Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Методические указания
к практическим занятиям и выполнению РГР
по курсу «Дискретная математика»

ЧАСТЬ 2.

НОВОСИБИРСК
1998

Составители: М.Э. Рояк, канд. техн. наук, доц.
С.Х. Рояк, ассист.

Рецензент: Т.А. Шапошникова, ст. преп.

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1.1. ПОНЯТИЕ "ГРАФ"

Пусть V – непустое множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара (V,E), где E – произвольное подмножество множества $V^{(2)}$, называется *графом* (*неориентированным графом*). Элементы множества V называются *вершинами* графа, а элементы множества E – *ребрами*. Итак, граф – это конечное множество V вершин и множество E ребер, $E \subset V^{(2)}$.

Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя начальные задачи теории графов восходят еще к Эйлеру (XVIII в.).

Множества вершин и ребер графа G обозначается соответственно V_G и E_G. Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Число $|V_G|$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается $|G|$.

Если $|G|=n$, $|E_G|=m$, то граф называют (n, m)-*графом*.

Говорят, что две вершины u и v графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае. Если $e=\{u, v\}$ – ребро, то вершины u и v называют его *концами*. В этой ситуации говорят также, что ребро e *соединяет* вершины u и v.

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общий конец.

Вершина v и ребро e называются *инцидентными*, если v является одним из концов ребра e, и *не инцидентными* в противном случае.

Заметим, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной v, называется *окружением вершины* v и обозначается $N_G(v)$ или просто $N(v)$.

Графы удобно изображать в виде рисунков (геометрических графов). *Геометрический* граф в пространстве n- мерном евклидовом пространстве ε^n есть множество точек пространства ε^n и множество E простых кривых, таких:

1) что каждая замкнутая кривая в E содержит только одну точку v множества V;

2) каждая незамкнутая кривая в E содержит ровно две точки множества V, которые являются ее граничными точками;
3) кривые в E не имеют общих точек кроме точек из множества V.

При этом точки множества V соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии – ребрам.

Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка n обозначается K_n.

Граф называется *вырожденным* (*пустым*), если любые две его вершины не смежны (т.е. у него нет ребер).

Пусть G и H графы, а φ: $V_G \rightarrow V_H$ – биекция. Если для любых вершин u и v их образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в G, то эта биекция называется *изоморфизмом графов G и H*, а сами графы G и H – *изоморфными*. Изоморфные графы будем обозначать $G \cong H$ (а также $H \cong G$).

Если граф G изоморфен геометрическому графу G', то G' называется *геометрической реализацией графа G*.

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы естественно отождествлять, т.е. считать совпадающими (их можно изобразить одним рисунком). Они могли бы различаться конкретной природой элементов, но именно это игнорируется при введении понятия "граф".

В некоторых ситуациях все же приходится различать изоморфные графы, и тогда полезно понятие "помеченного графа". Граф порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены некоторые метки, например 1, 2, ..., n. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (и, следовательно, множество вершин – с множеством чисел $\{1, 2, ..., n\}$), определим *равенство* помеченных графов G и H одного и того же порядка: $G=H$ тогда и только тогда, когда $E_G=E_H$.

При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемые графы различаются лишь с точностью до изоморфизма, говорят: "абстрактный граф".

Для произвольного графа G следующим образом определяется *дополнительный граф* (или *дополнение*) $\overline{G}: V_{\overline{G}} = V_G$, и любые две несовпадающие вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G, т.е. $E_{\overline{G}} = V^{(2)} \setminus E_G$.

Лемма. $\overline{\overline{G}} = G$

Лемма. $\overline{G} \cong \overline{H}$, если $G \cong H$.

Иногда рассмотренное выше понятие "граф" оказывается недостаточным и приходится рассматривать более общие объекты, в которых две вершины могут соединяться более чем одним ребром. Так возникает понятие "мультиграф". *Мультиграф* – это пара (V, E), где V – непустое множество (*вершин*), а E – семейство подмножеств множества $V^{(2)}$ (*ребер*). Употребление термина "семейство" вместо "множество" означает, что элементы множества $V^{(2)}$ могут в E повторяться, т.е. допускаются *кратные ребра*.

Дальнейшее обобщение состоит в том, что кроме кратных ребер допускаются еще *петли*, т.е. ребра, соединяющую вершину саму с собой. *Псевдограф* – это пара (V, E), где V – непустое множество (*вершин*), а E – некоторое семейство неупорядоченных пар (*ребер*), не обязательно различных.

Изучаются также ориентированные графы. Тогда множество $V^{(2)}$ заменяется *декартовым квадратом* V^2, состоящим из упорядоченных пар элементов множества V. *Ориентированный граф* (или *орграф*) – это пара (V, A), где V – множество вершин, A – множество *ориентированных ребер*, которые называются *дугами*, $A \subset V^2$.

Если $a=(v_1, v_2)$ – дуга, то вершины v_1 и v_2 называются ее *началом* и *концом* соответственно.

Аналогично неориентированному определяется *ориентированный мультиграф*. Рассматриваются также *смешанные* графы, у которых есть и дуги, и неориентированные ребра. Заменяя каждую пару (u, v) из множества E, ориентированного (или смешанного) графа G неупорядоченной парой $\{u, v\}$, состоящей из тех же элементов u и v, получаем *ассоциированный с* $G=(V, E)$ графом псевдограф $H=(V, E^0)$. Также говорят, что граф H есть *основание графа* G.

Орграф называется *турниром*, если его основание является полным графом.

Для всех рассмотренных обобщений понятия "граф" аналогично вводится понятие *изоморфизма* как биекции между множествами вершин, сохраняющей смежность, кратности ребер, петли и направления дуг.

Примеры графов

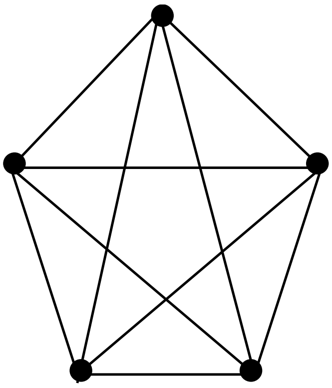


Рис. 1. Граф Понтрягина-Куратовского I-го рода (граф K_5)

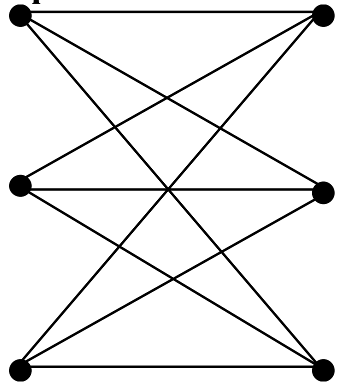


Рис. 2. Граф Понтрягина-Куратовского II-го рода (граф $K_{3,3}$)

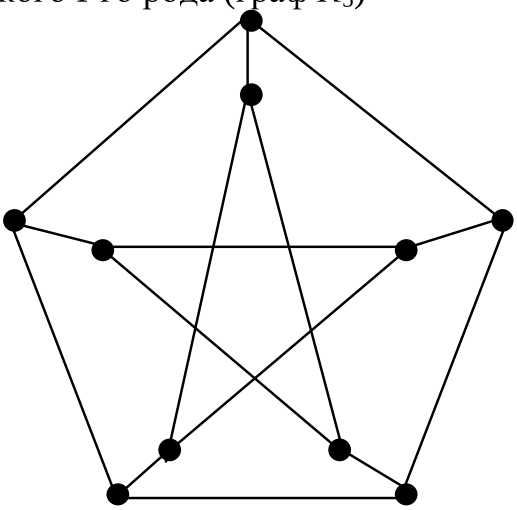


Рис. 3. Граф Петерсена

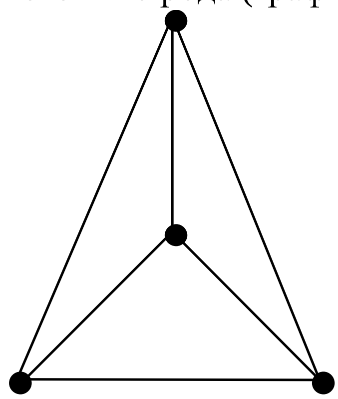


Рис. 4. Граф "тетраэдр"

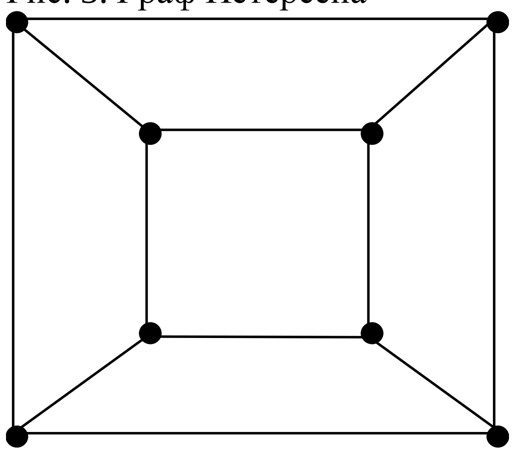


Рис. 5. Граф "куб"

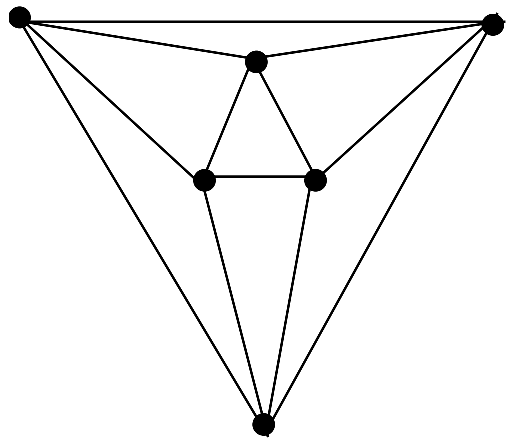


Рис. 6. Граф "октаэдр"

Пусть G – граф, w: $E_G \to \mathrm{R}^+$ вещественнозначная функция, ставящая в соответствие каждому ребру e неотрицательное число $w(e)$ – *вес* ребра e. Пару (G, w) назовем *взвешенным графом*. Под *весом* любого подграфа (возможно, несобственного) взвешенного графа будем понимать сумму весов его ребер.

