МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.А.Тайцлин

ГРАФЫ

Тверь 2000 год

УДК 519.7

Брошюра посвящена изложению первоначальных сведений о графах и представляет собой записи лекций, которые я читаю на первом курсе в рамках лекций по дискретной математике.

$1 содержит определения, описание способов задания графов и примеры графов, удовлетворяющих различным условиям.

В $2 обсуждаются вопросы достижимости и понятия компонент связности, а также порядок на множестве таких компонент.

В $3 изучаются свойства деревьев. Для нагруженного графа приводится алгоритм построения самого дешёвого остова.

В $4 изучаются чётные графы. Доказывается теорема Эйлера о том, что можно обойти без повторений все рёбра графа тогда и только тогда, когда граф чётен. Вводится пространство подграфов над полем из двух элементов и доказывается теорема о размерности подпространства чётных подграфов.

В $5 обсуждается алгоритм Дейкстры построения кратчайшего пути в связном нагруженном графе.

Содержание

Введение

Брошюра посвящена изложению первоначальных сведений о графах и представляет собой записи лекций, которые я читаю на первом курсе в рамках лекций по дискретной математике.

$1 содержит определения, описание способов задания графов и примеры графов, удовлетворяющих различным условиям.

В $2 обсуждаются вопросы достижимости и понятия компонент связности, а также порядок на множестве таких компонент.

В $3 изучаются свойства деревьев. Для нагруженного графа приводится алгоритм построения самого дешёвого остова.

В $4 изучаются чётные графы. Доказывается теорема Эйлера о том, что можно обойти без повторений все рёбра графа тогда и только тогда, когда граф чётен. Вводится пространство подграфов над полем из двух элементов и доказывается теорема о размерности подпространства чётных подграфов.

В $5 обсуждается алгоритм Дейкстры построения кратчайшего пути в связном нагруженном графе.

Главная используемая мной книга:

Christofides, Nicos. Graph theory. An algorithmic approach. Computer Science and Applied Mathematics.

Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. xv+400 pp.

Книга переведена на русский язык.

Н.Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход. Перевод с английского. «Мир», Москва, 1978.

Я придерживаюсь, в основном, терминологии оригинала и игнорирую терминологию переводчика.

Я использовал и другие книги по теории графов.

Символ ■ обозначает конец доказательства или отсутствие доказательства.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

1.1 Определения

Определение 1.1.1 (ориентированного мультиграфа). *Ориентированным мультиграфом называется совокупность четырёх объектов: множества B вершин, множества P рёбер и двух отображений τ_1 и τ_2 множества P во множество B, ставящих каждому ребру в соответствие его начальную и конечную вершины. Если начальная вершина ребра совпадает с его конечной вершиной, то такое ребро называется петлёй. Этот мультиграф обозначается через*

$$\langle B, P, \tau_1, \tau_2 \rangle.$$

Ориентированный мультиграф называется ориентированным графом, если любые два ребра, имеющие одинаковые начальные и одинаковые конечные вершины, совпадают.

Определение 1.1.2 (мультиграфа). *Мультиграфом называется совокупность трёх объектов: множества B вершин, множества P рёбер и отображения τ, ставящего каждому ребру в соответствие одну вершину или две вершины. Если ребру ставится в соответствие одна вершина, то ребро называется петлёй, а сопоставленная вершина называется концом этой петли. Если ребру ставится в соответствие две вершины, то они называются концами этого ребра. Этот мультиграф обозначается через*

$$\langle B, P, \tau \rangle.$$

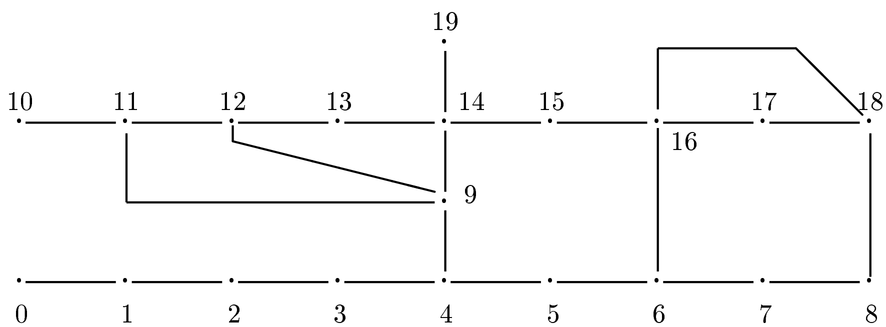
Мультиграф называется графом, если любые два ребра, имеющие одинаковые концы, совпадают.

Мультиграф (граф) называют ещё неориентированным мультиграфом (графом), чтобы подчеркнуть отличие от ориентированного мультиграфа (графа). Понятно, что неориентированный мультиграф можно рассматривать как ориентированный мультиграф, в котором для каждого ребра имеется другое ребро, начало которого совпадает с концом первого ребра, а конец которого совпадает с началом первого ребра.

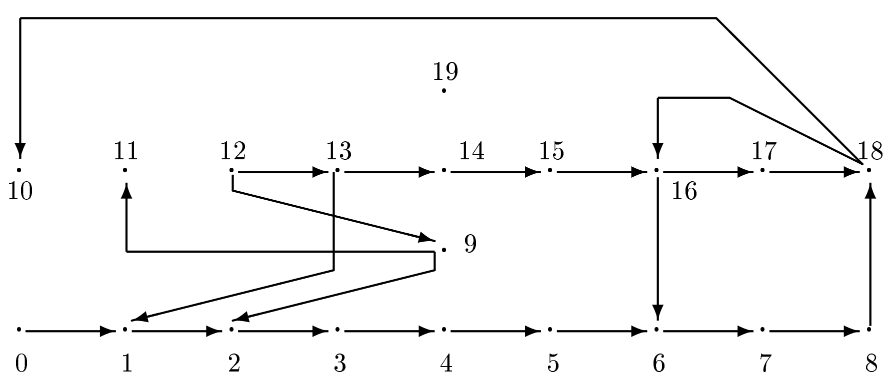
Обычно ориентированные и неориентированные мультиграфы изображаются следующим образом. Вершины изображаются точками. Рёбра ориентированного мультиграфа изображаются стрелками, идущими из начальной вершины (начала) в конечную вершину (конец) ребра.

Рёбра неориентированного мультиграфа изображаются отрезками, соединяющими концы ребра. Петля изображается отрезком, соединяющим единственный конец петли с самим собой.

Приведем два примера.



Пример 1.1.1.



Пример 1.1.2.

В примере 1.1.1 рассматривается неориентированный граф. Вершины этого графа обозначены числами 0, 1, . . . , 19. Всего у этого графа 20 вершин. Вершина 11 соединена рёбрами с вершинами 10, 9 и 12, вершина 12 соединена рёбрами с вершинами 9, 11 и 13, вершина 9 соединена с рёбрами 4, 14, 11 и 12, вершина 19 соединена ребром только с вершиной 14, а вершина 14 соединена с вершинами 19, 9, 13 и 15. И так далее.

В примере 1.1.2 рассматривается ориентированный граф, имеющий 20 вершин, обозначенных числами от 0 до 19, и рёбра, идущие из вершины 0 в вершину 1, из вершины 1 в вершину 2, из вершины 2 в вершину 3 и так далее, из вершины 8 в вершину 18, из вершины 18 в вершины 10 и 16, из вершины 12 в вершины 9 и 13, из вершины 13 в вершины 1 и 14 и так далее. Всего в этом графе 21 ребро.

Бинарным отношением (или *бинарным предикатом*) на множестве A называется множество пар элементов множества A. Отношение называется *тождественно ложным*, если оно пусто. Отношение называется *тождественно истинным*, если оно является множеством всех пар элементов множества A. Если пара входит в отношение, то говорят, что это отношение *истинно* на этой паре, а если пара не входит в отношение, то говорят, что это отношение *ложно* на этой паре. Множество A при этом называется *носителем* рассматриваемого отношения. Запись $Q(a, b)$ означает, что отношение с именем Q истинно на паре $\langle a, b\rangle$.

Отношение называется *рефлексивным*, если для каждого элемента a носителя пара $\langle a, a\rangle$ входит в отношение.

Примером рефлексивного отношения является отношение делимости на множестве натуральных чисел.

Отношение называется *иррефлексивным*, если для каждого элемента a носителя пара $\langle a, a\rangle$ не входит в отношение.

Отношение строгого порядка на натуральных числах является иррефлексивным.

Отношение называется *симметричным*, если для каждой пары $\langle a, b\rangle$ из рассматриваемого отнощения пара $\langle b, a\rangle$ тоже входит в отношение.

Отношение делимости не является симметричным. Однако симметричным является отношение принимать одинаковые значения на одинаковых наборах значений переменных на множестве булевых функций.

Бинарное отношение Q на множестве A называется *транзитивным*, если для любых элементов a, b и c множества A из истинности $Q(a, b)$ и $Q(b, c)$ следует истинность $Q(a, c)$.

Отношение делимости является транзитивным. Транзитивным является и отношение принимать одинаковые значения на одинаковых наборах значений переменных.

Бинарное отношение Q на множестве A называется *тотальным*, если для любых различных элементов a и b множества A либо истинно $Q(a, b)$, либо истинно $Q(b, a)$.

Отношение строгого порядка на натуральных числах является тотальным.

Бинарное отношение называется отношением *эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение принимать одинаковые значения на одинаковых наборах значений переменных является отношением эквивалентности на множестве булевых функций.

Теорема 1.1 (о разбиении). *С каждым отношением эквивалентности связывается разбиение носителя на непересекающиеся подмножества попарно эквивалентных элементов.*

Эти подмножества обычно называют классами эквивалентности для рассматриваемого отношения эквивалентности.

Доказательство. Для каждого элемента a рассмотрим множество A_a всех ему эквивалентных элементов. Если какой-то элемент a эквивалентен двум разным элементам b и c, то эти элементы b и c эквивалентны между собой. Поэтому все элементы множества A_a попарно эквивалентны, а любой элемент, эквивалентный b, эквивалентен и c. Следовательно, $A_b = A_c$. Значит, различные множества A_b и A_c не имеют общих элементов. С другой стороны, каждый элемент a носителя лежит во множестве A_a. ∎

Отношение называется *антисимметричным*, если для каждой пары $\langle a, b\rangle$ из рассматриваемого отношения пара $\langle b, a\rangle$ не входит в отношение.

Бинарное отношение называется *частичным порядком*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Отношение строгого порядка является частичным порядком на множестве натуральных чисел.

Бинарное отношение называется *линейным порядком*, если оно тотально и является частичным порядком.

Отношение строгого порядка является линейным порядком на натуральных числах. Как мы знаем, отношение на кортежах, составленных из нулей и единиц, содержащих те и только те пары кортежей, которые различны и у которых каждая координата первого кортежа не превосходит соответствующей координаты второго кортежа, является частичным порядком, но не является линейным порядком.

Ориентированные графы используют для задания бинарных отношений.

Ориентированный граф задаёт бинарное отношение на множестве своих вершин. Для двух вершин это отношение истинно тогда и только тогда, когда имеется стрелка, идущая из первой вершины во вторую. Это означает, что имеется ребро с началом в первой вершине и концом во второй.

Говорят, что граф обладает некоторым свойством, если этим свойством обладает соответствующее бинарное отношение.

Например, в примере 1.1.2 задаётся бинарное отношение, которое на паре $<1, 2>$ истинно, а на паре $<3, 1>$ ложно. Это отношение иррефлексивно и не является транзитивным, так как оно истинно на паре $<1,2>$ и на паре $<2,3>$, но ложно на паре $<1,3>$. Оно не является симметричным и не является тотальным. Вместе с тем оно антисимметрично.

В свою очередь каждое бинарное отношение задаёт ориентированный граф, вершинами которого являются элементы носителя рассматриваемого отношения. В этом графе имеется ребро, идущее из первой вершины во вторую тогда и только тогда, когда на соответствующей паре отношение истинно.

При этом для задания симметричных отношений можно использовать неориентированные графы. В этом случае в графе имеется ребро, соединяющее пару вершин, тогда и только тогда, когда отношение истинно на этой паре.

1.2 Матричные представления

Для задания бинарного отношения можно просто перечислить элементы носителя и входящие в это отношение пары. Таким образом можно задавать и графы, перечисляя вершины и рёбра как пары вершин. Но более наглядным и компактным способом задания бинарных отношений и графов являются таблицы.

Способом задания бинарного отношения и задаваемого им графа является *таблица смежности*, в которой строки и столбцы помечены вершинами графа, а на пересечении строки и столбца стоит 1 или 0 в зависимости от того, имеется ли или нет ребро, идущее из метки строки в метку столбца.

Можно также рассматривать *нагруженные* графы, в которых каждому ребру присвоена его стоимость, которая обозначается положительным целым числом. В этом случае вместо 1 в таблице помещается стоимость соответствующего ребра. Другими словами, если существует ребро, идущее из метки строки в метку столбца, то на пересечении этой строки и этого стобца помещается стоимость этого ребра, а если такого ребра нет, то помещается 0. Обычному (ненагруженному) графу соответствует случай, когда стоимости всех рёбер равны 1. Вместо стоимости иногда говорят о весе ребра.

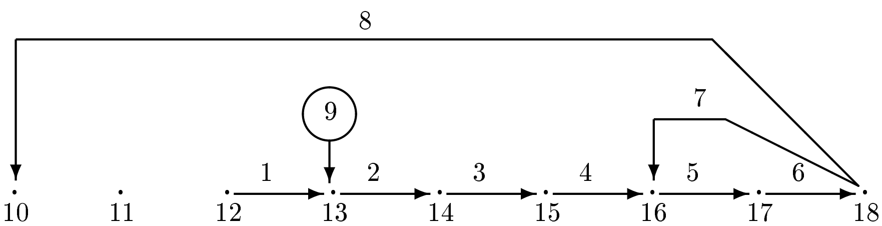
Например, граф 1.1.2 может быть задан следующей таблицей смежности (в метках второй половины столбцов опущена цифра 1 как цифра десятков):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Другим способом задания ориентированного графа является *таблица инцидентности.* В такой таблице строки помечены вершинами графа, а столбцы — рёбрами. На пересечении строки и столбца помещается 1, если вершина является началом ребра, помещается –1, если вершина является концом ребра, и помещается 0 в остальных случаях. Если ребро является петлёй, можно вместо пары <1,–1> помещать, например, 2.

Таким образом, в каждом столбце таблицы либо имеет ровно одна единица и одна единица с минусом, а остальные элементы являются нулями, либо имеется ровно одна двойка, а остальные элементы являются нулями.

Рассмотрим, например, граф 1.2.1, в котором вершины помечены цифрами от 10 до 18, а рёбра — цифрами от 1 до 9. В графе имеется петля, началом и концом которой является вершина 13. В графе имеется вершина 11, которая не является ни начальной, ни конечной вершиной никакого ребра. Такие вершины называются *изолированными.* В графе имеется вершина 10, которая не является начальной вершиной никакого ребра. Такие вершины называются *стоками.* В графе имеется также вершина 12, которая не является конечной вершиной никакого ребра. Такие вершины называются *источниками.*



Пример 1.2.1.

Этот граф 1.2.1 может быть задан следующей таблицей инцидентности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	−1	1	0	0	0	0	0	0	2
14	0	−1	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	−1	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	−1	1	0	−1	0	0
17	0	0	0	0	−1	1	0	0	0
18	0	0	0	0	0	−1	1	1	0

Этот способ годится и для задания ориентированных и неориентированных мультиграфов. В неориентированном случае помещается 1, если вершина является одной из концевых вершин ребра, и помещается 0 в остальных случаях.

1.3 Пути

Определение 1.3.1 (пути). *Путём в ориентированном мультиграфе называется такая последовательность рёбер, в которой конечная вершина всякого ребра, отличного от последнего, является начальной вершиной следующего ребра. Путь называется простым, если рёбра в нём не повторяются (каждое ребро встречается не более одного раза). Начальная вершина первого ребра называется началом пути. Конечная вершина последнего ребра называется концом пути. Говорят, что путь соединяет своё начало со своим концом или что путь идёт из своего начала в свой конец. Путь называется элементарным, если вершины в нем не повторяются (каждая вершина является начальной* *вершиной только одного ребра этого пути, а конец пути не является отличной от начала этого пути начальной вершиной никакого ребра этого пути). Путь называется циклом, если он содержит рёбра и если его начало совпадает с его концом. Цикл называется простым (элементарным), если он является простым (соответственно, элементарным) путём.*

Например, в графе 1.2.1 последовательность рёбер 1,2,3 является путём, а последовательность 1,3,4 путём не является. Путь 5,6,7 является циклом. Пути 1,2,3 и 5,6,7 являются элементарными. Путь 2,3,4,5,6,7 является простым, но не является элементарным и не является циклом. Путь 2,3,4,5,6,7,5,6,7 не является простым.

Длиной пути называется число рёбер в этом пути (длина последовательности). Например, длиной пути 2,3,4,5,6,7,5,6,7 является число 9.

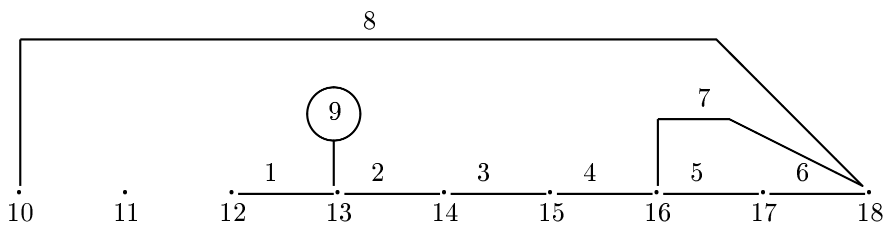
В нагруженном мультиграфе *весом* пути называется сумма весов входящих в этот путь рёбер.

Определение 1.3.2 (пути в неориентированном мультиграфе). *Путём в неориентированном мультиграфе называется такая последовательность*

$$A_1, r_1, A_2, r_2, \ldots, A_m, r_m, A_{m+1}$$

пар (вершина,ребро), заканчивающаяся вершиной, в которой для $i = 1, 2, \ldots, m$ *вершины* A_i, A_{i+1} *являются всеми концами ребра* r_i*, а соседние рёбра* r_i *и* r_{i+1} *различны. Путь называется простым, если рёбра в нём не повторяются (каждое ребро встречается не более одного раза).* A_1 *называется началом пути.* A_{m+1} *называется концом пути. Говорят, что путь соединяет своё начало со своим концом или что путь идёт из своего начала в свой конец. Путь называется элементарным, если вершины в нем не повторяются (либо они попарно различны, либо все вершины, кроме конца пути, попарно различны, а конец пути совпадает с началом). Путь называется циклом, если он содержит рёбра и если его начало совпадает с его концом. Цикл называется простым (элементарным), если он является простым (соответственно, элементарным) путём.*

Определение длины и веса пути в неориентированном случае не отличается от соответствующего определения для случая ориентированных мультиграфов.



Пример 1.3.1.

Например, в графе 1.3.1 путь 14,3,15,4,16,7,18,6,17 является элементарным путём из 14 в 17.

1.4 Двудольные графы

Определение 1.4.1 (двудольного графа). *Неориентированный граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на такие два подмножества без общих элементов, что каждое ребро имеет конец как в одном подмножестве, так и в другом подмножестве.*

В частности, двудольный граф не имеет петель.

Например, граф 1.3.1 не является двудольным. Как бы мы не разбивали вершины этого графа, вершины 16 и 17 должны быть в разных подмножествах. Но тогда вершину 18 нельзя отнести ни к первому, ни ко второму подмножеству разбиения.

Граф называется *конечным*, если он имеет конечное множество вершин.

Две различные вершины неориентированного графа называются *смежными*, если они являются концами какого-то ребра этого графа. Про это ребро говорят, что оно соединяет эти вершины.

Теорема 1.2 (о двудольных графах). *Неориентированный конечный граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечётной длины.*

Доказательство. Если имеется цикл нечетной длины, то граф не является двудольным, так как начало цикла нельзя отнести ни к первому, ни ко второму подмножеству разбиения. Действительно, вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от начала, должны попадать в то подмножество разбиения, которое не содержит начало.

Путь теперь граф не содержит циклов нечетной длины.

Начинаем первый шаг построения. Выберем какую-то вершину и пометим её знаком «+». Все вершины, смежные с выбранной, пометим знаком «–».

Пусть уже помечены некоторые вершины знаками «+» и «–». Будем предполагать, что для вершин, помеченных «+» на этом шаге, имеется путь четной длины в эту вершину из первоначально выбранной вершины на этом шаге, а для вершин, помеченных «–», имеется путь нечетной длины из первоначально выбранной вершины на этом шаге в эту вершину.

Если есть непомеченные вершины, смежные с помеченными, выберем одну из них. Если выбранная вершина A смежна с вершиной B_m, помеченной «+», то пометим её знаком «–».

Заметим, что все смежные с выбранной вершины либо непомечены, либо помечены знаком «+». Действительно, если смежная с выбранной вершина A_s помечена знаком «–», то имеется путь нечетной длины

$$A_1, r_1, A_2, r_2, \ldots, r_s, A_s$$

из первоначально помеченной в смежную с выбранной и имеется путь четной длины

$$A_1, t_1, B_2, t_2, \ldots, t_m, B_m$$

из первоначально помеченной в смежную с выбранной. Заметим, что A_s и B_m различны, так как помечены разными метками. Поэтому имеется цикл

$$A_1, r_1, A_2, r_2, \ldots, r_s, A_s, r, A, s, B_m, t_m, \ldots, t_2, B_2, t_1, A_1$$

нечетной длины.

Пометим все вершины, смежные с выбранной вершиной A, знаком «+». По предыдущему, метки ранее помеченных вершин при этом не изменятся.

При этом для вершин, помеченных «+», имеется путь четной длины в эту вершину из первоначально выбранной вершины, а для вершин, помеченных «–», имеется путь нечетной длины из первоначально выбранной вершины в эту вершину.

Если выбранная вершина не смежна ни с какой вершиной, помеченной знаком «+», но смежна с вершиной, помеченной знаком «–», то пометим её знаком «+». По предыдущему, каждая смежная с выбранной вершина либо непомечена, либо помечена «–».

Пометим все вершины, смежные с выбранной вершиной A, знаком «–». По предыдущему, метки ранее помеченных вершин при этом не изменятся.

При этом для вершин, помеченных «+», имеется путь четной длины в эту вершину из первоначально выбранной на этом шаге вершины, а для вершин, помеченных «–», имеется путь нечетной длины из первоначально выбранной на этом шаге вершины в эту вершину.

Если нет непомеченных вершин, смежных с помеченными, переходим к следующему шагу. Выберем одну из непомеченных вершин, назовем её первоначально выбранной и пометим её знаком «+». Все смежные с ней вершины непомечены. Пометим их знаками «–». Далее действуем уже описанным способом.

Через конечное число шагов мы пометим все вершины.

Отнесем вершины, помеченные «+», к первому подмножеству, а вершины, помеченные «–» — ко второму.

Надо доказать, что любые две вершины, помеченные одинаковым знаком, не являются смежными.

По построению очевидно, что вершины, получившие метки на разных шагах, не являются смежными. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда обе вершины получают метки на одном и том же шаге. Но в этом случае две смежные вершины не могут иметь одинаковую метку. ∎

2 ДОСТИЖИМОСТЬ И СВЯЗНОСТЬ

В этом разделе мы рассматриваем только ориентированные и неориентированные мультиграфы, у которых число вершин конечно. Такие мультиграфы мы называем конечными.

2.1 Таблица достижимости

Вершина A ориентированного мультиграфа называется *достижимой* из вершины B этого мультиграфа, если существует путь в этом мультиграфе из B в A. При этом считается, что каждая вершина достижима из самой себя. Следовательно, отношение достижимости рефлексивно.

Теорема 2.1 (транзитивность достижимости). *Отношение достижимости транзитивно.*

Доказательство. Если существует путь из A в B и из B в C, то существует и путь из A в C. Достаточно сначала выписать рёбра первого пути, а потом рёбра второго пути. ∎

Таблицей достижимости ориентированного мультиграфа называется таблица, в которой строки и столбцы помечены вершинами этого мультиграфа, а на пересечении строки и столбца стоит 1, если метка столбца достижима из метки строки, и стоит 0 в остальных случаях.

Для построения таблицы достижимости можно использовать следующий алгоритм.

Вершина A ориентированного мультиграфа называется смежной с вершиной B этого мультиграфа, если в этом мультиграфе существует ребро, начальной вершиной которого является B, а конечной вершиной является A.

Выбираем вершину A и находим все вершины, достижимые из A.

Для этого сначала выписываем саму выбранную вершину, а затем все смежные с ней. Выбранную вершину считаем обозреваемой.

Если обозреваемая вершина является последней, то все вершины, достижимые из A, найдены. В противном случае считаем обозреваемой следующую вершину выписываемой последовательности и добавляем в конце последовательности все вершины, которые смежны с обозреваемой, но не встречаются ещё в выписываемой последовательности.

Повторяем эту процедуру до тех пор, пока обозреваемая вершина не окажется последней.

Теорема 2.2 (корректность алгоритма достижимости). *В построенной последовательности окажутся все вершины, достижимые из A и только такие вершины.*

Доказательство. Если существует путь

$$r_1, r_2, \ldots, r_m$$

из A в B и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ являются конечными вершинами рёбер этого пути, то эти вершины будут включены в выписываемую последовательность. Это доказывается индукцией по m. Вершина B_1 будет включена сразу. Если включена вершина B_i, то она в какой-то момент окажется обозреваемой, после чего будет включена и смежная с ней вершина B_{i+1}.

Заметим теперь, что всякая вершина, смежная с достижимой из A вершиной, сама достижима из A.

Действительно, если существует путь $r_1, r_2, \ldots, r_m$ из A в B и ребро r_{m+1}, идущее из B в C, то существует путь $r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1}$ из A в C.

Докажем теперь индукцией по номеру вершины в последовательности, что все включенные в выписываемую последовательность вершины достижимы из A. Каждая вершина этой последовательности либо является первой в последовательности, либо смежна с некоторой предыдущей вершиной этой последовательности. Так как по индукционному предположению предыдущая вершина достижима из A, то и рассматриваемая вершина тоже достижима из A. ∎

Рассмотрим, например, снова граф 1.2.1, в котором вершины помечены цифрами от 10 до 18, а рёбра — цифрами от 1 до 9.

Вершина 11 является изолированной. Никакая другая вершина не достижима из 11. Вершина 10 не имеет вершин, смежных с ней. По этой причине никакая другая вершина не достижима из неё.

Найдём вершины, достижимые из 12. Сначала помещаем 12, 13. Потом обозреваем 13 и помещаем 14. Получаем 12, 13, 14. Потом обозреваем 14 и помещаем 15. Потом обозреваем 15 и помещаем 16. Потом обозреваем 16 и помещаем 17. Потом обозреваем 17 и помещаем 18. Получаем

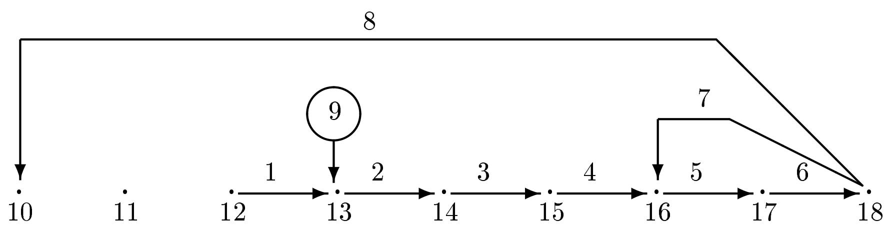
12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Далее обозреваем 18 и помещаем 10. 16 при этом помещать не надо, так как эта вершина уже есть в последовательности. Обозревая затем 10, мы не добавляем новых вершин и заканчиваем построение.

Таким образом из 12 достижимы 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 10.

Найдём вершины, достижимые из 17. Последовательно выписываем: 17, 18, 10, 16.

Эти же вершины достижимы из 16 и 18. Аналогичным образом получаем, что из 13 достижимы 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 10. Из 14 достижимы 14, 15, 16, 17, 18 и 10. Из 15 достижимы 15, 16, 17, 18 и 10.



Получаем следующую таблицу достижимости:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	1	1	1	1	1	1	1
13	1	0	0	1	1	1	1	1	1
14	1	0	0	0	1	1	1	1	1
15	1	0	0	0	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0	0	1	1	1
17	1	0	0	0	0	0	1	1	1
18	1	0	0	0	0	0	1	1	1

В случае неориентированного мультиграфа отношение достижимости симметрично. В этом случае можно тоже использовать предложенный алгоритм для построения таблицы достижимости.

2.2 Компоненты сильной связности

Отношение достижимости транзитивно и рефлексивно. Поэтому отношение взаимной достижимости является отношением эквивалентности. Следовательно, это отношение разбивает вершины на классы взаимно достижимых вершин. Эти классы называются *компонентами сильной связности*.

Ориентированный мультиграф называется *сильно связным*, если он состоит из одной компоненты сильной связности.

Например, в графе 1.2.1 компонентами сильной связности являются: {10}, {11}, {12}, {13}, {14}, {15}, {16, 17, 18}.

На компонентах сильной связности можно рассматривать следующее отношение достижимости.

Определение 2.2.1 (достижимости на компонентах). *Каждая компонента достижима из самой себя. Если компоненты различны, выбираем в каждой из рассматриваемых компонент по одному элементу. Выбранные элементы не являются взаимно достижимыми, так как компоненты различны. Компонента достижима из другой компоненты, если выбранный в ней элемент достижим из элемента, выбранного в другой компоненте. Компонента строго достижима из другой компоненты, если она достижима и эти компоненты различны.*

Теорема 2.3 (о частичном порядке на компонентах). *Определение достижимости не зависит от выбора элементов в компонентах. Отношение строгой достижимости на компонентах является частичным порядком.*

Доказательство. Выберем из компоненты K_1 элементы a_1 и a_2, а из компоненты K_2 элементы d_1 и d_2. Пусть a_1 достижим из d_1. Так как d_1 достижим из d_2 и a_2 достижим из a_1, то a_2 достижим из d_2.

Отношение строгой достижимости на компонентах транзитивно, так как отношение достижимости на вершинах транзитивно. Вместе с тем две различные компоненты не могут быть взаимно достижимыми, так как в противном случае, в каждом из них можно было бы выбрать по вершине так, чтобы выбранные вершины были взаимно достижимы. Это означало бы, что рассматриваемые компоненты совпадают. Поэтому отношение строгой достижимости на компонентах антисимметрично. ∎

Для изображения конечных частичных порядков можно использовать следующий способ. Назовём элемент *минимальным*, если он не является смежным ни с каким элементом. Расположим минимальные элементы на нижнем уровне. Рассмотрим оставшиеся элементы. Каждый минимальный из оставшихся элементов, расположим на втором уровне. Пусть уже построены элементы нескольких начальных уровней. Каждый минимальный из элементов, не помещенных ещё ни на один из уже построенных уровней, помещаем на следующий после всех ранее построенных уровень. Из элементов одного уровня ни один не является смежным к другому. Если элемент верхнего уровня a является смежным к элементу меньшего уровня b и не существует никакого такого элемента c промежуточного уровня, что a смежен с c, а c смежен с b, то соединяем a и b отрезком.

В рассматриваемом примере частичный порядок на компонентах имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ll}
\bullet\,\{10\} & \\
| & \\
\bullet\,\{16,17,18\} & \\
| & \\
\bullet\,\{15\} & \\
| & \\
\bullet\,\{14\} & \\
| & \\
\bullet\,\{13\} & \\
| & \\
\bullet\,\{12\} & \quad \bullet\,\{11\}
\end{array}
$$

В случае неориентированного мультиграфа отношение взаимной достижимости совпадает с отношением достижимости. В этом случае множество вершин разбивается на компоненты *связности*, а вершины из различных компонент не достижимы одна из другой. Таким образом, частичный порядок на компонентах является тривиальным. Каждая компонента является изолированным элементом в этом частичном порядке.

Неориентированный мультиграф называется *связным*, если он состоит из одной компоненты связности.

2.3 Порождающие множества. Базы

Множество вершин ориентированного мультиграфа называется *порождающим*, если каждая вершина достижима из одной из вершин этого множества.

Множество вершин ориентированного мультиграфа называется его базой, если оно является порождающим, но перестанет быть порождающим после выбрасывания из него любой одной входящей в него вершины.

Например, в графе 1.2.1 имеется только одна база $\{11, 12\}$. В самом деле, каждая база должна содержать вершины 11 и 12, так как каждая из них не достижима ни из какой отличной от неё вершины. Но из 12 достижимы все вершины, кроме 11.

Теорема 2.4 (о базах). *Множество вершин ориентированного мультиграфа является базой тогда и только тогда, когда оно содержит ровно по одной вершине из каждой минимальной компоненты сильной связности и не содержит других вершин.*

Доказательство. Каждая вершина достижима из любой вершины какой-то минимальной компоненты сильной связности. Действительно, каждая вершина либо лежит в минимальной компоненте и тогда достижима из любой вершины этой компоненты, так как любые две вершины одной компоненты взаимно достижимы, либо лежит в компоненте, которая достижима из некоторой минимальной компоненты и тогда достижима из любой вершины этой минимальной компоненты.

Никакая вершина из минимальной компоненты не достижима ни из какой вершины, не лежащей в этой компоненте. По этой причине в каждой базе должна быть хотя бы одна вершина из каждой минимальной компоненты. ∎

В частности, каждая база содержит все источники и не содержит стоков, которые не являются источниками.

3 ДЕРЕВЬЯ

В этом разделе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель.

3.1 Определения дерева

Определение 3.1.1 (дерева). *Деревом называется связный граф без циклов.*

Теорема 3.1 (об остове графа). *Из произвольного связного графа удалением рёбер можно получить дерево.*

Полученное дерево называется *остовом* этого графа.

Для доказательства теоремы докажем три леммы.

Лемма 3.2. *Выбрасыванием рёбер из каждого пути, не являющегося циклом, можно получить элементарный путь, соединяющий те же вершины.*

Из каждого простого цикла выбрасыванием рёбер можно получить элементарный цикл, соединяющий те же вершины.

Если граф содержит цикл, то он содержит и простой цикл.

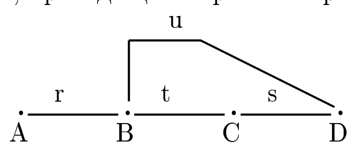
Доказательство. Если из пути выбросить его начальную или конечную часть, то получится путь. Рассмотрим путь наименьшей длины, соединяющий те же вершины. Если в нем внутренняя вершина совпадает с концевой, то имеется более короткий путь, соединяющий те же вершины, а если совпадают две внутренние вершины, а концы пути различны и отличны от внутренних вершин, то можно удалить часть пути, соединяющую эти совпадающие вершины. Для этого выберем первую внутреннюю вершину, для которой есть совпадающая внутренняя вершина, найдем последнюю вершину пути, совпадающую с этой внутренней вершиной, и выбросим отрезок пути от первой до последней с ней совпадающей. Следующее после выброшенного отрезка ребро отлично от ребра, находящегося перед выброшенным отрезком.

Выберем в цикле такой отрезок, в котором внутренние вершины не повторяются и отличны от концов отрезка, а концы отрезка одинаковы. Этот отрезок будет элементарным циклом. ∎

Не верно, что из цикла выбрасыванием ребер можно получить цикл, соединяющий те же вершины. Например, из цикла

$$A, r, B, t, C, s, D, u, B, r, A$$

нельзя получить цикл, проходящий через A в графе:



Ребро графа называется *циклическим*, если оно входит в какой-то простой цикл. Остальные рёбра называются *ациклическими*.

Лемма 3.3 (о циклическом ребре). *После удаления циклического ребра из связного графа этот граф остаётся связным.*

Доказательство. Надо доказать, что любые две вершины связаны путём в полученном графе. В начальном графе они связаны элементарным путём. Если этот путь не проходит через выброшенное ребро, он останется путём и в полученном графе. Пусть выброшено ребро r с концами A и B. Пусть это ребро входит в простой цикл

$$A, r, B, r_1, A_1, \ldots, r_s, A.$$

Заменим в пути, связывающим рассматриваемые вершины, выброшенное ребро на путь

$$A, r_s, \ldots, A_1, r_1, B.$$

Получим путь в полученном графе, связывающий рассматриваемые вершины. ∎

Лемма 3.4 (об ациклическом ребре). *После удаления ациклического ребра из связного графа этот граф перестаёт быть связным.*

Доказательство. Если бы в полученном графе концы выброшенного ребра связывались каким-то элементарным путём, то добавив к нему выброшенное ребро, мы получили бы простой цикл, а выброшенное ребро было бы циклическим. ∎

Доказательство теоремы 3.1. Если в графе есть циклы, то есть и простые циклы. Выбросив циклическое ребро, мы получим связный граф с меньшим числом рёбер. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока в графе есть циклы. Так как в графе без рёбер циклов нет, то процесс заканчивается и в результате получается дерево. ∎

Теорема 3.5 (о путях в дереве). *В дереве для любой пары различных вершин существует один и только один связывающий их элементарный путь.*

Если в связном графе для любых двух различных вершин существует один и только один соединяющий эти вершины элементарный путь, то этот граф не имеет циклов и, значит, является деревом.

Доказательство. Пусть есть два различные элементарные пути, соединяющие те же вершины. Если эти два пути имеют общую внутреннюю вершину, то можно рассмотреть более короткие пути. Если они не имеют общих внутренних вершин, то проходя сначала первый путь, а потом второй в обратном порядке, мы получим простой цикл.

Если в графе есть элементарный цикл, то для любых двух его различных верщин существует два различных соединяющих эти вершины элементаных пути. ∎

Предложенное определение дерева является денотационным (описательным). Но можно предложить и операционное определение.

Граф с выделенной вершиной называется *Д-графом* тогда и только тогда, когда он либо имеет одну вершину и не имеет ни одного ребра, либо получается из конечного числа Д-графов без попарно общих вершин и без попарно общих рёбер добавлением новой вершины, которая будет его выделенной вершиной, и добавлением новых ребер, соединяющих новую вершину с выделенными вершинами заданных Д-графов. Во втором случае будем говорить, что этот Д-граф получается *соединением Д-графов.* Выделенная вершина называется *корнем Д-графа.*

Теорема 3.6 (рекурсивное определение дерева). *Граф является деревом тогда и только тогда, когда после объявления произвольной его вершины выделенной он становится Д-графом.*

Доказательство. Пусть граф после выделения вершины становится Д-графом. Индукцией по числу его элементов докажем, что он связен и не имеет циклов.

В самом деле, это верно для графа с одной вершиной и без рёбер. Если это верно для каких-то Д-графов, из которых рассматриваемый Д-граф получается соединением, то любые две его различные вершины либо лежат в одном из соединяемых Д-графов и тогда имеют единственный соединяющий их элементарный путь, либо лежат в разных соединяемых Д-графах и тогда единственный соединяющий эти вершины элементарный путь получается объединением элементарных путей из рассматриваемой вершины в корень соединяемого Д-графа, из этого корня в корень нового Д-графа, из него в корень другого соединяемого Д-графа и из этого корня во вторую вершину.

Из этого и теоремы 3.5 следует, что каждый Д-граф является деревом с выделенной вершиной.

Выделим теперь в дереве одну вершину и назовём её корнем. Расстоянием вершины этого графа от корня назовем длину элементарного пути из этой вершины в корень. Скажем, что вершина расположена на уровне i, если её расстояние от корня равно i.

Каждая вершина уровня $i+1$ смежна с одной и только одной вершиной уровня i, называемой предком рассматриваемой вершины уровня $i+1$. Для вершины уровня i смежная с ней вершина уровня $i+1$ называется её непосредственным потомком.

Рассмотрим непосредственные потомки корня. Рассмотрим для каждого такого потомка все вершины дерева, элементарный путь из которых в корень дерева проходит через этот потомок. Если оставить только рёбра, концы которых являются такими вершинами, то получим связный граф без циклов.

Полученные таким образом графы не имеют общих вершин и рёбер. Используя индукцию по числу вершин дерева, можно считать, что эти графы являются Д-деревьями, корнями которых являются рассматриваемые непосредственные потомки корня. Это доказывает, что дерево с выделенной вершиной является Д-графом. ∎

Теорема 3.7 (о числе вершин дерева). *Связный граф тогда и только тогда является деревом, когда число вершин в нём на одну больше, чем число рёбер.*

Доказательство. В одновершинном Д-графе это соотношение выполняется. Если оно выполняется в соединяемых Д-графах, то выполняется и в соединении, так как добавляется столько рёбер, сколько графов соединяется, и одна вершина.

Если число вершин на одну больше, чем число рёбер, то циклических рёбер нет, так как после выбрасывания получилось бы дерево, в котором разность между числом вершин и числом рёбер больше единицы. ∎

3.2 Построение минимального остова

В этом подразделе мы рассматриваем связные графы.

Для получения остова рёбра можно удалять разными способами, однако общее число удалённых рёбер не зависит от способа удаления рёбер. Так как в результате чило вершин должно быть на одну больше числа рёбер, число удаленных рёбер равно числу рёбер минус число вершин плюс один.

Рассмотрим теперь случай нагруженного графа, рёбра которого имеют заданные стоимости. В этом случае получаемые остовы не являются равнопровными и можно поставить задачу получения самого дешёвого остова. Сумма стоимостей всех его рёбер не превосходит суммы стоимостей всех рёбер любого другого остова. Самый дешёвый остов ещё называют *минимальным*.

Алгоритм 1 (для построения минимального остова). *Располагаем все рёбра в порядке возрастания их стоимостей (группы рёбер с одинаковой стоимостью можно выписывать в произвольном порядке).*

Выбираем первое ребро и включаем его в остов.

Пусть уже рассмотрены некоторые рёбра и некоторые из них включены в остов.

Рассмотрим следующее ребро. Если вместе с уже включёнными в остов рёбрами оно образует граф без циклов, то включаем его в остов, иначе отбрасываем это ребро и переходим к рассмотрению следующего ребра.

Алгоритм заканчивает работу, когда в остов будет включено столько рёбер, что их число на одно меньше числа вершин.

Теорема 3.8 (о корректности алгоритма 1). *Алгоритм 1 действительно строит минимальный остов.*

Доказательство. Надо доказать, что построенный остов D_1 не дороже любого другого остова. Пусть D_2 — самый дешёвый остов. Индукцией по числу рёбер в D_2, не являющихся рёбрами остова D_1, докажем, что D_1 не дороже D_2. Рассмотрим первое ребро (в порядке их включения в D_1) остова D_1, не входящее в D_2. Путь A и B — концы этого ребра. Эти вершины в дереве D_2 соединены некоторым элементарным путём. Этот путь не может состоять только из рёбер остова D_1, так как тогда в D_1 был бы цикл. Выбросим из D_2 такое ребро этого пути, которое не является ребром остова D_1, и добавим рассматриваемое ребро с концами A и B. Новый остов не дороже остова D_2, но имеет меньше рёбер, не являющихся рёбрами остова D_1. ∎

Приведем пример. Рассмотрим нагруженный граф, заданный таблицей смежности:

$$
\begin{pmatrix}
 & A & B & C & D & E \\
A & 0 & 33 & 16 & 2 & 719 \\
B & 33 & 0 & 3 & 222 & 3 \\
C & 16 & 3 & 0 & 7 & 1 \\
D & 2 & 222 & 7 & 0 & 77 \\
E & 719 & 3 & 1 & 77 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Расположим рёбра в порядке возрастания:

$$(E, C), (A, D), (B, C), (B, E), (C, D), (A, C), (A, B), (D, E), (B, D), (A, E).$$

Их стоимости равны: 1, 2, 3, 3, 7, 16, 33, 77, 222, 719.

Включаем в остов рёбра:

$$(E, C), (A, D), (B, C).$$

Следующее ребро включать нельзя, так как появится цикл. Включаем в остов ребро (C, D). Получаем четыре ребра и заканчиваем построение остова.

4 ПОДГРАФЫ. ЧЁТНЫЕ ГРАФЫ

В этом разделе рассматриваются неориентированные конечные графы без петель. Мы предполагаем, что граф содержит рёбра и, значит, имеет более одной вершины.

4.1 Чётные графы

Определение 4.1.1 (индекса вершины). *Индексом вершины графа называется число всех рёбер, для которых эта вершина является концевой.*

Определение 4.1.2 (чётного графа). *Граф называется чётным, если индекс каждой его вершины чётен.*

Теорема 4.1 (Эйлера о чётных графах). *Связный граф является чётным тогда и только тогда, когда существует простой цикл, проходящий через все рёбра графа.*

Доказательство. В простом цикле индекс каждой вершины чётен.

Пусть в связном графе индекс каждой вершины чётен.

Выберем произвольную вершину. Так как граф связен, существует ребро, для которого эта вершина является концевой. Рассмотрим другой конец этого ребра. Так как его индекс чётен, существует другое ребро с концом в этой вершине. Рассмотрим другой конец этого ребра и так далее. Выбирая таким образом каждый раз новое ребро и используя чётность индекса каждой вершины, мы через какое-то число шагов вернёмся в вершину, выбранную первой. Либо при этом будут пройдены все рёбра, либо одно из непройденных рёбер имеет одну из пройденных вершин концевой. Если бы это было не так, граф не был бы связным, так как непройденные вершины не были бы достижимы из пройденных.

В первом случае граф является эйлеровым. Во втором случае продолжим построение, выбирая это непройденное ребро и его непройденный конец.

Это доказывает, что связный чётный граф является объединением простых циклов без общих рёбер, в котором каждый следующий цикл имеет общую вершину с объединением предыдущих. Предполагая, что объединение предыдущих циклов является простым циклом, получаем, что это объединение вместе с рассматриваемым циклом тоже является простым циклом (обход надо начать с общей вершины). ∎

4.2 Подграфы

Определение 4.2.1 (подграфа). *Граф, вершинами которого являются все вершины заданного графа, а рёбрами которого являются некоторые рёбра заданного графа, называется подграфом заданного графа.*

Определение 4.2.2 (суммы подграфов). *Рассмотрим два подграфа некоторого графа. Суммой этих подграфов назовём такой подграф, что ребро графа является ребром суммы тогда и только тогда, когда это ребро является ребром одного из рассматриваемых подграфов и не является ребром другого из рассматриваемых подграфов.*

Из определения следует, что сложение подграфов коммутативно и ассоциативно, а сумма подграфа с самим собой не содержит рёбер. Подграф без рёбер называется пустым. Сумма пустого подграфа с любым подграфом G даёт этот подграф G. Говорят, что множество подграфов с этой операцией сложения образует векторное пространство над полем вычетов по модулю 2. Сам граф тоже является подграфом этого графа. Этот подграф называется полным.

Теорема 4.2 (о сумме чётных подграфов). *Сумма чётных подграфов является чётным подграфом.*

Доказательство. Индекс вершины в сумме равен сумме индексов этой вершины в суммируемых графах минус удвоенное число рёбер, которые имеют эту вершину в качестве конца и которые являются как рёбрами первого слагаемого, так и рёбрами второго. ∎

Подпространством пространства подграфов называется каждое такое множество подграфов, что сумма любых двух подграфов из этого множества снова принадлежит этому множеству.

Таким образом, чётные подграфы образуют подпространство пространства всех подграфов.

Базисом подпространства называется каждое такое его подмножество, что каждый подграф из этого подпространства единственным образом представим в виде суммы попарно различных элементов этого подмножества. При этом сумма пустого множества подграфов считается пустым подграфом. Число элементов базиса называется *размерностью* подпространства.

По теореме Эйлера, в дереве нет непустых четных подграфов, так как в дереве нет циклических рёбер. Поэтому размерность подпространства чётных подграфов в дереве равна 0, а базис этого подпространства пуст.

Как известно, для построения из произвольного связного графа дерева используется процедура выбрасывания рёбер. Число выброшенных рёбер при этом равно числу рёбер минус число вершин плюс один.

Выброшенные рёбра называются *хордами.* Хорды, как мы знаем, не определяются однозначно. После выбрасывания всех хорд получается дерево, называемое остовом графа.

Теорема 4.3 (о размерности и базисе подпространства чётных подграфов). *Для каждой хорды h рассмотрим единственный элементарный путь в остове, соединяющий концы этой хорды. Рёбра этого пути вместе с хордой образуют чётный подграф T_h, так как образуют элементарный цикл.*

Множество всех полученных подграфов T_h для всех хорд образует базис в подпространстве чётных подграфов. Следовательно, размерность этого подпространства равна числу хорд.

Доказательство. Ясно, что различные суммы полученных подграфов содержат различные хорды и поэтому различны.

Рассмотрим произвольный чётный подграф. Он либо пуст, либо содержит хорды, так как в дереве не может быть чётных подграфов. Для каждой хорды h, являющейся ребром рассматриваемого подграфа, прибавим к рассматриваемому подграфу полученный подграф T_h, содержащий эту хорду.

В полученной сумме хорды не являются рёбрами. Значит, эта сумма является чётным подграфом остова. Но остов не содержит непустых чётных подграфов. Значит, эта сумма пуста и рассматриваемый подграф равен сумме всех T_h для всех таких хорд h, которые являются его рёбрами. ∎

5 НАГРУЖЕННЫЕ ГРАФЫ

В этом разделе мы рассматриваем ориентированные конечные нагруженные графы без петель. Мы предполагаем, что граф сильно связен (любая вершина достижима из любой другой) и содержит более одной вершины.

Граф задаётся таблицей смежности. Для простоты мы предполагаем, что каждая вершина смежна с любой другой отличной от неё вершиной. Таким образом, в таблице смежности по диагонале стоят нули, а остальные элементы являются положительными целыми числами. Через $\rho(A, B)$ обозначается стоимость ребра, идущего из A в B.

Напомним, что стоимостью пути называется сумма стоимостей (весов) всех входящих в этот путь рёбер. Путь с наименьшей стоимостью мы называем самым дешёвым. Мы обсуждаем вопрос построения самого дешёвого пути из первой заданной вершины во вторую. Стоимость этого самого дешёвого пути мы называем кратчайшим расстоянием.

Для решения этого вопроса предлагается алгоритм Дейкстры. В этом алгоритме вершинам приписываются неотрицательные целые числа в качестве меток. Метка задаёт верхнюю границу для кратчайшего расстояния помеченной вершины от выбранной. Метки бывают временными и постоянными. Временные метки уменьшаются в ходе работы алгоритма до тех пор, пока не становятся постоянными. На каждом шаге работы алгоритма точно одна из временных меток становится постоянной. Постоянная метка равна кратчайшему расстоянию помеченной вершины от выбранной. Метка вершины A обозначается через $\mu(A)$.

Кроме того вершинам приписываются пути из выбранной вершины в рассматриваемую. Если меняется метка, то меняется и приписанный путь.

Алгоритм 2 (алгоритм Дейкстры). *Алгоритм работает по шагам. Выберем вершину C.*

Шаг 0. *Выбранная вершина C получает метку 0. Эта метка объявляется постоянной. Выбранный путь из C в C не содержит рёбер. Каждая другая вершина B в качестве временной метки получает стоимость ребра, идущего из выбранной вершины C в помечаемую вершину B. Выбранный путь из C в B состоит из одного этого ребра.*

Шаг *i для любого $i > 0$. Среди вершин с временными метками найти вершины с наименьшей меткой. Среди таких вершин взять одну. Метку этой вершины A объявить постоянной. Если все вершины получили постоянные метки, закончить работу алгоритма.*

Метки оставшихся вершин с временными метками заменить по следующему правилу.

Если $\rho(A, B) + \mu(A)$ не меньше $\mu(B)$, то метку B не меняем.

Если же $\rho(A, B) + \mu(A)$ меньше $\mu(B)$, то метку вершины B меняем на $\rho(A, B) + \mu(A)$. Выбранный путь из C в B меняем на выбранный путь из C в A, дополненный ребром из A в B.

Переходим на шаг $i + 1$.

Таким образом, сначала выполняется инициализация (шаг 0), а потом выполняются шаги 1, 2, ... до тех пор, пока ещё есть временные метки.

Теорема 5.1 (теорема о корректности алгоритма Дейкстры). *Постоянная метка вершины A равняется кратчайшему расстоянию этой вершины A от выбранной вершины C.*

Доказательство. Легко заметить, что метка вершины равна стоимости выбранного пути из C в эту вершину. Кроме того, для вершины с постоянной меткой выбранный путь проходит через вершины с постоянными метками, полученными на предыдущих шагах алгоритма.

Покажем, что для вершины A с постоянной меткой выбранный путь α из C в A является самым дешёвым.

Доказывать это будем индукцией по номеру шага алгоритма, на котором вершина A получает постоянную метку.

Путь имеется более дешёвый путь β из C в A.

Если путь β не проходит только через вершины с постоянными метками на шаге, на котором A получает постоянную метку, пусть D — первая вершина этого пути, которая не получила постоянной метки до рассматриваемого шага, а E — предыдущая вершина.

Тогда
$$\mu(E) + \rho(E, D) \geqslant \mu(D) \geqslant \mu(A).$$

Тем более стоимость пути β не меньше стоимости пути α.

Значит, путь β проходит только через вершины, получившие постоянные метки до рассматриваемого шага.

Рассмотрим предпоследние вершины B_1 и B_2 путей α и β. Так как
$$\mu(A) \leqslant \mu(B_2) + \rho(B_2, A),$$
то стоимость пути β не может быть меньше стоимости пути α. ∎

Приведём пример.

С помощью алгоритма Дейкстры построим самый дешёвый путь из вершины A в вершину E в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рёбер заданы таблицей:

	A	B	C	D	E
A	0	33	16	2	719
B	170	0	36	222	3
C	1	101	0	7	1
D	22	11	46	0	77
E	54	1	16	111	0

Шаг 0.

A	B	C	D	E
0	33	16	2	719

Шаг 1.
Постоянную метку получает D. Выбранный путь есть (A, D).

A	B	C	D	E
0	13	16	2	79

Шаг 2.
Постоянную метку получает B. Выбранный путь есть $(A, D), (D, B)$.

A	B	C	D	E
0	13	16	2	16

Шаг 3.
Постоянную метку получает C. Выбранный путь есть (A, C).

A	B	C	D	E
0	13	16	2	16

Шаг 4.
Постоянную метку получает E. Выбранный путь есть $(A, D), (D, B), (B, E)$.

A	B	C	D	E
0	13	16	2	16

Предметный указатель