо́льшим числом ребер, чем паросочетание M.

Действительно, в такой цепи число ребер, не принадлежащих паросочетанию, на одно больше, чем ребер паросочетания. Поэтому, удалив из паросочетания M ребра цепи, принадлежащие M, и добавив к M ребра цепи, не принадлежащие M, получим паросочетание с большим числом ребер. (См. граф на рис. 140, где нужной цепью является цепь $L = (7, 8, 4, 1, 2, 3, 6, 5)$.)

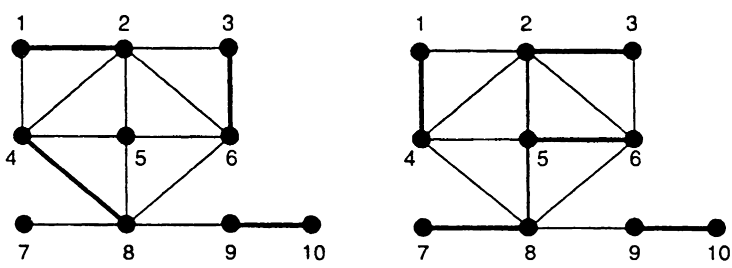


Рис. 140

Следовательно, отсутствие увеличивающих относительно M цепей является необходимым условием для того, чтобы паросочетание M имело наибольшее число ребер среди всех паросочетаний. Это условие является и достаточным.

Теорема. Паросочетание M в графе является паросочетанием с наибольшим числом ребер среди всех паросочетаний в графе G тогда

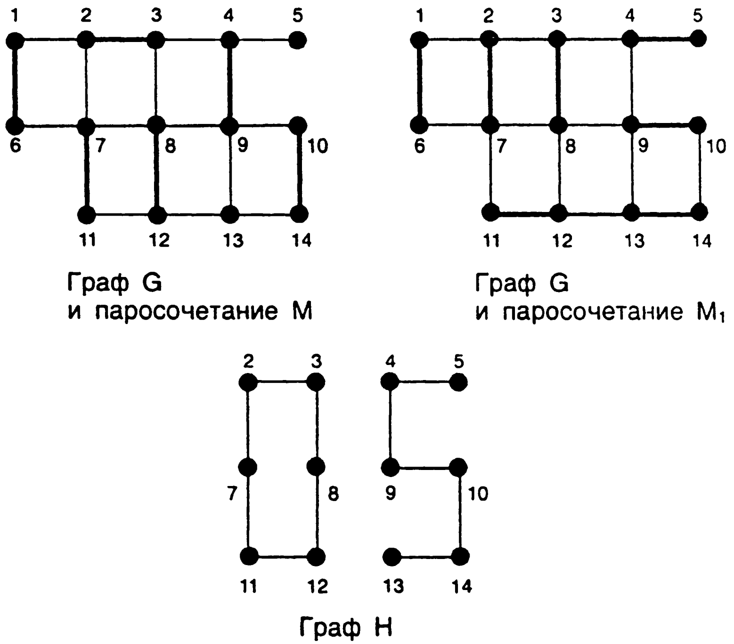


Рис. 141

и только тогда, когда в графе G нет увеличивающих относительно M цепей.

Доказательство. *Необходимость*, как отмечалось, очевидна.

Достаточность докажем от противного. Пусть паросочетание M_1 в графе G имеет больше ребер, чем паросочетание M. Рассмотрим граф H, образованный ребрами, входящими или в M, или в M_1, и не входящими одновременно в M и M_1 (см. рис. 141).

Так как из произвольной вершины этого графа выходит не более, чем по одному ребру каждого паросочетания, то ее степень не больше двух. Если степень вершины равна двум, то одно ребро, выходящее из вершины, принадлежит M, другое — M_1. Поэтому каждая компонента графа H является или циклом, содержащим одно и то же число ребер из M и M_1, или цепью, в которой ребра из M и M_1 чередуются. Но в M_1 больше ребер, чем в M, поэтому среди этих компонент обязательно есть цепь, крайние ребра которой принадлежат M_1. Эта цепь и будет увеличивающей относительно M цепью, что противоречит условию.

Теорема доказана. □

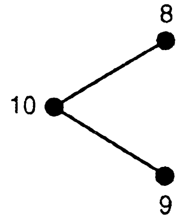


Рис. 142

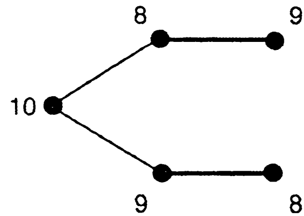


Рис. 143

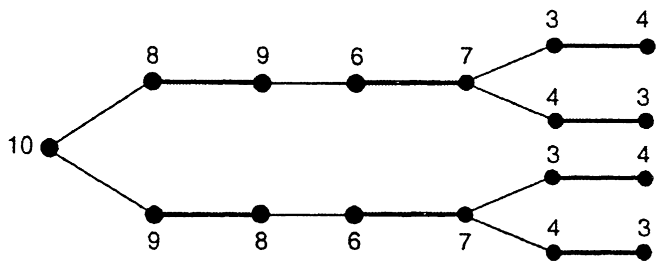


Рис. 144

Покажем, что в графе G, изображенном на рис. 139, нет увеличивающих относительно M цепей. Для поиска таких цепей используем поиск в ширину (см. задачу 86). Если нужная цепь существует, то она начинается в вершине 10 ребром, не принадлежащим паросочетанию M, и заканчивается в вершине 2. Есть две возможности для начала цепи (рис. 142):

Далее цепь должна быть продолжена ребром из M (рис. 143):

Продолжим построение дальше (рис. 144):

Дальнейшее продолжение поиска невозможно. Следовательно, в графе G нет увеличивающих относительно M цепей. Из доказанной теоремы следует, что в графе G нет паросочетаний, содержащих более четырех ребер. Это означает, что руководитель похода не сможет укомплектовать 5 экипажей. ▷

204 Руководитель водного похода сформировал 6 двухместных экипажей. Из оставшихся туристов он не может составить еще хотя бы одну пару, так как некоторые участники не могут плыть в одной лодке. Докажите, что как бы он не старался, ему не удастся составить более 12 экипажей.

Решение. Построим граф G так, как в предыдущей задаче. Размещение участников по лодкам составляет паросочетание в графе G. Па-

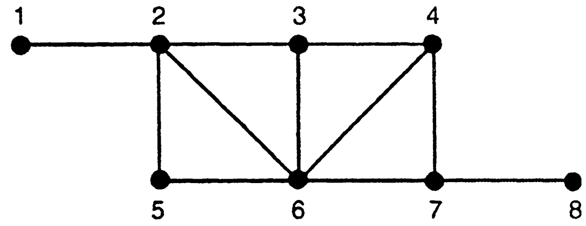


Рис. 145

росочетание называется ***максимальным***, если к нему нельзя добавить ни одного ребра так, чтобы получившееся множество ребер оказалось паросочетанием. Паросочетание в графе G называется ***наибольшим***, если оно имеет наибольшее число ребер среди всех паросочетаний в графе G, число ребер в нем называется ***числом паросочетания*** и обозначается $\alpha_1(G)$.

В графе G, изображенным на рис. 145, паросочетание $M = \{(1,2), (5,6)\}$ не является максимальным, так как добавление ребра $(4,7)$ приводит к паросочетанию $M = \{(1,2),(5,6),(4,7)\}$, которое является максимальным. А наибольшим будет паросочетание $M = \{(1,2),(3,4), (5,6),(7,8)\}$, и $\alpha_1(G) = 4$.

Докажем, что $\alpha_1(G) \leqslant 2|M|$, где $|M|$ — число ребер в произвольном максимальном паросочетании.

Для каждого ребра $e = (u, v)$ из M рассмотрим граф $T(e)$, состоящий из ребра e и всех ребер, выходящих из вершин u и v. Так как M — максимальное паросочетание, то объединение ребер всех графов $T(e)$ даст ребра графа G. Поскольку каждый граф $T(e)$ содержит не более двух ребер любого наибольшего паросочетания, то

$$2|M| \geqslant \alpha_1(G).$$

Из условий задачи следует, что руководитель похода составил пары, соответствующие некоторому максимальному паросочетанию. Поэтому число экипажей не может быть больше, чем 12. ▷

205 Оказалось, что для любого подмножества участников конференции количество членов этого подмножества не превосходит количество участников конференции, не входящих в подмножество и знакомых хотя бы с одним членом подмножества. Докажите, что не менее двух третей участников конференции можно так рассадить за двухместные столы, что за каждым столом будут сидеть знакомые.

Решение. Рассмотрим граф G знакомств участников конференции. Пусть M_1 — наибольшее паросочетание графа G. Обозначим через

V_1, вершины графа, принадлежащие ребрам паросочетания, а через V_2 — не принадлежащие.

Рассмотрим граф G_1, образованный ребрами графа G, соединяющими вершины множеств V_1 и V_2. Так как M_1 — максимальное паросочетание, то среди вершин множества V_2 нет смежных. Из условия задачи вытекает, что для любого подмножества вершин множества V_2 количество вершин этого подмножества не превосходит количества множества V_1, смежных хотя бы с одной вершиной множества V_2. Из теоремы, доказанной при решении задачи 195, следует, что в графе G_1 существует паросочетание M_2 из V_2 в V_1.

Предположим, что вершины u_1 и u_2, принадлежащие V_2, соединены ребрами паросочетания M_2 с каким-либо ребром (v_1, v_2) паросочетания M_1 (см. рис. 146, где ребро паросочетания M_1 нарисовано толстой линией, а ребра паросочетания M_2 — тонкими).

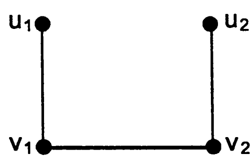


Рис. 146

В этом случае цепь (u_1, v_1, v_2, u_2) является увеличивающей относительно M_1 цепью в графе G. По теореме, доказанной при решении задачи 203, следует, что паросочетание M_1 не является наибольшим, что противоречит его выбору. Следовательно, ситуация, изображенная на рис. 146, невозможна, и вершины каждого ребра паросочетания M_1 смежны не более чем с одной вершиной из V_2. Поэтому множество V_2 имеет не больше вершин, чем множество M_1 ребер, т. е. не более трети вершин графа G.

Паросочетание M_1 определяет пары участников конференции, сидящие за одним столом. ▷

206 В парламенте каждый депутат имеет ровно одного друга и ровно одного врага. (Если депутат A дружит (враждует) с депутатом B, то депутат B дружит (враждует) с депутатом A.) Докажите, что депутатов можно так разделить на две палаты, что в каждой из них не будет ни друзей, ни врагов.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины обозначают депутатов, и две вершины будут смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им депутаты или дружат, или враждуют. Поскольку степень каждой вершины графа равна двум, то граф является объединением циклов. Если цикл начинается ребром, обозначающим дружбу, то он должен оканчиваться ребром, обозначающим вражду. Поэтому каждый цикл содержит четное число ребер. Из теоремы Кенига следует, что граф G будет двудольным. Поэтому депутатов можно разделить на палаты требуемым способом. ▷

207 Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

Решение. Рассмотрим полный граф K_6, содержащий 6 вершин, обозначающих ЭВМ. Если две ЭВМ соединены проводом какого-то цвета, то окрасим соответствующее ребро графа в тот же цвет. Поскольку провода одного цвета выходят из разных ЭВМ, то ребра одного цвета будут образовывать паросочетание в графе K_6. Необходимо доказать, что наименьшее число паросочетаний, на которое можно разбить ребра графа K_6, равно пяти.

Расположим 6 вершин графа в вершинах правильного шестиугольника. Его стороны окрасим через одну цветами 1 и 2, а диагонали — цветами 3, 4, 5 (одним цветов окрашиваются две параллельные малые диагонали и перпендикулярная к ним большая).

Ребра графа, окрашенные в один цвет, образуют паросочетания. Провода, соединяющие ЭВМ, можно окрасить в тот же цвет, что и соответствующие им ребра. ▷

208 Можно ли соединить нечетное число приборов разноцветными проводами так, чтобы из каждого прибора выходили провода разных цветов и цветов было на один меньше, чем приборов?

Решение. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: можно ли в полном графе K_{2n+1} разбить ребра на $2n$ паросочетаний.

Пусть s — минимальное число паросочетаний, на которое можно разбить ребра графа K_{2n+1}, а $E_1, E_2, \ldots, E_s$ — сами паросочетания. Поскольку ребра одного паросочетания не смежны, а в графе нечетное число вершин, то каждое паросочетание будет содержать не более n ребер. Поэтому

$$\frac{(2n+1)2n}{n} = |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_s| \leqslant n \cdot s.$$

Следовательно, $s \geqslant 2n+1$, и соединить приборы проводами с указанным числом цветов нельзя. ▷

209 В шахматном турнире принимают участие 7 школьников. Может ли быть так, чтобы:

а) Ваня сыграл 7 партий, Толя — 5, Леша и Дима — по 4, Семен и Илья — по 3, Женя — 2;

б) Ваня сыграл 5 партий, Толя, Леша и Дима — по 4, Семен и Илья — по 3, Женя — 2;

в) Ваня сыграл 6 партий, Толя, Леша и Дима — по 4, Семен — 2, Илья и Женя — по одной;

г) Ваня сыграл 5 партий, Толя и Леша — по 4, Дима — 3, Семен, Илья и Женя — по 2?

Решение. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: существуют ли такие графы встреч (см. задачу 1), у которых степени вершин будут равны числу партий, сыгранных школьниками.

Последовательность $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел называется ***графической***, если существует граф G с множеством вершин $V = (v_1, v_2, \ldots, v_3)$, для которого степень вершины v_i равна d_i. Граф G называется ***реализацией последовательности***.

Рассмотрим последовательности $(7, 5, 4, 4, 3, 3, 2)$, $(5, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$, $(6, 4, 4, 4, 2, 1, 1)$, $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$ из условий задачи и выясним, какие из них являются графическими.

Очевидно, что в графической последовательности $d_i \leqslant n - 1$, так как вершина может быть смежной самое большее с каждой из остальных $(n - 1)$ вершиной. По этой причине первая последовательность не является графической.

Согласно лемме о рукопожатиях сумма всех членов графической последовательности должна быть четной. Поэтому вторая последовательность не является графической.

Определение графичности третьей и четвертой последовательностей более сложное.

Назовем последовательность ***D правильной***, если выполняются два условия:

1) $n - 1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant 0$;
2) сумма все членов последовательности — четное число.

Теорема. Пусть $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — правильная последовательность и $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_2}, \ldots, d_n)$ — последовательность, полученная из D. Тогда последовательность D является графической тогда и только тогда, когда графической является последовательность D'.

(Для получения последовательности D' из D нужно вычесть по единице у d_1 членов последовательности D, начиная со второго. Последовательность D'_1 может оказаться неправильной. Примеры перехода от D к D'_1: $D = (5, 5, 4, 3, 3, 2, 2)$, $D'_1 = (4, 3, 2, 2, 1, 2)$; $D = (3, 2, 1, 0)$, $D'_1 = (1, 0, -1)$.)

Доказательство теоремы. Пусть D' — графическая последовательность и граф H — ее реализация. Добавив к H новую вершину и соединив ее ребрами с вершинами степеней $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1$ получим реализацию последовательности D.

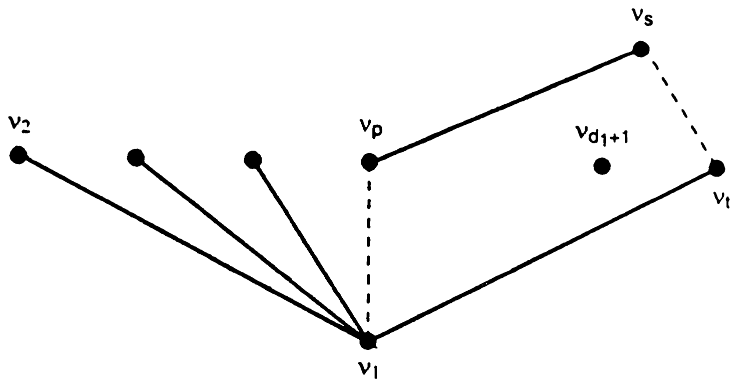


Рис. 147

Пусть теперь D — графическая последовательность и граф G — ее реализация. Если вершина v_1 в G смежна с вершинами $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$, то удалив v_1 вместе с выходящими из нее ребрами, получим реализацию последовательности D_1.

Пусть во всех реализациях последовательности D вершина v_1 не смежна с какой-то вершиной из множества $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$. Среди реализаций выберем такой граф G, в котором первая вершина, не смежная с v_1, будет иметь наименьший номер. Пусть это будет вершина v_p. Через v_t обозначим вершину с бóльшим номером, смежную с вершиной v_1. Так как для степеней вершин выполняется неравенство $d(v_p) \geqslant d(v_t)$, то существует вершина v_s, смежная с вершиной v_p, но не смежная с вершиной v_t (см. рис. 147).

Построим граф G_1, заменив в G ребра (v_p, v_s) и (v_1, v_t) на ребра (v_1, v_p) и (v_s, v_t) (см. рис. 148).

В получившемся графе G_1 множество степеней вершин то же, что и в графе G, т. е. G_1 — реализация последовательности D. Но в этой реализации вершина v_1 смежна с вершиной v_p, что противоречит выбору графа G.

Теорема доказана. □

Доказанная теорема позволяет предложить алгоритм распознавания графичности последовательности. Для последовательности D строим последовательность D' по указанному ранее правилу. Упорядочив последовательность D', получаем последовательность D_1. Для D_1 строим D'_1 и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока не получается заведомо графическая последовательность, например состоящая из одних нулей (тогда исходная последовательность графическая), или

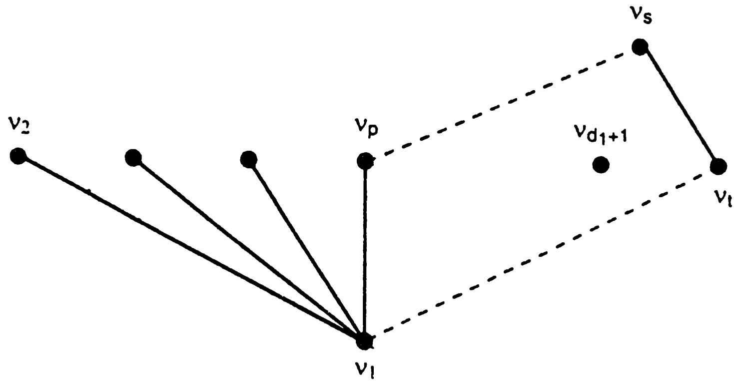


Рис. 148

в последовательности не оказываются отрицательные числа (тогда исходная последовательность не является графической).