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Граф H называется *подграфом* графа G, если $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$. Если H – подграф графа G, то говорят, что H *содержится* в G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Подграф H называется *остовным подграфом* графа G, если $V_H = V_G$.

Если множество вершин подграфа H есть U, а множество его ребер совпадает с множеством всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат U, то H называется *подграфом, порожденным множеством вершин* U, и обозначается $G(U)$ (т.е. $V_H = U$, $E_H = E_G \setminus \{\{a, b\} \mid a \notin U$ или $b \notin U\}$).

Если множество ребер подграфа H есть $E' \subset E_G$, а множество его вершин совпадает с множеством всех концов ребер из E' вершин графа G, то подграф H называется *подграфом, порожденным множеством ребер* E' и обозначается $G(E')$ (т.е. $E_H = E'$ и $V_H = \{v \mid v \in V_G$ и $(\{u, v\} \in E'$ или $\{v, u\} \in E')\}$.

Пусть v – вершина графа G. Тогда операцию построения графа $H = G - v$ называют *удалением вершины* v. Построенный в результате этой операции граф H содержит все ребра множества E_G кроме инцидентных вершине v, а $V_H = V_G \setminus \{v\}$.

Пусть e – ребро графа G. Тогда операцию построения графа $H = G - e$ называют *удалением ребра* e. Построенный в результате этой операции граф H содержит все вершины графа G, а $E_H = E_G \setminus \{e\}$.

Удаление вершины или ребра, а также переход к подграфу – это операции, с помощью которых можно из имеющегося графа получать другие графы с меньшим числом элементов.

Рассмотрим теперь операции, позволяющие получать из имеющихся графов графы с большим числом элементов.

Если вершины u и v графа $G = (V_G, E_G)$ не смежны, то говорят, что граф $H = (V_H, E_H)$ получен из графа G *добавлением ребра* $e = \{u, v\}$, если $V_H = V_G$ и $E_H = E_G \cup \{e\}$, то пишут $H = G + e$.

Граф H называется *объединением* (или *наложением*) графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$ и $E_H = E_F \cup E_G$. В этой ситуации пишут $H = F \cup G$. Объединение $F \cup G$ называется *дизъюнктивным*, если $V_F \cap V_G = \varnothing$. Аналогично определяются *объединение* и *дизъюнктивное объединение* любого множества графов, причем в последнем случае никакие два из объединяемых графов не должны иметь общих вершин.

Пусть $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$. Тогда *произведением графов* (обозначается $G_1 \times G_2$) называется такой граф G, для которого $V_G=V_1 \times V_2$ – декартово произведение множеств вершин исходных графов, а E_G определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда $u_1=v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, или $u_2=v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

Лемма. Очевидно, что
$|G_1 \times G_2|=|G_1|\cdot|G_2|$, $\left|E_{G_1 \times G_2}\right| = |G_1| \cdot \left|E_{G_2}\right| + |G_2| \cdot \left|E_{G_1}\right|$

С помощью операции произведения вводится важный класс графов – n-мерные кубы. *N-мерный куб Q_n* определяется рекуррентно (K_2 – полный граф с двумя вершинами)

$Q_1=K_2$; $Q_n=K_2 \times Q_{n-1}$.

Очевидно, что Q_n – граф порядка 2^n, вершины которого можно представить (0, 1)-векторами длины n таким образом, что две вершины будут смежны тогда и только тогда, когда соответствующие векторы различаются ровно в одной координате.

Пусть u и v – две вершины графа G, $H=G-u-v$. К графу H присоединим новую вершину v', соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин u и v в графе G. Говорят, что построенный граф получается из графа G *отождествлением вершин* u и v.

Операция *подразбиения ребра* $e=ab$ состоит в том, что из графа удаляется ребро e и добавляется два новых ребра $e_1=av$ $e_2=vb$, где v – новая вершина. Будем говорить, что *граф H получен из графа G подразбиением ребра e вершиной* v, если $V_H=V_G \cup \{v\}$, $E_H=(E_G \setminus \{\{a, b\}\}) \cup \{\{a, v\}, \{v, b\}\}$.

Два графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены их одного и того же графа подразбиением его ребер.

Подграфы и *порожденные подграфы* ориентированного графа определяются так же, как и для неориентированного.

1.3. СТЕПЕНИ ВЕРШИН ГРАФА И ИХ СВОЙСТВА

Степенью вершины графа G называется число инцидентных ей ребер, т.е. число вершин в ее окружении. Будем обозначать степень вершины v через $\deg_G v$ (или $\deg v$).Тем самым $\deg v=|N(v)|$. Максимальная и минимальная степени вершин графа G обозначаются символами $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно.

Вершина степени 0 называется *изолированной*, вершина степени 1 – *висячей* (или *концевой*). Ребро, инцидентное концевой вершине также называется *концевым*.

Теорема. Сумма степеней всех вершин графа есть число, равное удвоенному числу ребер: $2|E_G| = \sum\limits_{v \in V_G} \deg v$.

Следствие (лемма о рукопожатиях). В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Граф называется *регулярным* (или *однородным*), если степени всех его вершин равны; *степенью* регулярного графа называется степень его вершин. Степень регулярного графа G обозначается через $\deg G$. Регулярные графы степени 3 будем называть *кубическими*.

Для произвольного орграфа *полустепенью исхода* $d^+(v)$ вершины v называется число дуг, исходящих из v, а *полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число дуг, входящих в v. *Степень* $\deg v$ вершины v орграфа – это число $\deg v = d^+(v) + d^-(v)$.

Для любого орграфа $G=(V,E)$ сумма полустепеней исхода всех вершин равна сумме полустепеней захода и равна числу его дуг

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Теорема. Пусть натуральные числа n и d, хотя бы одно из которых четно, удовлетворяют неравенствам $0 \le d \le n-1$. Тогда существует регулярный граф порядка n и степени d.

1.4. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_n, v_{n+1}$ вершин и ребер графа такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$ $(i = \overline{1,n})$, называется *маршрутом, соединяющим вершины* v_1 и v_{n+1} (или $(v_1 v_{n+1})$-*маршрутом*). Очевидно, что для задания маршрута в графе достаточно задать последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$. его вершин, либо последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n$ его ребер.

Вершина v называется *достижимой из вершины* u, если существует (u, v)-маршрут. Любая вершина считается достижимой из себя самой.

Маршрут называется *цепью,* если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут (1) называется *циклическим*, если $v_1=v_{n+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь – *простым циклом*. Число ребер в маршруте называется его *длиной*. Цикл длины 3 часто называют *треугольником*. Длина всякого цикла не менее трех, если речь идет о простом графе, поскольку в таком графе нет петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его *обхватом*.

Свойства маршрутов, цепей и циклов

1) Всякий незамкнутый (u, v)- маршрут, содержит в себе простую (u, v)- цепь. В частности, любая (u, v)- цепь, содержит в себе простую (u, v)- цепь. Причем, если (u, v)- маршрут содержит в себе вершину w ($w\neq u$ и $w\neq v$), то в общем случае, простая (u, v)- цепь может не содержать в себе вершину w.
2) Всякий непростой цикл можно разбить на два или более простых. Причем для замкнутого маршрута такое утверждение не верно.
3) Всякая непростая (u, v)- цепь, может быть разбита на простую (u, v)- цепь и один или более простых циклов. Причем для незамкнутого маршрута такое утверждение не верно.
4) Для любых трех вершин u, w, v из существования (u, w)- цепи их и (w, v)- цепи, следует существование (u, v)- цепи. Причем может не существовать (u, v)- цепи, содержащей вершину w.
5) Объединение двух несовпадающих простых (u, v)- цепей содержит простой цикл.
6) Если граф содержит 2 несовпадающих цикла с общим ребром e, то после удаления этого ребра граф по-прежнему содержит цикл.

Лемма. Если два графа изоморфны:

1) то они одного порядка;
2) у них одинаковое количество ребер;
3) для произвольного i, $0\leq i\leq n-1$, (n – порядок графов) количество вершин степени i, у обоих графов одинаковое;
4) у них совпадают обхваты;
5) у них одинаковое количество простых циклов минимальной длины (по количеству ребер).

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Очевидно, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы в нем для какой-либо фиксированной вершины u и каждой другой вершины v существовал (u, v)- маршрут.

Теорема. Граф $G=(V,E)$ связен тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2 так, чтобы обе граничные точки каждого ребра находились в одном и том же множестве.

Всякий максимальный связный подграф графа G называется *связной компонентой* (или *компонентой*) графа G. Слово "максимальный" означает максимальный относительно включения, т.е. не содержащийся в связном подграфе с большим числом элементов. Множество вершин связной компоненты называется *областью связности*.

Для ориентированного графа вводится понятие *ориентированного маршрута* – это последовательность вида (1), в которой $e_i=(v_i,v_{i+1})$. Аналогом цепи в этой ситуации служить *путь* (*ориентированная цепь*). Аналогом цикла служит *контур* (*ориентированный цикл*).

Орграф называется *сильносвязным*, если любые две его вершины достижимы друг из друга. Орграф называется *одностороннесвязным*, если для любой пары его вершин по меньшей мере одна достижима из другой. Орграф называется *слабосвязным*, если любые две вершины его основания соединены маршрутом. Орграф называется *несвязным*, если его основание несвязный псевдограф.

Теорема. Орграф является сильносвязным тогда и только тогда, когда в нем есть остовной циклический маршрут.

▸ Необходимость. Пусть G – сильносвязный орграф и $T=(v_0, x_1, v_1, ..., x_n, v_0)$ – его циклический маршрут, проходящий через максимально возможное число вершин. Если этот маршрут не является остовным, то возьмем вне его вершину v. Так как G – сильносвязный орграф, то существуют маршруты $T_1=(v_0, y_1, ..., v)$, $T_2=(v, z_1, ..., v_0)$. Но тогда циклический маршрут $T'=(v_0, x_1, v_1, ..., x_n, v_0, y_1, ..., v, z_1, ..., v_0)$ содержит большее число вершин, чем T, что противоречит выбору маршрута T. Следовательно, T – остовной маршрут.

Достаточность. Пусть u и v – две произвольные вершины орграфа G, а $T=(v_0, x, ..., v, y, ..., u, z, ..., v_0)$ – циклический маршрут. Тогда u достижима из v с помощью маршрута $(v, y, ..., u)$ – части маршрута T, – а v из u – с помощью маршрута $(u, z, ..., v_0, x, ..., v)$. ◄

Теорема. Орграф является одностороннесвязным тогда и только тогда, когда в нем есть остовной маршрут.

Теорема. Орграф является слабосвязным тогда и только тогда, когда в его основание есть связный псевдограф.

Сильносвязной компонентой орграфа называется его максимальный относительно включения сильносвязный подграф.

1.5. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Пусть G –помеченный граф порядка n, $V_G=\{1, 2, ... , n\}$. Определим бинарную $n\times n$- матрицу $A=A(G)$, положив

$$A_{ik}=\begin{cases}1, \{i,k\}\in E_G\\ 0, \{i,k\}\notin E_G\end{cases}.$$

$A(G)$ называется *матрицей смежности* графа G. Это симметричная матрица с нулями на диагонали. Число единиц в строке равно степени соответствующей вершины.

Очевидно, что соответствие $G\to A(G)$ определяет биекцию множества помеченных графов порядка n на множество бинарных симметричных $n\times n$- матриц с нулевой диагональю.

Аналогично определяются *матрицы смежности* A мульти- и псевдографов: A_{ik} равно числу ребер, соединяющих вершины i и k (при этом петля означает два ребра).

Также определяется *матрица смежности* $A(G)$ ориентированного графа.

Очевидно, что если $A(G)$ – матрица смежности орграфа G порядка n, то

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}=d^{+}(i), \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ik}=d^{-}(i),$$

т.е. число единиц в i-й строке матрицы $A(G)$ равно полустепени исхода i-й вершины, а число единиц в k-*м* столбце равно полустепени захода k-й вершины.

Теорема. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одинаковыми перестановками строк и столбцов.

Теорема верна также для мультиграфов, псевдографов и орграфов.

Пусть G – (n, m)-граф, $V_G=\{1, 2, \ldots, n\}$ $E_G=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Определим бинарную $n\times m$- матрицу $I=I(G)$ условиями

$$I_{ki}=\begin{cases}1, \text{ если вершина } k \text{ и ребро } e_i \text{ инцидентны}\\ 0, \text{ если вершина } k \text{ и ребро } e_i \text{ не инцидентны}\end{cases}$$

Матрица I называется *матрицей инцидентности* графа G. В каждом её столбце ровно две единицы, равных столбцов нет. Как и выше, соответствие $G\rightarrow I(G)$ является биекцией множества помеченных (n, m)-графов с занумерованными ребрами на множество $n\times m$- матриц, удовлетворяющих описанным условиям.

Матрица инцидентности I для орграфа:

$$I_{ki}=\begin{cases}1 - \text{если вершина } k \text{ является началом дуги}\\ -1 - \text{если вершина } k \text{ является концом дуги}\\ 0 - \text{если вершины } k \text{ и } i \text{ не смежны}\end{cases}$$

Теорема. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

Теорема верна также для мультиграфов, псевдографов и орграфов.

Свойства матриц смежности и инцидентности

1) Сумма элементов матрицы $A(G)$, где $G=(V, E)$ – мультиграф, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, по i-й строке (или по i-му столбцу) равна $\delta(v_i)$.
2) Сумма элементов матрицы $A(G)$, где $G=(V, E)$ – ориентированный псевдограф, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, по i-й строке и по i-му столбцу соответственно равны $\delta^+(v_i)$, $\delta^-(v_i)$.

3) Пусть G – ориентированный мультиграф с непустым множеством дуг. Тогда:
   а) сумма строк матрицы $I(G)$ является нулевой строкой;
   б) любая строка матрицы $I(G)$ является линейной комбинацией остальных строк;
   в) ранг матрицы $I(G)$ не превосходит n–1;
   г) для любого контура матрицы G сумма столбцов матрицы $I(G)$, соответствующих дугам, входящим в этот контур, равна нулевому столбцу.
4) Пусть G – мультиграф с непустым множеством ребер. Тогда при покоординатном сложении по модулю 2:
   а) сумма строк матрицы $I(G)$ является нулевой строкой;
   б) любая строка матрицы $I(G)$ является суммой остальных строк;
   в) для любого цикла в G сумма столбцов матрицы $I(G)$, соответствующих ребрам, входящим в этот цикл, равна нулевому столбцу.

1.6. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФА

Пусть G – связный граф, а u и v – две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута называется *расстоянием между вершинами* u и v и обозначается $d(u, v)$. Положим $d(u, u)$=0. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим аксиомам метрики:

5) $d(u, v)\geq 0$;
1) $d(u, v)=0$ тогда и только тогда, когда $u=v$;
1) $d(u, v)=d(v, u)$;
1) $d(u, v)+ d(v, w)=d(u, w)$ (неравенство треугольника).

Для фиксированной вершины u величина $e(u)=\max\limits_{v\in V_G} d(u,v)$ называется *эксцентриситетом* вершины u. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром графа* G и обозначается через $d(G)$. Тем самым $d(G)=\max\limits_{v\in V_G} e(u)$.

Вершина v называется *периферийной,* если $e(v)=d(G)$. Простая цепь длины $d(G)$, расстояние между концами которой равно $d(G)$, называется *диаметральной цепью*.

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

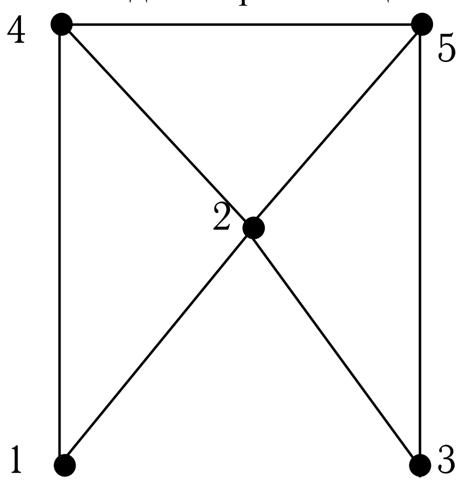
$r(G$

Очевидно, что радиус графа не больше его диаметра.

Вершина v называется *центральной*, если $e(v)=r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*. Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин. Наконец, центр графа может совпадать с множеством всех вершин. Например, центр простой цепи P_n при четном числе вершин n состоит ровно из двух вершин, а при нечетном – из одной; для цикла же C_n все вершины являются центральными.

Пример

$d(1, 2)=1$, $d(1, 3)=2$, $e(1)=2$, $d(G)=2$.
Все вершины, кроме вершины 2, являются периферийными, (1, 2, 3) – диаметральная цепь.



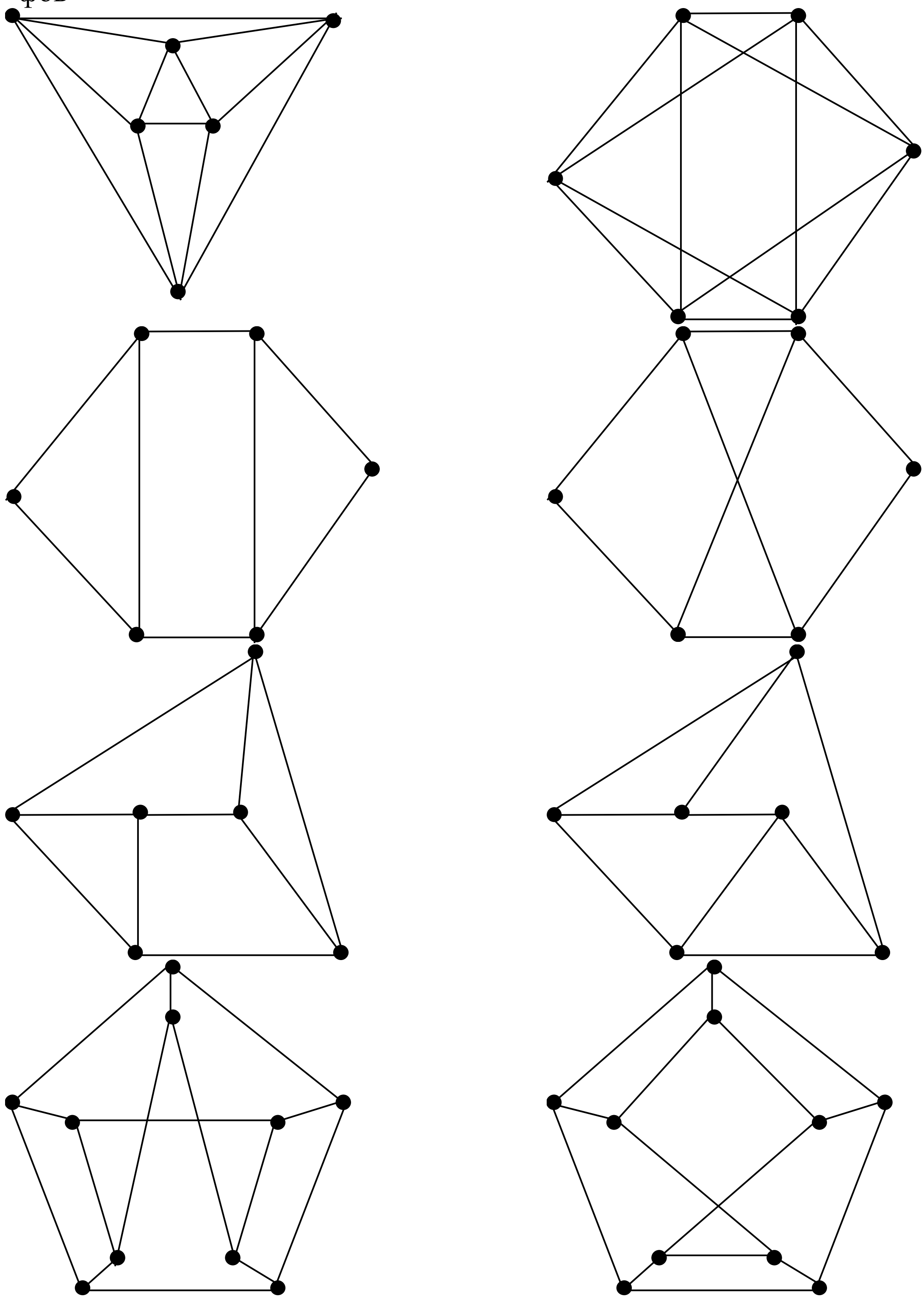
Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет сеть дорог, т.е. вершины его соответствуют отдельным населенным пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т.е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа.

Реальные задачи (их называют *минимаксными задачами размещения*) отличаются от идеальной тем, что приходится ещё учитывать другие обстоятельства – фактические расстояния между отдельными пунктами, стоимость, время проезда и прочее. Для того чтобы учесть это, используют взвешенные графы.

Задачи

1. Найдите число помеченных (n, m)-графов.
2. Найдите все попарно неизоморфные графы третьего, четвертого порядка.

3. Нарисуйте все попарно неизоморфные кубические графы восьмого порядка.
4. Среди приведенных на рисунке графов найдите все пары изоморфных графов



5. Определите число ребер *n*- мерного куба.
6. Докажите теорему о суммарной степени вершин.

7. Докажите лемму о рукопожатиях.
8. Докажите, что не существует регулярного графа, порядок и степень которого нечетны.
9. Докажите, что в каждом графе найдутся две вершины с одинаковыми степенями.
10. Докажите, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы в нем для какой-либо фиксированной вершины u и каждой другой вершины v существовал (u, v)-маршрут.
11. Докажите, что каждый граф представляется в виде дизъюнктивного объединения своих связных компонент. Разложение графа на связные компоненты определено однозначно.
12. Докажите, что, для любого графа либо он сам либо его дополнение является связным.
13. Пусть G –связный граф, $e \in E_G$. Тогда докажите:

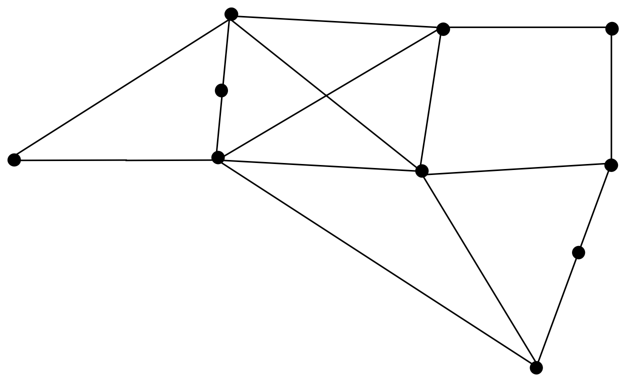
1) что ребро e принадлежит какому-либо циклу графа G, то граф $G–e$ связен;
2) если ребро e не входит ни в какой цикл графа G, то граф $G–e$ имеет ровно две компоненты связности.

14. Докажите, что в (n, m)- графе, имеющем k компонент связности, выполняется неравенство $n–k \le m \le (n–k)(n–k+1)/2$.
15. Докажите, что при фиксированных n и $k \le n$ среди графов G порядка n с k компонентами связности существует только один граф, а именно $G=O_{k-1} \cup K_{n-k+1}$, с максимальным числом ребер (O_k– пустой граф с k вершинами).
16. Докажите, что для любых натуральных чисел n, m, k, удовлетворяющих условиям $1 \le k \le m$, $n–k \le m \le (n–k)(n–k+1)/2$ существует (n, m)-граф, имеющий ровно k компонент связности.
17. Докажите, что если число ребер графа порядка $n>2$ больше, чем $(n-1)(n-2)/2$, то граф связен.
18. Докажите, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют общую вершину.
19. Докажите, что если $\delta(G) \ge (n–1)/2$, то граф G связен.
20. Постройте граф, центр которого:

1) состоит ровно из одной вершины;
2) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;
3) совпадает с множеством всех вершин.

21. Докажите, что диаметр графа не превосходит его удвоенного радиуса.

22. Найдите расстояние $d(u, v)$ в графе, изображенном на рисунке.



2. ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (*доли*), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным*. Если G – двудольный граф с долями X и Y и множеством ребер E, то пишут $G=(X, Y, E)$. Полный двудольный граф, у которого $|X|=p$ и $|Y|=q$, обозначается $K_{p,q}$. Аналогично двудольным определяются k*-дольный* и *полный* k *- дольный* графы для k=3, 4, ...

Теорема Кёнига. Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечётной длины.

Следствие. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет простых циклов нечетной длины.

Существует простой способ распознавания двудольности графа. Этот способ основан на простом приеме, называемом поиском в ширину. *Поиск в ширину* следующим образом приписывает вершинам рассматриваемого графа номера 0, 1, 2, ... Начиная с произвольной вершины, приписываем ей номер 0. Каждой вершине из окружения вершины 0 приписываем номер 1. Теперь рассматриваем поочередно окружения всех вершин с номером 1 и каждой из входящих в эти окружения вершин, еще не занумерованы, приписываем номер 2. Рассматриваем окружения всех вершин с номером 2 и т.д., пока возможно. Если исходный граф G связен, то поиск в ширину занумерует все его вершины.

Далее, разобьем множество V_G на две части – A и B, отнеся к A все вершины с четными номерами, а к B – все остальные вершины, и рассмотрим порожденные подграфы $G(A)$ и $G(B)$. Если оба они пусты, то $G=(A, B, E)$ – двудольный граф. В противном случае граф G не является двудольным.

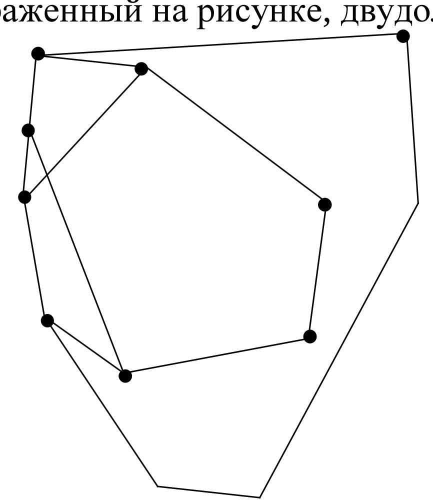
Простых способов распознавания k- дольности графа при $k>2$ нет.

Очевидно, что с помощью поиска в ширину можно также решить следующие задачи:

1) разбить множество вершин графа на его области связности;
2) для несовпадающих вершин u и v связного графа найти кратчайшую (u,v)-цепь;
3) в ориентированном графе найти множество всех вершин, достижимых из заданной вершины v.

Задачи

1. Доказать, что если $G=(X, Y, E)$ – непустой регулярный двудольный граф, то $|X|=|Y|$.
2. Докажите, что (n, m)- граф связен, если в нем отсутствуют циклы нечетной длины и $m>(n-1)^2/4$.
3. Является ли граф, изображенный на рисунке, двудольным?



3. ДЕРЕВЬЯ

3.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ

Класс деревьев занимает в теории графов особое положение. С одной стороны, это достаточно просто устроенные графы, и многие задачи, весьма сложные в общей ситуации, для деревьев решаются легко. С другой стороны, деревья часто встречаются в областях, на первый взгляд не имеющих отношения к теории графов.

Деревья открывались независимо несколько раз. Еще в прошлом веке Г. Кирхгоф ввел деревья и применил их к исследованию электрических цепей, а А. Кэли, перечисляя изомеры насыщенных углеводородов, еще раз открыл деревья и первым исследовал их свойства. Тогда же деревья были введены и исследованы К. Жорданом как чисто математический объект.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф, не содержащий циклов, называется *ациклическим* (или *лесом*). Таким образом, компонентами леса являются деревья.

Теорема. Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны.

1) G – дерево;
2) G – связный граф и $m=n-1$;
3) G – ациклический граф и $m=n-1$;
4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная, причем простая, цепь;
5) G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Лемма. В любом графе порядка $n\geq 2$ имеется не менее двух висячих вершин.

Пусть H – остовной подграф произвольного графа G. Если на каждой компоненте связности графа G графом H порождается дерево, то H называется *остовом* (или *каркасом*) графа G. Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой компоненте циклы, т.е. удаляя лишние ребра, придем к остову.

Лемма. Число ребер произвольного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m(G)-|G|+k(G)$, где $m(G)$ и $k(G)$ – число ребер и число компонент графа G соответственно.

Число $\nu(G)=m(G)-|G|+k(G)$ называется *цикломатическим числом* графа G.

Лемма. Граф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G)=0$.

Лемма. Граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G)=1$.

Лемма. Граф, в котором число ребер не меньше, чем число вершин, содержит цикл.

Лемма. **Е**сли в графе G порядка $n\geq 3$, число висячих вершин равно числу ребер, то G либо не связен, либо дерево.

Орграф G называется ордеревом, растущем из корня v:

1) если основание G является деревом;
2) для любой другой вершиной w существует единственный (v, w)-путь.

Очевидно, что ордерево имеет единственный корень.

Для любого орграфа существует остовное дерево, но остовного ордерева может не существовать.

3.2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СВЯЗНОГО ПСЕВДОГРАФА $G=(V, E)$

Шаг 1. Выбираем в G произвольную вершину u_1, которая образует подграф G_1 псевдографа G, являющийся деревом. Полагаем $i=1$.

Шаг 2. Если $i=n$, где $n=n(G)$, то задача решена, и G_i – искомое остовное дерево псевдографа G. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Пусть уже построено дерево G_i, являющееся подграфом графа G и содержащее некоторые вершины $u_1, u_2, \dots, u_i$, где $1\leq i\leq n-1$. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новую вершину $u_{i+1}\in V$, смежную в G с некоторой вершиной u_k графа G_i, новое ребро $\{u_{i+1}, u_k\}$ (в силу связности G и того обстоятельства, что $i<n$, указанная вершина u_{i+1} обязательно найдется). Получим граф G_{i+1}, который также является деревом. Присваиваем $i=i+1$ и переходим к шагу 2.

3.3. ОСТОВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Задача нахождения остова минимального веса во взвешенном связном графе, возникает при проектировании линий электропередачи, трубопроводов, дорог и т.п., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой каналов, связных либо непосредственно соединяющим их каналом, либо через другие центры и каналы, так, чтобы общая длина (или, например, стоимость) каналов связи была минимальной. Решение этой задачи «слепым» перебором вариантов потребовало бы чрезвычайно больших вычислений даже при относительно малых n (можно доказать, что полный граф K_n содержит n^{n-2} различных остовных дерева).

Однако для ее решения имеются эффективные алгоритмы. Опишем два из них – алгоритмы Дж. Краскала (1956) и Р. Прима (1957), применяемые к произвольному связному графу (G, w) порядка n.

Алгоритм Краскала

Шаг 1. Строим граф $T_1=O_n+e_1$, присоединяя к пустому графу на множестве вершин V_G ребро $e_1 \in V_G$ минимального веса.

Шаг 2. Если граф T_i уже построен и $i<n-1$, то строим граф $T_{i+1}=T_i+e_{i+1}$, где e_{i+1} – ребро графа G, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i и не составляющих циклов с ребрами из T_i.

Теорема. При $i<n-1$ граф T_{i+1} можно построить. Граф T_{n-1} является остовом минимального веса в графе (G, w).

Алгоритм Прима

Шаг 1. Выбираем ребро $e_1=ab$ минимального веса и строим дерево T_1, полагая $V_{T_1}=\{a,b\}$, $E_{T_1}=\{e_1\}$.

Шаг 2. Если дерево T_i порядка $i+1$ уже построено и $i<n-1$, то среди ребер, соединяющих вершины этого дерева с вершинами графа G, не входящими в T_i, выбираем ребро e_{i+1} минимального веса. Строим дерево T_{i+1}, присоединяя к T_i ребро e_{i+1} вместе с его входящим в T_i концом.

Для этого алгоритма также верна приведенная выше теорема.

В некоторых ситуациях требуется построить остов не минимального, а максимального веса. К этой задаче также применимы и алгоритм Краскала, и алгоритм Прима. Следует только всюду минимальный вес заменить максимальным.

Задачи

1. Доказать, что если у дерева есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина.
2. Доказать, что дерево, содержащее ровно две висячие вершины, является простой цепью.

3. Докажите, что если G – связный граф, v – висячая вершина в G, то граф $H=G–v$ связен.
4. Докажите, что если G – дерево, тогда граф $H=G+v+\{v, w\}$, где $v\in V_G$, $w\notin V_G$ также является деревом.
5. Доказать, что лес из k деревьев, содержащий n вершин, имеет ровно $n–k$ ребер.
6. Доказать, что граф содержит остовное дерево тогда и только тогда, когда он связен.
7. Докажите, что всякий ациклический подграф произвольного графа G содержится в некотором остове графа G.
8. Докажите, что если S и T – два остова графа G, то для любого ребра e_1 графа S существует такое ребро e_2 графа T, что граф $S–e_1+e_2$ также является остовом.
9. Нарисуйте все попарно неизоморфные деревья седьмого порядка.
10. Пусть $n\geq 2$ и пусть задано семейство $F(G)=\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ графов, в котором граф H_i получен из n- вершинного графа G удалением вершины с номером i $(i=\overline{1,n})$. Отметим, что в графах H_i вершины не помечены. Доказать, что по семейству графов $F(G)$ можно:

1) найти число ребер графа G;
2) найти для каждого H_i степень той вершины, удалением которой из G получен H_i;
3) определить для произвольного графа L, имеющего не более $n–1$ вершин, является ли он подграфом графа G;
4) определить является ли G связным;
5) определить является ли G деревом;
6) восстановить G, если он не является связным.

11. Докажите, что центр дерева состоит из одной вершины в случае, когда диаметр этого дерева является четным числом, и из двух смежных вершин, когда диаметр – число нечетное.
12. Найдите остовные деревья в графах K_5, $K_{3,3}$ и в графе Петерсона.

4. СВЯЗНОСТЬ

4.1. ВЕРШИННАЯ СВЯЗНОСТЬ И РЕБЕРНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Прежде чем ввести понятия вершинной и рёберной связности, рассмотрим одну математическую модель, возникающую, в частности, при проектировании и анализе сетей ЭВМ. Имеется сеть, состоящая из центров хранения и переработки информации. Некоторые пары центров соединены каналами. Обмен информацией между любыми двумя центрами осуществляется либо непосредственно по соединяющему их каналу, если он есть, либо через другие каналы и центры. Сеть считается исправной, если каждая пара центров в состоянии обмениваться информацией. Такой сети естественно сопоставить граф: вершины – центры, ребра – каналы сети. Тогда исправной сети будет соответствовать связный граф. Важным понятием является надежность (живучесть) сети, под которой обычно подразумевают способность сети функционировать при выходе из строя одного либо нескольких центров или каналов. Ясно, что менее надежной следует считать ту сеть, исправность которой нарушается при повреждении меньшего количества элементов. Оказывается, надежность сети можно измерять на основе вводимых ниже определений.

Числом вершинной связности (или просто *числом связности*) $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Пусть G – граф порядка $n>1$. *Числом реберной связности* $\lambda(G)$ графа G назовем наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Число реберной связности графа будем считать равным нулю, если этот граф одновершинный.

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (или *разделяющей вершиной*), если граф $G–v$ имеет больше компонент, чем G. В частности, если G связен и v – точка сочленения, то $G–v$ не связен. Аналогично ребро графа называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент.

Понятно, что концевая вершина моста является точкой сочленения, если в графе есть другие ребра, инцидентные этой вершине.

Если $\delta(G)$ – минимальная степень вершин графа G, то очевидно, что $\lambda(G)\leq\delta(G)$, поскольку удаление всех ребер, инцидентных данной вершине, приводит к увеличению числа компонент графа.

Теорема. Для любого графа G верны неравенства $\chi(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$.

Граф G называется *k-связным,* если $\chi(G)\geq k$, и *реберно-k-связным,* если $\lambda(G)\geq k$. Таким образом, отличный от K_1 граф называется 1-связен (односвязен) тогда и только тогда, когда он связен, а 2-связные (двусвязные) графы – это связные графы без точек сочленения, не являющиеся одновершинными.

Максимальный k-связный подграф графа называется его *k-связной компонентой*, или просто *k-компонентой*.

Теорема. Две различные k-компоненты графа имеют не более чем k–1 общих вершин.

▸ Пусть G_1 и G_2 различные k-компоненты графа G и $V_{G_1} \cap V_{G_2} = X$. Предположим, что $(X(\geq k$, и докажем, что тогда граф $G_1 \cup G_2$ должен быть k-связным. Для этого в данном случае достаточно показать, что он остается связным после удаления любых k–1 вершин, т.е. если $Y \subset V_{G_1 \cup G_2}$, $|Y| = k-1$, то граф $(G_1 \cup G_2)=Y$ связен. Положим $Y_i = (V_{G_i} \setminus X) \cap Y, i = 1,2, Y_3 = X \cap Y$. Ясно, что $|Y_i| \leq k-1, i = 1,2,3$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Поскольку $|Y_i \cup Y_3| \leq k-1, i = 1,2,$ и графы G_1 и G_2 k-связны, то графы $H_i = G_i - (Y_i \cup Y_3)$, $i = 1,2,$ связны. Так как по предположению $|X| \geq k$, то $X \setminus Y \neq \varnothing$, т.е. связные графы H_1 и H_2 имеют хотя бы одну общую вершину. Следовательно, связен граф $H_1 \cup H_2 = (G_1 \cup G_2) - Y$. Последнее означает, что граф $G_1 \cup G_2$ k-связен. Поэтому, вопреки предположению, ни G_1, ни G_2 не являются k-компонентами графа G. ◂

4.2. ДВУСВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Лемма. Степени вершин 2-связного графа больше единицы.

Лемма. Если графы G_1 и G_2 2-связны и имеют не менее двух общих вершин, то граф $G_1 \cup G_2$ также 2-связен.

Лемма. Если граф G 2-связен и P – простая цепь, соединяющая две его вершины, то граф $G \cup P$ также 2-связен.

Лемма. Если вершина v не является точкой сочленения связного графа, то любые две его вершины соединены цепью, не содержащей v; в частности, в 2-связном графе для любых трех несовпадающих вершин a, b, v имеется (a, b)-цепь, не проходящая через вершину v.

Теорема (о 2-связности). Пусть G – связный граф и $|G|>2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) граф 2-связен;
2) любые две вершины графа принадлежат простому циклу;
3) любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу;
4) любые два ребра принадлежат простому циклу;
5) для любых двух вершин a и b и любого ребра e существует простая (a, b)-цепь, содержащая e;
6) для любых трех вершин a b c существует простая (a, b)-цепь, проходящая через c.

Максимальные относительно включения элементы множества связных подграфов графа G, не имеющих точек сочленения, называют его *блоками*. Таким образом, каждый блок графа либо 2-связен, либо совпадает с K_2 или с K_1 (граф K_1 – блок тогда и только тогда, когда он является связной компонентой). Связный граф без точек сочленения также называют *блоком*. Множество вершин блока будем называть *блоковым множеством*.

Приведем несколько утверждений, которые непосредственно следуют из перечисленных в начале параграфа свойств 2-связных графов и теоремы.

1) Любые два блока графа имеют не более одной общей вершины. В частности, всякое ребро графа входит только в один его блок.
2) Если блок графа содержит вершины a и b, то он содержит и всякую простую (a, b)-цепь этого графа.
3) Если вершина v входит более чем в один блок графа G, то v – точка сочленения этого графа.
4) Система блоковых множеств графа покрывает всё множество его вершин. Каждая пара блоковых множеств либо не пересекается, либо имеет единственную общую вершину, и эта вершина является точкой сочленения графа.

Теорема Менгера. Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины графа a и b, равно наибольшему числу попарно непересекающихся простых (a, b)-цепей этого графа.

Теорема Уитни (1932) Граф k-связен тогда и только тогда, когда любая пара его несовпадающих вершин соединена по крайней мере k непересекающимися цепями.

4.3. РАЗДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА И РАЗРЕЗЫ

Во многих прикладных задачах приходится рассматривать множество ребер (а не вершин, как ранее), разделяющих вершины a и b графа G, т.е. такое множество ребер R, что a и b входят в различные компоненты графа $G–R$.

Теорема. Наибольшее число реберно-непересекающихся цепей, соединяющих две вершины графа, равно наименьшему числу ребер, разделяющих эти вершины.

Пусть $G=(V, E)$ – связный граф и $F\subset E$ – подмножество множества его ребер. При этом F называется *разделяющим множеством* тогда и только тогда, когда подграф $G'=(V, E–F)$ несвязен. Здесь через $E–F$ обозначено множество ребер, которые принадлежат E, но не принадлежат F. Разделяющие множества всегда существуют (если граф G имеет, по крайней мере, две вершины), так как всегда можно положить $F=E$.

Если дан связный граф $G=(V, E)$ и множество его вершин разбито на два непустых подмножества W и W', множество ребер, соединяющих W с W', называется *разрезом*.

Минимальные разделяющие множества, т.е. те которые не содержат собственного подмножества, разделяющего граф, называют *простыми* разрезами. Если удаление ребер, принадлежащих разрезу F, делит граф на три или более компоненты, то разрез не может быть простым. В самом деле, возвращение любого одного ребра из F может соединить не более двух компонент, и граф, полученный в результате, будет содержать все же, по крайней мере, две компоненты, что означает существование собственного подмножества разреза F, рассекающего граф.

Теорема. Остовное дерево имеет, по крайней мере, одно общее ребро с любым из разрезов графа.

Теорема. В связном графе замкнутый маршрут имеет произвольным разрезом четное число (возможно равное нулю) общих элементов. Следовательно, каждый из разрезов имеет четное число общих ребер.

Задачи

1. Докажите, что $\lambda(K_n)=n–1$. (где $\lambda(G)$ – число реберной связности)

2. Докажите, что для всякого кубического графа G справедливо $\chi(G)=\lambda(G)$ (где $\chi(G)$ – число вершинной связности).
3. Докажите, что кубический двудольный граф не имеет мостов.
4. Пусть $|G|\geq 4$ и G – минимально 2-связный граф, т.е. такой, который перестает быть 2-связным при удалении любого ребра. Покажите, что G не содержит треугольников.
5. Покажите, что в минимально 2-связном графе любая вершина смежна с вершиной степени 2.
6. Какое наибольшее число точек сочленения может быть в графе порядка n?

5. ПЛАНАРНОСТЬ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Часто встречаются ситуации, когда важно выяснить, возможно ли нарисовать граф на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом возникает понятие плоского графа. *Плоским графом* назовем граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Любой граф изоморфный плоскому графу будем называть *планарным*. О планарных графах говорят, что они *укладываются на плоскости* (имеют *плоскую укладку*).

Теорема. Каждый граф можно уложить в трехмерном евклидовом пространстве ε^3.

Очевидно:
1) что всякий подграф планарного графа планарен;
2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая его связная компонента – планарный граф.

Гранью плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена кривой, не пересекающей ребра графа. Тем самым каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной грани плоского графа. *Границей грани* будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих данной грани. Отметим, что всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Такая грань называется *внешней*, а все остальные – *внутренними*.

5.2. СВОЙСТВА ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

Лемма. Всякий планарный граф допускает такую плоскую укладку, в которой любая выбранная вершина (ребро) графа будет принадлежать внешней грани.

Лемма. Пусть граф G состоит из двух компонент H и Q, являющихся плоскими графами, и произвольным образом выбраны вершины $v_1 \in V_H$ и $v_2 \in V_Q$. Тогда граф G', полученный из G слиянием вершин v_1 и v_2 в вершину v, имеет плоскую укладку. При этом вершина v является точкой сочленения графа G'.

Лемма. Всякие две вершины, принадлежащие границе некоторой грани плоского графа, можно соединить простой цепью произвольной длины так, что выбранная грань разобьется на две грани.

Лемма. Для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань, а каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это ребро является мостом, и точно в две грани, если оно не мост.

Теорема Эйлера. Для всякого связного плоского графа верно равенство: $n-m+f=2$, где n – число вершин графа, m – число ребер, f – число граней.

Следствие 1. Число граней любой плоской укладки связного планарного (n, m)- графа постоянно и равно $m-n+2$.

Следствие 2. Для всякого планарного (n, m)-графа $m \leq 3n-6$ при $n \leq 3$.

Следствие 3. Если в связном плоском (n, m)-графе граница каждой грани является r-циклом, $r \geq 3$, то $m(r-2)=r(n-2)$.

Следствие 4. Плоский граф двусвязен тогда и только тогда, когда границей всякой его грани является простой цикл.

Следствие 5. Связный граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен.

Грань плоского графа, ограниченную циклом длины 3 будем называть *треугольником*.

Связный плоский граф называется *плоской триангуляцией*, если каждая его грань (в том числе и внешняя) является треугольником.

Максимальным плоским (планарным) графом называется n-вершинный ($n \leq 3$) граф, который перестает быть плоским (планарным) при добавлении любого ребра.

Теорема. Граф является максимальным плоским графом тогда и только тогда, когда он представляет собой плоскую триангуляцию.

Теорема Понтрягина–Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Очевидно, что если граф планарен, то любой граф, гомеоморфный ему, также является планарным.

5.3. АЛГОРИТМ УКЛАДКИ ГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

Поскольку связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарны все его блоки, а граф K_2 планарен, то будем предполагать не теряя общности, что укладываемый граф 2-связен.

Введем ряд определений. Пусть построена некоторая укладка подграфа H графа G. *Сегментом S относительно H* (иногда просто *сегментом*) будем называть подграф графа G одного их следующих двух видов:

1) связную компоненту графа $G–H$, дополненную всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и концами этих ребер.
2) ребро $e=uv \in E_G$ такое, что $e \notin E_H$, $u,v \in E_H$;

Очевидно, что в случае, когда граф G планарный, всякий сегмент, как подграф графа G, планарен, а в случае, когда G не является планарным, сегмент может быть как планарным, так и непланарным.

Вершину v сегмента S относительно H будем называть *контактной,* если $v \in V_H$. Так как в графе G нет точек сочленения, то легко доказать, что в случае, когда граф G является 2-связным, каждый сегмент содержит не менее двух контактных вершин. Договоримся на рисунках обводить контактные вершины кружочками.

Поскольку граф H плоский, то он разбивает плоскость на грани. *Допустимой гранью для сегмента* S относительно H называется грань Г графа H, содержащая все контактные вершины сегмента S. Через $\Gamma(S)$ будем обозначать множество допустимых граней для S. Может оказаться, что $\Gamma(S)=\varnothing$.

Простую цепь L сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин, назовем *α-цепью*. Очевидно, что всякая α-цепь, принадлежащая сегменту, может быть уложена в любую грань, допустимую для этого сегмента.

Алгоритм γ

Шаг 1. Выбрать некоторый простой цикл C графа G и уложить его на плоскости; положить $H=C$.

Шаг 2. Найти грани графа H и сегменты относительно H. Если множество сегментов пусто, то перейти к шагу 7.

Шаг 3. Для каждого сегмента S определить множество $\Gamma(S)$. Если существует сегмент S, для которого $\Gamma(S)=\varnothing$, то граф G непланарен, конец. Иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если существует сегмент S, для которого имеется единственная допустимая грань Г, то перейти к шагу 6. Иначе к шагу 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента S $(\Gamma(S)>1)$ выбирать произвольную допустимую грань Г.

Шаг 6. Поместить произвольную α-цепь $L \in S$ в грань Г; заменить H на $H \cup L$ и прейдем к шагу 1.

Шаг 7. Построена укладка H графа G на плоскости.

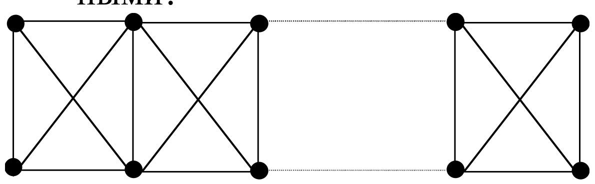
Задачи

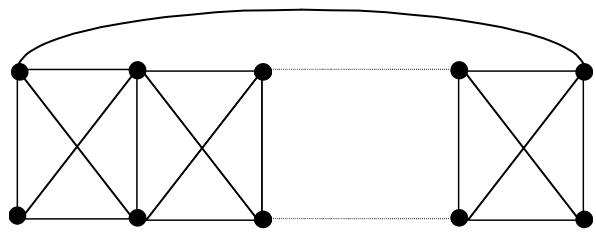
1. Доказать, что K_5 непланарен.

▸ Действительно, для графа K_5 $n=5$, $m=10$. Поэтому неравенство $3n–6 \geq m$ превращается в неверное $9 \geq 10$, т.е. граф K_5 не может быть планарен. ◂

2. Доказать, что $K_{3,3}$ непланарен.

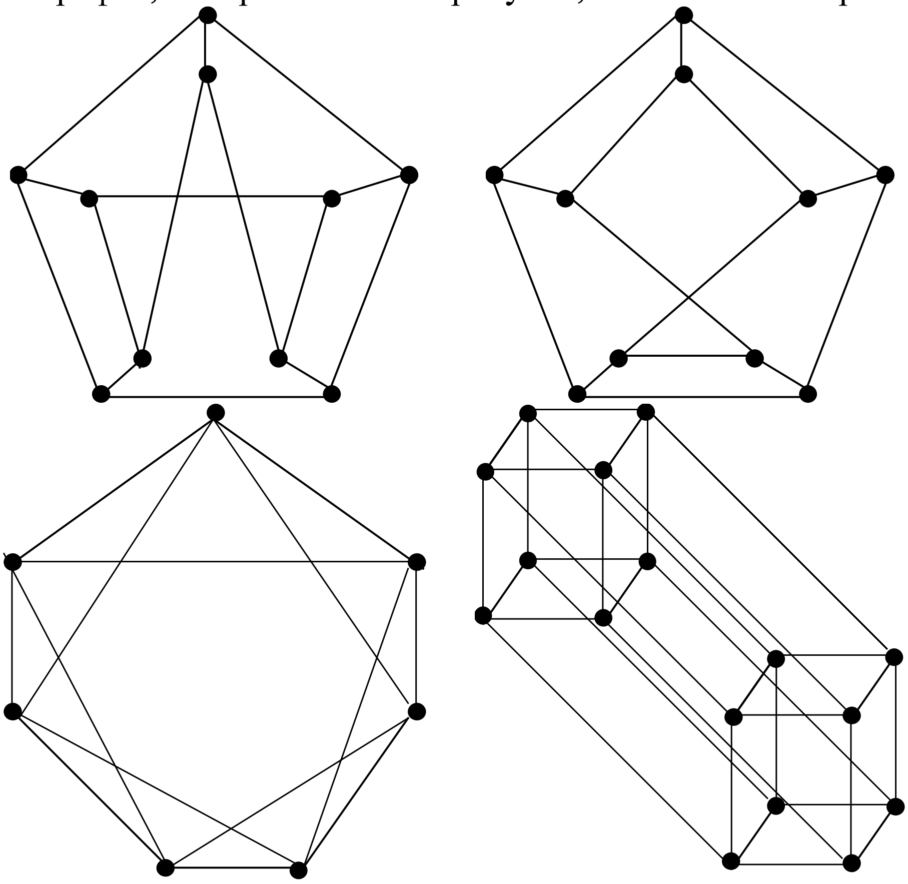
3. Покажите, что формула Эйлера следующим образом обобщается на случай несвязного плоского (n, m)- графа: $n–m+f=k+1$, где k – число компонент связности графа.
4. Для всякого связного планарного (n, m)- графа с $n\geq 3$, обхват которого равен $h\geq 3$, верно неравенство $m(h–2)\leq h(n–2)$. Используя это соотношение, докажите что граф Петерсена непланарен.
5. Доказать непланарность графа Петерсена, пользуясь теоремой Понтрягина-Куратовского.
6. Доказать, что всякий плоский граф является остовным подграфом некоторой плоской триангуляции.
7. Доказать, что для всякой плоской триангуляции $m=3n–6$, где n – количество вершин графа, а m – количество его ребер.
8. Доказать, что если число вершин плоской триангуляции не меньше четырех, то степень каждой вершины не менее трех.
9. Докажите, что для связного плоского (n, m)-графа с $n\geq 3$, грани которого не являются треугольниками, верно неравенство $m\leq 2n–4$.
10. Покажите, что всякая плоская триангуляция с $n\geq 3$ вершинами имеет ровно $2n–4$ грани.
11. Доказать, что всякий планарный граф с $n\geq 4$ вершинами имеет по крайней мере 4 вершины со степенями, не превосходящими 5.
12. При каких n графы порядка $2n$, изображенные на рисунке, являются планарными?


1 2 n


1 2 n

13. Докажите, что не существует плоского графа с пятью гранями, обладающего тем свойством, что любые две его грани имеют общее ребро.
14. Пусть G граф с n вершинами, причем $3<n<8$, и $\overline{G}$ – его дополнительный граф, тогда, по крайней мере, один из них планарен.
15. Пусть G граф с n вершинами, причем $n>11$, и $\overline{G}$ – его дополнительный граф, тогда, по крайней мере, один из них непланарен.

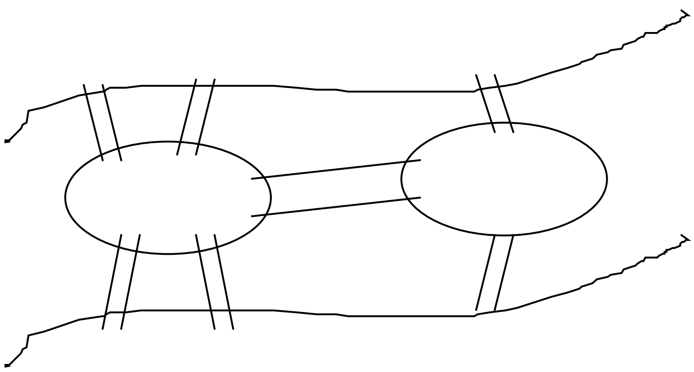
16. Какие из графов, изображенных на рисунке, являются планарными?



6. ОБХОДЫ ГРАФОВ

6.1. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Начало теории графов как раздела математики связывают с так называемой *задачей о кёнигсбергских мостах*. Эта знаменитая с свое время задача состоит в следующем. Семь мостов города Кёнигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как изображено на рисунке. Спрашивается, можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту?



Эйлер доказал неразрешимость задачи о кёнигсбергских мостах. В своей работе, опубликованной в 1736 году, он сформулировал и решил следующую общую проблему теории графов: при каких условиях связный граф содержит цикл, проходящий через каждое его ребро?

Цепь, содержащую все ребра графа, называют *эйлеровой* цепью. Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым* графом. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Теорема Эйлера. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, кода степени всех его вершин четны.

▸ Необходимость. Пусть G – эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер эйлерова цикла, а поскольку такой цикл содержит все ребра графа G, то отсюда следует четность степеней всех его вершин.

Достаточность. Предположим теперь, что степени вершин графа G четны. Начнем цепь P_1 из произвольной вершины v_1 и будем продолжать ее, насколько возможно, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени всех вершин четны, то попав в очередную отличную от v_1 вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Поэтому цепь P_1 можно продолжить путем добавления этого ребра. Таким образом, построение цепи P_1 закончится в вершине v_1, т.е. P_1 непременно будем циклом. Если окажется, что P_1 содержит все ребра графа G, то это будет требуемый эйлеров цикл. В противном случае, удалив из G все ребра цикла P_1, рассмотрим граф G_1, полученный в результате такой операции. Поскольку P_1 и G имели вершины только четных степеней, то, очевидно, и G_1 будем обладать тем же свойством. Кроме того, в силу связности графа G графы P_1 и G_1 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2. Теперь, начиная с вершины v_2, построим цикл P_2 в графе G_1 подобно тому, как строили цикл P_1. Обозначим через $P_1^{'}$ и $P_1^{''}$ части цикла P_1 от v_1 до v_2 и от v_2 до v_1 соответственно. Получим новый цикл $P_3 = P_1^{'} \cup P_2 \cup P_1^{''}$, который, начиная с v_1, проходит по ребрам цепи $P_1^{'}$ до v_2, затем обходит все ребра цикла P_2 и, наконец, возвращается в v_1 по ребрам цепи $P_1^{''}$.

Если цикл P_3 не эйлеров, то проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл и т.д. Этот процесс закончится построением эйлерова цикла. ◂

Будем говорить, что набор рёберно-непересекающихся цепей (не обязательно простых) *покрывает граф* G, если каждое ребро графа G входит в одну из этих цепей.

Лемма. Если связный граф содержит ровно k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно-непересекающихся цепей равно $k/2$.

▸ Пусть связный граф G содержит k вершин нечетной степени. По лемме о рукопожатиях k четно. Рассмотрим граф G', полученный добавлением к G новой вершины v и ребер, соединяющих v с вершинами графа G нечетной степени. Поскольку степени всех вершин графа G' четны, то G' содержит эйлеров цикл. Если теперь выбросить v из этого цикла, то получится $k/2$ цепей, содержащих все ребра графа G, т.е. покрывающих G. С другой стороны, граф, являющийся объединением r реберно-непересекающихся цепей, имеет самое большее $2r$ вершин нечетной степени. Поэтому меньшим числом цепей граф G покрыть нельзя. ◂

Естественно возникает вопрос: как найти хотя бы одни эйлеров цикл в эйлеровом графе G, т.е. как занумеровать ребра графа числами 1, 2, ..., $|E_G|$ с тем, чтобы номер, присвоенный ребру, указывал, каким по счету это ребро проходится в эйлеровом цикле?

Алгоритм Флёри

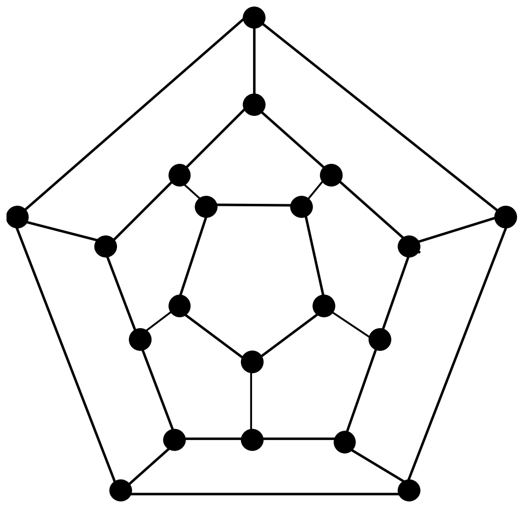
Шаг 1. Начиная с произвольной вершины n, присвоить произвольному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Затем вычеркнуть ребро $\{u, v\}$ и перейти в вершину v.

Шаг 2. Пусть w – вершина, в которую перешли в результате выполнения предыдущего шага, и k – номер, присвоенный некоторому ребру на этом шаге. Выбрать любое ребро, инцидентное вершине w, причём мост выбирать только в том случае, когда нет других возможностей; присвоить выбранному ребру номер k+1 и вычеркнуть его.

Шаг 3. Повторять шаг 2 пока не все ребра вычеркнуты.

6.2. ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам этот цикл также называется *гамильтоновым*. *Гамильтоновой* называют и простую цепь, содержащую каждую вершину графа. Слово «гамильтонов» в этих определениях связано с именем известного ирландского математика У. Гамильтона, которым в 1859 году предложена следующая игра «Кругосветное путешествие». Каждой из 20 вершин додекаэдра (см. рисунок) приписано название одного из крупных городов мира. Требуется, переходя от одного города к другому по ребрам додекаэдра, посетить каждый город в точности один раз и вернуться в исходный город.



Теорема Хватала. (В. Хватал, 1972). Граф со степенной последовательностью $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \le k \le n/2$, истинна импликация $(d_k \le k) \le (d_{n-k} \le n-k)$.

Теорема Оре (О.Оре, 1960). Если для любой пары u и v несмежных вершин графа G порядка $n \ge 3$ выполняется неравенство $\deg u + \deg v \ge n$, то G – гамильтонов граф.

Теорема Дирака (следствие теоремы Оре) (Г.Дирак,1952 г.). Если $|G|=n \ge 3$ и для любой вершины v графа G выполняется неравенство $\deg v \ge n/2$, то G – гамильтонов граф.

Нетрудно заметить, что во всяком n- вершинном графе, удовлетворяющем условиям любой из рассмотренных выше теорем, число ребер не меньше чем $(n-1)^2/4$. С другой стороны, n- вершинный планарный граф, как мы знаем, содержит не более $3n-6$ ребер. Поэтому рассмотренные выше достаточные условия заведомо неприменимы к планарным графам.

Если в графе G порядка n фиксировать одну вершину и обход всегда начинать с нее, то всякому гамильтонову циклу очевидным образом будет соответствовать перестановка элементов множества V_G. Тем самым найти гамильтонов цикл либо убедиться в отсутствии такого цикла можно путем перебора $(n-1)!$ перестановок. Если граф G гамильтонов, то проделать этот перебор в полном объеме придётся только в случае крайнего невезения – когда нужная, т.е. отвечающая гамильтонову циклу перестановка встретится последней в этом процессе. Если же G

– не гамильтонов граф, то действуя подобным образом, придется в любом случае проверить все (n–1)! перестановок. К сожалению, алгоритмов нахождения гамильтонова цикла не существует, поэтому на практике применяют различные алгоритмы частичного перебора. Кроме того, в общем случае, нет способа определения гамильтоновости графа.

Во многих прикладных задачах требуется строить гамильтонову цепь, а не цикл. Граф, содержащий такую цепь, называется *трассируемым*.

Задачи

1. Доказать, что связный граф имеет эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем ровно две вершины нечетной степени.
2. Доказать, что граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждый его блок эйлеров.
3. Докажите, что эйлеров граф является объединением реберно-непересекающихся простых циклов.
4. Пусть G – дерево. Когда граф G^2 эйлеров?
5. Покажите, что граф Петерсена не гамильтонов.
6. Найти решение задачи Гамильтона о кругосветном путешествии.
7. Привести примеры графов, в которых:
   1) есть гамильтонов цикл, но нет эйлерова цикла;
   1) есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова цикла;
   1) есть и эйлеров, и гамильтонов цикла;
   1) нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла.
8. Доказать, что граф, обладающий гамильтоновым циклом, не имеет точек сочленения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М., 1988.
3. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
4. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов.– М., 1976.
5. Зыков А.А. Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука, 1969.
6. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968.
7. Форд Л.Р., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.
8. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1980.