МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Северо-Западный заочный политехнический институт

Кафедра информатики

Основы дискретной математики

Рабочая программа
Методические указания
Задания на контрольную работу

Факультеты все, кроме ТвиМ

Специальности все, кроме 060800, 240100, 220100

Санкт-Петербург
1998

Утверждено редакционно-издательским советом института
УДК (519.2(07))

Основы дискретной математики: Рабочая программа. Методические указания. Задания на контрольную работу.

Данный сборник охватывает следующие темы: элементы теории графов, элементы алгебры логики, формальные языки и автоматы. Варианты заданий составлены на основании программы по курсу математических дисциплин для студентов инженерно-технических вузов, утвержденных Учебно-методическим управлением высшего образования 05.07.1988 г. Индекс: ГУНУ 1/1.

Рассмотрено на заседании кафедры вычислительной математики 20.05.1988 г., одобрено методической комиссией ФИСУ 23.11.1998 г.

Рецензенты: Кафедра вычислительной математики
Северо-Западного заочного политехнического института.
(Бессонова Т.Д. , доц.)
Кафедра математики, информатики и вычислительной итехники ВТИ ЖДВ и ВОСД
(Морозов В.А., канд. Физ.-мат. Наук, доц).

Составители: В.В. Щипцов, канд. техн. наук, доц.;
В.А. Шарый, канд. физ.-мат. наук, доц.;
Н.Н. Козлова, канд. техн. наук, доц.

Предисловие

В связи с широким внедрением вычислительной техники необходимо знать основные принципы, которые используются при подготовке решения задач на ЭВМ (формализация задач, ее дискретизация, составление логических выражений и т.д.)

Изучив раздел «Основы дискретной математики» студенты смогут на предварительном этапе так подготовить задачу, чтобы свести к минимуму как, время решения задач, так и объем используемой оперативной памяти ЭВМ.

Рабочая программа

(объем курса 14 часов)

Раздел 1. Элементы теории графов. (4 часа)

Определение графа. Геометрическая реализация графа. Основные понятия и определения теории графов. Классификация задач теории графов. Задача о минимальном числе аварий. Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры.

Раздел 2. Элементы алгебры логики. (6 часов)

Высказывания, значение истинности высказывания, эквивалентные высказывания. Понятие двоичной переменной и булевой функции. Элементарные функции алгебры логики, сложные функции. Формулы Мограна.

Совершенная дизъюнкция и конъюнкция нормальной формы. Полные системы функций.

Построение минимальных ДНФ и КНФ.

Применение алгебры логики к анализу и синтезу контактных схем.

Раздел 3. Формальные языки и автоматы. (4 часа).

Основные понятия и определения формальных языков. Изображение языков в виде графа. Понятия и типы дискретных автоматов. Задачи математического исследования дискретных автоматов:

1.анализ поведения ДА.

2. дискретные автоматы с памятью.

3. применение алгебры логики к анализу дискретных автоматов.

Тематический план лекций

*Лекция 1.*понятие Булевой функции. Элементарные и сложные функции алгебры логики. Формулы Моргана. (2 часа)

Лекция 2. Минимизация функций алгебры логики. Построение сокращенных и минимальных дизъюнктивных нормальных форм. Техническое применение алгебры логики. (2 часа)

Лекция 3. Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Комбинаторные задачи теории графов. Алгоритмы на графах. Задача о кратчайшем пути. (2 часа)

Лекция 4. Формальные грамматики и языки. Понятие дискретного автомата. Типы дискретных автоматов. (2 часа).

Перечень тем практических занятий.

Тема 1. Задачи о кратчайшем пути. (2 часа)

Тема 2. Минимизация логических выражений. Применение алгебры логики к синтезу контактных схем. (2 часа)

Тема 3. Применение алгебры логики к синтезу дискретных автоматов. (2 часа)

Литература

Основная:

1. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. –М.: Высшая школа, 1998, 310 с.
2. Потапенко А.А. Элементы алгебры логики. Учебн. пособие –Л.: СЗПИ, 1977,38 с.

Дополнительная:

3. Оре О. Графы и их применение. –М.: Мир, 1985, 174 с.

Введение

В настоящее время наряду с традиционными разделами классической математики, применяемыми в различных сферах деятельности человеческого общества, широкое распространение получили методы дискретной математики, составными частями которой являются: теория графов, алгебра логики, формальные языки и дискретные автоматы. Эти методы очень важны, например, при разработке различных технических устройств и систем с дискретным принципом действия, а также в планировании, при решении ряда транспортных задач, при изучении функционирования “ малых групп” в социологии и социальной психологии и многое другое.

Глава 1. Элементы теории графов

§1.1 Определения. Классификация задач теории графов

В дискретной математике важное место занимают задачи, связанные с упорядочением тех или иных объектов, а также задачи, в которых изучаются отношения между различного рода объектами. Приведем в качестве примера несколько таких задач.

1. Нанести некоторую схему на печатную плату таким образом, чтобы любые два проводника не пересекались между собой ни в каких точках (узлах), кроме данных.

2. Указать для почтальона такой маршрут, чтобы пройденное им расстояние было минимальным.

3. Для имеющейся сети шоссейных дорог, соединяющих данные населенные пункты, указать маршрут между двумя любыми заданными пунктами, который обеспечил бы максимальный транспортный поток между ними.

Задачи такого рода удобно формулировать и решать, пользуясь рисунком, состоящим из точек (вершин) и отрезков (ребер или дуг), соединяющих эти вершины. Структуры такого типа объединяются названием - графы, а изучающий их раздел дискретной математики носит название теории графов. Приведем ряд определений и понятий, связанных с графами.

Определение графа

Пусть задано некоторое конечное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, элементы которого будем называть вершинами. Образуем из него новое множество $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества X . Будем при этом различать два случая :

а) когда безразлично в каком порядке берутся вершины при образовании из них пар; в этом случае пара (x_i, x_j) (или (x_j, x_i) - все равно) называется ребром, соединяющим вершины x_i и x_j ;

б) когда существенно, в каком порядке выбираются вершины, т.е. когда пары (x_i, x_j) и (x_j, x_i) считаются различными; в этом случае пару (x_i, x_j) будем называть дугой.

Пара множеств G= (X, U) называется конечным графом если имеет место случай “ а “. В случае “ б “ пара (X, U) называется конечным ориентированным графом или орграфом. Здесь U и U - множество ребер и дуг соответственно. В случае графа говорят, что ребро (x_i, x_j) инцидентно вершинам x_i, x_j. В свою очередь вершины x_i, x_j инцидентны ребру (x_i, x_j). Если граф ориентированный, то говорят, что дуга (x_i, x_j) исходит из вершины x_i и заходит в вершину x_j. Вершину x_i называют при этом предшественником вершины x_j, а вершину x_j последователем вершины x_i.

Подграфом графа G=(X,U) называется граф $G' = (X',U')$, такой что X' является подмножеством множества X, а U' подмножеством множества U. Если при этом X' совпадает с X, то G' называется остовным подграфом графа G. Граф называется полным, если для любых двух его вершин существует соединяющее их ребро.

На рис. 1а изображен граф, на рис. 1б- один из его подграфов, на рис. 1в остовной подграф этого графа. На рис. 1г приведен пример полного графа с четырьмя вершинами.

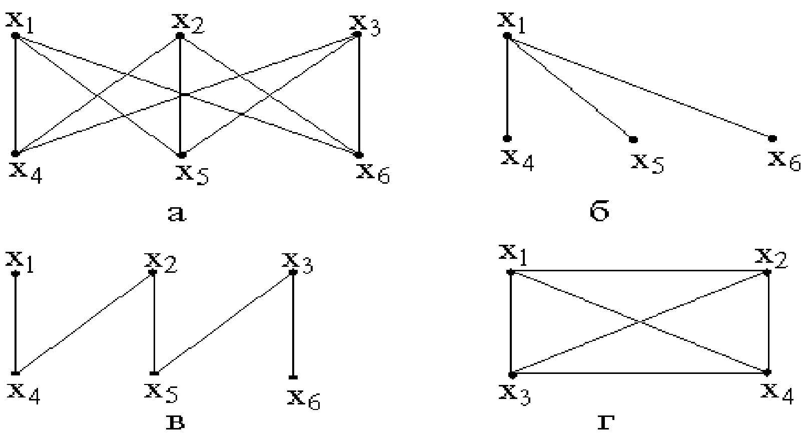


Рис.1

Геометрическая реализация графа

Не следует путать понятие графа с его геометрической реализацией. Для знакомства с этим понятием введем предварительно понятие геометрической фигуры.

Под геометрической фигурой в обычном трехмерном пространстве или на плоскости будем понимать множество точек таких, что некоторые из них соединены отрезками линий; при этом пересечение допускается только в их концах. Фигура называется геометрической реализацией графа, если между

вершинами графа и вершинами фигуры, а также между ребрами графа и отрезками линий фигуры существует взаимно однозначное соответствие.
Можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. Для каждого конечного графа существует его геометрическая реализация в трехмерном евклидовом пространстве. Заметим, что сформулированная теорема не справедлива для случая плоскости, т.е. не всякий граф допускает на плоскости геометрическую реализацию. В частности, приведенный на рис.1а граф не может быть реализован на плоскости, т.е. его нельзя расположить на плоскости таким образом, чтобы ни одна из пар линий не пересекалась. В связи со сказанным большой теоретический и прикладной интерес представляет вопрос о плоской реализуемости произвольного конечного графа. Ответ на него дали независимо друг от друга выдающийся русский математик академик Л.С. Понтрягин и известный польский ученый К. Куратовский. Они показали, что для того, чтобы конечный граф можно было реализовать на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы он не имел подграфов, вида приведенных на рис.1б,в.

Кроме геометрической реализации графа, существуют и другие способы задания графа, одним из которых является задание графа с помощью матрицы смежностей. Этот способ, изложение которого приведено ниже, очень удобен для “введения” графа в память ЭВМ. Построение матрицы смежностей производится следующим образом.

Пусть $G=(X,U)$ граф, где $X=\{x_1, x_2, \dots ,x_n\}$ - множество его вершин. Любая пара взятых вершин соединена или нет ребром. Нарисуем прямоугольную таблицу (матрицу) размером $n\times n$, элементы которой формируются по следующему правилу. Если в графе G вершины x_i и x_j соединены ребром, в таблице на пересечении i- ой строки и j- го столбца поставим единицу, в противном случае на соответствующем месте поставим нуль. Заполненная таким образом таблица u носит название матрицы смежности. Нетрудно убедиться, что матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, элементами которой будут нули. Если граф имеет петли, т.е. ребра вида (x_i, x_i) или дуги, выходящие из некоторой вершины и в нее же заходящие, то на главной диагонали в соответствующих местах будут стоять единицы.

Для графа изображенного на рис.1а, например, матрица смежностей имеет вид:

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	1	1	1
x_2	0	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	0	0
x_5	1	1	1	0	0	0
x_6	1	1	1	0	0	0

Для ряда практических задач удобно использовать понятие взвешенного графа. Граф называется взвешенным, если каждому его ребру (дуге) (x_i , x_j) поставлено в соответствие вещественное число p_{ij} , называемое весом этого ребра (дуги). Для взвешенного графа аналогичным образом определяется матрица весов. В зависимости от конкретной задачи веса несуществующих ребер считаются равными нулю или бесконечности.

Простой путь, цикл графа. Дерево

Приведем еще ряд понятий и определений , которые нам потребуются в дальнейшем.

Простой путь в графе - это последовательность смежных ребер, у которой все вершины, за исключением, может быть, последней и первой, различны. Простой путь можно задавать последовательностью смежных вершин в виде: x_{i1}, x_{i2}, ... , x_{ip}. Если G - орграф, то путь в нем называется ориентированным. В графе G расстояние от вершины x_i до вершины x_j - это наименьшая из длин путей между ними. Если в пути первая и последняя вершины совпадают, то такой путь называется циклом. Так, для графа на рис.1а из вершины x_1 в x_4 можно попасть, например, путями: x_1, x_4; x_1, x_5, x_2, x_4. На этом же графе путь x_1, x_5, x_2, x_4, x_1 является циклом.

Если для любой пары вершин существует хотя бы один путь между ними, то граф называется связным. Так, все графы, изображенные на рис.1(а-г), являются связными.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Если у дерева выделена одна вершина, то она называется корнем дерева, а сам граф - корневым деревом. Так, легко видеть, что графы 1б, 1в, являются деревьями, причем, 1б - корневым деревом (корень x_1); графы же 1а, 1г не являются деревьями, как содержащие циклы.

Любопытно, что теория деревьев была впервые разработана при изучении конкретных физических объектов и связей между ними. В 1847г. Г. Кирхгоф, изучая вопрос об определении тока в каждом контуре и проводнике заданной электрической цепи, заменил электрическую цепь соответствующим графом. Кирхгоф показал, что для решения поставленной задачи, достаточно рассматривать циклы полученного графа. Он установил также, что каждый такой цикл определяется любым из остовных деревьев, т.е. остовных подграфов, являющихся деревьями. Через 10 лет А.Кели, пытаясь перечислить изомеры предельных углеводородов с данным числом атомов углерода, пришел к абстрактной постановке задачи: найти число деревьев с заданным количеством вершин, таких, что вершине могут быть смежны одно или четыре ребра. Лишь в 1869г. известный математик К. Жордан независимо от работ Кирхгофа и Кели начал систематически изучать деревья, как абстрактные математические объекты.

Классификация задач теории графов

Как уже было отмечено выше, в значительной мере, задачи теории графов берут свое начало в химии, физике, биологии, социологии и других прикладных дисциплинах. Формулировка задач на языке теории графов часто облегчает процесс вычислений и, что более важно, позволяет на едином языке формулировать задачи, кажущиеся далекими друг от друга в своей первоначальной постановке. Задачи, возникающие в теории графов, условно можно разбить на два класса:

1. Собственные задачи теории графов, в частности, задачи подсчета числа объектов с заданными свойствами.

2. Задачи, связанные с построением того или иного объекта на графе, явного задания некоторой " наилучшей" конфигурации на графе. Это, так называемые, алгоритмы на графах.

Приведем примеры некоторых задач, принадлежащих этим классам. Начнем с задач первого класса.

Сколько существует графов с некоторыми заданными свойствами? Вот общая задача подсчета.

§ 1.2. Задача о минимальном числе аварий

Вернемся к сформулированной во введении задачи о нанесении схемы на печатную плату. Заменяя эту схему соответствующим графом, мы приходим к выводу, что поставленная задача будет разрешима только в том случае, если в графе нет подграфов типа Понтрягина-Куратовского, о которых шла речь выше. Ослабим требование на пересечение проводников во внутренних точках и разрешим им пересекаться, но так, чтобы получилось минимальное число пересечений. Тогда приходим к известной прикладной задаче о минимальном числе аварий, которая формулируется следующим образом:

На кирпичном заводе имеется m печей и n платформ, на которые укладываются кирпичи для последующей их транспортировки. От каждой печи кирпичи можно перевозить вагонетками ко всем платформам (рис.2).

m печей

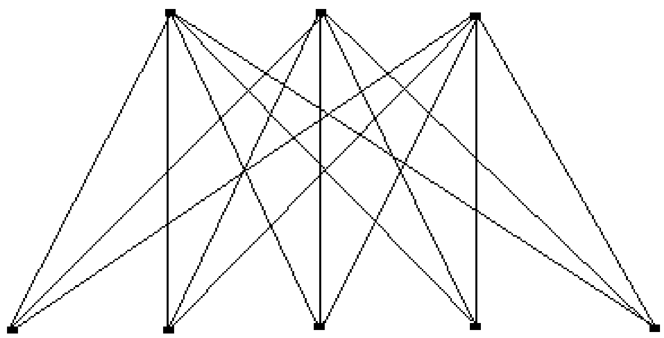


Рис.2

В местах пересечения путей вагонетки часто сходят с рельсов, поэтому таких пересечений должно быть как можно меньше. Какое минимальное число пересечений возможно, если в одной точке могут пересекаться не более чем два пути.

Если обозначить через I(m,n) искомое число пересечений, то для величины I(m,n) можно получить следующее соотношение [1]

$$I(m,n) \geq \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & \text{если } m=2r,\ n=2s; \\ (r^2 - r)\, s^2, & \text{если } m=2r,\ n=2s+1 \\ r^2 (s^2 - s), & \text{если } m=2r+1,\ n=2s \\ r^2 s^2, & \text{если } m=2r+1,\ n=2s+1 \end{cases}$$

После знакомства в общих чертах с задачами теории графов первого класса, приведем постановку некоторых задач второго класса, на одной из которых - задаче о кратчайшем пути - остановимся более подробно.

§ 1.3. Алгоритмы на графах

В задачах этого класса производится поиск такой конфигурации ребер (дуг) и вершин заданного графа, которая обладала бы некоторым оптимальным свойством. Говоря иными словами, на графе выбирается подграф, обладающий этим свойством. Как правило, для конечных графов эта задача принципиально всегда разрешима. Для этого достаточно перебрать все возможные варианты и выбрать из них наилучший в соответствующем оптимальном смысле. Однако, в подавляющем большинстве случаев подобный перебор практически не осуществим за любое реальное мыслимое время ввиду обилия имеющихся возможных вариантов. Поэтому приходится изобретать алгоритмы, уменьшающие количество перебираемых вариантов.

Приведем теперь несколько задач, связанных с практическими проблемами, возникающими в различных областях человеческой деятельности.

Задача о минимальном остовном дереве

На практике очень часто решается задача о построении сетей связи, газопроводов, линий электропередач с минимальной “ стоимостью “, причем, под “ стоимостью “ соответствующих объектов можно понимать не только финансовые затраты, но также и количество материала, требующееся для построения объекта. На языке теории графов эта задача формулируется, следующим образом:

Дан взвешенный граф с n вершинами. Построить для него остовное дерево с минимальным суммарным весом ребер. Здесь в качестве вершин графа выступают пункты, к которым следует проводить элементы соответствующей сети, а в качестве ребер - участки этой сети. Вес p_{ij} ребра (x_i , x_j) в зависимости от конкретной задачи может интерпретироваться, как количество материала, используемого на изготовление ребра (x_i , x_j), или его денежную стоимость.

Опишем в общих чертах одну из процедур решения задачи о минимальном остовном дереве - так называемый, алгоритм ближайшего соседа. Обозначим через n число вершин и через m - число ребер графа.

1. Выбираем произвольную вершину, скажем x_1, и сравниваем веса всех ребер, инцидентных этой вершине. Ребро с минимальным весом включаем в искомое дерево. Другую вершину выбранного ребра обозначим через x_2.

2. Просматриваем все ребра, отличные от (x_1, x_2), инцидентные вершинам x_1 и x_2, выбираем из них ребро с минимальным весом и включаем его в будущее дерево. Другую вершину, инцидентную этому ребру, обозначим через x_3.

3. Рассматриваем теперь три вершины x_1, x_2, x_3, сравниваем веса ребер, инцидентных каждой из них и отличных от двух уже выбранных. Ребро с наименьшим весом включаем в искомое дерево.

Дальнейшая процедура ясна: алгоритм прекращает работу после, того, как будут пройдены все n вершины графа. Мы оставляем без доказательства два следующих утверждения:

а). В процессе построения мы никогда не получим циклов,

б). Описанная выше процедура действительно порождает минимальное остовное дерево.

Задача о кратчайшем пути

Многие прикладные задачи на языке теории графов могут быть сформулированы следующим образом:

Пусть дан граф такой, что для любых двух его вершин из одной исходит, а в другую заходит не более одного ребра (иначе говоря, граф не имеет параллельных ребер). Пусть, кроме того, каждому ребру (x_i, x_j) приписано неотрицательное число R_{ij} - его вес (здесь удобно интерпретировать веса ребер как их длины). Веса не существующих ребер будем считать как угодно большими и обозначать их символом ∞ . Для любых двух выделенных вершин графа требуется найти длину кратчайшего пути между ними и указать этот путь.

Алгоритм, находящий этот кратчайший путь (алгоритм Дейкстры), состоит в присваивании вершинам графа временных меток, которые по определенному правилу заменяются постоянными. В общем виде рассматриваемый алгоритм выглядит следующим образом.

Первой из двух выделенных вершин, скажем x_1, присваиваем постоянную метку О (расстояние вершины до самой себя), а всем остальным вершинам присваиваем временные метки ∞. Дальнейшая процедура состоит в том, чтобы определенным образом перемечать вершины, присваивая некоторым из них постоянные метки. Делается это так.

1. Если вершины x_j не имеют окончательных меток и они являются последователями вершины x_i, которой на предыдущем шаге была присвоена постоянная метка $L^*(x_i)$, то для каждой из вершин x_j вычисляется новая временная метка, равная

$$\min \{L(x_j), R_{ij} + L^*(x_i)\}, \text{ где} \qquad (1)$$

$L(x_j)$ - старая временная метка вершины x_j,

R_{ij} - расстояние от вершины x_i до x_j.

2. Из всех имеющихся временных меток (сюда входят не только метки вершин x_j, последователей вершины x_i) выбирается наименьшая, которая становится постоянной для своей вершины.

Процедура заканчивается после того, как второй из выделенных вершин, до которой ищется кратчайший путь, будет присвоена постоянная метка. Затем по имеющимся постоянным меткам восстанавливается кратчайший путь.

Рассмотрим конкретный пример.Пусть требуется найти кратчайший путь между вершинами x_1 и x_8 в графе, приведенном на рис. 3. Расстояния между вершинами графа даны в таблице 1 (для простоты знак ∞ в таблице опущен).

Шаг 1. Полагаем $L^*(x_1)= 0$ (знак $*$ у метки означает, что рассматриваемая метка постоянная); $L(x_j) = \infty$ (j=2, 3, ... , 8) - все вершины, кроме первой, имеют временные метки.

Шаг 2. Пусть $\Gamma(x_1)$ - множество вершин - последователей вершины x_1. В нашем случае $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$. Вычисляем новые временные метки вершин из $\Gamma(x_1)$ в соответствии с (1)

$$L(x_2) = \min\{\infty, 2+0\} = 2,$$
$$L(x_3) = \min\{\infty, 1+0\} = 1,$$
$$L(x_4) = \min\{\infty, 6+0\} = 6,$$
$$L(x_6) = \min\{\infty, 9+0\} = 9.$$

Шаг 3. Превращаем временные метки в постоянные:

$$\min_{2 \le j \le 8} L(x_j) = \min\{2, 1, 6, \infty, 9, \infty, \infty\} = 1$$

Вершина x_3, как имеющая минимальную временную метку, получает постоянную метку $L^*(x_3) = 1$.
Результаты вычислений будем оформлять в виде таблицы 2.

Таблица 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		2	1	6		9		
x_2	2			3	5			
x_3	1				1			
x_4	6	3			2	2		
x_5		5	1	2			3	
x_6	9			2			2	2
x_7					3	2		1
x_8						2	1	

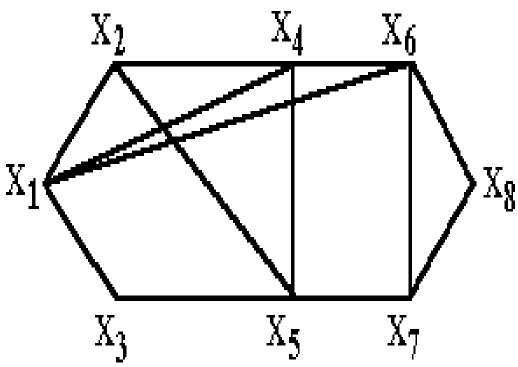


Рис.3

Вторая итерация.

Шаг 1. Рассматриваем $\Gamma(x_3) = \{ x_1, x_5 \}$.
Временную метку имеет только вершина x_5. Обновляем ее (метку).

$L(x_5) = \min\{\infty, 1+1\} = 2$

Шаг 2. Вычисляем min по всем временным меткам.
$\min\{ L(x_2), L(x_4), L(x_5), L(x_6), L(x_7), L(x_8) \} = \min\{2, 6, 2, 9, \infty, \infty\} = 2$.
В качестве постоянной можно взять любую из меток $L(x_2)$ и $L(x_5)$, которые совпадают и равны вычисленному минимуму.
Пусть постоянную метку получит, например, вершина x_2, т.е. $L^*(x_2)=2$.

Таблица 3

вершины	Итерации							
x_1	0	1	2	3	4	5	6	7
x_2	0^*							

x_3	∞	2	2^*					
x_4	∞	1^*						
x_5	∞	6		5	4^*			
x_6	∞	∞	2	2*				
x_7	∞	9				6	6^*	
x_8	∞	∞	∞	∞	5	5^*		
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6	6^*

Третья итерация.

Шаг 1. $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_4, x_5\}$. Вершины x_4 и x_5 имеют временные метки. Обновляем метки.

$L(x_4) = \min\{6, 3+2\} = 5$,

$L(x_5) = \min\{2, 5+2\} = 2$.

Шаг 2. $\min\{L(x_4), L(x_5), L(x_6), L(x_7), L(x_8)\} = \min\{5,2, 9, \infty, \infty\} =2$. Наименьшую метку имеет вершина x_5. Эта метка становится постоянной, т.е. $L^*(x_5) = 2$.

Четвертая итерация.

Шаг 1. $\Gamma(x_5) = \{x_2, x_3, x_4, x_7\}$. Временные метки имеют вершины x_4 и x_7.

Обновляем их.

$L(x_4) = \min\{5, 2+2\} = 4$,

$L(x_7) = \min\{\infty, 3+2\} = 5$.

Шаг 2. $\min\{L(x_4), L(x_6), L(x_7), L(x_8)\} = \min\{4, 9, 5, \infty\} = 4$.

Величина x_4 получает постоянную метку $L^*(x_4) = 4$.

Пятая итерация.

Шаг 1. $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$. Временную метку имеет только вершина x_6. Ее новая метка

$L(x_6) = \min\{9, 2+4\} = 6$,

Шаг 2. . $\min\{L(x_6), L(x_7), L(x_8)\} = \min\{6, 5, \infty\} = 5$.

Полагаем $L^*(x_7) = 5$.

Шестая итерация.

Шаг 1. $\Gamma(x_7) = \{x_5, x_6, x_8\}$. Временные метки - у вершин x_6 и x_8. Имеем

$L(x_6) = \min\{6, 2+5\} = 6$,

$L(x_8) = \min\{\infty, 1+5\} = 6$.

Шаг 2. $\min\{L(x_6), L(x_8)\} = \min\{6, 6\} = 6$.

Любую из меток $L(x_6)$, $L(x_8)$ можно сделать постоянной. Пусть $L^*(x_6) = 6$.

Седьмая итерация.

Шаг 1. $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_4, x_7, x_8\}$. Единственная вершина из $\Gamma(x_6)$ с временной меткой - это x_8.

$L(x_8) = \min\{6, 2+6\} = 6$.

Шаг 2. $\min\{L(x_8)\} = \min\{6\} = 6$. Вершина x_8 получает постоянную метку $L^*(x_8) = 6$.

Процесс расстановки меток закончен. Значение постоянной метки вершины x_8 дает кратчайшее расстояние между x_1 и x_8, которое равно 6.

Для нахождения кратчайшего пути между x_1 и x_8 воспользуемся соотношением

$$L^*(x_j) = L^*(x_i) + R_{ij}, \quad (2)$$

в котором вершина x_i предшествует вершине x_j. Полагаем в этом соотношении j=8 и ищем значение i, т.е. вершину, предшествующую вершине x_8 на кратчайшем пути. Имеем

$$6 = L^*(x_i) + R_{ij}, \quad (3)$$

На графе (рис.3) вершина x_8 имеет только две смежные с ней вершины x_6 и x_7. Непосредственной проверкой убеждаемся, что только $L^*(x_7) = 5$ и $R_{78} = 1$ удовлетворяют соотношению (3), а данные, связанные с вершиной x_6, ему не удовлетворяют. Следовательно, на кратчайшем пути из x_1 в x_8 вершине x_8 предшествует вершина x_7. Аналогичным образом находим, что вершине x_7 предшествует вершина x_5, так как

$5 = L^*(x_7) = L^*(x_5) + R_{57} = 2+3.$

Вершине x_5 предшествует вершина x_3 :

$2 = L^*(x_5) = L^*(x_3) + R_{35} = 1+1,$

а вершине x_3 предшествует вершина x_1. Таким образом, кратчайший путь из x_1 в x_8 $S=\{x_1, x_3, x_5, x_7, x_8\}$.

3) Построим дерево кратчайших путей для данного графа. Говоря другими словами, следует найти связный подграф исходного графа, который не содержал бы циклов и в котором длина пути от вершины x_1 (корня дерева) до каждой из вершин графа была бы наименьшей по сравнению с любым другим путем из x_1 до рассматриваемой вершины. Один такой путь из x_1 в x_8 уже найден в предыдущем пункте. Очевидно, что каждый из путей из x_1 до любой вершины построенного кратчайшего пути, также будет минимальным. Остается найти кратчайшие пути из x_1 до вершин графа, не лежащих на S. Имеем 3 вершины x_2, x_4, x_6, не лежащие на S. Очевидно, что кратчайший путь из x_1 в x_2 совпадает с ребром графа $x_1 x_2$.

Найдем кратчайший путь из x_1 в x_6. Запишем соотношение (2) для вершины x_6 (j=6) и найдем вершину, предшествующую x_6, т.е. вычислим значение x_i. В соответствии с таблицей 2

$$6 = L^*(x_6) = L^*(x_i) + R_{i6}. \quad (4)$$

Вершина x_6 имеет четыре смежных с ней вершины: x_1, x_4, x_7, x_8. Как видно из таблиц 1,2, только данные вершины x_4 $L^*(x_4) = 4$, $R_{46} = 2$ удовлетворяют соотношению (4), а данные вершин x_1, x_7, x_8 нет. Следовательно, вершина x_4 является предшествующей для x_6 на кратчайшем пути из x_1 в x_6. Найдем далее вершину, которая предшествует вершине x_4. Для этого запишем соотношение (2) для j=4

$$4 = L^*(x_4) = L^*(x_i) + R_{i4} .$$

Рассуждая аналогичным образом, находим, что из четырех вершин x_1, x_2, x_5, x_6 только данные вершины x_5 ($L^*(x_5) = 2$, $R_{54} = 2$) удовлетворяют последнему соотношению. Следовательно, вершина x_5 предшествует вершине x_4. Оставшаяся часть кратчайшего пути из x_1 до x_5, очевидно, совпадает с путем (x_1, x_3, x_5). Итак , кратчайший путь из x_1 в x_6 таков (x_1, x_3 , x_5, x_4, x_6). Построим далее остовное дерево кратчайших путей. Соответствующий этому дереву граф представлен на рис.4.

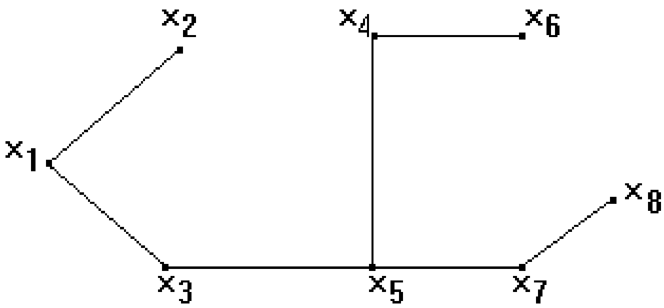


Рис.4

Заметим, что сравнение рисунков 3 и 4 подтверждает известную теорему о графах: наименьшее число ребер p , которое нужно удалить из связного графа,чтобы получить дерево, удовлетворяет соотношению

$p = N - n + 1$,

где N - число ребер исходного графа,

n - число вершин графа.

В нашем случае $p = 11 - 8 + 1 = 4$, т.е. количество удаляемых ребер графа для получения дерева не может быть меньше четырех. Непосредственный подсчет показывает, что в рассматриваемой задаче оно равно шести.

Глава 2. Элементы алгебры логики

§ 2.1. Понятие высказывания. Двоичные переменные

Математическая логика - это наука, изучающая правила построения математических доказательств. Одним из разделов математической логики является алгебра логики, которая имеет дело с высказываниями.

Под высказыванием мы будем понимать всякое предложение, которое может быть истинным или ложным. Алгебра логики по определенным правилам записывает высказывания в виде формул, которые аналогичны формулам обычной арифметики. Применяя формальные преобразования к логическим формулам, в алгебре логики из исходных посылок получают их логические следствия, т.е. новые знания об изучаемом явлении. Высказывания принято обозначать буквами латинского алфавита: A, B, C, a, b и т.д.

Приведем примеры некоторых высказываний:

A: - ”8 - четное число”;

B: - “снег - зеленый”;

C: - “всякий прямоугольник есть параллелограмм”;

a: - “всякий ромб есть квадрат”.

В этих примерах высказывания A, C - истинные высказывания, B, a - ложные.

В алгебре логики не интересуются конкретным содержанием высказываний, а только тем, являются ли они истинными или ложными. При этом условились истинному высказыванию приписывать значение 1, а ложному 0. Так, в наших примерах имеем

$$A=1,\ B=0,\ C=1,\ a=0.$$

Два высказывания A и B называются эквивалентными, если значения их истинности одинаковы. При этом пишут A=B. Например, высказывания: “снег - зеленый”, “всякий ромб есть квадрат” - оба ложны и, следовательно, эквивалентны, т.е. B=a (хотя и имеют разное содержание).

Значение истинности некоторых высказываний всегда остается одним и тем же. Например, “5>2” - всегда истинно, “8 - нечетное число” - всегда ложно. Значения же истинности других высказываний меняется в зависимости от условий, при которых сделаны эти высказывания. Например, высказывание “x-4>0” истинно для значений x больших 4 и ложно для значений x меньших, либо равных четырем. В связи с этим возникает понятие логической (булевой) переменной, т.е. такой переменной, которая может принимать только два значения: либо 0, либо 1. Логические переменные были введены впервые в начале прошлого столетия английским математиком Д.Булем, предложившим своеобразную алгебру, которая оперирует с высказываниями и которая получила в дальнейшем название булевой алгебры. С появлением цифровых вычислительных машин и дискретных автоматов математическая логика приобрела прикладное значение. Это связано с тем, что в ЭВМ и многих других автоматических устройствах в качестве простейших элементов используют зачастую двухпозиционные приборы, т.е. приборы, имеющие только два различных устойчивых состояния. Это позволяет одно состояние условно обозначать единицей (например, состояние, когда элемент работает),а другое нулем (когда элемент не работает).

Таким образом, при математической интерпретации устройства, рассматриваемому элементу соответствует булева переменная, при этом состоянию работы этого элемента соответствует значение истинности переменной, т.е. единица, а нерабочему состоянию соответствует нуль.

§ 2.2 Функция алгебры логики

Пусть имеется n двоичных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, так, что каждая из них может принимать любое из значений 0 или 1. Назовем двоичным набором $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совокупность зафиксированных значений переменных. Функцией алгебры логики (булевой функцией) n аргументов мы будем называть функцию, определенную на множестве всевозможных наборов значений двоичных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, и которая, в свою очередь принимает значение 0 либо 1.

Для того, чтобы задать функцию алгебры логики от n переменных, нужно указать ее значение для каждого из 2^n наборов значений аргументов, которые образуют область определения булевой функции. Очень часто это делается в виде таблицы с 2^n строками, так как это сделано в нижеследующем примере для булевой функции от трех аргументов (табл.4).

Таблица 4

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Аналогично тому, как символы 0 и 1 отождествляются с ложным и истинным высказыванием, так и табл.4 представляет собой таблицу, определяющую ложность и истинность сложного высказывания $f(x_1, x_2, x_3)$ в зависимости от истинности и ложности высказываний x_1, x_2, x_3.

Заметим, что так как каждому набору аргументов ($x_1, x_2, \dots , x_n$) может быть сопоставлено только два значения функции: 0 или 1, то число различных булевых функций, зависящих от n аргументов, равно $2^{(2^n)}$.

Две булевых функции $f(x_1,x_2,\dots ,x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2,\dots,x_n)$ называются равными, если на всех возможных наборах значений аргументов они принимают одинаковые значения, т.е.

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n) = \varphi(x_1, x_2,\dots,x_n).$$

Говорят, что булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ существенно зависит от аргумента x_i , если найдется хотя бы один такой набор значений $x_1, x_2,\dots, x_{i-1} , x_{i+1},\dots,x_n$, для которого имеет место соотношение

$$f(x_1, x_2, \dots , x_{i-1} ,0, x_{i+1}, \dots , x_n) \neq f(x_1, x_2, \dots , x_{i-1} ,1, x_{i+1}, \dots , x_n).$$

В противном случае говорят, что функция f зависит несущественно от x_i , или что x_i есть фиктивный аргумент. Ясно, что булева функция не изменится, если к множеству ее аргументов добавить или выбросить любое число фиктивных аргументов.

Функции алгебры логики широко используются в приложениях. Любая ЭВМ, значительная часть автоматических устройств, включают в себя, как правило, двухпозиционные элементы, о которых речь шла выше. Соединенные между собой определенным образом, эти элементы, которым соответствуют двоичные переменные $x_1, x_2, \dots ,x_n$, в процессе работы устройства формируют на выходе сигнал, представляющий собой не что иное, как булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots ,x_n)$, значения которой зависят от значений сигналов $x_1, x_2, \dots ,x_n$, подаваемых на вход.

§ 2.3. Элементарные функции. Сложные функции

Подобно тому, как построение “обычной” математики начинается с основных элементарных операций, так и в алгебре логики вначале определяют некоторые исходные логические операции над высказываниями или, так называемые, элементарные функции алгебры логики. К их числу относятся:

отрицание, конъюнкция, дизъюнкция логических высказываний, Дадим определение каждому из них.

Отрицание. Функция, выражающая высказывание, которое истинно, если исходное высказывание x ложно, и ложно, если высказывание x истинно, называется отрицанием (инверсией x, дополнением к x) и обозначается символом x (другое обозначение ⌉x). Читается “не x”.

Таблица истинности этой операции имеет вид:

Таблица 5

x	x
0	1
1	0

Так, для приведенных в § 2.1 высказываний имеем: A: “8 - четное число”, A=1, A=0, т.е. высказывание “8 - нечетное число” - ложно.
B: “снег зеленый”, B=0, B=1, т.е. высказывание “снег не зеленый” - истинно.

Конъюнкция. Функция, выражающая высказывание, которое истинно в том и только том случае, когда оба высказывание x_1 и x_2 истинны, (и ложно, когда хотя бы одно из них ложно) называется конъюнкцией x_1 и x_2 (логическим умножением x_1 и x_2) и обозначается символом $x_1 \wedge x_2$ (другие обозначения $x_1 \cdot x_2$, x_1x_2). Читается “x_1 и x_2” (табл.6).

Таблица 6

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Приведем пример конъюнкции. Из геометрии известно, что четырехугольник ABCD является параллелограммом, если его противоположные стороны попарно параллельны.

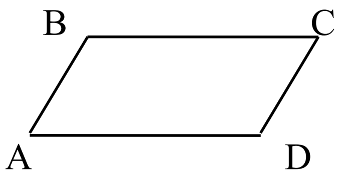


Рис. 5

Рассмотрим два высказывания x_1 и x_2 x_1 : “AB || CD”, x_2 : “BC || AD” и образуем конъюнкцию этих высказываний: $x_1 \wedge x_2$ - “ABCD - параллелограмм”.

Ясно, что конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ будет истинна, (ABCD - параллелограмм), когда одновременно x_1 и x_2 истинны. Конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ будет ложной (ABCD - не есть параллелограмм), если, хотя бы одно их высказываний x_1 или x_2 ложно.

Дизъюнкция. Функция, выражающая высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда, по крайней мере, одно из высказываний x_1 или x_2 является истинным (и ложно, когда оба ложны) называется дизъюнкцией x_1 и x_2 (логическим сложением x_1 и x_2) и обозначается $x_1 \vee x_2$ другое обозначение $x_1 + x_2$). Читается “x_1 или x_2” (табл.5).

Приведем пример дизъюнкции. Рассмотрим высказывание: x_1 - “число a_1 делится на 2”, x_2 - “число a_2 делится на 2” и образуем дизъюнкцию этих высказываний: $x_1 \vee x_2$ - “произведение $a_1 \cdot a_2$ - четное число”. Легко видеть, что дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ будет истинна ($a_1 \cdot a_2$ - четное число), если, хотя бы одно из чисел a_1 или a_2 делится на 2. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ будет ложной($a_1 \cdot a_2$ - нечетное число), если одновременно a_1 и a_2 не делятся на 2, т.е. x_1 и x_2 оба ложны.

Свойства элементарных логических операций

1. Дизъюнкция и конъюнкция обладают свойством идеальности, т.е.

$$x \vee x = x, \qquad x \wedge x = x.$$

2. Отрицание отрицания высказывания x эквивалентно самому x, т.е.

$$x = x.$$

3. Дизъюнкция и конъюнкция обладают свойством коммутативности т.е.

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \quad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1.$$

4. Дизъюнкция и конъюнкция ассоциативны, что позволяет опускать скобки в выражениях, содержащих только знаки дизъюнкции и конъюнкции, т.е.

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$
$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

5. Дизъюнкция и конъюнкция обладают свойством дистрибутивности друг по отношению к другу, т.е.

$$(x_1 \vee x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3,$$
$$(x_1 \cdot x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3).$$

6. Имеют место соотношения

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots \overline{x_n},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n,$$

называемые формулами Моргана. Из этих формул следует, что отрицание f всякой булевой функции f, выраженной через отрицание дизъюнкцию и конъюнкцию, можно получить, если аргументы функции f заменить их отрицаниями и поменять местами символы дизъюнкции и конъюнкции. Например, если дана функция

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_4 \vee x_2) \cdot x_1 \text{ , то учитывая, что } x = x$$
$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_4 \cdot x_2 \vee x_1.$$

Отметим некоторые полезные соотношения, часто встречаемые при преобразованиях:

$$x \cdot x = 0,\ x \vee x = 1,\ x \cdot 1 = x,\ x \cdot 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \vee 0 = x.$$

Сложные функции

Если вместо аргументов элементарных функций подставлять другие элементарные функции, то получим функции, которые называют сложными или суперпозициями комбинируемых функций. При этом порядок выполняемых действий в выражениях регулируется скобками. В целях экономии скобок условились, что в первую очередь в формулах выполняется операция отрицания, затем операция конъюнкции, и после этого операция дизъюнкции. Например, функцию

$$f=(x_1\cdot(x_2))\vee(x_3\cdot x_4)$$

можно записать в виде

$$f=x_1\cdot x_2\vee x_3\cdot x_4\ .$$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих рассмотренные свойства.

<u>Пример 1.</u> Доказать свойство ассоциативности дизъюнкции, т.е. справедливость соотношения $(x_1\vee x_2)\vee x_3= x_1\vee(x_2\vee x_3)$.

<u>Решение.</u> Покажем, что логические функции, стоящие слева и справа от знака равенства, эквивалентны. Для этого построим таблицу значений этих функций на всевозможных наборах (x_1,x_2,x_3) и затем сравним их значения на этих наборах.

Таблица 7

x_1	x_1	x_1	$(x_1\vee x_2)\vee x_3$	$x_1\vee(x_2\vee x_3)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

При построении таблицы используем свойства:

$$0\vee x=x\ ,\quad 1\vee x=1.$$

Поскольку на всех наборах функции $(x_1\vee x_2)\vee x_3$ и $x_1\vee(x_2\vee x_3)$ принимают одинаковые значе - ния, то эти функции эквивалентны, т.е. $(x_1\vee x_2)\vee x_3 = x_1\vee(x_2\vee x_3)$, что означает ассоциативность дизъюнкции.

<u>Пример 2.</u> Привести к более простому виду логическую функцию

$$f=1\vee(x_1\cdot x_3\vee x_2)\ .$$

<u>Решение.</u> Обозначим выражение, стоящее в скобках через x и воспользуемся соотношением $x\vee 1=1$. Тогда получим $f=1\vee x= x\vee 1=1$ или $f\equiv 1$, т.е. рассматриваемая функция тождественно равна 1. Попутно установлено, что аргументы x_1,x_2,x_3 являются фиктивными, т.к. рассматриваемая функция фактически от них не зависит.

<u>Пример 3.</u> Доказать, что функция

$$f=x_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2$$

эквивалентна x_1.

<u>Решение.</u> На основании свойства дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции из первого и второго конъюнктивных членов можно вынести за скобку $x_1\cdot x_2$, а из третьего и четвертого в силу того же свойства $x_1\cdot x_2$. Тогда получим

$$f=(x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\vee x_3)\vee(x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\vee 1).$$

Используя свойства $x\vee x=1$ и $x\vee 1=1$, имеем

$$f=(x_1\cdot x_2)\cdot 1\vee(x_1\cdot x_2)\cdot 1.$$

Далее на основании свойства $x\cdot 1=x$, получаем

$$f=x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (x_2 \vee x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1.$$

Пример 4. Доказать, что формула $(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ эквивалентна формуле $(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$.

Решение. Используя свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции $x \vee (\alpha \cdot \beta) = (x \vee \alpha) \cdot (x \vee \beta)$ и свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, а также соотношения $x \cdot x = 0$, $0 \vee x = x$, получим

$$(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1 \vee (x_2 \cdot (x_2 \vee x_3)) = x_1 \vee (x_2 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3) =$$
$$= x_1 \vee (0 \vee x_2 \cdot x_3) = x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3).$$

Функции алгебры логики позволяют перевести на язык формул сложные ситуации, возникающие в ряде прикладных вопросов, например, в электрических схемах.

Пример 5. Дан фрагмент электрической схемы

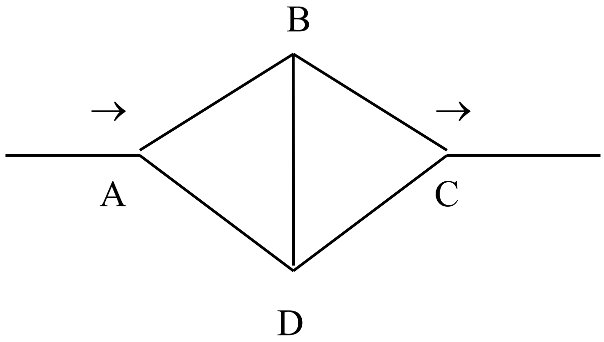


Рис. 6

Каждый из участков цепи в зависимости от некоторых обстоятельств может потерять проводимость. Обозначим через z событие, состоящее в том, что по цепи проходит ток. Требуется в зависимости от исправности участков цепи написать логическую формулу, выражающую событие z.

Решение. Введем следующие логические высказывания:

“ участок AB исправен “ - a;

“ участок BC исправен “ - b;

“ участок AD исправен “ - c;

“ участок DC исправен “ - d;

“ участок BD исправен “ - e.

Легко заметить, что мы будем наблюдать событие z (по цепи идет ток) в одном из следующих случаев:

1) участки AB и BC исправны одновременно, либо
2) участки AD и DC исправны одновременно, либо
3) участки AB, BD, DC исправны одновременно, либо
4) участки AD, BD, BC исправны одновременно.

Этим случаям соответствуют следующие конъюнкции:

первому - $a \cdot b$, второму - $c \cdot d$, третьему - $a \cdot e \cdot d$, четвертому - $c \cdot e \cdot b$.

Так как событие z наблюдается тогда и только тогда, когда реализуется, по крайней мере, один из перечисленных случаев, то имеет место дизъюнкция высказываний: $a \cdot b$, $c \cdot d$, $a \cdot e \cdot d$, , т.е.

$$z= a \cdot b \vee c \cdot d \vee a \cdot e \cdot d \vee c \cdot e \cdot b.$$

Заметим, что оставшиеся случаи, благоприятствующие прохождению тока по цепи, являются следствием рассмотренных выше. При включении логических высказываний, описывающих такие случаи, в последнее равенство, после некоторых преобразований они "исчезают". Например, один из таких случаев, когда одновременно исправлены участки АВ, ВС, BD, приводит к добавлению в выражение для z члена $a \cdot b \cdot e$. Группируя его с членом $a \cdot b$, получим

$$a \cdot b \cdot e \vee a \cdot b = a \cdot b \cdot (e \vee 1) = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b$$

§ 2.4. Нормальные формы. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

В алгебре логики доказывается утверждение, что всякую булеву функцию можно представить в виде некоторого числа конъюнктивных членов, образованных ее аргументами или их отрицаниями, соединенных знаками дизъюнкции. Эта форма представления булевой функции носит название совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ).

Правило построения СДНФ булевой функции, заданной таблицей, состоит в следующем:

1. Из таблицы выбираются все наборы аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_3$, для которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ равна 1;
2. Для каждого из этих наборов составляются конъюнкции, равные 1;
3. Все эти конъюнкции соединяются знаком дизъюнкции.

<u>Пример 6.</u> Составить СДНФ для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$, заданной табл.8.

Таблица 8

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

<u>Решение.</u> В соответствии с приведенным правилом из таблицы выбираем наборы $x_1, x_2, \ldots, x_3$, для которых $f(x_1, x_2, x_3)$ равна 1. Это будут наборы, стоящих в 1, 3, 6, 7 и 8-й строках табл.8. Для этих наборов конъюнкции , равные 1 будут иметь соответственно вид: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Соединяя их знаками дизъюнкции,

1	1	1	1

получаем искомую СДНФ

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3 .$$

Отметим, что конъюнктивные члены, входящие в СДНФ, называются <u>конституентами единицы.</u>

<u>Совершенная конъюнктивная нормальная форма</u>

Аналогично понятию СДНФ вводится понятие совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ), которая может быть представлена в виде некоторого числа дизъюнктивных членов, соединенных знаками конъюнкции.

Правило построения СКНФ булевой функции, заданной таблицей, формируется следующим образом:

1. Из Таблицы выбираются все наборы аргументов $x_1,x_2,...,x_n$, для которых $f(x_1,x_2,...,x_n)$ равна 0.
2. Для каждого из таких наборов составляются дизъюнкции, равные 0.
3. полученные дизъюнкции соединяются знаками конъюнкции.

Составим, например, СКНФ функции $f(x_1,x_2,x_3)$, заданной табл.8. Для этого заметим, что для наборов, стоящих во 2, 4 и 5-й строках функция $f(x_1,x_2,x_3)$ равна 0. Образуем из этих наборов дизъюнкции, равные 0: $x_1\vee x_2\vee x_3$, $x_1\vee x_2\vee x_3$, $x_1\vee x_2\vee x_3$. Тогда искомая СКНФ будет иметь вид

$$f(x_1,x_2,x_3)= (x_1\vee x_2\vee x_3) \cdot (x_1\vee x_2\vee x_3) \cdot (x_1\vee x_2\vee x_3).$$

Заметим, что дизъюнктивные члены, входящие в СКНФ, называются <u>конституентами нуля.</u>

<u>§ 2.5. Минимизация формул алгебры логики. Полные системы булевых функций. Понятие базиса.</u>

Рассмотрим вопрос о возможности представления произвольной булевой функции в виде комбинации какого-либо фиксированного множества функций. С этой целью введем понятие <u>полной</u> системы функций.

<u>Определение.</u> Система булевых функций $f_1,f_2,...,f_m$ называется полной, если любую булеву функцию можно представить в виде формулы через функции $f_1,f_2,...,f_m$.

Сама система функций $f_1,f_2,...,f_m$ называется <u>базисом.</u>

Базис называется <u>минимальным</u>, если удаление хотя бы одной из входящих в него функций f_i превращает систему функций в неполную.

Выше было установлено, что любую булеву функцию можно представить через отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, это означает, что система функций

$$x,\ x_1\vee x_2,\ x_1\cdot x_2 \qquad (6)$$

является базисом. Однако, этот базис не является минимальным. Действительно, на основании формул Моргана (5)

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$$

из базиса (6) можно удалить одну из функций - дизъюнкцию или конъюнкцию, не нарушив его полноты. Таким образом, в качестве базиса можно взять любую из следующих систем функций:

$$x,\ x_1 \vee x_2, \text{ или } x\ ,\ x_1 \cdot x_2.$$

Каждый из этих базисов является минимальным, так как инверсия не может быть выражена через дизъюнкцию или конъюнкцию.

Из приведенных рассуждений следует, что существует несколько различных базисов. Выбор того или иного базиса определяется характером рассматриваемой задачи.

Минимальные формы функции

На практике большое значение имеет задача нахождения так называемых минимальных форм булевой функции. В общем виде она формулируется следующим образом. Пусть задан некоторый базис $f_1, f_2, ..., f_m$, причем, каждой функции f_i , поставлено в соответствие некоторое число $d_i \geq 0$ $(i=1,2, ..., m)$, называемое ее весом. Пусть далее для данной булевой функции f найдено выражение через функции базиса, причем, каждая функция f_i при написании этого выражения ровно ν_i раз. Тогда величину

$$d_f = \nu_1 d_1 + \nu_2 d_2 + ... + \nu_m d_m \quad (7)$$

называют весом полученного выражения функции f в заданном базисе. Задача минимизации формы функции f состоит в нахождении такого ее выражения через функции базиса $f_1, f_2, ..., f_m$, которое имело бы минимальный вес d_f (такое выражение называется минимальной формой функции f).

В настоящее время эта задача в общем виде не решена даже для самых простых базисов.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда задан базис

$$f_1 = x,\ f_2 = x_1 \cdot x_2,\ f_3 = x_1 \vee x_2\ , \quad (8)$$

причем положим $d_1=0$, $d_2=d_3=1$.

В рассматриваемом базисе всякая булева функция f может быть представлена в виде СДНФ. Сформулируем условие минимальности СДНФ применительно к базису (8). Для этого введем еще два понятия.

Конъюнкция переменных $x_1, x_2, ..., x_r$, называется элементарной, если каждая из этих переменных встречается в конъюнкции не более одного раза. При этом число r (число переменных в конъюнкции) называется рангом конъюнкции. СДНФ, состоящая только из элементарных конъюнкций, получила название нормальной дизъюнктивной формы (ДНФ).

Найдем соотношение для веса ДНФ в базисе (8) через сумму рангов r_i ее конъюнктивных членов.

В соответствии с формулой (7) вес d_f булевой функции в базисе (8) вычисляется из соотношения

$$d_f = \nu_2 + \nu_3, \qquad (9)$$

где ν_2 - число конъюнкций в ДНФ;

ν_3 - число дизъюнкций в ДНФ.

Пусть количество конъюнктивных членов в ДНФ равно к. Тогда легко заметить, что

$$\nu_2 = \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) , \ \nu_3 = k-1.$$

Подставляя эти выражения в формулу (9), получим

$$d_f = \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) + k-1 = \nu_2 = \sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} 1 + k - 1 = \sum_{i=1}^{k} r_i - 1.$$

Таким образом вес d_f НДФ функции f в базисе (8) вычисляется по формуле

$$d_f = \sum_{i=1}^{k} r_i - 1.$$

Так, все пять конъюнктивных членов ДНФ примера 6 имеют один и тот же ранг, равный трем. Вес этой ДНФ d_f в базисе (8) на основании полученной формулы равен $d_f = 3 \times 5 - 1 = 14$.

Из полученного соотношения следует, что, если для некоторой ДНФ сумма рангов, образующих ее элементарных конъюнкций, будет наименьшей по сравнению со всеми другими ДНФ данной функции, то рассматриваемая форма будет минимальной.

Аналогичные утверждения справедливы для суммы рангов дизъюнктивных членов нормальной конъюнктивной формы (ДНФ) булевой функции f.

Нахождение минимальной ДНФ произвольной булевой функции f производится в два этапа.

Первый этап состоит в отыскании сокращенной ДНФ.

Второй этап состоит в отыскании так называемых тупиковых, а затем минимальных ДНФ.

Нахождение сокращенной ДНФ.

Рассмотрим процедуру построения сокращенной ДНФ методом Квайна. Этот метод основан на преобразовании ДНФ с помощью операций полного и неполного склеивания и операции поглощение.

Полное склеивание.

Пусть x-булева переменная, а β - элементарная конъюнкция. Тогда имеет место соотношение

$$x\beta \vee x\beta = \beta . \qquad (10)$$

Для доказательства этого соотношения преобразуем его левую часть, используя свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и равенства $x \vee x = 1$, $1 \cdot x = x$.

$$x\beta \vee x\beta = (x \vee x) \cdot \beta = 1 \cdot \beta = \beta .$$

Неполное склеивание

Имеет место соотношение

$$x\beta \vee x\beta=\beta \vee x\beta \vee x\beta. \qquad (11)$$

Для доказательства (11) заменим в соотношении $u=u\vee u$ высказывание u на $x\beta \vee x\beta$. Получим

$$x\beta \vee x\beta=(x\beta \vee x\beta) \ \vee \ (x\beta \vee x\beta).$$

Поглощение.

Наряду с конъюнкцией β рассмотрим еще одну элементарную конъюнкцию γ . Тогда имеет место соотношение

$$\beta \vee \beta \cdot \gamma = \beta \qquad (12)$$

Преобразуем левую часть (12). Имеем

$$\beta \vee \beta \cdot \gamma = \beta \cdot 1 \vee \beta \cdot \gamma = \beta \cdot (\beta \vee \gamma) = \beta \cdot 1 = \beta$$

В случае полного склеивания (10) говорят, что члены $x\beta$ и $x\beta$ склеиваются по x , а в случае поглощения (12) говорят, что член $\beta\cdot\gamma$ поглощается членом β.

Приведем алгоритм построения сокращенной ДНФ по методу Квайна.

1. Найдем совершенную ДНФ заданной функции f.

2. Привести в полученной ДНФ все конъюнктивные члены к одному рангу n.

3. Привести в ДНФ все возможные операции неполного склеивания. Эти операции удобно производить в два приема: вначале провести все возможные операции полного склеивания и затем выписать результаты полного склеивания впереди ДНФ, соединив их между собой и с ДНФ знаками дизъюнкции.

4. Провести все возможные операции поглощения, в результате чего получим ДНФ, состоящую из элементарных конъюнкций ранга n-1.

5. В полученной ДНФ провести все возможные операции склеивания и поглощения в соответствии с пунктами 3,4. В результате получим ДНФ, состоящую из элементарных конъюнкций ранга n-2.

6. Описанную выше процедуру следует проводить до тех пор, пока это будет возможно. Полученная в итоге ДНФ и будет <u>сокращенной</u>. Образующие ее элементарные конъюнкции называются <u>простыми импликантами функции f.</u>

<u>Пример 7.</u> Найти сокращенную ДНФ булевой функции

$$f(x,y,z) = xz \vee xyz \vee xyz \vee xyz.$$

<u>Решение.</u>

1. Прежде всего приведем все конъюнктивные члены к одному и тому же рангу r=3. Для этого умножим первый член xz на $y \vee y=1$. Имеем

$$xz = xz1 = xz(y \vee y) = xzy \vee xzy = xzy \vee xzy.$$

Тогда исходная функция f примет вид

$$f(x,y,z)=xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \qquad (13)$$

2. Приведем все возможные операции неполного склеивания в два приема:

а) склеим (полное склеивание) каждую из конституент единицы ДНФ (13) с последующими.

1-ый член	склеивается	со 2-м по y,	получим	xz,
1-й	»	с 5-м по x,	»	yz,
2-й	ни	с чем не	склеивается,	
3-й член	склеивается	с 4-м по y,	получим	xz,
4-й	»	с 5-м по z,	»	xy.

б) конъюнкции, полученные в результате полного склеивания, выпишем вначале ДНФ, соединив их между собой и с ДНФ знаками дизъюнкций.

$$f(x,y,z)=xz \vee yz \vee xz \vee xy \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz$$

3. Проведем все возможные операции поглощения в соответствии с формулой $\beta \vee \beta \cdot \gamma = \beta$. Первый член xz поглощает xyz и xyz, т.е.

$$xz \vee xyz = xz \vee (xz)y = xz\ ,$$

$$xz \vee xyz = xz \vee (xz)y = xz\ .$$

Аналогичным образом член yz поглощает xyz. Далее, xz поглощает xyz и xyz. В итоге получим

$$f(x,y,z)=xz \vee yz \vee xz \vee xy. \qquad (14)$$

4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что применение операций склеивания и поглощения невозможно. Полученное соотношение (14) является сокращенно ДНФ заданной функции. Конъюнктивные члены (14) представляют собой простые импликанты функции f.

Перейдем ко второму этапу построения минимальной ДНФ.

Нахождение тупиковых и минимальных ДНФ

Определение. Тупиковой ДНФ булевой функции называется дизъюнкция из некоторых простых импликант этой функции, равная самой функции, и такая, что исключение из нее одной из импликант нарушает это равенство.

Произвольная булева функция может иметь несколько тупиковых форм. Те из них, которые имеют наименьшую сумму рангов, являются минимальными ДНФ. Следовательно, для отыскания минимальных ДНФ функции достаточно получить все ее тупиковые формы и выбрать среди них формы, обладающие наименьшей суммой рангов.

В качестве универсального метода решения этой задачи приведем изложение метода Петрика.

Пусть совершенная ДНФ функция f имеет k конституент, а ее сокращенная ДНФ имеет m простых импликант.

1. Обозначим каждую простую импликанту функции f через p_i, т.е. имеем

$$p_1, p_2, \ldots, p_m.$$

2. Выделим те простые импликанты сокращенной ДНФ функции f, которые поглощают каждую из конституент единицы исходной ДНФ. Из простых импликант, поглощающих первую конституенту, образуем дизъюнкцию d_1; из простых импликант, поглощающих вторую конституенту, образуем дизъюнкцию d_2 и так далее, вплоть до k-ой конституенты. В итоге получим набор дизъюнкций $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

3. Из дизъюнкций d_i, полученных в пункт 2, образуем конъюнкцию

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_m) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k.$$

4. Раскроем скобки в правой части (15) и произведем все возможные поглощения (в правой части (15) каждая из дизъюнкций d_i выражена через соответствующие импликанты p_i). Обозначим число элементарных конъюнкций в полученном выражении через S. Каждой такой элементарной конъюнкции соответствует одна тупиковая форма функции f, которая получится, если в элементарной конъюнкции символы импликант p_i заменить их значениями, а знаки конъюнкций заменить знаками дизъюнкций. Таким образом, получим S тупиковых ДНФ функций f. Для нахождения искомой минимальной ДНФ остается выбрать те из них, которые имеют наименьшую сумму рангов.

Пример 8. Для булевой функции примера 7 построить тупиковые и минимальную ДНФ.

Решение. В предыдущем примере была получена сокращенная ДНФ (14) заданной функции. Выпишем ее простые импликанты

$$p_1 = xz,\ p_2 = yz,\ p_3 = xz,\ p_4 = xy. \tag{16}$$

Выясним, какими импликантами поглощается каждая из конституент единицы исходной ДНФ (13) и образуем из них соответствующие дизъюнкции.

xyz	поглощается импликантами	p_1, p_2;	образуем	$d_1 = p_1 \vee p_2$,
xyz	»	p_1;	»	$d_2 = p_1$,
xyz	»	p_3;	»	$d_3 = p_3$,
xyz	»	p_3, p_4;	»	$d_4 = p_3 \vee p_4$,
xyz	»	p_2, p_4;	»	$d_5 = p_2 \vee p_4$.

Из дизъюнкций d_i образуем конъюнкцию F

$$F = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot d_5 = (p_1 \vee p_2) \cdot\ p_1 \cdot\ p_3 \cdot (p_3 \vee p_4) \cdot (p_2 \vee p_4).$$

В полученном выражении раскроем скобки и преобразуем его, используя соотношение $x \cdot x = x$.

$$F = (p_1 \cdot p_1 \cdot p_3 \vee p_2 \cdot p_1 \cdot p_3) \cdot (p_3 \cdot p_2 \vee p_4 \cdot p_2 \vee p_3 \cdot p_4 \vee p_4 \cdot p_4)$$

$$F = (p_1 \cdot p_3 \vee p_1\, p_3\, p_2)(p_2\, p_3 \vee p_2\, p_4 \vee p_3\, p_4 \vee p_4)$$

В первых скобках член $p_1 p_3$ поглощает $(p_1 p_3)p_2$, т.е.

$$p_1 p_3 \vee p_1 p_3 p_2 = p_1 p_3.$$

Во вторых скобках p_4 поглощает вначале член $p_3 p_4$, а затем $p_2 p_4$, т.е.

$$p_4 \vee p_4 p_3 \vee p_4 p_2 = (p_4 \vee p_4 p_3) \vee p_4 p_2 = p_4 \vee p_4 p_2 = p_4 .$$

После этих поглощений F принимает вид

$$F = (p_1 \cdot p_3) \cdot (p_2 \cdot p_3 \vee p_4) = p_1 \cdot p_3 \cdot p_2 \cdot p_3 \vee p_1 p_3 p_4 ,$$

$$F = p_1 p_2 p_3 \vee p_1 p_3 p_4 .$$

Каждой элементарной конъюнкции в полученном выражении соответствует одна тупиковая ДНФ исходной функции, для получения которой достаточной заменить импликанты рассматриваемой конъюнкции по формулам (16), соединив их знаками дизъюнкций, Таким образом, имеем две тупиковые формы

$$f(x,y,z) = xz \vee yz \vee xz,$$

$$f(x,y,z,) = xz \vee xz \vee xy. \qquad (17)$$

Обе формы имеют одну и ту же сумму рангов, равную 6, поэтому обе эти формы являются минимальными.

Замечание. Задача о нахождении минимальной конъюнктивной формы булевой функции может быть сведена к нахождению минимальной ДНФ. Для этого достаточно:

1. Найти минимальную ДНФ функции f.

2. Применить к ней операции отрицания и преобразования по формулам Моргана (5).

§ 2.6. Технические применения алгебры логики

Аппарат алгебры логики широко используется при описании работы, так называемых, контактных схем и цифровых машин. При проектировании таких схем на основе анализа условий работы схемы составляются логические функции, описывающие работу схемы. Наличие такой функции позволяет изучить разнообразные свойства самой схемы и в ряде случаев заменить ее более простой эквивалентной схемой.

Здесь возникают два типа задач:

1.Для заданной схемы построить логическую функцию, описывающую работу данной схемы.

2. Построить схему, соответствующую данной логической функциии.

Прежде чем переходить к рассмотрению этих задач, сделаем некоторые предварительные замечания.

Введем следующие обозначения для высказываний:

x - “контакт x замкнут”,

x - “контакт x замкнут, т.е. x не замкнут”.

Рассмотрим участок цепи с последовательно расположенными контактами x и y.

Рис. 7

Этот участок цепи будет замкнут тогда и только тогда, когда <u>одновременно</u> замкнуты контакты x и y. Эта ситуация в алгебре логики описывается конъюнкцией высказываний x и y, т.е. xy .

В случае, когда контакты x и y подключены параллельно друг другу,

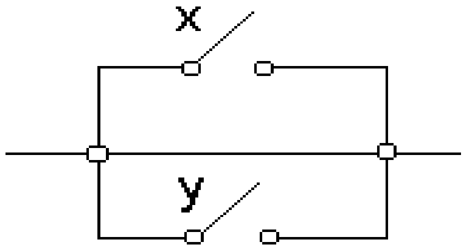


Рис.8

участок цепи будет замкнут, когда по крайней мере, один из контактов замкнут. Эта ситуация в алгебре логики описывается дизъюнкцией высказываний x и y, т.е. $x \vee y$.

<u>Пример 9.</u> Для логической функции, рассмотренной в примере 7 f(x,y,z)- $xz \vee xyz \vee xyz \vee xyz$, построить соответствующую ей и ее минимальным ДНФ контактные схемы.

<u>Решение.</u> Конъюнктивным членам заданной функции соответствуют участки контактной схемы с последовательно расположенными на них контактами. Так как конъюнктивные члены соединены между собой знаками дизъюнкций, то эти участки подключены параллельно друг другу. Таким образом, для рассматриваемой логической функции получаем следующую контактную схему,

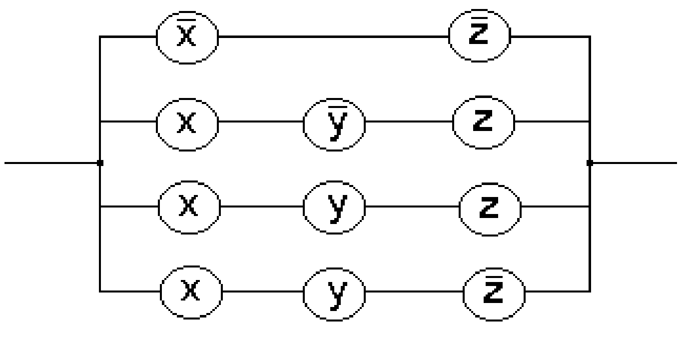


Рис. 9

а для двух ее минимальных ДНФ (17) имеем соответственно схемы

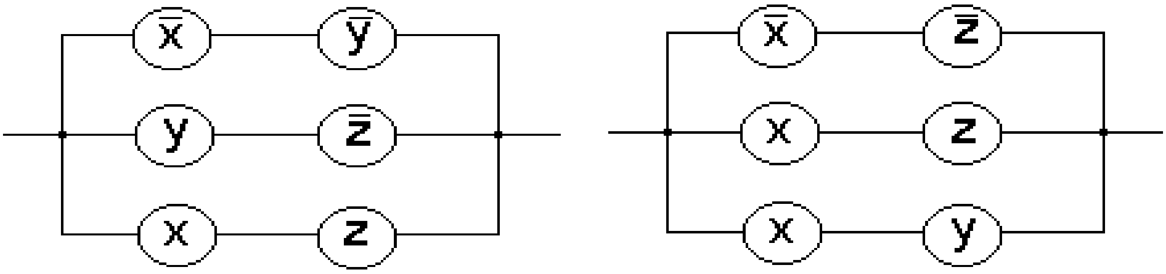


Рис. 10

Заметим, что контактная схема заданной логической функции имеет 11 контактов, тогда как каждая из эквивалентных ей контактных схем, соответствующих минимальным ДНФ, всего по 6 контактов.

<u>Пример 10.</u> Составить функцию, соответствующую контактной схеме, изображенной на рис.5

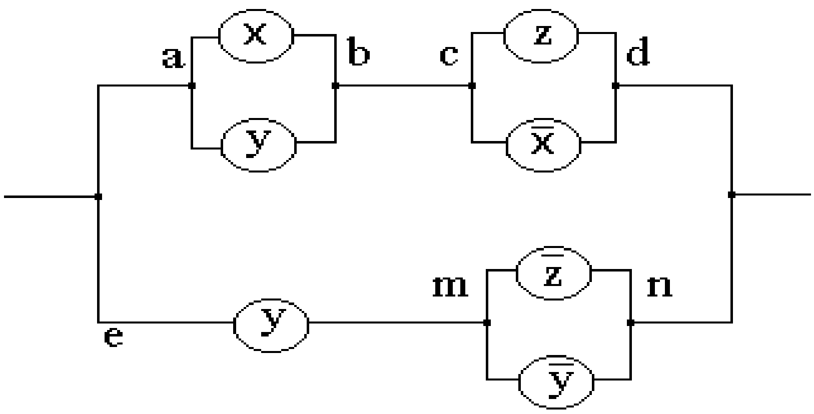


Рис. 11

<u>Решение.</u> На участках ab, cd, mn контакты включены параллельно друг другу, следовательно, эти участки описываются соответствующими дизъюнкциями: $x \vee y$, $z \vee x$, $z \vee y$. Так как ab и cd соединены последовательно, то участку ad соответствует конъюнкция $(x \vee y) \cdot (z \vee x)$. На участке en имеем последовательно соединенные контакт y и участок mn, следовательно, весь участок en описывается конънкцией $y \cdot (z \vee y)$. Так как участок ad параллельно соединен с участком en, то всей схеме соответствуетдизъюнкция высказываний, описывающих эти участки, т.е.

$$(x \vee y) \cdot (z \vee x) \vee y \cdot (z \vee y).$$

Последнее выражение и представляет собой логическую функцию f, описывающую работу данной схемы. Таким образом

$$f(x,y,z) = (x \vee y) \cdot (z \vee x) \vee y \cdot (z \vee y).$$

<u>§ 2.7. Представление логической функции в виде графа</u>

На практике очень часто бывает удобно изображать логическую функцию, описывающую работу какого-либо устройства в виде дерева, где висячим вершинам поставлены в соответствие булевы переменные или их отрицания, а во внутренних вершинах указаны операции, которые надлежит выполнить над переменными или над формулами.

Пусть с некоторого устройства поступают сигналы x,y,z,x,y,z, (x,y,z - инвертированные сигналы), т.е. сигналы противоположного содержания на вычислительное устройство (ВУ), логика работы которого описывается булевой функцией $f(x,y,z) = xy \vee xyz \vee yz$, причем блоки суммирования и умножения ВУ имеют только два входа.

Тогда изображение булевой функции в виде дерева имеет следующий вид

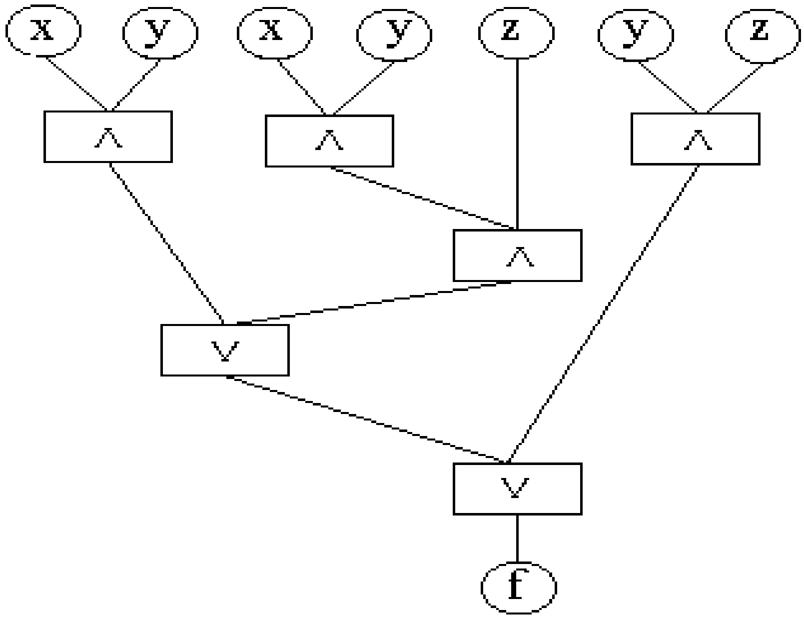


Рис. 12

На выходе, у основания дерева имеем значение логической функции f. В соответствии с определением, данным в главе 1, § 1.1 получим, так называемое корневое дерево, где вершина графа f является корнем дерева.

§ 2.8. Минимизация функций алгебры логики методом неопределенных коэффициентов

В заключении главы 2 рассмотрим еще один метод, применяемый на практике для получения минимальных форм булевой функции. Этот метод используется в том случае, если количество аргументов, от которых зависит булева функция, невелико. Ввиду громоздкости вычислений, ограничимся случаем трех переменных.

Изложим вкратце идею метода неопределенных коэффициентов. Исходную логическую функцию f(x,y,z) записывают в виде логической суммы конъюнктивных членов с неопределенными коэффициентами, которые могут быть равны либо 0, либо 1. Эти конъюнктивные члены представляют собой возможные комбинации, составленные из переменных x,y,z и их отрицаний. Неопределенные коэффициенты, фигурирующие в конъюнктивных членах, принято снабжать двумя наборами индексов - нижним и верхним. Нижний набор указывает на то, из каких переменных составлена конъюнкция, а верхний говорит о том, взята переменная или ее отрицание. Например, коэффициент K_2^1 стоит при конъюнктивном члене, состоящем из одной переменной y (нижний индекс 2), а единица указывает на то, что взята сама переменная, а не ее отрицание; коэффициент K_{13}^{01} говорит о том, что в соответствующей конъюнкции взяты переменные x и z (нижние индексы 1 и 3), верхний индекс 0 говорит о том, что берется отрицание x, т.е. рассматриваемая конъюнкция имеет вид x·z. Аналогичным образом, например, коэффициент K_{123}^{101} указывает, что соответствующая ему конъюнкция имеет вид xyz.

Полученное таким образом соотношение для булевой функции f(x,y,z) с неопределенными коэффициентами вычисляют на всех двоичных наборах (x,y,z) (число которых равно восьми). Это приводит к системе восьми линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов.

$$
\begin{aligned}
&K_1^1 + K_2^1 + K_3^1 + K_{12}^{11} + K_{13}^{11} + K_{23}^{11} + K_{123}^{111} = f(1,1,1)\\
&K_1^1 + K_2^1 + K_3^0 + K_{12}^{11} + K_{13}^{10} + K_{23}^{10} + K_{123}^{110} = f(1,1,0)\\
&K_1^1 + K_2^0 + K_3^1 + K_{12}^{10} + K_{13}^{11} + K_{23}^{01} + K_{123}^{101} = f(1,0,1)\\
&K_1^1 + K_2^0 + K_3^0 + K_{12}^{10} + K_{13}^{10} + K_{23}^{00} + K_{123}^{100} = f(1,0,0)\\
&K_1^0 + K_2^1 + K_3^1 + K_{12}^{01} + K_{13}^{01} + K_{23}^{11} + K_{123}^{011} = f(0,1,1)\\
&K_1^0 + K_2^1 + K_3^0 + K_{12}^{01} + K_{13}^{00} + K_{23}^{10} + K_{123}^{010} = f(0,1,0)\\
&K_1^0 + K_2^0 + K_3^1 + K_{12}^{00} + K_{13}^{01} + K_{23}^{01} + K_{123}^{001} = f(0,0,1)\\
&K_1^0 + K_2^0 + K_3^0 + K_{12}^{00} + K_{13}^{00} + K_{23}^{00} + K_{123}^{000} = f(1,0,0)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

При минимизации конкретной булевой функции в правые части написанных уравнений подставляют значения этой функции и среди решений полученной системы отбирают те их них, которые содержат минимальное количество переменных.

В качестве примера рассмотрим булеву функцию (13), которая была минимизирована ранее по методу Кванта-Петрика. Для нее правые части уравнений системы (18) имеют соответственно значения: 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1.

В соответствии с таблицей истинности дизъюнкции номер пять, получаем, что все неопределенные коэффициенты, стоящие в левых частях четвертого, пятого и седьмого уравнений, равны нулю, т.е.

35

□35

Учитывая это, запишем оставшиеся уравнения системы

$$K_{12}^{11} + K_{13}^{11} + K_{123}^{111} = 1$$
$$K_{12}^{11} + K_{23}^{10} + K_{123}^{110} = 1$$
$$K_{13}^{11} + K_{123}^{101} = 1$$
$$K_{23}^{10} + K_{13}^{00} + K_{123}^{010} = 1$$
$$K_{13}^{00} + K_{123}^{000} = 1.$$

□Так как мы ищем выражение для булевой функции, содержащее минимальное количество переменных, то положим равными нулю коэффициенты с тройными индексами

$$K_{123}^{111} = K_{123}^{110} = K_{123}^{010} = K_{123}^{000} = 0.$$

Тогда получим

$$K_{12}^{11} + K_{13}^{11} = 1$$
$$K_{12}^{11} + K_{23}^{10} = 1$$
$$K_{13}^{11} = 1 \qquad □□$$
$$K_{13}^{00} + K_{23}^{10} = 1$$
$$K_{13}^{00} = 1$$

(19)

Из второго уравнения системы (19) следует, что K_{12}^{11} и K_{23}^{10} не могут равняться нулю одновременно.

Первое уравнение (19) с учетом $K_{13}^{11} = 1$ дает: $K_{12}^{11} = 0,$□□ибо $K_{12}^{11} = 1.$

Ч□□вертое уравнение (19) с учетом $K_{13}^{00} = 1$ дает: $K_{23}^{10} = 0,$ либо $K_{23}^{10} = 1.$

Из этих рассуждений следует, что система (19) имеет□□ри решения

$$K_{13}^{00} = 1, \quad K_{13}^{11} = 1, \quad K_{12}^{11} = 0, \quad K_{23}^{10} = 1, \qquad (20)$$

$$K_{13}^{00} = 1, \quad K_{13}^{11} = 1, \quad K_{12}^{11} = 1, \quad K_{23}^{10} = 0, \qquad (21)$$

$$K_{13}^{00} = 1, \quad K_{13}^{11} = 1, \quad K_{12}^{11} = 1, \quad K_{23}^{10} = 1. \qquad (22)$$

Решениями, которым соответствует выражение для булевой функции с наименьшим количеством переменных, будут (20) и (21).

Восстанавливая булеву функцию по найденным коэффициентам, получим две минимальные формы

f(x,y,z)=xz + y□□+ xz, f(x,y,z)=xz + xy + xz,

ч□□ совпадает с соотношениями (17), полученными по методу Кванта-Петрика.

Глава 3. Формальные языки и автоматы.

§ 3.1 Основные понятия и определения теории формальных языков.

Синтез систем автоматического проектирования, гибкого автоматизированного производства, интеллектуальных систем знаний невозможен без переработки и преобразования дискретной информации, основу которых составляет теория формальных языков и автоматов. Формальные языки, широко используемые в современной технике, выступают в качестве средства “общения” автоматического устройства с окружающими его объектами. Отвлекаясь от излишней строгости, дадим “рабочее” определение формального языка, которое позволяет решать ряд прикладных задач и, в частности, понять основные принципы функционирования дискретных автоматических устройств.

Под <u>формальным языком</u> Я будем понимать математический объект, который включает в себя:

1. Так называемые, состояния языка $\{S_0, S_1, S_2, ..., S_n\}$, причем, S_0 - пред□□авляет собой начальное, нейтральное состояние.
2. Алфавит языка $\{m_1, m_2, ...,$ □□$\}$, состоящий из некоторого набора символов (букв); чаще всего в качестве алфавита на практике используют двоичные символы {1,0}.
3. Правила грамматики, которые задают процесс образования слов языка, состоящ□□ из символов алфавита.

Эти правила имеют вид соотношений

$$S_l::=S_k m_i \tag{23}$$

i=0,□□, 2, ... , p; l, k=0, 1, 2, .□□ , n.

Равенство (23) означает, что при переходе языка из состояния S_k, в S_l □□является буква образуемого слова m_i. При этом значению i=0 соответствует символ m_0, который не входит в алфавит языка, а представляет собой знак пробела или, что то же самое, некоторый интервал между словами. Образование каждого слова в языке начинается из начального состояния S_0 и, следовательно, им же и заканчивается.

Совокупность состояний языка S_i принято называть множеством нетерминальных символов языка $M_N=\{S_0, S_1, S_2$□□$... , S_N\}$, а совокупность символов алфавита m_i - множеством терминальных символов языка

$M_T=\{ m_1, m_2, ... , m_p\}$.

Отметим, что структура определения формального языка очень напоминает процесс образования слов в разговорной речи, в котором состоянию S_i соответствуют те или иные состояния органов речи. При переходе из одного состояния органов речи в другое появляется звук, которому в алфавите разговорного языка соответствует определенная буква. Так же как и в формальных языках, слова нашего языка разделены интервалами (аналог m_0); причем, на каждом интервале органы речи пребывают в нейтральном состоянии (аналог S_0).

§ 3.2 Изображение языка в виде графа.

Построение слов в языке очень удобно проводить с помощью графа языка, являющееся его геометрической интерпретацией. В вершинах этого графа помещаются элементы множества M_N , т.е. состояния языка Я, которые затем соединяют дугами в соответствии с правилами грамматики языка (23). Рядом с дугой S_k S_l , выходящ□□ из вершины графа S_k и входящей в вершину S_l,, пишут появляющуюся при этом букву составляемого слова m_i. Проиллюстрируем процесс конструирования языка Я на конкретном примере.

Пример 11. Язык Я с алфавитом $M=\{m_1, m_2, m_3\}$ задан совокупностью следующих правил грамматики

$$S_1::=S_0m_0,\ S_3::=S_0m_0,\ S_2::=S_1m_1,\ S_2::=S_2m_3,$$
$$S_4::=S_1m_2|S_2m_2|□□_3m_3,\ S_0::=S_4m_1. \qquad (24)$$

Изобразить в виде графа структуру языка Я и построить совокупность слов, порождаемых грамматикой этого языка.

Решение. Заметим, прежде всего, что, если среди правил грамматики языка встречается соотношение, в правой части которого фигурирует несколько состояний S_i (как в случае нашего примера), это означает, что переход к состоянию, стоящему в левой части, происходит из каждого состояния, написанного справа. Так, для пятого из соотношений (24) переход в состояние S_4 происходит из каждого состояния S_1, S_2, S_3 с появлением соответственно букв m_2, m_2, m_3 .

Построение графа начинаем с вершины S_0, которая□□оответствует начальному состоянию языка (рис. 13). Среди соотношений (24) отби□□ем такие, в правой части которых есть S_0. В нашей задаче это $S_1::=S_0m_0$, $S_3::=S$□□$_0$. Вершину графа S_0 соединяем дугами, выходящими из S_0 и входящими в вершины S_1 и S_3. Рядом □□дугами пишем m_0 - символ пробела между словами языка. Вершины S_1 и S_3 должны быть соединены с

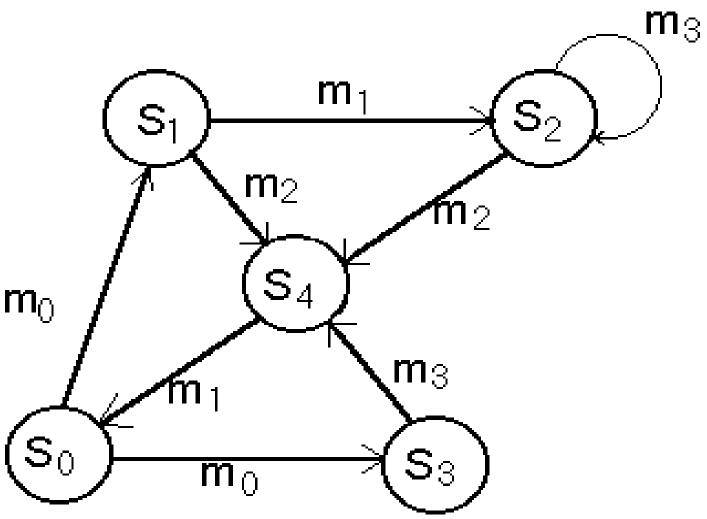


рис. 13

другими вершинами графа в соответствии с правилами (24).

1) Начнем, например, с вершины S_1. Среди соотношений (24) отбираем такие, в правой части которых есть S_1.

В нашем случае это: $S_2::=S_1m_1$, $S_4::=S_1m_2|S_2m_2|\ S_3m_3$. В соответствии с этими соотношениями вершину S_1 соединим дугами с вершинами S_2 , S_4 и рядом с ними напишем m_1, m_2. Далее рассмотрим соотношения, в правой части которых есть либо S_2, либо S_4 ($S_0::=S_4\ m_1$, $S_2::=S_{\square}\square_3$, $S_4::=S_1m_2|S_2m_2|S_3m_3$) При эт□□ начинаем с тех из них, в левой части которых нет S_0. В нашей задаче это будет второе и третье соотношения, написанные в скобках. В соответствии с первым их них $S_2::=S_2m_3$ око□□ вершины S_2 рисуем дугу, выходящую и входящую в S_2, и около нее ставим m_3. Другое соотношение $S_4::=S_1m_2|S_2m_2|S_3m_3$ означает, что вершину S_2 нужно соединить дугой, входящей в S_4, поставив рядом с ней m_2. Переходим далее к соотношению $S_0::=S_4\ m_1$, которое означает, что вершину S_4 следует соединить дугой с вершиной S_0, и напишем рядом с дугой m_1. В итоге пришли к начальному состоянию S_0, что подтверждает правильность наших построений.

2) Осталась еще не рассмотренной вершина S_3. Среди правил грамматики данного языка (24) есть только одно, правая часть которого содержит S_3, это $S_4::=S_1m_2|\square_{\square}m_2|S_3m_3$. В соответствии с ним вершину S_3 соединяем с вершиной S_4 и около дуги пишем m_3. Попада□□ в вершину S_4, которая уже была рассмотрена в пункте 1. На этом построение графа закончено.

Обсудим далее процедуру конструирования слов данного языка. Из начального состояния S_0 (рис. 13) совершим переход в любую из вершин графа S_i по дуге $S_0\ S_i$, ведущей в S_i . В нашем случае это можно сделать двояким образом: из вершины S_0 можно попасть

а) либо в вершину S_1,

б) либо в вершину S_3.

Исслед□□м каждую из возможностей. Возьмем, например, вершину S_1. Появл□□щийся при переходе из S_0 в S_1 символ m_0, являю□□йся знаком пробела между словами, при этом не пишется. В свою очередь из вершины S_1 можно попасть либо в вершину S_2, либо в вершину S_4.

Выберем, например, вначале вершину S_2 , при этом буква m_1, стоящая с дугой S_1S_2, будет первой буквой конструируемого слова. Из S_2 продолжаем далее движение к следующей вершине графа S_4, и встречающуюся при этом букву m_2 приписываем справа к первой букве слова (итак, имеем m_1m_2). Отметим при этом, что учет петли, стоящей около S_2, приведет к образованию другого слова, которое мы составим после завершения построения первого. Находясь в вершине S_4, замечаем, что из нее выходит только одна дуга S_4S_0, входящая в S_0. Около нее стоит буква m_1, котор□□ пишем справа от имеющихся уже первых букв m_1m_2 (получаем $m_1m_2m_1$). В итоге, на графе пришли к начальному состоянию S_0, что означает, что про□□сс формирования слова $\underline{m_1m_2m_1}$ завершен.

Вернемся теперь к случаю петли, стоящей около вершины S_2. В момент прихода в S_2 имеем только первую букву слова m_1. Наличие ориентированной петли около S_2 означает, что, оставаясь а вершине S_2, к записи, которая существовала к данному моменту (m_1), следует добавить справа букву, стоящую у петли, т.е. m_3, что дает m_1m_3. Дале□□ повторяя путь, пройденный от S_2 к S_0 (через S_4), дополним эту запись буквами m_2 ,m_1.

В итоге получаем другое слово языка $\underline{m_1m_3m_2m_1}$.

Рассмотрение пункта а) на этом не заканчивается. В начале этого пункта, мы отметили, что, выходя из S_1, из двух возможных вершин S_2, S_4 мы выбрали S_2, оставив не рассмотренной вершину S_4. Вернемся теперь к этому случаю. Двигаясь от S_1 к S_4, записываем первую букву нового слова m_2, а перемещение из S_4 в S_0 завершает слово буквой m_1. Итак, получаем следующее по счету слово языка $\underline{m_1m_2}$. На этом завешается рассмотрение пункта а).

Переходим к написанной в пункте б) вершине S_3. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше, приходим к выводу, что рассмотрение оставшейся возможности дает только одно слово $\underline{m_3m_1}$.

Окончательно получаем, что исследуемый язык Я состоит из четырех слов.

$$Я=\{ m_1m_2m_1,\ m_1m_3m_2m_1,\ m_2m_1,\ m_3m_1\}.$$

§3.3 Понятия и типы дискретных автоматов.

Под дискретным автоматом (ДА) понимаю□□устройство, осуществляющее переработку и преобразование дискретной информации, т.е. информации, поступающей в это устройство в отдельно взятые моменты времени.

На практике наиболее распространенным является случай, когда дискретная информация поступает в автоматическое устройство в виде двоичного сигнала, т.е. сигнала, который принимает всего лишь два значения 0 и 1. Такой сигнал и соответствующее ему устройство будем называть двоичным.

Пусть ДА имеет K входов, на которые подаются двоичные сигналы x_1, x_2, ... , x_k и q выходов, на которых появляются двоичные сигналы y_1, y_2, ... , y_q. Совокупность входных (x_1, x_2, □□. , x_k) и выхо□□ых (y_1, y_2,... , y_q) сигналов будем трактовать как векторы X и Y соответствующей размерности. Условимся значения сигналов в текущий (данный) момент времени снабжать индексом n, а в прошедший и будущий моменты - соответственно индексами n-1 и n+1.

Рассматривают два типа дискретных автоматов:

а) дискретные автоматы без памяти (или комбинационные схемы (КС)),

б) д□□кретные автоматы с памятью (последовательные схемы (ПС)).

В комбинационных схемах выходные координаты сигнала в текущий момент времени Y_n являются функцией только входных координат в тот же момент времени X_n, т.е.

$$Y_n=f_{кс}(X_n).$$ □□

(25)

В последовательных схемах выходные координаты сигнала в текущий момент времени являются функцией не только входных сигналов в тот же момент времени, но и зависят от самой выходной координаты Y_{n-1} в предыдущий момент времени, т.е.

$$Y_n=f_{пс}(X_n, Y_{n-1}). \qquad (26)$$

Как следует из вышеизложенного, ПС в общем случае (в зависимости от состояния “памяти”) может по разному реагировать на одну и те же совокупность входных сигналов, в то время как реакция КС определяется исключительно заданной входной комбинацией сигналов.

Отметим одно важное обстоятельство, касающееся функций, входящих в выражения (25) и (26). Поскольку сигналы x_i и y_i , являющиеся компонентами векторных величин X и Y, могут принимать только два значения 0 и 1, то функции f, входящие в упомянутые выражения, не могут быть обычными арифметическими (алгебраическими) функциями, а являются булевыми функциями, рассмотренными в главе 2.

Таким образом, проблема математического описания поведения ДА может быть решена на основе аппарата алгебры логики.

Постановка задачи математического исследования дискретных автоматов.

В области вычислительной техники инженерам приходится решать две основные задачи:

1. Анализ поведения заданного конкретного автомата (эта задача сводится к предсказанию значений выходной координаты по текущему состоянию автомата и значениям входных сигналов).

2. Логический синтез ДА с заданным законом функционирования (эта задача состоит в построении и изучении свойств логической схемы автоматического устройства, в отыскании наиболее “простой” (минимальной) схемы, эквивалентной исходной).

§3.4. Анализ поведения ДА.

Рассмотрим общие принципы анализа поведения автоматического устройства. В процессе работы ДА может находиться в одном из состояний S_1, S_2, ... , S_r. Пусть в некоторый момент времени ДА находится в состоянии S_k ($k=1,\ 2,\ ...\ ,r$) и под воздействием входного сигнала x, поступающего в устройство в тот же момент времени, переходит в некоторое другое состояние S_ℓ (ℓ=1, 2, ..□□,r), вырабатывая при этом выходной сигнал y. Состояние S_ℓ в зависимости от поступающего сигнала (и от состояния блока “памяти”, если речь идет о ДА с памятью), вообще говоря, может совпадать с состоянием S_k. Этот процесс перехода ДА из состояния S_k в состояние S_ℓ описывается соотношением

$$S_k \to xyS_\ell. \qquad (27)$$

Работа автоматического устройства будет определена, если аналогичное соотношение задано для каждой пары состояний S_1, S_2, ... , S_r. Функционирование ДА удобно представить в виде графа, в вершинах которого помещают состояния автомата, которые затем соединяют дугами в соответствии с правилами работы автомата (27). При этом рядом с дугой $S_k\ S_\ell$ выходящей из вершины графа S_k и входящей в вершину S_ℓ пишут (x,y) - з□□чения входного и выходного сигнала соответственно.

Нетрудно заметить, что при□□аботе ДА реализуется некоторый формальный язык множество терминальных символов которого M_T состоит из значений выходного сигнала y, а множество нетерминальных символов M_N - из состояний S_1, S_2, ... , S_r.

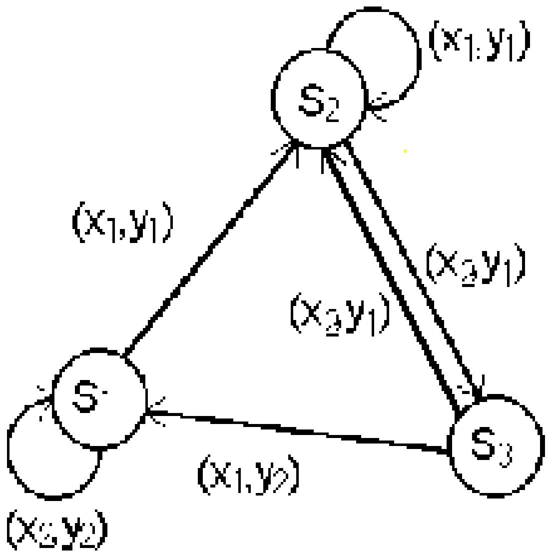
Рассмотрим конкретный пример.

<u>Пример 12. </u> Функционирование ДА задано следующими правилами вывода

$$S_1 \to x_2y_2S_1,\quad S_1 \to x_1y_1S_2,\quad S_2 \to x_1y_1S_2,\quad S_2 \to x_2y_1S_3,$$
$$S_3 \to x_2y_1S_2,\quad S_3 \to x_1y_2S_1. \qquad (28)$$

Автомат установлен в начальное состояние S_1, и на вход подана последовательность символов (x_2, x_1, x_2, x_1). Определить последовательность на выходе.

<u>Решение.</u> Интерпретируем в виде графа правила работы автомата (28) (рис. 14).



Первому и третьему правилам вывода соответствуют ориентированные петли у вершин графа S_1 и S_2. В соответствии со вторым правилом вершину S_1 графа соединяем дугой S_1 S_2 с вершиной S_2, написав рядом с ней (x_1, y_1).

Четвертое из соотношений (28) говорит о том, что, если имеем значение входного сигнала x_2, то автомат переходит в состояние S_3, вырабатывая при этом реакцию y_1. На графе рисуем соответствующую дугу S_2S_3, взвешенную парой (x_2, y_1).

Рис. 14

И, наконец, последнему соотношению в (28) соответствует дуга S_3 S_1, взвешенная парой (x_1, y_2).

Так как автомат установлен в начальное состояние S_1 , и первым входным сигналом является x_2, то в соответствии с построенным графом автомат вырабатывает выходной сигнал y_2, оставаясь в состоянии S_1 . Следующий входной сигнал x_1. При этом значении входного сигнала автомат переходит в состояние S_2 (попадаем в вершину графа S_2), вырабатывая реакцию y_1. Далее значение входного сигнала x_2 переводит автомат в состояние S_3 с выходным сигналом y_1. Четвертый входной символ x_1 вызывает переход автомата из состояния S_3 в S_1 с реакцией на выходе y_2. Итак, в итоге получаем последовательность выходных сигналов (y_2, y_1, y_1, y_2).

Дискретные автоматы с памятью.

Рассмотрим некоторые особенности анализа работы ДА с памятью. Как было отмечено выше, реакция ДА с памятью (или что то же самое последовательной схемы) на входной сигнал в текущий момент времени определяется не только самим входным сигналом, но и выходной координатой в предыдущий момент времени. Это реализуется с помощью блока памяти ПС или, говоря иными словами, с помощью канала обратной связи. Структурная блок-схема ПС изображена на рис. 15.

В некоторый дискретный момент времени t вектор входного сигнала X поступает на комбинационную часть ПС. Одновременно с ним на комбинационную часть блока памяти поступает вектор сигнала Z^+, значение которого в момент t равно значению вектора Z^- , выработанному комбинационной частью в момент времени $t-\tau$. В момент поступления X и Z^+ в комбинационную часть последняя вырабатывает вектор, выходного сигнала Y и вектор Z^- , который передается в блок памяти.

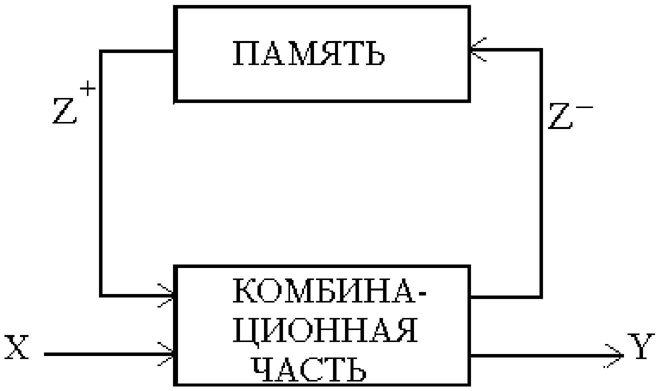


Рис. 15

Связь между поступающими в комбинационную часть в момент времени t векторами X, Z^+ и выходными векторами Y, Z^- прин□□о описывать соотношением

$$XZ^+ \rightarrow Z^-Y, \qquad □□$$

(29)

в котором Z^+ и Z^- связаны зависимостью

$$Z^+(t)=Z^-(t-□□, \qquad (30)$$

$\tau>0$. При этом величина вектора Z^+ в начальный момент времени t=0 считается известной и равной некоторому значению Z_0^+ , т.е.

$$Z^+(t=0)=Z_0^+.$$

□□При заданном Z_0^+ последовательность входных сигналов X однозначно определяет последовательность Y на выходе (при условии, разумеется, задания соотношения (29)). Соотношение (29), как правило, задается в виде таблицы, где входными величинами являются X, Z^+, а выходными Z^-, Y.

<u>Пример 13.</u> Имеется дискретное устройство с входным каналом x, каналом обратной связи z и выходным каналом y, реализующее отображение $XZ^+ \rightarrow Z^-Y$, которое задано в виде табл.9. Определить выходную последовательность {Y}, если входная последовательность {X} имеет вид 101001, и начальное значение вектора Z_0^+ равно 0

Таблица 9

X	Z^+	Z^-	Y
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	
1	1	0	0

<u>Решение.</u> В начальный момент времени t=0 вектор XZ^+, равный 10 (X=1 - первый член входной последовательности, $Z^+=Z_0^+=0$), определяет в соответствии с третьей строкой таблицы вектор Z^-Y=01. В следующий момент времени τ входной вектор X=0 (второй□□лен последовательности на входе), а

$Z^{+}(\tau)=Z^{-}(\tau$□$44)=Z^{-}(0)=0$. (При вычислении значения $Z^{+}(\tau)$ используем соотношение (30)). Следовательно, в момент времени τ вектор $XZ^{+}=00$, а тогда на основании первой строки таблицы в тот же момент времени $Z^{-}Y=11$. В момент времени $t=2\tau$ вектор XZ^{+} будет равен 11 ($X=1$ - тр□□ий член входной последовательности, а $Z^{+}(2\tau)=Z^{-}(2\tau-\tau)=Z^{-}(\tau)=1$). Тогда на основании четвертой строки таблицы в момент времени 2τ получим $Z^{-}Y=00$. Рассуждая аналогичным образом, в итоге получим выходную последовательность $\{Y\}=110100$.

Процесс работы ПС удобно представить в виде табл. 10,

Таблица 10

Время	X	Z^{+}	Z^{-}	Y
0	1	0	0	1
τ	0	0	1	1
2τ	1	1	0	0
3τ	0	0	1	1
4τ	0	1	1	0
5τ	1	1	0	0

а результат в виде соотношения

$$101001 \xrightarrow{Z_0^{+}=0} 110100.$$

Легко проверить, что та же самая входная последовательность при $Z_0^{+}=1$ преобразуются в выходную последовательность 010100.

§3.5 Применение алгебры логики к анализу дискретных автоматов.

В качестве примера рассмотрим основные принципы работы сумматора, предназначенного для получения суммы двух n-разрядных двоичных чисел. Он имеет два входа и один выход. На входы сумматора, начиная с момента времени $t=0$, с интервалом τ поступают значения двоичных разрядов слагаемых $x_1(t)$, $x_2(t)$, на выходе появляются разряды двоичного кода суммы $z(t)$. Очевидно, что значение выходного сигнала z в момент времени t зависит не только от значений входных сигналов x_1 и x_2 в этот момент времени, но и от того имеет ли место перенос в суммируемые разряды единицы, полученной в предшествующий момент $t-\tau$. Обозначим значение этого переноса в момент времени t через $y(t)$. Итак, на комбинационную часть сумматора (рис.) в момент времени t поступают значения суммируемых разрядов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и з□□чение переноса $y(t-\tau)$, сформир□□анное при суммировании младших разрядов и хранимое в памяти сумматора.

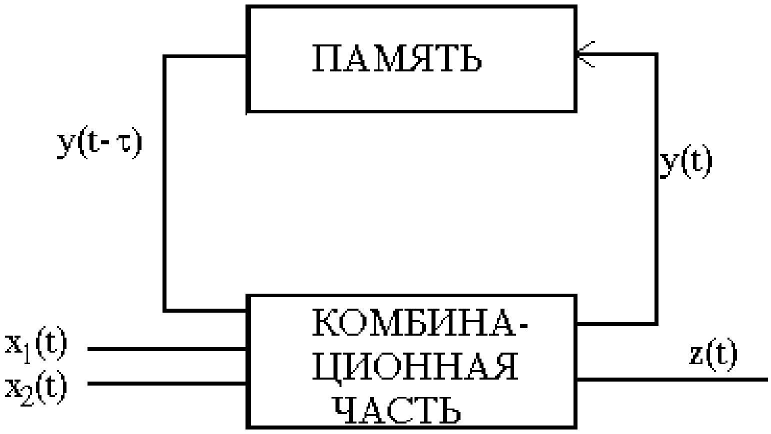


Рис. 16

Рекуррентные соотношения для z(t) и y(t), характеризующие работу сумматора, удобно записывать с помощью операции логического суммирования по модулю 2 $\oplus$, таблица истинности которой имеет вид:

Таблица 11

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Используя введенную таким образом операцию $\oplus$ для z(t) и y(t) □□лучаем соотношение:

$$z(t)= x_1(t)\oplus x_2(t)\oplus y(t-\tau)$$

$$y(t)=(x_1(t)\cdot x_2(t))\vee(x_1(t) \cdot y(t-\tau))\vee(x_2(t)\cdot y(t-\tau)),$$

причем, y(0)=0.

В со□□ветствии с этими соотношениями, если, например, в момент $t=\tau$ имеем $x_1(\tau)=0$, x□□τ)=1, то

$$y(\tau)=(0\cdot 1)\vee(0\cdot 0)\vee(1\cdot 0)=0,$$

а□□если, при $t=2\tau$, $x_1(2\tau)=1$, x_2(□45)=1, то

y(2τ)=(1·1)∨□□·0)∨(1·0)=1.

<u>Граф работы сумматора</u>

Функционирование ДА, как и ранее, удобно изображать в виде графа. В вершинах графа помещаются состояния автомата; ориентированные ребра, соединяющие вершины, показывают как автомат переходит из одного состояния в другое под воздействием входных сигналов. Около ребер записывают значение входных сигналов и соответствующего выходного сигнала. На рис.17 изображен граф работы сумматора. Состояние C_0 соответствует случаю, когда в памяти сумматора находится 0, а C_1, когда в памяти единица.

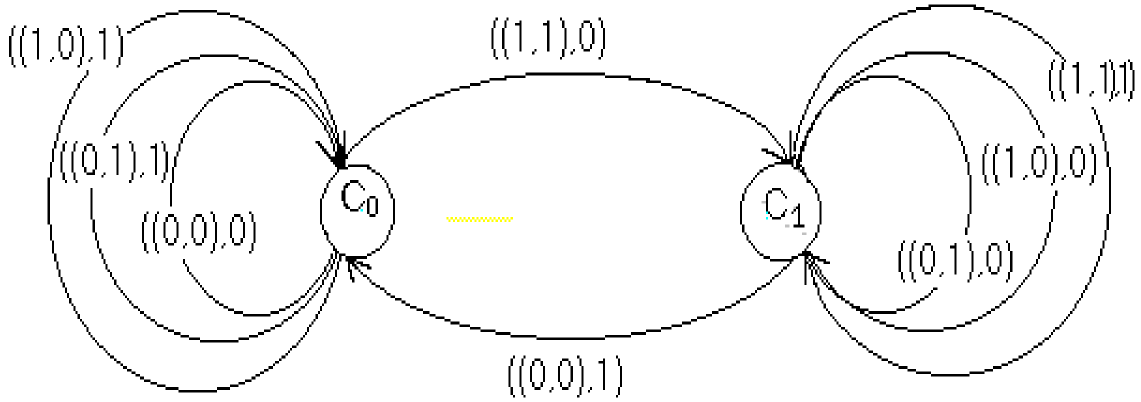
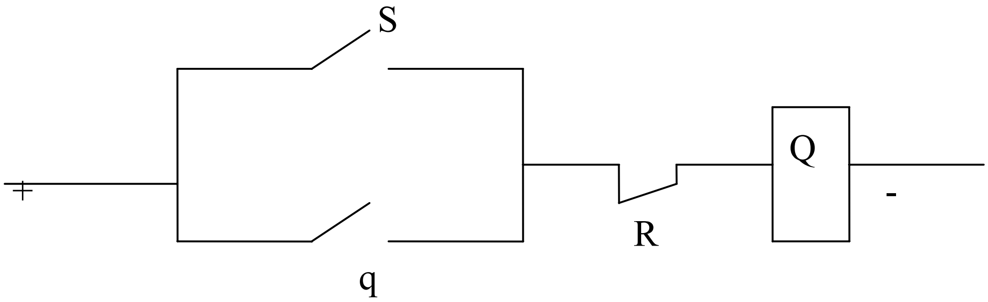


Рис.17

Понятие об элементах памяти.

Рассмотрим схему на рис. 18. Здесь □□ - электромагнитное реле, а q - его, так называемый, нормально открытый (НО) контакт. Если нормально замкнутый (НЗ) контакт R не разомкнут, то при замыкании контакта S образуется цепь, в результате чего срабатывает реле Q, которое□□амыкает свой контакт q.



Ри□□ 18

Благодаря контакту q реле Q остается включенным Q=1, даже, если контакт S затем разомкнуть, т.е. схема осуществляет запоминание события S=1, которое произошло в предшествующий момент времени. Логическая функция Q, описывающая состояние, реле имеет вид

$$Q=(S \vee q) \cdot R$$

Рассмотренная схема как бы выполняет функцию элемента памяти автоматического устройства.

§3.6 Логический синтез дискретных автоматов
Понятие о логической сети.

Всякий дискретный автомат представляют собой некоторую комбинацию простейших элементов вида

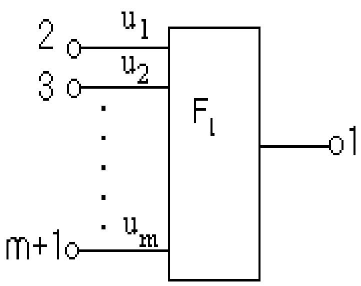


Рис.19

образующих схему S. Каждый элемент F_i схемы, имеющей m входов, преобразует входные сигналы u_1, u_2, ... , u□□ в соответствии с некоторой функцией алгебры логики $f_i(u_1, u_2, \dots, u_m)$, знач□□ие которой поступает на выход 1 этого элемента. При этом считается, что если одновходовый элемент не меняет сигнала, то ему сопоставляется тождественная логическая функция. Например, если F_k такой элемент, u_j - сигнал, который на него поступает, то

$$f_k(u_j)=u_j.$$

Схема S вместе с совокупностью функций алгебры логики, реализуемой ее элементами, образуют логическую сеть. Выше было установлено, что любая булева функция может быть представлена через элементарные логические функции:

отрицание $\overline{x}$, дизъюнкцию $x_1 \vee x_2$ и конъюнкцию $x_1 \cdot x_2$, котор□□ образуют базис на множестве логических функций. Это означает, что работа ДА, состоящего из элементов, каждый □□ которых преобразует поступающие на него сигналы в соответствии с базисными функциями, может быть охарактеризована некоторой логической функцией. Рассмотрим некоторые примеры, связанные с построением логической функции автоматического устройства.

<u>Пример 14.</u> Найти логическую функцию $f(x_1,x_2,x_3)$ следую□□й логической схемы

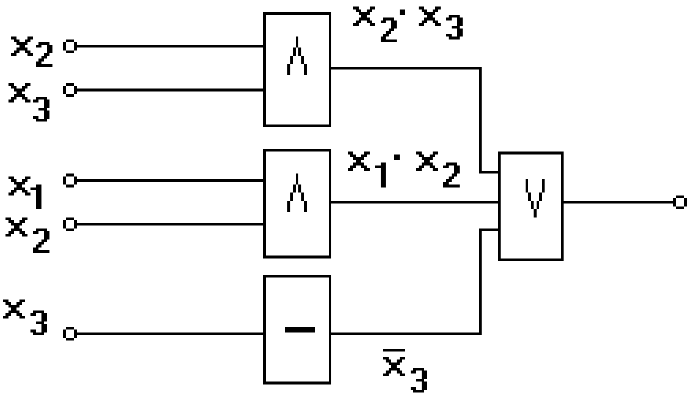


Рис.20

<u>Решение</u>

$f(x_1,x_2,x_3)=x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3$

<u>Пример 15.</u> Работа ДА характеризуется схемой, изображенной на рис. 21; x_1, x_2, x_3 - сигналы, поступающие на входы схемы 11, 12, 13 соответственно. Построим логическую функцию $f_0(x_1,x_2,x_3)$ этой схемы.

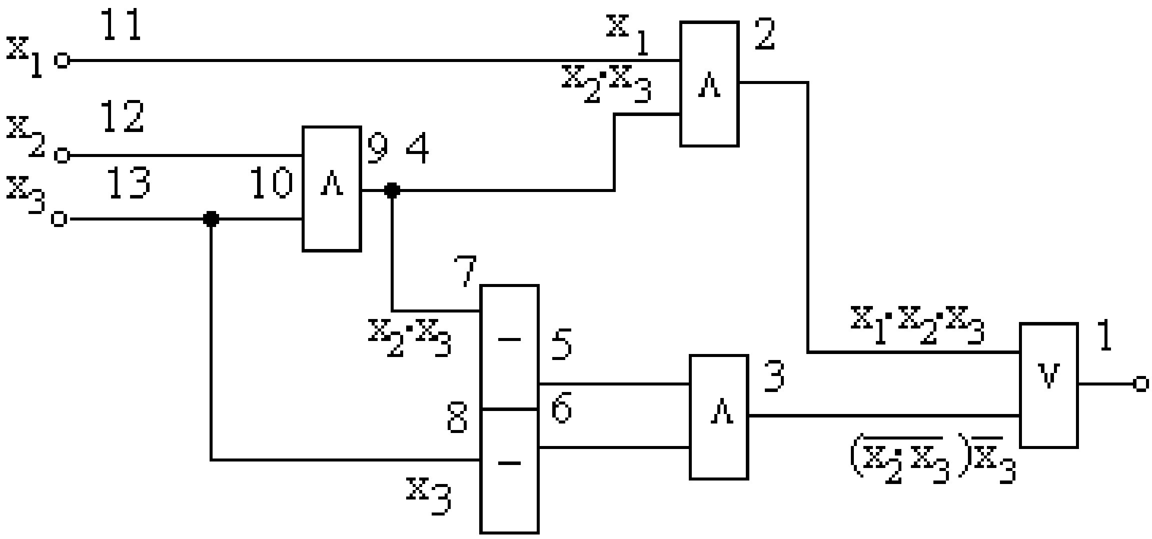


Рис. 21

В соответствии с обозначениями схемы на выходе элемента 9 имеем $x_2 \cdot x_3$; на в□□оде элемента 2 получим $x_1(x_2 \cdot x_3)$, это значение сигнала поступает на вход элемента 1. На вход 7 элемента 5 поступает значение сигнала $x_2 \cdot x_3$, которое инвертируется этим элементом и передается на вход элемента 3 в виде $x_2 \cdot x_3 = x_2 \vee x_3$. Элемент 6, инвертируя поступающий на него сигнал x_3, передает его в виде x_3 на второй вход элемента 3. Элемент 3 преобразует поступающие на него сигналы в $(x_2 \vee x_3) \cdot x_3$ и передает это значение на второй вход элемента 1. Элемент 1 преобразует поступающие на него сигналы $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$ и $(x_2 \vee x_3) \cdot x_3$ в $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \vee x_3) \cdot x_3$, который дает значение логической функции $f_0(x_1,x_2,x_3)$ на выходе схемы. Таким образом, имеем

$$f_0(x_1,x_2,x_3)= x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \vee x_3) \cdot x_3,$$

Используя свойства $x \cdot x=x$, $\alpha \vee \alpha\beta = \alpha$, преобразуем выражение для функции f_0

$$f_0= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_3 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_3 =$$
$$=x_1 x_2 x_3 \vee (x_3 \vee x_3 \cdot x_2)= x_1 x_2 x_3 \vee x_3.$$

§3.7 Поиск неисправностей автоматических устройств

При различного рода физических дефектах дискретных устройств логическая функция сети отличается от логической функции эталонной (исправной) сети f_0 . С целью упрощения изложения рассмотрим только два типа неисправностей: контактные и неисправности типа инверсии. Они характеризуются тем, что на выходе неисправного элемента соответствующая логическая функция принимает одно какое-либо постоянное значение (контактная неисправность) или противоположна логической функции исправного элемента (неисправность типа инверсии). Такого типа неисправности имеют место при обрывах, замыкания на корпус или шину питания, перепутываете проводников двухканальных линий передачи двоичных сигналов.

Для поиска неисправностей проводится тестирование логической сети. Рассмотрим некоторые положения функциональной теории тестирования, разработанный впервые С.В. Яблонским. Обозначим через f_i, $i=1,2,...,k$ логические функции объекта при его различных неисправностях. Множество T двоичных наборов длины n (n - количество входов объекта) называется тестом относительно множества пар функций (f_i , f_j), i,j=□□2, ... , k, если для каждой пары функций в T найдется набор, на котором функции этой пары имеют различные значения. Тест относительно множества пар $\{(f_0,f_1), f_0,f_2),..., f_0,f_k)\}$ является проверяющим тестом, тест относительно множества всех неупорядоченных пар (f_i,f_j), □49j, i,j=0,1,...□□ - тестом поиска дефекта.

Рассмотрим процедуру поиска неисправного элемента для логической сети примера 15 предыдущего параграфа, предполагая, что ДА имеет одну из трех неисправностей: первая изменяет функцию элемента 2 на константу 0, вторая функцию элемента 9 на отри□□ние этой функции, а третья не инвертирует сигналы, поступающие на элементы 5 и 6. Учитывая это, для соответствующих функций f_1,f_2, f_3 неисправной сети получим

$$f_1= 0 \vee (x_2 \vee x_3) \cdot x_3$$
$$f_2=\cdot x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) \cdot x_3$$
$$f_3=\cdot x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) \cdot x_3.$$

В соответствии с правилами алгебры логики

$$1\vee x=1,\ 0\vee x=x,\ x\vee x=x,\ x\cdot x =0,$$

$\alpha\vee \alpha\beta=\alpha$, преобразуем выражения для функций f_1 , f_2 , f_3

$$f_1= (x_2 \vee x_3) \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \vee x_3$$ ‰%□□

$f_2= x_1 . (x_2 \vee x_3) \vee x_2 . (x_3 \vee$ %‰%□□$= x_1 . (x_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot 0=x_1 . (x_2 \vee x_3)$

$f_3=(x_1 \vee x_3) (x_2 \cdot x_3)= x_1 . x_2 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3= x_2 \cdot x_3 \vee$‰%□□ $\cdot x_3 \cdot x_1= x_2 \cdot x_3$

Для функций f_0 , f_1 , f_2 , f_3 имеем таблицу их значений

Таблица 12

x_1	x_2	x_3	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

Проверяющим тестом является множество из двух наборов {(1,1,0),(1,1,1,)}: на наборе (1,1,0) проявляется третья неисправность, так как $f_3(1,1,0)\neq f_0(1,1,0)$; на наборе (1,1,1) проявляются как первая так и вторая неисправности, так как $f_1(1,1,1)\neq f_0(1,1,1)$, $f_2(1,1,1)\neq f_0(1,1,1)$. Тестом поиска дефекта является множество наборов {(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)} : на наборе (1,0,1) проявляется только вторая неисправность; на наборе (1,1,0) - только третья. Первая неисправность проявляется на наборе (1,1,1), на этом же наборе проявляется также вторая неисправность. Таким образом, рассмотренные, три неисправности логически различимы.

Задания на контрольную работу

В контрольной работе студенты должны выполнить три задачи, номера первой и третьей задач выбираются из табл. 13, варианты второй задачи из табл. 14.

Таблица 13

Последняя цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номера выполняемых задач	1 25	2 26	3 27	4 28	5 29	10 30	9 21	8 22	7 23	6 24

В задачах 1-10 определить кратчайший путь из x_1 в x_8, применяя алгоритм Дейкстры. Построить дерево кратчайших путей для графа, заданного в задаче.

Задание на задачи 11-20.

На устройство изображенное на рис. 16, подаются синхронно с интервалом времени τ две двоичные последовательности $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Записать значения двоичных символов z(t) и y(t) на выходе сумматора с памятью, при условии y(0)=0.

Задания выбрать из табл. 14.

Таблица 14

Последняя цифра шифра	1	2	3	4	5
Номера выполняемых задач	11	12	13	14	15
$X_1(t)$	101101	110011	111000	010111	001001
$X_2(t)$	010101	101101	011010	100011	100011

Продолжение таблицы 14

Последняя цифра шифра	6	7	8	9	10
Номера выполняемых задач	16	17	18	19	20
$X_1(t)$	000111	011100	011011	010000	001111
$X_2(t)$	110111	111000	111100	101001	101111

В задачах 21-30 рассматривается автоматическое устройство, работа которого характеризуется схемой, изображенной на рис. 21, x_1, x_2, x_3 – сигналы поступающие на входы схемы 9, 10, 11 соответственно. Предполагается, что ДА имеет одну из трех неисправностей, номера которых указаны в скобках для каждой из задач. Общий список всех возможных неисправностей, снабженных номерами приводится ниже:

1. элемент 7 не инвертирует поступающий на него сигнал,
2. элемент 8 заменяет функцию, сформированную этим элементом в исправном состоянии, на ее отрицание,
3. элементы 5 и 6 не инвертируют поступающие на них сигналы,
4. элемент 3 вместо операции конъюнкции поступающих на него сигналов выполняет дизъюнкцию этих сигналов,
5. элемент 3 имеет неисправность типа 2,
6. элемент 2 имеет неисправность типа 4,
7. элемент 4 имеет неисправность типа 4,
8. элемент 8 выдает всегда на выходе 1,
9. элемент 2 имеет неисправность типа 2,
10. элемент 6 имеет неисправность типа 2,
11. элемент 4 имеет неисправность типа 8.

Требуется построить логическую функцию эталонной (исправной) сети f_0, а также логические функции f_1, f_2, f_3 неисправной сети. Указать проверяющий тест и тест поиска дефекта, а также описать процедуру поиска неисправности.

21. (1,2,3),
22. (1,5,3),
23. (1,2,4),
24. (1,5,6),
25. (5,7,9),

26. (7,2,9),
27. (7,5,3),
28. (4,8,2),
29. (6,9,10),
30. (9,11,4).