Рассмотрим третью последовательность и проделаем указанные преобразования:

$$\begin{aligned} D &= (6, 4, 4, 4, 2, 1, 1), \\ D' = D_1 &= (3, 3, 3, 1, 0, 0), \\ D_1' = D_2 &= (2, 2, 0, 0, 0), \\ D_2' &= (1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

Так как в последовательности D_2' есть отрицательные числа, то последовательность (6, 4, 4, 4, 2, 1, 1) не является графической и школьники не могут провести столько встреч.

Рассмотрим четвертую последовательность и проделаем указанные преобразования:

$$\begin{array}{lccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ D = & (5, & 4, & 4, & 3, & 2, & 2, & 2), \\ D' = & & (3, & 3, & 2, & 1, & 1, & 2). \end{array}$$

Превратим последовательность D' в правильную:

$$\begin{array}{lcccccc} & v_2 & v_3 & v_4 & v_7 & v_5 & v_6 \\ D_1 = & (3, & 3, & 2, & 2, & 1, & 1), \\ D_1' = D_2 = & & (2, & 1, & 1, & 1, & 1), \\ D_2' = & & & (0, & 0, & 1, & 1). \end{array}$$

Последовательность графическая, ее реализация — на рис. 149.

Рис. 149

Будем по очереди возвращать удаленные вершины (рис. 150–152).

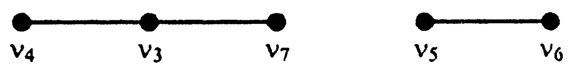


Рис. 150

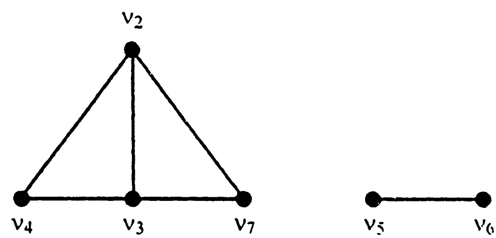


Рис. 151

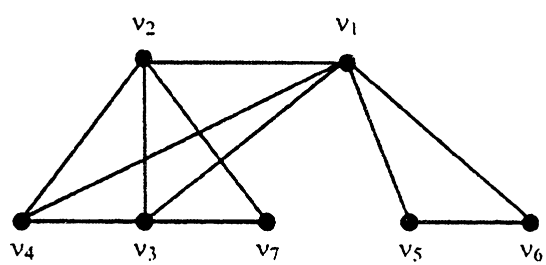


Рис. 152

Последний граф является реализацией четвертой последовательности. Следовательно, турнир, в котором школьники сыграли указанное число встреч, возможен. ▷

210 Может ли существовать шахматный турнир, в какой-то момент которого есть игроки, сыгравшие только 7, 4, 3, 2 партии? Какое наименьшее число игроков может участвовать в таком турнире?

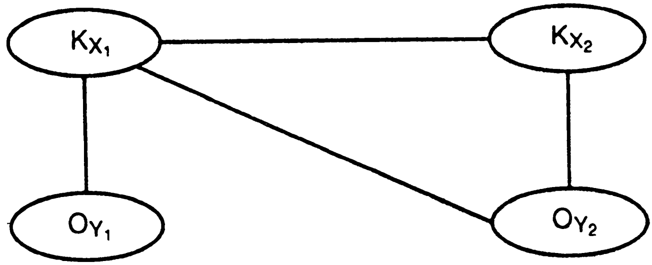


Рис. 153

Решение. Решение задачи сводится к ответам на два вопроса. Существует ли граф, у которого есть вершины степеней $7, 4, 3, 2$ и нет вершин других степеней? Если такой граф существует, то какое наименьшее число вершин может быть в нем?

Ответ на первый вопрос совсем прост: граф, который является объединением полных графов K_8, K_5, K_4 и K_3, имеет вершины указанных степеней. Такой граф содержит 20 вершин.

Теперь построим граф G, который имеет наименьшее число вершин. Вершины графа G можно разбить на два множества: A и B. Множество A состоит из вершин полных графов K_{X_1} и K_{X_2}, множество B — из вершин пустых графов O_{Y_1} и O_{Y_2}. Каждая вершина графа K_{X_1} соединена ребром с каждой из остальных вершин графа G. Кроме этого, каждая вершина графа K_{X_2} соединена ребром с каждой вершиной графа O_{Y_2}. (Схему соединения вершин графа см. на рис. 153.)

Попробуем так подобрать числа X_1, X_2, Y_1 и Y_2, чтобы степени вершин, принадлежащих K_{X_1}, в графе G были равны семи, K_{X_2} —

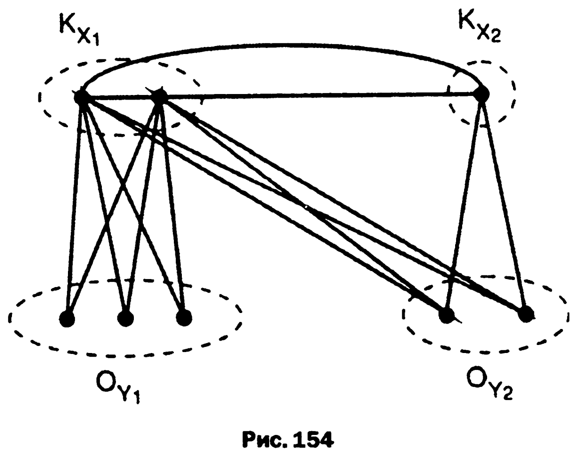


Рис. 154

четырем, O_{Y_1} — трем, O_{Y_2} — двум. Для этого необходимо составить систему уравнений:

$$(X_1 - 1) + X_2 + Y_1 + Y_2 = 7 \text{ (степень вершины, принадлежащей } K_{X_1});$$
$$X_1 + (X_2 - 1) + Y_2 = 4 \text{ (степень вершины, принадлежащей } K_{X_2});$$
$$X_1 + X_2 = 3 \text{ (степень вершины, принадлежащей } O_{Y_2});$$
$$X_1 = 2 \text{ (степень вершины, принадлежащей } O_{Y_1}).$$

Решив эту систему, получим: $X_1 = 2$, $X_2 = 1$, $Y_2 = 2$, $Y_1 = 3$. Граф G изображен на рис. 154.

В турнире должно участвовать 8 игроков. Меньшее количество игроков невозможно, так как по крайней мере один из них должен встретиться с семью другими. ▷

211 Из города A в город B ведут несколько дорог (карту дорог см. на рис. 155). Найдите число маршрутов автомобильного путешествия из A в B, учитывая, что при движении автомобиль должен все время приближаться к B.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют городам A и B и перекресткам, а ребра — дорогам. Ориентируем ребра, учитывая, что автомобиль все время должен двигаться по направлению от A к B (рис. 156).

Ориентированный граф G, или ***орграф***, состоит из конечного непустого множества V и множества E упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются ***вершинами*** орграфа, элементы множества E — ***дугами*** орграфа.

Если $x = (u, v)$ — дуга, то вершины u и v называются ее ***концевыми вершинами***, причем u называется ***началом дуги***, а v — ***концом дуги***. Дуга с совпадающими началом и концом называется ***петлей***. Можно рассматривать орграфы с несколькими дугами, имеющими общие концевые вершины. Такие дуги называются ***параллельными***.

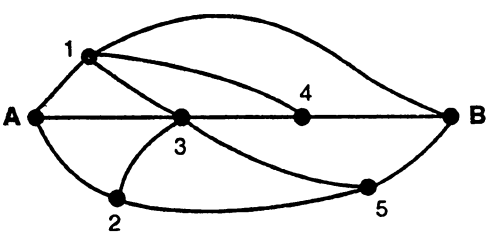


Рис. 155

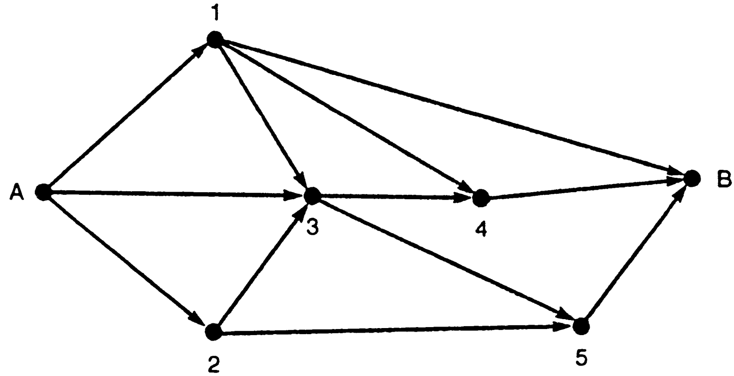


Рис. 156

На рисунке дуга изображается направленной линией, идущей от начала дуги к концу. Например, если $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (3, 1)$, $e_3 = (3, 1)$, $e_4 = (3, 2)$, $e_5 = (2, 4)$, $e_6 = (4, 2)$, $e_7 = (3, 4)$, $e_8 = (4, 4)$, то орграф можно изобразить, как на рис. 157. В этом орграфе e_2 и e_3 — параллельные дуги, а e_8 — петля.

Вершины орграфа называются ***смежными***, если они являются концевыми вершинами некоторой дуги. В противном случае вершины называются ***несмежными***. ***Маршрутом*** $L = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ в орграфе называется такая последовательность его дуг, в которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей. Маршрут можно также задавать порядком прохождения его вершин. Начало первой дуги маршрута называется его ***начальной*** вершиной, а конец последней дуги — ***конечной*** вершиной. Маршрут, у которого все дуги разные, на-

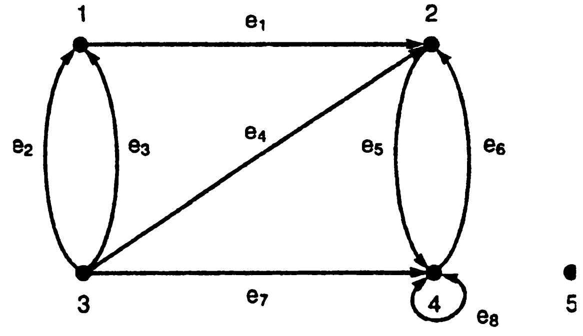


Рис. 157

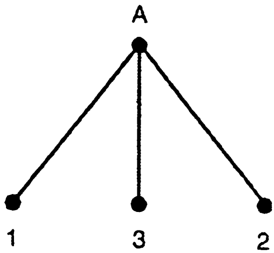


Рис. 158

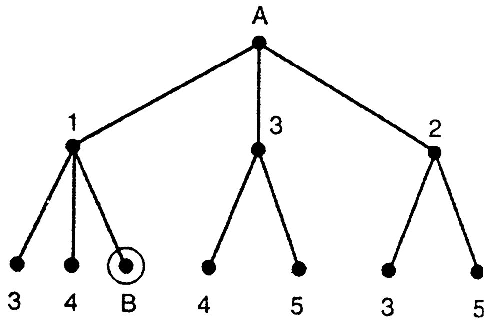


Рис. 159

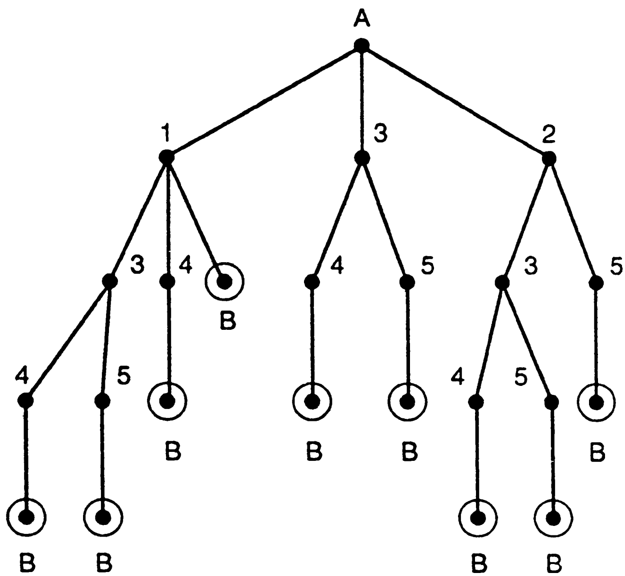


Рис. 160

зывается ***цепью***. Цепь, содержащая каждую свою вершину ровно один раз, называется ***путем***.

Для решения задачи необходимо найти в построенном орграфе число различных путей, соединяющих вершины A и B. Для этой цели используем корневое дерево. Из вершины A ведут 3 дуги (рис. 158):

Попав в вершины 1, 2, 3, мы имеем несколько возможностей для продолжения цепей: из 1 можем попасть в вершины 3, 4 и B (в этом случае мы получили один нужный маршрут); из вершины 2 — в 3 и 5; из вершины 3 — в 4 и 5 (рис. 159).

Окончательное корневое дерево построения маршрутов будет выглядеть как на рис. 160.

Из города A в город B ведет 9 маршрутов. ▷

212 На острове отдельными селениями живут правдолюбы и шутники. Правдолюбы постоянно говорят правду, а шутники всегда лгут. Жители каждого племени могут бывать в селении другого племени. Докажите, что путешественнику, попавшему в селение, достаточно задать первому встречному вопрос: «Вы местный?», чтобы по ответу определить, в селении какого племени он находится.

Решение. У путешественника 4 возможности: он может оказаться в одном из двух селений, где ему может попасться или правдолюб, или шутник. Корневое дерево ниже описывает эти возможности и ответы, полученные в каждом из случаев.

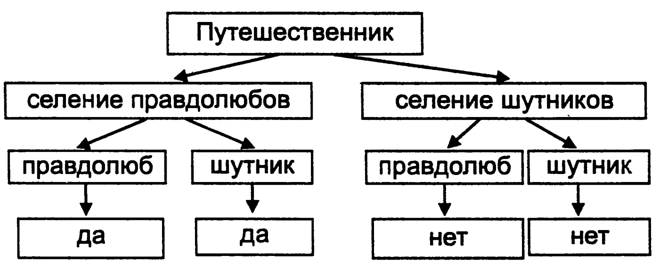


Рис. 161

Из рисунка 161 видно, что в случае ответа «да» путешественник находится в селении правдолюбов, в случае ответа «нет» — в селении шутников. ▷

213 В стране 101 город. Города соединены дорогами с односторонним движением так, что два города соединены не более чем одной дорогой. Из любого города выходит ровно 50 дорог, и в любой город входит ровно 50 дорог. Докажите, что из любого города в любой другой можно попасть, проехав не более двух дорог.

Решение. Зададим схему дорог в стране ориентированным графом. Рассмотрим две произвольные такие вершины u и v, что в орграфе нет дуги (u, v).

Длиной маршрута называется число дуг, входящих в маршрут. ***Расстоянием*** $d(u, v)$ между вершинами u и v называется наименьшая длина маршрута, начальной вершиной которого является вершина u, а конечной — вершина v. Очевидно, что такой маршрут будет цепью.

Для решения задачи нужно доказать, что расстояние между двумя любыми вершинами орграфа не более двух.

Пусть из вершины u выходят дуги $(u, u_1), (u, u_2), \dots, (u, u_{50})$, а в вершину v входят дуги $(v_1, v), (v_2, v), \dots, (v_{50}, v)$. Среди вершин u_i и v_j должна существовать общая вершина w, так как в противном случае в орграфе окажется не менее 102 вершин.

Маршрут (u, w, v) в орграфе определяет нужный маршрут проезда городов. ▷

214 В стране 101 город. Города соединены дорогами с односторонним движением так, что два города соединены не более чем одной дорогой. Из любого города выходит ровно 40 дорог, и в любой город входит ровно 40 дорог. Докажите, что из любого города в любой другой можно попасть, проехав не более трех дорог.

Решение. Зададим схему дорог в стране ориентированным графом. Нужно доказать, что расстояние между любыми двумя вершинами орграфа не более трех. Рассмотрим две произвольные такие вершины u и v, что в орграфе нет дуги (u, v) и нет дуг (u, w) и (w, v).

Пусть из вершины u выходят дуги $(u, u_1), (u, u_2), \dots, (u, u_{40})$, а в вершину v входят дуги $(v_1, v), (v_2, v), \dots, (v_{40}, v)$. Вследствие выбора вершин u и v среди вершин u_i и v_j нет совпадающих.

Из вершин множества $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{40}\}$ выходят 1600 дуг. В то же время число дуг между вершинами самого множества U не превосходит $40 \cdot 39/2 = 780$, а число дуг из U в 19 вершин, не принадлежащих множеству $\{u, u_1, \dots, u_{40}, v, v_1, \dots, v_{40}\}$, не больше, чем $40 \cdot 19 = 760$. Так как $1600 > 780 + 760$, то должна существовать дуга, выходящая из некоторой вершины u_i и входящая в некоторую вершину v_j.

Путь $L = (u, u_i, v_j, v)$ содержит три дуги. Этот путь определяет нужный путь между городами. ▷

215 В стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города, кроме столичного, выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Решение. Рассмотрим орграф G, в котором вершины будут обозначать города, а дуги — дороги с установленным направлением движения по ним.

Полустепенью исхода $d^+(v)$ вершины v называется число дуг, выходящих из вершины v. ***Полустепенью захода*** $d^-(v)$ вершины v называется число дуг, входящих в вершину v. Поскольку каждая дуга выходит из одной вершины и входит одну, то очевидно следующее утверждение:

Сумма полустепеней захода вершин орграфа равна сумме их полустепеней исхода и равна числу дуг орграфа.

В графе G для всех вершин, кроме столицы, $d^+(v) = 20$, $d^-(v) = 21$. Пусть вершина u орграфа, соответствующая столице, имеет полустепень захода $d^-(u) = x$ и полустепень исхода $d^+(u) = y$. Из условия задачи следует, что $x + y \leqslant 100$, или $y \leqslant 100 - x$.

Воспользуемся приведенным выше утверждением:

$$21 \cdot 100 + x = 20 \cdot 100 + y \leqslant 20 \cdot 100 + (100 - \mathrm{x}).$$

Отсюда $2x \leqslant 0$, и $x = 0$.

Так как полустепень захода вершины u равно нулю, то в вершину u не входит ни одна дуга, и в столицу невозможно въехать ни по одной дороге. ▷

216 В школе учатся 1000 учеников. Каждому из них нравятся ровно k учеников из остальных. При каких значениях k можно утверждать, что обязательно найдутся два ученика школы, которые или оба нравятся, или оба не нравятся друг другу?

Решение. Рассмотрим орграф G, имеющий 1000 вершин, соответствующий ученикам. Вершины u и v будут соединены дугой (u, v) тогда и только тогда, когда ученику, соответствующему вершине u, нравится ученик, соответствующий вершине v.

По условию задачи полустепень исхода каждой вершины орграфа равна k. Необходимо определить, при каком k в орграфе G обязательно найдутся две такие вершины u и v, которые или соединены двумя дугами (u, v) и (v, u), или не соединены ни одной дугой.

Предположим, что при некотором k каждую пару вершин соединяет ровно одна дуга. Тогда число дуг в орграфе будет равно числу пар учеников, т.е. $(1000 \cdot 999)/2 = 500 \cdot 999$. С другой стороны, из каждой вершины орграфа выходит ровно k дуг, т.е. всего $1000 \cdot k$ дуг. Приравняем эти числа.

$$500 \cdot 999 = 1000 \cdot k.$$

Отсюда $2k = 999$. Последнее равенство невозможно ни при каком k.

Поэтому при любом k в школе обязательно найдутся два ученика, которые или оба нравятся друг другу, или оба не нравятся друг другу. ▷

217 В классе 30 человек. Каждому нравятся ровно k учеников из класса. При каком минимальном k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека, которые нравятся друг другу?

Решение. Как в предыдущей задаче, опишем симпатии школьников ориентированным графом. Если полустепень исхода k каждой вершины равна 15, то орграф содержит $30 \cdot 15 = 450$ дуг. В то же время в орграфе $30 \cdot 29/2 = 435$ пар вершин. Поэтому хотя бы одна пара должна быть соединена двумя противоположно направленными дугами. Школьники, соответствующие этим вершинам, испытывают взаимные симпатии.

Покажем, что $k = 15$ является минимально возможным числом. Пример для $k < 15$ строится так: расположим все вершины по кругу, после чего будем считать, что дуги идут из вершины ровно в k вершин, следующих за ней по часовой стрелке. ▷

218 В волейбольном турнире проведено несколько матчей, после чего у каждой команды оказалась хотя бы одна победа. Докажите, что из сыгранных матчей можно выбрать несколько так, что если учитывать только эти матчи, то у каждой команды, принимающей участие в них, будет ровно одна победа и одно поражение.

Решение. Опишем проходящее соревнование ориентированным графом. В этом графе вершина v_i обозначает команду V_i и дуга (v_i, v_j) существует тогда и только тогда, когда команда V_i выиграла у команды V_j.

Цепь называется ***циклом***, если ее начальная и конечная вершины совпадают. Цикл орграфа, все вершины которого различные, называется ***контуром***.

Для решения задачи нужно доказать, что в построенном орграфе существует контур. Выберем любую вершину v_1 орграфа. Поскольку из нее выходит хотя бы одна дуга, перейдем по этой дуге в соседнюю вершину v_2. Аналогично из v_2 перейдем в v_3 и т. д. Поскольку число вершин в орграфе конечно, то в конце концов мы попадем в вершину, в которой были ранее (см. построение цикла в задаче 129). Полученный контур определяет необходимые встречи команд. ▷

219 В одном из городов Трансильвании 2006 жителей. Из них трое являются вампирами, а остальные нет. Писатель Стокер попросил каждого жителя указать двух человек, которые, по его мнению, являются вампирами. Известно, что вампиры обязательно укажут вампиров, а обычные жители могут указать на кого угодно. Докажите, что, пользуясь эти данными, Стокер может выбрать себе двух спутников для путешествия, которые не будут вампирами.

Решение. Рассмотрим орграф, вершины которого соответствуют жителям города, и две вершины будут соединены дугой, если один житель укажет на другого. Поскольку среди жителей есть три вампира, то в орграфе обязательно существует подграф T как на рис. 162 (подграф ориентированного графа определяется аналогично подграфу графа).

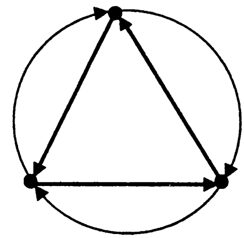


Рис. 162

Однако подобные подграфы могут порождать и жители, не являющиеся вампирами. Будем называть такие подграфы «подозрительными». Вампиры могут находиться лишь среди людей, соответствующих «подозрительным» подграфам.

Найдем «подозрительный» подграф и удалим его из графа. Если в получившемся графе нет больше «подозрительных» подграфов, то все люди, соответствующие оставшимся вершинам — не вампиры. Если же такие подграфы есть, то будем поочередно удалять их из графа. Поскольку при делении числа 2006 на 3 получается остаток 2, то можно утверждать, что мы, таким образом, определим хотя бы двух человек, заведомо не являющихся вампирами. ▷

220 В одном приморском курортном городе улицы настолько узкие, что в городе установлено одностороннее транспортное движение. Тем не менее, из каждой точки города можно проехать в любую другую. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования для полицейской машины, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками по крайней мере один раз.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф G, задающий движение по улицам города.

Вершина орграфа v называется ***достижимой*** из вершины u, если существует маршрут, в котором вершина u является начальной, а вершина v — конечной. Орграф называется ***сильносвязным*** (***сильным***), если для любых вершин u и v вершина u достижима из вершины v, а вершина v достижима из вершины u. Из условия следует, что орграф G — сильный. Необходимо построить маршрут, который начинается и оканчивается в одной и той же вершине и содержит все дуги орграфа.

Рассмотрим две произвольные вершины u_1 и v_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины u_1 и v_1, и маршрут, соединяющий вершины v_1 и u_1. Объединим эти маршруты в один маршрут L_1. Он будет начинаться и оканчиваться в вершине u_1. Если этот маршрут будет содержать все дуги орграфа, то он будет искомым.

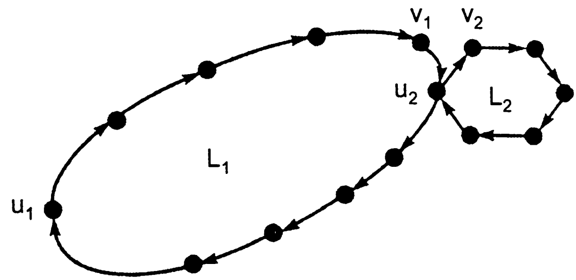


Рис. 163

Предположим, что в орграфе остались дуги, не вошедшие в маршрут L_1. Рассмотрим дугу (u_2, v_2), причем u_2 принадлежит L_1, а v_2 не принадлежит L_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины v_2 и u_2. Вместе с дугой (u_2, v_2) он будет образовывать маршрут L_2, который начинается и оканчивается в вершине v_2. Объединим маршруты L_1 и L_2 в один маршрут L (см. рис. 163). (Возможно, что маршруты имеют общие ребра.)

Если маршрут L не содержит все дуги орграфа G, то увеличим его с помощью некоторого маршрута L_3, и так до тех пор, пока не получим нужный маршрут. Этот маршрут и будет соответствовать маршруту патрулирования. ▷

221 В одном государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением. Оказалось, что при появлении любой новой дороги с односторонним движением между городами, которые до этого не были соединены дорогами, стало возможным добраться из любого города в любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность была и до появления новой дороги.

Решение. Города и дороги государства задают ориентированный граф G. Новый орграф, получившийся из G добавлением дуги между любыми несмежными вершинами, является сильносвязным. Необходимо доказать, что орграф G также сильносвязный.

Пусть в орграфе G существуют вершины u и v, не соединенные путем. Из условия задачи следует, что после добавления дуги (w_1, w_2), которой не было в орграфе G, в получившемся орграфе появляется путь $L_1 = (u, \ldots, w_1, w_2, a, b, \ldots, v)$ из вершины u в вершину v. Но путь $L_2 = (u, c, d, \ldots, w_2, w_1, \ldots, v)$ из u в v появляется и при добавлении дуги (w_2, w_1). Тогда путь $L = (u, c, d, \ldots, w_2, a, b, \ldots, v)$ соединяет вершины u и v в орграфе G, что противоречит начальному предположению.

Следовательно, в орграфе G любая вершина v достижима из любой вершины u, и орграф G сильносвязный. ▷

222 В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый входит только он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — те, кто входит во второй список и те, у кого они выиграли, и т. д. В двенадцатый список входят те, кто входит в одиннадцатый список, и те, у кого они выиграли. Оказалось, что у каждого из участников в его двенадцатый список попал человек, которого не было в одиннадцатом списке. Сколько партий в турнире закончились вничью?

Решение. Зададим ориентированный граф G, в котором вершины будут соответствовать участникам, а дуги обозначать победы одного участника над другим. Списки участников, составляемых каждым участником, для орграфа будут соответствовать спискам вершин, составляемых для каждой вершины. Исследуем свойства орграфа G.

Рассмотрим произвольную вершину v_1 орграфа и списки, составленные для этой вершины. Из v_1 обязательно выходит дуга, так как в противном случае все списки для вершины будут состоять только из нее самой. Из v_1 достижима любая вершина. Если это не так, то двенадцатый список для вершины не будет отличаться от одиннадцатого. Значит, орграф является сильным. Из построения списков следует, что расстояние от v до вершины, которой не было в $(k-1)$-списке и которая появилась в k-м, равно $k-1$. Так как некоторая вершина появляется только в двенадцатом списке, то расстояние до нее равно 11. Следовательно, в орграфе есть цепь $(v_1, v_2, \ldots, v_{12})$, причем других дуг (v_i, v_j) $(i < j)$, кроме дуг-цепи, в орграфе нет. Если рассмотреть вершину v_2, то в одиннадцатом списке для нее нет только вершины v_1, которая должна войти в двенадцатый список. Следовательно, в орграфе есть дуга (v_{12}, v_1).

Существование еще каких-либо дуг, кроме дуг построенного цикла, приведет к тому, что для некоторой вершины u орграфа будет отсутствовать вершина, находящаяся на расстоянии менее 11 от u, и поэтому одиннадцатый и двенадцатый списки для вершины u будут совпадать.

Поэтому каждый участник турнира выиграл только по одной партии, а остальные $12 \cdot 11/2 - 12 = 54$ партии окончились вничью. ▷

223 В стране несколько городов. Между некоторыми из них в одном направлении летают самолеты. Известно, что для двух любых городов A и B можно (используя, если нужно, рейсы между другими городами) или долететь из A в B, или долететь из B в A. Докажите, что

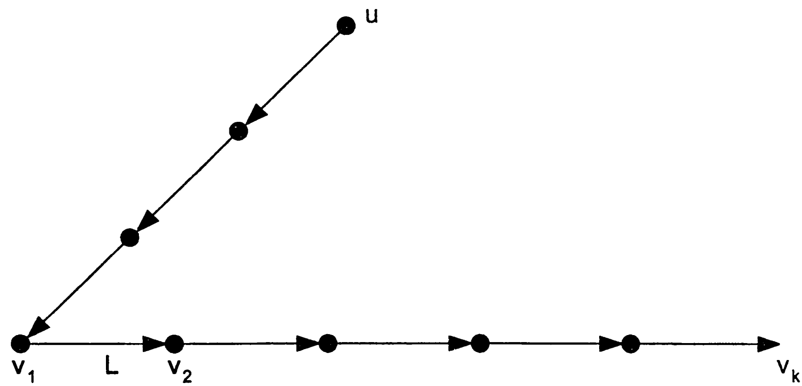


Рис. 164

в этой стране можно, вылетев из некоторого города, побывать во всех остальных.

Решение. Построим орграф авиалиний, в котором вершины будут обозначать города, а дуги — авиалинии между ними.

Орграф называется ***односторонним***, если для любых вершин по крайней мере одна достижима из другой. По условию задачи построенный орграф является односторонним.

Теорема. Граф является односторонним тогда и только тогда, когда в нем есть маршрут, содержащий все вершины орграфа.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим маршрут в орграфе $L = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, содержащий наибольшее число вершин. Так как для любых трех вершин орграфа хотя бы из одной достижимы две другие, то $k \geqslant 3$. Если маршрут содержит все вершины орграфа, то теорема верна.

Пусть существует вершина u, не входящая в L. Если вершина v_1 достижима из вершины u, то в орграфе существует маршрут, содер-

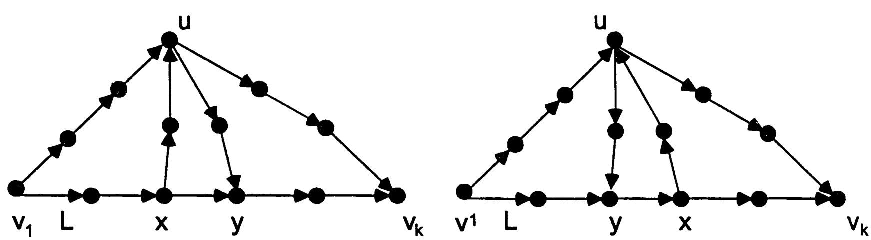


Рис. 165

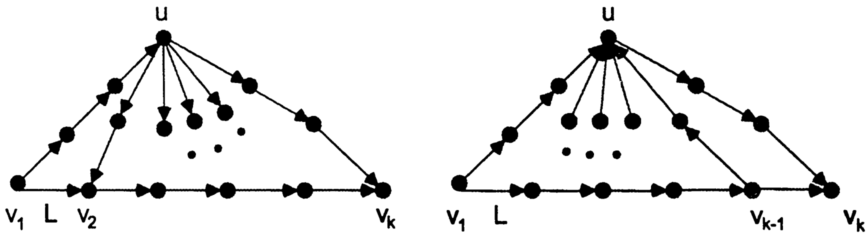


Рис. 166

жащий больше вершин, чем маршрут L, что противоречит выбору L (см. рис. 164). То же произойдет, если вершина u достижима из вершины v_k. Предположим, что это не выполняется.

Рассмотрим две соседние в маршруте L вершины x и y. Если из одной из них (например, вершины x) достижима вершина u, а вторая достижима из u, то в орграфе есть маршрут $L_1 = (v_1, \ldots, x, \ldots, u, \ldots, y, \ldots, v_k)$, содержащее большее число вершин, чем L (см. рис. 165).

Пусть это не выполняется. Тогда в орграфе снова существует маршрут $L_2 = (v_1, \ldots, u, \ldots, v_2, \ldots, v_k)$ или $L_3 = (v_1, \ldots, v_{k-1}, \ldots, u, \ldots, v_k)$ с большим числом вершин, чем L (см. рис. 166).

Достаточность очевидна.

Теорема доказана. □

Из теоремы следует существование в стране нужного маршрута облета городов. ▷

224 В королевстве 30 городов, некоторые из них соединены дорогами, так что из любого города можно доехать в любой другой. Из каждого города выходит не менее двух дорог, и между двумя городами не более одной дороги. Для того чтобы добиться большей безопасности, король Людовик установил на дорогах одностороннее движение так, чтобы в каждый город входила и выходила хотя бы одна дорога. Тем не менее, некоторые города стали недостижимы для проезда из других. Однако король никогда не признает своих ошибок. Чтобы исправить создавшееся положение, он приказал построить новые дороги с односторонним движением. Докажите, что достаточно построить не более 10 дорог.

Решение. Города королевства, его дороги с установленным односторонним движением задают ориентированный граф G. Необходимо доказать, что к графу G можно так добавить не более 10 дуг, чтобы превратить его в сильный орграф.

Сильносвязной компонентой называется максимальный по включению подграф орграфа, который является сильным. (Максимальный по включению подграф — это такой подграф, который не содержится в подграфе с теми же свойствами, но с большим числом вершин или ребер.)

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — сильносвязные компоненты орграфа G. ***Конденсацией*** орграфа G называется орграф G^*, вершины которого $u_1, u_2, \ldots, u_k$ соответствуют сильным компонентам орграфа G, и вершина u_i соединена дугой с вершиной u_j тогда и только тогда, когда в орграфе G есть дуга, выходящая из компоненты G_i и заходящая в компоненту G_j.

На рис. 167 изображен орграф G и его конденсация — орграф G^*. Орграф G имеет 6 сильносвязных компонент: орграфы G_1, порожденный вершинами $\{v_1, v_2, v_3\}$, G_2 — вершинами $\{v_4, v_5, v_6\}$, G_3 — вершинами $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, G_4 — вершинами $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$, G_6 — вершинами$\{v_{16}, v_{17}\}$, сильносвязная компонента G_5 состоит из вершины v_{15}.

Конденсацией сильносвязного орграфа является граф K_1.

Теорема. Конденсация любого орграфа не имеет контуров.

