О. И. Мельников

Современные аспекты обучения дискретной математике

Мельников О. И. Современные аспекты обучения дискретной математике [Электронный ресур] — Электрон. текст. дан. (646 Кб). — Мн.: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. — Режим доступа: http://anubis.bsu.by/publications/elresources/MathematicsMechanics/melnikov.pdf . — Электрон. версия печ. публикации, 2002. — PDF формат, версия 1.4 . — Систем. требования: Adobe Acrobat 5.0 и выше.

МИНСК

«Электронная книга БГУ»

2003

www.elbook.bsu.by
elbook@bsu.by

О.И. МЕЛЬНИКОВ

СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Минск
БГУ
2002

УДК 519.1
ББК 22.176
М48

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук,
профессор Р. И. Тышкевич;
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Павловский

Мельников О. И.
М48 Современные аспекты обучения дискретной математике / О. И. Мельников. – Мн.: БГУ, 2002. – 120 с.

ISBN 985-445-795-8.

В монографии дается историко-философский анализ взаимоотношения непрерывной и дискретной математики. Значительное внимание уделяется методологии построения дискретных математических моделей и оценки комбинаторных алгоритмов, методическим приемам использования элементов теории графов при обучении.

Для научных работников в области педагогики, преподавателей вузов и педучилищ, учителей, студентов педагогических вузов.

УДК 519.1
ББК 22.176

ISBN 985-445-795-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Споры о содержании образования ведутся, наверно, со времени возникновения первых учебных заведений. В последние годы в нашей стране эти споры приобрели новое звучание. Они связаны с ослаблением диктата государства в вопросах обязательности школьных программ и появлением школ различных типов. Оставим в стороне сложный и важный вопрос о соотношении между гуманитарными и естественными предметами в образовании, сделав небольшую реплику. Автор считает, что ведущее положение Советского Союза в области теоретической физики и космических исследований, достигнутое в 1960-е гг., было обусловлено наряду с другими факторами и тем, что школьники решали «абстрактные», «далекие от жизни», «ненужные» задачи, которые развивали их умственные способности. Закон больших чисел позволял из миллионов учеников выбрать несколько тысяч тех, чьи способности в соединении с большими капиталовложениями в физику и космонавтику обеспечивали превосходство страны в названных областях. Большинство же школьников свои приобретенные знания по математике, физике, химии так и не использовали. Конечно, человек быстро забывает те знания, которыми не пользуется в повседневной деятельности, но с ним навсегда остается его умственное развитие. Поэтому нельзя говорить о низком коэффициенте полезного действия изучения естественных наук в школе, поскольку это изучение повышало сообразительность детей, уровень их логического мышления.

Главное математическоем событие XX в. – появление компьютера. Благодаря ему стало возможным исследование кибернетических, или больших, систем, решение задач, состоящее из анализа огромного числа вариантов и выбора из них лучшего. Если до 70-х гг. работа, связанная с вычислительной техникой, была достаточно редкой, то с 1975 г., в связи с производством персональных ЭВМ она перестала быть экзотической. Не случайно компании IBM, Microsoft, Intel, связанные с вычислительной техникой, вошли в число крупнейших компаний мира как по обороту денежных средств, так и по числу работающих специалистов.

К сожалению, страны СНГ оказались в стороне от компьютерного прогресса. Есть ли возможность попасть на магистральный путь развития? Профессор Р. Ф. Абдеев, например, убежден, что она существует. Он пишет: «Сейчас для этого открывается благоприятная возможность: из-за значительного роста мощностей ЭВМ намечается кардинальная замена программного обеспечения. Требуются принципиально новые идеи, новая математика, свежие алгоритмы – у отечественных компьютерщиков появляется шанс найти место в крупнейшей мировой индустрии средств производства» [1, с. 75]. Но это может произойти лишь в том случае, если будущих специалистов начнут готовить уже в средней школе.

Математика за последние годы существенно изменилась. Интенсивно развиваются ее дискретные разделы. Она стала более алгоритмизированной, для решения задач практически во всех ее областях используется вычислительная техника. «Только в математическом образовании перемен почти не видно. В общих курсах алгоритмические вопросы затрагиваются примерно в той же мере, как 20 лет назад. Сложностные аспекты алгоритмов обычно вовсе игнорируются. Области прикладной математики в программе обучения существуют как бы отдельно в дополнение к основному курсу или вовсе отсутствуют. Господствующая точка зрения, видимо, такова: в первую очередь необходимо обеспечить классическую математическую подготовку, остальное приложится. Стыковка математики и информатики практически не происходит» [200, с. 122].

Новые требования к обучению математике предъявляет и изучение в школах и вузах информатики, теоретической основой которой является дискретная математика. К сожалению, по мнению автора, в школе в силу различных причин изучается в основном непрерывная математика и недостаточное внимание уделяется дискретной, существует ее недооценка. Мало места отведено дискретной математике и в разрабатываемых новых программах [174].

Примерно такое же положение и в России. В проекте «Концепция структуры и содержания общего среднего образования (в 12-й школе)» в качестве одного из основных блоков выделен «Анализ данных». Из дискретной математики в нем предполагается только «подготовка в области комбинаторики с целью создания аппарата для решения вероятностных задач и логического развития учащихся» [95, с. 16]. Отмечая роль дискретной математики при создании моделей в гуманитарных науках, авторы проекта безосновательно утверждают: «В естественных науках главную роль играют в настоящее время количественные описания реальных процессов и соответственные количественные модели, для исследования которых необходимы традиционные разделы математики, наряду с началами математического анализа и элементами теории вероятностей и математической статистики» [95, с. 18]. Но если это верно, то почему же не учитываются потребности будущих гуманитариев в дискретной математике, которая здесь же признана? Не все специалисты согласны с приведенными в проекте положениями. Так, в работе А. И. Новикова «К вопросу о реформе математического образования» указывается на преувеличение роли вероятностных методов и предлагается «восстановить в программе по математике (в базовом комплексе) такие разделы, как „Принцип математической индукции“, „Элементы комбинаторики“ и ввести раздел „Элементы линейного программирования“» [145, с. 4].

Фактическое отсутствие дискретной математики в школьной программе приводит к тому, что у учащихся плохо формируется дискретное математическое мышление. Косвенным подтверждением этого является то, что легкая дискретная задача: «В шахматном турнире было сыграно 45 партий. Определите число участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии», которая очень просто решается с помощью графов, отнесена в учебнике алгебры для 8 класса [118, с. 137] к задачам повышенной сложности.

В школьных учебниках, особенно для младших классов, задачи на сообразительность, которые требуют нестандартного подхода, встречаются редко. А ведь это самое благоприятное время для развития сообразительности. В качестве исключения можно назвать учебники авторских коллективов, возглавляемых Ш. А. Алимовым, Н. Я. Виленкиным, Т. М. Чеботаревской [4, 38, 39, 67, 82, 191].

Следует отметить, что программа по математике старшей школы (9–11 классы) в США содержит большой раздел дискретной математики, включающий элементы теории графов и алгоритмов, элементы линейного программирования [197]. Для получения сертификата учителя необходима сдача тестов, содержащих вопросы и задачи по дискретной математике [198].

Обсуждению вопросов обучения дискретной математике и посвящена эта книга. В ней рассматриваются как теоретические, так и практические аспекты обучения, предлагаются различные методические приемы.

ГЛАВА 1

ИСТОРИКО-ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного характера. В отличие от дискретной математики классическая, как правило, рассматривает непрерывные объекты. Дискретная математика имеет свои методы исследования, специфика которых обусловливается в основном отказом от понятия непрерывности. Деление математики на непрерывную и дискретную во многом условно. «Диалектика рассматриваемых противоположностей вносит важный вклад в общую гармонию математического познания, которое заключается не в симметрическом синтезе противоположностей, а в разрешении противоречий между бедным, отвлеченно-абстрактным, формализованным и жизненным, богатым, содержательным» [88, с. 72].

Реальный мир, в сущности, противоречив: он представляет собой единство противоположных сторон – дискретного и непрерывного, конечного и бесконечного и т. д. Естественно, что математика, изучающая количественный аспект материальной действительности, также должна отражать эту противоречивость. «Через всю историю математики так же, как через все философские рассуждения о природе, проходит, как известно, различие между дискретной величиной арифметики и непрерывной величиной геометрии», – писал великий математик Ф. Клейн [86, с. 434]. Непрерывность и однородность пространства являются предпосылкой возникновения континуальных разделов математики, а его разрывность и неоднородность – дискретных разделов. Критикуя попытки противопоставления непрерывного дискретному и попытки сведения их друг к другу, Гегель утверждал: «Взятые со стороны одной только *дискретности*, субстанция, материя, пространство, время и т. д. безусловно разделены; их принципом служит „одно“. Взятое же со стороны *непрерывности,* это „одно“ есть лишь нечто снятое; деление остается делимостью, остается *возможность* делить как возможность, никогда в действительности не приводящая к этому… Так как каждая из двух противоположных сторон содержит в самой себе другую и ни одну из них нельзя мыслить без другой, то следует, что ни одно из этих определений, отдельно взятое, не истинно, а истинно лишь их единство» [50, с. 271].

Следует отметить, что и в теории познания существует свой «логический атомизм», идеи которого наиболее полно выражены Л. Витгенштейном [40], согласно которому существуют «атомы знания», и весь мир может быть описан логическими предложениями, составленными из этих атомов.

Рассматривая взаимодействие дискретного и непрерывного в процессе научного познания, советский философ И. Б. Новик высказал тезис о пульсирующем характере противоречия прерывности и непрерывности как условии аккумуляции знаний. «В реальном бытии ни прерывность не является первичной по отношению к непрерывности, ни непрерывность не является первичной по отношению к прерывности. Однако в логическом процессе познания на каждом его этапе эти противоположности оказываются неравнозначными: то одна, то другая стороны противоречия являются методически ведущими… В научном познании происходит как бы перелив форм объединения прерывности и непрерывности» [143, с. 17]. Вопросы взаимоотношения непрерывности и дискретности в математике рассматривались М. Д. Ахундовым, В. С. Готтом и Ф. В. Недзельским, А. Френкелем и И. Бар-Хиллелом [13, 58, 186], популярное изложение некоторых аспектов этого взаимоотношения предложено С. Барром [15]. Развитию атомистических представлений в философии и естествознании посвящена книга В. П. Зубова [76].

Обратимся к истокам человеческого общества. «Мы обнаружим в материальной действительности две общие и взаимно противоположные формы существования: дискретность и непрерывность, отдельные предметы, перестающие быть самими собой, если их делить на части, и такие предметы и среды, которые не разделены на части, но достаточно легко делятся, не переставая быть тем же самым. Эти общие формы возникали в деятельности древних людей в виде, например, топоров и стрел, делить которые значило ломать, и в виде воды или зерна в его массе, которые легко делить» [3, с. 64–65].

Зарождение математики происходило в самом начале формирования человечества, когда оно находилось на низшей ступени развития. Русский математик В. В. Бобынин считал, что поскольку первобытный человек обычно выхватывал один предмет из множества, то он постепенно стал различать понятия «единица» и «много» [23]. В дальнейшем в связи с необходимостью определять количество различных объектов появились и другие числа. Первобытная математика была дискретной. В это же время происходит и первое соприкосновение непрерывного и дискретного: непрерывное расстояние измеряется шагами. Следующее такое взаимодействие происходит при появлении понятия дроби. Она, являясь отношением целых чисел, не могла возникнуть при их делении, поскольку целые предметы (топоры, стрелы и т. д.) невозможно было делить без разрушения. Дроби возникали при измерении непрерывных величин: длины, площадей, объемов.

Математика стран Древнего Востока носила в основном прикладной характер и служила для решения практических задач. Такими являлись, в частности, задачи зарождающейся астрономии, связанные с движением небесных тел. При расчете траекторий и периодов обращения тел составлялись различные таблицы, т. е. происходила замена непрерывного движения его дискретными аналогами. Книги (папирусы, глиняные таблички), дошедшие до нас с тех времен, содержат, как правило, различные вычислительные приемы без доказательств их справедливости. Однако в этих источниках иногда встречаются и задачи, далекие от практического использования. Так, в III в. н. э. китайский математик Лю Хуэй аппроксимировал снизу площадь круга площадями вписанных многоугольников, фактически используя наивное понятие предела. Это позволило ему достаточно точно определить число π. В сочинениях китайских математиков можно найти и такие элементы дискретной математики, как комбинаторика и решение линейных сравнений.

Математика Древней Греции также служила для решения повседневных задач. В то же время в силу накопления математических знаний, появления новых математических соотношений, фактов и приемов математика переходит в качественно новый период своего развития: она становится наукой. Начиная с этого времени можно уже говорить о взаимосвязи непрерывной и дискретной математики.

Основанием для возникновения непрерывных функций являлись происходящие в природе непрерывные процессы. Аристотель в IV в. до н. э. рассматривал две категории величин: «раздельные», в которые входят числа, и «сплошные», содержащие длину, площади, объемы. Он противопоставлял дискретную природу чисел непрерывному изменению наблюдаемых в природе величин. Аристотель так определяет непрерывность: «Я говорю о непрерывном в том случае, когда граница каждой из двух вещей, по которой они соприкасаются и которая их связывает вместе, становится одной и той же; так что ясно, что непрерывность имеется там, где естественно образуется что-то одно благодаря соприкасанию… Поэтому точка – не то же самое, что единица, ибо точкам свойственно соприкасаться, а единицам нет, они лишь идут подряд; и между точками бывает что-то в промежутке, а между единицами нет» [8]. В то же время он пишет: «Невозможно, чтобы что-либо непрерывное состояло из неделимых частей, например линия из точек, если линия непрерывна, а точка неделима» [9, с. 179], и «как могут точки отделиться и освободиться от своих тел, если линии неразделимы на точки?» [9, с. 387]. Аристотель призывает отличать геометрию, науку о непрерывных величинах, от арифметики, науки о дискретных величинах, и требовал не смешивать эти науки. Представления, близкие к представлениям Аристотеля, сохранились на протяжении многих веков.

В математике впервые появляются абстракции, не имеющие опоры в повседневном опыте и, казалось бы, противоречащие ему. Целых чисел для измерения длины оказывается недостаточно, и вследствие этого появляются дроби, т. е. развитие понятия о числе начинается с взаимодействия непрерывного и дискретного. Рациональными дробями пользовались математики школы Пифагора в VI в. до н. э., их математика имела дискретный характер. Открытие несоизмеримости отрезков привело к кризису в математике. Пифагорийцы сделали вывод о невозможности точного вычисления длины. Они вплотную подошли к открытию иррациональных чисел, но последний шаг не был сделан. Математики перешли на сторону непрерывного, в результате математика стала строиться на геометрической основе.

Однако при построении математических теорий для решения подобных проблем необходимо было использовать бесконечные и непрерывные процессы, предельные переходы. Развитие древнегреческой математики не позволяло сделать это, хотя некоторые ученые уже предприняли первые шаги в нужном направлении.

Анаксогор в V в. до н. э. впервые ввел в математику понятие потенциально бесконечно малого и потенциально бесконечно большого. В противоположность ему атомисты рассматривали «неделимые» величины, т. е. такие, которые хоть и очень малы, но не бесконечно малы. Так, Демокрит сводил непрерывное к дискретному. Точки он представлял как атомы пространства, имеющие малый, но конечный объем. Данное предположение было естественным для того времени: ведь геометрические фигуры еще не отрываются от реальных тел, а поскольку последние мыслятся состоящими из атомов, то Демокрит считал состоящими из атомов и фигуры. Он вычислил объем конуса, представляя его как объединение атомных слоев. В этом видятся будущие приемы интегрального исчисления. Одновременно Демокрит высказал идею о том, что отношение малых отрезков пути к промежуткам времени их прохождения является конечным числом, т. е. рассматривал понятие, близкое к производной.

В это же время появились апории Зенона Элейского, т. е. логические парадоксы, связанные с попытками получать непрерывные величины с помощью объединения величин бесконечно малых. Две апории (о невозможности движения, поскольку для того, чтобы пройти путь, нужно пройти его половину, а для этого пройти половину половины и т. д.; о невозможности Ахилла догнать черепаху, поскольку в тот момент, когда он дойдет до места, где черепаха была раньше, она будет находиться в новом месте) были направлены против возможности бесконечной делимости. «Зенон пытался отрицать существование движения. Аристотель не намеревался в противовес ему доказывать, что движение существует. Движение – в этом он был убежден – не требует доказательств. Оно есть неоспоримый факт. Аристотель хотел показать иное: лишь предполагая существование неделимых, приходят к отрицанию движения, т.е. к конфликту с очевидностью. Выводы Зенона правильны лишь при определенных предпосылках: да, если существуют неделимые, движение невозможно. Но движение есть, следовательно, неделимых нет» [75, с. 125].

Эти парадоксы показали, что для строгих доказательств недостаточно использовать наивные атомистические взгляды и вместе с суждениями о непрерывности и бесконечно малых нужно как-то использовать предельные переходы.

Одним из самых ранних методов подобного рода является метод вычисления площадей криволинейных фигур, разработанный в V в. до н. э. Антифонтом. Этот метод в дальнейшем был усовершенствован Евдоксом и Евклидом и вошел в литературу под названием «метода исчерпывания». В случае необходимости вычисления площади фигуры в нее вписывалась такая последовательность фигур, что разность между площадями исследуемой фигуры и вписанной могла быть сделана сколь угодно малой. Далее доказывалась ограниченность сверху площадей вписываемых фигур. Затем находился предел последовательности этих площадей, в каждом случае подтверждалась его единственность. Этот предел и принимался за площадь фигуры. Фактически Евдокс заменил непрерывную функцию площади вписываемых фигур на ее отдельные дискретные значения. Подобным образом вычислялись длина и объемы. Метод исчерпывания, пожалуй, первый пример применения дискретных рассуждений при доказательстве предельных переходов. «Принцип исчерпывания» Евдокса, приводимый Евклидом, также является реализацией дискретного подхода к получению сколь угодно малой величины: «Если от большей из двух заданных неравных величин отнимается больше половины и это делается постоянно, то остается некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины» [69, с. 102].

Метод исчерпывания был в античной математике общеупотребительным. Его, в частности, использовал Архимед для вычисления объемов тел вращения. Архимед заменял тело вращения на объединение конечного числа вписанных и описанных цилиндров, находил сумму их объемов и показывал, что разность между этими объемами может быть сколь угодно малой. По существу, Архимед использовал интегральные суммы Дарбу, и его вместе с Демокритом по праву можно считать предшественником интегрального исчисления.

Математическая строгость метода исчерпывания была непревзойденной на протяжении многих веков. Вместе с тем метод опирался на интуитивные понятия площади, длины, объема, в нем не определены понятия предела, интеграла, бесконечной суммы, не доказаны многие из используемых теорем.

В первых столетиях новой эры происходит упадок, а потом и прекращение математической деятельности. Это связано с многочисленными войнами, нашествием варваров, усилением христианской религии, которая считала ненужными и даже вредными всякие научные исследования. Но, начиная с VII в., в Средней Азии и на Ближнем Востоке образовалось несколько крупных государств, официальным языком которых стал арабский язык. Здесь стала развиваться математика, которая вобрала в себя лучшие достижения античной математики. Кроме того, она испытывала влияние математики Китая и Индии. Из интересующего нас вопроса отметим использование в XV в. арабским математиком аль-Каши итерационных формул для вычисления синусов малых углов. В этом случае вычисление синусов сводилось к дискретному процессу, длительность которого зависела от желаемой точности вычислений. Продолжала развиваться математика в Китае и Индии. Задачи астрономии вызвали необходимость разработки интерполяционных формул, которые по дискретным значениям функции строили ее аналитическое выражение. Примерно в 600 г. Лю Чжо применил для интерполяции квадратный трехчлен. Долгое время такая интерполяция удовлетворяла астрономов, но в конце XIII в. формулу кубического интерполирования предложил Го Шоу-цзинь. В Европе интерполяционные многочлены появились в XVII в.

Возрождение математики в Европе началось в XIV в., хотя некоторые работы появлялись уже в XII в. К середине XIV в. относится «Трактат о континууме» Брадвардина, посвященный соотношению между непрерывным и дискретным. Ученый подробно рассматривает и анализирует концепции, существовавшие ранее и существующие в его время. Он спорит со сторонниками дискретной геометрии и сторонниками идеи актуальной бесконечности, отстаивает концепцию Аристотеля и его сторонников, которые утверждают, что континуум составляется не из атомов, а из частей, которые делимы без конца. Автор заявляет: «Все науки оказываются истинными, когда не предполагают, что континуум составляется из неделимых» [77, с. 430]. Подобных взглядов придерживались аль-Газали, Орем и другие. В дальнейшем идеи Брадвардина, который рассматривал реальность как «чистую непрерывность», нашли развитие в теориях иррациональных чисел О. Коши, Р. Дедекинда, К. Вейерштрасса.

Вопрос о строении континуума был, пожалуй, основным в средневековой математике. В отличие от сторонников Аристотеля финитисты (Кэттон, Бонет, Николай из Отрекула и другие) считали, что континуум состоит из конечного числа неделимых, а по мнению Римини, Бассоля, – из бесконечного. Многие математики призывали различать физическую (реальную) и математическую (мысленную) делимости. Например, Николай Орем писал: «Делимое говорится в двух смыслах: в смысле реального разделения частей и в смысле различения в уме. И не следует полагать, что всякая величина (или всякий континуум) делима первым образом, потому что физически невозможно разделить небо так, как разделяют полено, обособляя одну часть от другой. Также, разделяя полено, камень или другое материально разрушимое тело, можно дойти до столь малой части, что ее уже нельзя было разделить без разрушения субстанции. Наоборот, всякий континуум или величина в смысле различения в уме делимы на части, всегда делимые; так астрономы делят небесные круги на градусы, градусы – на минуты, минуты – на секунды, секунды – на терции, далее – на кварты и далее – на квинты. И так можно в воображении продолжать без конца» [213, с. 189].

Взгляды Брадвардина развил Буридан в трактате «О континууме». Буридан, в частности, считал границей тела сколь угодно тонкий слой, а не геометрическую поверхность. Интересно, что подобных представлений придерживался и Н. И. Лобачевский. Он писал, что отделение двух тел A и B, которые касаются поверхностно, находясь на двух сторонах сечения S, «должно происходить с помощью поступательных сечений S^1, S^2 к S и может продолжаться, покуда доходим в двух телах до тонкости бумажного листа или как далеко воображение в состоянии следовать еще за делением» [115, с. 174–175]. Аналогично, если два тела «касаются линейно», то следует доводить сечения до «тонкости волоса или черты на бумаге», а если касаются в точке – до «малости песчинки» [Там же].

Взглядов, близких к взглядам Брадвардина, Буридана и Орема, придерживался и Леонардо да Винчи. Он писал: «То, что делимо актуально, делимо и потенциально, однако не все величины, делимые потенциально, будут делимы актуально»[111, с. 78]. Тем не менее Леонардо да Винчи на практике существенно использовал неделимые величины. Так, при исследовании вытекания воды из сосуда он заменял воду просом, сделав при этом характерное замечание: «И если ты скажешь, что этот опыт не хорош, поскольку вода сама по себе – величина единая и непрерывная, а просо – дискретная и прерывистая, на это я тебе отвечу: я хочу позволить себе такую вольность, общую с математиками, а именно: подобно тому, как они делят время на градусы, превращая его из величины непрерывной в прерывную, так и я делаю то же, приравнивая просо или песок к воде» [111, с. 383].

Атомистическим представлениям следовал и Кавальери: в своей геометрии неделимых он представлял непрерывное состоящим из дискретных, хотя и бесконечно малых величин. Методы Кавальери позволяли ему вычислять площади и объемы геометрических фигур.

Лейбниц считал, что «существуют неделимые или непротяженные элементы; иначе невозможно быть ни началу, ни концу движения» [212, с. 68]. Для изучения движения он использует понятие conatus, впервые примененное Гоббсом и Валлисом. Оно означает движение, происходящее в незначительный промежуток времени на микроскопическом расстоянии. Взгляды Лейбница на движение были близки взглядам «зенонистов» XIV в., которые считали, что движение состоит из неделимых «атомов» движения. Он не принял теорию скачкообразного движения: «движение непрерывно, т. е. оно не прерывается паузами покоя… Ведь если тело покоится и отсутствует причина нового движения, то оно будет покоиться и дальше. И наоборот, если оно движется, то оно всегда будет двигаться равномерно и прямолинейно» [212, с. 68].

Лейбниц полагал, что фундаментальные законы природы описываются непрерывными функциями и что «в природе никогда не встречается ни одного такого случая», когда закон непрерывности нарушался бы «в принципах и простых вещах», хотя возможно его нарушение «в сложных телах». Однако такое нарушение, по его мнению, просто следствие недостатка знаний человека, неспособного увидеть в хаосе и прерывности порядок и закономерность [110, с. 209].

Лейбниц пытался применять непрерывность в психологии. В созданном им учении о бессознательном он ввел аналоги бесконечно малых из анализа: малые или смутные представления и впечатления. О вводимых Лейбницем элементах Л. Фейербах писал:

«Эти малые представления и составляют как бы основной материал и первичные элементы наших страданий и удовольствий; они обусловливают те мелкие раздражения, пружины и побудительные причины, которые образуют сильные, чувствуемые нами влечения, и лежат в основе того беспокойства, которое нас никогда не покидает в жизни» [183, с. 297].

В XV–XVI вв. арифметика противопоставляется геометрии: арифметика изучает дискретные величины, а геометрия – непрерывные. Взгляды философов и математиков того времени близки взглядам Аристотеля. Дж. Савонарола писал в 1492 г.: «Математика – наука, которая абстрагируется от чувственной, а не рассудочной материи, – делится на две части. Если абстрактное рассматривается без своего положения, имеем единицы и числа, которые трактует Арифметика. Если рассуждается о том, что имеет положение, получим величины, которые изучает Геометрия» [54, с. 60]. Он считал геометрию зависимой от арифметики. «Позднее, когда станет господствовать механическая картина мира, приоритет будет на стороне геометрии. Галилей напишет, что книгу философии составляет то, что постоянно открыто нашим глазам, а буквами этой книги служат треугольники, четырехугольники, круги, шары, конусы, пирамиды и другие математические фигуры» [54, с. 61]. Однако в работах Р. Бомбелли, С. Стевена, Ф. Виета в математику постепенно проникают идеи о взаимных связях между алгеброй и геометрией.

Многие философы (Декарт, Спиноза, Локк, Гольбах, Кант и другие) иногда вместо непрерывности фактически рассматривали делимость (конечную и бесконечную), что часто приводит к парадоксам. Например, протяженность бесконечно делится на части, следовательно, она непрерывная. С другой стороны, она является бесконечным множеством безразмерных разделенных точек, следовательно, она дискретная. Таким образом, происходит отождествление непрерывного и дискретного. Подробно об этом написано в книге В. С. Готта и Ф. В. Недзельского [58].

В связи с необходимостью астрономических вычислений при дальних морских путешествиях стала интенсивно развиваться тригонометрия. С решения в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней началось возрождение алгебры. Введение Декартом и Ферма в середине XVII в. системы координат дало сильный толчок развитию аналитической геометрии. В 1623 г. немецким профессором Шиккартом была построена первая вычислительная машина.

Идеи функциональной зависимости были присущи еще древним математикам, однако ее систематическое применение и изучение началось в XVII в. в связи с проникновением в математику понятия переменной. В работах Декарта, Ферма, Ньютона, Лейбница понятие функции по существу было интуитивным и носило или геометрический, или механический характер. Явное определение функции впервые дал Бернулли в 1718 г.: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных» [52]. Такое определение позволяло рассматривать любые функции, в том числе и дискретные, но на протяжении многих лет изучались только те из них, которые можно задать аналитическими выражениями. Лишь во 2-й половине XIX в. появилось современное определение функции, опирающееся на понятия теории множеств. С этого времени постепенно стали рассматривать и дискретные функции.

Без сомнения, главное математическое событие XVII в. – это создание дифференциального и интегрального исчислений. Как уже отмечалось, попытки анализа бесконечно малых были уже в Древней Греции. В течение двух тысяч лет с различной степенью интенсивности происходило накопление фактов и их осмысление. Важным этапом стало введение Декартом переменной величины в 1-й половине XVII в.

Наиболее ранняя форма анализа бесконечно малых – теория флюксий Ньютона, созданная в 60–70-х гг. XVII в. В 1684 г. об анализе бесконечно малых опубликовал свою работу Лейбниц. Функции, рассматриваемые в этот период, были непрерывными. Лейбниц дал расплывчатую формулировку принципа непрерывности: «Если среди данных или принятых явлений различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то она вместе с тем необходимо станет меньше всякой данной величины и у искомых или последующих, вытекающих из данных» [52, с. 22]. Представления Лейбница о непрерывности опирались на образ плавной кривой. Ньютон же называл изучаемые функции «флюентами», т. е. «текущими» величинами. Его функции непрерывно зависели от времени. Строгое определение непрерывности функции дал в 1823 г. Коши. От Ньютона пошло представление о бесконечно малых как о неограниченно убывающих переменных величинах. Эта концепция стала господствующей в XIX в., когда была создана строгая теория пределов.

Проблема обоснования анализа оказалась не под силу ни Ньютону, ни Лейбницу. Глубокое научное обоснование было дано лишь в XIX в. Наиболее распространено определение предела, принадлежащее Коши и использующее язык (ε–δ)-окрестностей. Кроме того, Коши формулирует определение непрерывной функции. Позже появляется эквивалентное определение предела, принадлежащее Гейне. В нем сначала вводится понятие предела числовой последовательности, т. е. предела дискретной функции, а затем из непрерывной функции выделяются различные числовые последовательности, и предел непрерывной функции определяется с помощью пределов этих последовательностей.

Во 2-й половине XIX в. русский математик Н. В. Бугаев, опираясь на аналогии между некоторыми операциями теории чисел и математического анализа, пытался построить аритмологию: науку о «прерывных» функциях. Он писал: «Изменяться величины могут непрерывно или прерывно... Сообразно с этими двумя способами изменения количеств, функции разделяются на непрерывные и прерывные, а сама математика распадается на два громадных раздела: теорию непрерывных и теорию прерывных функций... Прерывность гораздо разнообразнее непрерывности. Можно даже сказать, что непрерывность есть прерывность, в которой изменение идет через бесконечно малые и равные промежутки. Разнообразие форм, под которыми является прерывность, ведет к тому, что научные вопросы аритмологии часто бывают сложнее и труднее соответствующих вопросов анализа» [31, с. 86]. Для «прерывных» функций Бугаев строит аналоги понятий интеграла и дифференциала. Он считал, что прерывные задачи более индивидуальны, чем непрерывные, в то же время подчеркивая взаимосвязь и взаимодополняемость аналитического и аритмологического подходов. «Мы видели, что в области чистой математики непрерывность и прерывность суть два понятия, несводимых одно к другому. Полное понимание научных математических фактов возможно только при условии, что два этих способа изменения величины в равной мере принимаемы во внимание. При правильной оценке и классификации фактов чистой математики между ними должны устанавливаться не противоречия, а гармония» [31, с. 92–93].

Вопросами взаимосвязи непрерывности и дискретности в математике занимался и ученик Бугаева – П. А. Флоренский. Во введении к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» он объясняет распространение непрерывных методов плодотворностью дифференцирования и интегрирования, отмечая, что задачи, в которых имелась очевидная прерывность, рассматривались как курьез. Флоренский подчеркивает, что идея непрерывности овладела всеми науками от богословия до механики, и протестовать против нее значило впадать в ересь. «Но вполне естественно, что виновница такого соблазна – математика – захочет поправить односторонность, которую она вызвала, хотя и непреднамеренно. Если математика подчеркнула идею непрерывности и конкретизация этой идеи вызвала однобокость миросозерцания и вместе с тем ряд поучительных диссонансов и даже глубоко фальшивых нот, то можно ожидать, что критика такой идеи уничтожит односторонность, если она незаконна, и санкционирует ее, если она необходима» [184, с. 162].

В конце XIX в. Кантор и Дедекинд на основании теории множеств и непрерывности создали теорию действительных чисел. Пространство теперь понималось как множество точек. Путем введения иррациональных чисел разрывная область рациональных чисел дополнялась до превращения ее в непрерывную. Теперь, когда математик говорит о действительном числе, он подразумевает или бесконечную десятичную дробь, или алгоритм получения любого знака этой дроби. Возникает интересная философская проблема. «В канторовской теории множеств доказываются два основополагающих результата: 1) количество имен алгоритмов (а следовательно, и самих алгоритмов) счетно и 2) количество действительных чисел отрезка [0,1] – несчетно» [74, с. 188]. Это означает, что доступным для математического исследования является в прямом смысле *ничто* по сравнению с недоступным для него множеством фундаментальных объектов.

Н. Н. Лузин писал, что «до появления работ Кантора, с которого начался перевод всех понятий математики на язык теории множеств, континуум мыслили как чисто бесточечную протяженность» [116, с. 32]. Кантор восстановил идею дискретности. Непрерывное опять было сведено к дискретному. В частности, Кантор считает более удобным задание действительных чисел с помощью последовательностей, предлагаемое Гейне, чем Дедекиндом с помощью сечений, т. е. в этом случае он отдает предпочтение дискретному перед непрерывным [80, с. 328–329]. Знаменитая «диагональная процедура» Кантора, доказывающая несчетность континуума, заключается в попытке поставить в соответствие каждому действительному числу целое, т. е. построить соответствие между элементами непрерывного множества и дискретного. Поскольку такое соответствие оказывается невозможным, то из этого следует требуемый вывод. Одновременно с этим Кантор дискретизовал бесконечность, превратив ее из аморфной в упорядоченную.

Во 2-й половине XIX в. Вейерштрассом и другими была продемонстрирована возможность полной «арифметизации» анализа и теории функций. Это позволило А. Пуанкаре с гордостью заявить на Втором международном математическом конгрессе о том, что математика обрела надежный и прочный фундамент. «Теперь в математике остаются только целые числа и конечные или бесконечные системы целых чисел… Математика полностью арифметизирована… Мы можем сегодня сказать, что достигнута абсолютная строгость» [214]. Однако вскоре разразился новый кризис математики, связанный с ее основаниями, одной из причин которого являлось противоречие между непрерывным и дискретным. «Преодоление пропасти между областью дискретного и областью непрерывного, или между арифметикой и геометрией, есть одна из главных, пожалуй, даже самая главная проблема оснований математики», – писали А. Френкель и И. Бар-Хиллел [186].

Зарождение теории вероятности как науки в XVII в. связано с распространением азартных игр. Ее развитию способствовали расширяющиеся потребности страхования, связанные с ростом торговых связей и морских путешествий. Вначале это была дискретная дисциплина. Однако потребности науки и техники привели к тому, что в конце XIX в. в ряде задач вероятность начинает рассматриваться как непрерывная функция. Полученные ранее характеристики вероятности для дискретных задач переносятся на непрерывный случай, а в начале XX в. теория вероятностей строится на базе теории множеств и теории функций действительного переменного.

Классический математический анализ длительное время разрабатывался на нечеткой логической базе, что вызывало неудовлетворение некоторых математиков. Это привело к возникновению в начале XX в. конструктивного математического анализа. В анализе исключается понятие актуальной бесконечности, изучаются только те объекты, которые потенциально осуществимы, т. е. существует «алгорифм, дающий возможность по любой исходной „конкретной информации“ построить искомую „конкретную информацию“, т.е. построить знакосочетание определенного типа, находящееся в определенном отношении к предъявленному исходному знакосочетанию» [199, с. 27].

В начале XX в. усилился интерес к математическим вопросам, относящимся к взаимосвязи непрерывных и дискретных процессов и функций. В это время происходят революционные перемены в теоретической физике. М. Планк был вынужден отказаться от фундаментальных предпосылок классической физики: принципа непрерывного перехода из одного состояния в другое, равномерности распределения энергии, ее непрерывного поглощения и испускания. Взамен он выдвинул гипотезу о дискретности физического действия, которая сыграла огромную роль в дальнейшем развитии квантовой теории. «1900 год, когда Планк впервые сформулировал гипотезу квантов энергии, был не только годом нового столетия в календарном летоисчислении, но и началом новой эры в развитии теоретической физики» [201]. Уже через 5 лет Эйнштейн ввел дискретность туда, где, казалось, вряд ли она может присутствовать – в световые явления. В последующие годы квантовая механика рассматривала вопрос о синтезе дискретности и непрерывности в форме корпускулярно-волновой двойственности.

Кроме того, в XX в. начинают интенсивно развиваться телефонные коммуникации, радио, а затем и телевидение. Датский инженер Эрланг в 1906 г., решая задачу оптимизации работы телефонной станции, стал основателем нового научного направления в математике: теории массового обслуживания. Используя допущение, что вероятность появления заявки на телефонной станции в малый промежуток времени пропорциональна величине промежутка, Эрланг свел описание дискретного процесса появления заявок к системе дифференциальных уравнений. Вероятность появления заявки в этом случае является функцией времени. Однако на практике обычно рассматривают предельный случай установившейся работы линии при бесконечном времени. Тогда система дифференциальных уравнений превращается в легкую систему алгебраических уравнений.

При передаче непрерывного сигнала часто невозможно передать его полностью, в таких случаях передаются только отдельные его значения через определенные промежутки времени. Возникает важная задача восстановления всего сигнала с наименьшими искажениями по его отдельным дискретным значениям. Эта задача привлекла внимание В. А. Котельникова в 1933 г., а через пятнадцать лет ее важность подчеркнул К. Шеннон. Котельников получил неожиданный на первый взгляд результат: для некоторых классов непрерывных функций, используемых в связи, эти функции полностью восстанавливаются по своим дискретным значениям.

Новый этап взаимопроникновения непрерывных и дискретных методов начался после второй мировой войны. Его возникновение обусловлено двумя основными причинами. Во-первых, увеличение масштабов производства, научных исследований, межотраслевых и межгосударственных связей привело к необходимости изучения так называемых кибернетических систем, которые характеризуются большим числом составляющих их элементов и связей между ними, сложной иерархией. Во-вторых, появилась мощная вычислительная техника, способная исследовать системы. Следует заметить, что многие специалисты просмотрели начало нового этапа развития математики. Например, в конце 30-х гг., незадолго до появления компьютеров, один из крупнейших математиков XX в. А. Лебег писал: «…если все законченные точные вычисления, единственные, которые допускались древними, и сохранили свое математическое значение, …то их практическое значение уменьшилось, а порой и совершенно исчезло» [108, с. 42–43]. Лебег отрицал практическое значение тех разделов математики, которые не были связаны с бесконечными процессами и предельными переходами. Не случайно известный советский математик И. М. Яглом назвал это курьезом [208, с. 128–129].

С появлением и развитием вычислительной техники моделирование сложных процессов, происходящих в непрерывных средах, часто сводится к последовательности переходов от одних моделей к другим. Среди этих моделей есть и непрерывные, и дискретные. В этой цепочке исходной является дискретная модель взаимодействия элементарных физических объектов (атомов, молекул, электронов, ионов, фотонов и т. д.). В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда сплошная среда представляет собой разреженный газ не очень высокой температуры [209, с. 63]. Основным элементарным процессом здесь является столкновение двух молекул, рассматриваемых как идеально упругие шары малого радиуса. Однако объем информации, требующейся для детального описания среды, необычайно велик. Поэтому производится переход от дискретной модели системы N частиц, где N очень велико, хоть и конечно, к континуальной модели, в которой распределение частиц описывается функцией Больцмана, непрерывно зависящей от 7 параметров. Далее переходят к «более простому» бесконечному объекту, содержащему 4 параметра. И, наконец, разбивая полученное четырехмерное пространство на подобласти (ячейки), приходят к системе линейных уравнений с N неизвестными. Ячейку можно рассматривать как крупную частицу. Таким образом, сэкономив в информации и потеряв в точности, с помощью промежуточных непрерывных моделей переходят от исходной дискретной физической модели к дискретной расчетной модели «крупных частиц».

Континуализация первоначальной дискретной модели часто применяется там, где изучаемые характеристики имеют не индивидуальный, а статистический характер. С другой стороны, часто непрерывную величину удобно рассматривать как последовательность дискретных. Именно так, рассматривая силу как последовательность ударов, Ньютон получил формулу для центростремительной силы при движении точки по окружности.

Дж. фон Нейман выдвигает идею гибридной аналого-цифровой машины, которая позволит уменьшить трудности, гнездящиеся в диалектике дискретного и непрерывного [139, с. 125].

Возможности вычислительных машин позволяют получать с их помощью решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. В этом случае процесс решения алгоритмизируется, превращается в дискретный, и это естественно. Еще Г. Вейль писал: «Представление об итерации – ряде натуральных чисел – составляет основу математического мышления» [36, с. 127]. Часто решениями дифференциальных и интегральных уравнений являются непрерывные функции, но эти функции машина представляет их дискретными значениями в виде таблиц. Связь дискретного и непрерывного хорошо видна на примере разложения функций в ряд Тейлора. Здесь непрерывная функция задается с помощью дискретного набора коэффициентов. Еще одним примером является решение уравнений или получение значений иррациональных чисел с помощью вычислительных итерационных методов (метода Ньютона, метода хорд и т. д.). Вопросы дискретизации вычислительных процессов с помощью ЭВМ непосредственно связаны с вопросами соотношения актуальной и потенциальной бесконечности [83, 177].

Весьма важна с практической точки зрения задача интерполяции, когда по значениям функции в некотором конечном и дискретном подмножестве ее точек получают оценки поведения функции на всем множестве. В задаче об оптимальной квадратуре при той же локальной информации, что и в предыдущей задаче, вычисляется приближенное значение интеграла на всем отрезке.

В анализе существует большое число элементарных и специальных функций, для которых часто необходимо вычислять значения в конкретных точках. Этими вопросами занимался еще Чебышев, который, в частности, дал решение о наилучшем приближении функций $1/t$ и $t^{1/2}$ полиномами степени n и рациональными дробями. В настоящее время теория рациональных приближений функций – один из бурно развивающихся разделов вычислительной математики.

Некоторые математические модели, возникающие при исследовании кибернетических систем, задаются с помощью и непрерывных, и дискретных функций. Так, в микроэлектронике интегральная схема часто может быть задана в виде дискретного объекта – графа, элементы которого связаны между собой непрерывными функциями. Естественно, что при исследовании таких моделей сочетаются непрерывные и дискретные методы.

Многие математические задачи можно рассматривать и как непрерывные, и как дискретные. Например, в задаче линейного программирования множество допустимых планов является непрерывным. Вместе с тем оптимальное решение задачи можно искать среди некоторого конечного дискретного множества планов. На этом основан известный алгоритм симплекс-метода. Однако с помощью дискретного подхода не удалось доказать полиномиальную разрешимость задачи. А метод эллипсоидов, основанный на непрерывных деформациях пространства решений, позволил это сделать. Суть метода состоит в замене текущего эллипсоида меньшим, который тоже содержит некоторое решение (если оно существует). После достаточного конечного числа итераций можно либо обнаружить решение, либо показать его отсутствие.

Еще один пример такого рода – функции Радамахера, являющиеся коэффициентами двоичных разложений вещественных чисел. Эти функции разрывны как функции вещественной переменной, но становятся непрерывными в 2-адической топологии.

В последнее время компьютеры широко используются для построения различных изображений, их сложных проекций, деформаций и перемещений при кинопроизводстве, на телевидении, в проектировании и т. д. Это привело к развитию компьютерной графики. С помощью дискретных сигналов, передаваемых компьютером, воспроизводятся непрерывные объекты.

В настоящее время практически любая математическая дисциплина изучает как непрерывные, так и дискретные математические модели. В алгебре наряду с конечными группами рассматриваются непрерывные и топологические. Теория чисел изучает целые числа и различные приближения иррациональных чисел. Теория управления рассматривает управление непрерывными и дискретными процессами. Даже в анализе наряду с непрерывными преобразованиями изучаются дискретные. Такие примеры можно продолжить.

С одной стороны, математика разрабатывает методы для более совершенного овладения природной непрерывностью, бесконечностью, неопределенностью посредством дискретного, конечного и определенного. С другой стороны, совершенный, отлично разработанный аппарат непрерывной математики часто успешно применяется в дискретных дисциплинах, связанных с исследованием кибернетических систем, появившихся относительно недавно. И это одно из проявлений единства математики.

ГЛАВА 2

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ И ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИСКРЕТНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Высшая нервная деятельность человека определяется фактически работой огромного числа «дискретных устройств» – нейронов, каждый из которых может находиться лишь в одном из двух возможных состояний возбуждения и торможения. Поэтому при анализе информационной сущности процесса мышления следует обращать особое внимание на дискретные формы задания и переработки информации. Объясняя причину использования дискретных моделей при описании процесса мышления, академик Н. М. Амосов писал: «Любой интеллект функционирует дискретно. Если говорить точнее, то это сочетание непрерывных и дискретных процессов. Впрочем, существуют ли вообще чисто непрерывные процессы? Во всяком случае, в сложных системах любое непрерывное есть только статистика большого числа отдельных событий» [5, с. 85].

Многие аспекты человеческого мышления можно описать с помощью булевых функций, теории графов и других разделов дискретной математики. Не случайно стало обычным сопоставление мозга и ЭВМ. Мозг и вычислительная машина – «это действительно механизмы одного типа – в том смысле, что они достигают сходных результатов с помощью сходных в своей основе средств» [45, с. 33].

Вместе с тем следует отметить ограниченность только дискретного подхода. Дискретные машинные модели, как и любые модели, всегда будут выглядеть упрощенно по отношению к оригиналу, ибо машины не могут моделировать все содержание психического процесса. С их помощью, например, трудно смоделировать интуицию, воображение, предчувствие, симпатии и т. д. Г. Биркгофф писал: «И правда, хотя можно думать о людях как о гибридных вычислительных машинах, в действительности они представляют собой нечто гораздо большее. По сравнению с людьми даже гибридные (последовательностные) вычислительные машины оказываются весьма ограниченными, если их рассматривать как личности. Они имеют рутинный ум: они догматичны, лишены воображения и привязаны к шаблону. Они не способны воспринимать даже очевиднейшие количественные факты об окружающем континууме, если только они не снабжены специальным арифметическим устройством (и не консультируются с численным аналитиком)» [21, с. 51]. Между человеком и машиной не количественное, а качественное различие.

Кроме того, как отмечал Тьюринг, дискретные моделирующие устройства, строго говоря, не существуют: «В действительности всякое движение непрерывно. Однако имеется много видов машин, которые удобно считать машинами с дискретными состояниями» [178, с. 28].

Многие специалисты обращают внимание на недостаточность дискретного подхода, невозможность сведения процесса мышления только к математическим и логическим соотношениям. Например, физик Д. Бом замечает: «Процессы мышления и квантовые системы подобны друг другу в том отношении, что их нельзя разложить на слишком мелкие независимые элементы, так как „внутренняя“ природа каждого элемента не есть свойство, существующее отдельно и независимо от других элементов, а, наоборот, это свойство возникает частично из связи одного элемента с другим… В процессе мышления составляющие представления не разделены, а текут непрерывно и неделимо… Основной процесс мышления, вероятно, не может быть изображен как логический» [26, с. 205–206]. Это означает, что процесс мышления в отличие от математики, где, например, понятие множества становится четким лишь в предположении, что элементы данного множества можно различать и рассматривать по отдельности, не является дизъюнктным. Человек лишь дизъюнктно с помощью вопросов себе управляет континуальным потоком мысли. Кроме того, математическая и психологическая дискретности отличаются друг от друга, поскольку дискретный объект в математике является заданной абстракцией, а в нейроне между смежными импульсами существуют непрерывные биофизические, биохимические и другие процессы.

Восприятие первых математических понятий «единица» и «много», которые являются дискретными, происходит у ребенка так же, как, по мнению русского математика В. В. Бобынина, это происходило у первобытного человека (см. Главу 1). В дальнейшем в связи с необходимостью определять количество различных объектов ребенок начинает воспринимать и другие числа. Начальная детская математика является дискретной. Ребенок на практике воспринимает три первичных понятия натуральных чисел, которые предложил в 1889 г. Дж. Пеано: «единица», «следует за», «натуральное число». Аналогию с первобытными людьми можно продолжить. При счете ребенок также часто загибает пальцы, как и описанные Н. Н. Миклухо-Маклаем папуасы Новой Гвинеи [132, с. 141]. Это дало повод Ж. Пиаже поиронизировать: «Подумайте о запоздалом введении Кантором операции приведения элементов во взаимно однозначное соответствие, которое является одной из главных операций при формировании понятия целого числа у ребенка и у дикаря» [154, с. 13]. Ребенок начинает отличать дискретное и непрерывное примерно так, как и первобытный человек. Однако Пиаже отмечает, что в возрасте 2–8 лет ребенок рассуждает конфигурациями, т. е. его мышление дискретно, и он начинает мысленно представлять непрерывную систему перемещений лишь после того, как научится выполнять эти перемещения материально. Поэтому при сравнении отрезков разум ребенка не идет дальше конкретного приблизительного деления. Он будет утверждать, что большой отрезок равен примерно пяти (иногда пяти с половиной) малым. Ребенок рано выучивается считать. Но, как утверждает известный математик Г. Фройденталь, он еще не понимает зависимости между счетом и количеством. «Ребенок обретает порядковое число и в какой-то момент констатирует его инвариантность при взаимно однозначных отображениях (например, при перестановках); он не формирует конкретное число – также не бессознательно – как класс взаимно эквивалентных множеств» [188, с. 119].

Большинство исследователей считают, что закладывание начал математического мышления происходит на основе ощущений, восприятий и представлений, т. е. чувств, а не разума. Особенно большое значение имеет зрение. В частности, Биркгофф пишет: «Блестящие достижения греческой математики зависели от сочетания логики со зрительным воображением, без предпочтения той или иной составляющей… Даже ограниченное черно-белыми образами человеческое зрение способно делать гораздо больше, чем идентификация подмножеств возбужденных нейронов» [21, с. 39, 51].

В процессе восприятия в коре головного мозга создается модель объекта (носителя информации), которую Н. М. Амосов называл корковой моделью [6, с. 44]. Общую схему этого процесса можно изобразить так: объект (носитель информации) – его сигналы – кодирование сигналов – восприятие – расшифровка сигнала – образ (корковая модель). Однако корковые модели, в силу особенностей человеческой психики, характеризуются неустойчивостью. С одной стороны, это хорошо, поскольку все время происходит обновление, исправление, улучшение модели, с другой – работать с неустойчивой моделью неудобно. Поэтому в процессе обучения большое значение приобретает преобразование корковых моделей в наглядные модели, к которым обучающийся будет постоянно обращаться во время некоторого фрагмента обучения. Так, цифра является моделью числа, геометрические фигуры и тела – моделями геометрических объектов. Графические модели, частично сохраняющие истинные структурные соотношения между элементами объекта, получаются при воспроизведении пространственной корковой модели на плоскости.

При восприятии человек часто должен распознать полученный образ и отнести его к некоторому классу. Самый простой путь для этого – сравнение образа с эталоном. При распознавании, например, буквы образ, порождаемый внешним сигналом, сравнивается со всеми эталонами одновременно. Возбуждаются все возможные эталоны букв, и тот из них, который реагирует на образ сильнее других, и есть искомый эталон. В то же время, если человеку дать ощупывать выпуклую, невидимую для него букву, он часто назовет ее, произведя ощупывание не полностью. При таком восприятии человек пользуется построенным им дискретным набором характерных признаков, причем он может использовать не все признаки. Иногда человеку приходится воспринимать образы, для которых у него не существует эталонов. (Наиболее характерный пример – восприятие абстрактной живописи.) При этом он выделяет какие-то фрагменты образов, обладающие некоторой отличительной особенностью. Во всех описанных выше случаях происходит организация и упорядочение информации.

Неожиданность, присутствие какой-нибудь необычной информации в потоке привычной ухудшает процесс восприятия. Так, в опытах Брунера и Постнера [29, с. 90] по распознаванию карт время от времени появлялись странные карты, например, красные шестерки пик или трефей. Время распознавания этих карт было намного больше обычного. Однако при повторном появлении таких карт это время постепенно уменьшалось.

В процессе обучения учитель является источником информации для обучаемого. Он передает информацию (в основном непрерывную) в виде закодированных дискретных сигналов (слов). Кроме этого, обучаемый часто производит перекодировку сигнала (например, составляет конспект лекции), при которой тоже происходит потеря или искажение информации. Существенным является расшифровка сигналов с наименьшей потерей информации. Но за дискретными символами языка стоит континуальное многозначное содержание. (Не случайно в произведениях больших писателей и поэтов разные люди часто находят разный смысл.) В связи с этим важное значение в процессе обучения приобретают повторяемость сигнала и избыточность информации.

Сам процесс обучения также имеет непрерывные и дискретные свойства. «Для педагогического процесса характерно единство непрерывности и дискретности: с одной стороны, возрастание количественных изменений в развитии обучаемых, а с другой – качественный переход – „скачки“» [171, с. 11].

Всякий реальный преобразователь информации обладает, по крайней мере, тремя ограничениями, делающими возможным дискретный подход к описанию его работы: чувствительностью, разрешающей силой и пропускной способностью [53]. С одной стороны, названные ограничения ведут к необходимости расчленения на элементы всякой даже непрерывной информации. Необходимо заботиться, чтобы в процессе обучения порции информации не превосходили порога чувствительности ученика: слишком большие порции затрудняют их восприятие учеником. В то же время из-за ограничений часто дискретная информация воспринимается как непрерывная, например, фотографии в газете, состоящие из отдельных точек. Зрительный образ сохраняется в глазу в течение 150 миллисекунд после того, как на глаз не действует свет. Это приводит, в частности, к непрерывному восприятию кадров в кино.

При решении разных непрерывных задач восприятия мозг часто сам разбивает их на меньшие подзадачи. Предположим, что нам показан рисунок, на котором изображены геометрические тела, частично заслоняющие друг друга. Спрашивается, как нужно сопоставлять разные линии на рисунке, чтобы определить отдельные тела? Гуман, проанализировав решение ряда задач такого типа [210], выяснил, что происходит автоматическая декомпозиция непрерывного изображения, причем наибольшее внимание уделяется анализу пересечений, которые несут максимальную информацию. Но часто дискретного анализа фрагментов недостаточно для того, чтобы сделать вывод о существовании трехмерного тела. Рисунки Пенроуза, Эсхера, Альберса [114, с. 39–41]) задают «невозможные фигуры», фрагменты которых могут существовать, но непрерывное соединение этих фрагментов невозможно. Для выяснения этой невозможности необходим непрерывный переход от одного фрагмента к другому.

Проблема дискретизации еще более важна при восприятии речи. Иллюзией является то, что мы слышим отдельные слова. Устная речь, как правило, состоит из неясных звуков, невнятно произнесенных слогов, пауз, скороговорок. Видимой связи между разрывами речи нет. Человеческий мозг сам производит нужную сигментизацию речи, выделяет и анализирует произносимое. Если же собеседник говорит на иностранном языке, то начинающий слушатель, даже овладевший необходимым словарным запасом языка, воспринимает речь как сплошной поток. Это требует от учителя (особенно в младших классах) хорошей дикции, медленного и внятного выговаривания предложений, несущих основную информацию урока, четкой артикуляции.

В процесс обучения следует дискретизировать решение задач, т. е. разбивать их на отдельные подзадачи. Еще Р. Декарт учил расчленять каждую изучаемую задачу на столько частей, на сколько можно, чтобы их было легко решать [64, с. 272]. Иерархическая структура выделения подзадач, как правило, облегчает решение и позволяет ученику проводить его сознательно. Но это может произойти лишь в том случае, когда он четко осознает иерархию, включение меньших задач в большие, возможность получать решение вторых из решения первых. Иначе может возникнуть ситуация, описанная в русской поговорке: из-за деревьев леса не видно. Не случайно Лейбниц писал: «Это правило Декарта малоэффективно, поскольку искусство разделения... остается неподдающимся истолкованию. Разделяя задачу на неподходящие части, неопытный решающий может только увеличить свои затруднения» [211, с. 331]. Роль учителя и заключается в обучении ученика умению эффективно разделять задачу.

Другая степень дискретизации при решении задачи – дискретизация процесса мышления – описана Д. Пойа: «Мы будем различать 4 ступени в процессе решения. Во-первых, мы должны понять задачу; мы должны ясно увидеть, что в ней является искомым. Во-вторых, мы должны усмотреть, как связаны друг с другом различные элементы задачи, как неизвестное связано с данными. Это необходимо, чтобы получить представление о решении, чтобы составить план. В-третьих, мы осуществляем наш план. В-четвертых, оглядываясь назад на полученное решение, мы вновь изучаем и анализируем его» [155, с. 16].

Выявление этих четырех уровней решения математических задач дает представление о ходе математического мышления, математического познания. Первый уровень – это постановка задачи, второй – построение модели. Третий уровень – исследование модели – есть чисто аналитический уровень математического мышления, уровень оперирования со знаками, символами. Четвертый же уровень – это, как пишет Д. Пойа, эвристический уровень мышления, исследование полученного решения. На данном уровне вспыхивают необъяснимые и «чудотворные идеи».

Большое значение в процессе обучения имеет запоминание материала. Русская пословица гласит: «Повторение – мать учения», что несомненно так, но буквальное следование пословице превращает обучение в занудливый процесс.

Рассмотрим заучивание списков (слов, символов, букв, цифр и т. д.), которые несут неупорядоченную информацию для обучаемого. Опыты, проделанные исследователями [133, с. 132–148], говорят, что обучаемые следуют в основном двум правилам. Во-первых, они пытаются насытить смыслом предложенные комбинации (вспомните мнемонические правила для запоминания цветов радуги или числа р) или придумать закон, по которому можно эти комбинации восстановить. Во-вторых, они дискретизируют предложенный материал, проявляют тенденцию к усвоению его отрезками, организованными как смысловые единицы. «Результатом этой процедуры является иерархическая организация запоминаемого списка. Оказывается, что список распадается, скажем, на 4 части, каждая из которых в свою очередь делится на более мелкие части, а последние, возможно, состоят из слов, полученных на основе бессмысленных слогов» [133, с. 138]. Казалось бы, создание сложных иерархий увеличивает число необходимых ассоциаций, однако следует иметь в виду, что восприятие человека имеет довольно узкие границы. «Наибольшее количество единиц, которое может запомнить средний человек после одного предъявления, равно примерно семи, а если мы хотим обеспечить уверенность в том, что он никогда не ошибется, нам придется сократить это число до четырех или пяти. Таким образом, только около четырех или пяти символов (слов, элементов, пунктов, списков, предметов, групп, мыслей, идей и т. д.) может без затруднений сформироваться в нашем сознании одновременно как новый ряд, которому мы можем дать название… Поэтому, когда заучивающий группирует и переименовывает элементы списка, он тем самым эффективно сокращает длину списка» [133, с. 140].

Кроме того, как показал академик А. Н. Леонтьев [112, с. 430], применение вспомогательных знаков (картинок) дает повышение качества запоминаемых слов до 80 % у школьников. Большое значение в процессе запоминания имеет ритм, который определяет повторяющиеся пространственно-временные и смысловые отношения между объектами и явлениями. Ритмическая организация придает устойчивость процессу запоминания, уменьшает забываемость [66]. О значении упорядочения в процессе запоминания пишет и А. Пуанкаре: «Математическое рассуждение не есть простая совокупность силлогизмов, это силлогизмы, помещенные в определенном порядке, и порядок, в котором эти элементы расположены, гораздо более важен, чем сами элементы. Если я чувствую этот порядок, так что вижу рассуждения в целом, то мне не страшно забыть один из элементов: каждый из них станет на место, которое ему приготовлено, причем без всякого усилия со стороны памяти» [159, с. 137].

Восприятие дискретной математики обучаемыми отличается от восприятия непрерывной. Например, во время работы на первом курсе механико-математического факультета БГУ автор заметил, что даже те студенты, которые легко решают сложные непрерывные задачи, часто приходят в затруднение при решении относительно простых дискретных. Объяснение этому, видимо, следующее. К 14–15 годам умственное развитие детей приводит к тому, что они начинают воспринимать формальные отношения [29, с. 360–362]. Ученики лучше понимают абстракции, способны перейти от действий по решению конкретных задач к обобщениям, построениям общих правил и алгоритмов решения задач определенного типа. Многие из них предпочитают пользоваться готовыми приемами, формулами и алгоритмами, нежели думать. Так, большинство школьников лучше решает алгебраические задачи, решение которых легче алгоритмизировать, чем геометрические. Поэтому задачи, которые не укладываются в заданные схемы, вызывают у них затруднения. Задачи по дискретной математике более индивидуальны, чем задачи, например, по алгебре; практически каждую задачу, в частности, по теории графов нужно решать отдельно, пользуясь при этом общими для всех задач фактами теории. Поэтому изучение дискретной математики необходимо для будущих учителей, поскольку оно не только дает им необходимый в будущем объем знаний, но и развивает их умственные способности.

Учет психологических особенностей восприятия непрерывного и дискретного при обучении математике позволит улучшить это обучение и повысить его качество.

ГЛАВА 3

НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗУЧЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Открытия Ньютона и Лейбница вывели на лидирующие позиции непрерывную математику. Однако с тех пор в математическом мире кое-что изменилось. Увеличение масштабов производства, научных исследований, межотраслевых и межгосударственных связей привело к необходимости изучения так называемых кибернетических систем, которые характеризуются большим числом составляющих их элементов и связей между ними, сложной иерархией. Языком описания таких систем является дискретная математика, причем многочисленные и разнообразные задачи могут быть описаны относительно небольшим числом дискретных моделей.

Появление компьютера привело к изучению информатики в школах и вузах. Компьютер работает дискретно; алгоритмы, с помощью которых он решает задачи, состоят из дискретных шагов и сплошь и рядом основаны на дискретной модели задачи. Сегодня для того, чтобы быть современным человеком, способным войти в новый «компьютерный» мир, в котором придется искать лучшие решения и кратчайшие пути в лабиринте возможностей, выпускник вуза должен не только знать элементы дискретной математики, но и уметь думать на языке дискретных моделей.

Первые математические понятия, воспринимаемые ребенком, являются дискретными. В школе же после знакомства с целыми числами дискретная математика надолго исчезает из обязательной программы. В программе есть информатика, но она до сих пор остается предметом, почти лишенным теоретической базы, которую дискретная математика как раз и составляет.

Министерство образования Республики Беларусь сделало первый шаг по включению элементов дискретной математики в школьную информатику: в программу для школ с углубленным и повышенным уровнем изучения информатики включен большой раздел по теории графов [79, с. 30–37; 97]. Подготовлено и издано учебное пособие, соответствующее этой программе [97]. Хотелось бы надеяться, что этот шаг не окажется последним. Но даже при существующем положении есть много возможностей для знакомства и изучения дискретной математики.

Первоначально это можно осуществлять уже в детском саду. Рисунки (графы) помогут задать конечные множества и отношения между их элементами. При этом происходит первое знакомство детей с основами моделирования: ведь те точки, которыми обозначают, например, людей, определяют их основные свойства, необходимые для решения конкретной задачи, может быть, пол, отношение родства, профессию, и не учитывают ненужные. Описание различных соответствий готовит ребенка к восприятию понятия «функция». Опыт знакомства детей с элементами теории графов в детском саду описаны Ф. и Ж. Папи [151].

В младших и средних классах также следует продолжать решение задач на установление соответствий, что позволит в дальнейшем подвести школьников к идее сравнения мощностей множеств (на факультативах в старших классах) с помощью установления соответствия между их элементами.

С первого же класса можно задавать с помощью графов алгоритмы решения задач и примеров. Вначале это будут простые примеры выполнения арифметических действий или сравнения чисел. В вершинах графов будут записаны некоторые числа, а на ребрах – те операции, которые нужно выполнить над ними. В дальнейшем алгоритмы можно усложнять. В частности, в вершинах можно писать не конкретные числа, а переменные, которые могут принимать различные значения. В этом случае результаты выполнения действий будут меняться в зависимости от начальных условий, и школьнику станет ясно, что алгоритм решает не конкретную, а массовую задачу. В дальнейшем в алгоритмы могут быть встроены не только арифметические, но и логические операции, т. е. схемы превратятся в блок-схемы алгоритмов. Например, с помощью блок-схемы можно задать алгоритм решения квадратного уравнения. Большое число блок-схем алгоритмов, относящихся к школьной математике, дано в книге Б. С. Каплана, Н. К. Рузина, А. А. Столяра «Методы обучения математике» [81].

При изучении информатики роль графов как языка существенно возрастает. С помощью графов можно описывать сложные алгоритмы решения задач, причем это описание обладает большой наглядностью. С другой стороны, с помощью графов можно объяснять строение различных используемых в программировании структур, например, очередей, стеков, деков, куч и т. д. и операций над ними.

Изучение элементов булевых функций и математической логики несомненно облегчит в будущем ученику восприятие теории множеств, а элементы комбинаторики помогут лучше понять теорию вероятностей [7]. Кроме того, элементы дискретной математики могут существенно использоваться при решении различных методических задач обучения математике: обучение понятиям «функция», «модель», «необходимые и достаточные условия», «математическая индукция» и т. д. (см. Главу 7).

Широкое распространение дискретных математических моделей в реальной жизни вызывает необходимость изучения дискретной математики практически на всех естественных факультетах. (Следует отметить, что эти модели стали появляться и в гуманитарных науках.) Не случайно существуют такие книги как «Дискретная математика для инженера» и «Дискретная математика для программистов» [105, 146]. Схема изучения на технических и экономических факультетах должна быть, по-видимому, следующей: 1) теоретические основы дискретной математики (комбинаторика, булевы функции, теория графов и т. д.); 2) распространенные дискретные математические модели и универсальные методы их исследования, причем желательно рассматривать в паре модель и метод, ее изучающий (линейные оптимизационные модели и симплекс-метод, задача коммивояжера и метод ветвей и границ, задача о траектории и динамическое программирование, задача о назначениях и венгерский алгоритм, транспортная задача и метод потенциалов и т. д.); 3) приемы сведения реальных производственных задач, возникающих в отрасли, к универсальным моделям; 4) приемы компьютерного исследования распространенных в отрасли моделей с помощью пакетов стандартных программ.

На математических факультетах наряду с вопросами, названными в первом и втором пунктах предыдущего абзаца, обязательно должна изучаться прикладная теория алгоритмов. Ее содержание должны составлять: универсальные задачи, присутствующие практически в любой дискретной задаче (сортировка, исчерпывающий поиск, эффективные структуры данных и т. д.); приемы сведения сложных задач к более простым (декомпозиция, принцип «разделяй и властвуй», рекуррентные соотношения и т. д.); оценка трудоемкости алгоритмов и NP-полнота.

Большое значение имеет изучение дискретной математики на педагогических факультетах: ведь студенты этих факультетов через некоторое время определят отношение к ней в школах. Ректор Московского областного педагогического университета академик В. Л. Матросов замечает: «В наше время – время бурного развития дискретной математики – выпускник математического факультета педагогического института не владеет ее основными понятиями. Существующие курсы по информатике и вычислительной технике не меняют сути дела, поскольку посвящены более технической стороне вопроса, чем основополагающим понятиям» [122, с. 1]). Иногда в вузах недостаточно полно изучаются даже те разделы дискретной математики, которые входят в государственные школьные программы. Для повышения качества подготовки учителей необходима коррекция программ с увеличением часов на изучение дискретной математики.

Вместе с изучением элементов дискретной математики должна изучаться и методика ее преподавания ученикам, поскольку «только методика преподавания математики готовит студентов к обучению учащихся умениям абстрагировать, моделировать, обобщать, алгоритмизировать, вычислять, искать рациональные пути решения больших и малых проблем, решать экстремальные задачи, проводить доказательство, анализ, исследование, построение пространственных фигур и их сечений, устанавливать функциональную зависимость, выполнять различные операции на множестве действительных и комплексных чисел и многому другому» [142, с. 8].

В связи со сказанным возрастает роль послевузовской переподготовки учителей. Она позволит ознакомить слушателей (хотя бы фрагментарно) с некоторыми разделами дискретной математики, которые им неизвестны по институту. Следует отметить усилия минских институтов повышения квалификации учителей в этом направлении.

В табл. 1–5, расположенных ниже, показаны разделы и элементы дискретной математики на разных этапах ее изучения и решаемые с ее помощью задачи.

Таблица 1

Дошкольное образование

Знания	Пропедевтика	Развитие сообразительности	Воспитание
Единица Много Следует за Натуральное число Натуральный ряд Сложение и вычитание небольших натуральных чисел	Наипростейшие модели Соответствия (функции) Отношения Графы	Использование моделей для описания ситуаций и для решения задач Полный перебор всех комбинаций (вариантов)	Воспитание четкости и строгости мышления

Таблица 2

Начальное школьное образование

Знания	Пропедевтика	Развитие сообразительности и логического мышления	Воспитание
Арифметические действия над небольшими натуральными числами Арифметические действия над многозначными натуральными числами Определение целочисленного времени на циферблате Измерение длин отрезков Знакомство с весами	Наипростейшие модели Алгоритмы Соответствия (функции) Отношения Графы Разложение задач на простейшие (декомпозиция)		Воспитание строгости мышления, аккуратности при декомпозиции, точности в формулировке определений и постановке задач.

Таблица 3

Неполное среднее и среднее школьное образование

Знания		Пропедевтика	Служебные функции	Развитие сообразительности и логического мышления	Развитие воображения
Математика	Информатика				
Целые числа и действия над ними Делимость целых чисел, ее признаки, разложение целых чисел на множители, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное Рациональные числа и действия над ними Представление действительных чисел с помощью рациональных Дискретные функции Числовые последовательности Прогрессии Алгоритм Алгоритм Эвклида Схема Горнера Теорема Виета Обобщенная теорема Виета Принцип Дирихле	Математическая модель Системы счисления Алгоритм Алгоритмы целочисленной арифметики Структуры данных (список, стек, очередь) Сортировка и поиск Рекуррентные соотношения Генерация перестановок и сочетаний Алгоритмы решения задач на графах (поиск в ширину и глубину, топологическая сортировка, нахождение кратчайших путей, потоковые алгоритмы, построение минимального остовного дерева) Полный перебор с возвращением Программирование симплекс- метода	Модель Графовая модель Алгоритм Трудоемкость (сложность) алгоритма Изоморфизм Эквивалентность	Графы как язык для построения моделей Описание соответствий и дискретных функций Иллюстрация биективных, инъективных и сюрьективных отображений Представление алгоритмов в виде блок-схемы Использование при обучении математической индукции Использование при изучении понятия «необходимые и достаточные условия» Иллюстрация строения структуры данных и операций над ними Описание всех возможностей при полном переборе		

Окончание табл. 3

Знания		Пропедевтика	Служебные функции		
Математика	Информатика				
Элементы комбинаторики Элементы математической логики Булевы функции Дискретная вероятность Элементы кодирования Элементы теории графов Элементы теории расписаний Линейное программирование Транспортная задача Динамическое программирование Метод ветвей и границ Матрицы и операции над ними Простейшие группы (группа перестановок, группа преобразований) Понятие поля и кольца	Программирование операций над матрицами			Развитие сообразительности и логического мышления	Развитие воображения

Таблица 4

Среднее специальное образование

Знания		Служебные функции	Развитие соображения и логического мышления
Математика	Информатика		
Модель Алгоритм Элементы кодирования Матрицы и операции над ними Элементы дискретной математики	Модель Алгоритм Системы счисления Генерация перестановок и сочетаний Структуры данных Сортировка и поиск Способы исследования дискретных моделей Сведение реальных задач в отрасли к дискретным математическим моделям Исследование дискретных моделей с помощью пакетов прикладных программ	Представление алгоритмов в виде блок-схем Иллюстрация строения структур данных и операций над ними Описание с помощью дискретной математики ситуаций в изучаемых дисциплинах	

Таблица 5

Высшее образование

Математические, педагогические , технические и экономические факультеты		
1. Теоретические основы дискретной математики (комбинаторика, математическая логика, булевы функции, математическое программирование, теория графов и т. д.) 2. Универсальные дискретные математические модели и способы их исследования (линейные оптимизационные задачи и симплекс-метод, потоковые задачи и алгоритм Форда–Фалкерсона, задача коммивояжера и метод ветвей и границ, транспортная задача и метод потенциалов, задача о траектории и динамическое программирование, целочисленные линейные задачи и метод отсечений и т. д.)		
Математические факультеты	Педагогические факультеты	Технические и экономические факультеты
1. Прикладная теория алгоритмов (эффективные способы сведения дискретных оптимизационных задач к более простым, эффективные способы решения простых – атомарных – задач) 2. Теория NP-полноты	1. Методика преподавания дискретной математики в школе 2. Практическая связь дискретной математики и информатики	1. Использование дискретной математики для описания ситуаций в изучаемых дисциплинах 2. Обучение приемам сведения реальных производственных задач, возникающих в отрасли, к дискретным математическим моделям 3. Компьютерное исследование наиболее распространенных в отрасли дискретных математических моделей с помощью пакетов прикладных программ

ГЛАВА 4

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ИНФОРМАТИКИ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

В этой главе мы будем параллельно рассматривать две системы обучения: систему обучения информатике и систему обучения дискретной математике. Поводом для такого сопоставления являются два обстоятельства. Во-первых, с точки зрения системного подхода эти системы имеют много общего. Во-вторых, существует глубокая взаимосвязь между преподаванием этих разделов. При обучении информатике можно выделить два взаимосвязанных аспекта: обучение общению с компьютером и обучение используемой при этом математике. Фундаментом информатики является дискретная математика, хорошее знание которой облегчает школьникам освоение компьютера и использование его для решения практических задач. Кроме того, дискретную математику можно использовать для развития математических и логических способностей учеников, повышения их интеллекта.

Обучение и информатике, и дискретной математике следует рассматривать как многоцелевой, многоуровневый, многофункциональный процесс, состоящий в целенаправленном воздействии на элементы системы обучения и их связи. Она одновременно является большой и сложной. Большая система характеризуется значительным количеством элементов, сложной иерархией и огромным числом связей. Для того, чтобы получить сведения о ней, наблюдатель должен рассматривать ее по частям. Основными признаками сложной системы являются существование составной цели, существования одновременно многих структур, невозможность построения математической модели, одновременное и параллельное решение различных задач, многокритериальность, наличие помех, затрудняющих анализ процессов.

Существует обширная литература, посвященная теории систем и системному анализу. Отметим работы В. Г. Афанасьева, И. В. Блауберга и Э. Г. Юдина, Б. В. Бусленко, В. Н. Садовского, М. И. Сетрова, В. С. Тюхтина [11, 22, 32, 166, 169, 179]. Различные аспекты использования системного анализа в педагогике рассматривались В. К. Дьяченко, Ю. А. Конаржевским, Г. И. Леганьким, И. Я. Лернером, Л. М. Панчешниковой и другими [68, 91, 109, 113, 150].

В каждой системе следует отличать ее состав и структуру. Состав – это множество элементов, в нее входящих. При обучении можно выделить активные элементы (ученики, которых необходимо обучить; учителя, выполняющие процесс обучения; методисты, подготавливающие учебные пособия и программы; администраторы, обеспечивающие и контролирующие процесс обучения), служебные элементы (вычислительная техника, программы обучения, учебники и методические пособия). Структура – это способ связи этих элементов.

Для успешного функционирования системы она должна быть целостной. Под этим следует понимать то, что целостная система не является механическим объединением объектов, ее составляющих, а объединение этих объектов, их взаимодействие обусловливает наличие новых интегративных качеств, не свойственных образующим ее частям. Целостная система воздействует на свои составляющие и преобразует их согласно своей природе. При этом часто изменяются не только исходные элементы, но могут образовываться и новые.

Целостность системы во многом определяется существованием единой цели у всех ее активных элементов. «Концептуальные подходы к курсу „Информатика“ в реформируемой общеобразовательной школе Республики Беларусь» определяют общую цель изучения курса «Информатика», чтобы «подготовить выпускника общеобразовательной школы к полноценной жизни в современном обществе, где уровень владения информационными технологиями определяет качественный уровень его жизни… Общеобразовательная базовая школа должна и имеет возможность обеспечивать подготовку учащихся до уровня параметрического пользователя. Под этим понимается способность выпускника пользоваться готовыми программами и фактически обходиться без помощи программиста… Особенного внимания заслуживают дети, проявившие склонность к работе за компьютером на следующем уровне, – парапрограммист. Это означает владение языками сверхвысокого уровня, умение настраивать универсальные программные средства на конкретные прикладные задачи, способность переходить от абстрактного к конкретному и наоборот» [94, с. 105].

На взгляд автора, цель обучения информатике должна быть более общей. С одной стороны, за последние годы информатика из прикладной науки о методах и средствах автоматизации обработки данных превратилась в фундаментальную науку об информации и информационных процессах в природе, обществе и технике, с другой – вычислительная техника и средства телекоммуникаций приобрели большое распространение в повседневной жизни. Поэтому обучение информатике – это формирование у обучаемых представления о современном подходе к изучению реального мира, о широком использовании вычислительной техники в научных исследованиях и повседневной жизни, обучение учащихся умению владеть компьютером как средством решения практических задач.

Целью изучения дискретной математики является обеспечение учащихся знаниями для продуктивной деятельности в современном информационном мире, вооружение их мощным средством исследования реального мира с помощью вычислительной техники, развитие умственных способностей.

Информатика и дискретная математика преследуют еще одну цель – формирование двух взаимодополняющих стилей мышления учеников [28]. Логико-алгоритмическое мышление предполагает умение строить логические утверждения о свойствах данных и делать запросы к поисковым системам; мыслить индуктивно и дедуктивно при анализе своих затруднений в работе с ЭВМ; формализовать свои намерения вплоть до записи на одном из алгоритмических языков. Системно-комбинаторное мышление подразумевает видение предметов и явлений в целостности, взаимосвязи; способность иметь несколько взаимодополняющих точек зрения на один предмет; умение манипулировать понятийными и орудийными средствами из различных дисциплин при построении моделей.

К сожалению, обучение системно-комбинаторному мышлению является редкостью и в средней, и в высшей школе, где обучаемым часто предлагают определенный набор знаний, не заботясь о межпредметных связях. В этом случае информатика должна служить интегрирующей, объединяющей дисциплиной.

Цель – это результат, который желательно достичь в будущем. Как во всех сложных системах «глобальная» цель формулируется в достаточно общем виде, в абстрактных понятиях. Каждый элемент системы должен действовать во имя достижения основной цели. Однако необходимо суметь декомпозировать «глобальную» цель на более конкретные для подсистем и элементов.

Для целостной системы недостаточно совершенствование отдельных ее частей. Отсутствие единства часто приводит к тому, что улучшение конкретных элементов системы не приводит к улучшению системы в целом. Например, наличие в школе самых современных компьютеров не принесет большой пользы, если в этой школе не будут работать учителя высокой квалификации.

В любой системе между ее отдельными частями существуют тесные взаимосвязи. Более подготовленные ученики требуют более квалифицированных преподавателей. Наличие конкретных школьных или вузовских программ определяет содержание знаний и поведение учителей, администрации и преподавателей вузов. В случае существования различных программ учитель, скорее всего, выберет ту, разделы которой лучше знакомы ему по обучению в институте. Возможности вычислительной техники сильно влияют на стратегию учителя в выборе содержания обучения, приемов общения с компьютером, подборе задач и ситуаций для построения моделей и их исследования.

Рассмотрим влияние составляющих подсистем на функционирование системы и возможные способы его улучшения. Различные способности учеников всегда вызывают определенные трудности у учителей, которым приходится или как-то дифференцировать обучение внутри класса, или адресовать свое обучение к усредненному ученику, что расхолаживает лучших. Для того чтобы система хорошо работала, необходима одновременная совместимость ее однопорядковых элементов и совместимость элементов и системы в целом. Поэтому следует каким-то образом создавать примерно равноценные коллективы учеников, что принесет пользу и ученикам и учителям. Выход из этого положения – создание специализированных школ, гимназий, лицеев, классов. К сожалению, это возможно только для крупных городов. При изучении информатики также нужна дифференциация школьников, постановка различных задач для разных групп обучаемых.

Большинство школьников необходимо обучать на пользовательском уровне, т. е. учить работе с ЭВМ, решению простейших задач с помощью пакетов специализированных прикладных программ, применению различных текстовых и графических редакторов, использованию электронной почты и Интернета.

Обучение учеников с повышенными способностями должно быть ориентировано на формирование алгоритмического мышления, обучение их способам обработки информации, построению математических моделей, методам анализа этих моделей с помощью ЭВМ. (Решение этих вопросов существенно связано с дискретной математикой.) Учителю следует направлять повышенный интерес к компьютеру у школьников на создание атмосферы творчества, на решение нестандартных задач. Компьютер дает сотни возможностей учителю избежать скуки на своих занятиях.

При изучении математики необходимо создание программ трех типов: для базовых школ, для школ гуманитарного профиля, для школ естественного профиля. В каждой из этих программ будет свой объем знаний по дискретной математике и свои требования к их усвоению. Программы по математике в каждом из этих случаев должны быть тесно согласованы с программами по информатике.

Ключевым звеном в любой системе обучения является учитель. К сожалению, в своем большинстве учитель информатики в настоящее время не является идеальным учителем, и не по своей вине. Часто он оканчивал институт в то время, когда информатика только зарождалась как школьный предмет, и поэтому не было ясно, чему учить преподавателей информатики. Иногда учитель попадал в школу с отсутствием компьютеров, и его небольшие навыки работы с ними быстро утрачивались. Впрочем, эти причины остаются и в настоящее время. Доступность информации для школьников с помощью новых технологий может привести к информационным перегрузкам или к информационному засорению. Учитель может научить школьника правильно отбирать и оценивать информацию. Количество перерабатываемой информации должно расти незначительно при ее качественном росте. Но это может произойти лишь в том случае, если он пользуется авторитетом у ученика. Но иногда школьник обращается с компьютером увереннее своего учителя. Поэтому необходимо значительное увеличение часов на изучение информатики в педагогических вузах и университетах, должна быть существенная привязка программ вузов к различным программам школьной информатики.

Большое значение в системе обучения информатике имеет четкая система повышения квалификации. В жизни происходит постоянное обновление вычислительной техники, совершенствуется математическое обеспечение, возникают новые информационные технологии. Регулярная переподготовка учителей позволит им знакомиться с появляющимися возможностями. Повышение квалификации один раз в пять лет явно не может успеть за обновлением информационных технологий. Создание дистанционной системы непрерывной поддержки школьных учителей информатики с помощью Интернета может существенно помочь им в ознакомлении с происходящими в информатике изменениями.

Практически то же самое, что об учителях информатики, можно сказать и об учителях математики. Для успешного обучения учеников дискретной математике ее должны хорошо знать сами учителя. Поскольку большинство педагогических вузов республики превратились в университеты, то они обязаны готовить студентов по новым программам, в которых достаточно полно представлены дискретные предметы. Однако расплывчатость названий предметов, случающееся отсутствие программ, не всегда высокая дискретная квалификация лекторов приводят к тому, что часто дискретные дисциплины читаются формально, и лишь потому, что в университетах их нужно читать. В некоторых педагогических университетах студентов не учат даже тем ее разделам, которые присутствуют в школьных программах по математике и информатике.

Большинство учителей математики Беларуси являются выпускниками педагогических вузов, многие из них окончили эти вузы давно, поэтому трудно ожидать, что они смогут качественно научить школьников тому, чему их не научили в свое время. Кроме того, открытие во многих школах классов с углубленным изучением математики («лицейских» классов) привело к девальвации этого понятия как из-за дефицита учительских кадров высокой квалификации, так и из-за отсутствия нужного количества учеников с повышенными способностями. Для повышения качества подготовки учителей необходимо менять программы обучения в сторону увеличения элементов дискретной математики. Важное значение имеют институты повышения квалификации учителей для переподготовки выпускников вузов прошлых лет.

В связи со сказанным ранее значительно возрастает роль администраторов различного уровня. От них существенно зависит содержание программ, количество часов, отводимых на информатику и математику в школе и в вузе, количество часов на отдельные разделы программы, организация работы институтов повышения квалификации. Профессор С. А. Бешенков пишет: «Непродуманный министерский циркуляр может привести к резкому обвалу всей инфраструктуры, связанной с процессом информатизации школьного образования, фундаментом которой является информатика» [20, с. 11]. Деканы и заведующие кафедр могут сгладить нечеткое согласование школьных и вузовских программ с помощью чтения специальных курсов для разделов дискретной математики. Еще большее значение принадлежит администратору в выработке стратегических решений. Он обязан обладать интуицией, умением делать правильный выбор среди возможных альтернатив развития. Удачное прогнозирование и оценка им значения только что появившихся новинок даст возможность системе подготовиться к широкому использованию этих новинок в будущем. От администраторов существенно зависит еще один аспект целостности – управленческий, поскольку система должна существовать и развиваться долгое время.

Система обучения является иерархичной, она – один из компонентов более широкой системы, и каждая ее часть может рассматриваться как система, состоящая в свою очередь из меньших подсистем.

Иерархичность предполагает возможность координатора более высокого уровня контролировать и оказывать влияние на работу элементов более низкого. Во время обучения учитель при наличии специального класса может проверять работу учеников со своего рабочего места и при необходимости помогать им. Тем не менее компоненты системы обладают относительной самостоятельностью. Отдельные ученики могут по-разному относиться к учению, учителя – выбирать различные альтернативные программы и способы ведения урока, администраторы – оснащать школу различной техникой. Кроме того, люди обладают разными способностями.

Обучение любой дисциплине должно быть динамическим, так как в процессе обучения различная степень усвоения материала школьниками, возникающие при этом вопросы и трудности, накопление знаний и навыков требуют от преподавателя умения адаптироваться, изменять свое поведение в зависимости от конкретной ситуации. Большое значение имеют действия учителя по привитию интереса учеников к обучению, воспитанию у них способности к самооценке и потребности к дополнительным знаниям. У большинства детей интерес к компьютеру возникает как интерес к играм на нем. Вначале их мало интересует процесс обучения диалогу с компьютером. От учителя существенно зависит, сменится ли этот начальный потребительский интерес учащихся сознательным и устойчивым интересом к творчеству с помощью ЭВМ, алгоритмизации решения сложных задач, к красоте логических построений.

Более того, сами системы обучения информатике и дискретной математике являются интенсивно изменяющимися, динамическими. Это связано с тем, что названные дисциплины – относительно новые, еще не установившиеся, их содержание вызывает споры, связанные с тем, чему и как учить. Не случайно в Республике Беларусь существуют три альтернативные программы для углубленного изучения информатики [79]. Изменения в содержании обучения вызываются и постоянными изменениями технических и программных средств. Поэтому для устойчивой работы системы большое значение имеют программы обучения. Нельзя сводить информатику только к «политехнической составляющей» (по выражению академика В. С. Леднева [78]) кибернетического образования. Компьютер следует рассматривать как инструмент для решения определенных задач.

Программы должны иметь ядро, с одной стороны, существенно не изменяющееся в течение достаточно большого промежутка времени, а с другой – способное обеспечивать адаптацию обучаемых к происходящим в информатике изменениям. Поэтому в любой программе по информатике необходимо присутствие универсальных для информатики элементов, не связанных ни с языком кодирования, используемым в этой программе, ни с типом вычислительной техники, на которую рассчитана реализация программы. В программе должны быть такие общематематические понятия, как «информация», «модель», «алгоритм». Элементами программ, в частности, могут являться структуры данных, принципы моделирования с помощью этих структур, универсальные задачи (например, задачи сортировки), универсальные алгоритмы (например, алгоритм исчерпывающего поиска с возвращением). Следует уделять повышенное внимание изучению простых, но распространенных математических моделей и задач, которые часто служат составляющими частями сложных моделей. К таким задачам можно, например, отнести задачу определения кратчайшего пути, задачу о назначении, задачу коммивояжера. Языком для изучения таких задач может служить теория графов.

В существующих программах по математике для средней общеобразовательной школы элементам дискретной математики уделяется незначительное внимание. Так, в программах по математике рассматриваются операции над целыми числами и их делимость [121, с. 24], прогрессии [121, с. 103], а в классах с углубленным изучением математики – еще математическая индукция, элементы комбинаторики и дискретной вероятности, причем последний материал не является обязательным для изучения [121, с. 189].

Необходимо создание системы обучения дискретной математике. Желательно включение в программу общеобразовательной школы комбинаторики и математической индукции. Некоторые вопросы дискретной математики могут быть рассмотрены в программах по информатике. Например, в программу по информатике для 8–9 классов школ с углубленным изучением информатики входят элементы целочисленной арифметики и комбинаторики [79, с. 27, 29], в альтернативные программы для 10–11 классов таких школ – элементы целочисленной арифметики, теории графов и комбинаторики [79, с. 36, 44, 46]. Элементы дискретной математики следует существенно использовать на уроках информатики при построении и исследовании математических моделей. Кроме того, как в обычных, так и в специализированных школах желательно существование математических кружков и факультативов. Из разделов дискретной математики здесь могут изучаться математическая логика, булевы функции, элементы кодирования, дискретная вероятность, теория графов. Дискретная математика имеет одну значительную особенность при изучении ее в школе: она дает возможность для рассмотрения игровых ситуаций и составления занимательных задач, с дальнейшим решением этих задач на компьютере.

Связывающим звеном между учеником и учителем, кроме компьютера, является учебник. Он важен как для школьника, так и для учителя, поскольку в нем, возможно, изложен материал, незнакомый учителю по обучению в вузе. Необходимо широко пользоваться уникальной возможностью, предоставленной, пожалуй, только учебнику по информатике: предлагать в качестве задач для моделирования и программирования занимательные, игровые задачи, которые пробуждают интерес школьников к информатике и, более того, развивают их сообразительность и повышают интеллект. Попытка создания учебного пособия, удовлетворяющего вышеназванным принципам, предпринята В. М. Котовым и О. И. Мельниковым [97].

Любая социальная система живет в обязательном взаимодействии с другими системами, с внешней средой. Система вынуждена приспосабливаться к внешней среде, меняя способы функционирования элементов, их связи, частные цели и способы их достижения, но сохраняя свою целостность. Она должна реагировать на появление новой техники, наличие или отсутствие материальных средств, изменение программ преподавания, общественное отношение к информатике и на другие благоприятные и неблагоприятные воздействия. В то же время система сама может оказывать существенное влияние на окружающую действительность и видоизменять ее.

Информационные технологии меняют процесс обучения, делают его более интересным и динамичным. Они помогают развитию самостоятельности, познавательных интересов и способностей, утверждению исследовательского подхода в обучении. О роли мировой информационной магистрали в современном образовании говорит и Билл Гейтс: «Магистраль, по-видимому, откроет перед нами бескрайнее море информации, доступной в любое время и в любом месте, когда и где мы пожелаем ею воспользоваться. Некоторые опасаются, что информационная технология приведет к дегуманизации образования… Технология, напротив, способна гуманизировать среду образования. Вынуждая постоянно учиться, она превратит этот процесс в удовольствие и сразу же даст почувствовать практические результаты» [51, с. 312].

Вместе с тем неоднократно появляются сообщения о компьютерных преступлениях, уголовных и политических. Регулярно происходят компьютерные взломы банковских сейфов, воровство крупных сумм денег, процветает компьютерный шпионаж. Многие компьютерные преступления (например, создание компьютерных вирусов) происходят даже не ради выгоды, а из-за любопытства, вследствие низкого уровня ответственности их совершающих. Интернет насыщен низкопробными и порнографическими текстами и изображениями, в нем без особого труда можно найти информацию о подготовке и совершении террористических актов. Высокое программистское мастерство часто не сочетается с нравственными качествами и этическими нормами. Поэтому при обучении информатике большое значение приобретает воспитательный аспект. «Вооружив молодежь самыми современными знаниями по прогрессивным компьютерным технологиям и при этом не уделяя внимания формированию специфических нравственных качеств пользователя персонального компьютера, мы породим монстра, последствия деятельности которого для общества будут непредсказуемы» [47, с. 23].

В вузах широко используются полученные знания по информатике при изучении других предметов. На математических факультетах БГУ в последние годы распространилась тенденция получения второго (как правило, экономического или юридического) образования. Многие выпускники факультетов успешно работают на стыке двух полученных специальностей. Кроме того, еще будучи студентами, они часто подрабатывают в фирмах, издательствах, агентствах и т. д. С одной стороны, это является положительным аспектом при изучении информатики: у студентов появляются дополнительные мотивации в овладении предметом; с другой – работа иногда отнимает много времени, что наносит ущерб образованию в целом. Оно становится однобоким. Из-за недостатка времени студент изучает лишь то, что, на его взгляд, принесет большую пользу в настоящем и будущем. Однако отсутствие опыта часто не позволяет ему правильно оценить свои потенциальные перспективы и потребности и приводит к недооценке важных разделов программы обучения.

Наиболее важным для преподавания информатики является его взаимосвязь с преподаванием математики. К сожалению, средняя школа ориентирована на изучение непрерывной математики, в то время как информатика в основном связана с использованием математики дискретной. Расширение разделов дискретной математики в школьной программе привело бы к более глубокому овладению информатикой, формированию дискретного математического мышления, облегчило бы дальнейшее изучение информатики студентам, которые выбрали ее в качестве своей профессии. Элементы теории графов в учебном пособии В. М. Котова и О. И. Мельникова служат для иллюстрации применения различных структур данных, например, очереди, стека, кучи [97]. Там же для построения и исследования рассматриваются графовые модели.

Компьютер можно существенно использовать в процессе обучения дискретной математике. Так, Л. Н. Мейерович предлагает строить на уроках с помощью ЭВМ комбинаторные объекты [123], П. Л. Гращенко – случайные числа [60], А. И. Павловский и А. Е. Пупцев – решать задачи целочисленной арифметики [148]. В Брянском госпедуниверситете компьютер используется при решении различных графовых задач: поиска элементов графа с заданными свойствами, преобразования графа согласно специальным правилам и др. [157].

Академик В. А. Леднев считает информатику базой кибернетического образования, направленного на изучение самоуправляющих систем и информационных процессов [78]. Представляет интерес программа факультатива, предложенная С. И. Новиковым для учеников 7 класса, связывающая математику, физику и информатику. Она рассчитана на 38 часов и содержит следующие разделы: «Введение», «Системы счисления», «Элементы математической логики», «Основные законы алгебры высказываний», «Алгебра линейно-контактных цепей», «Элементы вычислительной техники», «Автоматическое управление и регулирование», «Физика электрических цепей управления» [176, с. 84].

Процесс обучения информатике и дискретной математике должен подчиняться принципу преемственности, который определяется как «связь между явлениями в процессе развития в природе, обществе и познании, когда новое, снимая старое, сохраняет в себе некоторые его элементы» [25, с. 195]. Этот вопрос подробно рассмотрен А. П. Сманцером и Л. В. Певзнер [152, 171, 172]. Только непрерывное обучение позволит, постепенно увеличивая сложность изучаемых вопросов, дать глубокие знания и прочные навыки. Сам процесс должен состоять из относительно самостоятельных мелких процессов, которые имеют свои цели и задачи. Такие последовательно сменяющие друг друга этапы образуют конкретные состояния как переходные общего процесса и выступают как проявление диалектического единства непрерывного и дискретного. В то же время процесс должен носить устойчивый характер и состоять из повторяющихся частей и установившихся связей между ними.

К сожалению, в Республике Беларусь информатику начинают учить только в 8 классе, а старшеклассники изучают ее лишь в специализированных школах и классах. Многие учителя выражают неудовлетворенность тем, что «для учащихся X–XI классов была разрушена непрерывная цепочка образования „школа – профессиональное обучение – вуз“, основополагающий принцип непрерывности образования был отброшен» [135]. В Российской Федерации только «в ближайшие годы планируется осуществить переход к непрерывному изучению информатики в средней общеобразовательной школе, предусматривающий три этапа: пропедевтический (I–VI классы); базовый (VI–IX классы), обеспечивающий изучение информатики на минимальном обязательном уровне; дифференцированный (X–XI классы) – в виде обязательного для всех школ профильного курса информатики» [104], хотя решение об этом принято еще в 1995 г. и есть специальные программы [57]. Существует и опыт изучения информатики, начиная с первого класса. В Якутской городской коммерческой школе в 1–5 классах прививают навыки в обработке текста и изображений, знакомят с понятием «алгоритма», в 6–9 – дают сведения об информационных процессах и учат программировать на языке Basik, в 10–11 – происходит углубленное изучение языков программирования, знакомство с математической логикой и основными направлениями компьютерных технологий [85].

Есть предложения о введении информатики как сквозного школьного предмета и в Республике Беларусь. Так, в концепции группы, возглавляемой Е. Л. Миняйловой, предлагается обучать в начальной школе «практическому навыку общения с техникой», в средней – «теоретическим и практическим умениям для овладения современными средствами массовой коммуникации», в старшей – «1) математи-ческим методам построения алгоритмов и решения задач; 2) методам программирования; 3) основам электроники или физическим принципам работы ЭВМ; 4) работе с информацией в локальных и глобальных компьютерных сетях» [134]. Автор данной книги поддерживает эту концепцию с небольшим уточнением: он не согласен с тем, что в начальных классах нельзя рассматривать алгоритмы. Понятие «алгоритм» должно присутствовать и в младших классах на неформальном уровне как способ решения задач (не обязательно математических) и внедряться в сознание ученика не только на занятиях по информатике, но и на других уроках. Опыт экспериментального преподавания информатики в младших классах описан Г. В. Гутовской и Л. И. Калитой [62].

Однако академик А. А. Кузнецов, поддерживая идею непрерывного обучения информатике в школе, сомневается в возможности «идеально выстроить систему непрерывного образования в области информатики в школе с 1 по 12 классы. Сейчас это вряд ли возможно. Главное препятствие – отсутствие времени в учебном плане школы… Конечно, со временем постоянно растущая роль информатики в образовании будет осознана в полной мере, и ее место в учебном плане школы будет адекватно этой роли. Сейчас же важно, чтобы информатика была представлена на всех ступенях школьного образования» [103, с. 6]. А. А. Кузнецов предлагает определить приоритеты для каждой стадии обучения информатике. В начальной школе приоритетная цель – «сформировать у школьников первоначальные навыки использования средств информационных и коммуникационных технологий в познавательной и практической деятельности» [103, с. 6]. К этой цели можно добавить более частные, но важные цели: первичное формирование понятий «информация», «модель», «алгоритм».

Система обучения дискретной математике включается в систему обучения математике, которая существует рядом с системой обучения информатике и вместе с ней входит в систему школьного обучения. Содержание математического образования повышает интеллектуальный уровень ученика, решение дискретных задач на сообразительность развивает его логическое мышление, а это способствует усвоению предметов гуманитарного цикла.

Обучение дискретной математике фактически начинается в младших классах или даже в детском саду: ведь целые числа, операции над ними, их сравнение – это элементы дискретной математики. С детьми можно решать различные игровые задачи на отображения, соответствия, перечисления [151]. В школе дискретная математика должна параллельно присутствовать как в обязательных курсах, так и на факультативах и в кружках. В кружках в средних классах желательно игровое, диалоговое, занимательное обучение, для того чтобы привить детям интерес к дальнейшему обучению [124, 128]. В старших классах исследование дискретных моделей должно проводиться с помощью компьютера.

Желательно параллельное обучение непрерывной и дискретной математике, подчеркивание, где возможно, связей между ними. Например, при первом знакомстве с функцией можно рассматривать дискретные и непрерывные функции, тем более что с помощью первых проще ознакомить школьников с такими понятиями, как «область определения и множество значений функции», «обратная функция» и т. д. Использование дискретности возможно и при рассмотрении понятия «предела». С помощью дискретных, например, графовых моделей можно показывать значение математики для изучения реального мира.

Поскольку система обучения интенсивно развивается, все время изменяясь, необходимо постоянно анализировать различные ее аспекты, тесно связанные между собой.

Морфологический, структурный, функциональный аспекты анализа определяют состав системы, взаимосвязи между подсистемами и элементами, механизмы внутреннего и внешнего взаимодействия. (С какого класса следует начинать изучение информатики? Какими знаниями должны обладать школьники после обучения? По какому признаку делить учеников на классы для обычного и углубленного изучения? Какое оптимальное число учеников в классе? Какие программы необходимы для подготовки учителей в вузе? Какие компьютеры нужны для обучения и как влияет наличие компьютеров различных моделей? Как осуществлять обратную связь в системе? Как влияет взаимодействие с внешней средой?)

Очень важен генетический аспект анализа, позволяющий определить перспективы системы, найти условия ее оптимального развития и функционирования. Необходимо попытаться спрогнозировать, какими будут ответы на поставленные выше вопросы не сейчас, а через 3, 5, 10 лет, и на основании ответов создавать благоприятные условия уже сейчас.

Управление системой позволяет сохранить ее качественно, несмотря на неблагоприятные дестабилизирующие воздействия, поддержать ее равновесие со средой и добиться определенного положительного эффекта. Управление есть передача и переработка информации в сигналы, направляющие и корректирующие деятельность машины, организма, индивидуума, учреждения и т. д. Существенным для сложных систем является их самоуправление. Важная особенность самоуправляемых систем – наличие в них обратной связи. Действие, порождая какой-либо результат, испытывает на себе его влияние и само изменяется под воздействием этого влияния. Поступление информации с «выхода» системы позволяет сравнивать полученные результаты с требуемыми и в случае необходимости скорректировать воздействие с целью получить нужный результат.

В системе обучения главной является связь между учителем и учеником. В специальных классах она легко устанавливается с помощью компьютера. Существенной является и оценка учителями предлагаемых программ обучения, высказывание своих замечаний и предложений с дальнейшей корректировкой программ и учебников.

Системный подход к преподаванию информатики и дискретной математики позволит более глубоко проанализировать трудности процесса, определить его сложные места и, сделав необходимые изменения, повысить качество обучения.

ГЛАВА 5

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИЗУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В последнее время дискретные математические модели получили широкое распространение. Как отмечает К. А. Рыбников, после второй мировой войны «крупнейшие военные и промышленные организации США, их научно-технические подразделения разворачивают исследования комбинаторного характера или активно им содействуют. А в пятидесятые годы, в их конце, в математической научной литературе произошел настоящий комбинаторный „взрыв“» [165, с. 6]. Это во многом связано с изучением кибернетических систем, имеющих широкое распространение в науке, технике, экономике, военном деле и т. д. Конечно, такие системы существовали и ранее, но в последнее время их изучение стало более актуальным в связи с увеличением масштабов производства, расширением экономических связей, созданием межгосударственных объединений. С другой стороны, исследование таких систем, в виду их масштабности, стало возможным лишь с появлением мощной вычислительной техники.

Кибернетические, или большие, системы являются основными объектами кибернетики – науки об общих закономерностях процессов управления в сложных динамических системах, способах получения, хранения, передачи и переработки информации. Возникает вопрос: почему дискретные формы хранения, передачи и обработки информации стали преобладающими в кибернетике? Для этого имеется много причин. В частности, дискретный способ хранения информации очень экономный, что позволяет использовать небольшое число хранящих элементов. Кроме того, информация, которая обрабатывается или передается в дискретном виде, устойчива относительно помех. Поэтому в кибернетике распространены дискретные управляющие системы, параметры которых задаются как дискретные величины. Даже в тех случаях, когда состояние элементов системы определяется непрерывными функциями, для анализа выбираются мгновенные состояния, а для преобразований – мгновенные значения.

Более того, академик А. Н. Колмогоров считал, что «дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах» [84, с. 22]. Он был уверен, что «принципиальная возможность создания полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики» [84, с. 22]. С ним согласен и академик В. М. Глушков: «Для анализа информационной сущности процесса мышления особую роль приобретают дискретные формы задания информации, при которых информация естественным образом разделяется на элементарные порции» [53, с. 37]. В то же время работы Дж. фон Неймана и Вигнера (см. ниже) показали ограниченность только дискретного подхода к моделированию живых существ.

Термин «модель» в настоящее время не имеет единой трактовки. В различных работах под моделями нередко понимают достаточно разные объекты. В настоящем исследовании под моделью понимается искусственно созданный объект, на который отображаются основные элементы реально существующего объекта или явления в целях изучения последнего. Роль моделей в современной науке велика. Без моделей возможно только описание действительности без проникновения в сущность явлений. «Отношение теории (Т) к реальности (Р) всегда опосредуется моделью (М). Это не двучленное отношение Т→Р, а трехчленное отношение Т→М→Р. Теория с максимальной точностью описывает модель, но модель всегда лишь более или менее соответствует реальности, а поэтому теория может только приблизительно отражать реальность» [65, с. 32]. Философские и методологические вопросы моделирования рассматривались Ю. А. Гастевым, А. А. Гореловым, И. Г. Кодряну, Н. М. Мамедовым, К. Е. Морозовым, И. Б. Новиком, А. М. Уемовым, В. А. Штоффом и другими [48, 49, 56, 65, 87, 127, 129, 136, 144, 180, 203, 204].

Если искусственный объект задается с помощью математических символов и соотношений, то говорят о математической модели. Такая модель сочетает достоинства как теории, так и эксперимента. Академик А. А. Самарский отмечает, что «работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его поведение в любых мысленных ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные эксперименты с моделями позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента)» [167, с. 6]. Простейшие математические модели встречаются уже в детском саду и в начальных классах при изучении арифметических операций. Моделирование широко представлено в курсе информатики. Если в арифметике и физике школьник изучает в основном готовые математические модели, то в информатике он часто должен строить их сам. Построение моделей является сложной процедурой для учеников [173], впрочем, как и для студентов вузов. Вопросы построения и исследования различных моделей встречаются практически при обучении всем специальностям.

При изучении дискретных моделей нужно начинать с особенностей, присущих всем моделям. Первоначально следует выбрать язык, описывающий объект. В качестве языка могут служить алгебраические или дифференциальные уравнения, булевы функции, графы и т. д. Широко распространены и всевозможные комбинации средств описания. Таким образом, модель – это перевод с одного языка на другой, но перевод упрощенный. «Оригинал не только переводится на другой язык, но и сокращается, так что то, что получается в конечном счете после перевода и сокращения, оказывается систематически равномерно сжатым... Тонкости при таком сокращении могут быть потеряны, но все, что есть в оригинале, чем-то представлено в переводе и в уменьшенном масштабе сохраняется» [156, с. 50]. На рис. 1 представлены этапы построения и исследования модели.

Как правило, построение модели начинается с уточнения постановки задачи. Часто заказчик исследования не является математиком, плохо знает исследуемый объект или явление, смутно представляет, что же он хочет получить. Поэтому математик должен сделать предварительный анализ объекта. В случае изучения явления необходимо качественное истолкование его сути на основании экспериментальных данных, даже если полной теории еще не существует. Построение начинается с нечетко выраженной идеи. Происходит экспликация, т. е. замена понятия другим, близким ему, но допускающим уже определение в строгой форме. Иногда такое истолкование следует делать даже без математики, хотя это очень упрощает явление. Например, А. Эддингтон высказывал неудовлетворение тем, что при популярном изложении теории относительности ему приходится отказываться от математики. «Подобно тому, как в словах поэта звучит истина, которую не могут уловить комментаторы в своих неуклюжих объяснениях, так геометрия относительности, совершенная в своей внутренней гар-

Рис. 1.

монии, выражает некоторую истину, которая теряется в моем оценочном, очищенном от математики изложении» [206, с. 8].

Возможна дискретизация процесса моделирования, когда каждая последующая модель является уточнением предыдущей. В этом случае первые модели, являясь весьма упрощенными, помогают понять структуру моделируемого объекта, его внутренние и внешние связи. По этому поводу Р. Беллман писал: «Основная цель создания подобных математических моделей… состоит не столько в получении чисел, которые во многих случаях являются сомнительными из-за недостатка наших знаний… сколько в определении самой структуры рассматриваемого явления. Во многих процессах более важны общие представления, чем конкретные значения констант» [16, с. 25].

Следует учить студентов выделять при исследовании основные части, особенности, связи, пренебрегая второстепенными. Нужно указать управляемые переменные, т. е. те, которые можно изменять в процессе исследования, и неуправляемые параметры. В большинстве случаев выделение управляемых переменных является относительно легкой задачей, поскольку априори ясно, с помощью каких воздействий можно влиять на ситуацию. Вместе с тем могут возникнуть трудности с установлением границ изменения управляемых переменных. Более тяжелой является задача выявления неуправляемых параметров, поскольку их, как правило, очень много, и поэтому нужно учитывать лишь некоторые из них, наиболее важные для данной задачи.

Необходимо поставить конечную цель исследования. Возможно, это будет получение лучшего результата при определенных ограничениях, или исследование взаимосвязей, характеризующих систему, или определение аналитических свойств объекта и т. д. В некоторых случаях вместе с конкретными целями могут существовать и такие установки, которые непосредственно в постановке задачи не отражены. Кроме того, большинство реальных задач являются многокритериальными, т. е. такими, в которых необходимо добиться нескольких, часто противоречащих друг другу целей. Выбор цели исследования существенно определит и построенную модель, и способы ее исследования. В ситуациях, когда необходимо оптимизировать несколько критериев, следует установить их приоритеты. Х. Таха предлагает использовать три уровня абстракции, соответствующие переходу от системы-оригинала к ее модели. «Упрощенный образ реальной системы отличается от системы оригинала тем, что в нем находят отражения только доминирующие факторы (переменные, ограничения и параметры), определяющие основную линию поведения реальной системы. Модель, будучи дальнейшим упрощением образа системы-оригинала, представляет собой наиболее существенные для описания системы соотношения в виде целевой функции и совокупности ограничений» [175, с. 12].

При построении близкие, но разные объекты часто задаются одной моделью. Существует совокупность условий, определяемых как интервал абстракции отождествления, относительно которых объекты рассматриваемой предметной области неразличимы. С другой стороны, некоторые объекты можно описать с помощью различных моделей. Следует обратить внимание студентов на то, что правильный выбор средств описания играет важную роль при исследовании. Так, например, задачу о назначениях можно представить в виде задачи целочисленного линейного программирования и в виде матрично-графо-вой задачи. В последнем случае исследование будет более простым.

Очень важным является вопрос о степени точности и подробности при построении модели. Модель – это гомоморфное отображение реального объекта на искусственный. Суть гомоморфизма в переходе от более сложных систем отношений к более простым при сохранении существенных особенностей этих отношений. (Вопросы гомоморфизма при построении моделей подробно рассмотрены Ю. А. Гастевым [48].) Конечно, при построении модели невозможно обойтись без огрубления действительности. Так, в теории конечных автоматов, которые моделируют логико-математические аспекты работы дискретных систем, отвлекаются от мощности сигналов, не учитывают ее потери при передаче, пренебрегают инерцией элементов, возможным их отказом и т. д.

Существуют две крайности при построении модели: одна из них состоит в том, чтобы в качестве модели взять сам реальный объект, другая – взять единичный объект. Для хорошей работы нужно найти золотую середину между этими крайностями. Конечно, часто хочется более точно описать ситуацию. Но перегруженность модели деталями приводит к ее громоздкости, невозможности ее исследования даже с помощью современных вычислительных машин. С другой стороны, упрощение модели облегчает исследование, но результаты могут плохо соответствовать реальному объекту. Весьма образно о поиске компромисса между упрощенными и усложненными моделями писал И. Б. Новик: «Как же обнаружить оптимальный путь между Сциллой непродуктивного сверхупрощения и Харибдой сверхусложненной спецификации реальных явлений? Современное научное познание нуждается в хитроумном Одиссее, который, как известно, сумел проплыть между Сциллой и Харибдой. Но, вспомнив „эллина-оптимизатора“, мы не должны упускать из виду и данный ему мудрой богиней совет: Сцилла и Харибда не равноопасны, и, если нельзя без жертв, надо плыть ближе к Сцилле, поскольку она требует себе в жертву только 6 человек, в то время как Харибда губит весь корабль. Этот совет мудрой богини по-своему актуален и сейчас: „крайности Сциллы“ – переупрощения не погубят корабль науки, в то время как „неовиталическая Харибда“ грозит проглотить его целиком» [144, с. 63]. В ряде случаев компромисс между сложностью и простотой находится путем проб и ошибок.

Построение моделей – дело весьма сложное. Г. Вагнер пишет: «К великому сожалению, действительно невозможно предложить универсального рецепта, позволяющего безошибочно выбирать и строить математическую модель в любом конкретном случае. Однако по этому поводу не следует испытывать особого беспокойства. Практика показывает, что большинство студентов, получивших подготовку либо в области естественных или технических наук, либо в области математики, экономики или административного руководства, не испытывают особых затруднений при построении моделей при условии, если они имеют к этому склонность» [33, с. 22]. Можно согласиться с первым процитированным предложением. Окончание второго фактически говорит о том, что умение построить модель находится на грани науки и искусства. Конечно, желательно, чтобы человек имел склонность к тому делу (математике, технике, экономике, литературе и т. д.), которым он занимается. В противном случае результаты его деятельности будут более чем скромными.

Некоторые специалисты вообще считают, что для успешного моделирования не обязательно знать сущность моделируемого процесса. «Может случиться, что эта сущность и вовсе еще неизвестна, а тем не менее оказывается возможным в случае, если известны определенные связи разных частей изучаемого явления, создать математическую модель, достаточно хорошо отражающую внешние нужные стороны изучаемого явления и тем самым получить возможность изучать его и предвидеть, предсказывать его дальнейшее развитие» [102, с. 38]. Да, в ряде случаев действительно можно создать «достаточно» хорошую модель, да и что делать, если по разным причинам создателю модели не ясна сущность явления. (О таких моделях будет сказано ниже.) Но построение удачных математических моделей возможно лишь при хорошем знании математики, области моделирования и при наличии определенного опыта. В свое время на механико-математическом факультете БГУ открылась специализация «Математическая электроника». Это было вызвано тем, что выпускники факультета, распределенные в объединение «Интеграл», занимающееся конструированием и выпуском электронной аппаратуры, могли успешно справляться со своими обязанностями только после нескольких лет работы. Специализация позволила сократить время адаптации молодого специалиста к производству.

Поскольку построенная модель может оказаться чересчур упрощенной и поэтому плохо описывающей реальный объект, желательно осуществлять проверку модели на адекватность объекту, т. е. производить адекватные воздействия на объект и модель и сравнивать получаемые результаты. К сожалению, это не всегда возможно, так как моделируемый объект может еще не существовать или проверка воздействий на существующем объекте приводит к его изменению.

Следует обратить внимание студентов, что математики уже построили огромное число моделей. Возможно, для объекта, близкого к исследуемому, уже существует модель, и нужно только рассмотреть, как повлияют отличия объектов на конечный результат. Если же объект ранее не изучался, то, скорее всего, отдельные его части можно описать с помощью известных моделей.

Иногда приходится строить модели объектов или ситуаций, о структуре которых мало известно. В этих случаях выдвигаются различные гипотезы о строении объекта, его внутренних связях, реакции объекта на внешние воздействия, объект заменяется «искусственной действительностью», которая и моделируется. Однако недостаток информации часто приводит к тому, что модели не могут полностью описать поведение объекта. Невозможно построить точную модель малоизученного объекта или явления. Планетарная модель строения атома Резерфорда не позволяла объяснить устойчивость атома, принципы построения модели атома водорода Бора не удалось использовать для построения моделей более сложных атомов. По мере получения дополнительных сведений о строении объекта может уточняться и его модель. Так, после открытия протонов и нейтронов была уточнена планетарная модель атома.

Из-за недостатка информации возможно построение нескольких моделей, по-разному описывающих одно и то же. Наиболее известные примеры: модели солнечной системы Птолемея и Коперника, модели ее возникновения Бюффона, Кеплера и Шмидта, модели атома Томсона, Бора и Резерфорда, модели зарождения жизни на Земле Рихтера и Опарина.

Показательна полемика, возникшая между нобелевскими лауреатами Э. Шредингером и М. Борном в 50-х гг. XX в. относительно волновой или квантовой природы света [27, с. 252–266; 202, с. 261–284]. Для ее описания были построены две модели: непрерывная и дискретная. Шредингер считал, что никаких частиц и квантов в физическом мире не существует, они являются иллюзиями, основанными на неправильной интерпретации построенной модели. «Квантовые законы, установленные Планком первоначально для определенного вида энергии или, вернее, для определенного вида обмена энергией и импульсом – электромагнитного излучения, – чудовищно обобщены и содержат корпускулярную теорию обычной материи как частный случай» [202, с. 257]. Шредингер отвергал также идею существования атомов. Борн, возражая Шредингеру, говорил: «Идея атомизма со времени ее возрождения Даниелем Бернулли (1738) в кинетической теории газов и Дальтоном

(1808) в химии оказалась столь плодотворной и действенной, что попытка Шредингера отбросить ее кажется мне столь дерзкой и во всяком случае она является явным нарушением исторической непрерывности» [27, с. 255]. Примечательна следующая фраза Борна: «Такое нарушение было бы оправдано, если бы он мог представить лучшую и более действенную замену» [27, с. 255]. Это означает, что при построении моделей объектов, о которых известно мало, важно не то, насколько адекватно модель описывает объект, а то, как она описывает поведение объекта. «Любой из нас, физиков-теоретиков, включая, конечно Шредингера, разрешал бы конкретные физические проблемы с помощью одних и тех же или, по крайней мере, эквивалентных математических методов, если они приводят к цели» [27, с. 253]. В качестве иллюстрации такого положения вспомним, что модель солнечной системы Птолемея, не соответствующая действительному ее строению, использовалась в течение многих веков, поскольку она позволяла ориентироваться во время морских путешествий.

Точку зрения Борна поддержал Эйнштейн. «Волновые поля де Бройля – Шредингера не должны трактоваться как математическое описание реального протекания события во времени и в пространстве, хотя они действительно имеют отношение к такому событию. Они являются скорее математическим описанием того, что мы можем действительно знать о системе. Они служат только для представления статистических высказываний и предсказаний относительно результатов всех измерений, которые можно провести над системой» [207, с. 74].

В этой ситуации многим школьникам, да и студентам, присуще следующее заблуждение: они не понимают, что модель является лишь гипотетическим описанием объекта, а как он устроен на самом деле, неизвестно. Они считают, например, что в центре атома находится шарик-ядро, вокруг которого крутятся шарики-электроны. Роль преподавателя – разъяснять разницу между моделью и реальностью. Учебники также должны обращать внимание на эту разницу. Так, в школьном учебнике по физике по поводу корпускулярно-волнового дуализма света написано: «Мы не можем представить себе наглядно, как это происходит. Но тем не менее – это факт. Мы лишены возможности представлять себе наглядно в полной мере процессы в микромире, так как они совершенно отличны от тех макроскопических явлений, которые люди наблюдали на протяжении миллионов лет и основные законы которого были сформулированы к концу XIX века» [137, с. 166]. В то же время о дуальной природе элементарных частиц в этом учебнике практически не говорится.

При построении моделей плохо изученных объектов следует быть готовым к не очень хорошим результатам исследований. Отсутствие достоверных знаний об объекте, наличие неопределенности относительно истинного состояния его элементов, их взаимодействий с внешней средой могут привести к естественным и, по-видимому, неизбежным при этих условиях ошибкам в принятии решений. Тем не менее и такие исследования имеют смысл.

У дискретных математических моделей есть и свои особенности, связанные с дискретностью. Реальный мир одновременно и непрерывен, и дискретен, а его описания с помощью различных моделей являются лишь абстракцией. Естественно, что идеи непрерывности и дискретности проникают в те области математики, где они раньше отсутствовали, обогащая эти области. Необходимо обратить внимание студентов на взаимосвязь непрерывности и дискретности. Во-первых, некоторые модели могут рассматриваться одновременно как дискретные и как непрерывные. Например, все ограничения задачи линейного программирования являются непрерывными. Но оказывается, что множество точек, в котором может находиться оптимальное решение, дискретное, т. е. модель можно рассматривать и как дискретную. Однако при исследовании модели на чувствительность к изменениям параметров опять следует перейти к непрерывной трактовке.

Во-вторых, многие непрерывные модели можно превратить в дискретные путем введения некоторого шага изменения параметров. Так, задачу поиска оптимальной траектории в трехмерном пространстве легко представить как задачу поиска траектории, отрезки которой параллельны осям координат, причем на этих отрезках рассматриваются лишь определенные дискретные точки. Фактически в этом случае происходит замена построенной модели на более простую. Однако ничего плохого здесь не происходит, поскольку с помощью уменьшения шага изменения параметров, как правило, можно подойти сколь угодно близко к старой модели. Во многих случаях такой переход просто необходим, поскольку анализ непрерывной модели происходит с помощью ЭВМ.

В-третьих, существуют модели, в которых присутствует и дискретность, и непрерывность. Модель может состоять из дискретных элементов, связи между которыми описываются непрерывными функциями. Такими, в частности, являются некоторые модели интегральных схем.

В некоторых ситуациях возможно описание явления с помощью и непрерывной, и дискретной модели. Существуют, например, дискретная и непрерывная модели деятельности человека в определенных условиях [43, с. 18]. Применение различных моделей может привести к различным результатам. Наиболее яркий пример – использование непрерывных и дискретных моделей при исследовании самовоспроизводящихся автоматов. В конструкции, предложенной Нейманом [140, с. 59], модель, основанная на универсальной машине Тьюринга, может принимать лишь дискретные значения. Нобелевский лауреат Е. Вигнер рассматривал модель, в которой все переменные непрерывны. «Именно дискретность множества допустимых состояний его системы позволяет Нейману постулировать идеальное поведение системы и найти такую замену уравнений движения, которая делает самовоспроизведение возможным. Для нас же первостепенную важность имеет вопрос о том, можно ли ожидать, что и реальные уравнения движения будут приводить к размножению описываемых систем» [37, с. 167]. Вывод, сделанный Вигнером, противоречит результату Неймана: «Шансы на существование набора „живых“ состояний, для которых можно подобрать такую питательную среду, что любое взаимодействие с ней всегда приводит к размножению, по-прежнему остаются нулевыми» [37, с. 167]. Но и сам Нейман задумывался о правомочности своего моделирования. При построении модели самовоспроизводящихся автоматов Нейман ставит такой вопрос: «Почему цифровое представление, насколько нам известно, никогда не используется в природе, а вместо него используется импульсное представление?» [141, с. 68].Он предполагает, что ответ заключается в том, что схема с частотной модуляцией обладает большей надежностью, чем цифровая схема. Скорее всего, Нейман надеялся впоследствии получить и непрерывную модель самовоспроизведения [19, с. 47].

Необходимо обращать внимание студентов на то, что степень детализации при построении модели существенно влияет на время ее изучения. При очень подробном описании объекта это время может оказаться совершенно неприемлемым. Его желательно знать до начала программирования, так как создание компьютерных программ требует значительных усилий. Уменьшить время исследования можно тремя способами: упрощением модели, упрощением алгоритма или созданием более эффективного алгоритма. В первых двух случаях ухудшается качество исследования, но, возможно, полученное качество вполне приемлемо для поставленных целей.

Исследование дискретных моделей, как правило, должно дать конкретную рекомендацию поведения человека в тех или иных ситуациях. Классические методы математики часто бессильны при изучении некоторых моделей. Профессор Е. С. Вентцель пишет: «Приемы, которыми она [прикладная математика] пользуется, настолько новы и непривычны, что зачастую шокируют математиков-профессионалов. Так называемые „эвристические методы решения задач“, „экспертные оценки“, „шкалы предпочтения“, многое тому подобное легко объявить „находящимся вне математики“, что часто и делается. Однако объявить тот или иной прием недопустимым и не предложить взамен ничего другого – не лучший выход из положения. Волей-неволей приходится пользоваться всеми доступными на сегодняшний день приемами, в том числе и такими, от которых наши предки-математики, как говорится, „перевернулись бы в гробах“» [61, с. 106].

Построенные модели часто начинают жить самостоятельной жизнью. Они как бы обособляются от породивших их объектов и ситуаций, превращаются в отдельные задачи, которые в случае необходимости изменяются, упрощаются или усложняются. Это связано с тем, что дискретные модели часто имеют много интерпретаций. Еще в 1958 г. на 10-м симпозиуме по прикладной математике в США было отмечено, что «многочисленные и разнообразные дискретные задачи, как правило, могут быть описаны немногочисленными комбинаторными моделями» [165, с. 7]. Рассмотрим несколько примеров. Простейшие задачи о диете, смешивании нефтепродуктов, выпуске продукции и многие другие сводятся к задаче линейного программирования, задачу коммивояжера можно трактовать как задачу о рациональном маршруте объезда городов и как задачу о переналадке станка-автомата, с помощью одного и того же графа можно изобразить и карту железных дорог, и отношения между людьми, и строение интегральной схемы. Такое свойство математических моделей выражает абстрактность математики. Самостоятельная жизнь моделей приводит к тому, что иногда термины «модель» и «задача» фактически рассматриваются как синонимы [175].

Некоторые специалисты считают, что предметом математики является изучение математических моделей [102, с. 45], и для этого есть веские основания. Для математика важна не природа рассматриваемых объектов, а количественные и качественные связи внутри их и между ними. Содержание математики не меняется в зависимости от того, кто ее использует: чистый математик, которого интересует лишь математическая истина, или инженер, которому необходимо решить конкретную производственную задачу. Однако набор математических курсов, их содержание, степень строгости доказательств, подбор примеров зависят от будущей специальности студентов.

На педагогических факультетах нужно, во-первых, изучать те дискретные модели, которые попали в различные программы для средних школ. Наряду с классическими следует рассматривать и упрощенные модели, с которыми будущие учителя смогут знакомить учеников. Во-вторых, нужно изучать модели, помогающие развивать умственные способности школьников и одновременно решать методические задачи преподавания математики. Такие модели можно встретить в математической логике, булевой алгебре, комбинаторике, теории графов. Во всех случаях изучение каждой модели целесообразно проводить параллельно с ее наиболее распространенной интерпретацией. Если возможно, следует рассматривать обобщения модели, которые не вкладываются в данную интерпретацию. Например, графовая модель, в которой каждому ребру графа приписано некоторое положительное число, возникает из задачи определения кратчайших расстояний между городами. Ослабив условия, считая, что приписанные числа могут принимать отрицательные значения, мы уже не можем пользоваться прежней интерпретацией, поскольку расстояния между городами положительны. В данном примере можно предложить новую интерпретацию: задачу о перевозках наименьшей суммарной стоимости, в которой стоимость перевозки между некоторыми городами в процессе решения может оказаться отрицательной.

На технических и экономических факультетах необходимо рассматривать приемы построения моделей, возникающих в соответствующих отраслях хозяйства, и изучать наиболее распространенные модели в этих отраслях. Важным является вопрос о точности исследования модели и о строгости доказательств. Поскольку модель – упрощенное отражение объекта, то в ряде случаев на технических факультетах нет необходимости проводить очень точные исследования для получения, например, оптимального решения. Это связано с тем, что погрешности при построении модели могут оказаться существенными и полученное с помощью модели точное значение не будет соответствовать такому значению для объекта. Поэтому часто можно ограничиться приближенными или эвристическими алгоритмами. Доказательства также могут быть эскизными, с пропусками наиболее сложных частей. Следует учитывать, что практически для всех важнейших дискретных моделей созданы пакеты программ для их исследования, и будущего инженера нужно научить определять то место, где можно воспользоваться стандартной программой из пакета.

На математических факультетах важно подробно и строго изучать известные модели, поскольку главным является обучение методике исследований. Однако и здесь возможно использование некоторых теорем без доказательств или доказательство их в упрощенной формулировке, так как в этом случае часто исчезают технические сложности и теорема становится прозрачнее в идейном смысле.

Проблема взаимосвязи математики и реального мира является одной из основных проблем методологии математики [164]. Рассмотрим вопрос о соотношении дискретных математических моделей и действительности.

То, что происхождение таких моделей связано с экономикой, техникой, производством, не вызывает сомнений. Как говорилось ранее, упрощение описания реальных объектов или явлений в моделях происходит по нескольким причинам. Одна из них та, что в модели должны быть отражены наиболее важные свойства реального объекта, несущественные элементы и связи отбрасываются, чтобы не загромождать модель. Вторая причина упрощения – математические возможности исследователя. Построенная модель может хорошо передать структуру и свойства объекта, не содержать ничего лишнего, но оказаться слишком сложной, и математик не сумеет ее изучить. В этом случае он будет упрощать ее, уходя дальше от исследуемого объекта до тех пор, пока не окажется в силах ее анализировать. Еще одна причина упрощения моделей – отсутствие у исследователя вычислительной техники необходимой мощности. Во всех случаях модель, описывающая реальный объект, сильно зависит от исследователя, ее построившего. Между моделями и реальными объектами нет однозначного соответствия. Одному объекту может соответствовать множество моделей, и одна модель может иметь несколько интерпретаций.

Построенные модели очень часто обосабливаются от породивших объектов, начинают жить самостоятельной жизнью, видоизменяясь, усложняясь или упрощаясь. При этом они часто перестают описывать реальную действительность, а описывают псевдореальную. Рассмотрим сказанное выше на примере теории расписаний (раздел дискретной математики, занимающийся упорядочением различных процессов во времени). Практическая необходимость составления хороших расписаний очевидна: такие расписания нужны на предприятиях, в учебных заведениях, воинских частях, компьютерных сетях и многом другом. Можно сказать, что вся человеческая жизнедеятельность определяется хорошими или плохими расписаниями. Практики, естественно, ждут от математиков конкретных рекомендаций по составлению расписаний. Однако поставленные задачи настолько сложны, что остаются таковыми даже после упрощения.

В этой ситуации особенно проявляется различие между математиком-практиком и математиком-теоретиком. Практик останавливается на нужной модели и начинает ее изучать для того, чтобы что-то порекомендовать заказчику. Для исследования модели он будет использовать универсальные методы решения комбинаторных задач (метод ветвей и границ, динамическое программирование, метод минорантной функции, другие методы), случайный поиск, различные эвристики и т. д. В конце концов математик получит, скорее всего, не оптимальное, но вполне пригодное для практического использования решение. Теоретику все это не интересно. Он будет упрощать полученную модель до тех пор, пока она, оставаясь все еще сложной, не станет пригодной для точного или приближенного исследования. В этой модели будут все внешние атрибуты реальной ситуации (станки, детали, конвейер, устройства переноса, длительность обслуживания и т. д.), ситуация будет весьма похожей на правдоподобную, но на самом деле модель оказывается очень далекой от реальной жизни. Для построенной модели теоретик найдет свои оригинальные, красивые методы исследования, получит результаты, ранее никем не полученные.

Вопрос о соотношении чистой математики и прикладной – один из самых дискуссионных вопросов в математике. Большинство математиков полагают, что «чистая и прикладная математика – разные части одной и той же науки, разные по своему содержанию, по значимости, по той роли, которую они играют в жизни современного общества» [102, с. 74]. Профессор Л. Д. Кудрявцев считает, что «под чистой математикой обычно понимается та часть математики, в которой изучаются математические структуры сами по себе, без связи с теми реальными явлениями, которые они могут моделировать. К прикладной математике относится та часть математики, в которой изучаются математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления» [102, с.76].

Чистая и прикладная математика тесно связаны друг с другом, и во многих случаях невозможно понять, где кончается одна из них и начинается другая. Вернемся к теории расписаний. Если исходить из круга задач, которые она должна решать, то это прикладная дисциплина. Но постепенно она приобретает качества чистой математики, поскольку те псевдореальные модели, которые она изучает, далеки от жизненных задач. Впрочем, в теории расписаний, как практически в каждой математической дисциплине, существуют разделы или задачи, которые используются уже сейчас. Любая математическая теория развивается по своим внутренним законам, в ней появляются новые абстракции, обобщения. Некоторые математики внутри большой теории выбирают какой-нибудь маленький участок, описание которого доводят до мельчайших подробностей, т. е. происходит глубокая специализация математиков, занимающихся теорией. Думается, в этом нет ничего плохого: любое соотношение, потенциально существующее в математике, имеет право быть описанным. Однако А. Пуанкаре писал: «Мы не можем познать все факты; необходимо выбирать те, которые достойны быть познанными» [160, с. 281].

Все это происходит и с дисциплинами, связанными с дискретными моделями. Единственная особенность в этом случае то, что математики всегда могут придумать вроде бы реальную интерпретацию новых изучаемых объектов. Происходит обратный по отношению к построению моделей процесс: не по реальной ситуации строится модель, а к готовой математической теории подгоняется псевдожизненная ситуация, которую можно исследовать с помощью теории. Появляются задачи, сформулированные как прикладные проблемы, но имеющие незначительные практические приложения. Решение таких задач требует большого математического мастерства. Однако их исследование иногда имеет значительное теоретическое значение, поскольку для решения приходится разрабатывать специальные методы, полезные для данной дисциплины.

В рамках теории расписаний разработана строгая и солидная теория устойчивости расписаний, которая содержит много глубоких и красивых результатов. На первый взгляд, эта теория имеет прикладное применение: ведь на практике все длительности операций задаются приблизительно, и, может быть, совокупность небольших колебаний значений параметров приведет к тому, что оптимальное расписание перестанет быть оптимальным. Действительно, это так, но отклонение общего времени обработки при бывшем оптимальном расписании от времени обработки при новом практически невелико.

Развитие чистой математики часто инициируется знаменитыми задачами, существующими в этой дисциплине. Например, в теории графов такой задачей до ее решения была задача раскраски географической карты четырьмя красками. Большой интерес к теории графов, возникший в связи с задачей четырех красок, способствовал получению многих серьезных результатов, поскольку они казались полезными для решения задачи. С практической точки зрения задача не представляется серьезной, так как раскраска карты пятью красками не вызывает затруднений.

Превращение прикладной математической теории в чистую –объективный процесс. Математическая дисциплина возникает, как правило, при решении прикладных задач. По мере развития дисциплины она начинает развиваться самостоятельно и все дальше и дальше уходить от практики. Внутренняя логика развития может ставить перед ней такие задачи, которые далеки от практики и, возможно, никогда не понадобятся. Это верно даже для такой прикладной науки, как механика. Существуют, например, сотни изящных и глубоких работ, посвященных распределению напряжений в окрестностях одной трещины. Но на практике при разрушении конструкций возникает не одна трещина, а сотни.

У математиков различное отношение к такому положению. Академик А. Н. Крылов писал, что «геометра, который создает новые математические выводы, можно уподобить некому воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу… Геометр создает методы решения вопросов, не только возникающие вследствие современных надобностей, но и для будущих, которые возникнут, может быть, завтра, может быть, через тысячу лет» [101, с. 305]. Автору ближе точка зрения А. Пу-анкаре: «Случается, что физик или инженер предлагают математику вычислить какое-нибудь число, которое им нужно знать для того или иного применения. Следует ли отсюда, что все мы, математики, должны ограничиться ожиданием таких требований и, вместо того чтобы свободно культивировать удовольствия, не иметь другой заботы, как применяться ко вкусам нашей клиентуры? Можно ли оправдать такой взгляд? Конечно, нет! Если бы мы не культивировали точных наук ради них самих, то мы не создали бы математического орудия исследования, и в тот день, когда от физика пришел бы требовательный приказ, мы оказались бы безоружными» [160, с. 295].

ГЛАВА 6

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ОЦЕНКИ КОМБИНАТОРНЫХ АЛГОРИТМОВ

Вопросы оценки комбинаторных алгоритмов занимают важное место в прикладной теории алгоритмов. Не случайно на Международном симпозиуме «Алгоритмы в современной математике и ее приложениях» в 1979 г. введение времени как оценки сложности алгоритмов было отнесено к основным открытиям общей теории алгоритмов [182, с. 13].

При решении прикладных задач алгоритм является основным конструктивным средством получения нужного результата. Реализация алгоритма на ЭВМ, несмотря на возрастающие с каждым годом возможности техники, требует экономного использования машинных ресурсов. Все это приводит к необходимости обучения оценке алгоритмов студентов разных специальностей. Возможно знакомство и школьников с понятием эффективности алгоритмов. Об этом говорят, в частности, А. И. Павловский и А. Е. Пупцев [149].

Преподавателю следует отталкиваться от следующих наглядных представлений об алгоритмах, отмеченных А. Н. Колмогоровым: «1). Алгоритм Γ, примененный ко всякому „условию" ("начальному состоянию") A на некотором множестве $A(\Gamma)$ („области применимости" алгоритма Γ), дает „решение" ("заключительное состояние") B. 2). Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги заранее ограниченной сложности; каждый шаг состоит в „непосредственной переработке" возникшего к этому шагу состояния S в состояние $S^* = W_\Gamma(S)$. 3). Процесс переработки $A^0 = A$ в $A^1 = W_\Gamma(A^0)$, A^1 в $A^2 = W_\Gamma(A^1)$ и т. д. продолжается до тех пор, пока либо не произойдет безрезультатная остановка (если оператор W_Γ не определен для получившегося состояния), либо не появится сигнал о получении "решения". При этом не исключается возможность неограниченного продолжения процесса (если никогда не появится сигнал о решении). 4). Непосредственная переработка S в $S^* = W_\Gamma(S)$ производится лишь на основании информации о виде заранее ограниченной „активной части“ состояния S и затрагивает лишь эту активную часть» [89, с. 24].

Хотя Колмогоров пишет, что «предполагается строгое определение, отображающее эти наглядные представления в точных математических терминах», это строгое определение следует давать лишь в теоретическом курсе теории алгоритмов на математических факультетах. В случае прикладного курса теории алгоритмов достаточно ограничиться приведенными выше принципами, учитывая лишь, что в настоящее время большинство специалистов требуют от алгоритма конечности. Можно сказать, что «алгоритм – это конечная последовательность точно сформулированных правил, формальное исполнение которых позволяет за конечное время получить искомый результат, основываясь на варьируемых исходных данных» [147, с. 7].

Мы будем рассматривать алгоритмы, связанные с анализом дискретных математических моделей. Построенные алгоритмы решают не конкретные, а массовые задачи. «Под массовой задачей (или просто задачей) мы будем понимать некоторый общий вопрос, на который следует дать ответ. Массовая задача П определяется следующей информацией: общим списком всех ее параметров; формулировкой тех свойств, которым должен удовлетворять ответ. Индивидуальная задача I получается из массовой, если всем параметрам задачи П присвоить конкретные значения» [63, с. 16]. С этим положением необходимо знакомить учеников уже в средней школе, начиная с младших классов, чтобы будущие студенты воспринимали его как очевидное.

С точки зрения классической теории алгоритмов исследование моделей, содержащих конечное число составных элементов и конечное число воздействий на них, не представляет труда, поскольку можно перебрать все допустимые решения, множество которых конечно, и выбрать среди них лучшее. (Некоторые ученые на основании этого говорят о ненужности исследования таких моделей, предлагая освободившиеся средства передать на развитие вычислительных машин, которые и решат возникшие задачи перебором.) Но число допустимых решений для практических задач даже небольшой размерности является астрономическим, и перебрать их даже с помощью сверхмощной ЭВМ за реальное время невозможно. Рассмотрим, например, задачу коммивояжера, которая заключается в поиске кратчайшего маршрута посещения всех городов и возвращения в исходный город при известных расстояниях между городами. Если число городов в задаче будет равно 25, то число всевозможных маршрутов их объезда примерно – 10^{24}. ЭВМ, которая исследует 10 млрд вариантов в секунду (заметим, что таких

ЭВМ еще не существует), найдет лучшее решение с помощью перебора за 300 000 лет. Но число пунктов в задачах коммивояжера, возникающих в производственных моделях, колеблется от нескольких сотен до нескольких тысяч. Увеличение вычислительной мощности ЭВМ тоже не беспредельно, поскольку скорость передачи информации ограничена скоростью света. Такой пример покажет студентам необходимость разработки хороших алгоритмов решения задач на конечных множествах.

Наряду с быстродействием важной характеристикой алгоритма является память, необходимая при реализации алгоритма. Она определяется объемом (размером) оперативной памяти ЭВМ, используемой в процессе вычислений. Для реализации алгоритма, как правило, следует проанализировать все исходные данные задачи. Поэтому число шагов вычисления не может быть по порядку меньше объема памяти. Время более точно отражает сложность алгоритма. (При обучении представляют интерес такие примеры, когда при помощи увеличения используемой памяти в несколько раз время реализации алгоритма уменьшается на порядок.) В дальнейшем будет рассматриваться только временная сложность или трудоемкость алгоритма.

Необходимость оценки быстродействия алгоритмов не вызывает сомнений у студентов. Они называют всегда 2 причины: если для решения задачи существует несколько алгоритмов, то нужно выбрать среди них лучший; при разработке нового алгоритма исследователь должен сравнить его с существующими. Но есть еще одна причина, о которой студенты часто не подозревают. Как правило, заказчик при решении производственной задачи указывает время, за которое задача должна быть решена с помощью ЭВМ конкретной модели. Программирование алгоритма и отладка программы – весьма сложные процессы, требующие значительных усилий и большого времени. Очень плохо, если несколько месяцев упорного труда пропадет из-за того, что время реализации алгоритма на ЭВМ окажется больше заданного. Поэтому алгоритмы необходимо оценивать и для возможного прогнозирования времени выполнения исследований.

Один из возможных подходов – оценивание трудоемкости алгоритма с помощью времени, необходимого для реализации его на конкретной ЭВМ. В этом случае заполняются таблицы, в которых указывается наибольшее, наименьшее и среднее время реализации алгоритма для задач разной размерности. Такой подход имеет определенные недостатки.

Во-первых, фактически оценивается не алгоритм, а программа. Качество программы во многом зависит от мастерства программиста, его умения программировать задачи определенного типа и умения общаться с данной ЭВМ. Впрочем, оценка программы для администраторов скорее достоинство, чем недостаток. Автору данной монографии приходилось слышать такой сомнительный афоризм от одного крупного руководителя: «Лучше плохая программа, чем хороший алгоритм». В какой-то мере его можно понять: для программирования сложного алгоритма нужно затратить много усилий.

Во-вторых, время реализации зависит от модели ЭВМ. Можно приблизительно оценить время выполнения алгоритма на другой машине, но если быстродействие ЭВМ достаточно легко учесть при таком переходе, то другие ее особенности, например, особенности математического обеспечения, учитываются плохо, поскольку их влияние на время часто зависит от строения алгоритма. Например, доказано, что для распознавания симметричности слова длины n относительно его середины на машине Тьюринга требуется не меньше cn^2 элементарных операций, тогда как на любой ЭВМ, имеющей доступ к памяти по адресу и допускающей операции над адресами, можно решить эту задачу за линейное время [105, с. 353].

В-третьих, названные выше таблицы следует заполнить. Для этого нужно решить определенное число задач разной размерности. Производственник может взять эти задачи на своем производстве. В этом случае, возможно, таблицы будут нести искаженную информацию о времени решения аналогичных задач в неродственных отраслях. Можно сгенерировать некоторое количество случайных задач. Тогда придется разрабатывать алгоритм их создания и тратить время на генерацию. Как в том, так и другом случаях задачи придется просчитать на ЭВМ, затратив время и материальные ресурсы. Исследователю также предстоит решить непростой вопрос о количестве задач каждой размерности для того, чтобы построенная таблица оказалась достоверной.

Поэтому оценивать трудоемкость алгоритма временем работы конкретной ЭВМ неудобно как для теории, так и для практики. Лучше воспользоваться какой-либо абстрактной моделью вычислительной машины. В теории алгоритмов существенно используется машина Тьюринга. Внешняя память машины состоит из бесконечной ленты, в каждой ячейке которой может быть написан один символ из внешнего алфавита. Управляющее устройство машины находится в одном из состояний внутреннего алфавита. Оно воспринимает символ, записанный в одной ячейке, после чего в этой ячейке записывается некоторый новый символ, лента передвигается на одну ячейку или остается на месте, а управляющее устройство переходит в новое состояние.

В учебных целях для оценки сложности алгоритмов гораздо удобнее воспользоваться другой моделью ЭВМ, более близкой к реальным вычислительным машинам. Зададим эту модель, которая в дальнейшем будет называться абстрактной ЭВМ.

Абстрактная машина может выполнять арифметические операции, сравнения, пересылки, операции условной и безусловной передачи управления. Эти операции считаются элементарными. Каждая из элементарных операций выполняется за одно и то же время. Память ЭВМ состоит из бесконечного числа ячеек, имеющих адреса. Ко всем ячейкам есть прямой доступ, т. е., зная номер ячейки, можно непосредственно попасть в эту ячейку. В нее можно поместить только одно число, независимо от его величины, которая неограниченна.

Следует использовать возможность и обратить внимание студентов на соответствие абстрактной и реальных ЭВМ. Обычно студенты сами называют сходства и различия машин, так как они уже имеют некоторый опыт работы с ними.

На реальных машинах скорости выполнения различных операций отличаются друг от друга, могут отличаться даже скорости выполнения одной и той же операции для разных чисел, например, деление на 2 производится быстрее, чем деление на 3. Количество физических элементов (байтов) памяти конечно. Зная их расположение, в эти ячейки можно попасть непосредственно. Конечно, в ячейках нельзя хранить сверхбольшие числа, но любое число, возникающее в реальной задаче, может быть помещено в одну ячейку.

Абстрактная ЭВМ, как и любая модель, – упрощенное отражение объекта. Поэтому возможны и другие модели ЭВМ [105, с. 354].

Алгоритмы можно записывать в терминах элементарных операций. Однако такая запись будет перегружена непринципиальными деталями, затемняющими основные идеи алгоритма.

Поэтому для учебных целей алгоритмы следует записывать в виде последовательности пунктов. Каждый пункт содержит инструкции, которые необходимо выполнить. Эти инструкции могут быть написаны на русском (белорусском) или условном (алгоритмическом) языке. Степень подробности инструкций зависит от уровня подготовки студентов. Единственное требование, предъявляемое к инструкциям, состоит в том, что каждая из них должна в случае необходимости выражаться через элементарные операции. Алгоритм, записанный на условном языке, труднее для восприятия обучаемых, поэтому его инструкции могут сопровождаться комментариями, описывающими на русском языке, что выполняется в каждом пункте.

Поскольку время выполнения одной операции считается постоянным для модели, то время реализации алгоритма пропорционально числу элементарных операций. Следовательно, трудоемкость алгоритма можно определить как число элементарных операций, необходимых для выполнения алгоритма.

Нужно обратить внимание студентов, что это определение сразу же вызывает несколько вопросов. Во-первых, очевидно, что время работы алгоритма зависит от размера задачи. Решение задач большей размерности требует анализа большего объема информации, описывающей их условия. Поэтому естественно определить трудоемкость алгоритма как функцию от объема этой информации. Исходные данные задачи кодируются и размещаются в памяти ЭВМ. Число ячеек памяти, занятое ими, называется входом задачи. Следовательно, трудоемкость должна быть функцией от величины входа.

Во-вторых, даже задачи одной величины могут решаться за разное время. В качестве примера рассмотрим такую простую задачу: определить, есть ли среди заданных ста целых чисел хотя бы одно четное число. Алгоритм решения этой задачи прост. Мы берем по очереди числа и делим их на 2. Как только деление нацело произошло, делаем вывод, что четное число среди заданных существует. Если ни одно число не разделилось нацело, то четных чисел нет. При реализации алгоритма нам может повезти, и четным окажется первое число. В этом случае мы обойдемся одним делением. Если же нам не повезет, то делить придется сто раз. Следовательно, время реализации алгоритма во многом зависит и от структуры задачи. Это также должно быть отражено каким-то образом в определении трудоемкости.

Наиболее распространенными являются два способа оценки: оценка в худшем и оценка в среднем. *Функция $f(n)$ является оценкой в худшем, если любая задача с величиной входа n будет решена абстрактной ЭВМ не более чем за $f(n)$ шагов.* Оценка в среднем вычисляется как средняя величина необходимого для решения задачи числа шагов по всем входам. Одна и вторая оценки имеют свои достоинства и недостатки. При решении единичной задачи следует пользоваться оценкой в худшем, поскольку эта задача может оказаться плохой. Если же решаемых задач много, то предпочтительно использовать оценку в среднем. На вопрос, какая из оценок, по их мнению, наиболее распространена, студенты часто дают неправильный ответ: оценка в среднем. На самом деле более распространены оценки в худшем. Это вызвано тем, что такие оценки легче получить, ведь оценивать приходится худший, но единственный вариант.

Существует еще оценка «почти всегда». В этом случае оцениваются в худшем время решения задач для некоторого подмножества

множества входов, причем доля неоцениваемых входов с ростом размерности задачи стремится к нулю.

Студенты должны понять, что следует пытаться строить алгоритмы, оценка которых имеет наименьший порядок, даже если в этом случае функция будет иметь больший коэффициент. Объясняется это тем, что алгоритмы создаются в основном для решения задач большой размерности с помощью ЭВМ, и, начиная с некоторого размера, алгоритм, оценка которого имеет меньший порядок, будет работать быстрее. Можно привести пример, иллюстрирующий это. Так, $80n^2$ будет меньше $5n^3$, начиная с n=16. При построении алгоритма сначала нужно стремиться понизить порядок его функции трудоемкости, а затем уже попробовать уменьшить коэффициент. (На самом деле на практике за коэффициентами практически не следят, так как объективную информацию о трудоемкости алгоритма несет порядок функции, а коэффициенты, как правило, зависят от мастерства программиста.) Поэтому функции трудоемкости сравниваются относительно порядка их роста: функции $5n^2$, $n^2 - 10n + 40$, $100n^2 + n\log n - 25$ имеют один порядок и записываются как $O(n^2)$.

Отсюда вытекает важность построения полиномиальных алгоритмов, т. е. таких алгоритмов, трудоемкость которых выражается полиномом. Можно привести на лекции две таблицы, данные М. Гэри и Д. Джонсоном [63, с. 20]. В одной из них указано время решения задач различной размерности в зависимости от трудоемкости, в другой показано, как изменится размер решаемой задачи при увеличении быстродействия ЭВМ в 100 или 1000 раз. (Аналогичные таблицы приводят А. Ахо, Д. Хопкрофт, Д. Ульман [12, с. 13].) Анализируя таблицы, можно сделать вывод, что с помощью алгоритмов, функция трудоемкости которых экспоненциальна, решить практические задачи даже средней размерности невозможно.

При оценке алгоритмов следует учить студентов разбивать их на части, шаги, этапы (которые, в свою очередь, могут быть разбиты на меньшие части), устанавливать трудоемкости этих частей и затем, пользуясь вычисленными результатами, получать оценку трудоемкости всего алгоритма. Предположим, что алгоритм состоит из нескольких блоков, которые при реализации алгоритма работают последовательно. Этим блокам соответствуют определенные задачи. Однако присутствие этих задач определяется не исходной задачей, а именно алгоритмом. При другом алгоритме составляющие задачи могут быть совсем иными.

В случае линейного (последовательного) строения алгоритма его трудоемкость будет равна сумме трудоемкостей блоков. Если трудоемкости блоков сравнимы, то трудоемкость алгоритма равна трудоемкости наиболее сложного блока.

Предположим, что алгоритм имеет циклическую структуру. Это означает, что какой-то его шаг, имеющий определенную структуру, приходится выполнять несколько раз. В этом случае трудоемкость алгоритма будет равна трудоемкости шага, умноженной на число шагов. Так, при умножении двух квадратных матриц для каждой пары индексов нужно элементы строки первой матрицы, соответствующей первому индексу, умножить на элементы столбца второй матрицы, соответствующего второму индексу, и полученные произведения сложить. Эта процедура является шагом алгоритма. Выполнение одного шага требует n операций умножения и $(n-1)$ операций сложения. Число шагов равно числу пар индексов (числу элементов произведения матриц), т. е. n^2. Таким образом, число операций умножения и сложения при умножении матриц будет $n^2(2n-1)$, а трудоемкость алгоритма $O(n^3)$.

Не случайно в примере мы учитывали только число операций сложения и умножения. Студентам следует знать, что числа операций пересылки и передачи управления практически всегда не превосходят числа других элементарных операций и поэтому ими можно пренебречь при оценке трудоемкости.

Алгоритм решения комбинаторной задачи часто можно трактовать как сведение этой задачи к упорядоченной последовательности решения более легких задач. В свою очередь, составляющие задачи можно свести к еще более простым и т. д. В конце концов процесс сведения должен остановиться, поскольку математик придет к задачам, решение которых он считает известным. Такие задачи будем называть *элементарными.*

Выделение задачи как элементарной является условной процедурой и определяется, в частности, подготовкой пользователя алгоритма. Например, «тяжелая» задача нахождения наибольшего общего делителя двух чисел с помощью алгоритма Евклида сводится к последовательности «легких» задач деления с остатком. Вряд ли учитель в десятом классе будет объяснять, как происходит такое деление, т. е. эту задачу можно считать элементарной. Если же применение алгоритма происходит во втором классе, то учитель должен сначала научить школьников делить с остатком.

Л. Н. Ланда предлагает экспериментальную проверку, является ли задача элементарной [107, с. 60]. Вначале выдвигается гипотеза об элементарности. Затем обучаемая группа решает задачу. В зависимости от результата она считается или не считается элементарной. Этот подход можно использовать на младших курсах вуза, когда преподаватель впервые встречается со студентами с разным уровнем подготовки. В средней школе элементарность задачи определяется тем, рассматривалась ли она ранее.

Приведенная выше трактовка алгоритма позволяет определить содержание прикладного курса теории. В нем должны быть различные способы сведения, декомпозиции, упрощения задач, методы построения и анализа алгоритмов, присутствовать понятие о параллельных алгоритмах.

С другой стороны, в курсе необходим раздел, посвященный изучению элементарных моделей, соответствующих элементарным задачам. Набор их условен. К ним можно отнести те, которые наиболее часто могут входить в качестве составных в исходные задачи, возникающие в исследуемой области: например, задачу линейного программирования, задачи сортировки и поиска, потоковые задачи, задачу коммивояжера, задачу о назначениях, задачу упаковки и другие. Каждая элементарная модель имеет большое число интерпретаций и, без сомнения, описывает реальные ситуации. Но такая модель представляет собой и высочайшую степень абстрагирования от реальной ситуации. Упрощение такой модели невозможно, попытка удалить из нее еще что-нибудь разрушает модель. Изучение элементарных задач необходимо, поскольку без их эффективного решения невозможно эффективное исследование более сложных моделей.

Кроме того, студенты должны осознать, что для создания хороших алгоритмов информация, имеющаяся в задаче, должна быть упорядочена. Необходимо указать, каким способом представлены исходные данные (в виде списков, матриц, деревьев и т. д.) и какие структуры используются для промежуточных преобразований. Говорить о трудоемкости алгоритмов без всего этого невозможно, потому что поиск нужных элементов станет эффективным лишь тогда, когда можно будет быстро определять места этих элементов по каким-то признакам. Поэтому в курсе необходим раздел, связанный со структурами данных. При чтении курса можно пользоваться книгами [12, 96, 99].

Рассмотрим в качестве примера алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева. Он состоит из решения двух задач: выбора на каждом шаге ребра графа минимальной длины и последовательного построения остовного графа с проверкой каждого получающегося подграфа на ацикличность. Первая задача легко сводится к задаче сортировки, которую можно считать элементарной. Лучший алгоритм ее решения содержит $C_1 m \log_2 m$ элементарных операций. Для решения второй задачи удобно использовать такую структуру данных, как деревья. Она решается с помощью циклического алгоритма за $C_2 m \log_2 n$ элементарных операций. (Здесь C_1 и C_2 – константы, m – число ребер графа, а n – число его вершин.) Поскольку для связного графа, не являющегося деревом, число ребер не меньше числа вершин, то общая трудоемкость алгоритма будет $O(m\log_2 m)$.

Следует обратить внимание, что при оценивании алгоритмов в худшем обычно каждый составляющий их блок оценивается в худшем, и общая трудоемкость равна наибольшей из трудоемкостей блоков. Однако иногда происходит следующее: если структура одного блока такая, что для его выполнения нужно произвести наибольшее число операций, то другой блок не может оказаться очень плохим. В случае сложной исходной задачи выявление такой закономерности не всегда доступно исследователю, он оценивает каждый блок как возможно самый плохой, что приводит к завышению оценки алгоритма.

При оценивании трудоемкости часто очень трудно вычислить необходимое число операций для выполнения какой-то части алгоритма. Возникает соблазн воспользоваться завышенной оценкой, что уменьшает усилия по общему оцениванию алгоритма, но часто приводит к завышению оценки. Необходимо ознакомить студентов с несколькими такими ситуациями. Например, в циклическом алгоритме построения транзитивного замыкания ациклического орграфа на каждом шаге следует проанализировать дуги, выходящие из некоторой вершины. Если считать, что из вершины выходит максимально возможное для орграфа число дуг $(n - 1)$ (что как раз невозможно в данном случае, поскольку граф ациклический), то трудоемкость алгоритма окажется равной $O(n^3)$, где n – число вершин. Если ввести новый параметр d – максимальное число дуг, выходящих из вершины, то получается оценка $O(nd^2)$. И, наконец, при более внимательном анализе ситуации можно обнаружить, что каждая дуга орграфа анализируется только один раз, и это приводит к оценке $O(nm)$, где m – число дуг орграфа. Таким образом, для одного алгоритма получено несколько оценок его трудоемкости, причем каждая следующая лучше предыдущей.

Студенты должны быть также ознакомлены с существованием нижних оценок, т. е. таких, которые принципиально невозможно улучшить. Получение нижних оценок значительно труднее, чем верхних. Это связано с тем, что для вычисления верхней оценки исследуется конкретный алгоритм, а для вычисления нижней нужно исследовать некоторую неконкретную потенциальную возможность. В качестве примера можно предложить вычисление нижних оценок в худшем и среднем для алгоритмов сортировки с помощью сравнений.

Полученные нижние оценки можно использовать и для другой цели. С их помощью можно показать, что округление оценок шагов в большую сторону не всегда приводит к завышенной оценке всего алгоритма. Так, при оценивании алгоритма сортировки массива из n чисел с помощью сортирующего дерева удобно считать, что выбор очередного элемента происходит за $\log_2 n$ операций. На самом деле (поскольку выбранный элемент удаляется из дерева) число операций, необходимых для этой цели, все время уменьшается, т. е., возможно, мы получаем завышенную оценку трудоемкости. Однако вычисленная оценка совпадает с нижней оценкой алгоритмов сортировки, следовательно, завышения не произошло.

Важным аспектом теории оценки трудоемкости алгоритмов является наличие «труднорешаемых задач». В связи с этим А. А. Фридман замечает: «Феномен труднорешаемых задач не нов для математики. После уточнения понятия „алгоритма“ было обнаружено наличие алгоритмически неразрешимых проблем. В качестве наиболее известного примера укажем десятую проблему Гильберта: „Существует ли алгоритм, который по данному многочлену p с целыми коэффициентами распознает, имеет ли уравнение $p = 0$ решение в целых числах?“ Как показал Ю. В. Матиясевич, такого алгоритма в принципе не существует» [187, с. 6].

Для студентов математических специальностей следует дать строгое определение NP-полных и NP-трудных задач, используя для этой цели машину Тьюринга [12] или понятие недетерминированного алгоритма [70]. Студенты должны усвоить, что все NP-полные задачи в некотором смысле эквивалентны, а именно: если удастся построить полиномиальный алгоритм для одной из них, то такие алгоритмы будут построены и для остальных. Скорее всего, этого не произойдет, поскольку такие алгоритмы безуспешно пытались строить несколько поколений математиков.

Для студентов технических и экономических специальностей можно, видимо, назвать такие задачи «труднорешаемыми» и ограничиться сообщением о том, что для труднорешаемых задач не построены полиномиальные алгоритмы и, скорее всего, это произошло по объективным причинам, хотя невозможность такого построения пока не доказана. Очень важны практические действия после того, как обнаружено, что задача труднорешаемая. В этом случае необходимо отказаться от построения точных алгоритмов, поскольку эти алгоритмы даже для задач средних размерностей не смогут быть реализованы за обозримое время. Надо использовать приближенные или эвристические алгоритмы. Но, возможно, при решении практических задач ничего плохого не случится. Во-первых, происходит оценивание худшего варианта, и, может быть, таких вариантов немного. Например, симплекс-метод при решении задач линейного программирования имеет экспоненциальную трудоемкость, однако практические задачи решаются с его помощью относительно неплохо. Во-вторых, возможно, структура задач на данном производстве хорошая, и построенные алгоритмы смогут решить их за приемлемое время.

В курсе прикладной теории алгоритмов студенты должны обратить внимание на разработку приближенных и эвристических алгоритмов. (Хорошей задачей для построения таких алгоритмов является, в частности, задача коммивояжера.) Эвристические алгоритмы отличаются от приближенных тем, что в последних теоретически оценивается отличие полученного решения от оптимального. Для эвристических алгоритмов такая оценка может быть получена статистически путем сравнивания результатов работы алгоритмов с известными результатами решения тестовых примеров. Кроме того, желательна оценка трудоемкости алгоритма, полученная теоретически или статистически с помощью решения определенного числа случайных или производственных задач.

При изучении эвристических алгоритмов нужно подчеркивать их естественность и разумность. Существенное место среди таких алгоритмов занимают так называемые «жадные алгоритмы», в которых на каждом шаге выбирают лучшую из альтернатив, не заботясь о влиянии этого выбора на следующие шаги. (Можно указать на связь «жадных алгоритмов» с динамическим программированием.) Иногда эти алгоритмы дают оптимальное решение, например, в задаче построения минимального остовного дерева или задаче о соединении городов. Легко привести примеры, когда алгоритм не строит оптимального решения, например, в задаче коммивояжера. При этом студенты должны понять, что правдоподобие не является гарантией истинности, и в каждом конкретном случае оптимальность алгоритма необходимо доказывать.

Следует заметить, что если с помощью эвристического решается единичная задача, то полученное решение может оказаться далеким от оптимального, однако в случае массового применения алгоритма его точность, как правило, является приемлемой. Часто результат, полученный с помощью такого алгоритма, используется в качестве начального приближения при решении задачи.

ГЛАВА 7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Среди разделов дискретной математики теория графов отличается своей наглядностью, ее модели легки для восприятия и часто допускают занимательную, игровую интерпретацию. Вопрос использования теории графов можно разбить на несколько тесно связанных между собой вопросов. Первый: изучение элементов теории, ее основных понятий с целью получить математические знания. Второй: использование графовых задач для развития математических и логических способностей обучаемых и их воображения. Третий: применение графов в служебных целях в качестве некоторого вспомогательного средства, позволяющего облегчить процесс обучения математике. Различные аспекты использования графов в средней школе рассмотрены в работах М. П. Барболина, Л. Ю. Березиной, Е. В. Брызгалова, С. И. Васильева, В. Ф. Волгиной, Н. А. Волковой, В. Ю. Лысковой и Е. А. Ракитиной, О. И. Мельникова, О. О. Пронжилло, В. Родионова, К. Я. Хабибулина и других [2, 14, 18, 30, 35, 41, 42, 44, 117, 125, 126, 130, 131, 158, 163, 189], а познакомиться с популярным изложением элементов теории графов можно в книгах Л. Ю. Березиной, В. В. Коннова, Г. А. Клековкина и Л. Л. Конновой, О. И. Мельникова, А. А. Саркисяна и Ю. М. Колягина, Р. Уилсона, А. А. Харланова [17, 92, 93, 124, 128, 168, 181, 190].

Использование графов в качестве универсального языка

Графы можно использовать как язык, описывающий различные ситуации, возникающие в процессе обучения. *Граф* – это множество точек, изображенных на листе бумаги, некоторые пары из которых соединены линией. Точки называются *вершинами* графа, а линии – его *ребрами*. Это определение простое и понятное ученикам. Вместе с тем в виде графов можно представлять и изучать различные объекты, между которыми, на первый взгляд, нет ничего общего. Язык теории удобен для восприятия и использования. «Он почти непосредственно выводится из общераспространенной практики людей, когда они, при рассмотрении самых различных вопросов, вычерчивают схемки, чертежики, наброски, в которых дискретно воспринимаемые объекты дискуссии (люди, населенные пункты, станки, железнодорожные станции и проч.) обозначаются точками или кружочками, а связи, отношения между ними (маршруты, производственные потоки, родственные отношения, служебные соподчинения, координируемые действия и проч.) линиями. Последние, в случае необходимости, оснащают стрелками для обозначения направленности отношений или действий»[165, с. 92]. Фактически люди пользуются графами, часто не догадываясь об этом. Применение графов придает наглядность обучению, а это очень важно, поскольку она «...информацию превращает в знания, а им помогает превратиться в умения» [170, с. 60].

Использовать графы как язык можно уже в детском саду [151] или в младших классах [192–195]. При этом не обязательно называть получаемые схемы графами. Так, задача «Кого на рисунке больше: зайчиков или морковок?» наряду с традиционным способом решения, когда пересчитываются и зайчики, и морковки, а затем сравниваются полученные числа, может быть решена и с помощью установления соответствия между множествами зайчиков и морковок. Решение подобных задач позволит в дальнейшем подвести школьников к идее сравнения мощностей множеств (на факультативах в старших классах и бесконечных множеств) с помощью установления соответствия между их элементами.

Использование графов при установлении соответствий между различными множествами существенно облегчит их решение. Рассмотрим следующую задачу: «Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?»

Обозначим точками карандаши и коробки. Сплошная линия будет обозначать, что карандаш лежит в соответствующей коробке, а пунктирная, что не лежит. Тогда, с учетом условий задачи, имеем граф G_1 (рис. 2).

Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в каждой коробке может лежать ровно один карандаш, то из каждой точки должна выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф G_2, дающий решение задачи.

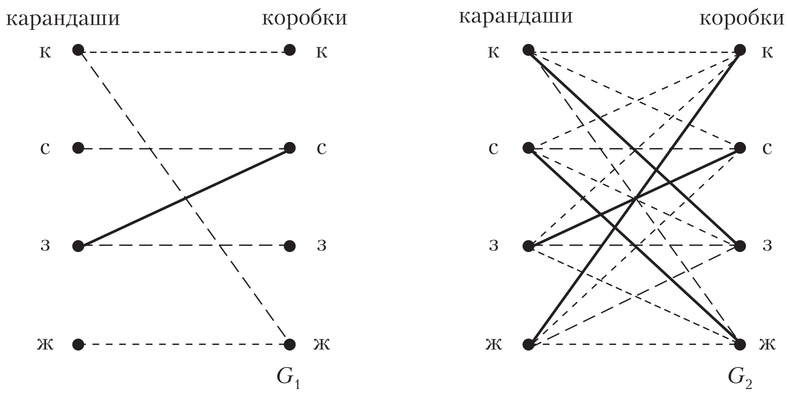


Рис. 2.

Графовый язык поможет и при введении понятия функции. Функция – это некоторое соответствие между множествами. В случае дискретных множеств с помощью графов можно объяснить: когда построенное соответствие является функцией, а когда нет; что такое обратная функция и когда она существует; что такое множество определения и множество значений функции. На факультативах графовые схемы помогут школьнику понять, что такое биективное, сюрьективное и инъективное отображение.

Соответствие между множествами X и Y, изображенное на рис. 3*а*, не является функцией, на рис. 3*б* – функция, не имеющая обратной функции, на рис. 3*в* – функция, имеющая обратную функцию, на рис. 3 г изображена эта обратная функция. На рис. 4 показана функция f: $X \to Z$, получающаяся при умножении функций f_1: $X \to Y$ и f_2: $Y \to Z$.

Большое число примеров, использующих графы для иллюстрации различных свойств функций и отношений, дано В. Т. Петровой [153].

В современной науке значительное место занимает структурный анализ больших систем. Иногда системы, описывающие разные объекты, имеют одинаковые структурные свойства. Такие системы называются изоморфными. Первичное понятие об изоморфных системах можно дать ученикам с помощью теории графов. Легко построить примеры, когда одним и тем же графом будут описываться абсолютно различные объекты, имеющие одинаковое строение. С помощью графов можно описывать такие важные структурные понятия, как отношение и связь.

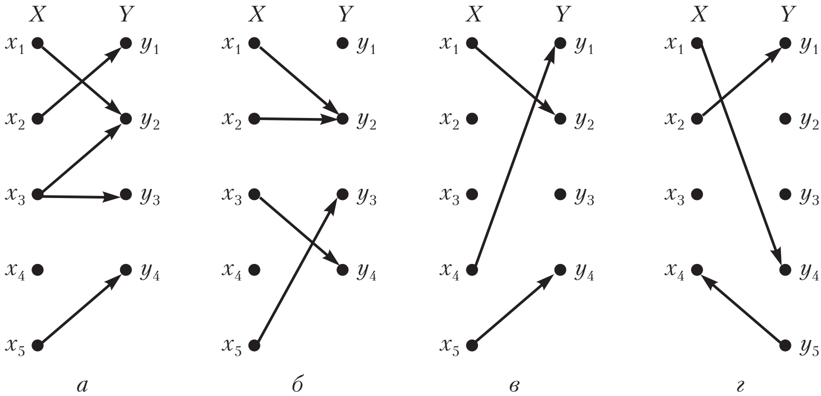


Рис. 3.

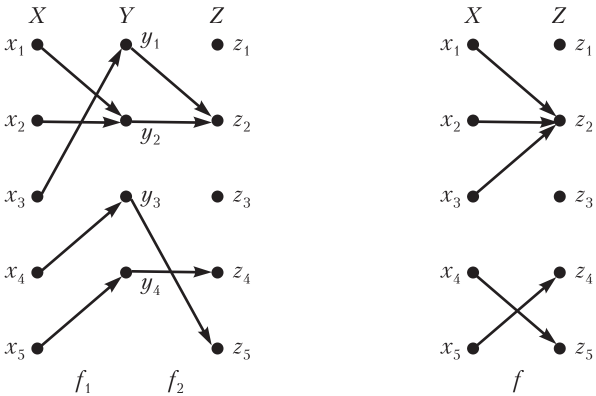


Рис. 4.

При выполнении любой работы необходимо определить ее составные части и задать порядок выполнения этих частей. «Чтобы построить новую процедуру практической деятельности, индивид (в общем случае) должен знать: 1) вид и характер требующегося ему продукта; 2) вид и характер исходного материала преобразований; 3) необходимые для преобразований орудия и средства; 4) характер отдельных действий, которые нужно совершить, и их порядок» [205, с. 53]. Фактически индивид должен разработать алгоритм выполнения процедуры. В этом алгоритме должны быть предусмотрены исходный материал для выполнения процедуры и его первоначальное состояние, возможные промежуточные результаты и характер действий индивида в случае возникновения какого-либо промежуточного состояния и прекращение работы алгоритма при достижении определенного результата. Понятие «алгоритм» – одно из важнейших понятий в современной науке и технике. Задачи теории графов – благодатная почва для обучения школьников алгоритмическому мышлению.

На рис. 5 задача представлена с помощью графа (блок-схемы). Необходимо, меняя значения переменной x на входе алгоритма, получать зависящие от x значения a на выходе. Можно видоизменить задачу, поставив, например, вопросы: «Задано число, которое нужно получить после работы алгоритма. Какое число должно быть задано на входе?» или «Задано множество чисел на входе алгоритма. Какое множество может получиться после работы алгоритма?» и т. д. Такие задачи развивают математическую интуицию школьника.

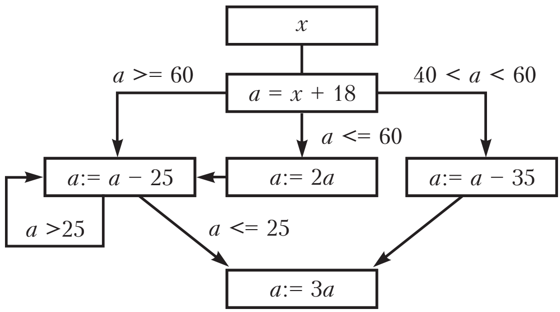


Рис. 5

Этим самым ученик подойдет к восьмому классу, в котором начинается курс информатики, уже с интуитивным пониманием алгоритма. При изучении информатики роль графов как языка существенно возрастает. С помощью графов можно описывать сложные алгоритмы решения задач, причем это описание обладает большой наглядностью. Введение описания алгоритмов с помощью графов (блок-схем) приписывается Нейману [19, с. 32]. С другой стороны, можно объяснять строение различных используемых в программировании структур, например, очередей, стеков, деков, куч и т. д. и операций над ними. Освоение школьником практической реализации структур будет происходить быстрее, если он будет понимать их строение.

С помощью графов можно аккуратно перебирать варианты в достаточно сложных комбинаторных задачах. Такой перебор дисциплинирует мышление школьников, позволяет не пропустить ни одного варианта и не повторить никакой вариант дважды. Рассмотрим следующую задачу: «В первое ведро налили 5 литров воды, во второе – тоже 5, в третье – 2 литра воды. В ведро разрешается добавлять столько воды, сколько в нем находится, причем переливать эту воду можно из любого другого ведра. Определите, каким образом можно получить в каждом ведре один и тот же объем жидкости?»

На рис. 6 показан последовательный перебор всевозможных вариантов переливаний. В прямоугольнике указан объем воды в ведрах, а над стрелками – из какого ведра в какое переливают. Перебор заканчивается при получении нужного результата. Ответ: сначала из первого ведра в третье переливают 2 литра воды, затем из второго в первое – 3 литра и, наконец, из первого во второе – 2 литра.

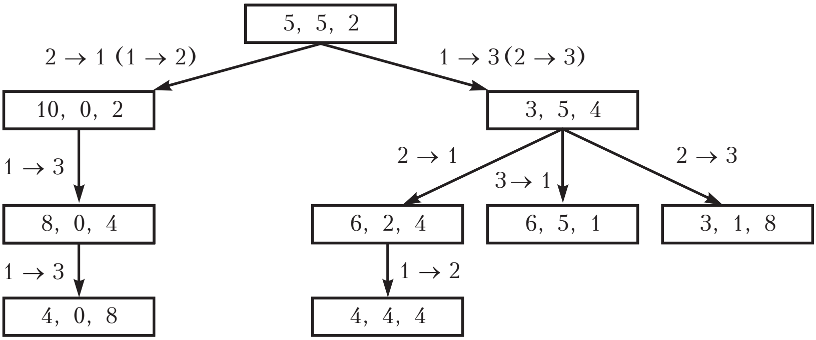


Рис. 6.

Аналогичными задачами, в которых необходимо перебирать варианты, являются задачи поиска всех путей между населенными пунктами и поиска выхода из лабиринта. Они приводятся в книгах В. М. Котова и О. И. Мельникова [97, 128], причем в первой рассматривается поиск с возвращением.

Обучение построению математических моделей

Обучение школьников абстрактному мышлению тесно связано с внедрением в их мышление одного из важнейших понятий современной науки – «модель». Графы в силу своей наглядности – идеальное средство для знакомства школьника с приемами построения моделей. Теория позволяет строить математические модели с различной степенью детализации, зависящей от необходимости исследования объекта. Если индивидуальные свойства частей изучаемого объекта не являются существенными для решаемой задачи, то их изображают одинаковыми вершинами. Например, все дети вне зависимости от пола, возраста, веса, характера будут изображаться одинаковыми точками, если в условии задачи эти характеристики не упоминаются. Если же для решения важно, что дети являются мальчиками и девочками, то соответствующие вершины графа нужно окрасить в различные цвета.

Аналогично можно различать и характеры отношений (связей) между частями объекта. Рассмотрим граф, описывающий сеть шоссейных дорог. Вершины графа будут задавать перекрестки, а ребра (кривые) – сами дороги. Если дороги чем-то отличаются друг от друга, например, покрытием, и это существенно для решения задачи, то ребра следует окрасить в разные цвета в зависимости от качества его покрытия. Дороги с односторонним движением будут заданы ориентированными ребрами. При необходимости ребрам приписываются числа, задающие длину дорог, их пропускные способности, стоимость перевозки груза и т. д. Очень важным является то, что с помощью графов можно строить математические модели не только материальных объектов, но и модели объектов, между частями которых существуют нематериальные отношения и связи.

Более подробная модель лучше описывает объект, но является более сложной для изучения. Часто нам нужно решить такую-то задачу, но из-за сложности мы ее решить не можем и вынуждены довольствоваться решением упрощенной. Например, рассмотрим задачу соединения пяти электронных приборов, каждая пара из которых, кроме одной, связана проводниками. Необходимо соединить приборы так, чтобы проводники не пересекались. Решение задачи заключается в определенном изображении на плоскости некоторого графа. После решения можно обратить внимание школьников на то, что мы изображали приборы в виде точек, а на самом деле они имеют некоторую форму, могут иметь не один, а несколько контактов для соединения и т. д., т. е. мы решили упрощенную задачу.

Фактически построение моделей начинается уже в детском саду, поскольку задачи на соответствия описываются с помощью простейших графовых моделей. Конечно, само упоминание термина «модель» целесообразно в старших классах. Построение моделей связано еще и с обучением школьников абстрактному мышлению.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Использование графовых моделей позволяет избежать формализма в знаниях. Одним из видов формализма является то, что ученик не видит связи математических понятий и фактов с реальным миром [162, с. 29]. С помощью графовых моделей можно в занимательной форме знакомить школьников с реальными задачами, возникающими в науке и технике [124]. Назовем, например, задачи проектирования интегральных схем, составления расписаний, оптимального планирования перевозок, анализа информационных сетей и многие другие. Графовые модели позволяют также знакомить школьников с фактами из физики, химии, биологии, электроники и других дисциплин. Решим одну задачу по химии: «Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода».

Рассмотрим граф, в котором вершинами являются атомы, а ребрами – соответствующие валентные связи между атомами. Покажем от противного, что в графе не существует цикла, т. е. замкнутого маршрута по ребрам, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Если он есть, то должен быть составлен из атомов углерода, поскольку водород имеет валентность 1 и может соединяться только с одним атомом. В случае существования цикла разорвем связь между двумя атомами углерода и присоединим к каждому из них по атому водорода. Число атомов водорода увеличится, значит, исходный граф описывал не молекулу насыщенного углеводорода.

В построенном графе можно перейти по ребрам от любой вершины к любой другой, и в нем нет циклов. Такой граф называется *деревом*. Пусть молекула содержит n атомов углерода и m атомов водорода, поэтому в графе будет $n + m$ вершин. Далее при решении задачи нужно воспользоваться двумя предварительно доказанными простыми соотношениями. Первое: *в дереве число ребер на единицу меньше числа вершин.* Следовательно, в графе $n + m - 1$ ребер. Второе: *сумма числа ребер, выходящих из вершин графа, равна удвоенному числу ребер.* Последнее соотношение называется *леммой о рукопожатии.* (Доказательство этих утверждений в данной работе проведено позже.) Из вершин, обозначающих атомы углерода, выходит по 4 ребра, а из вершин, обозначающих атомы водорода, – одно. Из леммы о рукопожатиях вытекает: $4n + m = 2(n + m - 1)$. Отсюда получаем: $m = 2n + 2$. Это значит, что формула насыщенного углеводорода, имеющего n атомов углерода, C_nH_{2n+2}. Эта задача часто вызывает удивление у школьников: оказывается можно получить формулу вещества, используя только определение и не проводя химических опытов.

Кроме того, математические модели позволяют лучше уяснить двойную связь математики с реальным миром. С одной стороны, с помощью математики, изучая модели, мы существующий мир, а с другой – возникновение новых математических моделей и необходимость их исследования инициируют и возникновение новых математических методов.

Использование графовых задач для развития сообразительности школьников

В последнее время происходит значительное сокращение часов, отводимых на изучение естественных дисциплин, в пользу изучения гуманитарных в целях гуманизации общества. Изменение программ не принесло ожидаемого эффекта, так как предполагаемая гуманизация вряд ли произошла, а вот умственное развитие общества снизилось. Косвенно это подтверждают недавние исследования российских психологов. Они показали, что российское общество менее интеллектуально, чем американское. Еще в 50-х гг. XX в. американский психолог Ч. Спирмен отметил, что общий интеллект человека складывается из трех отдельных составляющих. Пространственный интеллект обеспечивает представление реального мира в форме образов и многомерных схем. Семантический интеллект позволяет оперировать суждениями и понятиями и определяет успешность «метафорического» мышления. Формальный или математический интеллект дает возможность работать с абстрактными символами, причем без опоры на наглядность. Именно низкий уровень математического интеллекта привел к общему снижению кривой распределения коэффициента интеллектуальности IQ среди россиян. Оказалось, что у большинства детей его уровень невысок [119]. Примерно об этом пишет и академик В. И. Арнольд: «Запланированная Министерством образования „гуманизация“ и „гуманитаризация“ предусматривает существенное уменьшение числа часов на математику с использованием высвободившихся часов на такие предметы, как макраме и коневодство… К сожалению, сейчас уровень математической грамотности страны в целом начал катострофически падать» [10].

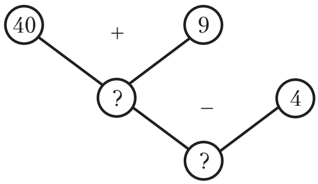
Ускорение умственного и логического развития школьников, улучшение их сообразительности – одна из главных задач учителя в школе. Известный советский математик и педагог Б. В. Гнеденко писал: «Цель школьного обучения состоит не в том, чтобы перегрузить память учащихся сведениями, которые не превращаются в орудие труда, а в том, чтобы сделать их ум пытливым, подвижным, способным анализировать новые ситуации, находить подходы к решению возникающих проблем» [55]. Интенсивное развитие современной науки и техники требует от системы образования воспитания специалистов, способных быстро приспосабливаться к изменяющимся условиям, решать нестандартные проблемы, принимать быстрые и верные решения. Тем не менее школьник зачастую, несмотря на большое время, отводимое на математику, теряется перед несложными, но новыми, непонятными для него задачами.

Объяснить это можно следующим образом. Как говорилось ранее, старшие школьники способны перейти от действий по решению конкретных задач к обобщениям, построениям общих правил и алгоритмов решения задач определенного типа. Учителям становится легче работать. К сожалению, некоторые из них излишне формализуют процесс обучения, злоупотребляют алгоритмической составляющей обучения в ущерб эвристической [71, 72]. Научить школьников думать значительно труднее, чем научить их конкретным действиям в конкретной обстановке. О вреде и последствиях формального обучения математике писал изобретатель логарифмической линейки У. Отред еще в 1632 г.: «Истинный путь к овладению Искусством проходит не через Инструменты, но через Доказательство. И эта нелепая манера невежественных учителей начинать с Инструментов, а не с Науки. Поэтому вместо Мастерства их ученики обучаются только трюкам, подобно фокусникам. И несмотря на обучение, это приводит к потере драгоценного времени и превращению умов жаждущих и трудолюбивых в невежественные и ленивые. Использование инструментов действительно превосходно, если человек владеет истинным Мастерством, но презренно, если это владение противопоставляется Искусству» [196, с. 56].

Обучение думать, ставить вопросы в процессе решения задач и отвечать на них начинается с простых задач, в которых для получения ответа нужно выполнить одно действие. В дальнейшем переходят к решению составных задач, которые представляют собой различные комбинации простых. Решение практически любой составной задачи в младших классах может быть представлено в виде дерева по следующей схеме. Корень дерева соответствует ответу на вопрос задачи. Но для ответа нужно знать некоторые значения. Вершины графа, соответствующие этим значениям, соединяются с корнем. Некоторые из значений могут быть известны, а другие нет. Неизвестные значения можно узнать, выполнив действия над величинами, часть из которых известна, а часть нет, и т. д. Представление задачи таким образом, с одной стороны, позволит систематизировать логические построения школьника, а с другой – опять-таки приведет к понятию алгоритма. Подобный подход можно использовать как при решении алгебраических, так и геометрических задач [71, 189].

Рассмотрим следующую простую задачу: «Дети вырастили 40 кур, 9 гусей, а уток на 4 меньше, чем кур и гусей вместе. Сколько уток вырастили дети?» [195].

Зная количество кур и гусей, можно найти их общее количество, а затем и количество уток. Схема решения задачи представлена на рис. 7.



1) 40 + 9 = 49 гусей и кур вырастили дети;

2) 49 – 4= 45 уток вырастили дети.

Рис. 7.

Граф помогает обнаружить и другой способ решения.

1) 9 – 4 = 5 – на столько больше уток, чем кур;
2) 40 + 5 = 45 – уток вырастили дети.

Задачи по теории графов – нередкие гостьи на математических олимпиадах всех уровней [34, 46, 73, 185]. Это не удивительно: ведь решение этих олимпиадных задач практически основывается на здравом смысле, на сообразительности, они не требуют глубоких математических знаний. Рассмотрим, например, следующую задачу: «Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда она съедает какой-либо кубик, то переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?» [73]. Для решения этой задачи нужно догадаться, что 26 единичных кубиков, отличных от центрального, следует раскрасить в шахматном порядке двумя красками, например, черной и белой. Каждому единичному кубику поставим в соответствие вершину графа и соединим две вершины ребром, если соответствующие им кубики имеют общую грань. Поскольку в любой паре таких кубиков один кубик будет черным, а другой – белым, то вершины графа разделятся на две части, соответствующие кубикам каждого цвета. Любое ребро будет соединять вершины разных частей. (Такой граф называется *двудольным.)* В одной части окажется 12 вершин, во второй – 14. Любой маршрут мышки по кубу соответствует маршруту прохождения вершин графа. Так как мышь съедает каждый кубик один раз, то маршрут по графу должен проходить каждую вершину ровно один раз. Такой маршрут называется *гамильтоновой цепью*. Однако, поскольку в маршруте по графу чередуются вершины разных частей, гамильтоновой цепи в двудольном графе, одна часть которого имеет на две вершины больше, чем другая, не существует. Следовательно, мышь не может съесть сыр указанным способом.

Большое количество задач разной трудности можно решить с помощью леммы о рукопожатиях. Вот простая задача на эту тему: «11 школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки от тех, кому послал сам?» [17]. Обозначим школьников вершинами графа, а если школьники обменялись открытками, то соединим соответствующие вершины ребром. Тогда из каждой вершины выйдут ровно три ребра, а это невозможно, так как сумма выходящих ребер должна быть четным числом.

Рассмотрим более сложную задачу, для решения которой не требуется ничего, кроме соображения: «Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой. Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся» [24].

Представим мушкетеров вершинами графа G и соединим две вершины ребром, если соответствующие мушкетеры поссорились. Мушкетеров будем обозначать большими буквами, а соответствующие им вершины теми же малыми. Предположим, что в графе есть вершина v, которая соединена ребрами не менее чем с четырьмя вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, … В этом случае ни одна пара вершин v_i, v_j не может быть соединена ребром, так как тройке мушкетеров V, V_i, V_j придется драться между собой, что запрещено условиями задачи. Поэтому V_1, V_2, V_3, V_4 образуют требуемую четверку мушкетеров.

Пусть теперь каждая вершина графа соединена не более чем с тремя вершинами. Из леммы о рукопожатиях следует, что из каждой вершины не может выходить по три ребра и существует вершина u, из которой выходит не больше двух ребер. Рассмотрим граф T, порожденный ребрами графа G, соединяющими шесть вершин, не соединенных с вершиной u. Пусть вершина w графа T соединена с тремя вершинами w_1, w_2, w_3 этого же графа. Так же, как и ранее доказывается, что вершины w_1, w_2, w_3 не соединены ребрами. Поэтому мушкетеры U, W_1, W_2, W_3 образуют нужную группу. Если же вершина w графа Т не соединена с тремя вершинами w_1, w_2, w_3 этого же графа, то из условий задачи вытекает, что среди вершин w_1, w_2, w_3 найдется пара не соединенных ребром, например, вершины w_1, w_2. Тогда нужную группу образуют мушкетеры U, W, W_1, $W_{2.}$. Задача решена.

Вместе с тем можно предложить задачи, которые решаются с использованием более глубоких фактов теории графов, причем доказательство их будет неявно происходить при решении. Рассмотрим такую задачу: «Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на перекрестках улиц города, который имеет 162 отрезка улиц между перекрестками. Решено было не устанавливать более одной колонки на соседних перекрестках. Известно, что в городе на каждом перекрестке сходится не менее четырех улиц. Докажите, что при этих условиях компания не сможет установить более 40 колонок».

Решение задачи основано на известной оценке числа независимости: $\alpha_0(G) \leq m(G)/\delta(G)$, где $\alpha_0(G)$ – *число независимости* графа G (наибольшее число вершин графа, между которыми нет ни одного ребра), $m(G)$ – число ребер графа, $\delta(G)$ – наименьшее из чисел ребер, выходящих из вершин графа. Схема города естественным образом представляет граф, в котором перекрестки – вершины, а отрезки улиц между ними – ребра. Предположим, что колонки установлены на k перекрестках: u_1, u_2, ... u_k. Из этих перекрестков выходит соответственно d_1, d_2, ... d_k улиц. Пусть $m = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$. Поскольку перекрестки не являются соседними, то все отрезки, выходящие из них, разные, поэтому $m \leq 162$. Так как из условий задачи выполняются неравенства $4 \leq d_i$, то $4k \leq m$. Отсюда $4k \leq 162$ и $k \leq 40$.

Рассмотрим следующую задачу: «Король одной сказочной страны пригласил на пир людоедов, живущих в его стране. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего, третий – четвертого и т. д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто никого не хочет съесть». При решении этой задачи можно «замаскировано» доказать и использовать известную теорему Т. Галлаи и Б. Руа, полученную в 1967 г. Для формулировки теоремы введем нужные определения. *Ориентированный граф* или *орграф* отличается от обычного тем, что каждое ребро его, называемое *дугой*, ориентировано, т. е. имеет начало и конец. *Путем* в орграфе называется последовательность дуг, в которой конец одной дуги является началом другой. *Длина* пути – это число дуг в пути. *Правильной раскраской* орграфа называется приписывание вершинам графа меток (красок) так, что две вершины, которым приписано одно и то же число, не соединены ребром. *Хроматическое число* c(G) графа G – это наименьшее число красок, при котором возможна его правильная раскраска. Теорема: *«Если k – максимальная длина пути в орграфе G, то $\chi(G) \leq k + 1$».*

Построим орграф G, в котором вершины соответствуют людоедам, а дуга идет от вершины u до вершины v, когда людоед, соответствующий первой вершине, хочет съесть людоеда, соответствующего второй вершине. Будем удалять из орграфа дуги до тех пор, пока в полученном орграфе G_1 не останется контуров, т. е. путей, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине. Для любой вершины v орграфа G_1 определим метку $t(v)$ как число вершин в наибольшем пути в орграфе G_1 с началом в вершине v. Из условий задачи следует, что минимальное значение $t(v)$ равно 0, а максимальное – 5.

Посадим людоеда, соответствующего вершине v, в комнату с номером $t(v)$. Докажем, что в каждой комнате никто никого не хочет съесть. Для этого достаточно доказать, что среди вершин с одинаковой меткой в орграфе G нет вершин, соединенных дугой. Действительно, если вершины соединены дугой в орграфе G_1, то они имеют разные метки. Если же дуги (u, v) нет в G_1, то добавление ее к G_1 приведет к возникновению контура (вспомним правило построения графа G_1). Следовательно, в графе G_1 существует путь из вершины v в вершину u, а поэтому эти вершины имеют разные метки. Задача решена.

Из определений, приведенных при решении двух последних задач, при работе со школьниками можно использовать только простые и понятные для них определения орграфа, дуги, пути, длины пути.

Отмечено, что ученики младших и средних классов мыслят конкретно, плохо воспринимают абстракции, с трудом переходят от частных задач к обобщениям [29], поэтому с ними лучше решать задачи, в которых заданы конкретные числа. Так условие: «В компании из 53 человек каждый знаком не менее чем с 27» в этом случае предпочтительнее условия: «В компании каждый знаком не менее чем с половиной присутствующих». Тем не менее после решения нескольких однотипных задач можно перейти к обобщениям и к общей формулировке. Это же следует делать в младших и средних классах и при доказательстве общих фактов.

Обсуждение условий задач, обвинение в искусственности описываемых ситуаций является обычным в младших классах. Например, условие: «Каждый ученик одного класса знаком *ровно* с тремя учениками другого класса» вызывает сомнение в истинности этого условия. Решение графовых задач помогает переходу от конкретного мышления школьников к абстрактному.

Кроме того, школьников одновременно можно учить четко формулировать и понимать математические и логические задачи, уметь замечать противоречия при их постановке. Например, фразу

«Из каждой точки выходят две линии» многие из учеников понимают так, что выходят **ровно** две линии, хотя на самом деле их может быть и две, и три, и десять и т. д.

В качестве еще одного примера рассмотрим классическую задачу: «Есть три дома и три колодца. Хозяева домов поссорились и решили провести дорожки от своих домов к каждому из колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возможно ли это?» Решение задачи заключается в доказательстве невозможности изображения графа, в котором дома и колодцы заданы вершинами, а дорожки ребрами, на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.

Пока автор данной книги доказывал у доски невозможность такого изображения, один из учеников заявил, что нужное расположение дорожек возможно, и предъявил рисунок (см. рис. 8). Методическая ошибка автора заключалась в том, что он посчитал очевидным для учеников термин: ребра не пересекаются. Линии называются *непересекающимися*, если они не имеют общих точек. Ученик же считал, что линии пересекаются, если они имеют общую точку, и для одной из линий существуют точки, расположенные по обе стороны от другой. Поэтому по его «определению» пары ребер (2, 6) и (2, 5) или (2, 6) и (3, 5) не пересекаются. Кроме того, следовало бы уточнить графовую формулировку задачи, так как ребра, выходящие из одной вершины, имеют общую точку, т. е. пересекаются. Этот пример также показывает необходимость обучения школьников четкости математических формулировок.

К сожалению, в начальных классах часто нарушается дидактический принцип последовательности обучения. Как правило, в первый класс приходят дети с разной степенью подготовки: некоторые из них могут выполнять относительно сложные действия с двузначными или трехзначными числами, а другие с трудом ориентируются в пределах десятка. Поскольку обучение часто ориентируется на среднего ученика, то лучшие ученики получают хорошие отметки, не прилагая усилий со своей стороны. Они постепенно отвыкают работать, а некоторые и не привыкают. Решение занимательных графовых задач поможет сгладить такую ситуацию.

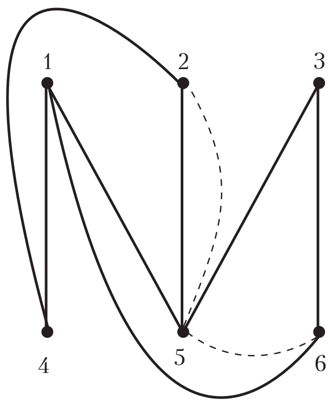


Рис.8.

Графовые задачи стали появляться на вступительных экзаменах в вузы. Вот одна из них, предлагавшаяся в БГУ: «На плоскости даны 25 точек. Известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди точек найдутся 13, лежащих в круге радиуса 1» [120]. (Опыт автора говорит, что абитуриенты с такими задачами справляются плохо.) Будем считать, что две точки (вершины графа) соединены ребром, если расстояние между ними меньше 1. Покажем, что есть точка, из которой выходит не меньше 12 ребер. Предположим, что максимальное число ребер, выходящих из точки, не более 11, и выходят они из точки u. Тогда точек, не соединенных с точкой u, будет не менее 13. Среди них обязательно найдутся две точки v и w, не соединенные между собой, так как в противном случае из любой точки, не соединенной с точкой u, будет выходить не менее 12 ребер, что противоречит нашему предположению. Поэтому не существует ни одного ребра, соединяющего хотя бы одну пару точек из множества $\{u, v, w\}$. Получено противоречие с условием задачи. Поэтому существует точка, которая соединена ребрами с 12 точками. Все эти 13 точек лежат в круге радиуса 1.

Графовые задачи имеют большое достоинство: их можно излагать в занимательной или игровой форме. Это было использовано автором при написании двух занимательных книг по теории графов [124, 128]. Одна из них – «Незнайка в стране графов» – рассчитана на учеников 5–7 классов. В ней рассматриваются начальные сведения из теории. Книга написана в виде диалогов Незнайки, Знайки и их друзей. Предполагается, что юный читатель сам будет пытаться отвечать на вопросы, возникающие в диалогах.

Вторая книга – «Занимательные задачи по теории графов» – содержит более ста задач различной степени трудности вместе с их решением и может использоваться школьниками для самостоятельной работы и учителями на факультативах и при подготовке к олимпиадам учеников 5–11 классов. Часть задач не требует особых знаний по теории графов. Следует отметить, что среди таких задач есть и достаточно трудные. При решении других задач используются некоторые серьезные факты теории. Автор сознательно включил доказательства графовых теорем в процесс решения задач.

Решение графовых задач позволит одновременно с развитием общих умственных способностей детей развивать и их дискретное мышление. А это будет способствовать лучшему и более глубокому освоению ими информатики, теоретической базой которой является дискретная математика. Не случайно элементы теории графов включены в программу для углубленного изучения информатики в 10–11 классах общеобразовательной школы [98].

Использование графовых задач для развития воображения школьников

В последнее время идет много разговоров о гуманизации и гуманитаризации образования. Но для этих целей наряду с предметами гуманитарного профиля можно успешно использовать и естественнонаучные дисциплины, в том числе и математику. Математическое образование не помешало Андрею Белому и Александру Солженицину стать великими писателями. Современный этап развития общеобразовательных школ Республики Беларусь требует изменения традиционной педагогической деятельности. Нужен переход от информационно-объяснительной технологии к деятельно-развивающей, направленной на развитие личностных качеств каждого школьника. Важны не только усвоенные знания, но и сами способы получения и переработки учебной информации, развитие познавательной деятельности и творческого потенциала ученика, существенный пересмотр разделов современной программы по математике.

Человек имеет две системы мышления: логическую и образную. Первая более характерна для естественников и инженеров, вторая – для писателей, художников, артистов. В то же время академик Раушенбах пишет: «Уверен, что нужны оба способа мышления в науке. В процессе научной работы часто возникают очень важные идеи на образном уровне. Иногда наступает такой момент, когда нужно отбросить логику» [161].

Ниже описывается опыт использования графовых задач в школе № 3 г. Новополоцка для развития воображения учеников.

В рамках дополнительных (развивающих) занятий по математике в 5–7 классах школы проходило изучение глав книги «Незнайка в стране графов» [128]. При этом делался упор на самостоятельную внеклассную работу школьников. В учебнике по математике для 6 класса [39] в разделе внеклассной работы приведены задачи (№ 569, 1204, 1233, 1287), которые решаются с помощью графов. Эти задачи стали опорными при работе над указанной выше книгой. Вначале учитель показал связь задач из учебника с ситуациями, описанными в книге, посоветовал детям, как лучше работать с ней, как правильно пользоваться ее теоретической базой и что должно стать результатом работы.

Ученикам задавалась на дом глава книги, которую они должны были самостоятельно прочитать и разобраться в ее содержании. Книга построена в виде диалогов между Незнайкой и Знайкой, в которых принимают участие и другие коротышки. Незнайка задает вопросы, а умный Знайка отвечает на них так, чтобы малыши постепенно сами подошли к правильному выводу. Поэтому в случае затруднения школьники всегда могли найти нужный ответ и рассуждения, приводящие к нему, в тексте.

Построение книги позволило учащимся читать ее с интересом и желанием. Иногда даже устраивались семейные чтения, составление и обсуждение задач. Такой подход пробуждает интерес школьников к неизвестным «рубежам» новых разделов математики. Вырисовывается интересная цепочка: изучить самостоятельно раздел из новой математической дисциплины (теории графов), осмыслить изученное, составить собственную задачу или смоделировать придуманную ситуацию, решить задачу или исследовать построенную модель, сделать правильный вывод.

После чтения на занятиях в классе происходило обсуждение соответствующей главы, на котором повторялись основные понятия и факты. Учитель обращал внимание школьников на важные места в содержании, подсказывал главные выводы, учил анализировать полученные результаты. Поскольку в большом и разнородном классе все же находились дети, которые разобрались не во всем, им разъяснялось непонятное, причем этим в основном занимались другие ученики. Так делалось в целях обучения школьников умению правильно, четко, не косноязычно и понятно для слушателей выражать свои мысли. (Автор, работающий со студентами педагогического потока механико-математического факультета БГУ, отмечает большие трудности в обучении студентов именно этой составляющей работы педагога.)

Следующий этап: решение задач по теме прочитанной главы. Сначала для закрепления решаются такие же задачи, как и в книге. Затем задачи усложняются, и для их решения нужно сделать некоторый пусть небольшой, но самостоятельный шаг от задач, ставших уже стандартными. Внимание школьников обращается на переход от словесного описания задачи к ее математическому (формальному) заданию, т. е. происходит первое знакомство с понятием «модель». На данном этапе в качестве одного из пособий использовалась книга «Занимательные задачи по теории графов» [124].

Затем школьники получают задание самим придумать некоторую ситуацию, похожую на описанную в одной из книг, перевести ее на язык математики (т. е. построить математическую модель), решить полученную задачу (т. е. исследовать построенную модель). Придуманные задачи в дальнейшем рассматриваются на занятиях, на которых проводится турнир Архимеда между учениками. Класс при этом делится на три команды по принципу, описанному В. В. Куприяновичем [106]. Это способствует улучшению качества составляемых задач.

Оценивать задачи школьников можно с двух точек зрения: с математической и литературно-эстетической. С математической точки зрения некоторые из составленных задач не имеют смысла, на что учитель старается обратить внимание ученика, придумавшего задачу, и помочь ему исправить ее. Есть математические задачи, но не имеющие никакого отношения к рассматриваемым темам. Многие школьники просто по-своему переписывают ситуации из книги, заменяя персонажи, изменяя их количество и характер отношений. Вот пример такой задачи. В одной из глав Незнайка рассказывает Знайке, что в походе было семь участников, каждый из которых ранее был знаком ровно с тремя другими участниками. Знайка доказывает, что такое невозможно. А вот задача, составленная пятиклассницей: «В конкурсе по кулинарии принимало участие 7 девочек. Каждая из них попробовала по три пирожка у своих подруг. Докажите, что каждая девочка не может съесть по три пирожка». Однако и такие задачи имеют математическое значение, так как школьники замечают, что многие, казалось бы, абсолютно непохожие, но с одинаковым строением объекты или ситуации можно описать одним и тем же рисунком, т. е. происходит первое знакомство с важным для современной науки понятием «изоморфизм».

Для развития воображения имеют значение и задачи без математического смысла. Ученики используют свою фантазию, кто как может и кто как хочет. В качестве персонажей рассказов фигурируют дети и животные, спортсмены и сказочные герои. Школьники украшают свои задачи рисунками, заставками, виньетками. Интересно, что задачи младших школьников меньше связаны с математическим содержанием прочитанных глав. Представим несколько задач пятиклассников.

«В праздник Оля, Катя и Наташа решили поздравить друг друга. Оля подарила Кате и Наташе по 2 подарка и один общий. Катя подарила Оле и Наташе по одному подарку и один общий. Наташа подарила Оле и Кате по 3 подарка и один общий. Сколько подарков было всего и сколько подарили каждой девочке?»

«Могут ли 7 гномов станцевать по 2 раза с Белоснежкой, если танец длится 2 минуты, а музыка играла 20 минут?»

«У одной леди, любительницы собак, было три коккер-спаниеля. Мимо проходил отряд туристов из 16 человек. Может ли каждое животное персонально укусить и облаять по 6 человек?»

Задачи школьников постарше ближе к рассматриваемым темам. Некоторые из них похожи на небольшие рассказы.

«В музее находилось 9 человек. Из них каждый знал троих. Там были два строителя, учитель, шофер, маляр, повар, врач, сварщик, плотник. Строители знакомы по долгу службы, они оба знают также еще одного человека, и один строитель знает друга того человека. Маляр, сварщик, врач и еще один человек знают друг друга. Повар, плотник и шофер не знают учителя. Повар не знает шофера. Кто с кем знаком?» После небольшого уточнения условий из этой задачи получается задача, которую можно решать на занятиях.

«Три мальчика: Антон, Костя и Гриша пришли в детский сад за сестрами Танями. Первый мальчик сказал: у моей Тани не карие глаза и белые волосы. Второй сказал: у моей Тани глаза зеленые и волосы рыжие. У сестры Гриши черные волосы. Кто чья сестра, если у Антона и у его сестры синие глаза?»

«В 6-А и 6-Б классах проводится отборочный турнир по шахматам. В каждом классе по круговой системе выявляются три победителя для участия в дальнейшей борьбе. На следующем этапе 6 игроков встречаются между собой, причем никто не встречается повторно, а в зачет пойдут ранее сыгранные встречи. Для определения победителя 4 лучших игрока сыграют между собой по олимпийской системе. Сколько игр проведет победитель? Сколько всего игр будет сыграно, если в каждом классе по 24 человека?»

Учитель часто проводит и редактирование задач, т. е. учит школьников правильному письменному выражению своих мыслей.

Следующий этап работы – это организация кружковой и факультативной работы. Учащиеся, добыв начальные знания с помощью занимательных задач, переходят к закреплению и развитию знаний на базе решения более сложных. Описанный выше подход позволяет одновременно решать несколько важных задач школьного образования: обеспечивать учеников новыми знаниями, которые облегчат ему в дальнейшем изучение информатики; повышать логическое и умственное развитие школьников; развивать их воображение и улучшать культуру общения.

Использование графов для обучения математической индукции

Тема «Математическая индукция» отсутствует в программе по математике для общеобразовательной школы Республики Беларусь. В то же время индукция применяется при доказательстве различных теорем в вузовских курсах математики, что вызывает существенные затруднения студентов при восприятии доказательств. Обучение математической индукции можно проводить в рамках факультатива по теории графов или на занятиях математического кружка уже в 8–9 классах. При обучении реализуется переход от частных наблюдений к выявлению общих закономерностей и свойств.

Предположим, нужно доказать, что некоторое утверждение выполняется для любого графа. Ученики вместе с учителем выбирают конкретный граф G_1. Инициатива выбора графа должна принадлежать школьникам, учитель лишь обязан следить за тем, чтобы для сокращения времени доказательства выбирались небольшие графы. Затем по некоторому правилу ученики переходят к графу G_2, имеющему меньше вершин или ребер, чем G_1, после чего по этому же правилу к графу G_3 и т. д. Процесс прекращается, когда будет построен граф с небольшим числом или вершин, или ребер, для которого доказываемое утверждение верно. После этого цепочка построенных графов проходится в обратном порядке и показывается, почему утверждение выполняется для предыдущего графа, если оно выполняется для последующего.

Рассмотрим уже упоминавшуюся *лемму о рукопожатиях*: *«В любом графе сумма числа ребер, выходящих из вершин, равна удвоенному числу ребер»*. Вначале следует рассмотреть конкретные графы (рисунки) и проверить выполнение этого утверждения, затем попытаться понять, почему оно выполняется. Оказывается, что любое ребро графа соединяет две вершины, следовательно, вносит слагаемое 2 в рассматриваемую сумму. Можно пойти чуть-чуть другим путем и доказать лемму с помощью математической индукции (такое доказательство можно проводить в младших классах).

Возьмем конкретный граф с небольшим числом ребер. Удаляя из него поочередно ребра, получим последовательность графов, в которой последний граф содержит только одно ребро. Степени двух его вершин равны единице, степени остальных – нулю. Сумма степеней вершин этого графа равна двум, т. е. в два раза больше числа ребер.

При переходе от графа с большим номером к графу с меньшим число ребер увеличивается на единицу. На единицу также увеличиваются и степени двух вершин графа, у остальных вершин они не меняются. Следовательно, сумма степеней при добавлении одного ребра увеличивается на 2, т. е. доказываемое соотношение будет выполняться для любого графа из последовательности.

Большой интерес у младших школьников вызывает задача, связанная с леммой о рукопожатиях: «Докажите, что число людей на Земле, сделавших нечетное число рукопожатий, четное». Обычно при решении этой задачи возникает дискуссия. Ученики пытаются выяснить, сколько людей жило на земле, где граница между обезьяной и первым человеком, как приветствуют друг друга представители разных народов и т. д. У многих из них остается чувство удивления (а может и недоверия), когда, не зная ответа на эти вопросы, мы все же решаем задачу.

В зависимости от сложности доказательство повторяется для нескольких графов. После проверки утверждения на нескольких графах ученики убеждаются, что выполняемые преобразования не зависят от вида графа. Учитель обращает внимание на то, что все этапы доказательства можно повторить для любого графа, только для больших графов это потребует много времени. Поэтому нет необходимости явно строить всю последовательность графов: все графы из нее могут быть заданы неявно с помощью правила перехода. Обратный переход при доказательстве утверждения для каждого графа из цепочки также выполняется по одинаковым правилам и не зависит от его вида. Окончательный вывод учителя: поскольку в качестве начального графа может быть выбран произвольный граф, то утверждение справедливо для произвольного графа. Таким образом, доказательство с помощью математической индукции можно проводить, не упоминая саму индукцию. Рассмотренное выше доказательство леммы о рукопожатиях может являться подготовительным этапом к более формальному рассмотрению индукции.

С помощью математической индукции можно доказывать утверждения не для всех графов, а для некоторых классов графов. Кроме того, индукцию можно использовать для конструктивного доказательства различных теорем.

Рассмотрим следующий пример. *Плоским называется граф, который нарисован на плоскости так, что ребра его не имеют общих точек, за исключением ребер, выходящих из одной вершины.* Необходимо доказать, что вершины любого плоского графа можно так раскрасить шестью красками, что вершины, соединенные ребром, будут окрашены в разные цвета. (Эта задача непосредственно связана со знаменитой задачей о раскраске географической карты четырьмя красками.)

При доказательстве будем пользоваться тем фактом, что *любой плоский граф имеет вершину, степень которой не превосходит пяти*. Этот факт несложно доказать предварительно.

Возьмем конкретный плоский граф G_1. Удалив из него вершину степени, не превосходящей пять, вместе с выходящими из нее ребрами, получим плоский граф G_2. Поступая далее подобным образом, построим последовательность плоских графов, оканчивающуюся графом с шестью вершинами. Каждый предыдущий граф в этой последовательности можно получить из предыдущего добавлением новой вершины, которая будет соединена не более чем с пятью старыми.

Окрасим 6 вершин последнего графа в 6 разных цветов. Новую вершину в предшествующем графе окрасим в цвет, не использованный при окраске старых вершин, соединенных с ней ребрами. Такой цвет обязательно найдется, поскольку цветов 6, а соседних вершин не более пяти. Аналогично происходят и другие переходы от графа к графу. В этом случае доказательство возможности построения нужной раскраски происходит с построением самой раскраски. (С помощью математической индукции нетрудно доказать, что плоский граф можно раскрасить подобным образом пятью красками и построить такую раскраску.)

Нетрудно привести примеры утверждений из теории графов, при доказательстве которых базой индукции является не один объект, а несколько. Так, при доказательстве легкой теоремы о центре дерева в конце последовательности графов будет находиться или одновершинный граф, или граф с двумя вершинами и одним ребром.

И, наконец, можно рассмотреть случаи, когда индуктивный переход совершается не от $n = k - 1$ к $n = k$, а от $n \quad k - 1$ к $n = k$. Определим *дерево как граф без циклов, в котором от любой вершины к любой другой можно перейти по ребрам*. Докажем ранее упоминавшееся утверждение*: в дереве число ребер на единицу меньше числа вершин*.

Рассмотрим произвольное конкретное дерево G. Удалим из него любое ребро. При этой операции дерево G распадется на два меньших дерева G_1 и G_2. С помощью такой же операции из дерева G_1 можно получить деревья G_{11} и G_{12}, а из дерева G_2 – деревья G_{21} и G_{22}. Этот процесс продолжается до получения одновершинных деревьев, для которых доказываемое утверждение тривиально. Затем показываем, что утверждение будет выполняться для любого дерева T в нашем разложении, если оно выполняется для деревьев, которые получились из дерева T. Действительно, пусть в дереве T_1 – n_1 вершин и m_1 ребер, а в дереве T_2 – n_2 вершин и m_2 ребер. Для T_1 и T_2 доказываемое утверждение выполняется, следовательно, $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Дерево T содержит $n = n_1 + n_2$ вершин и $m = m_1 + m_2 + 1$ ребер. Поэтому $m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$. Такие вычисления можно проводить до тех пор, пока от одновершинных деревьев мы не придем к дереву G.

В старших классах учитель, имея опыт решения со школьниками подобных задач, может формализовать метод математической индукции. Он обращает внимание на то, что все доказательства проведены по одной и той же схеме. Сначала берется произвольный объект (граф), для которого нужно что-то доказать, затем переходят к объектам меньшего размера до тех пор, пока для последнего из них утверждение не доказывается легко. Этот объект называется *базой индукции*. После этого, учитывая, что утверждение доказано для последующих объектов, доказывают его для каждого предыдущего. Обратив внимание на это, учитель отмечает, что переходы от меньших объектов к большим (*индуктивные переходы*) однотипны, поэтому их можно выполнить один раз, не привязываясь к конкретному объекту. Необходимо лишь предположить, что утверждение выполняется для меньшего объекта (сделать *индуктивное предположение*). При такой методике обучения у школьников не будет возникать вопроса, почему все же выполняется индуктивное предположение.

Использование графов для знакомства школьников с понятиями «необходимые и достаточные условия»

Усвоение понятий «необходимые и достаточные условия» всегда вызывает трудности у школьников. Часто они не понимают взаимосвязей этих понятий, не чувствуют различия между ними, при доказательстве теорем не могут указать, какие условия необходимые, а какие – достаточные. Ни учителя, ни репетиторы, правда, в силу различных причин, часто не обращают внимания школьников на логические вопросы построения курса математики.

«Доказательства различных теорем учащимися в большинстве случаев заучиваются как нечто сказанное в книге, а потому подлежащее усвоению. Связь между теоремами остается при этом невыясненной; представление о том, что совокупность теорем представляет собой некоторую систему, которая служит для изучения часто встречающихся математических объектов, часто отсутствует… Между тем вопросы, касающиеся методов математического доказательства, очень затрудняют студентов, особенно на первых курсах. При переходе к высшей математике студенты наталкиваются на определения и теоремы, которые представляют собой сложную комбинацию таких слов, как „необходимо и достаточно“, „все“, „любой“, „некоторые“, „существуют“ и т. п., и усваиваются ими с трудом» [59]. Хотя эти слова написаны профессором И. С. Градштейном более шестидесяти лет назад, ситуация в этом вопросе не изменилась и в настоящее время. Теория графов предлагает большое число задач различной степени сложности, связанных с такими условиями. Можно рассматривать задачи, в которых условия являются необходимыми, но не достаточными, или достаточными, но не необходимыми, причем можно подвести ученика к тому, что он сам укажет, почему не выполняется то или иное условие. Случай же, когда выполняются и необходимые, и достаточные условия, тесно связан с понятием «эквивалентность» и, опять-таки, с трудными понятиями «прямая и обратная теоремы».

Наиболее удобная тема для первого знакомства с понятиями – «Эйлеровы графы». Автор проводил занятия по этой теме в 7 классе, но считает, что занятие было бы понятно и более младшим школьникам. Рассматривается задача построения замкнутого маршрута в графе, в котором каждое ребро содержится ровно один раз. Эта задача естественным путем получается из занимательной задачи об обходе островов и мостов, известной еще Эйлеру, в которой нужно выйти из некоторого места, пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в исходное место.

Вначале школьники находят очевидные условия, без выполнения которых задача не может быть решена. Такими условиями являются связность графа и отсутствие в нем висячих вершин. (Отметим, что с помощью темы «Эйлеровы графы» может происходить и знакомство школьников с простейшими математическими моделями. Ученики отмечают соответствия объекта и построенной модели. В частности, участки суши соответствуют вершинам графа, мосты – ребрам, связность графа – возможности пройти от любого острова к любому другому, отсутствие висячих вершин – отсутствию островов, на которые ведет только один мост.) Учитель должен подчеркнуть, что для решения задачи необходимо выполнение этих условий, что без выполнения их задача не может быть решена. После этого школьникам предлагается построить пример, когда названные условия выполняются, а нужного маршрута все равно нет, т. е. выполнение необходимого условия в этом случае недостаточное для существования маршрута, поскольку необходимому условию могут удовлетворять и не эйлеровы графы. Такие примеры строятся легко. Обычно в этот момент кто-то из школьников догадывается, какое условие еще необходимо для решения задачи. Если этого не происходит, то можно нарисовать построенные примеры на доске и попытаться выяснить, почему требуемый обход невозможен. Ученики замечают, что в каждом из примеров в графе существуют вершины нечетной степени, и именно эти вершины препятствует решению. Следующий шаг – это переход от частных примеров к общему утверждению. Школьники самостоятельно или вместе с учителем доказывают легкую теорему: *если в графе существует эйлеров цикл, то степень каждой вершины графа четная*. Таким образом, находится еще одно необходимое условие: степени всех вершин графа должны быть четными.

Сразу же возникает вопрос: при выполнении двух предыдущих необходимых условий нужный маршрут тем не менее не существовал, возможно, что эта ситуация повторится и сейчас? После этого учитель доказывает, что это не так: выполнение последнего условия достаточно для существования маршрута, т. е. это условие необходимое и достаточное. Доказанную теорему теперь можно сформулировать в следующем виде: *для существования в связном графе эйлерова цикла необходимо и достаточно, чтобы степень каждой вершины графа была четной.*

Теперь учитель может подвести итоги и сделать вывод: «Если некоторое событие или факт никогда не может иметь место без определенного условия, то это условие является необходимое, если некоторое событие или факт обязательно имеет место при определенном условии, то это условие является достаточное» [100, с. 8]. Затем в качестве иллюстраций можно привести примеры из жизни и математики.

При изучении темы «Гамильтоновы графы» доказывается теорема: *если степень каждой вершины графа не меньше чем n/2, где n – число вершин графа, то граф является гамильтоновым*, т. е. в нем существует замкнутый маршрут, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Учитель отмечает, что рассмотренное условие будет достаточным для существования такого маршрута. Возникает вопрос: всегда ли в гамильтоновых графах выполняется указанное условие? Школьники легко находят примеры, когда условие не выполняется, а граф тем не менее гамильтонов. Таким образом, изучая эйлеровы и гамильтоновы графы, можно без труда указать необходимые условия, которые не являются достаточными; достаточные условия, которые не являются необходимыми; и условия, которые одновременно будут необходимыми и достаточными. Кроме того, можно указать условия, которые не будут ни необходимыми, ни достаточными.

Часто ученики не понимают, что для опровержения какой-либо теоремы достаточно привести лишь один пример, когда теорема не выполняется. Две предыдущие темы дают учителю хорошую возможность обратить внимание школьников на это. Чтобы условие не оказалось необходимым, нужно привести пример только одного эйлерова графа, для которого оно не выполняется, а чтобы условие не оказалось достаточным – пример только одного графа, для которого оно выполняется, а граф не гамильтонов.

Для некоторых тем можно предложить следующую схему изучения. Пусть T некоторое подмножество множества G. Доказывается теорема о том, что любой элемент из T обладает некоторым свойством, т. е. данное свойство необходимо для принадлежности элемента к множеству T. Затем задается вопрос: если элемент из G обладает указанным свойством, будет ли достаточно этого, чтобы он принадлежал множеству T?

Рассмотрим пример. Определим дерево как связный граф без циклов. После этого докажем, что для любого дерева выполняется соотношение $m = n - 1$, где m – число ребер графа, а n – число его вершин. Выполнение доказанного соотношения нужно для того, чтобы граф был деревом. Ставим перед школьниками следующий вопрос: если для некоторого графа выполняется соотношение $m = n - 1$, то будет ли граф деревом, т. е. является ли приведенное соотношение достаточным условием? Ученики приводят нетрудные примеры, когда соотношение выполняется, но граф деревом не будет. Следующий вопрос: что нужно добавить к необходимому условию для того, чтобы оно превратилось и в достаточное? Этот вопрос сложнее первого, и, возможно, школьники ответят на него с помощью учителя. Оказывается, следует добавить, что или граф будет связным, или в нем будут отсутствовать циклы. Одна из доказанных теорем будет выглядеть следующим образом: *для того, чтобы граф оказался деревом, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и число ребер в нем было на единицу меньше числа вершин*; вторая – *для того, чтобы граф оказался деревом, необходимо и достаточно, чтобы в нем не было циклов и число ребер было на единицу меньше числа вершин.* Этот пример хорош и тем, что показывает возможность существования нескольких необходимых и достаточных условий.

Сложные для школьников понятия «необходимые и достаточные условия» тесно связаны с не менее сложным понятием «эквивалентность». Возможно следующее определение эквивалентных высказываний. *Высказывание A эквивалентно (равносильно) высказыванию B, если при выполнении A выполняется B, а при выполнении B выполняется A.* Это определение фактически повторяет определение необходимых и достаточных условий. Поэтому приведенные в предыдущем абзаце теоремы можно переформулировать следующим образом*: для графа G, имеющего n вершин и m ребер, следующие утверждения эквивалентны: 1) G – дерево; 2) G – связный граф и $m = n–1$; 3) G – граф без циклов и $m = n - 1$.*

Ученики часто путают определения, свойства, признаки. Все это имеет тесную связь с необходимыми и достаточными условиями. Свойства объекта – необходимые условия для существования этого объекта. Так, свойством дерева будет отмеченное ранее соотношение между числом его вершин и ребер. Признаком объекта являются достаточные условия, выполненные для объекта из более широкого класса объектов. Например, признаком дерева будет выполнение равенства $m = n - 1$ для связного графа. Определение должно содержать необходимые признаки понятия, а всех этих признаков должно быть достаточно, чтобы охарактеризовать понятие. Так, в определение дерева входят два признака: во-первых, связный граф, во-вторых, граф без циклов. Следует указать, что определение не должно быть избыточным. Так, если включить в определение дерева условие $m = n - 1$, то новому определению будут удовлетворять те же графы, что и предыдущему определению, поскольку это свойство вытекает из признаков, данных ранее.

Акцентировать внимание школьников на необходимых и достаточных условиях можно и при изучении других тем факультатива по теории графов. Например, при изучении планарных графов, т. е. таких графов, которые можно изобразить на плоскости так, чтобы их ребра не пересекались, доказывается *формула Эйлера*: $m \leq 3n - 6$, где m – число ребер графа, а n – число вершин. В дальнейшем требуется доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не будут планарными. Для первого графа формула Эйлера не выполняется, поэтому граф K_5 не является планарным. Для второго графа формула Эйлера выполняется. Важно пояснить ученикам, что из этого нельзя сделать определенного вывода о планарности графа, поскольку выполнение неравенства является необходимое условие для планарности, но не достаточное, т. е. условие может выполняться, а граф не быть планарным. Эта тема дает возможность школьникам самим предложить большой набор отдельно необходимых и отдельно достаточных условий.

Для формулировки необходимых и достаточных условий можно использовать и другие словесные конструкции. Так, теорема об эйлеровых графах, приведенная в начале статьи, может иметь такие формулировки: *связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная*, или *связный граф является эйлеровым, если и только если степень каждой его вершины четная*, или *связный граф является эйлеровым в том и только в том случае, когда степень каждой его вершины четная.* Полезно отметить, что отдельные части этих конструкций имеют конкретный смысл: слова «только тогда», «только в том случае», «только если» заменяют слова «необходимые условия», а слова «тогда», «в том случае», «если» – «достаточные условия».

Понятия «необходимые и достаточные условия» непосредственно связаны с понятиями «прямая и обратная теоремы». Действительно, прямую и обратную теоремы можно изобразить следующими схемами. Прямая теорема: *если некоторый элемент множества M обладает свойством* α*, то он обладает также и свойством* β. Обратная теорема: *если некоторый элемент множества M обладает свойством* β*, то он обладает и свойством* α. Формулировка прямой теоремы – это фактически формулировка необходимого условия, а формулировка обратной теоремы – это формулировка достаточного условия. При необходимости прямую и обратную теоремы можно представить в виде одного предложения*: для того, чтобы элемент множества М обладал свойством α, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойством β.*

Учитель может привести примеры эквивалентных формулировок. Например, утверждение*: любой двудольный граф содержит циклы только четной длины* будет прямой теоремой, утверждение: *если любой цикл графа имеет четную длину, то этот граф является двудольным* – обратной теоремой. Эти две теоремы эквивалентны третьей: *граф является двудольным тогда и только тогда, когда любой его цикл имеет четную длину.*

Деление на прямую и обратную теоремы, а значит, и на необходимые и достаточные условия, часто бывает условным. Это следует, в частности, из того, что в приведенной выше схеме можно поменять местами α и β. Обычно за прямую теорему принимается та, в которой устанавливаются свойства объекта, а за обратную та, в которой устанавливаются его признаки.

Ф. Ф. Нагибин [138, с. 23–26] справедливо критикует логический подход к определению необходимых и достаточных условий [90, 100], как трудный для школьников, и предлагает теоретико-множественный подход. По мнению автора, преподаватели в своей работе должны разумно сочетать оба подхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сегодня для того, чтобы быть современным человеком, способным войти в новый «компьютерный» мир, в котором придется искать лучшие решения и кратчайшие пути в лабиринте возможностей, выпускник вуза должен не только знать элементы дискретной математики, но и уметь думать на языке дискретных моделей. С вычислительной техникой будет практически связан любой человек XXI в.: или как создатель новых ЭВМ и их математического обеспечения, или как разработчик алгоритмов и программ, или как пользователь стандартных пакетов на своем рабочем месте конструктора, бухгалтера, менеджера и т. д., или как простой обыватель, применяющий технику в быту.

Дискретная математика дает большие возможности для развития математических и логических способностей учеников, улучшения их воображения и повышения интеллекта. Хорошее знание этого раздела математики облегчит школьникам освоение компьютера и применение его для решения практических задач. Знакомство детей с комбинаторикой, графами, булевыми функциями, вероятностью и т. д. можно проводить на занимательном, игровом уровне.

Дискретная математика способна облегчить учителям решение различных методических задач обучения, помочь им в более доступном изложении для учеников трудных разделов математики.

Необходимо создание системы преподавания дискретной математики, начиная с дошкольных учреждений и заканчивая послевузовской переподготовкой. Это будет способствовать повышению качества обучения, развитию интеллектуальных и духовных способностей обучаемых, их более уверенному поведению в сложном современном мире.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдеев Р. Ф*. Философия индустриальной цивилизации. М., 1974.
2. *Абрамов А .М., Антипов И. Н., Березина Л. Ю., Минаева С. С., Никольская И. Л*. Методика факультативных занятий в 7–8 классах. М., 1981.
3. *Александров А. Д*. Проблемы науки и позиция ученого. Л., 1988.
4. *Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидорова Ю. В., Федоров Н. Е., Шабунин М. И*. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательной школы. М., 1992.
5. *Амосов Н. М*. Алгоритмы разума. Киев, 1979.
6. *Амосов Н. М*. Моделирование сложных систем. