Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова,

Л.А. Севастьянов

Л Е К Ц И И
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Математическая логика

Москва
Российский университет дружбы народов
2011

Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А.
Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие.
Математическая логика. – М.: Изд-во РУДН, 2011. – *79 с.*

В пособии излагаются основные положения логики – булева алгебра, исчисление высказываний, исчисление предикатов.

Подготовлено на кафедре систем телекоммуникаций и предназначено для студентов I, II курсов математических специальностей университетов.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Тема. Введение в алгебру логики

1. *Историческая справка. Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры.*

Историческая справка

Свое название алгебра логики (или булева алгебра) получила в честь английского математика Джорджа Буля, внесшего большой вклад в развитие двоичной системы исчисления и ее приложения к логике.

Одним из первых заинтересовался двоичной системой гениальный немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц. В своей работе «Искусство составления комбинаций» он заложил основы общего метода, который позволяет свести мысли человека к совершенно точным формальным высказываниям. Таким образом, открылась возможность перевести логику из словесного царства в царство математики.

Если у Лейбница и возникла мысль, что двоичная система может стать универсальным логическим языком, но он ее не высказал вслух. Лишь спустя более ста лет после смерти Лейбница (1716) английский математик-самоучка Джордж Буль энергично принялся за поиски такого универсального языка.

Дж. Буль был родом из бедной рабочей семьи, жившей в промышленном городе Линкольне в восточной Англии. Он, конечно, не мог получить солидное образование, но ему помогли его ум, решимость и целеустремленность.

Уже в 12 лет он изучил латинский язык, а через два года и греческий. А затем добавил к своей коллекции языков французский, немецкий и итальянский.

В 1831 г. в возрасте 16 лет Буль был вынужден поступить на работу, чтобы помочь семье. Четыре года он проработал на малооплачиваемой должности помощника учителя, но затем, осмелев, решил открыть собственную школу. Поняв, что ему следует углубить свои познания в математике, чтобы превзойти учеников, он приступил к чтению математических журналов, которые имелись в библиотеке местного научного учреждения.

Изучив горы научных публикаций, он овладел сложнейшими математическими теориями своего времени. У него возникли и собственные оригинальные идеи. В 1839 г. одна из его статей была принята к публикации научным журналом. На протяжении следующего десятилетия работы Буля регулярно печатались, а его имя приобрело известность в научных кругах. В конце концов, деятельность Буля получила столь высокую оценку, что он, несмотря на отсутствие формального образования, был приглашен работать на математический факультет Королевского колледжа в Ирландии.

Имея теперь больше времени для научной работы, Буль все чаще стал задумываться над вопросом, над которым задолго до него размышлял Лейбниц, - как подчинить логику математики. В 1847 г. Буль написал важную статью на тему «Математический анализ логики», а в 1854 г. развил идеи в работе под названием «Исследование законов мышления». Эти основополагающие труды Буля внесли поистине революционные изменения в логику как науку.

Буль изобрел своеобразную алгебру – систему обозначений и правил, применимую к всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Пользуясь этой системой, Буль мог закодировать высказывания-утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать, - с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими подобно тому, как в математике манипулируют числами.

Большинство логиков того времени либо игнорировали, либо резко критиковали систему Буля. Но ее возможности оказались настолько велики, что она не могла остаться долго без внимания и сейчас в обязательном порядке входит в курс дискретной математики.

Прямое произведение множеств

Рассмотрим два множества A и B.

Прямым произведением множеств A и B (обозначение $A\times B$) называется множество упорядоченных пар (a, $в$) таких, что $a\in A$, $b\in B$. В частности, если $A=B$, то такое произведение обозначается A^2. Аналогично прямым произведением множеств $A_1,\ldots A_n$

(обозначение $A_1\times\ldots\times A_n$) называется множество всех упорядоченных наборов $(a_1,\ldots,a_n)$ длины n таких, что $a_1\in A_1,\ldots, a_n\in A_n$. $A\times\ldots\times A$ обозначается A^n.

Соответствия и функции.

Соответствием между множествами A и B называется подмножество $G\subseteq A\times B$.

Если $(a,b)\in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.

Проекцией подмножества $G\subseteq A\times B$ на множество A называется множество элементов $a\in A$ таких, что $(a,b)\in G$ (обозначение $пр_A G$). Аналогично $пр_B G$ - это множество элементов $b\in B$ таких, что $(a,b)\in G$.

Множество $пр_A G$ называется областью определения соответствия, а множество $пр_B G$ - областью значений соответствия. Если $пр_A G=A$, то соответствие называется всюду определенным (в противном случае соответствие называется частичным); если $пр_B G=B$, то соответствие называется сюръективным.

Множество всех $b\in B$, соответствующих элементу $a\in A$, называется образом a в B при соответствии G. Множество всех a, которым соответствует b, называется прообразом b в A при соответствии G.

Соответствие G называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента из $пр_A G$ является единственный элемент из $пр_B G$. Соответствие G между A и B называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и прообразом любого элемента из $пр_B G$ является единственный элемент из $пр_A G$.

Функцией называется функциональное соответствие. Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция f имеет тип $A\to B$ (обозначение $f\colon A\to B$). Каждому элементу a из своей области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений (обозначение $f(a)=b$). Элемент a называется аргументом функции, b - значением функции. Всюду определенная функция $f\colon A\to B$ называется отображением A в B. Образ A при отображении f

обозначается $f(A)$. Если соответствие f при этом сюръективно, т.е. каждый элемент B имеет прообраз в A, то говорят, что имеет место отображение A на B (сюръективное отображение). Если $f(A)$ состоит из единственного элемента, то f называется функцией - константой.

Пусть даны функции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Функция $h\colon A \to C$ называется композицией f и g (обозначение $f \circ g$), если имеет место равенство $h(a)=g(f(a)),\ a \in A$. Композиция f и g представляет собой последовательное применение функций f и g .

Алгебры.

Функцию φ типа $\varphi\colon M^n \to M$ будем называть <u>n-арной операцией на множестве M</u>; n называется <u>арностью</u> операции φ. Множество M вместе с заданной на нем совокупностью операций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, т.е. система $A=\{M; \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, называется <u>алгеброй</u>; M называется <u>основным,</u> или <u>несущим, множеством</u> алгебры A. Вектор арностей операций алгебры называется ее <u>типом,</u> совокупность операций Φ-<u>сигнатурой.</u>

Множество $L \subseteq M$ называется <u>замкнутым</u> относительно n-арной операции φ на M, если $\varphi(L^n) \in L$, т.е. если значения φ на аргументах из L принадлежат L. Если L замкнуто относительно всех операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ алгебры A, то система $A'=\{L; \varphi_1, \ldots, \varphi_m.\}$ называется <u>подалгеброй A</u> (при этом $,\varphi_1, \ldots, \varphi_{m.}$ рассматриваются как операции на L).

<u>Пример1.1.</u> Пусть задано множество U. Множество всех его подмножеств называется <u>булеаном</u> U и обозначается через $B(U)$. Алгебра $B=\{B(U); \cup, \cap, -\}$ называется <u>булевой алгеброй множеств</u> над U, ее тип $(2,2,1)$. Элементами основного множества этой алгебры являются подмножества U . Для любого $U' \subseteq U$ $B'=\{B(U'); \cup, \cap, -\}$ является подалгеброй B. Например, если $U=\{a,b,c,d\}$, то основное множество алгебры B содержит 16 элементов; алгебра $B'=\{B(U'); \cup, \cap, -\}$, где $U'=\{a,b\}$ - подалгебра B; ее основное множество содержит четыре элемента.

2. Функции алгебры логики. Примеры логических функций

Функции алгебры логики.

Рассмотрим двухэлементное множество $B=\{0,1\}$ и двоичные переменные, принимающие значения из B. Элементы 0 и 1 не являются числами в обычном смысле, хотя по некоторым свойствам и похожи на них. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных - логическая: 1 - «да», 0 - «нет» или 1 - «истина», 0 - «ложь».

Алгебра, образованная множеством B вместе со всеми возможными операциями на нем, называется алгеброй логики. Функцией алгебры логики от n переменных называется n-арная операция на B, т.е. $f:B^n \to B$, где $B^n=\{(x_1,\dots,x_n)|\ x_1,\dots,x_n \in B\}$. Итак, функция алгебры логики (или логическая функция) $f(x_1,\dots,x_n)$ - это функция, принимающая значения $0,1,$ аргументы которой принимают значения $0,1$. Множество всех логических функций обозначаются P_2, множество всех логических функций n переменных – $P_2(n)$.

Для задания функции $f(x_1,\dots,x_n)$ достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов значений аргументов, т.е. выписать таблицу 2.1.

Таблица 2.1

x_1 ,…, x_{n-1}, x_n	$f(x_1$,…, x_{n-1} $x_n)$
0 ,…, 0, 0	$f(0,$,…, 0, $0)$
0 ,…, 0, 1	$f(0$,…, 0, $1)$
0 ,…, 1, 0	$f(0$,…, 1, $0)$
0 ,…, 1, 1	$f(0$,…, 1, $1)$
	…
1 ,…, 1, 1	$f(1$,…, 1, $1)$

Можно видеть, что наборы n переменных принимают 2^n различных наборов значений (Это может быть доказано по индукции). Для удобства мы будем использовать стандартное расположение наборов значений аргументов: если набор рассматривать как запись числа в двоичном исчислении, то расположение наборов соответствует естественному расположению чисел $0,1,\dots,2^n-1$.

Рассмотрим представление некоторого числа b в двоичной системе исчисления (т.е. в системе, имеющей только две цифры 0 и 1). Если b можно представить в виде

$$b=b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + b_1 2^1 + b_o 2^o,$$

где $b_i \in B,\ i=0,\ldots,n$, т.е. либо 0 либо 1, то двоичная запись числа b будет выглядеть следующим образом $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_o$.

Примеры: $0_{10}=0 \cdot 2^o=0_2$

$1_{10}=1 \cdot 2^o=1_2$

$2_{10}=1 \cdot 2^1+0 \cdot 2^o=10_2$

$6_{10}=1 \cdot 2^2+1 \cdot 2^1+0 \cdot 2^o=110_2$

Вернемся к приведенной выше таблице. При любом наборе значений аргументов логическая функция может принимать значение либо 0, либо 1. Поскольку число различных наборов значений n аргументов равно 2^n, то число $|P_2(n)|$ различных функций n переменных равно 2^{2^n}.

Введенное понятие функции несовершенно, поскольку оно не позволяет рассматривать функции от меньшего числа аргументов как функции от большего числа аргументов. Для устранения этого недостатка введем следующее определение.

Определение. Функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots x_n)$ из P_2 зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n$ переменных $x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n$, что $f(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},0,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n) \neq f(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n)$.

В этом случае переменная x_i называется существенной. Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной или фиктивной.

Если переменная x_i является фиктивной, то функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ по существу зависит лишь от $(n-1)$-й переменной, т.е. представляет собой функцию $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)$ от ($n-1$) переменной. Будем говорить, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из функции g введением фиктивной переменной.

Определение. Функции f и g называются равными, если функцию g можно получить из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных.

В дальнейшем все функции мы будем рассматривать с точностью до фиктивных переменных.

Смысл удаления или введения фиктивных переменных в том, что любую конечную совокупность функций можно считать зависящей от одного и того же множества переменных, что часто бывает удобно. В частности, равенство $P_2(n) = 2^{2^n}$ справедливо при условии, что $P_2(n)$ содержит все функции n переменных, в том числе и функции с фиктивными переменными.

Примеры логических функций.

Логических функций одной переменной - четыре. Они приводятся в следующей таблице 2.2.

Таблица 2.2.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_o и f_3 - константы *0* и *1* соответственно; f_1 - тождественная функция, $f(x)=x$; f_2 - отрицание x: $f_2(x)=\overline{x}$ (или $\rceil x$, читается *«не x»*). Отметим, что значения функций f_0 и f_3 не зависят от значения переменной и, следовательно, переменная x - фиктивная.

Логических функций двух переменных - 16. Они приводятся в следующей таблице 2.3.

Таблица 2.3.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_{15} - константы *0* и *1*, т.е. функции с двумя фиктивными переменными.

Функция $f_1(x_1,x_2)$ называется конъюнкцией x_1 и x_2 и обозначается как $x_1\&x_2$ или $x_1\wedge x_2$, или $x_1\cdot x_2$ (знак конъюнкции часто опускают). Конъюнкция x_1 и x_2 равна *1,* если только x_1 и x_2 равны *1*, поэтому ее часто называют функцией **И**. Еще ее называют логическим умножением, т.к. ее таблица совпадает с таблицей умножения для *0* и *1*.

Функция $f_7(x_1,x_2)$ называется дизъюнкцией x_1 и x_2 и обозначается как $x_1 \vee x_2$. Она равна *1*, если x_1 или x_2 равны *1*, поэтому ее называют еще функцией **ИЛИ** (“или” здесь понимается в неразделительном смысле - хотя бы один из двух).

Функция $f_6(x_1,x_2)$ - это сложение по модулю *2*. Ее обозначение $x_1 \oplus x_2$. Она равна *1*, когда значения ее аргументов различны. Поэтому ее еще называют неравнозначностью.

Функция $f_9(x_1,x_2)$ называется эквивалентностью и обозначается как $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \equiv x_2$. Она равна *1*, когда значения ее аргументов равны, и равна *0* в противном случае.

$f_{13}(x_1,x_2)$ - импликация. Обозначение $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$.(читается “если x_1, то x_2”).

$f_8(x_1,x_2)$ - стрелка Пирса. Обозначение $x_1 \downarrow x_2$.

$f_{14}(x_1,x_2)$ - штрих Шеффера. Обозначение x_1 / x_2.

Остальные функции специальных названий не имеют.

В заключении отметим, что

$x_1 \& x_2 = min(x_1,x_2)$, $x_1 \vee x_2 = max(x_1,x_2)$.

3. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра.

Суперпозиции и формулы.

Пусть даны функции $f{:}A \to B$ и $g{:}B \to C$. Функция $h{:}A \to C$ называется композицией функций *f* и *g*, если имеет место равенство $h(x)=g(f(x))$, где $x \in A$. Говорят, что функция *h* получена подстановкой *f* в *g*.

Суперпозицией функций $f_1,\ldots,f_m$ называется функция *f*, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга, а формулой называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Пусть дано множество исходных функций $S=\{ f_1,\ldots,f_m,\ldots \}$. Символы переменных $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ будем считать формулами глубины *0*. Формула *F* имеет глубину $k+1$, если *F* имеет вид

$f_i(F_1,\dots,F_{n(i)})$, где $f_i \in S_{n(i)}$ - число аргументов f_i, а $F_1,\dots,F_{n(i)}$ - формулы, максимальная из глубин которых равна k. $F_1,\dots,F_{n(i)}$ называются подформулами F; все подформулы формул $F_1,\dots,F_{n(i)}$ также называются подформулами F. Например, $f_2(x_1,x_2)$ - это формула глубины 1, а $f_3(f_1(x_3,x_1), f_2(x_1,f_3(x_1,x_2)))$ - формула глубины 3, содержащая одну подформулу глубины 2 и две подформулы глубины 1. Если f_1 обозначает дизъюнкцию, f_2- конъюнкцию, а f_3 - сложение по $mod2$, то приведенная формула примет более привычный вид:

$$((x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \& (x_1 \oplus x_2))) \qquad (3.1)$$

Все формулы, построенные описанным способом, т.е. содержащие только символы переменных, скобки и знаки функций из множества S называются формулами над S.

Всякая формула, выражающая функцию f, как суперпозицию других функций, задает правило ее вычисления: для вычисления формулы необходимо вычислить значения всех ее подформул. Вычислим, например, формулу (3.1) на наборе $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0$. Используя таблицу 2.3 получим $x_3 \vee x_1=1;\ x_1 \oplus x_2=0,\ x_1\&(x_1 \oplus x_2)=x_1\&0=0;\ ((x_3 \vee x_1) \oplus (x_1\&(x_1 \oplus x_2)))=1 \oplus 0=1$.

Таким образом, формула каждому набору значений аргументов ставит в соответствие значение функции и, поэтому, может служить наряду с таблицей способом задания и вычисления функции. По формуле, вычисляя ее на всех 2^n наборах, можно восстановить таблицу функции. О формуле, задающей функцию, говорят, что она реализует или представляет эту функцию.

В отличие от табличного задания представление данной функции формулой не единственно. Например, функцию f_{14} «штрих Шеффера» из таблицы 2.3 можно выразить формулами

$$f_{14}(x_1,x_2)=\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$f_{14}(x_1,x_2)=\overline{x_1 x_2} \qquad (3.2)$$

а функцию f_8 «стрелка Пирса» - формулами

$$f_8(x_1,x_2)=\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$f_8(x_1,x_2)=\overline{x_1 \vee x_2} \qquad (3.3)$$

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются эквивалентными или равносильными. Эквивалентность формул обозначается знаком равенства:

$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2}$, $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}$

Для того, чтобы выяснить, эквивалентны формулы или нет, можно по каждой формуле восстановить таблицу функции, а затем эти таблицы сравнить.

Существует и другой метод определения эквивалентности формул, называемый методом эквивалентных преобразований. Его мы рассмотрим позднее.

Булева алгебра.

Алгебра ($P_2, \vee, \&, \rceil$), основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями - дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется <u>булевой алгеброй логических функций.</u> Операции булевой алгебры также часто называют булевыми операциями.

Свойства булевых операций.

1. Ассоциативность:

$$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot x_3\right),$$
$$\left(x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3\right). \qquad (3.4)$$

2. Коммутативность:

$$x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2,$$
$$x_2 \vee x_1 = x_1 \vee x_2. \qquad (3.5)$$

3. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(x_1 \cdot x_2\right) \vee \left(x_2 \cdot x_3\right) \qquad (3.6)$$

4. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$\left(x_1 \vee \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \cdot \left(x_2 \vee x_3\right) \qquad (3.6)$$

5. Идемпотентность:

$$x \cdot x = x$$
$$(x \vee x) = x \qquad (3.7)$$

6. Двойное отрицание:

$$\overline{\overline{x}} = x \qquad (3.8)$$

7. Свойства констант:

$$x \cdot 1 = x,\ x \cdot 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \vee 0 = x,\ \overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0. \qquad (3.9)$$

8. Закон де Моргана:

$\overline{(x_1 \cdot x_2)} = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$,

$\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)$ (3.10)

9. Закон противоречия:

$x \cdot \overline{x} = 0$ (3.11)

10. Закон «исключения третьего»

$x \vee \overline{x} = 1$ (3.12)

Соотношения (3.4) - (3.12) можно проверить стандартным методом, т.е. вычислением обеих частей равенств на всех наборах значений переменных.

Очевидно, что результат вычислений не зависит от того, являются ли эти переменные независимыми или получены, в свою очередь, в результате каких-то вычислений. Поэтому равенства (3.4) - (3.12) остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и любых формул, представляющих эти функции. Т.е. справедливо правило подстановки: при подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой F.

4. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Разложение булевых функций по переменным.

Принцип двойственности.

Определение: Функция $f^*(x_1,\ldots,x_n)$, равная $\bar{f}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$, называется двойственной функцией к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Очевидно, что таблица для двойственной функции (при фиксированном порядке наборов значений переменных) получается из таблицы для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ инвертированием (т.е. заменой *0* на *1* и *1* на *0*) столбца функции и его переворачиванием (таблицы 4.1 и 4.2).*Таблица 4.1.*

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_0^*	f_1^*	f_2^*	f_3^*
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*

Таблица 4.2.

x_1	x_2	f_0	f_3	f_0^*	f_3^*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Из таблиц видно, что

функция *0* двойственна функции *1*,
функция *1* двойственна функции *0*,
функция x двойственна функции x,
функция $\overline{x}$ двойственна функции $\overline{x}$,
функция $x_1 \cdot x_2$ двойственна функции $x_1 \vee x_2$,
функция $x_1 \vee x_2$ двойственна функции $x_1 \cdot x_2$.

Функция, двойственная самой себе, является самодвойственной. Т.о. x и $\overline{x}$ являются самодвойственными функциями.

Из определения двойственности следует, что

$$(f^*)^* = (\bar{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n))^* = \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x}}_1, \ldots, \overline{\overline{x}}_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

т.е. исходная <u>функция f является двойственной к f^*.</u>

Пусть функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется формулой F. Спрашивается, какой вид имеет формула F^*, реализующая функцию $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ все различные символы переменных, встречающиеся в множествах $(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,(x_{m1},\ldots,x_{mn_m})$.

<u>Теорема 4.1.</u> Если

$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = f(f_1(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,f_m(x_{m1},\ldots,x_{mn_m}))$, то

$\varphi^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(f_1^*(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,f_m^*(x_{m1},\ldots,x_{mn_m}))$.

<u>Доказательство.</u>

$$\varphi^*(x_1,\ldots,x_n)=\overline{\varphi}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)=$$

$$=\overline{f}(f_1(\overline{x}_{11},\ldots,\overline{x}_{1n_1}),\ldots,f_m(\overline{x}_{m1},\ldots,\overline{x}_{mn_m}))=$$

$$=\overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11},\ldots,\overline{x}_{1n_1}),\ldots,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_{m1},\ldots,\overline{x}_{mn_m}))=$$

$$\overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,\overline{f}_m^*(x_{m1},\ldots,x_{mn_m}))=$$

$$f^*(f_1^*(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,f_m^*(x_{m1},\ldots,x_{mn_m}))).$$

Из теоремы вытекает

Принцип двойственности. Если формула $F=F(f_1,\ldots,f_m)$ реализует функцию $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, то формула $F^*=F(f_1^*,\ldots,f_m^*)$ полученная из F заменой функций $f_1,\ldots,f_m$ на $f_1^*,\ldots,f_m^*$, реализует функцию $\varphi^*(x_1,\ldots,x_n)$.

Формулу F^* будем называть формулой, двойственной к F.

Для формул над $(0,1,\vee,\&,)$ принцип двойственности может быть сформулирован так: для получения формулы F^*, двойственной к формуле F, нужно в формуле F всюду заменить 0 на 1, 1 на 0, $\&$ на $\vee$, $\vee$ на $\&$.

Пример 4.1.

Пусть $F_1(f_1)=f_1(x_1,x_2)=x_1\&x_2$.

Тогда $F_1^*(f_1)=F_1(f_1^*)=f_1^*(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$.

Пусть

$$F_2(f_1,f_2,f_3)=f_2(f_1(x_1,x_2),f_1(f_3(x_1),f_3(x_2)))=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2.$$

Здесь f_1 – конъюнкция, f_2 – дизъюнкция, f_3 – отрицание.

Тогда

$$F_2^*(f_1,f_2,f_3)=F_2(f_1^*,f_2^*,f_3^*)=$$
$$=f_2^*(f_1^*(x_1,x_2),f_1^*(f_3^*(x_1),f_3^*(x_2)))=(x_1\vee x_2)\,\&\,(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2)$$

Из принципа двойственности вытекает, что если

$F(f_1,\ldots,f_m)=\Phi(g_1,\ldots,g_n)$, то $F^*(f_1,\ldots,f_m)=\Phi^*(g_1,\ldots,g_n)$

Пример 4.2.

Из равенства $\overline{x_1x_2}=(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2)$ вытекает равенство $\overline{x_1\vee x_2}=\overline{x}_1\overline{x}_2$.

Принцип двойственности позволяет почти в два раза сокращать усилия на вывод равенств при рассмотрении свойств булевых функций.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

Введем обозначения $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$. Пусть $\delta \in \{0,1\}$. Тогда

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, \delta = 1 \\ \bar{x}, \delta = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^{\delta} = 1 \Leftrightarrow x = \delta$.

Определение. Выражение вида $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n}$ называется элементарной конъюнкцией.

Членами конъюнкции являются либо сами переменные $x_1, \ldots, x_n$, либо их отрицания.

Пример 4.3.

$$x_1 x_2, \quad x_3 \bar{x}_4, \quad x_1 x_2 \bar{x}_4 x_5.$$

Определение. Элементарная конъюнкция, в которую включены все переменные, называется основной элементарной конъюнкцией.

Пример 4.4.

$$n = 5; \quad x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5, \quad \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5.$$

Лемма 4.1.

$$x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n} = \begin{cases} 1, \text{ если } \delta_1 = x_1, \ldots \delta_n = x_n, \\ 0, \text{ если } \delta_i \neq x_i \text{ хотя бы для одного } i. \end{cases}$$

Доказательство

Пусть $\delta_1 = x_1, \ldots, \delta_n = x_n$. Тогда

$$x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} = x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n} = 1 \cdots 1 = 1.$$

Пусть $\delta_k \neq x_k$, для некоторого k: $1 \le k \le n$. Тогда

$$x_1^{\delta_1} \cdots x_k^{\delta_k} \cdots x_n^{\delta_n} = x_1^{x_1} \cdots x_k^{\bar{x}_k} \cdots x_n^{x_n} = 1 \cdots 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdots 1 = 0.$$

Определение. Формула $\Phi = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m$, где k_i-элементарные конъюнкции, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ). Если все k_i являются основными элементарными конъюнкциями, то ДНФ называется совершенной (СДНФ).

Пример 4.5.

$$n = 3; \quad x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 - ДНФ,$$

$$x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 - СДНФ.$$

Разложение булевых функций по переменным.

Теорема 4.2. (о разложении функций по переменным). Каждую функцию алгебры логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ при любом $m, 1\le m\le n$, можно представить в следующей форме:

$$f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_m} x_1^{\delta_1}\cdots x_m^{\delta_m} f(\delta_1,\ldots,\delta_m,x_{m+1},\ldots,x_n),$$

(4.1)

где дизъюнкция берется по всем возможным наборам значений переменных $x_1,\ldots,x_m$.

Это представление называется разложением функции по m переменным $x_1,\ldots,x_m$.

Доказательство. Теорема доказывается подстановкой в обе части равенства (4.1) произвольного набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n)$ всех n переменных.

Левая часть (4.1) дает $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Правая -

$$\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_m} \alpha_1^{\delta_1}\cdots\alpha_m^{\delta_m} f(\delta_1,\ldots,\delta_m,\alpha_{m+1},\ldots\alpha_n)=$$

$$=\alpha_1^{\alpha_1}\cdots\alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

В качестве следствия получим два специальных случая разложения.

Следствие 4.1. Разложение по k-ой переменной

$$f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=$$

$$=x_k f(x_1,\ldots,x_{k-1},1_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\vee \bar{x}_k f(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

Следствие 4.2. Разложение по всем n переменным

$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_n} x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n} f(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Но $f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0$ либо $f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1$. Следовательно, при $f(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 0$ оно может быть преобразовано к виду

$$\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_n} x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n} f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=\bigvee_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n\\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n},$$ т.е.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n\\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n}$$ - СДНФ.

Отсюда вытекает порядок построения СДНФ по функции, заданной таблицей.

5. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей. Представление логических функций булевыми формулами. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Основные эквивалентные преобразования.

Построение СДНФ для функции, заданной таблицей.

На предыдущей лекции была доказана теорема о разложении функций по переменным. В качестве следствия из нее получено разложение функций по всем переменным, являющееся СДНФ. Данное следствие носит конструктивный характер, т.к. оно по таблице функции позволяет построить формулу, являющуюся СДНФ (если $f \not\equiv 0$). СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице f; каждому «единичному» набору $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, т.е. набору, на котором значение функции равно 1, соответствует конъюнкция всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если δ_i=0, и без отрицания, если δ_i=1.

Пример 5.1. Записать СДНФ для функции $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	Основная элементарная конъюнкция
0	*0*	*1*	$\bar{x}_1\bar{x}_2$
0	*1*	*1*	$\bar{x}_1 x_2$
1	*0*	*0*	
1	*1*	*1*	$x_1 x_2$

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 .$$

Представление логических функций булевыми формулами.

Представить логическую функцию булевой формулой - это значит представить f в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Если $f(x_1,\ldots,x_n) \not\equiv 0$, то по следствию 4.2

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f(\delta_1,\dots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} \text{ - СДНФ}$$

т.е. булевой формулой для $f(x_1,\dots,x_n)$ может служить ее СДНФ.

Если же $f(x_1,\dots,x_n) \equiv 0$, то $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \bar{x}_1$.

Сформулируем изложенные результаты в виде

Теоремы 5.1. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Определение. Выражение вида $x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \dots \vee x_n^{\delta_n}$ называется элементарной дизъюнкцией.

Членами дизъюнкции являются либо $x_1,\dots,x_n$, либо их отрицания.

Пример 5.2.

$$x_1 \vee x_2, \quad x_3 \vee \bar{x}_4, \quad x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5.$$

Определение. Элементарная дизъюнкция, в которую включены все переменные, называется основной элементарной дизъюнкцией.

Пример 5.3.

$$n = 5; x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5, \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5 .$$

Определение. Формула $\Phi = D_1 \cdot D_2 \cdots D_m$, где D_i - элементарные дизъюнкции, называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ). Если все D_i являются основными элементарными дизъюнкциями, то КНФ называется совершенной (СКНФ).

Пример 5.4.

$$n=3;\ (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) - \text{ КНФ},$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \text{ -СКНФ}.$$

Спрашивается, нельзя ли произвольную функцию алгебры логики представить в виде СКНФ? Покажем, что при $f \not\equiv 1$ это возможно.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \not\equiv 1$. Разложим функцию $f^*(x_1,\dots,x_n)$ (очевидно $f^*(x_1,\dots,x_n) \not\equiv 0$) в СДНФ:

$$f^*(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$$

Из принципа двойственности следует, что

$$f^{**}(x_1,...,x_n) = \underset{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}}{\&} x_1^{\delta_1} \vee ... \vee x_n^{\delta_n}\ . \qquad (5.1)$$

Левая часть равенства (5.1) есть $f(x_1,...,x_n)$, а правая может быть преобразована следующим образом:

$$\underset{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}}{\&} x_1^{\delta_1} \vee ... \vee x_n^{\delta_n} = \underset{\substack{\underline{\delta_1},...,\underline{\delta_n} \\ f(\bar{\delta}_1,...,\bar{\delta}_n)=0}}{\&} x_1^{\delta_1} \vee ... \vee x_n^{\delta_n} =$$

$$= \underset{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f(\delta_1,...,\delta_n)=0}}{\&} x_1^{\bar{\delta}_1} \vee ... \vee x_n^{\bar{\delta}_n}\ .$$

Таким образом, получаем разложение

$$f(x_1,...,x_n) = \underset{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f(\delta_1,...,\delta_n)=0}}{\&} x_1^{\bar{\delta}_1} \vee ... \vee x_n^{\bar{\delta}_n} \qquad (5.2)$$

Данная формула носит конструктивный характер, т.к. она по таблице функции позволяет построить формулу, являющуюся СКНФ (если $f \not\equiv 1$).

СКНФ функции f содержит ровно столько дизъюнкций, сколько нулей в таблице f. Каждому «нулевому» набору ($\delta_1,...,\delta_n$) значений переменных, т.е. набору, на котором значение функции равно 0, соответствует дизъюнкция всех переменных, в которых x_i взято с отрицанием, если $\delta_i = 1$ и без отрицания, если $\delta_i = 0$.

Пример 5.5. Записать СКНФ для функции $x_1 \to x_2$.

x_1	x_i	$x_1 \to x_2$	Основная элементарная дизъюнкция
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2$
1	1	1	

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee x_2\ .$$

Основные эквивалентные преобразования.

В лекции 3 был изучен один из методов проверки эквивалентности функций, заключающийся в построении и сравнении таблиц обеих функций. Другим методом проверки эквивалентности функций и получения новых эквивалентностей является метод эквивалентных преобразований, заключающийся в построении цепи эквивалентных формул, на основе ранее доказанных эквивалентностей.

Рассмотрим некоторые основные эквивалентные преобразования в булевой алгебре и новые эквивалентности, которые могут быть получены с их помощью из (3.4) - (3.12).

Поглощение.

$$x \vee xy = x, \tag{5.3}$$

$$x(x \vee y) = x. \tag{5.4}$$

Докажем (5.3) и (5.4).

$$x \vee xy = x \cdot 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x\ 1 = x.$$

$$x(x \vee y) = xx \vee xy = x \vee xy = x.$$

Склеивание.

$$xy \vee x\bar{y} = x. \tag{5.5}$$

Докажем (5.5). $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \cdot 1 = x.$

Обобщенное склеивание.

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}. \tag{5.6}$$

Докажем (5.6). $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} = xz \vee y\bar{z}.$

Расщепление.

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y. \tag{5.7}$$

Докажем (5.7). $x \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee xy \vee \bar{x}y =$
$= x \cdot 1 \vee y \cdot 1 = x \vee y.$

Тема. Минимизация булевых функций.

6. Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски.

Проблема минимизации.

Определение. ДНФ φ функции f называется

а) минимальной (минимальной по литералам), если она имеет наименьшее число символов переменных среди других ДНФ функции f;

б) кратчайшей (минимальной по конъюнкциям), если она имеет минимальное число элементарных конъюнкций.

Число различных элементарных конъюнкций от n переменных равно 3^n, т.к. любая переменная может либо входить в конъюнкцию, либо не входить, либо входить с отрицанием. Тогда ДНФ от n переменных однозначно определяется вектором длины 3^n, состоящим из нулей и единиц, где 1 означает, что соответствующая элементарная конъюнкция входит в ДНФ, а 0 - не входит. Поэтому число всех ДНФ от "n" переменных равно 2^{3^n}.

Для произвольной функции алгебры логики можно написать много ДНФ. Проблема минимизации состоит в том, чтобы для функции f построить минимальную ДНФ в определенном выше смысле. Эта проблема допускает тривиальное решение, заключающееся в переборе всех 2^{3^n} ДНФ, но очевидно, что такое решение является чрезвычайно трудоемким даже при небольших значениях n.

Определение. Формула Ψ влечет формулу Φ (обозначение $\Psi \mapsto \Phi$), если $(\Psi \mapsto \Phi) \equiv 1$, т.е. не существует такого набора значений переменных, при котором Ψ принимает значение 1, а Φ - значение 0.

Определение. Элементарная конъюнкция K называется импликантом функции f, если $K \mapsto f$.

Пример 6.1.

Пусть $f(x,y,z) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$ и пусть $K=x\bar{y}=x^1y^0$. $K=1 \Leftrightarrow x=1, y=0$. Поскольку $f(1,0,z)=1\cdot 1\cdot z \vee 1\cdot 1\cdot \bar{z} = z \vee \bar{z} \equiv 1$, то $K=x\bar{y}$ является импликантом функции f.

Пусть $f(x,y,z,t) = x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,t$ и пусть $K = x\,\overline{y} = x^1y^0$. $K=1 \Leftrightarrow x=1, y=0$. Поскольку $f(1,0,z,t) = z \vee t \not\equiv 1$, т.к. если $z=0$ и $t=0$, то $z \vee t=0$, т.е. $K=x\,\overline{y}$ не является импликантом f.

<u>Теорема 6.1.</u> Если формула Φ, реализующая функцию f, имеет вид $\Phi = \bigvee_{i=1}^{n} k_i$, - ДНФ, то $k_i \mapsto \Phi$, $i = \overline{1,n}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть в ДНФ функции $k_i=1$. Тогда $\Phi = k_1 \vee \ldots \vee k_i \vee \ldots \vee k_n = k_1 \vee \ldots \vee 1 \vee \ldots \vee k_n = 1$ и, следовательно, $f=1$.

<u>Определение.</u> Импликант P функции f называется <u>простым,</u> если при удалении любой переменной из P полученная элементарная конъюнкция не является импликантом.

В примере 6.1. $x\overline{y}$ - простой импликант, т.к. ни x ни $\overline{y}$ импликантами не являются.

<u>Теорема 6.2.</u> Каждая функция $f \not\equiv 0$ представима в виде $f = \bigvee_i P_i$, где P_i - простые импликанты.

<u>Доказательство</u>. Нужно показать, что $f=1$ тогда и только тогда, когда $\bigvee_i P_i = 1$. Очевидно, что если $\bigvee_i P_i = 1$, то $f=1$.

Пусть теперь для некоторого набора значений переменных $f = \bigvee_i k_i = 1$. В этом случае $k_i = 1$, а из теоремы 6.1. следует, что k_i - импликант. Сокращаем этот импликант до простого. Данную процедуру повторяем для всех наборов значений переменных, для которых $f=1$.

<u>Определение.</u> ДНФ $\Phi = \bigvee_i k_i$ функции f называют <u>неизбыточной</u> если:

1) все k_i - простые импликанты;
2) удаление любой k_i из Φ нарушает равенство $f = \Phi$.

Очевидно, что минимальная ДНФ является неизбыточной. Поэтому минимальные ДНФ следует искать среди неизбыточных. Таким образом задача минимизации может быть разделена на следующие этапы:

1) нахождение всех простых импликантов функции f;
2) нахождение неизбыточных ДНФ функции f;

3) выбор минимальных ДНФ функции f.

Порождение простых импликантов.

Определение. Элементарная конъюнкция α покрывается элементарной конъюнкцией β, если каждая переменная, входящая в β, входит в α (с учетом отрицания).

Пример 6.2.

Конъюнкция $\alpha = xyz$ покрывается конъюнкцией $\beta = xy$.

Конъюнкция $\alpha = x\,\overline{y}\,z$ не покрывается конъюнкцией $\beta = x\,\overline{z}$.

Определение. Элементарная конъюнкция α называется дополнением элементарной конъюнкции β по отношению к ДНФ Φ, если:

1) конъюнкция α покрывается конъюнкцией β,
2) в конъюнкцию α входят все переменные, входящие в Φ.

Пример 6.3.

Пусть $\Phi = xy\bar{z} \vee \bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\bar{y}$. Тогда конъюнкции $\alpha_1=xyzt$, $\alpha_2=xyz\bar{t}$, $\alpha_3=xy\bar{z}t$, $\alpha_4=xy\bar{z}\bar{t}$ являются дополнениями конъюнкции $\beta=xy$ по отношению к Φ.

Теорема 6.3. Пусть Φ - СДНФ функции f. Если β - импликант f, то все дополнения элементарной конъюнкции β по отношению к Φ входят в Φ.

Доказательство. Пусть $\beta = x_{i_1}^{\rho_1} x_{i_2}^{\rho_2} ... x_{i_m}^{\rho_m}$ - импликант функции f и пусть $\alpha = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} ... x_n^{\delta_n}$ является дополнением β по отношению к Φ. Предположим, что α не входит в Φ. Рассмотрим такой набор значений переменных, что $\alpha=1$, т.е. положим $x_i=\delta_i$, $i=1,...,n$. Тогда $\rho_1 = \delta_{i_1},..., \rho_m = \delta_{i_m}$ и $\beta=1$, а $\Phi=0$ поскольку α по предположению не входит в Φ. Но это противоречит тому, что β является импликантом f.

Из теоремы следует, что объединяя в СДНФ Φ функции f соответствующим образом пары элементарных конъюнкций и применяя последовательно равенство $\gamma x \vee \gamma\bar{x} = \gamma$, можно в результате получить все простые импликанты функции f.

Пример 6.4.

Пусть $f=xyzt \vee x\,\overline{y}z\bar{t} \vee x\,\overline{y}\,zt$.

Первая и третья конъюнкции дают $xyzt \vee x\bar{y}zt = xzt$. Вторая и третья конъюнкции дают $x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt = x\bar{y}z$. Полученные выражения являются простыми импликантаим и, следовательно, $f = xzt \vee x\bar{y}z$.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски (перечисления простых импликантов)

Систематизируем изложенную выше идею.

1) Выпишем для функции f СДНФ Φ.

2) В каждой элементарной конъюнкции все переменные будем записывать в одинаковом порядке.

3) Каждую конъюнкцию будем представлять в виде последовательности из *1*, *0* и -, ставя на *i*-м месте *1*, если *i*-я переменная входит в конъюнкцию без отрицания, *0* - если с отрицанием и -, если не входит.

Например, $xyz \vee x\bar{z} \vee x\bar{t}$ запишем в виде *111-* $\vee$ *1-0-* $\vee$ *1- -0*.

4) Образуем из элементарных конъюнкций группы, включая в одну группу наборы с одинаковым числом единиц (группы, в которых число единиц отличается на 1, называются соседними); расположим группы в порядке возрастания числа единиц.

Например, для функции

$$f(x,y,z,t) = xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$$

элементарные конъюнкции представляются как *1101, 1001, 1100, 1000, 0010, 0001, 0000,* а список групп будет следующим:

0000
___
0001
0010
1000
___
1001
1100
___
1101

5) Равенство $\gamma x \vee \gamma\bar{x} = \gamma$ может быть применимо только к подходящим парам наборов из соседних групп. Подходящая пара образуется двумя наборами, отличающимися в одной позиции, и в этой позиции не стоит черточка. Подходящие пары будем отмечать звездочками (*).

6) Ставим в различающейся позиции подходящей пары черточку и помещаем получившийся набор в следующий список групп.

7) Повторяем описанный процесс с шага 4, пока это возможно. Непомеченные наборы образуют простые импликанты.

В рассматриваемом примере шаги 6 и 7 выглядят следующим образом.

					*	*	*	*0000*	*000-*
				*			*	*0001*	*00-0*
						*		*0010*	*-000*
		*	*		*			*1000*	*-001*
	*		*	*				*1001*	*100-*
*		*						*1100*	*1-00*
*	*							*1101*	*1-01*
									110-

		*		*000-*	*-00-*
				00-0	*1-0-*
			*	*-000*	
			*	*-001*	
*		*		*100-*	
	*			*1-00*	
	*			*1-01*	
*				*110-*	

Непомеченными остались 00-0, -00-, 1-0-. Они и образуют простые импликанты $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$, $\overline{y}\overline{z}$, $x\overline{z}$.

7. Таблицы простых импликантов.

Таблицы простых импликантов.

Пусть $\Phi = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{p} k_i$ - СДНФ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ - простые импликанты f, найденные по алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Перечислив все простые импликанты, нужно выбрать из них такое подмножество, что $\Phi \mapsto (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_r)$, т.к. в этом случае из того, что $(\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_r) \mapsto \Phi$ следует, что $f \equiv \Phi$. Выбранное подмножество должно быть минимальным (в смысле сделанных ранее определений).

$\Phi \mapsto (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_r)$, если каждая k_i покрывается подходящим α_j. т.к. в противном случае существовали бы такие значения переменных, что непокрытая k_i (и, следовательно, Φ) принимали бы значение *1*, а $\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_r$ принимало бы значение *0*.

Задача нахождения минимального подмножства простых импликантов решается с помощью таблиц, столбцы которых перенумерованы k_i, строки простыми импликантами $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

Из примера предыдущей лекции получаем следующую таблицу простых импликантов:

	0000	*0001*	*0010*	*1000*	*1001*	*1100*	*1101*
00-0	×		×				
-00-	×	×		×	×		
1-0-				×	×	×	×

Крестики стоят в тех позициях, где импликант покрывает элементарную конъюнкцию.

Правило. Если в столбце имеется лишь один крестик, то соответствующая строка (т.е. импликант) должна быть выбрана обязательно (т.к. только этот импликант покрывает соответствующую конъюнкцию). Множество таких строк (т.е. импликантов) отражает ядро задачи. Далее, вычеркиваем все столбцы, у которых на пересечении с данной строкой есть крестик (т.е. конъюнкция покрывается импликантом).

В нашем примере в ядро задачи входят все импликанты. Следовательно, минимальным представлением для функции *f(x,y,z,t)* является $\bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$, т.е.

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} .$$

Возможны варианты:

1) после выделения ядра еще остаются элементарные конъюнкции, подлежащие покрытию;

2) может оказаться, что останутся простые импликанты,

которые не покрывают ни одну элементарную конъюнкцию, не покрытую элементами ядра.

В первом случае из множества импликантов, не входящих в ядро, требуется выбрать такие, которые покрывают оставшиеся непокрытыми элементарной конъюнкции. Во втором случае импликант является лишним.

Пример 7.1. (Пусть получили следующие импликанты)

	0000	*0100*	*1000*	*0011*	*0101*	*0110*	*1010*	*1011*	*0111*
01--		×			×	×			×
0-00	×	×							
-000	×		×						
101-							×	×	
-011				×				×	
0-11				×					×

Выделив ядро, и определив все элементарные конъюнкции, покрываемые им, придем к следующей таблице.

	0011
0-00	
-011	×
0-11	×

Элементарная конъюнкция 0011 покрывается любым из импликантов –011 и 0-11. 0-00 - лишний импликант.

Следовательно, получаем два неизбыточных выражения

$f(x,y,z,t) = \overline{x}y \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee x\overline{y}z \vee \overline{y}zt,$

$f(x,y,z,t) = \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}zt,$

минимальных по любому из определений.

Рассмотрим еще один пример. Найдем минимальное представление следующей функции:

$f(x,y,z,t) = (1001111110110000)$.

Таблица простых импликантов для данной функции приводится ниже.

		0000	*0100*	*1000*	*0011*	*0101*	*0110*	*1010*	*1011*	*0111*
a	*0-00*	×	×							
b	*-000*	×		×						
c	*10-0*			×				×		
d	*-011*				×				×	
e	*0-11*				×					×
f	*101-*							×	×	
g	*01- -*		×			×	×			×

Ядро *01- -* покрывает *0100, 0101, 0110, 0111*. Вычеркивая соответствующие строки и столбцы, получаем таблицу

	0000	*1000*	*0011*	*1010*	*1011*
0-00	×				
-000	×	×			
10-0		×		×	
-011			×		×
0-11			×		
101-				×	×

Последняя таблица дает следующие минимальные представления исходной функции:

а) *–000*
10-0
-011

б) *0-00*

10-0
-011

и т.д. Данный пример показывает, что иногда сложно перебрать все варианты с помощью таблиц.

Эта задача может быть решена также следующим образом. Обозначим импликанты через *a,b,c,d,e,f,g*. Тогда из таблицы следует, что элементарная конъюнкция (*0000*) покрывается импликантами a или b ($a \vee b$), элементарная конъюнкция (*0100*) - импликантами a или g ($a \vee g$) и т.д.

Имеем:

$(a \vee b)(a \vee g)(b \vee c)(d \vee e)g(c \vee f)(d \vee f)(e \vee g)=$

$=(a \vee ag \vee ab \vee bg)(bd \vee be \vee cd \vee ce)(cd \vee cf \vee df \vee f)(e \vee g)g=(a \vee bg)(bd \vee be \vee cd \vee ce)(f \vee cd)g=$

$=(abd \vee abe \vee acd \vee ace \vee bdg\ \ beg \vee bcdg \vee bceg)(f \vee cd)g=$

$=(abdf \vee abef \vee acdf \vee acef \vee bdgf \vee bgef\ \ abcd \vee abcde \vee acd \vee acde \vee bcdg \vee bcdge)g=abdfg \vee abefg \vee acefg \vee bdgf \vee bgef \vee acdg \vee bcdg$

Получаем 7 различных неизбыточных представлений исходной функции. Из них минимальными являются последние четыре.

Заметим, что в любое представление входит импликант g, т.к. он является ядром.

1) $f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{y}zt \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}z$

2) $f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}zt \vee x\bar{y}z$

3) …

4) …

Тема. Полнота и замкнутость систем логических функций.

8. Основные определения. Основные замкнутые классы.

Основные определения.

Определение. Система функций $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ из P_2 называется функционально полной, если любая логическая функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Примеры полных систем:

а) P_2- полная система,

б) система $\{\neg,\vee,\wedge\}$ - полная система.

Не каждая система является полной. Так $\{0,1\}$ не является, очевидно, полной.

Теорема 8.1. Пусть даны две системы функций из P_2:

$F=\{f_1,\ldots,f_n\}$,

$G=\{g_1,\ldots,g_m\}$.

Пусть система F -полна и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы G. Тогда система G -полна.

Доказательство. Пусть h -произвольная функция из P_2. В силу полноты F ее можно представить в виде $h=u(f_1,\ldots,f_n)$. По условию теоремы

$f_1=u_1(g_1,\ldots,g_m)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f_n=u_n(g_1,\ldots,g_m)$

Тогда $h=u(f_1,\ldots,f_n)=u(u_1(g_1,\ldots,g_m),\ldots,u_n(g_1,\ldots,g_m))=u'(g_1,\ldots,g_m)$.

Из теоремы, например, вытекает:

а) система $\{\neg,\vee\}$ является полной, что следует из полноты системы $\{\neg,\vee,\wedge\}$ и равенства

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$$

б) система $\{\neg,\wedge\}$ является полной, что может быть доказано либо аналогично предыдущему, либо через принцип двойственности.

Определение. Пусть F- некоторое подмножество функций из P_2. Замыканием F называется множество всех логических функций, представляемых в виде формул через функции из F.

Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Примеры замыканий:

а) $[P_2]=P_2$;

б) замыканием множества $\{1,\oplus\}$ будет класс L всех линейных функций, т.е. функций, имеющих вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\alpha_0\oplus\alpha_1x_1\oplus\ldots\oplus\alpha_nx_n,$$

где $\alpha_i=\{0,1\}$, $i=\overline{0,n}$.

Определение. Класс F называется функционально замкнутым, если $[F]=F$.

Примеры функционально замкнутых классов:

а) P_2;

б) класс L замкнут, т.к. линейная комбинация линейных выражений является линейным выражением.

Определение (полноты в терминах замыкания и замкнутых классов). F - полная систем, если $[F]=P_2$.

Основные замкнутые классы.

Класс T_0.

Обозначим через T_0 класс всех логических функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, сохраняющих константу 0, т.е. функций таких, для которых выполняется равенство $f(0,\ldots,0)=0$.

Заметим, что если $f\in T_0$, а f' – функция, равная f (т.е. отличающаяся некоторым множеством фиктивных переменных), то и $f'\in T_0$.

Далее, функции 0, x, $x\&y$, $x\vee y$, $x\oplus y$ принадлежат классу T_0, а функции 1, $\bar{x}$ не входят в T_0.

Поскольку таблица для функций f из класса T_0 в первой строке содержит значение 0, то в T_0 содержится ровно $(1/2)2^{2^n}$ булевых функций, зависящих от переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Покажем, что T_0 -замкнутый класс. Так как T_0 содержит тождественную функцию (в противном случае необходимо было бы показать, что $x_i=f(f_1,\ldots,f_n)$), то для обоснования замкнутости достаточно показать, что функция Φ:

$\Phi=f(f_1,\ldots,f_n)$

принадлежит T_0, если $f,f_1,\ldots,f_n$ принадлежат T_0. Это следует из цепочки равенств $\Phi(0,\ldots,0)=f(f_1(0,\ldots,0),\ldots,f_n(0,\ldots,0))=f(0,\ldots,0)=0$.

Класс T_1

Обозначим через T_1 класс всех логических функций $f(x_1,\dots,x_n)$, сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(1,\dots,1)=1$.

Очевидно, что класс T_1 вместе с любой функцией содержит и любую равную ей функцию. Легко видеть, что функции $1, x, x\&y, x\vee y$ принадлежат классу T_1, а функции 0 и $\bar{x}$ не входят в T_1.

Аналогично предыдущему показывается, что T_1 содержит $(1/2)2^{2^n}$, функций, зависящих от n переменных, и является замкнутым классом.

Замечание. Класс T_1 состоит из функций, двойственных функциям из класса T_0.

Класс S

Обозначим через S класс всех самодвойственных функций f из P_2, т.е. таких, что $f^*=f$.

Как и выше, можно проверить, что добавление равных функций не выводит за пределы класса S. Очевидно, что функции x, $\bar{x}$ – самодвойственны.

Из определения самодвойственной функции:

$$\bar{f}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)=f(x_1,\dots,x_n),$$

следует, что на противоположных наборах $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_n)$ самодвойственная функция принимает противоположные значения. Следовательно, самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на первой половине строк. Поэтому число всех самодвойственных функций, зависящих от переменных $x_1,\dots,x_n$, равно $2^{2^{n-1}}$.

Докажем, что класс S замкнут. Поскольку класс S содержит тождественную функцию, то достаточно показать, что функция Φ:

$$\Phi=f(f_1,\dots,f_n)$$

является самодвойственной, если f, $f_1,\dots,f_n$ - самодвойственны. Это проверяется непосредственно

$$\Phi^*=f^*(f_1^*,\dots,f_n^*)=f(f_1,\dots,f_n)=\Phi.$$

Лемма (о несамодвойственной функции). Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одной переменной, т.е. константу.

Доказательство. Т.к. $f \notin S$ то найдется набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ такой, что $f(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Рассмотрим функции $\varphi_i(x)=x^{\alpha_i},\ i=\overline{1,n}$ и положим $\varphi(x)=f(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$.

Тогда имеем

$$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_n(0))=f(0^{\alpha_1},\ldots,0^{\alpha_n})=f(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)=$$
$$=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f(1^{\alpha_1},\ldots,1^{\alpha_n})=f(\varphi_1(1),\ldots,\varphi_n(1))=\varphi(1)$$

что и требовалось доказать.

Класс M

Определение. Для двух наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ выполнено отношение предшествования $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$, если $\alpha_1\le\beta_1,\ldots,\alpha_n\le\beta_n$.

Например, $(0,1,0,1)\prec(1,1,0,1)$.

Очевидно, что если $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}\prec\tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\gamma}$. При этом не любые пары наборов находятся в отношении предшествования. Например, наборы $(0,1)$ и $(1,0)$ в таком отношении не находятся. Таким образом, множество всех двоичных наборов длины n по отношению к операции предшествования $\prec$ является частично упорядоченным.

Определение. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ имеет место

$$f(\tilde{\alpha})\le f(\tilde{\beta}).$$

Заметим, что функция, равная монотонной функции, также является монотонной.

Монотонными функциями являются $0,\ 1,\ x,\ x\&y,\ x\vee y$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций. Покажем, что класс M замкнут. Так как M содержит тождественную функцию, то достаточно показать, что функция Φ:

$\Phi = f(f_1,...,f_m)$

является монотонной, если $f, f_1, ..., f_m$ монотонны.

Действительно, пусть

$$\tilde{x} = (x_1,...,x_n), \quad \tilde{x}^1 = (x_{11},...,x_{1l_1}),...,\tilde{x}^m = (x_{m1},...,x_{ml_m})$$

наборы переменных функций $\Phi, f_1, ..., f_m$. Причем множество переменных функции Φ состоит из тех и только тех переменных, которые встречаются у функций $f_1, ..., f_m$.

Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ два набора длины n значений переменной $\tilde{x}$, находящихся в отношении предшествования: $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$. Эти наборы определяют наборы $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m$ значений переменных $\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^m$ такие, что $\tilde{\alpha}^1 \prec \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m \prec \tilde{\beta}^m$. Так как функции $f_1, ..., f_m$ монотонны, то

$$f_1(\tilde{\alpha}^1) \le f_1(\tilde{\beta}^1),..., f_m(\tilde{\alpha}^m) \le f_m(\tilde{\beta}^m).$$

Поэтому

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1),..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \prec (f_1(\tilde{\beta}^1),..., f_m(\tilde{\beta}^m))$$

и в силу монотонности f имеем

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}^1),..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\tilde{\beta}^1),..., f_m(\tilde{\beta}^m)) = \Phi(\tilde{\beta}),$$

т.е. $\Phi(\tilde{\alpha}) \le \Phi(\tilde{\beta})$ - монотонна.

Определение. Будем называть наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соседними, если

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\overline{\alpha}_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$$

и докажем следующую лемму.

Лемма (о немонотонной функции). Если $f(x_1, ..., x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\bar{x}$.

Доказательство. Докажем сначала, что найдутся соседние наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$: $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Действительно, так как $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1 : \tilde{\alpha}^1 \le \tilde{\beta}^1$ и $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$. Если $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ соседние, то доказательство завершено.

Если же $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ не являются соседними наборами, то набор $\tilde{\beta}^1$ отличается от набора $\tilde{\alpha}^1$ в t координатах, где $t>1$, причем эти t координат в наборе $\tilde{\alpha}^1$ равны 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$ равны 1. В силу этого между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно вставить $t-1$ промежуточных наборов $\tilde{\alpha}^2,...,\tilde{\alpha}^t$:

$$\tilde{\alpha}^1 \prec \tilde{\alpha}^2 \prec ... \prec \tilde{\alpha}^t \prec \tilde{\beta}^1,$$

причем наборы, стоящие рядом, будут соседними. Т.к. $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$, то, по крайней мере, на какой-то одной паре соседних наборов (обозначим их $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$) $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ - соседние по i-ой координате, т.е.

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},...,\alpha_n).$$

Имеем

$$\varphi(0) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}) =$$
$$= f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = \varphi(1).$$

Следовательно

$$\varphi(0) = 1, a\ \varphi(1) = 0, т.е.\ \varphi(x) = \bar{x}.$$

<u>Класс *L*</u>

Последним классом является класс L всех линейных функций. Он содержит константы 0 и 1,функции x, $\bar{x}$, $x \oplus y$ и не содержит функций $x \vee y$, $x\&y$. Ранее было показано, что этот класс замкнут.

<u>Лемма</u> (о нелинейной функции). Если $f(x_1,...,x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций x и $\bar{x}$,а также, быть может, путем навешивания отрицания над f можно получить функцию $x_1 \& x_2$.

<u>Замечание.</u> Любая формула, построенная из констант $0,1$ и функций $x_1 \& x_2$ и $x_1 \oplus x_2$, после раскрытия скобок и несложных алгебраических преобразований переходит в полином по $mod2$ –

полином Жегалкина.

Доказательство. Возьмем полином Жегалкина для нелинейной функции f:

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{(i_1,...,i_s)}\alpha_{i_1...i_s}x_{i_1}...x_{i_s}.$$

В силу нелинейности полинома в нем найдется член, содержащий не менее двух множителей. Пусть это x_1 и x_2. Тогда полином можно записать следующим образом

$$\sum_{(i_1,...,i_s)}\alpha_{i_1...i_s}x_{i_1}...x_{i_s}=x_1x_2f_1(x_3,...,x_n)\oplus x_1f_2(x_3,...,x_n)\oplus$$
$$\oplus x_2f_3(x_3,...,x_n)\oplus f_4(x_3,...,x_n),$$

причем $f_1(x_3,...,x_n)\not\equiv 0$.

Выберем такие $\alpha_3,...,\alpha_n$, чтобы $f_1(\alpha_3,...,\alpha_n)=1$. Тогда

$$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n)=x_1x_2\oplus\alpha x_1\oplus\beta x_2\oplus\gamma,$$

где α,β,γ - константы, равные 0 или 1.

Рассмотрим функцию $\psi(x_1,x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1,x_2)$ следующим образом:

$$\psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1\oplus\beta,x_2\oplus\alpha)\oplus\alpha\beta\oplus\gamma.$$

Воспользуемся явным выражением для функции $\varphi(x_1,x_2)$, чтобы вычислить

$$\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma=(x_1\oplus\beta)(x_2\oplus\alpha)\oplus\alpha(x_1\oplus\beta)\oplus$$
$$\beta(x_2\oplus\alpha)+\gamma+\alpha\beta+\gamma=x_1x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\alpha\beta+\alpha x_1+\alpha\beta+$$
$$\beta x_2+\alpha\beta+\gamma+\alpha\beta+\gamma=x_1x_2.$$

Следовательно, $\psi(x_1,x_2)=x_1x_2$.

В заключение отметим, что классы T_0,T_1,S,M и L попарно различны, что видно из таблицы.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	-	-	+	-	+

Теорема (о функциональной полноте). Для того, чтобы система функций $F=\{f_1,\dots,f_n\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.

Доказательство. Необходимость. Пусть F - полна, т.е. $[F]=P_2$. Предположим, что F содержится в одном из замкнутых классов, который обозначим через F', т.е. $F \subseteq F'$. Но тогда

$$P_2=[F] \subseteq [F]'=F' \text{- противоречие.}$$

Достаточность. Пусть F не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов. Тогда из F можно выделить подсистему, содержащую 5 функций f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не содержатся соответственно в классах T_0, T_1, S, M, L. Пусть эта подсистема будет $F'=\{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}$.

Можно считать, что все эти функции зависят от одинакового числа переменных.

1. Построим при помощи функций f_i, f_j и f_k константы 0 и 1.

Рассмотрим $f_i \notin T_0$. Если $f_i(1,\dots,1)=1$, то $\varphi(x)=f_i(x,\dots,x)$ есть константа 1, т.к. $\varphi(0)=f_i(0,\dots,0)=1$, в силу того, что $f_i \notin T_0$ и $\varphi(1)=f_i(1,\dots,1)=1$. Константу 0 получаем из f_j: $f_j(1,\dots,1)=0$.

Если $f_i(1,\dots,1)=0$, то $\varphi(x)=f_i(x,\dots,x)$ есть $\bar{x}$, т.к. $\varphi(0)=f_i(0,\dots,0)=1$, $\varphi(1)=f_i(1,\dots,1)=0$. Возьмем f_k $(f_k \notin S)$. Из леммы о несамодвойственной функции мы можем получить константу 0 или 1, а т.к. у нас есть функция $\bar{x}$, то мы можем получить и вторую константу.

2. Имея константу 0 и 1 и функцию f_m $(f_m \notin M)$, мы по лемме о немонотонности функции можем получить функцию $\bar{x}$.

3. Имея константы 0 и 1, функцию $\bar{x}$ и функцию f_l $(f_l \notin L)$ мы по лемме о нелинейной функции можем получить функцию $x \& y$.

Таким образом, мы при помощи формул над F' (а значит и над F) получили функции $\bar{x}$ и $x_1 \& x_2$, что доказывает достаточность.

Тема. Исчисление высказываний.

9. Общие принципы построения формальной теории.Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие.

Общие принципы построения формальной теории.

Исчисление (или формальная теория) высказываний, строится следующим образом.

1. Определяется множество формул, или правильно построенных выражений, образующее язык теории.
2. Выделяется подмножество формул, называемых аксиомами теории.
3. Задаются правила вывода теории.

Выводом формулы B из формул $A_1,\ldots,A_n$ называется последовательность формул $F_1,\ldots,F_m$: $F_m=B$, а любая F_i есть либо аксиома, либо одна из формул $A_1,\ldots,A_n$, либо F_i непосредственно выводима из $F_1,\ldots,F_{i-1}$, по одному из правил вывода. Совокупность объектов, которые дают аксиомам содержательный смысл, называют интерпретацией данной системы аксиом. Аксиомы и правила вывода стараются выбирать таким образом, чтобы формальная теория имела содержательный смысл.

В соответствии с этими общими принципами построено и исчисление высказываний.

Определим высказывание как утвердительное предложение, которое может быть либо истинным (*И*) либо ложным (*Л*).

Например, высказываниями являются следующие предложения:

Снег – белый.

Я – человек.

1. Алфавит исчисления высказываний есть объединение трех множеств $AU\{\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow\}U\{(,)\}$, где

A - множество пропозициональных переменных, т.е. переменных, значениями которых служат высказывания;

$\{\rceil,\wedge,\vee,\rightarrow\}$ - множество логических связок;

{(,)} - множество вспомогательных знаков.

2. Формулы

- a , где $a \in A$ – формула;
- если A и B - формулы, то $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B)$- формулы.

Поскольку значениями пропозициональных переменных являются высказывания, которые, в свою очередь, принимают значения либо *И*, либо *Л*, то и формула также принимает два значения - *И* либо *Л*.

Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие.

Определение. Интерпретацией формулы F называют приписывание значений И или Л входящим в нее переменным.

Определение. Формула F истинна в некоторой интерпретации тогда и только тогда, когда она получает значение *И* в данной интерпретации.

Проверка истинности формул является одной из основных задач исчисления высказываний. Эта задача может быть решена путем введения аксиом и правил вывода.

Однако, введя аксиомы и правила вывода, можно заметить, что зависимость истинности формулы F исчисления высказываний от истинности, входящих в нее элементарных высказываний в точности соответствует зависимости значения логической функции, представляемой формулой F, от значений переменных этой функции. Иначе говоря, если задана формула $F(a_1,\dots,a_n)$ и задана ее интерпретация, то для выяснения истинности ее нужно вычислить как логическую функцию на наборе $(\delta_1,\dots,\delta_n)$, где $\delta_i=1$, если $a_i=И$ и $\delta_i=0$, если $a_i=Л$. Если $F(\delta_1,\dots,\delta_n)=1$, то $F=И$, если $F(\delta_1,\dots,\delta_n)=0$, то $F=Л$.

Поэтому вводить аксиомы и правила вывода мы не будем, а воспользуемся изученным аппаратом логических функций.

Определение. Формула F называется общезначимой тогда и только тогда, когда она истинна при всех интерпретациях (необщезначима в противном случае).

Определение Формула F называется противоречивой тогда и только тогда, когда она ложна при всех интерпретациях (в противном случае непротиворечива).

$F(x_1 \dots, x_n) \equiv И$ - общезначима, непротиворечива

$F(x_1,...,x_n) = Л, F(y_1,...,y_n) = И$ - необщезначима, непротиворечива

$F(x_1,...,x_n) \equiv Л$ - противоречива, необщезначима.

Определение. Пусть даны формулы $F_1,...,F_n$ и формула G. G есть логическое следствие формул $F_1,...,F_n$ тогда и только тогда, когда для всякой интерпретации I, в которой $F_1 \wedge ... \wedge F_n$ истинна, G также истинна. ($F_1,...,F_n$ называется посылками).

Теорема 9.1. G есть логическое следствие $F_1,...,F_n$ тогда и только тогда, когда формула $((F_1 \wedge ... \wedge F_n) \rightarrow G)$ общезначима.

Доказательство. Обозначим $H= ((F_1 \wedge ... \wedge F_n) \rightarrow G)$.

Необходимость. Пусть G - логическое следствие $F_1,...,F_n$. Если $F_i=И, i = \overline{1,n}$, то $G = И$, следовательно $H=И$. Если некоторое $F_i=Л$ в интерпретации I, то $F_1 \wedge ... \wedge F_n=Л$ в этой интерпретации, следовательно при $G= И$ или $G=Л$ обязательно $H=И$, т.е. H – общезначима.

Достаточность. Пусть H–общезначима. Тогда если $F_1 \wedge ... \wedge F_n=И$ в интерпретации I, то $G=И$ в этой интерпретации, т.е. G - логическое следствие.

Теорема 9.2. G есть логическое следствие $F_1,...,F_n$ тогда и только тогда, когда формула $(F_1 \wedge ... \wedge F_n \wedge (\urcorner G))$ противоречива.

Доказательство Из теоремы 9.1. G -логическое следствие $\Leftrightarrow$ $((F_1 \wedge ... \wedge F_n) \rightarrow G)$ общезначима, т.е. $\overline{((F_1 \wedge \cdots F_n) \rightarrow G)}$ - противоречива. Но

$$\overline{((F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G)} = \overline{(\overline{(F_1 \wedge \cdots F_n)} \vee G)} =$$
$$= \overline{(\overline{F_1} \vee \cdots \vee \overline{F_n} \vee G)} = (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \overline{G}).$$

Пример 9.1.

Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме может быть случая, когда она длится более года и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать, забастовка оканчивается и президент фирмы не уходит. Длилась ли забастовка более года?

Ответ на этот вопрос может быть дан с помощью исчисления высказываний.

Обозначим элементарные высказывания через пропозициональные переменные:

p: конгресс отказывается действовать;

q: забастовка оканчивается;

r: президент фирмы уходит в отставку;

s: забастовка длится более года.

Тогда рассматриваемое высказывание может быть записано на языке исчисления высказываний следующим образом:

$$F_1 : p \to (\overline{q} \vee (rs))$$

$$F_2 : pq\overline{r}$$

$$\overline{}$$

$$G : s - ?$$

Используя теорему 9.2, получаем

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \overline{G} = (p \to (\overline{q} \vee (rs)) \wedge (pq\overline{r}) \wedge \overline{s} =$$

$$= (\overline{p} \vee \overline{q} \vee (rs)) \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) = \overline{(p \wedge \overline{q} \wedge (\overline{r}\,\overline{s}))} \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) =$$

$$= \overline{(pq\overline{r}\,\overline{s})} \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) = 0$$

и, следовательно, заключение *G* является верным.

10. Метод резолюций для исчисления высказываний

Метод резолюций для исчисления высказываний

Определение. Дизъюнктом называется дизъюнкция пропозициональных переменных.

Определение. Пропозициональные переменные p и $\overline{p}$ называются контрарными.

Определение. Для любых двух дизъюнктов C_1 и C_2, если существует переменная σ_1 в C_1, которая контрарна переменной σ_2 в C_2, то вычеркнув σ_1 и σ_2 из C_1 и C_2 соответственно, и построив дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, получим резольвенту C_1 и C_2.

Определение. Дизъюнкт, не содержащий переменных, называется пустым (обозначаем П). Такой дизъюнкт по определению противоречив.

Пример 10.1.

$C_1: \quad p \vee r$

$C_2: \quad \overline{p} \vee q$

$$\frac{p \vee r, \quad \overline{p} \vee q}{r \vee q}$$

В данном примере $r \vee q$ - резольвента.

<u>Пример: 10.2.</u>

$C_1: \quad p \vee q \vee r$

$C_2: \quad \overline{q} \vee s$

$$\frac{p \vee q \vee r, \quad \overline{q} \vee s}{p \vee r \vee s}$$

В данном примере $p \vee r \vee s$ - резольвента.

<u>Пример: 10.3.</u>

$C_1: \quad p \vee q$

$C_2: \quad \overline{p}$

$$\frac{p \vee q, \quad \overline{p}}{q}$$

В данном примере q - резольвента.

<u>Пример: 10.4.</u>

$C_1: \quad \overline{p} \vee q$

$C_2: \quad \overline{p} \vee r$

В данном примере резольвенты не существует.

<u>Теорема 10.1.</u> Пусть даны два дизъюнкта C_1 и C_2. Тогда резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 есть их логическое следствие.

<u>Доказательство</u>. Пусть дизъюнкты C_1 и C_2 содержат контрарную пару переменных σ и $\overline{\sigma}$, т.е. $C_1 = \sigma \vee C_1'$ и $C_2 = \overline{\sigma} \vee C_2'$, где C_1' и C_2' - некоторые дизъюнкты. Пусть также $C = C_1' \vee C_2'$ - резольвента C_1 и C_2.

Пусть C_1 и C_2 истинны в некоторой интерпретации I. Нужно показать, что резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 также истинна в I.

Прежде всего либо σ, либо $\overline{\sigma}$ ложны в I. Пусть σ ложна в I. Тогда дизъюнкт C_1 должен содержать более одной переменной, иначе C_1 был бы ложен в I. Следовательно C_1' должен быть истинен в I. Таким образом, резольвента $C = C_1' \vee C_2'$ истинна в I. Аналогично можно показать, что если $\overline{\sigma}$ ложна в I, то C_2' должен быть истинен в I, а, следовательно, и $C = C_1' \vee C_2'$ должна быть истинна в I. Теорема доказана.

Определение. Пусть S -множество дизъюнктов. Резолютивный вывод C из S есть такая конечная последовательность $C_1, C_2, \ldots, C_k$ дизъюнктов, что $C_k = C$, а каждый C_i или принадлежит S или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих C_i.

Если существует вывод C из S , то C (по теореме 10.1) является логическим следствием S. Кроме того, если C=П, то $s_1 \& s_2 \& \ldots \& s_n$ - противоречие. Здесь $\{ s_1, s_2, \ldots, s_n \} = S$.

Пример 10.5.

$$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{q}, p\}.$$

Резолютивный вывод:

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q}}{\overline{p}}, \quad \frac{\overline{p}, p}{П}.$$

Следовательно $(\overline{p} \vee q)(\overline{q})(p) \equiv Л$

Рассмотренный метод может быть использован для проверки того, является ли формула G логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_n$.

Для такой проверки необходимо:

1) представить формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \overline{G}$ в виде КНФ, т.е. в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.

2) Если из множества дизъюнктов $S = \{ F_1, \ldots, F_2, \overline{G} \}$ удалось вывести П, то G логическое следствие $F_1, \ldots, F_n$, в противном случае – нет.

Пример 10.6. Доказать, что r является логическим следствием формул $p \to q, q \to r, p$.

1) Представляем формулы $p \to q, q \to r$ в виде КНФ: $p \to q = \overline{p} \vee q, \quad q \to r = \overline{q} \vee r$.

$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee r, p, \overline{r}\}$.

2) Резолютивный вывод:

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee r}{\overline{p} \vee r}; \quad \frac{\overline{p} \vee r, p}{r}; \quad \frac{r, \overline{r}}{\Pi}$$

Пример 10.7. *Если Сергей интересуется логикой, то он посещает лекции по дискретной математике и не пропускает семинарские занятия. Если Сергей посещает лекции, то он пропускает семинарские занятия. Следовательно, Сергей не интересуется логикой.*

Обозначим элементарные высказывания через пропозициональные переменные:

p: Сергей интересуется логикой;

q: Сергей посещает лекции;

r: Сергей посещает семинары.

Тогда рассматриваемое высказывание может быть записано на языке исчисления высказываний следующим образом:

F_1: $p \to qr$

F_2: $q \to \overline{r}$

G: $\overline{p}$

1) Представляем формулу $F_1 \& F_2 \& \overline{G}$ в виде КНФ:

$$F_1 \& F_2 \& \overline{G} = (p \to qr)(q \to \overline{r})\overline{\overline{p}} = (\overline{p} \vee qr)(\overline{q} \vee \overline{r})p =$$

$$= (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee r)(\overline{q} \vee \overline{r})p.$$

$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{p} \vee r, \overline{q} \vee \overline{r}, p\}$.

2) Резолютивный вывод

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee r}{\overline{p} \vee \overline{r}}; \quad \frac{\overline{p} \vee \overline{r}, \overline{p} \vee r}{\overline{p}}; \quad \frac{\overline{p}, p}{\Pi}$$

Поскольку резолютивный вывод заканчивается пустым дизъюнктом, то G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

<u>Тема. Исчисление предикатов.</u>

11. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Формулы. Интерпретация формул.

Понятие предиката

В математике и других науках наряду с высказываниями встречаются выражения, имеющие форму высказывания, но содержащие переменные, принадлежащие некоторому множеству D. Множество называется <u>предметной областью</u>, а переменные – <u>предметными переменными</u>.

Например,

«2 – простое число» - высказывание;

«3>1» - высказывание.

Но, заменив числа в этих высказываниях предметной переменной n из множества натуральных чисел, получим выражения:

«n- простое число»,

«$n_1>n_2$»,

являющиеся не высказываниями, а предикатами. Предикаты отражают свойства и отношения между предметами из предметной области.

Обозначим

$P_1(n)$ - свойство «быть простым числом», а

$P_2(n_1,n_2)$ отношение «n_1 больше n_2».

В общем случае мы ничего не можем сказать о значении предиката, но подставив, например, в P_1 и P_2 значения $n=2$, $n_1=3$, $n_2=1$, получим

$P_1(2)$ - «2-простое число»,

$P_2(3,1)$ - «3 больше 1» -

истинные высказывания, а подставив значения $n=4$, $n_1=1$, $n_2=3$. получим

$P_1(4)$ - «4 – простое число»,

$P_2(1,3)$ - «1 больше 3» –

ложные высказывания, т.е. предикат при подстановке конкретных констант из предметной области, может принимать значение *И* или *Л*.

Кванторы

$\forall$ - квантор всеобщности;

$\exists$ - квантор существования.

Если $P(x)$ - одноместный предикат, то запись $(\forall x)P(x)$ означает, что свойство P выполняется для всех предметов из предметной области, а

$(\exists x)P(x)$ означает, что существует по крайней мере один предмет, обладающий свойством P.

Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или к $(\exists x)P(x)$ называется <u>связыванием переменной или навешиванием квантора</u> на переменную x. Переменная, на которую навесили квантор, называется <u>связанной</u>, несвязанная переменная называется <u>свободной</u>.

Смысл связанных и свободных переменных различен. Свободная переменная – это переменная, которая может принимать любые значения из D . При этом $P(x)$ зависит от значения x . Выражение $(\forall x)P(x)$ от x не зависит и при заданных P и D имеет вполне определенное значение.

Например, если

$P(x)$ - «быть четным числом», то $(\forall x)P(x)$ принимает значение *Л*, если D - множество натуральных чисел и $(\forall x)P(x)$ принимает значение *И,* если $D=\{2,4,6,\dots\}$.

Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных и превращает его в предикат от меньшего числа переменных.

Алфавит

Пусть

D - предметная область (множество),

$f\colon D\times D\times\dots\times D \rightarrow D$ – n-местная функция,

p:- $D\times D\times\dots\times D \rightarrow B=\{0,1\}$ – n-местный предикат.

Пусть также

V - множество предметных переменных,

C - множество предметных констант,

F - множество функциональных (1,2,…- местных) символов,

P - множество предикатных (1,2,…- местных) символов,

$\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$ - множество операций,

$\{\exists, \forall\}$ - множество кванторов,

$\{(,)\}$ - множество вспомогательных символов.

Тогда

$V \cup C \cup F \cup P \cup \{\neg, \vee, \wedge, \to\} \cup \{\exists, \forall\} \cup \{(,)\}$ - алфавит исчисления предикатов.

Формулы

Терм.

1. Всякая предметная переменная является термом.
2. Всякая предметная константа является термом.
3. Если f - n - местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ - термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ - терм.

Атом.

Если P - n - местный предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n$ - термы, то $P\,(t_1, \ldots, t_n\,)$- атом (атомарная или простейшая формула).

Формула.

1. Атом есть формула.
2. Если A и B - формулы, то $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B)$ - формулы, причем все переменные в этих формулах – свободные.
3. Если A - формула, а x - свободная переменная в A, то $(\forall x)A$ и $(\exists\, x)A$ - формулы.

Пример 11.1.

атом

$$(\forall x)(\overbrace{P(x)} \to \overbrace{Q(f(x),a)}) \text{ - формула}$$

терм

Область действия квантора $\forall$

Все вхождения переменной x - связанные.

Интерпретация формул.

Определение. Интерпретация I формулы F исчисления предикатов состоит из непустой предметной области D и указания значения всех констант, функциональных и предикатных символов, входящих в F. При этом:

1. каждой константе ставится в соответствие некоторый элемент из D;
2. каждому n -местному функциональному символу ставится в соответствие функция $D^n \to D$;
3. каждому n - местному предикатному символу ставится в соответствие n -местный предикат $D^n \to B$.

Если задана интерпретация I, то значение формулы определяется по следующим правилам:

а) если заданы значения формул G и H, то значения формул $\overline{G}, G \wedge H, H \vee G, H \to G$ можно определить по таблицам;

б) $(\forall x)G$ принимает значение *И*, если G имеет значение *И* для $\forall x \in D$; в противном случае G принимает значение *Л*;

в) $(\exists\ x)G$ принимает значение *И*, если G принимает значение *И* хотя бы для одного $x \in D$; в противном случае G принимает значение *Л*.

Пример 11.2. Рассмотрим формулу

$$G : (\forall x)(P(x) \to Q(f(x), a)) .$$

Интерпретация:

1) $D=\{1,2\};$
2) $a=1;$
3) $f(1)=2; f(2)=1;$
4) $P(1)=Л,\ \ P(2)=И;\ \ Q(1,1)=И,\ \ Q(1,2)=И;\ \ Q(2,1)=Л,\ \ Q(2,2)=И.$

В данной интерпретации формула G принимает значение *И*.

В исчисление предикатов переносятся формулировки противоречивости (непротиворечивости), общезначимости (необщезначимости), логического следствия, данные для исчисления высказываний.

В исчислении предикатов верны также теоремы о логическом следствии, доказанные для исчисления высказываний.

Рассмотрим пример проверки логического следствия в исчислении предикатов.

Пример 11.3.

F_1: $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$
F_2: $P(a)$

G: $Q(a)$

Рассмотрим любую интерпретацию I, в которой истинна формула $F_1 \wedge F_2$, т.е. формула $(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \wedge P(a)$. Тогда в этой интерпретации $P(a)=И$ и $(\forall x)(P(x)\to Q(x))=И$, т.е. $P(x)\to Q(x)=И$ для всех x из D, в том числе и для $x=a$. Следовательно, $P(a)\to Q(a)=И$. Значит, т.к. $P(a)=И$, то и $Q(a)=И$.

Так как в исчислении предикатов имеется бесконечное число областей, которые в свою очередь могут быть бесконечны, то, вообще говоря, имеется бесконечное число интерпретаций формулы исчисления предикатов. Следовательно, в отличие от исчисления высказываний, невозможно доказать общезначимость или противоречивость формулы оценкой формулы при всех возможных интерпретациях.

В настоящее время разработаны и разрабатываются процедуры для проверки невыполнимости формул исчисления предикатов.

12. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.

Предваренная нормальная форма.

В исчислении высказываний существуют две нормальные формы – конъюнктивная и дизъюнктивная. В исчислении предикатов также имеется нормальная форма, называемая предваренной нормальной формой.

Определение. Формула F исчисления предикатов находится в предваренной нормальной форме тогда и только тогда, когда формула F имеет вид

$$(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M),$$

где каждое (Q_ix_i), $i=\overline{1,n}$, есть или $(\forall x_i)$ или $(\exists x_i)$, а M есть формула, не содержащая кванторов. $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)$ называется префиксом, а M - матрицей формулы F.

Для приведения формулы исчисления предикатов к предваренной нормальной форме рассмотрим ряд эквивалентностей, содержащих кванторы.

Пусть F - формула, содержащая свободную переменную x (обозначим этот факт как $F[x]$). Пусть G -формула, не содержащая переменную x. Пусть Q есть или $\forall$ или $\exists$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

$$(Qx)F[x] \vee G = (Qx)(F[x] \vee G) \tag{12.1}$$

$$(Qx)F[x] \wedge G = (Qx)(F[x] \wedge G) \tag{12.2}$$

$$\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]} \tag{12.3}$$

$$\overline{(\exists x)F[x]} = (\forall x)\overline{F[x]} \tag{12.4}$$

Эквивалентности (12.1) и (12.2) очевидны, т.к. G не содержит x и, следовательно, может быть внесена в область действия квантора Q. Докажем эквивалентности (12.3) и (12.4). Пусть I - произвольная интерпретация с областью D . Если $\overline{(\forall x)F[x]}$ истинна в I, то $(\forall x)F[x]$ ложна в I. Это означает, что существует такой элемент e в D, что $F[e]$ ложна, т.е. $\overline{F[e]}$ истинна в I. Следовательно, $(\exists x)\overline{F[x]}$ истинна в I. С другой стороны, если $\overline{(\forall x)F[x]}$ ложна в I, то $(\forall x)F[x]$ истинна в I. Это означает, что $F[x]$ истинна для каждого элемента x в D, т.е. $\overline{F[x]}$ ложна для каждого элемента x в D. Следовательно, $(\exists x)\overline{F[x]}$ ложна в I. Т.к. $\overline{(\forall x)F[x]}$ и $(\exists x)\overline{F[x]}$ всегда принимают одно и то же истинностное значение при произвольной интерпретации, то по определению $\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]}$. Таким образом (12.3) доказано. Аналогично можно доказать и (12.4).

Предположим далее, что $F[x]$ и $H[x]$ - две формулы, содержащие свободную переменную x . Нетрудно доказать, что

$$(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)H[x] = (\forall x)(F[x] \wedge H[x]), \tag{12.5}$$

$$(\exists x)F[x] \vee (\exists x)H[x] = (\exists x)(F[x] \vee H[x]), \tag{12.6}$$

т.е. квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$ можно распределять по $\wedge$ и $\vee$ соответственно.

Однако $\forall$ и $\exists$ <u>нельзя</u> распределять по $\vee$ и $\wedge$ соответственно, т.е.

$$(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] \neq (\forall x)(F[x] \vee H[x]), \qquad (12.7)$$

$$(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] \neq (\exists x)(F[x] \wedge H[x]). \qquad (12.8)$$

В подобных случаях можно поступить следующим образом. Т.к. каждая связанная переменная в формуле может рассматриваться лишь как место для подстановки любой переменной, то каждую связанную переменную x можно переименовать в z, т.е. $(\forall x)H[x] = (\forall z)H[z]$. Если мы выберем переменную z, которая не встречается в $F[x]$, то

$$(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] = (\forall x)F[x] \vee (\forall z) H[z] =$$
$$= (\forall x) (\forall z)(F[x] \vee H[z]) \qquad (12.9)$$

Аналогично

$$(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] = (\exists x)F[x] \wedge (\exists z) H[z] =$$
$$=(\exists x)(\exists z)(F[x] H[z]) \qquad (12.10)$$

Т.о., в общем случае имеем

$$(Q_1x)F[x] \vee (Q_2x)H[x]=(Q_1x)(Q_2z)(F[x] \vee H[z]), \qquad (12.11)$$

$$(Q_3x)F[x] \wedge (Q_4x)H[x]=(Q_3x)(Q_4z)(F[x] \wedge H[z]), \qquad (12.12)$$

где Q_1,Q_2 *суть* $\forall$ *и* $\exists$, *а* z *не входит в* F[x]. *Конечно, если* $Q_1=Q_2=\exists$, *а* $Q_3=Q_4=\forall$, *то не обязательно переименовывать переменную* x. *Можно напрямую использовать формулы (12.5)-(12.8).*

Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.

Шаг1. Используем

$$F \to G = \overline{F} \vee G .$$

Шаг 2. Используем

$$\overline{\overline{F}} = F ,$$

или

$$\overline{F \vee G} = \overline{F} \wedge \overline{G}$$

$$\overline{F \wedge G} = \overline{F} \vee \overline{G}$$

или

$$\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]},$$

$$\overline{(\exists x)F[x]} = (\forall x)\overline{F[x]}$$

чтобы внести знак отрицания внутрь формулы.

Шаг 3. Переименовываем связанные переменные, если это необходимо.

Шаг 4. Используем эквивалентности (12.1)-(12.6), (12.11), (12.12).

Пример 12.1. Привести к предваренной нормальной форме формулу $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$.

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = \overline{(\forall x)P(x)} \vee (\exists x)Q(x) =$$
$$= (\exists x)\overline{P(x)} \vee (\exists x)Q(x) = (\exists x)(\overline{P(x)} \vee Q(x))$$

Пример 12.2. Привести к предваренной нормальной форме формулу

$$(\forall x)\ (\forall y)(((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)).$$
$$(\forall x)(\forall y)(((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)) =$$
$$(\forall x)(\forall y)(\overline{((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z))} \vee (\exists u)Q(x,y,u)) =$$
$$(\forall x)(\forall y)(((\forall z)(\overline{P(x,z)} \vee \overline{P(y,z)}) \vee (\exists u)Q(x,y,u)) =$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\overline{P(x,z)} \vee \overline{P(y,z)} \vee Q(x,y,u)).$$

13. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации.

Скулемовская стандартная форма.

Пусть формула F находится в предваренной нормальной форме $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)M$. Пусть Q_r есть квантор существования в префиксе $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n), 1 \le r \le n$. Если никакой квантор всеобщности не стоит в префиксе левее Q_r, выбираем константу C, отличную от других констант, входящих в M, заменяем все x_r, встречающиеся в M, на C и вычеркиваем (Q_rx_r) из префикса. Если $Q_{s_1},\ldots,Q_{s_m}$ - список всех кванторов всеобщности, встречающихся левее $Q_r, 1 \le s_1 < s_2 \ldots < s_m < r$, выбираем новый m- местный функциональный символ f, отличный от других функциональных символов из M, заменяем все x_r из M на $f(x_{s_1}, x_{s_2},\ldots,x_{s_m})$ и вычеркиваем (Q_rx_r) из префикса. Применяем эту процедуру для всех кванторов существования, имеющихся в префиксе формулы F. Последняя из полученных формул есть скулемовская стандартная форма формулы F или просто стандартная форма формулы F. Константы и функции, используемые для замены переменных квантора существования, называются скулемовскими функциями.

Пример 13.1. Получить стандартную форму формулы F.

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w).$$

Заменяем переменную x на константу a, переменную u на двухместную функцию $f(y,z)$, переменную w - на трехместную функцию $g(y,z,v)$. Получаем следующую стандартную форму формулы F:

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)).$$

Будем считать, что множество дизъюнктов S есть конъюнкция всех дизъюнктов из S, где каждая переменная в S управляется квантором всеобщности. Тогда стандартная форма формулы F может быть представлена множеством дизъюнктов S .

Теорема. Пусть S - множество дизъюнктов, представляющее стандартную форму формулы F. Тогда F противоречива в том и только в том случае, когда S противоречиво.

Доказательство. Пусть F находится в предваренной нормальной форме, т.е. $F=(Q_1x_1)...(Q_nx_n)M[x_1,...,x_n]$. Здесь $M[x_1,...,x_n]$ означает, что матрица M содержит переменные $x_1,...,x_n$. Пусть Q_r - первый квантор существования и пусть

$$F_1=(\forall x_1)...(\forall x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})...(Q_nx_n)M[x_1,...,x_{r-1},f(x_1,...,x_{r-1}),x_{r+1},...x_n],$$

где f -скулемовская функция, соответствующая x_r, $1\le r\le n$. Нужно показать, что F противоречива тогда и только тогда, когда F_1 противоречива.

Пусть F противоречива. Если F_1 непротиворечива, то существует такая интерпретация I, что F_1 истинна в I, т.е. для всех $x_1,...,x_{r-1}$ существует по крайней мере один элемент (а именно $f(x_1,...,x_{r-1})$), для которого

$$(Q_{r+1}x_{r+1})...(Q_nx_n)M[x_1...,x_{r-1},f(x_1,...,x_{r-1}),x_{r+1},...x_n]$$

истинна в I. Таким образом F истинна в I, что противоречит предположению. Следовательно, F_1 должна быть противоречива.

Пусть теперь F_1 противоречива. Если F непротиворечива, то существует интерпретация I, что F истинна в I, т.е. для всех $x_1,...,x_{r-1}$ существует такой элемент x_r, что

$(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_{r-1}, x_r,x_{r+1},\dots x_n]$

истинна в I. Расширим интерпретацию I, включив в нее функцию f, которая отображает $(x_1,\dots,x_{r-1})$ на x_r для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$ из D , т.е. $f(x_1,\dots,x_{r-1})=x_r$. Обозначим такое расширение I через I'. Ясно, что для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$

$$(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1\dots,x_{r-1},f(x_1,\dots,x_{r-1}),x_{r+1},\dots x_n]$$

истинна в I', т.е. F_1 истинна в I', что противоречит предположению о противоречивости F_1. Следовательно F - противоречива.

Пусть в F имеется m кванторов существования. Пусть $F_0=F$, а F_k получается из F_{k-1} заменой первого квантора существования в F_{k-1} скулемовской функцией, $k=1,\dots,m$. Ясно, что $S=F_m$. Аналогично предыдущему можно показать, что F_{k-1} противоречива тогда и только тогда, когда F_k противоречива, $k=1,\dots,m$. Т.о. F противоречива тогда и только тогда, когда множество S противоречиво.

Замечания.

Пусть S- стандартная форма формулы F. Если F противоречива, то из доказанной теоремы следует, что $F=S$. Если F - непротиворечива, то вообще говоря $F \neq S$.

Например: $F: (\exists x)P(x)$, $S:P(a)$. S есть стандартная форма формулы F. Пусть I есть следующая интерпретация:

D={1,2}, a=1, P(1)= Л,P(2)=И

Тогда F истинна в I, но S ложна в I , т.е. $F\neq S$. Отметим, что формула может иметь более чем одну стандартную форму.

Подстановка и унификация.

В методе резолюций существенным является нахождение контрарных пар. Для дизъюнктов, не содержащих функции это просто. Задача усложняется для дизъюнктов, содержащих функции.

Пример 13.1.

$$C_1 : P(x) \vee Q(x)$$

$$C_2 : \overline{P(f(x))} \vee R(x)$$

Здесь нет контрарных пар. Но если в C_1 вместо x подставить $f(a)$, а в C_2 вместо x подставить a, то получим

$C_1 : P(f(a)) \vee Q(f(a))$

$C_2 : \overline{P(f(a))} \vee R(a)$

Здесь $P(f(a))$ и $\overline{P(f(a))}$ являются контрарными.

Определение. Подстановка – это конечное множество вида $\{t_1/v_1,\ldots,t_n/v_n\}$, где каждая v_i - переменная, каждый t_i - терм, отличный от v_i, все v_i различны.

Пример 13.2.

$\{f(z)/x,y/z\}$, $\{a/x,g(y)/y,f(g(b))/z\}$.

Определение. Пусть $\theta=\{t_1/v_1,\ldots,t_n/v_n\}$ - подстановка и E - выражение. Тогда $E\theta$ - выражение, полученное из E заменой одновременно всех вхождений переменной v_i, $i=\overline{1,n}$ в E на терм t_i. $E\theta$ называют примером E.

Пример 13.3.

$\theta=\{a/x, f(b)/y, c/z\}$, $E=P(x,y,z)$, $E\theta = P(a, f(b), c)$.

Определение. Пусть $\theta = \{t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1,\ldots,u_m/y_m\}$ - две подстановки. Тогда композиция θ и λ (обозначается $\theta^\circ\lambda$) есть подстановка, которая получается из множества

$\{t_1\lambda/x_1,\ldots,t_n\lambda/x_n, u_1/y_1,\ldots,u_m/y_m\}$

вычеркиванием всех элементов $t_j\lambda/x_j$, для которых $t_j\lambda=x_j$ и всех элементов u_i/y_i таких, что $y_i\in\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Пример 13.4.

$\theta=\{t_1/x_1, t_2/x_2\}=\{f(y)/x, z/y\}$

$\lambda = \{u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\}= \{a/x, b/y, y/z\}$

Тогда

$\{t_1\lambda/x_1, t_2\lambda/x_2, u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\}=\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$.

Однако, т.к. $t_2\lambda=x_2$, то $t_2\lambda/x_2$ (т.е. y/y) необходимо вычеркнуть. Также нужно вычеркнуть u_1/y_1 и u_2/y_2, т.к. y_1 и $y_2\in\{x_1,x_2\}$. Таким образом получаем

$\theta^\circ\lambda = \{f(b)/x, y/z\}$.

Определение. Подстановка θ называется унификатором для множества $\{E_1,\ldots,E_k\}$ тогда и только тогда, когда $E_1\theta = \ldots = E_k\theta$. Говорят, что множество унифицируемо, если для него существует унификатор.

Определение. Множество рассогласований непустого множества выражений W получается выявлением первой (слева) позиции, на которой не для всех выражений из W стоит один и тот же символ, а затем выписыванием из каждого выражения в W подвыражения, которое начинается с символа, занимающего эту позицию.

Пример 13.5.

$$W = \{P(x, \underline{f(y,z)}), P(x, \underline{a}), P(x, \underline{g(h(k(x)))})\}$$

Множество рассогласований:

$$\{f(y,z),\ a,\ g(h(k(x)))\}.$$

Алгоритм унификации:

Шаг 1. $K=0$, $W_k=W$, τ_k - пустой унификатор.

Шаг 2 . Если W_k - единичный дизъюнкт, то остановка: τ_k – унификатор для W. В противном случае находим множество рассогласований D_k для W_k .

Шаг 3. Если существуют такие элементы v_k и t_k в D_k, что v_k - переменная, не входящая в t_k, то перейти к шагу 4. В противном случае остановка: W не унифицируемо.

Шаг 4. Пусть $\tau_{k+1}=\tau_k\{t_k/v_k\}$ и $W_{k+1}=W_k\{t_k/v_k\}$.

Шаг 5. $k:=k+1$ и перейти к шагу 2.

14. Метод резолюций в исчислении предикатов

Метод резолюций в исчислении предикатов

Определение. Атомарная формула есть литера.

Определение. Если две или более литер (с одинаковым знаком) дизъюнкта C имеют общий унификатор δ , то $C\delta$ называется склейкой C. Если $C\delta$ - единичный дизъюнкт, то склейка называется единичной склейкой.

Пример 14.1. Пусть $C = \underline{P(x)} \vee \underline{P(f(y))} \vee \overline{Q(x)}$. Тогда подчеркнутые литеры имеют общий унификатор $\delta = \{f(y)/x\}$. Следовательно,

$$C\delta = P(f(y)) \vee P(f(y)) \vee \overline{Q(f(y))} = P(f(y)) \vee \overline{Q(f(y))}$$

есть склейка C .

Определение. Пусть C_1 и C_2 - два дизъюнкта, которые не имеют никаких общих переменных. Пусть L_1 и L_2 - две литеры в C_1 и C_2 соответственно. Если L_1 и $\overline{L_2}$ имеют общий унификатор δ, то дизъюнкт

$$(C_1\delta \setminus L_1\delta) \cup (C_2\delta \setminus L_2\delta)$$

называется бинарной резольвентой C_1 и C_2 . Литеры L_1 и L_2 называются отрезаемыми литерами.

<u>Пример 14.2.</u> Пусть $C_1 = P(x) \vee Q(x)$, а $C_2 = \overline{P(a)} \vee R(x)$. Т.к. x входит в C_1 и C_2, то заменяем переменную x в C_2 и пусть $C_2 = \overline{P(a)} \vee R(y)$. Выбираем $L_1=P(x)$, $L_2 = \overline{P(a)}$.Т.к. $\overline{L_2} = P(a)$, то L_1 и $\overline{L_2}$ имеют унификатор $\delta = \{a/x\}$.

Следовательно

$$(C_1\delta - L_1\delta) \cup (C_2\delta - L_2\delta) =$$

$$= (\{P(a), Q(a)\} - \{P(a)\}) \cup (\{\overline{P(a)}, R(y)\} - \{\overline{P(a)}\}) =$$

$$\{Q(a)\} \cup \{R(y)\} = \{Q(a), R(y)\} = Q(a) \vee R(y)$$

Таким образом $Q(a) \vee R(y)$ - бинарная резольвента C_1 и C_2 и $P(x)$ и $\overline{P(a)}$ - отрезаемые литеры.

<u>Определение</u>. Резольвентой дизъюнктов C_1 и C_2 является одна из следующих резольвент:

1) бинарная резольвента C_1 и C_2;
2) бинарная резольвента C_1 и склейки C_2;
3) бинарная резольвента склейки C_1 и C_2;
4) бинарная резольвента склейки C_1 и склейки C_2.

<u>Пример 14.3.</u>

Пусть C_1=*З(ч)* $\vee$ *З(а(н))* $\vee$*К(п(н))* и $C_2 = \overline{P\big(f\big(g(a)\big)\big)} \vee Q(b)$.

Склейка C_1 есть C_1' $=P(f(y)) \vee R(g(y))$. Бинарная резольвента C_1' и C_2 есть $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ и она же есть и резольвента C_1 и C_2.

Метод резолюций есть правило вывода, которое порождает резольвенты для множества дизъюнктов. Метод резолюций полон, что доказывается следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Множество S дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта П из S (без доказательства).

<u>Пример</u> применения метода резолюций в исчислении

предикатов. Доказать справедливость следующих рассуждений.

У всякого шутника из города Габрово найдется шутка о каком-нибудь габровце и его теще, способная рассмешить всех жителей этого города, за исключением тещи габровца. Богдан – большой шутник. У мадам Петковой нет зятя. Следовательно, мадам Петкову рассмешит шутка Богдана о Теодоре и его теще Хелене.

Введем следующие предикаты, константы и термы:

J(x): x -шутник;

E(x,y): x совпадает с *y*;

$S(x,y_1,y_2,z)$: шутка шутника *x* о габровцах y_1 и y_2 способна рассмешить габровца *z* ;

m(x): теща габровца *x*;

b: Богдан;

p: мадам Петкова;

t: Теодор;

h=m(t): Хелена.

В качестве предметной области берем всех жителей г. Габрово.

Имеем следующие посылки и вывод

F_1: $(\forall x)(J(x)\rightarrow(\exists y)(\forall z)(\overline{E(z,m(y))} \rightarrow S(x,y,m(y),z)))$

F_2: $J(b)$

F_3: $\overline{(\exists y)E(p,m(y))}$

G: $S(b,t,h,p)$

Приведем посылки и вывод к скулемовской форме.

$$F_1 : (\forall x)(\overline{J(x)} \vee (\exists y)(\forall z)(E(z,m(y)) \vee S(x,y,m(y),z))) =$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\overline{J(x)} \vee E(z,m(y)) \vee S(x,y,m(y),z)))$$

Исключаем квантор $(\exists y)$, заменяя все вхождения переменной *y* на скулемовскую функцию *f(x)*. Получаем

$$(\forall x)(\forall z)(\overline{J(x)} \vee E(z,m(f(x)) \vee S(x,f(x),m(f(x)),z))$$ -

скулемовская форма

F_2 : уже находится в скулемовской форме.

$F_3 : \overline{(\exists y)E(p,m(y))} = (\forall y)\overline{E(p,m(y))}$ – скулемовская форма

G: уже находится в скулемовской форме.

Имеем следующее множество дизъюнктов:

$S = \{\overline{J(x)} \vee E(z, m(f(x))) \vee S(x, f(x), m(f(x)), z), J(b), \overline{E(p, m(y))},$
$\overline{S(b,t,h,p)}\}$

Применяем метод резолюций. Делаем подстановку *{b/x}* в первом дизъюнкте, получаем контрарные литеры в 1-ом и во 2-ом дизъюнкте. В результате получим следующую резольвенту:

$$\frac{\overline{J(b)} \vee E(z, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), z), J(b)}{E(z, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), z)}$$

Делаем подстановку *{p/z,f(b)/y}* в резольвенте и 3-м дизъюнкте. В результате получаем:

$$\frac{E(p, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), p), \overline{E(p, m(f(b)))}}{S(b, f(b), m(f(b)), p)}$$

Поскольку шутка Богдана *(b)* относится к Теодору *(t)* и его теще Хелене *(h=m(t))*, то *t=f(b)* и *h=m(f(b))*. Получаем

$$\frac{S(b, f(b), m(f(b)), p), \overline{S(b, f(b), m(f(b)), p}}{\Pi}$$

В результате получен пустой дизъюнкт П. Следовательно, вывод *G* верен.

Учебно-методический комплекс

по дисциплине

«Математическая логика»

1. <u>Выписка из ГОС ВПО (если дисциплина в ГОС имеется);</u>

<u>О.П.Д.Ф.5.</u>

Дискретная математика и математическая логика: 275 часов.

Выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; биномиальные коэффициенты, производящие функции и рекуррентные соотношения. Графы: основные понятия; способы представления графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Укладки графов, планарность; формула Эйлера для плоских графов, теорема Понтрягина – Куратовского. Деревья и их свойства, каркасы. Теория кодирования: побуквенное кодирование; разделимые коды; префиксные коды; критерий однозначности декодирования; неравенство Крафта – Макмиллана для разделимых кодов; оптимальные коды; метод Хафмана; самокорректирующиеся коды; коды Хэмминга, линейные коды и их простейшие свойства; коды Боуза – Чоудхури. Синтез и сложность управляющих систем: схемы из функцио-нальных элементов; сложность схем, простейшие универсальные методы синтеза; метод Шеннона; мощностной метод получения низких оценок сложности; функция L(n); порядок роста и асимптотика функции L(n). Конечные автоматы, эквивалентность автоматов, приведенные автоматы. Схемы из логических элементов и элементов задержки; реализация автоматных функций; события; операции над событиями; регулярные события и их представимость в автоматах; теорема Клини; регулярные выражения; представимость событий регулярными выражениями. Логические исчисления, модели: исчисление высказываний; аксиомы; правило вывода; тождественная истинность выводимых формул; непротиворечивость исчисления высказываний; теорема о полноте исчисления высказываний. Предикаты, кванторы; модели; формулы; свободные и связанные переменные; истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы, эквивалентные формулы логики предикатов, нормальная форма; исчисление предикатов; аксиомы; правила вывода; производные правила вывода; тождественная истинность выводимых формул;

непротиворечивость исчисления предикатов; теорема о полноте для случая одноместных предикатов. Вычислимые функции, машины Тьюринга, тезис Черча; рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика; теорема Поста; неразрешимость проблем самоприменимости, применимости; теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства; теорема о неразрешимости проблемы распознавания тождественно истинных формул исчисления предикатов; операции суперпозиции и примитивной рекурсии; примитивно-рекурсивные функции; частично-рекурсивные функции; вычислимость частично-рекурсивных функций по переменной; совершенная дизъюнктивная нормальная форма; полные системы функций; полиномы Жегалкина; представление булевых функций полиномами; замыкание; линейные функции; самодвойственные функции; принцип двойственности; монотонные функции; теорема о неполноте систем функций алгебры логики; базисы; дизъюнктивные нормальные формы. Функции k-значной логики; элементарные функции: полнота систем функций; особенности функций k-значной логики, теорема Кузнецова о функциональной полноте; существенные функции; теорема Слупецкого.

2. <u>Календарный план учебных занятий по дисциплине;</u>

Неделя	Лекции	Число часов	Лабораторные занятия	Число часов
1	Введение в алгебру логики.	2	Решение задач на соответствие. Примеры с подалгеброй.	2
2	Функции алгебры логики	2	Решение задач с основными логическими функциями.	2

3	Существенные и фиктивные переменные.	2	Решение задач на ассоциативность, дистрибутивность и коммутативность.	2
4	Принцип двойственности и правило двойственности.	2	Решение задач на двойственность функций.	2
5	Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.	2	Нахождение СДНФ функции.	2
6	Промежуточный контроль знаний (Контрольная работа №1)			2
7	Представление логических функций булевыми формулами. СКНФ.	2	Нахождение СКНФ функции. Правило поглощения, склеивания и расщепления.	
8	Алгоритм Куайна и Мак-Клоски.	2	Преобразование функции с помощью алгоритма Куайна и Мак-Клоски и представления в виде ДНФ.	2
9	Минимизация ДНФ. Порождение простых импликантов.	2	Минимизация булевых функций.	2
10	Полнота и замкнутость систем логических функций.	2	Решение задач с основными замкнутыми классами.	2
11	Исчисление высказываний. Общезначимость. Логическое следствие.	2	Решение логических задач.	2

12	Метод резолюций для исчисления высказываний.	2	Решение логических задач.	2
13	Исчисление предикатов.	2	Понятие квантора. Интерпретация формул. Алфавит.	2
14	Промежуточный контроль знаний (Контрольная работа №2)			2
15	Предваренная нормальная форма и скулемовская стандартная форма.	2	Решение задач на ПНФ и ССФ.	2
16	Подстановка и унификация. Алгоритм унификации.	2	Нахождение унификатора.	2
17	Метод резолюции в исчислении предикатов.	2	Решение задач на метод резолюции в исчислении предикатов	2
18	Коллоквиум № 1			2
19	Заключительный обзор курса. Консультации по подготовке к итоговому контролю знаний.	2	Заключительный обзор курса. Консультации.	2
20	Итоговый контроль знаний			2

3. **Описание курса (дисциплины):**

1. Информация о преподавателе (ссылка на страницу)

Зарипова Эльвира Ринатовна, старший преподаватель,

http://www.telesys.pfu.edu.ru/about/zaripova.html

2. *Цель курса*

Курс «Математическая логика» является обязательной дисциплиной бакалаврских программ. Курс носит теоретический и практический характер. В рамках курса студенты овладевают основами математической логики и теории множеств.

Основной целью освоения дисциплины является знание основополагающих понятий, результатов и методов математической логики. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса: освоение теории множеств, навыки работы с пропозициональными и предикатными исчислениями, знание формулировок и доказательств основных теорем курса.

Задачей курса является развитие логического мышления у студентов и изучение основ математической логики. Развиваются навыки формализации и описания дискретных математических объектов.

3. *Содержание курса*

См. п.2, 4, 7.

4. *Организационно-методическое построение курса*

Курс состоит из трех модулей.

Первый модуль составляют:

- теоретический материал, излагаемый в лекциях 1 – 5 календарного плана;
- лабораторные занятия в объеме 10 академических часов.

В конце модуля проводится промежуточный контроль знаний (контрольная работа №1.)

Второй модуль составляют:

- теоретический материал, излагаемый в лекциях 7-13 календарного плана курса;

- лабораторные занятия в объеме 12 академических часов.

В конце модуля проводится промежуточный контроль знаний (контрольная работа №2.)

Третий модуль составляют:

- теоретический материал, излагаемый в лекциях 15-17 календарного плана курса;
- лабораторные занятия в объеме 6 академических часов.

В конце курса проводится итоговый контроль знаний (контрольная работа №3).

5. *Условия и критерии выставления оценок*

Порядок начисления баллов за семестр.

Контрольная работа № 1: 0 – 35 баллов

Практические задания: 0 – 35 баллов

Контрольная работа № 2: 0 – 35 баллов

Практические задания: 0 – 35 баллов

Коллоквиум № 1: 0-10 баллов

Теоретические вопросы: 0 – 10 баллов

Контрольная работа № 3: 0 – 20 баллов

Теоретические вопросы: 0 – 20 баллов

6. *Балльно-рейтинговая система оценки знаний, шкала оценок*

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Посещение лекций	—	—	—
2.Лабораторные работы	—	—	—
3. Практические занятия	—	—	—
4. Домашние задания	—	—	—
5. Контрольные работы	2	35; 35	70
6. Рубежная аттестация	—	—	—
7. Работа на семинаре	—	—	—
8. Реферат	—	—	—
9. Коллоквиум	1	10	10
10. Итоговая аттестация	1	20	20
ИТОГО			100

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традици-онные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 - 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 - 85	4	69 - 85	4	C

51 - 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 - 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F
51 – 100	Зачет		Зачет	Passed

Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем. Работы, предоставленные с опозданием, не оцениваются, коллоквиумы не переписываются. Контрольные работы переписываются однократно по правилам, установленным на факультете. Студенты, получившие в течение семестра, оценку 3 или 4 (зачет) и желающие повысить свою оценку, допускаются к экзамену (итоговая аттестация). Экзаменационная работа оценивается из 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре. Оценка менее 51 балла (<3), полученная при итоговой аттестации, является неудовлетворительной.

Студенты, набравшие менее 31 балла в течение семестра не допускаются к итоговой аттестации.

7. Темы лекций, семинарских занятий, лабораторных работ

Темы лекций

Тема 1. Введение в алгебру логики

Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.

Тема 2. Минимизация булевых функций

Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.

Тема 3. Полнота и замкнутость систем логических функций

Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций.

Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.

Тема 4. Исчисление высказываний и предикатов

Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Темы лабораторных занятий

Тема 1. Алгебра логики

Решение примеров на прямое произведение множеств. Задача на истинность соответствия. Поиск подалгебры в алгебре. Суперпозиции и формулы. Решение задач на принцип двойственности и правило двойственности. Нахождение совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ). Нахождение совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.

Тема 2. Минимизация булевых функций

Минимизация функций. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.

Тема 3. Полнота и замкнутость систем логических функций

Решение задач на доказательство замкнутости класса. Класс самодвойственных функций. Решение задач с несамодвойственными функциями. Класс монотонных функций. Решение задач с немонотонными функциями. Класс линейных функций. Решение задач с нелинейными функциями.

Тема 4. Исчисление высказываний и предикатов

Решение задач с использованием метода резолюций для исчисления высказываний. Применение кванторов. Поиск предваренной нормальной формы (ПНФ). Поиск скулемовской стандартной формы. Подстановка и унификация для ПНФ. Применение алгоритма унификации. Применение метода резолюций в исчислении предикатов.

4. Учебно-методические материалы, используемые для реализации курса на обеспечивающей кафедре: учебники, учебные пособия, конспекты лекций, методические указания (в т.ч. в электронном виде)

Список обязательной литературы.

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. «Задачи и упражнения по курсу дискретной математики».// М.: "Наука", 2007.
2. Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. «Лекции по дискретной математике. Часть I. Математическая логика». Учебное пособие. // М.: Изд-во РУДН, 2011.
3. Новиков Ф.А. «Дискретная математика для программистов». Учебник. // Спб.: Изд. дом «Питер», 2000.
4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. «Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов». Учебное пособие. 5-ое изд., // М:, Изд-во Физматлит, 2006

Список дополнительной литературы.

1. Игошин В.И. «Математическая логика и теория алгоритмов». 3-е изд. Учебное пособие для ВУЗов, // М:, Изд-во Физматлит, 2006

2. Просветов Г.И. «Дискретная математика: задачи и решения». Учебное пособие. //М. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2008.

5. Методические указания и рекомендации по выполнению лабораторных работ, практических или семинарских занятий, курсовых работ (проектов)

Общие правила выполнения контрольных заданий

Требования к оформлению работы

Постановка задачи.

1.Краткая формулировка задачи.

2.Развернутая постановка задачи с указанием основных режимов работы и их сценариев.

Алгоритм решения.

1.Математическое описание алгоритма.

2.Структура алгоритма ядра программы (укрупненная блок-схема).

Тестирование.

1.Описание основных режимов тестирования алгоритма и программы и результатов работы программы.

2.Список возможных ошибок и аномалий, описание реакции программы на них.

Заключение.

Содержит общие комментарии и замечания исполнителя о выполненной работе.

Приложение.

Приложение должно содержать текст программы (полная распечатка или распечатка алгоритма ядра программы).

Работа должна быть представлена в виде распечатанного текста и на дискете (Word + Delphi и/или C++).

Рекомендации к составлению отчета

Оформление.

Отчет по работе должен быть оформлен в форме Word-файла.

Содержание отчета.

Каждый пункт задания вычислительного эксперимента должен найти свое отражение в отчете.

Каждый раздел отчета должен содержать:

- формулировку цели эксперимента
- результаты эксперимента, представленные в виде примеров
- иллюстрационный материал в виде копий экрана с графиками зависимостей функции и т.п.
- выводы, следующие из результатов эксперимента в контексте его цели.

6. Правила выполнения письменных работ (контрольных тестовых работ)

Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем. Работы, предоставленные с опозданием, не оцениваются. Однократное переписывание контрольных работ проводится по правилам, введённым на факультете. Коллоквиумы не переписываются.

7. Комплект индивидуальных заданий (рефератов) по дисциплине, тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрено.

8. **Образцы студенческой продукции: конспекты лекций, отчеты по лабораторным работам, практическим занятиям, образцы курсовых проектов или работ, индивидуальных заданий, рефератов и т.п.**

Перечень образцов студенческой продукции см. на сайте кафедры www.telesys.pfu.edu.ru в разделах «Выпускные работы бакалавров» и «Магистерские диссертации». Тексты (и тексты курсовых работ) хранятся в архиве кафедры и выдаются по запросу студента.

9. **Содержание практик; проведения экскурсий, лекций и их примерное содержание и сроки; индивидуальные задания студентов с указанием сроков выполнения; структура и содержание отчета о практике, порядок и сроки их защиты студентами.**

Не предусмотрено.

10. **Контролирующие материалы (тесты, билеты, задачи и т.п.) по обеспечению:**

1. текущего, рубежного (промежуточного) контролей

Перечень вопросов контрольной работы № 1

Типовые задачи

1. Построение СДНФ, СКНФ, нахождение существенных и фиктивных переменных, построение полинома Жегалкина.
2. Представление функции булевой формулой.
3. Нахождение двойственной функции по правилу двойственности, по принципу двойственности и по таблице.
4. Проверка справедливости соотношения.

Перечень вопросов контрольной работы № 2

Типовые задачи

1. Построить минимальное представление исходной функции с помощью алгоритма Куайна-МакКлоски и последующего выделения ядра.
2. Проверить является ли высказывание логическим следствием (двумя способами: любая из двух теорем и метод резолюций).
3. Найти предваренную и скулемовскую нормальные формы для формулы.
4. Проверить принадлежность функции классам монотонных функций, самодвойственных функций, линейных функций.

2. итоговых семестровых испытаний

Итоговые вопросы

1. Основные понятия теории множеств.
2. Понятие прямого произведения множеств.
3. Определение алгебры и подалгебры. Функции алгебры логики.
4. Соответствия и функции в теории множеств.
5. Булева алгебра и свойства булевых операций.
6. Принцип двойственности и свойство двойственности.
7. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
8. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей.
9. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.
10. Основные эквивалентные преобразования и их доказательства.
11. Полином Жегалкина.
12. Алгоритм Куайна-МакКлоски.
13. Определение фиктивных и существенных переменных.
14. Понятие двойственности и примеры двойственных и самодвойственных функций.
15. Определение минимальной, кратчайшей и неизбыточной ДНФ.

16. Теорема о функциональной полноте.
17. Определение и свойства функциональной полноты и замкнутости. Замыкание.
18. Общие принципы построения формальной в теории исчисления высказываний.
19. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.
20. Метод резолюций для исчисления высказываний.
21. Алгоритм унификации.
22. Класс функций T_0. Определение и доказательство замкнутости.
23. Класс функций T_1. Определение и доказательство замкнутости.
24. Класс функций S. Определение и лемма о несамодвойственной функции.
25. Класс функций M. Определение и лемма о немонотонной функции.
26. Класс функций L. Определение и лемма о нелинейной функции.
27. Понятие предиката, квантора, алфавита и формулы.
28. Интерпретация формул при исчислении предикатов.
29. Понятие скулемовской стандартной формы.
30. Предваренная нормальная форма.
31. Метод резолюций для исчисления высказываний.
32. Сравнительный анализ предикатов и высказываний. Примеры.
33. Понятие унификатора, склейки и резольвенты в исчислении предикатов.
34. Теоремы о логическом следствии.
35. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.
36. Теорема о функциональной полноте.

11. Материально-техническое обеспечение дисциплины и перечень используемого программного обеспечения.

Не предусмотрено.

Эльвира Ринатовна Зарипова
Мария Геннадьевна Кокотчикова
Леонид Антонович Севастьянов

Лекции
по дискретной математике

Учебное пособие
Математическая логика

Издание подготовлено в авторской редакции