Доказательство. Пусть $C = (u_0, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_0)$ — контур в орграфе G^*. Тогда для любой вершины $v_i \in G_i$ существует маршрут в любую вершина $v_j \in G_j$, а из v_j маршрут в v_i. Но это противоречит максимальности сильносвязных компонент. Теорема доказана. □

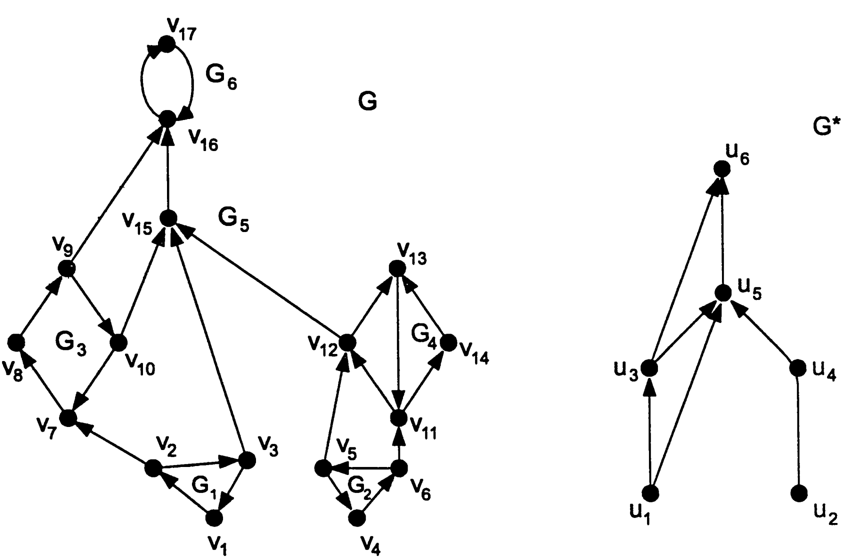


Рис. 167

Сильносвязная компонента будет называться ***концевой***, если в конденсации ей будет соответствовать или вершина с нулевой полустепенью исхода, или с нулевой полустепенью захода.

Для графа G, соответствующего городам и дорогам с односторонним движением королевства, рассмотрим концевые компоненты. Поскольку для любой ее вершины в нее входит и выходит ровно одна дуга, и две вершины не могут соединять две дуги, то каждая концевая компонента состоит не менее, чем из трех вершин. Поэтому в орграфе не более 10 концевых компонент. Занумеруем концевые компоненты и соединим некоторую вершину первой из них с некоторой вершиной второй, некоторую вершину второй с некоторой вершиной третьей и т. д., некоторую вершину последней из них с некоторой вершиной первой. Добавив, таким образом, не более 10 дуг, получим сильный орграф.

Добавленные дуги соответствуют дорогам, которые нужно построить. ▷

225 Король Людовик приказал так установить одностороннее движение на дорогах между городами своего королевства, чтобы из каждого города в любой другой можно было проехать не более чем по двум дорогам. Оказалось, что после закрытия любой дороги на ремонт из каждого города по-прежнему можно проехать в любой другой. Докажите, что теперь для этого нужно не более трех дорог.

Решение. Города королевства, его дороги с установленным односторонним движением задают сильный орграф G, в котором расстояние между любыми двумя вершинами не более двух.

Рассмотрим орграф G_1, который получается из графа G после удаления дуги (u, v). Поскольку по условию задачи орграф G_1 сильный, то из вершины u должна выходить хотя бы одна дуга (u, u_0). Но в графе G, а значит и в G_1, существует цепь (u_0, w, v). Поэтому вершины u и v соединяет цепь (u, u_0, w, v), состоящая из трех дуг.

Аналогично рассматривается случай, когда удаление дуги (u, v) разрушает некоторую цепь, состоящую из двух дуг.

Дуги построенных цепей соответствуют нужным дорогам в королевстве. ▷

226 В королевстве более четырех городов. Король Людовик приказал так соединить каждые два города авиалиниями, по которым самолеты летают в одном направлении, чтобы из любого города в любой другой можно было перелететь с помощью не более двух авиарейсов. Докажите, что это можно сделать.

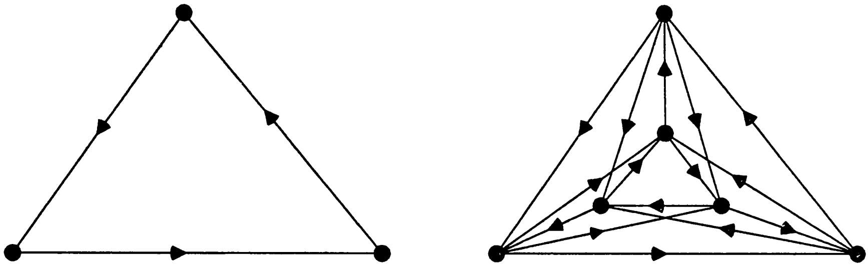


Рис. 168

Решение. Для решения задачи необходимо ориентировать ребра графа K_n $(n > 4)$, чтобы расстояние между двумя любыми вершинами получившегося орграфа оказалось не более двух.

Требуемая ориентация ребер графов K_3 и K_6 представлена на рис. 168.

Схема перехода от ориентации T_n графа K_n к ориентации графа K_{n+2} указана на рис. 169. Для этой цели к орграфу T_n с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ добавим вершины v_{n+1} и v_{n+2} и дуги (v_{n+1}, v_1), (v_{n+1}, v_2), $\ldots$, (v_{n+1}, v_n), (v_1, v_{n+2}), (v_2, v_{n+2}), $\ldots$, (v_n, v_{n+2}) и (v_{n+2}, v_{n+1}).

При $n = 4$ требуемая ориентация невозможна.

Построенная ориентация вершин графа определит направления авиарейсов между городами. ▷

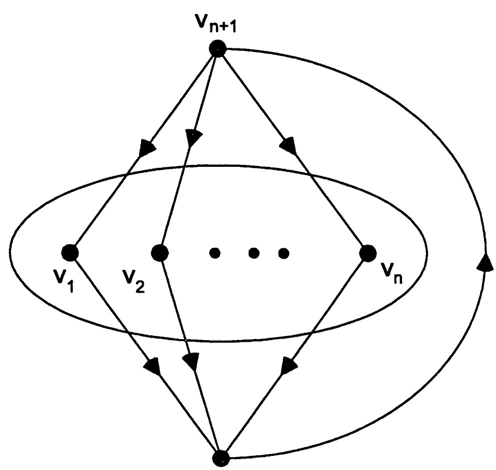


Рис. 169

227 Некоторые города страны соединены авиалиниями, по которым в одном направлении летают самолеты. Известно, что есть город, вылетев из которого нельзя с помощью авиарейсов попасть в какой-то другой город. Докажите, что часть городов (возможно, один город) может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью перелетов из оставшейся части.

Решение. Рассмотрим орграф G авиалиний, в котором вершины будут обозначать города, а дуги — авиалинии между ними.

Основой орграфа называется граф, который получается из орграфа после снятия ориентации с его дуг. Орграф называется ***несвязным***, если его основа — несвязный граф.

Если орграф G является несвязным, то вершины любой компоненты основы определят отделившиеся города.

В противном случае из условия задачи следует, что орграф не является сильносвязным. Построим конденсацию G^* орграфа, которая будет отлична от графа K_1, и рассмотрим ту ее вершину u, в которую не входят дуги. Вершины сильносвязной компоненты орграфа G, соответствующие вершине u конденсации, определят отделившиеся города. ▷

228 В королевстве 30 городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением, установленным так, что из любого города можно доехать в любой другой. Король Людовик выпустил новый декрет, который гонцы повезут из столицы во все города королевства. Докажите, что для этой цели можно использовать не более 29 дорог.

Решение. Города королевства, его дороги с установленным односторонним движением задают сильный орграф G, в котором любые две вершины достижимы одна из другой.

Корневым деревом называется ориентированный граф, в котором ровно в одну вершину, называемую ***корнем***, не входит ни одна дуга, а в любую вершину, отличную от корня, входит ровно одна дуга (рис. 170). Легко доказать, что из корня в любую другую вершину идет ровно один путь.

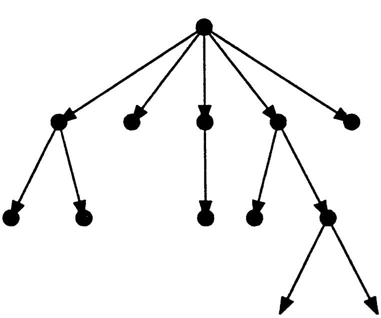


Рис. 170

С помощью индукции покажем, что, выбрав любую вершину сильного орграфа в качестве корня и используя дуги орграфа, можно построить корневое дерево, содержащее все его вершины. Если орграф имеет n вершин, то корневое дерево будет иметь $(n-1)$ дуг (см. задачу 96).

В качестве корня рассмотрим произвольную вершину u_0. Предположим, что некоторая часть T нужного корневого дерева уже построена и ей принадлежат вершины $\{u_0, u_1, \ldots, u_p\}$ и не принадлежат вершины $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$. Орграф является сильным, поэтому существует маршрут из вершины u_0 в любую вершину v_j. Первую дугу этого маршрута, не принадлежащую корневому дереву T, добавим к T. Получим корневое дерево, содержащее на одну вершину и на одну дугу больше, чем T.

Поскольку на каждом шаге после выбора вершины u_0 к дереву будет добавляться одна вершина и одна дуга, то в нем окажется $(n-1)$ дуг.

В качестве вершины v_0 выберем вершину орграфа, соответствующую столице. Дуги построенного корневого дерева определят нужные 29 дорог. ▷

229 В один день оказалось, что каждый житель города позвонил по телефону не более одного раза. Докажите, что население города можно разбить на три группы так, что никакие два жителя, входящие в одну группу, не разговаривали между собой.

Решение. Рассмотрим орграф G, в котором вершины будут обозначать жителей, а дуга (u, v) существовать в том случае, если житель, соответствующий вершине u, позвонил жителю, соответствующему вершине v. По условию задачи полустепень исхода каждой вершины орграфа не более 1. Для решения задачи нужно доказать, что вершины орграфа можно разделить на три подмножества так, что в каждом из подмножеств не будет смежных вершин. Для этого используем математическую индукцию.

Доказываемое утверждение верно, если в орграфе не более трех вершин. Пусть в орграфе n вершин, и утверждение верно для орграфа с $n-1$ вершиной.

Так как из каждой вершины выходит не более одной дуги, то в орграфе не более n дуг. Пусть дуг p штук, тогда $p \leqslant n$. Рассмотрим основу T орграфа G. Докажем, что в основе T существует вершина u, степень которой не больше двух. Предположим обратное: все вершины основы имеют степень больше двух. Тогда из леммы о рукопожатиях вытекает, что $2p = d_1 + d_2 + \ldots + d_n > 2n$. (Здесь $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — степени вершин основы). Отсюда следует, что $p > n$. Получено противоречие.

По индуктивному предположению вершины орграфа без вершины u можно разбить нужным образом на три подмножества. Поскольку вершина u будет смежной самое большее с двумя вершинами v и w

орграфа, то ее можно отнести к множеству, которому не принадлежат вершины v и w.

Разбиение вершин орграфа на множества определяет разбиение жителей на группы. ▷

230 В один день оказалось, что каждому жителю города позвонили по телефону не более одного раза. При этом получилось так, что в городе не существовало такой цепочки жителей, в которой первый житель позвонил второму, второй — третьему, ..., предпоследний — последнему, а последний первому. Докажите, что население города можно разбить на две группы так, что никакие два жителя, входящие в одну группу, не разговаривали между собой.

Решение. Рассмотрим орграф G, как в предыдущей задаче. В орграфе существует вершина u, в которую не входят дуги. В противном случае в орграфе будет контур (доказательство этого факта аналогично доказательству наличия цикла в задаче 94), которого по условию не может быть.

Рассмотрим подграф H, порожденный вершиной u и всеми вершинами, достижимыми из u. Так как в каждую вершину подграфа входит ровно одна дуга, то H — корневое дерево. Поэтому орграф G является объединением корневых деревьев, а основа орграфа G — объединение деревьев.

Каждое дерево — граф без циклов, и поэтому по теореме Кенига это двудольный граф. Следовательно, вершины орграфа G можно разбить на два подмножества так, что в каждом из подмножеств не будет смежных вершин.

Разбиение вершин орграфа на множества определяет разбиение жителей на группы. ▷

231 В королевстве 30 городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением, установленным так, что из любого города можно доехать в любой другой. Король Людовик приказал закрыть часть дорог на ремонт, однако при этом потребовал, чтобы по оставленным дорогам можно также было проехать из любого города в любой другой. Докажите, что для этого в королевстве можно оставить не более 58 дорог.

Решение. Города королевства, его дороги с установленным односторонним движением задают ориентированный граф G, который является сильносвязным.

Докажем, что *в сильносвязном орграфе G с n-вершинами существует сильносвязный остовный подграф орграфа G, содержащий не более $2n-2$*

дуг. (Определение остовного подграфа для орграфа дается аналогично определению остовного подграфа графа.)

Возьмем произвольную вершину u_0 орграфа G и построим корневое дерево T_1 с корнем в этой вершине (см. задачу 228). Затем поменяем ориентацию дуг орграфа G и в получившемся орграфе построим корневое дерево T_2 с корнем в вершине u_o. Объединим деревья T_1 и T_2 и получим остовный подграф T. Так как каждое дерево содержит по $(n-1)$ дуг, то подграф будет содержать $(2n-2)$ дуг. С помощью дуг дерева T_1 можно построить маршрут из вершины u_0 в любую вершину u_i, а с помощью дуг дерева T_2 — из любой вершины u_j в вершину u_0. Следовательно, T — требуемый подграф.

Дуги подграфа T определяют 58 дорог, которые следует оставить при ремонте. ▷

232 Король Людовик не доверяет своим придворным. Он составил их список и приказал каждому следить за одним из остальных. При этом первый придворный следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим, и т. д., предпоследний следит за тем, кто следит за последним, последний следит за тем, кто следит за первым. Докажите, что у Людовика нечетное число придворных.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф G, вершины которого задают n придворных, а дуга (u, v) существует тогда и только тогда, когда придворный, соответствующий вершине u, следит за придворным, соответствующим вершине v. По условию задачи полустепень исхода каждой вершины орграфа равна полустепени ее захода и равна 1. Это означает, что орграф G является контуром.

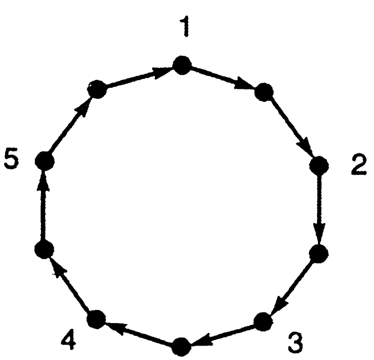


Рис. 171

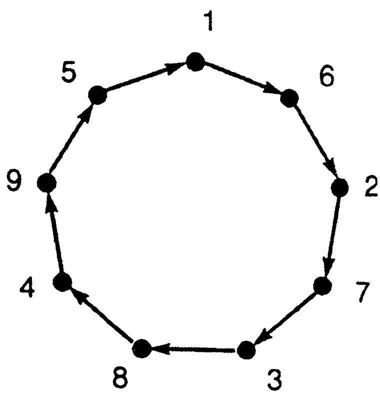


Рис. 172

Предположим, что орграф имеет четное число вершин. В этом случае получается, что придворный $n/2$ следит за тем, кто следит за первым придворным, что невозможно (см. рис. 171, где $n = 10$).

Поэтому в орграфе G нечетное число вершин (см. рис. 172, где $n = 9$), а у короля Людовика нечетное число придворных. ⊳

233 В городе так установлено одностороннее движение по улицам, что на каждый перекресток можно въехать и с каждого перекрестка можно выехать. Тупиков в городе нет. Докажите, что в городе есть квартал, который можно объехать, не нарушая установленного направления движения.

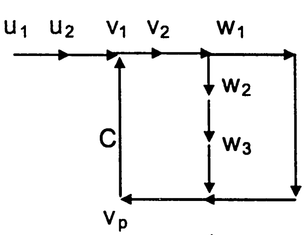
Решение. Рассмотрим орграф G, задающий движение в городе. Основой орграфа является плоский граф. Для решения задачи нужно доказать, что в нем существует внутренняя грань, которую можно обойти, двигаясь все время в соответствии с ориентацией ее ребер.

Возьмем произвольную вершину u_1. Так как из u_1 выходит хотя бы одна дуга, то по этой дуге можно перейти в некоторую вершину u_2, затем в вершину u_3 и т. д. Поскольку число вершин в орграфе конечно, то, в конце концов, мы попадем в такую вершину, в которой были раньше, т. е. построим некоторый контур $C = (v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1)$. Если контур ограничивает часть плоскости, содержащую ровно одну грань, то эта грань определяет нужный квартал.

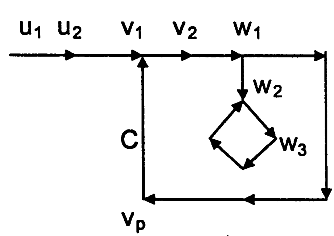
Докажем, что в противном случае можно построить контур, ограничивающий часть плоскости, содержащую меньшее число граней, чем контур C.

Если контур ограничивает часть плоскости S, содержащую несколько граней, то существует вершина контура w_1, из которой выходит дуга (w_1, w_2) в S, или входит дуга (w_2, w_1) из S. Рассмотрим первый случай. (Второй случай рассматривается аналогично.)

Из w_2 по некоторой дуге можно перейти в вершину w_3, затем в вершину w_4 и т. д. Переходя от вершины к вершине, можно или



а)



б)

Рис. 173

попасть в некоторую вершину контура C (см. рис. 173 *а*), или вновь в некоторую ранее пройденную вершину w_i (см. рис. 173 *б*). В каждом из этих случаев будет построен контур, ограничивающий часть плоскости, содержащую меньше граней, чем контур C.

Поступая подобным образом, построим контур, ограничивающий часть плоскости, содержащую ровно одну грань. Эта грань определит нужный квартал города. ▷

234 В городе после установления одностороннего движения оказалось, что число улиц, по которым можно въехать на каждый перекресток, равно числу улиц, по которым можно из него выехать. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования, который начинается и оканчивается в одном месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками ровно один раз.

Решение. Рассмотрим орграф G, задающий движение в городе. Цикл, содержащий каждую дугу орграфа, называется ***эйлеровым***. Орграф называется ***связным***, если от любой его вершины до любой другой можно перейти по дугам без учета их ориентации. Связный орграф называется ***эйлеровым***, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема. Связный орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для каждой его вершины v выполняется равенство

$$d^+(v) = d^-(v).$$

Теорема доказывается точно так, как теорема в задаче 128.

Из условия задачи следует, что для вершин графа G выполняется равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Следовательно, граф G эйлеров, и эйлеров цикл определит нужный маршрут патрулирования. ▷

235 На плоскости отмечено конечное число точек. Некоторые пары точек являются началами и концами векторов, причем число векторов, входящих в любую точку, равно числу векторов, выходящих из нее. Найдите сумму векторов.

Решение. Точки плоскости вместе с векторами образуют орграф G.

Теорема. Связный орграф G эйлеров тогда и только тогда, когда G является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — эйлеров орграф. Рассмотрим его любую вершину u_1. Выйдем из вершины u_1 по некоторой дуге (u_1, u_2). Это возможно сделать, так как орграф G связный. Поскольку $d^+(u_2) = d^-(u_2)$, то из вершины u_2 можно выйти по дуге

(u_2, u_3). Орграф G имеет конечное число вершин, поэтому, в конце концов, мы попадем в некоторую вершину w, в которой были раньше. Часть цепи, которая начинается и оканчивается в вершине w, является контуром C_1. Удалим дуги контура C_1 из орграфа G. В получившемся орграфе G_1 (возможно, несвязном) полустепени вершин, принадлежавших C_1, уменьшились на единицу, полустепени остальных вершин не изменились. Следовательно, для любой вершины v орграфа G будет выполняться равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Поэтому в орграфе G_1 можно выделить контур C_2 и т. д.

Достаточность доказывается путем объединения контуров в эйлеров цикл (см. доказательство теоремы в задаче 130).

Теорема доказана. □

Возможно, орграф G, задающий векторы в нашей задаче, не является связным. Применив доказанную теорему к каждой связной части орграфа, получим разбиение векторов на контуры. Сумма векторов, принадлежащих одному контуру, равна нулю. Следовательно, сумма всех векторов равна нулевому вектору. ▷

236 Подруга Маши уехала в командировку и попросила Машу полить цветы в своей квартире. Подойдя к подъезду дома, где жила подруга, Маша обнаружила, что забыла записку с кодом замка входной двери. Маша помнила, что код состоит из трех цифр, и если в любой последовательности цифр окажется нужная последовательность из трех цифр, то замок откроется. Найдите наименьшее количество цифр, которые нужно набрать Маше, для того чтобы заведомо открыть дверь.

Решение. Для того чтобы открыть дверь, следует набрать три цифры в нужной последовательности. Всех трехзначных чисел (кодов) — тысяча. Если набирать каждый код отдельно, то придется набрать 3000 цифр. Поэтому следует придумать такой процесс набора, чтобы каждый раз две последних цифры одного кода являлись двумя первыми цифрами второго.

Рассмотрим следующий ориентированный граф G. Вершинами орграфа будут упорядоченные пары цифр (i, j). В вершину (i, j) входят дуги из вершин $(0, i), (1, i), \ldots, (9, i)$, и из вершины (i, j) выходят дуги в вершины $(j, 0), (j, 1), \ldots, (j, 9)$ (см. пример на рис. 174). В орграфе G будет 100 вершин. Так как из каждой вершины орграфа выходит ровно 10 дуг, то в орграфе 1000 дуг.

Для орграфа G число входящих в каждую вершину дуг равно числу выходящих дуг, поэтому, согласно теореме, доказанной в задаче 234, в орграфе G существует эйлеров цикл.

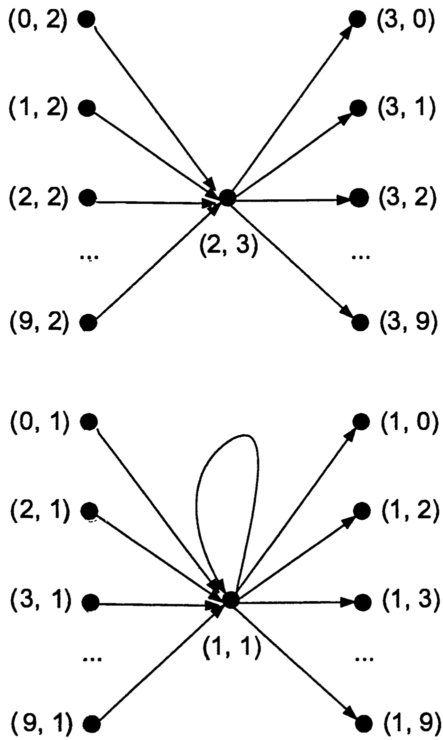


Рис. 174

Прохождения маршрута в орграфе определяет некоторую последовательность цифр. Так, например, маршруту $((2, 3), (3, 6), (6, 7))$ будет соответствовать последовательность $(2, 3, 6, 7)$, а маршруту $((6, 8), (8, 6), (6, 6), (6, 3))$ — последовательность $(6, 8, 6, 6, 3)$. Любому коду (i, j, k) будет соответствовать ровно одна дуга: $((i, j), (j, k))$, и каждая дуга будет определять один код. Поэтому, для того чтобы перебрать все коды, необходимо перебрать все дуги орграфа.

Построим эйлеров цикл $C = ((i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{998}, i_{999}), (i_{999}, i_0), (i_0, i_1))$ в орграфе G, который будет содержать 1000 дуг, и соответствующую ему последовательность цифр $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{998}, i_{999}, i_0, i_1)$. При прохождении начальной вершины цикла набираются две цифры, а при прохождении каждой последующей дуги — одна. Поэтому Маше достаточно набрать 1001 цифру. ▷

237 В национальном парке посетители знакомятся с жизнью диких животных из окон автомобиля. На дорогах парка установлено одностороннее движение. В парк можно попасть через ворота A и ворота B. Известно, что число дорог, по которым можно отъехать от ворот A, на одну больше, чем дорог, по которым можно приехать к ним, число дорог, по которым можно приехать к воротам B, на одну больше, чем число дорог, по которым можно отъехать от них, а для любого другого перекрестка парка число входящих дорог равно числу выходящих. Можно ли заехать в парк через ворота A, проехать по каждой дороге ровно один раз и выехать из парка через ворота B?

Решение. Рассмотрим орграф G, который задает схему движения по дорогам парка. Соединим вершину b, которая соответствует воротам B, с вершиной a, которая соответствует воротам A, дугой (b, a). В полученном связном орграфе для любой вершины ее полустепени исхода и захода равны, и поэтому в нем существует эйлеров цикл. Удалив из цикла добавленную ранее дугу (b, a), получим цепь, которая определит нужный маршрут путешествия по парку. ▷

238 Король Людовик приказал так установить одностороннее движение по улицам своей столицы, что число улиц, по которым можно въехать на любой перекресток, не более чем на одну отличается от числа улиц, по которым можно уехать с него. Докажите, что это возможно.

Решение. Пусть граф G задает перекрестки и улицы города. Если граф G эйлеров, то найдем эйлеров цикл и ориентируем все ребра графа в направлении этого цикла.

Если граф G не эйлеров, то превратим его в эйлеров мультиграф G_1, разбив вершины нечетных степеней на пары и соединив вершины в парах ребрами (см. задачу 134). Найдем эйлеров цикл в G_1 и ориентируем ребра в направлении цикла. Для каждой вершины v орграфа G_1 будет выполняться равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Удалим из G_1 добавленные дуги. Так как для каждой вершины будет удалено не более одной дуги, входящей или выходящей, то для любой вершины v графа G будет выполняться соотношение $|d^+(v) - d^-(v)| \leqslant 1$.

Построенная ориентация ребер определит движение по улицам города. ▷

239 В городе двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую. Докажите, что в городе можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города можно будет проехать в любую.

Решение. Рассмотрим граф G, задающий улицы и перекрестки города. Для решения задачи необходимо построить такую ориентацию ребер графа G, чтобы получившийся орграф был сильным.

В графе G нет мостов, так как в противном случае ориентация моста привела бы к отсутствию маршрутов между некоторыми вершинами получившегося орграфа. (Введение одностороннего движения на дороге, соответствующей мосту, привело бы к разделению города на две такие части, что из одной из них проехать во вторую стало бы невозможно.)

Выделим в графе G произвольный цикл C и ориентируем ребра цикла по направлению цикла. Полученный граф G имеет ориентированные ребра (дуги) и неориентированные ребра. Такой граф называется ***смешанным***.

Если цикл содержит все вершины графа, то, ориентировав произвольным образом остальные ребра графа, получим нужную ориентацию.

Пусть цикл содержит не все вершины графа G. Рассмотрим такое неориентированное ребро (u, v), что u принадлежит, а v не принадлежит циклу. Удалим из графа G ребро (u, v). Поскольку в исходном графе не было мостов, то граф, получившийся после удаления ребра, — связный, и в нем есть цепь L, соединяющая вершину v с некоторой вершиной w цикла. Ориентируем ребро (u, v) и цепь L по направлению от u к w (см. рис. 175).

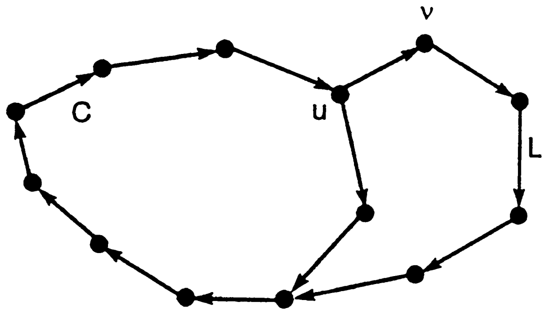


Рис. 175

Аналогичную ориентацию ребер будем проводить до тех пор, пока в каждую вершину графа не будет входить (а значит, и выходить) хотя бы одна дуга. Оставшиеся ребра ориентируем произвольным образом. Полученная ориентация ребер определит направление движения по улицам города. ▷

240 Сетевой график задает порядок выполнения работ. Он представляет собой ориентированный граф, вершины которого обозначают работы, а дуга (u, v) существует в орграфе тогда и только тогда, когда выполнение работы v может начаться непосредственно после окончания выполнения работы u.

Докажите, что выполняемые работы можно занумеровать так, что если выполнение работы u будет предшествовать выполнению работы v, то вершина u будет иметь номер меньше, чем вершина v.

Решение. Очевидно, что орграф G, представляющий сетевой график, не имеет контуров, так как в противном случае какая-то работа предшествовала бы сама себе. В орграфе G обязательно есть такая вершина u_1, в которую не входит ни одна дуга. Если такой вершины нет, то в орграфе возможно построение контура подобно построению цикла в задаче 94. Присвоим вершине u_1 номер 1. Вычеркнем эту вершину вместе с выходящими из нее дугами из орграфа. В получившемся орграфе по той же причине, что и раньше, существует вершина u_2, в которую не входит ни одна дуга. Присвоим вершине u_2 номер 2 и вычеркнем ее вместе с выходящими из нее дугами. Этот процесс можно продолжить до присвоения номеров всем вершинам орграфа.

Нумерация вершин орграфа, при которой начало каждой дуги имеет номер меньший, чем ее конец, называется ***топологической сортировкой*** вершин орграфа. ▷

241 В стране некоторые города соединены между собой авиалиниями, причем перелеты осуществляются только в одном направлении. Известно, что, вылетев из любого города, нельзя вернуться в него этими авиалиниями. Докажите, что можно так дополнить систему авиалиний, что каждый город будет соединен с каждым, но, тем не менее, вылетев из любого города, нельзя будет вернуться в него авиалиниями.

Решение. Рассмотрим орграф авиалиний. Из условия задачи вытекает, что в орграфе нет контуров. Поэтому можно произвести топологическую сортировку вершин орграфа (см. задачу 240). После сортировки следует провести все дуги из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером. Проведенные дуги определят добавляемые авиалинии. ▷

242 Докажите, что если победитель турнира по волейболу, проведенного по круговой системе, проиграл команде B, то существует команда C, выигравшая у B, у которой выиграл победитель. (Напомним, что при игре в волейбол нет ничьих.)

Решение. Ориентированный граф называется ***турниром***, если каждая пара его вершин соединена ровно одной дугой. Этот класс графов получил свое название в связи со спортивными турнирами без ничьих, проводимыми по круговой системе. Результаты встреч можно описать орграфом, вершины которого соответствуют участникам соревнований, а дуга (u, v) есть в орграфе, если участник, соответствующий вершине u, выиграл у участника, соответствующего вершине v.

Рассмотрим турнир T, описывающий волейбольный турнир. Пусть вершина a соответствует победителю турнира, а вершина b — команде B, выигравшей у победителя. Полустепень исхода вершины a не меньше, чем полустепень исхода вершины b, так как в противном случае победителем оказалась бы команда B. В орграфе есть дуга, выходящая из b и заходящая в a.

Рассмотрим вершины $c_1, c_2, \ldots, c_p$, в которые заходят дуги, выходящие из вершины a. Если в каждую из этих вершин заходит дуга, вышедшая из b, то полустепень исхода вершины b будет больше, чем полустепень исхода вершины a, что невозможно. Поэтому существует некоторая вершина c_i, выходящая из которой дуга заходит в вершину b. Команда, соответствующая вершине c_i, и будет нужной командой C. ▷

243 Чемпионат по волейболу прошел по круговой системе. Оказалось, что среди любого множества команд есть команда, выигравшая у всех остальных команд из этого множества, и команда, проигравшая всем остальным командам из этого множества. Докажите, что все команды одержали разное количество побед.

Решение. Предположим, что существуют две команды, одержавшие одинаковое число побед. Из предыдущей задачи следует, что найдутся три такие команды A, B и C, что команда A выиграла у B, B — у C, C — у A. Это противоречит условию задачи. ▷

244 Двенадцать волейбольных команд провели турнир в один круг. Докажите, что найдутся три такие команды, что любая команда из девяти оставшихся проиграла хотя бы одной из этих трех команд.

Решение. Рассмотрим орграф, описывающий турнир. Для решения задачи нужно доказать, что в турнире можно выбрать три такие вершины, что в каждую из остальных девяти вершин приходит хотя бы одна дуга из выбранных вершин.

Всего в орграфе $12 \cdot 11/2 = 66$ дуг, поэтому существует вершина v_0, из которой выходит 6 дуг: $(v_0, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_6)$. (В противном случае в орграфе оказалось бы меньше 66 дуг). Рассмотрим множество U из пяти оставшихся вершин (кроме вершин $v_0, v_1, \ldots, v_6$). Эти вершины соединены между собой $5 \cdot 4/2 = 10$ дугами. Следовательно, среди них существует вершина u_0, из которой выходят дуги (u_0, u_1), (u_0, u_2) хотя бы в две вершины множества U. И наконец, рассмотрим две оставшиеся вершины w_1 и w_2 из множества U. Из одной из них идет дуга в другую, например из w_1 в w_2. Вершины v_0, u_0, w_1 образуют нужную тройку вершин. ▷

245 Организаторы волейбольного турнира, проводимого по круговой системе, объявили следующее условие для его участников: после окончания турнира каждая команда получает от оргкомитета a^2 условных единиц денег и сдает в оргкомитет b^2 условных единиц, где a — число побед команды, b — число ее поражений. Много ли денег заработает оргкомитет?

Решение. Докажем, что для любого турнира выполняется соотношение:

$$\sum_v (d^+(v))^2 = \sum_v (d^-(v))^2,$$

где $d^+(v)$ — полустепень исхода вершины v, $d^-(v)$ — полустепень захода вершины v.

Если в графе n вершин, то для любой вершины орграфа выполняется соотношение $d^+(v) + d^-(v) = n - 1$. Поэтому, учитывая, что $\sum_v \left(d^-(v)\right) = n(n-1)/2$, получаем

$$\begin{aligned}\sum_v \left(d^+(v)\right)^2 &= \sum_v \left((n-1) - d^-(v)\right)^2 = \\ &= \sum_v (n-1)^2 - 2(n-1)\sum_v \left(d^-(v)\right) + \sum_v \left(d^-(v)\right)^2 = \\ &= n(n-1)^2 - 2(n-1)\frac{n(n-1)}{2} + \sum_v \left(d^-(v)\right)^2 = \\ &= \sum_v \left(d^-(v)\right)^2.\end{aligned}$$

Соотношение доказано.

Поскольку в решаемой задаче для каждой вершины $d^+(v) = a$, $d^-(v) = b$, то доходы оргкомитета будут нулевыми. ▷

246 Докажите, что после окончания волейбольного турнира, проведенного по круговой системе, можно или упорядочить команды таким образом, что первая выиграла у второй, вторая — у третьей, третья — у четвертой и т. д., предпоследняя — у последней, а последняя — у первой, или добиться этого после изменения результата всего одной игры.

Решение. Для решения задачи сначала докажем, что в любом турнире существует путь, содержащий каждую вершину турнира ровно один раз. Такой путь будет называться ***гамильтоновым путем***.

Очевидно, что для любых трех вершин турнира T можно найти путь, содержащий эти вершины. Покажем, что любой построенный в турнире путь, содержащий менее n вершин, можно увеличить на одну вершину. Пусть $L = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ — путь, содержащий k вершин. Предположим, что существует вершина u, не принадлежащая L. Так как орграф T является турниром, то вершины v_1 и u соединены дугой. Если это дуга (u, v_1), то в T существует путь $L_1 = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, содержащий $(k + 1)$ вершину.

Теперь предположим, что это дуга (v_1, u). Рассмотрим вершины v_2 и u. Если эти вершины соединяет дуга (u, v_2), то в T существует путь $L_1 = (v_1, u, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k)$, содержащий $(k + 1)$ вершину. Если эти вершины соединяет дуга (v_2, u), то рассмотрим вершины u и v_3 (см. рис. 176). Об этой паре вершин можно сказать то же самое, что о предыдущей.

Можно сделать вывод: если v_i — первая такая вершина в списке $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$, что существует дуга (u, v_i), то турнир T содержит путь $L_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_i, \ldots, v_k)$; если для любой вершины v_i пути L существует дуга (v_i, u), то турнир T содержит путь $L_1 = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, u)$. В каждом из этих путей на одну вершину больше, чем в пути L.

Процесс увеличения пути можно продолжить до получения в турнире T пути $L = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, содержащего каждую вершину турнира. Если в турнире есть дуга (v_n, v_1), то нужный порядок команд

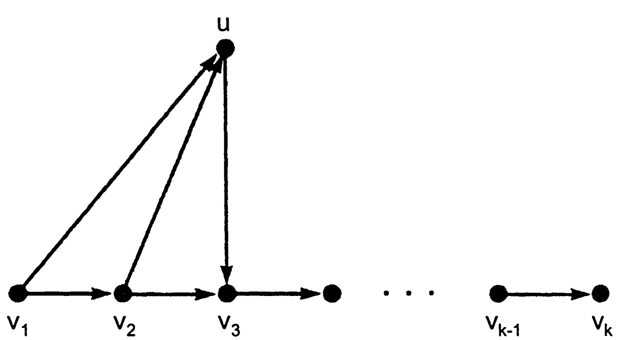


Рис. 176

задается порядком вершин пути L. Если в турнире есть дуга (v_1, v_n), то изменим результат встреч между командами, соответствующими этим вершинам. Теперь порядок вершин измененного пути и задаст нужный порядок команд. ▷

247 Король Людовик приказал соединить любые два города своего королевства авиалиниями, по которым самолеты летают только в одном направлении. Докажите, что существует город, вылетев из которого можно облететь все королевство, побывав в каждом городе ровно один раз.

Решение. Существование нужного маршрута облета доказывается так, как в предыдущей задаче. ▷

248 Король Людовик приказал соединить любые два города своего королевства авиалиниями, по которым самолеты летают только в одном направлении. Для улучшения управляемости государством король хочет поместить свою резиденцию в таком городе страны, из которого легче всего добраться до остальных городов. Докажите, что существует город, из которого можно долететь до остальных городов, используя не более двух авиарейсов.

Решение. Рассмотрим граф авиалиний, в котором вершины будут обозначать города, а дуги — направления авиарейсов между городами. Этот граф является турниром. Для решения задачи нужно доказать, что в турнире существует вершина, расстояние от которой до каждой из остальных вершин не превышает двух.

Это утверждение докажем с помощью математической индукции. В турнире с двумя вершинами оно очевидно.

Пусть турнир T содержит n вершин, и для любого турнира с $n-1$ вершиной утверждение верно.

Удалим из T любую вершину u. Для оставшегося турнира T_1 с $n-1$ вершиной существует вершина v, расстояние от которой до остальных вершин не более двух.

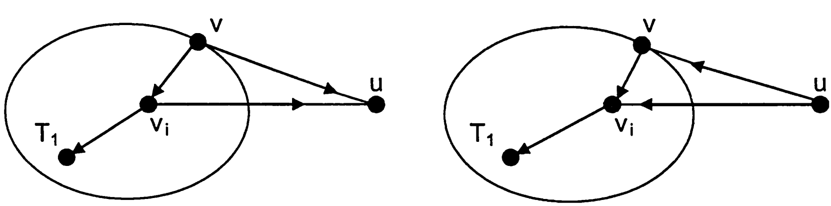


Рис. 177

Если в турнире T существует дуга (v, u) или для одной из вершин v_i, соединенных с вершиной v дугой (v, v_i), существует дуга (v_i, u), то расстояние от вершины v до вершины u в орграфе T будет не более двух. В противном случае нужной вершиной является вершина u (см. рис. 177).

Из доказанного утверждения вытекает существование нужного города в королевстве. ▷

249 В королевстве 30 городов. Король Людовик приказал так соединить авиалиниями города королевства, чтобы каждая пара городов была соединена ровно одной линией, по этой линии самолеты летали только в одном направлении и из каждого города можно было долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Докажите, что для любого числа k ($3 \leqslant k \leqslant 30$) можно организовать авиационное путешествие, начинающееся в любом городе, по маршруту $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ с посадкой в каждом промежуточном пункте ровно один раз.

Решение. Граф, задающий города королевства и направления авиамаршрутов между ними, является сильносвязным турниром.

Теорема. Пусть T — сильносвязный турнир с n вершинами. Тогда для любой его вершины u и для любого числа k ($3 \leqslant k \leqslant n$) в T есть контур длины k, содержащий вершину u.

Доказательство. Обозначим через $S(u)$ множество тех вершин v турнира T, для которых (u, v) является дугой орграфа, и через $P(u)$ множество тех вершин w, для которых (w, u) является дугой орграфа. Поскольку орграф T сильносвязный, то эти множества не будут пустыми. По этой же причине существует хотя бы одна дуга (v, w),

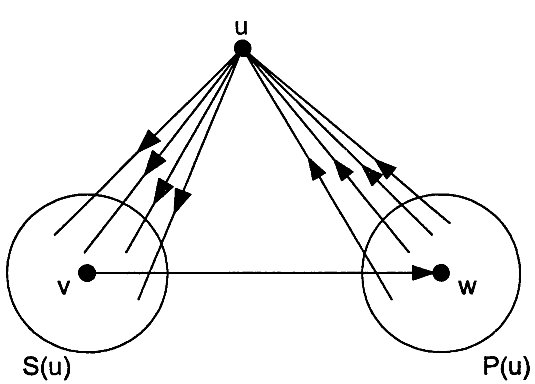


Рис. 178

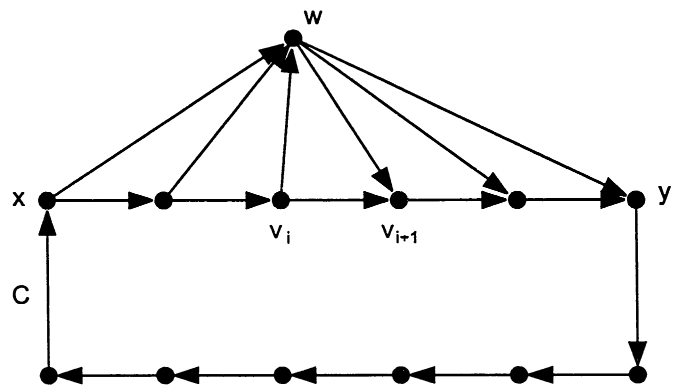


Рис. 179

идущая из $S(u)$ в $P(u)$ (см. рис. 178). Следовательно, вершина u принадлежит контуру, содержащему 3 дуги.

Далее воспользуемся индукцией. Пусть вершина u принадлежит контурам, содержащим k дуг ($3 \leqslant k < n$). Покажем, что она входит в контур, содержащий $k+1$ дугу.

Пусть $C = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$ — контур, которому принадлежит вершина u, содержащий k дуг. Если для некоторой вершины w, не входящей в контур, есть такие вершины контура x и y, что (x, w) и (w, y) — дуги, то существуют две смежные в контуре вершины v_i и v_{i+1}, что (v_i, w) и $(w,\ v_{i+1})$ — дуги. Следовательно, вершина u входит в контур $C_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_i, w, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_0)$, имеющий $(k+1)$ дугу (см. рис. 179).

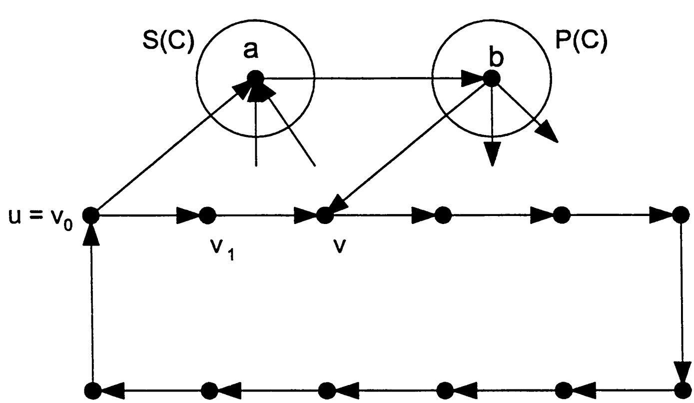


Рис. 180

Если же такой вершины w нет, то множество вершин турнира, не входящих в контур C, можно разбить на две части $S(C)$ и $P(C)$ так, что для любых вершин $a \in S(C)$, $b \in P(C)$ и $v \in C$ дугами являются (v, a) и (b, v). Так как орграф T сильный, то $S(C)$ и $P(C)$ не пусты и существует дуга, идущая из некоторой вершины $a \in S(C)$ в некоторую вершину $b \in P(C)$ (см. рис. 180). Таким образом вершина u входит в контур $C_1 = (v_0, a, b, v_2, \ldots, v_k, v_0)$, содержащий $(k+1)$ дугу.

Теорема доказана. □

Из теоремы следует *существование в сильносвязном турнире контура, содержащего n дуг.* Такой контур называется ***гамильтоновым.*** Ориентированный граф, содержащий гамильтонов контур, называется ***гамильтоновым.***

Из теоремы вытекает возможность нужных авиапутешествий. ▷

250 В королевстве некоторые города соединены дорогами, из каждого города выходит не менее двух дорог, причем из любого города можно проехать в любой другой. Для того чтобы следить за перемещением подданных, король Людовик приказал так установить на дорогах одностороннее движение, чтобы для всех подданных существовала общая дорога, которую проезжал бы каждый подданный, выехавший из своего города и желающий вернуться туда. При этом король готов построить одну новую дорогу. Как установить движение на дорогах?

Решение. Рассмотрим граф дорог и занумеруем вершины так, чтобы у вершины с любым номером (кроме первого и последнего) были смежные вершины с большим и меньшим номерами. Ориентируем ребра от вершин с меньшими номерами к вершинам с большими. Если есть ребро между первой вершиной в нумерации и последней, то ориентируем его от последней вершины к первой. Если такого ребра нет, то проведем его, а затем ориентируем, как уже было сказано ранее.

Пусть

$$L = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$$

— гамильтонов контур турнира T. Если в турнире есть хоть одна дуга вида (v_i, v_{i+2}), $0 \leqslant i \leqslant n-3$, или дуга (v_{n-2}, v_0), или дуга (v_{n-1}, v_1), то нужная вершина существует. Это будет вершина v_{i+1}, или вершина v_{n-1}, или вершина v_0.

Предположим теперь, что в турнире есть только дуги вида (v_{i+2}, v_i), $0 \leqslant i \leqslant n-3$, (v_0, v_{n-2}), (v_1, v_{n-1}).

Тогда, если $(n-1)$ нечетно, то в турнире T_1, получившемся из T после удаления вершины v_0, существует путь $L_1 = (v_{n-1}, v_{n-3}, \ldots, v_1)$ из вершины v_{n-1} в вершину v_1. Если $(n-1)$ четно, то в T_1 существует

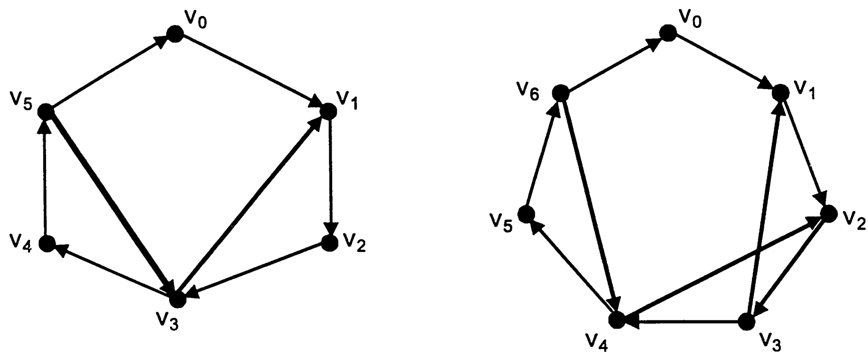


Рис. 181

путь $L_2 = (v_{n-1}, v_{n-3}, \ldots, v_2, v_3, v_1)$ из v_{n-1} в v_1. (См. рис. 181, где $(n-1)$ равно 5 и 6. На рисунке изображены не все ребра турнира.)

Отсюда следует, что орграф T_1 является сильносвязным турниром, и поэтому в нем существует гамильтонов контур.

Следовательно, в королевстве можно выбрать подходящий город для проведения встречи. ▷

251 В королевстве некоторые города соединены дорогами, причем из любого города можно проехать в любой другой. Для того чтобы следить за перемещениями подданных, король Людовик приказал так установить на дорогах одностороннее движение, чтобы для всех подданных существовала общая дорога, которую проезжал бы каждый подданный, выехавший из своего города и желающий опять вернуться туда. При этом король готов идти на расходы по постройке одной новой дороги. Как установить движение на дорогах?

Решение. Рассмотрим граф дорог королевства. Занумеруем вершины и ориентируем ребра от вершин с меньшими номерами к вершинам с большими номерами. Если существует ребро, соединяющее первую вершину в нумерации с последней, то ориентируем ее от последней вершины к первой. Если такого ребра нет, то проведем его, а затем ориентируем, как уже было сказано.

Ориентация ребер задаст направление одностороннего движения по дорогам королевства. ▷

252 После завершения волейбольного турнира, проведенного по круговой системе, оказалось, что никакая команда не проиграла всех встреч. Докажите, что существуют такие три команды A, B и C, что команда A выиграла у команды B, B — у C, C — у A.

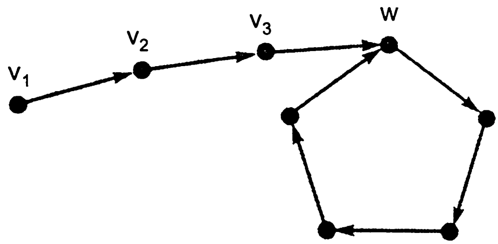


Рис. 182

Решение. Опишем волейбольный турнир орграфом T, как в ранее рассмотренных задачах. Поскольку каждая команда выиграла хотя бы одну встречу, то из любой вершины орграфа выходит хотя бы одна дуга. Необходимо доказать, что в T существует контур, содержащий ровно 3 вершины.

Покажем, что в T существует какой-нибудь контур. Возьмем произвольную вершину v_1 и выйдем из вершины v_1 по дуге (v_1, v_2) и т. д. Поскольку число вершин орграфа конечно, то, в конце концов, мы попадем в некоторую вершину w, в которой были раньше. Часть пройденного нами маршрута от w до w образует контур (см. рис. 182).

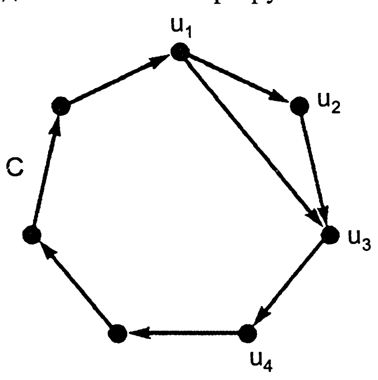


Рис. 183

Рассмотрим построенный контур $C = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, u_1)$. Если он состоит из трех дуг, то вершины контура определяют нужные команды.

Пусть контур состоит более чем из трех дуг. Если в турнире есть дуга (u_3, u_1), то вершины u_1, u_2 и u_3 образуют нужный контур. Если в турнире есть дуга (u_1, u_3), то в нем есть контур $C_1 = (u_1, u_3, \ldots, u_k)$ (см. рис. 183), содержащий меньше дуг, чем контур C.

Подобным образом можно из контура C_1 получить контур C_2, в котором будет меньше дуг, чем в C_1, и, в конце концов, контур, содержащий ровно 3 дуги. Вершины этого контура определят нужные команды. ▷

253 15 волейбольных команд разыграли турнир по круговой системе, причем каждая команда одержала по 7 побед. Сколько окажется в турнире таких троек, команды которые во встречах между собой одержали ровно по одной победе?

Решение. Опишем волейбольный турнир орграфом T, как в предыдущих задачах. Все тройки вершин турнира можно разбить на два типа: тройки, полустепени исхода всех вершин которых равны 1, и тройки, полустепени исхода вершин которых равны 2, 1, 0. Если троек первого типа a, а второго b, то $a + b = C_{15}^3 = 455$.

Поскольку полустепени исхода и захода каждой вершины равны 7, то троек, в которых полустепень исхода данной вершины равна 1, будет 49. В каждой тройке вершин первого типа — 3, в каждой тройке вершин второго типа — одна. Поэтому в произведении $15 \cdot 49$ каждая тройка первого типа участвует трижды, а второго типа — один раз. Поэтому $3a + b = 15 \cdot 49 = 735$. Решив полученную систему, имеем: $a = 140$. Следовательно, требуемых троек команд — 140. ▷

254 В круговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. По окончании турнира оказалось возможным разбить команды на несколько групп: в первой — одна команда, во второй — 2 команды и т. д., в k-й — k команд; при этом суммарное число очков, набранных командами каждой группы, одно и то же. Сколько команд участвовало в турнире?

Решение. Опишем волейбольные соревнования турниром T, в котором вершины разбиты на k групп. Тогда орграф T будет содержать $n = k(k + 1)/2$ вершин и

$$m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(k+1)k(n-1)}{4}$$

дуг. Число дуг, выходящих из вершин одной группы, равно

$$x = \frac{1}{k}\frac{(k+1)k(n-1)}{4} = \frac{(k+1)(n-1)}{4}.$$

	1	2	3	4	5	6
1	•	1	1	1	1	1
2	0	•	1	1	1	1
3	0	0	•	1	1	1
4	0	0	0	•	1	1
5	0	0	0	0	•	1
6	0	0	0	0	0	•

Но первая группа состоит из одной вершины, и из этой вершины не может выходить более $(n-1)$ дуги. Поэтому $(k+1)(n-1)/4 \leqslant n-1$, отсюда $k \leqslant 3$.

Если $k = 2$, то $n = 3$ и $x = 1{,}5$, т. е. на одну группу приходится полторы дуги, что невозможно.

Если $k = 3$, то $n = 6$ и $x = 5$. Например, для соревнований, итоги которых отображены в таблице (см. стр. 213), первая группа — команда 1, вторая — команды 3 и 4, третья — команды 2, 5, 6. ▷

255 Король сказочной страны пригласил на пир людоедов, живущих в его стране. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй — третьего, третий — четвертого и т. д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет съесть никого другого.

Решение. Построим граф G, в котором вершины соответствуют людоедам, а дуга (u, v) существует тогда и только тогда, когда людоед, соответствующий вершине u, хочет съесть людоеда, соответствующего, вершине v.

Удалим из орграфа G минимальное число ребер, так чтобы в оставшемся графе G_1 не было контуров. Для любой вершины v определим метку $t(v)$ как число вершин в наибольшем пути с началом в вершине v в орграфе G_1 (см. рис. 184). Из условий задачи следует, что максимальное значение $t(v)$ равно 6.

Посадим людоеда, соответствующего вершине v, в комнате с номером $t(v)$. Докажем, что в каждой из комнат никто никого не хочет

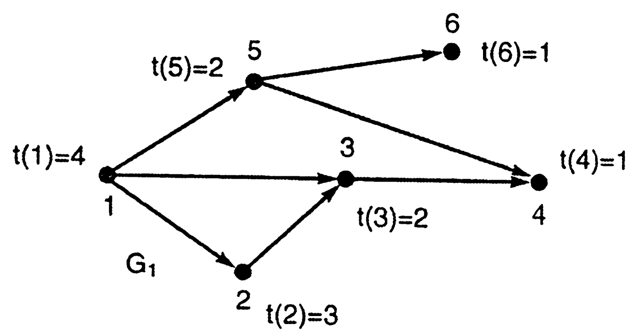


Рис. 184

съесть. Это значит — докажем, что среди вершин с одинаковым номером в орграфе G нет вершин, соединенных дугой.

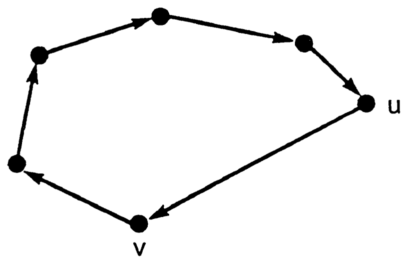


Рис. 185

Действительно, если дуга (u, v) принадлежит G_1, то $t(u) > t(v)$. Если (u, v) — удаленная дуга, то из минимальности числа удаленных дуг следует, что, добавив к G_1 эту дугу, получим орграф G_2 с контуром (см. рис. 185). Поэтому $t(v) > t(u)$.

Следовательно, в каждой из шести комнат никто никого не хочет есть. ▷

256 План города имеет вид, изображенный на рис. 186. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать вправо или вверх. Сколько существует различных путей из A в C.

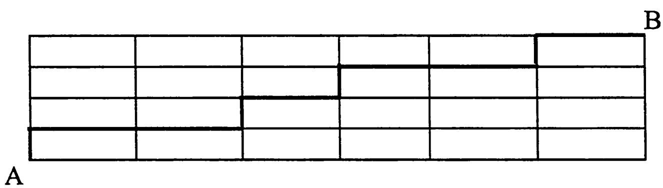


Рис. 186

Решение. Любой путь из A в C содержит 4 вертикальных и 6 горизонтальных отрезков. Сопоставим каждому пути последовательность букв В и Г следующим образом: при прохождении отрезка улицы в вертикальном направлении на схеме напишем В, в горизонтальном направлении — Г. Например, пути, изображенному на рис. 186, соответствует последовательность (В, Г, Г, В, Г, В, Г, Г, В, Г).

Число различных путей из A в C будет равно числу различных последовательностей, содержащих 10 букв (4 буквы В и 6 букв Г). Буквы В можно расположить

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210 \text{ способами.}$$

Столько и будет путей между A и C. ▷

257 В волейбольном турнире, проводимом по круговой системе, участвуют 7 команд. Может ли оказаться, что команды одержали:

а) первая — 6 побед, вторая и третья — по 5, четвертая и пятая — по 2, шестая и седьмая — по одной победе;

б) первая, вторая и третья — по 5 побед, четвертая — 4, пятая и шестая — по одной, седьмая — ни одной победы?

Решение. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: существует ли турнир с семью вершинами, у которого указанные числа будут полустепенями исхода вершин.

В случае а) задача решается просто. Турнир с семью вершинами получается из полного графа K_7 ориентацией каждого ребра. Поэтому сумма полустепеней его вершин равна числу ребер графа K_7, т. е. $(7 \cdot 6)/2 = 21$. Сумма же чисел побед равна 22. Поэтому такого турнира быть не может.

В случае б) сумма чисел побед равна 21, и решение задачи более сложное.

Поставим в соответствие любому волейбольному турниру с n участниками двудольный граф G, в котором доля $A = \{1', 2', \ldots, n'\}$, доля $B = \{1'', 2'', \ldots, n''\}$. Ребро в графе G соединяет вершины i' и j'' тогда и только тогда, когда команда i выиграла у команды j (пример графа G для четырех команд см. на рис. 187).

Степень вершины i' графа G равна числу побед команды i, а степень вершины j'' равна числу поражений команды j. Если волейбольный турнир с указанным числом побед существует, то существует двудольный граф G, у которого степени вершин доли A будут $5, 5, 5, 4, 1, 1, 0$, а доли B — $1, 1, 1, 2, 5, 5, 6$ (числа поражений команд).

От графа G перейдем к графу G_1, соединив каждую пару вершин доли A ребром (см. рис. 188).

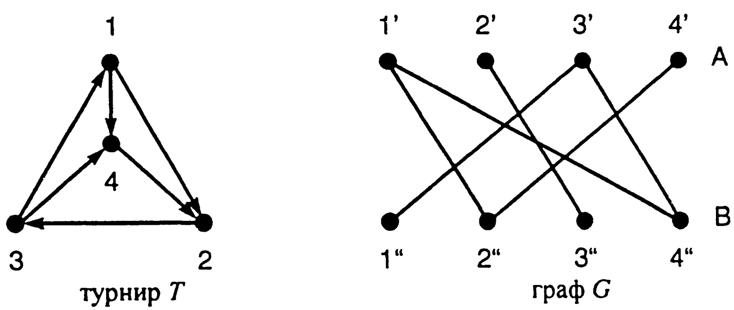


Рис. 187

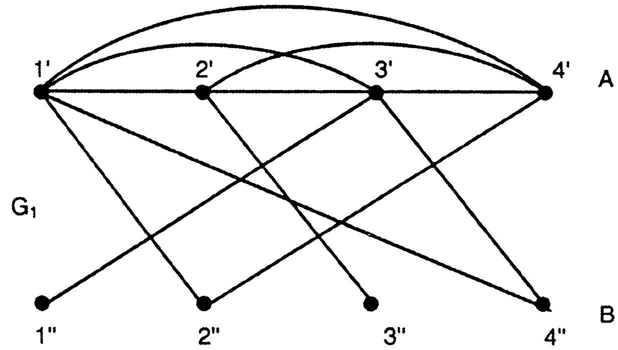


Рис. 188

Если волейбольный турнир с указанным числом побед существует, то существует граф G_1, степени вершин которого будут: 11, 11, 11, 10, 7, 7, 6, 1, 1, 1, 2, 5, 5, 6.

Воспользуемся предложенным в задаче 209 способом проверки графичности последовательности

$$D = (11, 11, 11, 10, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 2, 1, 1, 1).$$

Рассмотрим цепочку последовательностей:

$$D' = (10, 10, 9, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 1, 0, 1, 1),$$
$$D_1 = (10, 10, 9, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 1, 1, 1, 0),$$
$$D_1' = (9, 8, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 0, 0, 1, 0),$$
$$D_2 = (9, 8, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 1, 0, 0, 0),$$
$$D_2' = (7, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 0, -1, 0, 0).$$

Так как в последовательности D_2' появилось отрицательное число, то последовательность D не является графической. Поэтому не существует нужный граф G_1 и, следовательно, волейбольный турнир с указанным числом побед. ▷

258 Сколько можно составить различных комиссий из шести кандидатов, если в комиссии должно быть не менее двух человек?

Решение. Пусть задано некоторое конечное непустое множество V и семейство E различных подмножеств элементов из V. Элементы множества V называются ***вершинами*** гиперграфа, элементы множества E называются ***гиперребрами*** гиперграфа, а пара (V, E), т. е. множество вершин и множество гиперребер, называется ***гиперграфом***.

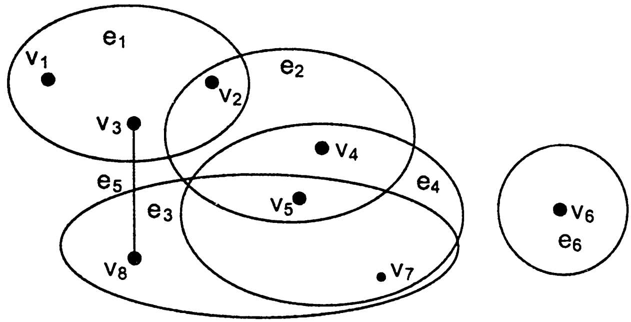


Рис. 189

Граф является частным случаем гиперграфа. Граф — это такой гиперграф, у которого каждое гиперребро содержит ровно две вершины.

На рисунке вершины гиперграфа будем изображать точками, а гиперребра — сплошными линиями, окружающими содержащиеся в них вершины. (Ребро, состоящее из двух вершин, может быть изображено линией, соединяющей эти вершины, как и в случае обычного графа.)

На рис. 189 изображен гиперграф H.

Пусть вершины гиперграфа соответствуют кандидатам. Каждой возможной комиссии будет соответствовать некоторое гиперребро гиперграфа. По условию любое гиперребро содержит не менее двух вершин. Поэтому для решеня задачи мы должны определить число подмножеств множество из шести элементов, причем каждое подмножество содержит не менее двух элементов.

Так как множество из n элементов содержит $2^n - 1$ непустых подмножеств, то таких подмножеств окажется $2^6 - 1 = 63$. Из этого числа нужно вычесть 6 одноэлементных подмножеств. Поэтому возможно составить 57 различных комиссий. ▷

259 В дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят пятеро. Докажите, что нельзя организовать график дежурств так, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

Решение. Рассмотрим гиперграф, вершины которого обозначают дружинников, а гиперребра соответствуют дружинникам, одновременно вышедшим на дежурство. Нужно показать, что не существует гиперграф, имеющий 100 вершин, каждое гиперребро которого состоит ровно из 5 вершин и каждая пара вершин принадлежит ровно одному гиперребру.

Рассмотрим произвольную вершину. Она должна образовывать пары с 99 вершинами. В каждом гиперебре вершина образует 4 пары. Поскольку 99 не делится на 4, то нужный гиперграф не существует.

Следовательно, организовать требуемый график дежурств невозможно. ▷

260 В школе работают 5 кружков, которые посещают 32 ученика одного класса, причем каждый ученик посещает по крайней мере один кружок. Докажите, что существует хотя бы два ученика, посещающие одни и те же кружки.

Решение. Будем считать кружки вершинами гиперграфа и занумеруем их. Тогда множества кружков, которые посещает каждый школьник, образуют гиперребра гиперграфа. Максимальное число различных гиперребер в гиперграфе, имеющем 5 вершин, равно $2^5 - 1 = 31$. Так как гиперребер, соответствующих ученикам, 32, то какие-то два гиперребра совпадают. Эти гиперребра определяют двух учеников, посещающих одни и те же кружки. ▷

261 В школе работают 5 кружков, которые посещают 11 учеников одного класса, причем каждый ученик посещает по крайней мере один кружок. Докажите, что среди них есть двое таких школьников A и B, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

Решение. Будем считать кружки вершинами гиперграфа и занумеруем их. В гиперграфе, имеющем 5 вершин, содержится самое большее 31 несовпадающее гиперребро. Разобьем гиперребра на 10 наборов.

$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\};$

$\{2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\};$

$\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\};$

$\{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\};$

$\{5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\};$

$\{1, 5\}, \{1, 3, 5\};$

$\{2, 3\}, \{2, 3, 5\};$

$\{2, 4\}, \{2, 4, 5\};$

$\{3, 4\}, \{2, 3, 4\};$

$\{4, 5\}, \{1, 4, 5\}.$

В каждом наборе для двух его произвольных гиперребер одно полностью содержит вершины другого.

Выберем 11 гиперребер, соответствующих кружкам, посещаемым 11 школьниками. Поскольку школьников 11, а наборов 10, то из какого-то набора будут выбраны два гиперребра. Вершины одного гиперребра будут содержаться во втором. Эти гиперребра определяют кружки, посещаемые школьниками A и B. ▷

262 Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало по 10 человек, причем никакие из двух членов комиссии не встречались на заседаниях более одного раза. Докажите, что в комиссии более 60 членов.

Решение. Будем считать вершинами гиперграфа членов комиссий, а гиперребрами — сами комиссии. Для решения задачи нужно доказать, что гиперграф, каждое из 40 гиперребер которого содержит по 10 вершин, и никакие два гиперребра не пересекаются по двум вершинам, имеет более 60 вершин.

Каждая пара членов может встретиться не более чем на одном заседании. Подсчитаем число пар, которые могли встретиться на заседаниях. На каждом заседании встречается $C_{10}^2 = 45$ пар, а на 40 заседаниях — $45 \cdot 40 = 1800$ пар. Если бы в комиссии было 60 человек, то они образовывали $C_{60}^2 = 60 \cdot 59/2 = 1770$ пар, и некоторые пары встречались бы дважды. Поэтому в комиссии более 60 человек. ▷

263 В стране используются 45 языков, причем каждый житель знает не менее пяти из них. Известно, что любые два жителя могут поговорить друг с другом, возможно с помощью нескольких переводчиков. Докажите, что им для этой цели не требуется более 15 переводчиков.

Решение. Рассмотрим гиперграф, в котором вершинами будут жители, а каждое из 45 гиперребер содержит вершины, соответствующие жителям, знающим определенный язык.

Цепью в гиперграфе называется такая последовательность его вершин и гиперребер $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1})$, что все вершины v_1, $v_2, \ldots, v_{p+1}$ (кроме, возможно, крайних) и все гиперребра $e_1, e_2, \ldots, e_p$ различны и любые вершины v_i и v_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ принадлежат гиперребру e_i. Две вершины гиперграфа называются ***смежными***, если существует такое гиперребро, которому принадлежат эти вершины.

Для решения задачи нужно доказать, что в исследуемом гиперграфе для любых двух вершин существует цепь, содержащая не более 15 промежуточных вершин.

Предположим противное: существуют две вершины w_1 и w_p, цепь между которыми содержит не менее 16 промежуточных вершин $w_2, w_3, \ldots, w_{17}$ и нет цепей с меньшим числом вершин. Любые две несоседние вершины цепи не являются смежными, так как в противном случае соответствующие жители знают один язык, и цепочку переводчиков можно сократить. Поэтому все гиперребра, содержащие вершины $w_1, w_3, w_5, \ldots, w_{17}$, различные и, следовательно, число их не меньше $5 \cdot 9 = 45$. Отсюда вытекает, что каждая вершина $w_1, w_3, w_5, \ldots, w_{17}$ принадлежит ровно пяти гиперребрам.

Значит, вершина w_{18} должна иметь общие ребра с какой-то из ранее рассмотренных вершин. Если такой вершиной будет одна из вершин $w_1, w_3, w_5, \ldots, w_{15}$, то цепь промежуточных вершин между w_1 и w_p можно сократить. Если же вершина w_{18} принадлежит только тем гиперребрам, что и вершина w_{17}, то она имеет общее гиперребро с вершиной w_{16}, так как общее гиперребро с w_{16} имеет вершина w_{17}. В этом случае цепь промежуточных вершин между w_1 и w_p также можно сократить.

Поэтому для переговоров между любыми двумя жителями достаточно 15 переводчиков. ▷

264 В дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя организовать график дежурств так, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

Решение. Как и ранее, будем считать дружинников вершинами гиперграфа. Гиперграф, у которое каждое гиперребро содержит ровно k вершин, называется ***k-униформным***. Необходимо показать, что не существует 3-униформного гиперграфа со 100 вершинами, любые две вершины которого входят ровно в одно гиперребро.

Рассмотрим любую вершину v гиперграфа. Она должна образовать 99 пар с другими вершинами. В каждом гиперребре v образует пары ровно с двумя вершинами. Поскольку 99 не делится на два, то это невозможно.

Поэтому требуемый график дежурств составить не удастся. ▷

265 В депутатской фракции 7 человек. Какое наибольшее число комиссий, любая из которых состоит из четырех депутатов, можно сформировать из членов этой фракции так, чтобы никакие две комиссии не имели более чем двух общих членов?

Решение. Для решения задачи необходимо определить, какое наибольшее число гиперребер может содержать гиперграф, имеющий 7 вершин, причем любые два гиперребра могут пересекаться не более чем по двум вершинам.

Сначала покажем, что никакие две вершины не могут находиться более чем в двух общих гиперребрах. Действительно, если две вершины (1 и 2) находятся, например, в трех общих гиперребрах, то, так как никакие из этих гиперребер больше общих вершин иметь не могут, эти гиперребра содержат 8 вершин ($\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,7,8\}$), что больше количества вершин в гиперграфе.

Предположим, что комиссий 8. Каждая комиссия образует $C_4^2 = 6$ пар, а в восьми комиссиях будет $8 \cdot 6 = 48$ пар. С другой стороны, так как каждая пара депутатов может работать только в двух комиссиях, а 7 депутатов образуют $C_7^2 = 21$ пару, то $21 \cdot 2 = 42$, и возможных пар не хватит, чтобы обеспечить 8 комиссий. Поэтому число комиссий не должно превышать 7.

Сформировать ровно 7 комиссий возможно: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,3,6,7\}$, $\{1,4,5,7\}$, $\{2,3,5,7\}$, $\{2,4,6,7\}$, $\{3,4,5,6\}$. ▷

266 Переводчики Иванов, Петров, Сидоров, Матвеев, Фролов обслуживают международную конференцию, на которой используются английский, французский, немецкий, арабский и китайский языки. Арабский и китайский языки знают по три переводчика, остальные языки — по четыре. Кроме того, Иванов, Петров и Фролов знают по три языка, Сидоров — четыре. Сколько языков знает Матвеев?

Решение. ***Степенью*** $d(v)$ вершины v гиперграфа называется число гиперребер, содержащих эту вершину. ***Степенью*** $|e|$ гиперебра e называется число вершин, содержащихся в гиперребре.

Лемма о рукопожатиях для гиперграфов. Сумма степеней вершин гиперграфа равна сумме степеней его гиперебер.

Доказательство. Зададим гиперграф H, имеющий n вершин и p гиперребер, в виде таблицы (*матрицы*) следующим образом. Пусть строки таблицы соответствуют вершинам $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ гиперграфа, а столбцы — его гиперребрам $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. На пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы будет стоять единица, если вершина v_i принадлежит гиперребру e_j, в противном случае на этом месте будет стоять ноль.

Например, гиперграф, изображенный на рис. 189, задается следующей таблицей (см. стр. 223).

Тогда степень вершины будет равна числу единиц в строке, соответствующей вершине, а степень гиперребра — числу единиц в столбце, соответствующем гиперребру. Утверждение леммы вытекает из того, что каждая из сумм в ее формулировке равна числу единиц в матрице, задающей гиперграф.

Лемма доказана. □

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0
v_3	1	0	0	0	1	0
v_4	0	1	0	1	0	0
v_5	0	1	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	1
v_7	0	0	1	1	0	0
v_8	0	0	1	0	1	0

Утверждение леммы можно записать в следующем виде:

$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{e\in E} |e|.$$

Рассмотрим гиперграф H, вершины которого обозначают переводчиков, а каждое из пяти гиперребер содержит вершины, соответствующие людям, знающий определенный язык.

Степень $d(\text{Мат})$ вершины, соответствующей переводчику Матвееву, неизвестна, степени остальных вершин, соответствующих переводчикам, в гиперграфе H: $d(\text{Иван}) = d(\text{Пет}) = d(\text{Фрол}) = 3$, $d(\text{Сид}) = 4$, степени гиперребер, соответствующих языкам: $|\text{араб}| = |\text{кит}| = 3$, $|\text{англ}| = |\text{франц}| = |\text{немец}| = 4$.

Из леммы о рукопожатиях следует, что

$$d(\text{Мат}) + 3 + 3 + 3 + 4 = 3 + 3 + 4 + 4 + 4.$$

Отсюда $d(\text{Мат}) = 5$, поэтому переводчик Матвеев знает пять языков. $\triangleright$

267 В парламенте создано 15 комиссий, в работе которых участвуют все 100 депутатов. В самой большой комиссии 12 членов. Докажите, что есть депутат, который работает только в одной комиссии.

Решение. Будем считать вершинами гиперграфа H депутатов, а гиперребрами — комиссии парламента.

Пусть гиперграф H имеет n вершин и m гиперребер. Обозначим через $r(H)$ наибольшую из степеней гиперребер гиперграфа и через

$\delta(H)$ наименьшую из степеней вершин гиперграфа. Тогда

$$\delta(H)n \leqslant \sum_{v \in V} d(v), \qquad \sum_{e \in E} |e| \leqslant m \cdot r(H).$$

Воспользовавшись леммой о рукопожатиях, имеем

$$\delta(H)n \leqslant m \cdot r(H).$$

Для рассматриваемого гиперграфа $n = 100$, $m = 15$, $r(H) = 12$.

Отсюда $\delta(H) \leqslant \big(m \cdot r(H)\big)/n = (15 \cdot 12)/100 = 1{,}8$.

Следовательно, существует депутат, работающий ровно в одной комиссии. ▷

268 В парламенте создано 15 комиссий, в работе которых участвуют все 100 депутатов. Каждый депутат работает не менее, чем в двух комиссиях. Докажите, что есть комиссия, в которой не менее 14 депутатов.

Решение. Рассмотрим гиперграф, описывающий парламент, как в предыдущей задаче.

Воспользуемся доказанным там же соотношением

$$2n \leqslant \delta(H)nm \cdot r(H).$$

Отсюда $r(H) \geqslant 2n/m = 200/15 \approx 13{,}3$. Поэтому существует комиссия, в которой не менее 14 депутатов. ▷

269 В стране 100 городов и 11 авиакомпаний. Каждой компании предоставили по 10 городов для того, чтобы компания установила авиарейсы между любой парой представленных городов. (Один город может быть предоставлен нескольким компаниям.) При этом из любого города страны можно долететь в любой другой, возможно, с пересадками. Докажите, что нельзя предложить маршрут путешествия, которое начинается и оканчивается в одном городе, и при этом используются линии различных авиакомпаний.

Решение. Рассмотрим гиперграф H, вершинами которого являются 100 городов, а 11 гиперребрами — города, определенные для компаний. В каждом из 11 гиперребер будет 10 вершин.

Цепь в гиперграфе, в которой начальная и конечные вершины совпадают, называется ***циклом***.

Гиперграф, в котором две любые вершины можно соединить цепью, называется ***связным***.

Для решения задачи следует доказать, что в гиперграфе H нет циклов.

Теорема. Связный гиперграф H, имеющий n вершин и m гиперребер, не содержит циклов тогда и только тогда, когда

$$\sum_{e\in E}(|e|-1)=n-1.$$

Доказательство. Для любого гиперграфа H следующим образом определим двудольный граф $K(H)$. Вершины $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ одной доли графа обозначают вершины $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ гиперграфа, а вершины $(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ другой доли графа обозначают гиперребра $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ гиперграфа. Вершина V_i будет соединена ребром с вершиной E_j в графе $K(H)$ тогда и только тогда, когда вершина v_i гиперграфа принадлежит гиперребру e_j. Граф $K(H)$ называется ***кениговым представлением*** гиперграфа H.

На рис. 190 представлено кенигово представление гиперграфа, изображенного на рис. 189.

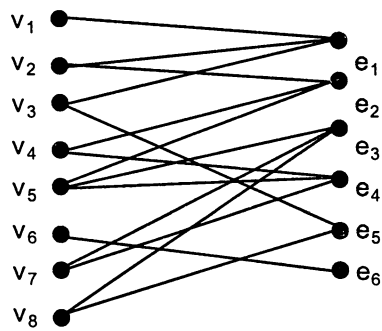


Рис. 190

Очевидно, что если гиперграф H связен, то связен и граф $K(H)$, и гиперграф H не содержит циклов тогда и только тогда, когда их не содержит граф $K(H)$, т. е. $K(H)$ является деревом.

Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями того, что граф является деревом, сформулированными в задаче 95: связный граф, имеющий p вершин и s ребер, является деревом тогда и только тогда, когда $s=p-1$.

Для графа $K(H)$ число вершин $p=n+m$, число ребер $s=\sum_{e\in E}|e|$.

Отсюда

$$\sum_{e\in E}|e|=n+m-1 \quad \text{и} \quad \sum_{e\leftarrow E}(|e|-1)=n-1.$$

Теорема доказана. □

Из условия задачи вытекает, что гиперграф H — связный. Поскольку для него выполняются условия теоремы $(11\cdot(10-1)=100-1)$, то гиперграф H не имеет циклов. Отсюда следует, что указанное путешествие невозможно. ▷

Использованная литература

1. *Березина Л. Ю.* Графы и их применение. М., 1975.
2. *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. СПб., 2005.
3. *Богачев Л. В.* Логические задачи. М., 1985.
4. *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М., 1988.
5. *Вышиньский В. А., Карташев М. В., Михайловский В. Ш., Ядренко М. И.* Киівскі математичны олімпиади. Кіев, 1993.
6. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М., 1986.
7. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Математический кружок. СПб., 1992.
8. *Горбачев Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. М., 2004.
9. Зарубежные математические олимпиады. М., 1987.
10. Задачи Белорусской математической олимпиады школьников. Минск, 1995.
11. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. СПб., 2003.
12. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. СПб., 2004.
13. *Коннов В. В., Клековкин Г. А., Коннова Л. П.* Геометрическая теория графов. М., 1999.
14. *Коннова Л. П.* Знакомьтесь, графы. Самара, 2001.
15. Петербургские олимпиады школьников по математике, 2000–2002. СПб., 2006.
16. *Саркисян А. А., Колягин Ю. М.* Познакомьтесь с топологией. М., 1976.
17. Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1965.
18. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М., 1977.
19. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб., 1994.
20. Журналы «Математика в школе» и «Квант».

Приложение

Министерство образования Республики Беларусь
Национальный институт образования

Элементы теории графов в моделировании реальных процессов

Экспериментальная программа курса по выбору
для учащихся 11 класса учреждений,
обеспечивающих получение общего среднего образования
с 12-летним сроком обучения

Авторы-составители: Мельников Олег Исидорович — профессор кафедры уравнений математической физики БГУ, доктор педагогических наук; Куприянович Виктор Владимирович — учитель школы № 3 г. Новополоцка, учитель высшей категории.

Данный курс по выбору позволит познакомить обучаемых с элементами теории графов и ее методами. Учащиеся узнают о начальных понятиях, основных теоремах и алгоритмах теории. Изучение курса предусматривает знакомство с простейшими приемами построения математических моделей реальных объектов и процессов. Реализация курса будет способствовать формированию у обучаемых навыков построения математических моделей и, кроме этого, развитию у них мышления, связанного с решением дискретных математических задач. Изучение курса предусматривает начальное знакомство с элементами истории теории графов.

Пояснительная записка

В последнее время значительно увеличилась роль математического моделирования как мощного средства научного исследования в естественных и гуманитарных науках. Математические модели широко используются при решении производственных задач. Не случайно Совет

Министров Республики Беларусь назвал в качестве одного из приоритетных направлений фундаментальных научных исследований математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе.

Все это привело к тому, что для подготовки специалистов высокого класса в вузах постепенно начинают обучать студентов методологии перехода от реальных производственных ситуаций к математическим моделям, их описывающим, и дальнейшему исследованию построенных моделей с помощью вычислительной техники.

Тем не менее. в школьных программах математическое моделирование рассматривается только в связи с решением текстовых задач, которым в школе часто не уделяется достаточного внимания. Все это приводит к тому, что выпускники школ приходят в вузы с мышлением, плохо подготовленным к обучению построению моделей. Графы являются простым и удобным языком для построения математических моделей различной степени подробности и сложности, эффективным средством для обучения школьников мышлению, связанному с анализом дискретных процессов.

С другой стороны, графовые задачи постоянно встречаются на математических олимпиадах различного уровня, и курс может служить для подготовки к олимпиадам.

Цели курса: формирование представления учащихся о возможностях моделирования как мощного средства описания и познания реального мира, знакомство их с элементами теории графов и методологией построения математических моделей, подготовка к восприятию этих понятий в вузах.

Задачи курса: с помощью курса предполагается:

знакомить учащихся с элементами теории графов и обучать их приемам и алгоритмам решения задач по теории графов;

знакомить учащихся с методологией построения и исследования простейших математических моделей и обучать их приемам построения и исследования графовых моделей.

Рекомендуемые формы и методы проведения занятий

Учебно-воспитательный процесс должен происходить с учетом возрастных характеристик школьников, с одной стороны, и с учетом их индивидуальных особенностей — с другой.

Занятия должны содержать элементы *проблемного обучения*, при котором объяснение материала учителем чередуется с самостоятельным, но под контролем учителя, поиском учащимися путей решения поставленных задач. Процесс обучения должен быть организован так, чтобы возникающие при обучении догадки, гипотезы, нечеткие знания обгоняли формирования конкретных знаний.

При обучении следует обратить внимание на развитие у обучаемых двух взаимно дополняющих стилей мышления: логико-алгоритмического и системно-комбинаторного.

Первый стиль предполагает умения получать и оценивать эмпирический материал, мыслить индуктивно и выдвигать гипотезы на основании эмпирического материала, мыслить дедуктивно при доказательстве гипотез и обосновании алгоритмов, планировать действия по осуществлению своих намерений и формализовать планы действий в виде алгоритмов.

Второй стиль предполагает умения выделять основные и случайные элементы объектов и явлений, их связи и свойства, представлять структуру объектов и явлений, видеть объекты и явления в целостности и взаимосвязи, иметь несколько взаимодополняющих точек зрения на предмет.

Обучение проводится дедуктивно с элементами эвристики. Изучение материала происходит блоками через систему тематически ориентированных задач.

Начало курса посвящено введению понятия «граф» и изучению общих свойств графов. В дальнейшем теоретический материал каждого нового раздела факультатива дополняется задачами построения и исследования моделей. Возможно встраивание доказательств фактов из теории графов в процесс решения задач.

Программа курса является общей для учащихся всех школ. В то же время учитель при обучении выбирает объем материала, степень строгости его изложения, методы и приемы обучения в соответствии со своими склонностями и возможностями с учетом возрастных особенностей учащихся и их подготовленности. Учитывается также возможное начальное знакомство с графами на факультативах в предшествующих классах.

Содержание обучения

Азбука теории графов

Определение графа. Примеры графов. Простейшие свойства. Полные графы. Лемма о рукопожатиях. Двудольные графы. Использование графов для описания отношений между объектами.

Деревья

Определение дерева. Центр дерева. Минимальное остовное дерево. Построение минимальных связывающих сетей.

Обходы в графах

Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия эйлеровости. Гамильтоновы графы. Вычерчивание уникурсальных кривых. Достаточные условия гамильтоновости. Построение оптимальных маршрутов.

Расположение графов на плоскости

Плоские и планарные графы. Теорема Эйлера. Критерии планарности. Двойственные графы. Проектирование интегральных схем.

Связность

Вершинная и реберная связности и соотношение между ними. Коммуникационные сети наибольшей надежности.

Раскраски

Правильная раскраска. Хроматическое число. Хроматическая функция. Раскраски карт и плоских графов. Проектирование коробок передач и составление расписаний.

Независимые множества, паросочетания и покрытия

Независимое множество. Число независимости. Паросочетание. Число паросочетания. Теорема Бержа о наибольшем паросочетании. Паросочетание в двудольном графе. Доминирование. Покрытие. Определение множеств перекрестков в городе, обладающих определенными свойствами.

Ориентированные графы

Определение. Турниры. Описание маршрутов с различными свойствами в городах.

Ожидаемые результаты

В результате изучения курса по выбору *у учащихся будут сформированы представления*:

- об основных понятиях и утверждениях теории графов;
- об общей схеме построения и исследования математических моделей;
- о методах решения графовых задач.

Учащиеся овладеют следующими способами деятельности:

- применять рассмотренные приемы для построения математических моделей;
- применять изученные методы при решении графовых задач;

- применять полученные знания в реальной жизни.

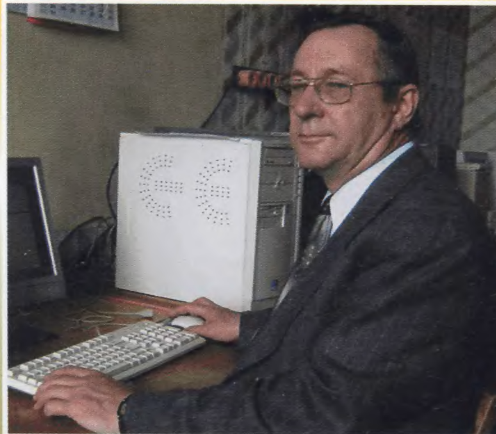
Изучение данного курса по выбору предполагает:

- повышение интереса у учащихся к теории графов через решение практических задач;
- ускорение математического и логического развитие школьников;
- формирование логико-алгоритмического и системно-комбинаторного мышления;
- развитие познавательных способностей учащихся;
- формирование опыта исследовательской деятельности.

Рекомендуемая литература

1. *Мельников О. И.* Занимательные задачи по теории графов. Минск: ТетраСистемс, 2001. С. 144.
2. *Саркисян А. А.*, *Колягин Ю. М.* Познакомьтесь с топологией. М.: Просвещение, 1976. С. 79.
3. *Березина Л. Ю.* Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979. С. 143.
4. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. С. 207.
5. *Коннов В. В.*, *Клековкин Г. А.*, *Коннова Л. П.* Геометрическая теория графов. М.: Народное образование, 1999. С. 240.
6. *Коннова Л. П.* Знакомьтесь, графы. Самара: Изд-во Института повышения квалификации работников образования, 2001. С. 108.
7. *Горбачев Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. С. 560.
8. *Мельников О. И.* Современные аспекты обучения дискретной математике. Глава 7. Минск: БГУ, 2002. С. 120.
9. *Мельников О. И.* Использование графовых задач для развития сообразительности школьников // Матэматыка: праблемы выкладання. 2001. № 3. С. 79–90.
10. *Мельников О. И.*, *Куприянович В. В.* Использование графовых задач при самостоятельной работе для развития воображения школьников // Народная асвета. 2002. № 10. С. 31–33.
11. *Мельников О. И.*, *Куприянович В. В.* Роль дискретной математики в повышении качества математической подготовки школьника // Веснік адукацыі. 2005. № 5. С. 12–17.
12. *Мельников О. И.* Графы в обучении математики // Математика в школе. 2003. № 8. С. 67–72.

Олег Исидорович МЕЛЬНИКОВ



Профессор механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук.

Научные интересы: теория графов, обучение дискретной математике в высшей и средней школе. Автор и соавтор книг: «Лекции по теории графов» (М., 1990); «Exercises in graph theory» (Dordrecht, 1998); «Незнайка в стране графов» (Минск, 2000; М.: URSS, 2006); «Информатика. Методы алгоритмизации» (Минск, 2000); «Занимательные задачи по теории графов» (Минск, 2001); «Математика для экономистов на базе “Mathcad”» (СПб., 2003); «Обучение дискретной математике» (М.: URSS, 2008). Лауреат Государственной премии Республики Беларусь.

5027 ID 55804

9 785397 000338

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

URSS

Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru