Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Северный (Арктический)
федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА ЛОГИКИ
(Алгебра высказываний)

Методические указания к выполнению
самостоятельной и контрольной работы

Архангельск
2011

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
методической комиссией Института строительства и архитектуры
ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»
19 ноября 2010 г.

Составитель

Л.В. Балабко, ст. преподаватель

Рецензент

А.Г. Тутыгин, канд. физ.-мат. наук, доц.

УДК 519.1 (075.8)

Дискретная математика. Алгебра логики (Алгебра высказываний): метод. указания к выполнению самостоят. и контрол. работы / сост. Л.В. Балабко. – Архангельск: Изд-во ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова», 2011. – 42 с.

Представлен основной теоретический материал по теме «Алгебра логики». Приведены подробные решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов очной формы обучения всех специальностей, изучающих курс математики.

Введение

Математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, то есть путем законов человеческого мышления. Изучение законов человеческого мышления является предметом логики.

Как самостоятельная наука логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384–322 г. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться формальной или Аристотелевой логикой. Формальная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий. Естественно, что развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и потребовало дальнейшего ее развития.

Впервые в истории идеи о построении логики на математической основе были высказаны немецким математиком Г. Лейбницем (1646–1716) в конце XVII века. Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по особым правилам. Это позволит всякое рассуждение заменить вычислением: «Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления».

Первая реализация идеи Лейбница принадлежит английскому ученому Д. Булю (1815–1864). Он создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к появлению алгебры высказываний. Введение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как и введение буквенных обозначений для математики. Именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания новой науки – математической логики.

Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, и это, конечно, расширило область логических исследований. К концу

XIX столетия актуальное значение для математики приобрели вопросы обоснования ее основных понятий и идей. Эти задачи имели логическую природу и, естественно, привели к дальнейшему развитию математической логики. В этом отношении показательны работы немецкого математика Г. Пеано (1858–1925), который применил математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

Одной из основных причин развития математической логики является широкое распространение аксиоматического метода в построении различных математических теорий, в первую очередь геометрии, а затем арифметики, теории групп и т.д. В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий и отношения между ними. Эти понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории – аксиомы. Все дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом. Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом в геометрии.

В настоящее время наряду с такими классическими разделами математики, как математический анализ, дифференциальные уравнения, в учебных планах специальности «Прикладная математика» и многих других технических и экономических специальностей появились разделы по математической логике, алгебре, комбинаторике и теории графов; цель данной работы – научить студентов основам математической логики.

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Высказывания. Операции над высказываниями

Высказывание – это всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, при этом непременно истинное или ложное.

В дальнейшем высказывания обозначены малыми латинскими буквами: a, b, c, …, x, y, z. Если высказывание x истинно, то $x \equiv 1$, а если ложно, то $x \equiv 0$.

Высказывания:

- *простые* (элементарные) – представляют собой одно утверждение;
- *сложные* (составные) – получены из простых с помощью грамматических связок.

Логические операции над высказываниями и их логические значения можно представить в виде таблиц, которые называются таблицами истинности.

Логические операции:

1) *отрицание* (читается «не x»):

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

2) *конъюнкция* (логическое умножение, читается «x и y»):

x	y	$x \wedge y$ ($x \& y$)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3) *дизъюнкция* (логическое сложение, читается «x или y»):

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) *импликация* (читается «если x, то y»):

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) *эквиваленция* (читается «x тогда и только тогда, когда y»):

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2. Формулы логики высказываний

Формула логики высказываний – это сложное высказывание, которое получено из простых высказываний, связанных между собой логическими операциями.

Формулы алгебры логики обозначаются большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$.

Тождественно истинная формула A – это формула, которая всегда истинна ($A \equiv 1$).

Тождественно ложная формула B – это формула, которая всегда ложна ($B \equiv 0$).

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: отрицание выполняется раньше, чем остальные операции; конъюнкция выполняется раньше, чем дизъюнкция, импликация, эквиваленция; дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквиваленция. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же самое, таблица содержит 2^n строк.

Пример 1. Определить, какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) Студенты университета.

б) $2 + 5 = 8$.

в) Сегодня плохая погода.

г) Всякий человек имеет сестру.

д) Для всех действительных чисел x и y верно равенство $xy = yx$.

е) Треугольник ABC равен треугольнику $A^*B^*C^*$.

Решение:

а) Предложение не является высказыванием, так как оно ничего не утверждает о студентах.

б) Предложение является высказыванием, так как мы можем сказать, что оно ложно.

в) Предложение не является высказыванием, так как мы не можем определить, истинно оно или ложно, потому что не знаем, где и когда это должно произойти.

г) Предложение является высказыванием, так как оно принимает ложное значение.

д) Предложение является высказыванием, так как оно принимает истинное значение.

е) Предложение не является высказыванием, так как мы не можем определить, истинно оно или ложно, потому что не знаем, о каких именно треугольниках идет речь.

Пример 2. Определить значение истинности высказываний:

а) 7 является простым числом, или 19 является простым числом.

б) $2 + 3 = 6$, и Архангельск расположен на Северной Двине.

в) Если 12 делится на 6, то 12 делится на 4.

г) 11 делится на 3 тогда и только тогда, когда 20 делится на 5.

Решение:

а) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим X – 7 является простым числом, а Y – 19 является простым числом. Имеем, что $X \equiv 1$, $Y \equiv 1$. Составим формулу $X \vee Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \vee Y \equiv 1$.

б) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим X – $2 + 3 = 6$, а Y – Архангельск расположен на Северной Двине. Имеем, что $X \equiv 0$, $Y \equiv 1$. Составим формулу $X \wedge Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \wedge Y \equiv 0$.

в) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим X – 12 делится на 6, а Y – 12 делится на 4. Имеем, что $X \equiv 1$, $Y \equiv 1$. Составим формулу $X \to Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \to Y \equiv 1$.

г) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим X – 11 делится на 3, а Y – 20 делится на 5. Имеем, что $X \equiv 0$, $Y \equiv 1$. Составим формулу $X \leftrightarrow Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \leftrightarrow Y \equiv 0$.

Пример 3. Определить, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить логическое значение высказывания. Если достаточно, то указать это значение:

а) $(A \to B) \to C$, если $C \equiv 1$;

б) $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee C)$, если $A \equiv 0$.

Решение:

а) В данной формуле $A \to B$ может принимать логическое значение либо 1, либо 0. Получаем 2 случая: 1) $1 \to 1$; 2) $0 \to 1$. В обоих случаях импликация принимает логическое значение 1. Таким образом, приведенных сведений достаточно, чтобы сказать, что формула $(A \to B) \to C \equiv 1$.

б) Логическое значение формулы зависит от логических значений B и C. Пусть значение $B \equiv 1$, тогда $A \wedge B \equiv 0$. Рассмотрим следующие случаи: 1) если $C \equiv 1$, то $A \vee C \equiv 1$; 2) если $C \equiv 0$, то $A \vee C \equiv 0$. Подставим данные логические значения в исходную формулу и получим: $0 \leftrightarrow 1$ или $0 \leftrightarrow 0$. В первом случае формула $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee C) \equiv 0$, а во втором $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee C) \equiv 1$. Можно сделать вывод, что приведенных сведений недостаточно, чтобы установить логическое значение всей формулы.

Пример 4. Составить таблицы истинности для следующих формул. Установить, какие из них являются тождественно истинными, тождественно ложными:

а) $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$;

б) $A \wedge (B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$.

Решение. Построим таблицы истинности для данных формул:

а) $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \to B$	$A \to \overline{B}$	$(A \to \overline{B}) \to \overline{A}$	$(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Так как при всех наборах значений A и B данная формула принимает истинные значения, то она является тождественно истинной.

б) $A \wedge (B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$	$A \wedge (B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0

Так как при всех наборах значений A и B данная формула принимает ложные значения, то она является тождественно ложной.

1.3. Равносильные формулы логики высказываний

Две формулы алгебры логики A и B называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний ($A \equiv B$).

Важнейшие равносильности можно разбить на три группы:

I. *Основные равносильности*:

1. $A \wedge A \equiv A (A \wedge A \wedge \ldots \wedge A \equiv A)$.
2. $A \vee A \equiv A (A \vee A \vee \ldots \vee A \equiv A)$.
3. $A \wedge 1 \equiv A$.
4. $A \vee 1 \equiv 1$.
5. $A \wedge 0 \equiv 0$.
6. $A \vee 0 \equiv A$.
7. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$.
8. $A \vee \overline{A} \equiv 1$.
9. $\overline{\overline{A}} \equiv A$.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$.
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$.

II. *Равносильности, выражающие одни логические операции через другие*:

1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

2. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$.

3. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

4. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$.

5. $A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.

6. $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.

III. *Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики*:

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$.
2. $A \vee B \equiv B \vee A$.
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
4. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Используя данные равносильности, можно часть формулы алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования называются равносильными, они применяются для доказательства равносильностей, приведения формул к заданному виду, упрощения формул.

Пример 1. Упростить формулу $A \equiv (x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{x})$.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:

$$A \equiv (x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{x}) \equiv \overline{x \to y} \vee (\overline{x \to \bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \vee$$

$$\vee (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee ((x \wedge y) \vee \bar{x}) \equiv ((x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)) \vee \bar{x} \equiv$$

$$\equiv (x \wedge (\bar{y} \vee y)) \vee \bar{x} \equiv (x \wedge 1) \vee \bar{x} \equiv x \vee \bar{x} \equiv 1.$$

После упрощения получили тождественно истинную формулу.

Пример 2. Доказать равносильность $\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}} \equiv \overline{z \to x} \vee \overline{z \to y}$.

Решение. Доказать равносильность формул можно с помощью равносильных преобразований. Для этого упрощают правую и левую части равенства отдельно.

Левая часть: $\overline{(x\wedge y)\vee \bar{z}} \equiv \overline{x\wedge y}\wedge \bar{\bar{z}} \equiv (\bar{x}\vee \bar{y})\wedge z$.

Правая часть: $\overline{z\to x}\vee \overline{z\to y} \equiv \overline{\bar{z}\vee x}\vee \overline{\bar{z}\vee y} \equiv (z\wedge \bar{x})\vee$

$$\vee(z\wedge \bar{y}) \equiv z\wedge(\bar{x}\vee \bar{y}).$$

После равносильных преобразований получили одинаковые формулы. Равносильность доказана.

Пример 3. С помощью таблиц истинности доказать равносильность: $\overline{(x\wedge y)\vee \bar{z}} \equiv \overline{z\to x}\vee \overline{z\to y}$.

Решение. Построим таблицы истинности для каждой формулы в правой и левой частях.

Левая часть:

x	y	z	$\bar{z}$	$x\wedge y$	$(x\wedge y)\vee \bar{z}$	$\overline{(x\wedge y)\vee \bar{z}}$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0

Правая часть:

x	y	z	$z\to x$	$\overline{z\to x}$	$z\to y$	$\overline{z\to y}$	$\overline{z\to x}\vee \overline{z\to y}$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0

На одинаковых наборах переменных x, y, z формулы принимают одни и те же значения. Равносильность доказана.

Пример 4. С помощью равносильных преобразований доказать, что формула $A\equiv(x\to y)\wedge(x\to \bar{y})\wedge x$ является тождественно ложной.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:

$$A \equiv (x \to y) \wedge (x \to \bar{y}) \wedge x \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge x \equiv (\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y})) \wedge$$

$$\wedge\, x \equiv (\bar{x} \vee 1) \wedge x \equiv x \wedge \bar{x} \equiv 0.$$

Доказали, что формула A – тождественно ложная.

1.4. Совершенные нормальные формы

1.4.1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Элементарной конъюнкцией высказываний называется конъюнкция этих высказываний и их отрицаний.

Дизъюнктивной нормальной формой формулы A (ДНФ A) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Для любой формулы путем равносильных преобразований можно получить ДНФ, причем не единственную.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы A (СДНФ A) называется дизъюнктивная нормальная форма формулы A, удовлетворяющая свойствам совершенства:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию.

2. Все логические слагаемые формулы различны.

3. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Теорема. Если формула A не является тождественно ложной, то она может быть представлена в СДНФ A, и притом единственным образом.

Существует два способа нахождения СДНФ A.

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из ДНФ;

- если в полученной ДНФ входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x, то используем равносильность $B \equiv B \wedge (x \vee \bar{x}) \equiv (B \wedge x) \vee (B \wedge \bar{x})$ и получаем две элементарных конъюнкции;

- если в ДНФ входят две одинаковые элементарные конъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

2-й способ – с помощью таблиц истинности: выделяем строки, где формула принимает значение 1; составляем дизъюнкцию конъюнкций при условии, что если переменная входит в конъюнкцию со значением 1, то записываем эту переменную, если со значением 0, то ее отрицание. Получаем СДНФ.

1.4.2. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Элементарной дизъюнкцией высказываний называется дизъюнкция этих высказываний и их отрицаний.

Конъюнктивной нормальной формой формулы A (КНФ A) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы A (СКНФ A) называется конъюнктивная нормальная форма формулы A, удовлетворяющая условиям:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию.

2. Все логические слагаемые формулы различны.

3. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Теорема. Если формула A не является тождественно истинной, то она может быть представлена в СКНФ A, и притом единственным образом.

Существует два способа нахождения СКНФ A.

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из КНФ;

- если в полученной КНФ входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x, то используем равносильность $B \equiv B \vee (x \wedge \bar{x}) \equiv (B \vee x) \wedge (B \vee \bar{x})$ и получаем две элементарных дизъюнкции;

- если в КНФ входят две одинаковые элементарные дизъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

2-й способ – с помощью таблиц истинности: выделяем строки, где формула принимает значение 0; составляем конъюнкцию дизъюнкций при условии, что если переменная входит в дизъюнкцию со значением 0, то записываем эту переменную, если со значением 1, то ее отрицание. Получаем СКНФ.

Пример 1. Следующую формулу привести к СДНФ двумя способами: $A \equiv (x \vee \bar{z}) \to (y \to z)$.

Решение:

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

$$A \equiv (x \vee \bar{z}) \to (y \to z) \equiv \overline{x \vee \bar{z}} \vee (\bar{y} \vee z) \equiv (\bar{x} \wedge z) \vee \bar{y} \vee z \equiv ДНФА.$$

Произведем преобразование элементарных конъюнкций:

первой: $\bar{x} \wedge z \equiv (\bar{x} \wedge z) \wedge (y \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \wedge z \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z \wedge \bar{y})$;

второй: $\bar{y} \equiv \bar{y} \wedge (x \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{z}) \equiv (\bar{y} \wedge x \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge x \wedge \bar{z}) \vee$
$\vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge \bar{z})$;

третьей: $z \equiv z \wedge (x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y}) \equiv (z \wedge x \wedge y) \vee (z \wedge x \wedge \bar{y}) \vee$
$\vee (z \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (z \wedge \bar{x} \wedge \bar{y})$.

Получили формулу A в виде

$$A \equiv (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge x \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge x \wedge \bar{z}) \vee$$
$$\vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee$$
$$\vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z});$$

$$СДНФA \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee$$
$$\vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$$

2-й способ – по таблице истинности:

x	y	z	$\bar{z}$	$x \vee \bar{z}$	$y \to z$	$(x \vee \bar{z}) \to (y \to z)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Выделяем строки, где формула принимает значение 1, составляем дизъюнкцию конъюнкций и получаем СДНФ:

$$СДНФA \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$$

Пример 2. Следующую формулу привести к *СКНФ* двумя способами: $A \equiv (x \vee \bar{z}) \to (y \to z)$.

Решение:

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

$$A \equiv (x \vee \bar{z}) \to (y \to z) \equiv \overline{x \vee \bar{z}} \vee (\bar{y} \vee z) \equiv (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \vee z) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (z \vee \bar{y} \vee z) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{y} \vee z) \equiv КНФA.$$

Преобразуем вторую элементарную дизъюнкцию:

$$(\bar{y} \vee z) \equiv (\bar{y} \vee z) \vee (x \wedge \bar{x}) \equiv (\bar{y} \vee z \vee x) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{x}).$$

Формула A имеет вид

$$A \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{y} \vee z) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z);$$

$$СКНФA \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z).$$

2-й способ – по таблице истинности:

x	y	z	$\bar{z}$	$x \vee \bar{z}$	$y \to z$	$(x \vee \bar{z}) \to (y \to \bar{z})$
1	1	1	0	1	1	1
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Для значений формулы, равных 0, составляем конъюнкцию дизъюнкций и получаем СКНФ:

$СКНФA \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$.

Пример 3. Найти СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей: а) одно высказывание, б) два высказывания.

Решение:

а) Любую тождественно истинную формулу логики высказываний можно представить в виде: $F \equiv 1 \equiv x \vee \bar{x}$. Таким образом, $СДНФF \equiv x \vee \bar{x}$.

б) Дополним каждое выражение в СДНФ переменной y. Получим $СДНФF \equiv x \vee \bar{x} \equiv (x \wedge (y \vee \bar{y})) \vee (\bar{x} \wedge (y \vee \bar{y})) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee$
$\vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Пример 4. По таблице истинности построить СДНФ F и найти равносильную и более простую форму:

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0
1	**0**	**1**	**1**
1	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Решение. Найдем СДНФ:

$СДНФF \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$.

Далее упростим ее с помощью равносильных преобразований:
$СДНФF \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv ((y \wedge z) \wedge$
$\wedge (x \vee \bar{x})) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv (y \wedge z \wedge 1) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv (y \wedge z) \vee$
$\vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv z \wedge (y \vee (x \wedge \bar{y})) \equiv z \wedge ((y \vee x) \wedge (y \vee \bar{y})) \equiv z \wedge$
$\wedge ((y \vee x) \wedge 1) \equiv z \wedge (y \vee x)$.

1.5. Логическое следование формул. Решение логических задач

Формула $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется ***логическим следствием*** формул $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, ..., $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$, если формула $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы $F_1(X_1, X_2, ..., X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Чтобы выявить логическое следование формул $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\ldots$, $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $H(X_1, X_2, ..., X_n)$, составляют для них таблицы истинности. Если в какой-то строке таблицы все формулы $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\ldots$, $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$ принимают значение 1, то в этой строке непременно и формула $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ принимает значение 1. Это и будет означать, что $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формул $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\ldots$, $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$.

1.5.1. Необходимые и достаточные условия

Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, то высказывание Y называется *необходимым условием* для высказывания X (другими словами, если X истинно, то Y с необходимостью должно быть также истинным), а высказывание X называется *достаточным условием* для высказывания Y (другими словами, для того чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X).

1.5.2. Правильные и неправильные умозаключения

Разработана теория, позволяющая отвечать на вопрос, является ли та или иная формула логическим следствием данной совокупности формул или нет, а также находить все логические следствия из данных формул. Применяя ее к рассуждениям, представляющим собой последовательности высказываний (суждений), можно определить, правильно рассуждение или нет, т.е. правильное или неправильное умозаключение сделано с помощью данного рассуждения из данных посылок.

1.5.3. Решение логических задач

Суть решения состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде логической функции. При этом учитывают, что каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным и, значит, его можно обозначить логической переменной. В дальнейшем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу, что, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи, но иногда все-таки требуется применять логические рассуждения.

Пример 1. По таблице истинности нескольких формул определить, какие из них следуют из каких:

X	Y	Z	$(X \wedge Y) \to \overline{Z}$	$\overline{Y}$	$X \to Z$	$\overline{X \wedge Y}$
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Решение. Из таблицы видно, что имеется только одна строка (3-я), в которой первые три формулы принимают значение 1. В этой строке формула $\overline{Y}$ также принимает значение 1. Следовательно, $\overline{Y}$ является логическим следствием формул X, Z, $(X \wedge Y) \to \overline{Z}$.

Аналогично делаем вывод, что $\overline{X \wedge Y}$ является логическим следствием формул $(X \wedge Y) \to \overline{Z}$, $X \to Z$.

Пример 2. Найти необходимое и достаточное условие того, что выпуклый четырехугольник является квадратом (A).

Решение. Находим ряд необходимых условий для этого утверждения:

B_1 – диагонали четырехугольника перпендикулярны;

B_2 – диагонали четырехугольника равны;

B_3 – диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.

Ясно, что каждое из утверждений $A \to B_1$, $A \to B_2$, $A \to B_3$ верно.

Анализируем обратные утверждения. Очевидно, неверны следующие из них:

$B_1 \to A$ (ромб, не являющийся квадратом);

$B_2 \to A$ (прямоугольник, не являющийся квадратом);

$B_3 \to A$ (параллелограмм).

Неверны также и следующие утверждения:

$(B_1 \wedge B_2) \to A$; $(B_1 \wedge B_3) \to A$; $(B_2 \wedge B_3) \to A$.

И только соединение (конъюнкция) всех трех необходимых для A условий (B_1, B_2, B_3) дает условие, достаточное для A. Это $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$ – диагонали четырехугольника перпендикулярны, равны и делятся пополам точкой их пересечения. Таким образом, истинно утверждение $(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \to A$. Кроме того, из истинности утверждений $A \to B_1$, $A \to B_2$, $A \to B_3$ вытекает истинность утверждения $A \to (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$.

Итак, необходимым и достаточным условием для A является условие $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$.

Пример 3. Если будет холодно (A), то я надену теплое пальто (B), если рукав будет починен (C). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

Решение. Посылки нашего рассуждения символически записываются следующим образом: $A \to (C \to B)$, $A \wedge \overline{C}$. Следует ли отсюда утверждение $\overline{B}$? Предположим, что высказывание $\overline{B}$ ложно, в то время как все посылки являются истинными высказываниями. Тогда $\overline{B} \equiv 0$, а $B \equiv 1$. Значит, первая посылка $A \to (C \to B)$ действительно истинна, а вторая будет истинной, если A истинно, а C ложно. Таким образом, ситуация, когда все посылки истинны, а высказывание $\overline{B}$ ложно, вполне возможна. Это означает, что высказывание $\overline{B}$ не следует из данных посылок.

Пример 4. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1. Антон был вторым, а Борис пятым.
2. Виктор был вторым, а Денис третьим.
3. Григорий был первым, а Борис третьим.
4. Антон был третьим, а Евгений шестым.
5. Виктор был третьим, а Евгений четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение. Обозначим высказывания зрителей символом X_y, где X – первая буква имени участника турнира, а y – номер места, которое он занял в турнире.

Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний:

$$A_2 \vee Б_5;\ В_2 \vee Д_3;\ Г_1 \vee Б_3;\ A_3 \vee E_6;\ В_3 \vee E_4.$$

Но тогда будет истинной и формула

$$F \equiv (A_2 \vee Б_5) \wedge (В_2 \vee Д_3) \wedge (Г_1 \vee Б_3) \wedge (A_3 \vee E_6) \wedge (В_3 \vee E_4).$$

Путем простых равносильных преобразований легко показать, что $F \equiv Б_5 \wedge В_2 \wedge Г_1 \wedge А_3 \wedge Е_4 \equiv 1$, и значит $Б_5 \equiv 1$; $В_2 \equiv 1$; $Г_1 \equiv 1$; $А_3 \equiv 1$; $Е_4 \equiv 1$, что и дает ответ на вопрос задачи. Автоматически получаем, что Денис был шестым.

Пример 5. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой – малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом ложь. Вот что они утверждали.

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».

Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виновен Браун».

Определить имя старика, мошенника и чиновника и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение. Обозначим буквами *Б*, *Д* и *С* высказывания: виноват Браун, виноват Джон, виноват Смит соответственно. Тогда утверждения, высказанные задержанными, можно записать в виде конъюнкций $Б \wedge \overline{Д}; \overline{Б} \wedge С; Б \wedge \overline{С}$, из которых, по условию задачи, две ложны, а одна истинна.

Таким образом, будет истинной формула

$$F \equiv (Б \wedge \overline{Д}) \vee (\overline{Б} \wedge С) \vee (Б \wedge \overline{С}) \equiv 1.$$

Таблица истинности этой формулы имеет вид:

$Б$	$Д$	$С$	$Б \wedge \overline{Д}$	$\overline{Б} \wedge С$	$Б \wedge \overline{С}$	F
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Отсюда видно, что формула истинна в пяти из восьми случаев. Случай 4 следует исключить из рассмотрения, так как здесь оказываются истинными две конъюнкции, а это противоречит условию задачи. В случаях 2, 3 и 5 оказываются истинными по два высказывания: *Б* и *Д*, *В* и *С*, *Д* и *С* соответственно, что также противоречит условию задачи. Следовательно, справедлив случай 7, то есть преступник – Смит. Он известный мошенник, и оба его высказывания ложны: $Б \wedge \overline{C}$. При этом высказывания *Б* и *Д* ложны.

Значит, истинна пара высказываний Джона, а у Брауна первое высказывание ложно, а второе истинно. Отсюда ясно, что Джон – уважаемый в городе старик, а Браун – малоизвестный чиновник.

2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ (ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ)

2.1. Основные булевы функции, их свойства

Булевой функцией (или функцией алгебры логики) от n аргументов называется любая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n аргументов, заданная на двухэлементном множестве $\{0, 1\}$ и принимающая значение в том же множестве $\{0, 1\}$.

В следующей таблице приведены обозначения и значения основных булевых функций от двух аргументов:

Переменные		Булевы функции							
		Отрицание	Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Эквивалентность	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса	Сложение по модулю два
x	y	$\bar{x}$	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Здесь $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$; $x \downarrow y \equiv \overline{x \vee y}$; $x \oplus y \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$.

Существует точно 2^{2^n} различных булевых функций от n переменных (для двух переменных существует 16 булевых функций).

Свойства булевых функций:

1. $x \cdot \bar{x} \equiv 0$; $x \vee \bar{x} \equiv 1$.

2. $1 \cdot x \equiv x$; $0 \cdot x \equiv 0$; $1 \vee x \equiv 1$; $0 \vee x \equiv x$.

3 $\bar{\bar{x}} \equiv x$.

4. $x \cdot y \equiv y \cdot x$; $x \vee y \equiv y \vee x$.

5. $x(yz) \equiv (xy)z$; $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.

6. $x(y \vee z) \equiv x \cdot y \vee x \cdot z$; $x \vee (y \cdot z) \equiv (x \vee y)(x \vee z)$.

7. $\overline{x \cdot y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$; $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \cdot \bar{y}$.

8. $x(x \vee y) \equiv x$; $x \vee (x \cdot y) \equiv x$.

9. $x \cdot x \equiv x$; $x \vee x \equiv x$.

2.2. Алгебра Жегалкина

Алгебра Жегалкина – это алгебра над множеством двух бинарных булевых функций $(\cdot, \oplus)$ и функции 1.

Для нее справедливы все свойства булевых функций, а также:

$x \oplus y \equiv y \oplus x;$

$x(y \oplus z) \equiv x \cdot y \oplus x \cdot z;$

$x \oplus x \equiv 0;$

$x \oplus 0 \equiv x;$

$\bar{x} \equiv x \oplus 1;$

$x \vee y \equiv x \cdot y \oplus x \oplus y.$

Формула, имеющая вид суммы (по модулю два) произведений, называется ***полиномом Жегалкина***.

Для трех переменных полином Жегалкина имеет вид

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz.$$

Любая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом.

2.3. Классы булевых функций

Система булевых функций называется ***полной***, если любая булева функция является некоторой суперпозицией функций из этой системы. Если же существует булева функция, не представляемая суперпозицией функций из данной системы, то система называется ***неполной***.

Для любой булевой функции справедливо соотношение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 f(1, x_2, ..., x_n)) \vee (\bar{x}_1 f(0, x_2, ..., x_n)).$$

Булева функция называется:

а) ***сохраняющей 0***, если $f(0, 0, ..., 0) = 0$;

б) ***сохраняющей 1***, если $f(1, 1, ..., 1) = 1$.

Булева функция называется ***монотонной***, если она удовлетворяет условию

$$x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, ..., x_n \le y_n \Rightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Булева функция f^* называется ***двойственной*** по отношению к функции f, если $\overline{f^*(x_1, x_2, ..., x_n)} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$.

Булева функция называется ***самодвойственной***, если двойственная к ней функция совпадает с ней.

Функция называется ***линейной***, если она может быть записана в следующем виде: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, где $c \in \{0, 1\}$.

Теорема Поста. Для того чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну функцию:

1) не сохраняющей 0;
2) не сохраняющей 1;
3) не самодвойственную;
4) не линейную;
5) не монотонную.

Принадлежность некоторых элементарных булевых функций к различным классам представлена в таблице:

Функция	P_0	P_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$\bar{x}$	–	–	+	–	+
$x \cdot y$	+	+	–	+	–
$x \vee y$	+	+	–	+	–
$x \rightarrow y$	–	+	–	–	–
$x \leftrightarrow y$	–	+	[illegible]	–	+
$x \mid y$	–	–	–	–	–
$x \downarrow y$	–	–	–	–	–
$x \oplus y$	+	–	–	–	+

Полными системами являются: $\{-, \wedge, \vee\}$; $\{-, \vee\}$; $\{-, \wedge\}$.

Пример 1. Построить таблицу значений для следующей булевой функции: $f(x,y,z)=((x\vee\bar{y})\to z)((x\mid y)\leftrightarrow\bar{z})$.

Решение:

x	y	z	$\bar{y}$	$x\vee\bar{y}$	$(x\vee\bar{y})\to z$	$x\mid y$	$\bar{z}$	$(x\mid y)\leftrightarrow\bar{z}$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

Пример 2. Показать, что $x\vee y\equiv(x\mid x)\mid(y\mid y)$.

Решение. Используя свойство 7, получим

$$x\vee y\equiv\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}.$$

По определению Штриха Шеффера и свойству 9

$$\bar{x}\equiv\bar{x}\vee\bar{x}\equiv x\mid x;$$

$$\bar{y}\equiv\bar{y}\vee\bar{y}\equiv y\mid y.$$

Тогда $x\vee y\equiv\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}\equiv\overline{(x\mid x)(y\mid y)}$.

Используя свойство 3 и определение Штриха Шеффера, получим

$$x\vee y\equiv(x\mid x)\mid(y\mid y).$$

Пример 3. Выяснить, эквивалентны ли формулы $x\to(y\oplus z)$ и $(x\to y)\oplus(x\to z)$.

Решение. Для каждой формулы составим таблицу значений.

$x\to(y\oplus z)$:

x	y	z	$y\oplus z$	$x\to(y\oplus z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

$(x \to y) \oplus (x \to z)$:

x	y	z	$x \to y$	$x \to z$	$(x \to y) \oplus (x \to z)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Так как таблицы значений не совпадают, то формулы не являются эквивалентными.

Пример 4. Построить для функции $f(x,y,z) = \bar{x} \vee y \oplus y \cdot z(x \vee z)$ полином Жегалкина. Проверить, является ли данная функция линейной.

Решение:

1-й способ (аналитический). Используем свойство $\bar{x} \equiv 1 \oplus x$ и перейдем от дизъюнкции к конъюнкции. Получим:

$$f(x,y,z) = \bar{x} \vee y \oplus y \cdot z(x \vee z) \equiv (1 \oplus x(1 \oplus y)) \oplus y \cdot z(1 \oplus (1 \oplus x)(1 \oplus z)) \equiv$$

$$\equiv (1 \oplus x \oplus x \cdot y) \oplus y \cdot z(1 \oplus 1 \oplus x \oplus z \oplus x \cdot z) \equiv 1 \oplus x \oplus x \cdot y \oplus y \cdot z(x \oplus z \oplus$$

$$\oplus x \cdot z) \equiv 1 \oplus x \oplus x \cdot y \oplus x \cdot y \cdot z \oplus y \cdot z \oplus x \cdot y \cdot z = 1 \oplus x \oplus x \cdot y \oplus y \cdot z.$$

2-й способ (по таблице истинности). Построим таблицу истинности для данной функции:

x	y	z	$\bar{x}$	$y \cdot z$	$\bar{x} \vee y$	$x \vee z$	$y \cdot z(x \vee z)$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0

Найдем коэффициенты полинома $f(x,y,z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus$ $\oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz$, используя таблицу значений:

$f(0,0,0)=1=a_0;$

$f(0,0,1)=1=a_0 \oplus a_3;$

$f(0,1,0)=1=a_0 \oplus a_2;$

$f(0,1,1)=0=a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23};$

$f(1,0,0)=0=a_0 \oplus a_1;$

$f(1,0,1)=0=a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13};$

$f(1,1,0)=1=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12};$

$f(1,1,1)=0=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123}.$

Решая систему булевых уравнений, получим следующие значения коэффициентов: $a_0=1; a_1=1; a_2=0; a_3=0; a_{12}=1;$ $a_{13}=0;$ $a_{23}=1; a_{123}=0$.

Тогда полином Жегалкина имеет вид $f(x,y,z)=1\oplus x\oplus x\cdot y\oplus$ $\oplus\, y\cdot z$.

Поскольку полученный полином Жегалкина кроме слагаемых первой и нулевой степени содержит слагаемые второй степени *xy* и *yz*, то данная булева функция не является линейной.

Пример 5. Доказать полноту следующей системы функций: $x\oplus y\oplus z$, $x\,\&\,y, 0, 1$.

Решение. Для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце таблицы Поста был хотя бы один минус.

Рассмотрим каждую из функций.

1. $f_1(x,y,z)=x\oplus y\oplus z$.

f_1 – функция, сохраняющая 0, т.к. $0\oplus 0\oplus 0=0$;

f_1 – функция, сохраняющая 1, т.к. $1\oplus 1\oplus 1=1$.

Найдем двойственную ей функцию:

$f_1^*=\overline{f_1}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(x\oplus 1)\oplus(y\oplus 1)\oplus(z\oplus 1)\oplus 1\equiv x\oplus y\oplus z\oplus 1\oplus$

$\oplus 1\oplus 1\oplus 1\equiv x\oplus y\oplus z$, т.е. $f_1\in S$.

Очевидно, что f_1 – линейная функция.

Проверим функцию на монотонность: выберем два набора значений переменных:

$(0,1,0)<(0,1,1)$; $f_1(0,1,0)=1>f_1(0,1,1)=0$, т.е. $f_1 \notin M$.

2. $f_2(x,y)=x\,\&\,y$.

$f_2 \in P_0$, т.к. $0\,\&\,0=0$; $f_2 \in P_1$, т.к. $1\,\&\,1=1$.

$f_2^* = \overline{f_2(\bar{x},\bar{y})} = \overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} \equiv x \vee y$, т.е. f_2 – не самодвойственная функция.

f_2 – не линейная, т.к. содержит произведение переменных.

f_2 – монотонная, т.к. имеется семь сравнимых наборов значений переменных: $(0,0)\le(0,0)$; $(0,0)<(1,0)$; $(0,0)<(0,1)$; $(1,0)<(1,1)$; $(0,1)<(1,1)$; $(0,0)<(1,1)$; $(1,1)\le(1,1)$. Очевидно, что для любого из них $f_2(\bar{\alpha})\le f_2(\bar{\beta})$.

3. $f_3=0$ и $f_4=1$. Проверяются элементарно.

Тогда таблица Поста будет иметь следующий вид:

Функция	P_0	P_1	S	L	M
$x \oplus y \oplus z$	+	+	+	+	–
$x\,\&\,y$	+	+	–	–	+
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+

Доказали, что система является полной.

2.4. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Под ***релейно-контактной схемой*** понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов, через которое полюсы источника связаны с некоторым потребителем.

Контакты могут быть *замыкающими* или *размыкающими*. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает (находится под током), все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие контакты разомкнуты, в противном случае наоборот. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и 0 в противном случае.

На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а размыкающие – символом $\bar{x}$. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им соответствует 1, а все размыкающие переключатели (контакты) $\bar{x}$ не проводят ток и им соответствует 0; при отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме также ставится в соответствие булева переменная y, которая равна 1, если схема проводит ток, и равна 0 в противном случае. Переменная y, соответствующая схеме, очевидно, является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующих реле. Эта функция называется функцией проводимости схемы, а ее таблица – условиями работы схемы.

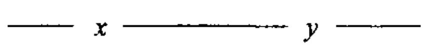
Две релейно-контактные схемы называются ***равносильными***, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, т.е. если обе схемы обладают одинаковыми функциями проводимости.

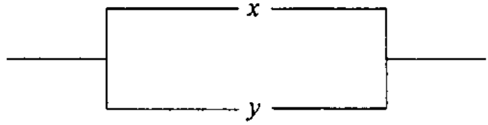
Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

Синтез релейно-контактных схем представляет собой построение схем по аналитическим выражениям, полученным из некоторых условий после их упрощения.

Анализ релейно-контактных схем представляет собой построение функций по данным схемам. Рассмотрим некоторые примеры и на их основании проанализируем релейно-контактные схемы.

Пример 1. Найти функции проводимости следующих релейно-контактных схем:

а) 

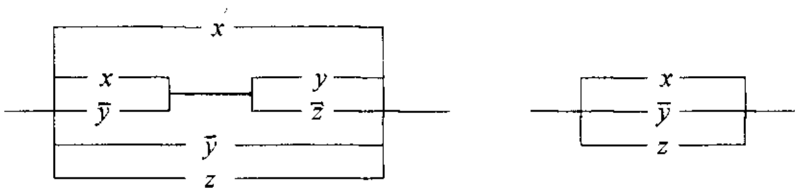
б) 

Решение:

а) Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба независимых переключателя x и y замкнуты. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух аргументов, которая принимает значение 1 в том и только том случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1. Такой функцией является конъюнкция. Итак, $f(x, y) = x \cdot y$.

б) Ясно, что данная схема проводит ток тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из двух независимых переключателей (x или y) замкнут. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух переменных, которая принимает значение 1 в том и только том случае, когда хотя бы одна из переменных принимает значение 1. Такой функцией является дизъюнкция. Итак, $f(x, y) = x \vee y$.

Пример 2. Проверить равносильность релейно-контактных схем:



Решение. Составим функцию проводимости первой из двух данных схем:

$$f(x, y, z) = x \vee ((x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})) \vee \bar{y} \vee z.$$

Преобразуем ее следующим образом:

$$f(x, y, z) = x \vee ((x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})) \vee \bar{y} \vee z \equiv x \vee [((x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})) \vee \bar{y}] \vee z \equiv x \vee ((x \vee \bar{y} \vee \bar{y})(y \vee \bar{z} \vee \bar{y})) \vee z \equiv x \vee ((x \vee \bar{y})(y \vee \bar{y} \vee \bar{z})) \vee z \equiv x \vee ((x \vee \bar{y})(1 \vee \bar{z})) \vee z \equiv x \vee ((x \vee \bar{y}) \cdot 1) \vee z \equiv x \vee (x \vee \bar{y}) \vee z \equiv x \vee \bar{y} \vee z.$$

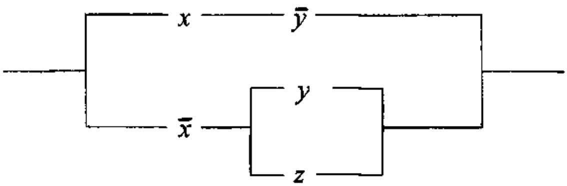
Ясно, что полученная функция (в измененной форме аналитической записи) является функцией проводимости второй из двух данных схем.

Пример 3. Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости: $f(x,y,z)=(x\to y)\to(\bar{x}(y\vee z))$.

Решение. Упростим данное выражение:

$$f(x,y,z)=(x\to y)\to(\bar{x}(y\vee z))=\overline{x\to y}\vee(\bar{x}(y\vee z))=\overline{\bar{x}\vee y}\vee$$
$$\vee\,\bar{x}(y\vee z)=x\cdot\bar{y}\vee\bar{x}(y\vee z).$$

Соответствующая схема имеет вид:



Пример 4. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного здания. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

Решение. Функция проводимости такой схемы должна обладать тем свойством, что ее значение меняется всякий раз, когда меняется значение одного аргумента. Например:

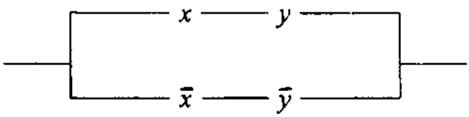
$f(0,0)=f(1,1)=1;$

$f(1,0)=f(0,1)=0.$

Используя СДНФ, получаем

$f(x,y)=(x\cdot y)\vee(\bar{x}\cdot\bar{y}).$

Соответствующая схема имеет вид:



Задачи для самостоятельного решения

1. Выяснить, какие из следующих предложений являются высказываниями, и определить их истинностное значение:

1) Москва – столица России;

2) Студент механико-математического факультета университета;

3) Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C";

4) Луна есть спутник Марса;

5) $2 + 2 = 5$;

6) Кислород – газ;

7) Каша – вкусное блюдо;

8) Математика – интересный предмет;

9) Картины Пикассо слишком абстрактны;

10) Железо тяжелее свинца;

11) «Да здравствуют музы!»;

12) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны;

13) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;

14) Сегодня плохая погода;

15) В романе А.С. Пушкина «Евгений Онегин» 136 245 букв;

16) Река Ангара впадает в озеро Байкал.

2. Составить таблицы истинности для следующих формул. Установить, какие из них являются тождественно истинными, тождественно ложными:

1) $A \equiv (x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$;

2) $A \equiv \bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z))$;

3) $A \equiv (y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

4) $A \equiv \overline{x \vee y} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee x$;

5) $A \equiv (x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to \overline{x \to \bar{x}} \vee y \vee \bar{z}$;

6) $A \equiv (x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

7) $A \equiv (x \vee y) \leftrightarrow (y \downarrow \bar{x})$;

8) $A \equiv x \mid \bar{y} \to z \oplus \overline{x \cdot y}$.

3. Упростить формулы:

1) $A \equiv (x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$;

2) $A \equiv (y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

3) $A \equiv \overline{x \vee y} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee x$;

4) $A \equiv \bar{x} \cdot \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$;

5) $A \equiv (x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to \overline{x \to \bar{x}} \vee y \vee \bar{z}$;

6) $A \equiv (x \vee y) \leftrightarrow (y \downarrow \bar{x})$;

7) $A \equiv x \mid \bar{y} \to z \oplus \overline{x \cdot y}$.

4. По таблице истинности найти формулы, определяющие функции $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$, $F_4(x,y,z)$, и придать им более простой вид:

x	y	z	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$	$F_4(x,y,z)$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

5. Определить, равносильны ли формулы f и g:

1) $f(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z))$; $g(x,y,z) = x \leftrightarrow z$;

2) $f(x,y,z) = (x \to y) \to z$; $g(x,y,z) = x \to (y \to z)$;

3) $f(x,y,z) = \overline{(x \to y) \vee ((x \to z)y)}$; $g(x,y,z) = x \cdot \bar{y}(\bar{y} \to x \cdot \bar{z})$.

6. Проверить, имеют ли место следующие равносильности:

1) $x \vee (y \leftrightarrow z) \equiv (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$;

2) $x \to (y \leftrightarrow z) \equiv (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$;

3) $x(y \leftrightarrow z) \equiv x \cdot y \leftrightarrow x \cdot z$;

4) $x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z)$;

5) $x \to y \cdot z \equiv (x \to y)(x \to z)$;

6) $x \to (y \to z) \equiv (x \to y) \to (x \to z)$;

7) $x \to (x \cdot y \to ((x \to y) \to y)z) \equiv y \to (x \to z)$.

7. Для данных функций найти ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ:

1) $x \to (y \to z)$;

2) $(x \to y) \to z$;

3) $((x \to y) \to (z \to \bar{x})) \to (y \to \bar{z})$;

4) $(x \leftrightarrow y) \to ((\bar{x} \to z) \to \bar{y})$;

5) $\overline{x \vee z} \wedge (x \to y)$;

6) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \leftrightarrow z)$;

7) $(x \leftrightarrow y) \wedge \overline{z \to t}$.

8. Проверить правильность рассуждений:

1) Если число натуральное, то оно рациональное. Число 3/4 не натуральное. Следовательно, число 3/4 не рациональное.

2) Если число натуральное, то оно рациональное. Число $\sqrt{2}$ не натуральное, следовательно, число $\sqrt{2}$ не рациональное.

3) Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следует ли тогда, что если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу работу?

4) Если Александр выиграет теннисный турнир, то он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в последующих турнирах. Но если он проиграет этот турнир, то потеряет поддержку своих болельщиков. Он плохой борец в последующих турнирах, если потеряет поддержку своих болельщиков. Если он плохой борец в последующих турнирах, то ему следует прекратить занятия теннисом. Александр или выиграет этот турнир, или проиграет его. Следовательно, ему нужно прекратить занятия теннисом.

5) Если инвестиции останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или увеличится безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не увеличится. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

9. Для следующих булевых функций найти представляющий их полином Жегалкина:

1) $\bar{x}(y \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot z)$;

2) $(x \to (y \to \bar{z}))(\bar{z} \cdot y \to x)$;

3) $(x \oplus 1)(y \oplus 1)\bar{z} \vee y \cdot z$;

4) $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot \bar{z}$;

5) $x(y \to z) \vee (\bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y})(z \oplus 1)$.

10. Выяснить, какие из следующих функций линейны:

1) $\overline{x \cdot y \to z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)z$;

2) $\bar{x} \to (y \vee \bar{z})$;

3) $(y \cdot \bar{z} \oplus x) \to (x \leftrightarrow x \cdot \bar{y})$.

11. Выяснить, какие из указанных ниже функций монотонны:

1) $x \to (x \to y)$;

2) $\bar{x} \cdot \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) $x \oplus y \oplus x \cdot y$.

12. Выяснить, какие из указанных ниже функций самодвойственны:

1) $\bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}$;

2) $((x \to y) \oplus 1)(z \oplus 1) \vee x \cdot \bar{y} \cdot z$;

3) $x \cdot y \oplus x \cdot z \oplus y \cdot z$.

13. С помощью теоремы Поста показать, что множество функций $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \cdot y\}$ является базисом.

14. В санатории на берегу моря отдыхают отец, мать, сын и две дочери. До завтрака члены семьи часто купаются в море. Известно, что:

1) если купается отец, то обязательно купаются мать и сын;

2) если купается сын, то обязательно купается старшая дочь;

3) мать и младшая дочь порознь не купаются;

4) кто-то из мужчин обязательно купается.

Однажды утром из дочерей купалась только одна. Кто купался в это утро?

15. В городе А живут люди, всегда говорящие правду. Жители города В, напротив, всегда лгут. У развилки двух дорог, ведущих в А и В, путешественник встречает местного жителя. Какой вопрос, требующий ответа «да» или «нет», должен задать путешественник, чтобы узнать, какая дорога ведет в А?

16. Определить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении банка, если известно:

1) если А участвовал, то и В участвовал;

2) если В участвовал, то или С участвовал, или А не участвовал;

3) если D не участвовал, то А участвовал, а С не участвовал;

4) если D участвовал, то и А участвовал.

17. Один из трех братьев (Витя, Толя, Коля) разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев – Андрей и Дима.

– Это мог сделать только или Витя, или Толя, – сказал Андрей.

– Я окно не разбивал, – возразил Витя, – и Коля тоже.

– Вы оба говорите неправду, – заявил Толя.

– Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, – возразил Дима.

– Ты, Дима, не прав, – вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

18. Один из четырех мальчиков испортил выключатель. На вопрос «Кто это сделал?» были получены следующие ответы:

1) «Это сделал или Миша, или Коля»;

2) «Это сделал или Витя, или Коля»;

3) «Это не могли сделать ни Толя, ни Миша»;

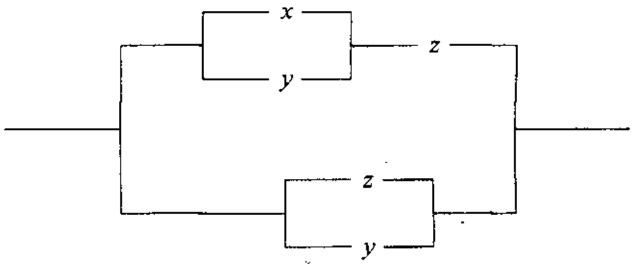
4) «Это сделал или Витя, или Миша».

Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три – истинны?

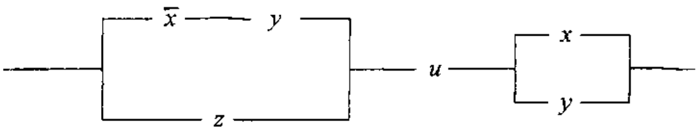
19. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк – или первый, или третий; учитель литературы – или второй, или третий. Как составить расписание, чтобы учесть все пожелания?

20. Найти функции проводимости следующих релейно-контактных схем:

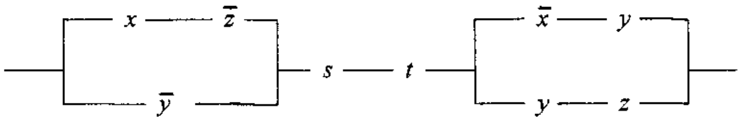
1)



2)



3)



21. Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

1) $f(x,y,z) = \bar{x}(\bar{y}\cdot z \vee x \vee y)$;

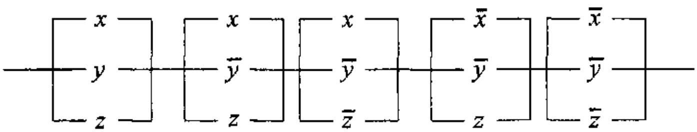
2) $f(x,y,z,u) = ((\bar{x} \vee y)(y\cdot z \vee x)) \vee u\cdot z$;

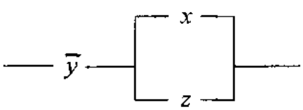
3) $f(x,y,z) = (x(y\cdot z \vee \bar{y}\cdot \bar{z})) \vee (\bar{x}(\bar{y}\cdot z \vee y\cdot \bar{z}))$;

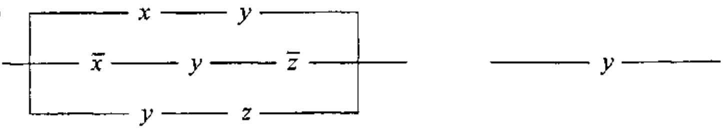
4) $f(x,y,z) = (x \to (y \to z)) \to (y \to \bar{x})$.

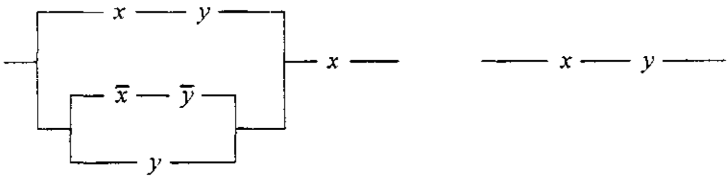
22. Проверить равносильность следующих релейно-контактных схем:

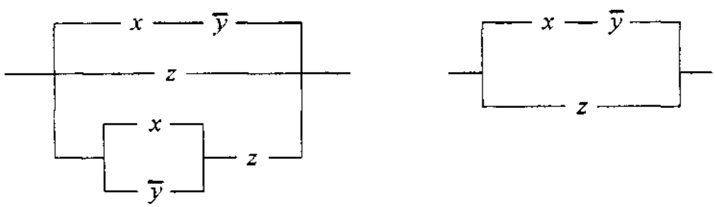
1)





2) 

3) 

4) 

23. Построить схемы для следующих задач.

Задача 1. Каждый из трех членов комитета голосует «за», нажимая на кнопку. Построить по возможности более простую схему, через которую ток проходил бы и зажигал электрическую лампочку тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».

Задача 2. Комитет состоит из пяти человек. Решение выносится большинством голосов. Если председатель голосует «против», то решение не принимается. Построить такую схему, чтобы, голосуя «за», каждый из пяти человек нажимал на кнопку, и в случае принятия решения зажигалась сигнальная лампочка.

Задача 3. Спроектировать релейно-контактную схему, позволяющую зажигать и тушить электрическую лампочку с помощью трех независимых переключателей.

Задача 4. Боксерский поединок судят трое судей. Судья, засчитывающий очко бойцу А (пропуск удара боксером Б), нажимает на имеющуюся в его распоряжении кнопку А; судья, не засчитывающий результат, кнопку А не нажимает. Очко засчитывается, если не менее двух судей его засчитали. В этом случае в соответствующем углу должна загореться лампочка. Построить схему принятия решений судьями в поединке.

Список литературы

Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.

Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука: Физматлит, 2000. – 544 с.

Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений. – 3-е изд., стер. – М.: Академия, 2007. – 304 с.

Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений. – 2-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 448 с.

Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика: курс лекций: задачник-практикум и решения. – СПб.: Лань, 1999. – 288 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики: учеб. – М.: Инфра-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 240 с.

Эвнин А.Ю. Дискретная математика: конспект лекций. – Челябинск: ЮУрГУ, 1998. – 214 с.

Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1. Логика высказываний 5
1.1. Высказывания. Операции над высказываниями 5
1.2. Формулы логики высказываний 6
1.3. Равносильные формулы логики высказываний 10
1.4. Совершенные нормальные формы 13
1.5. Логическое следование формул. Решение логических задач 18
2. Булевы функции (функции алгебры логики) 24
2.1. Основные булевы функции, их свойства 24
2.2. Алгебра Жегалкина 25
2.3. Классы булевых функций 25
2.4. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам 30
Задачи для самостоятельного решения 34
Список литературы 41

Балабко Лариса Витальевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА ЛОГИКИ
(АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ)

Методические указания к выполнению самостоятельной и контрольной работы

Редактор А.В. Садкова
Выпускающий редактор М.Н. Абрамова
Корректор А.В. Миленина
Компьютерная верстка И.И. Свищенковой

Подписано в печать 29.09.2011. Формат 70×84/16.
Усл. печ. л. 3,27. Тираж 150 экз. Заказ № 177.

Отпечатано в издательстве
ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический)
федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, 17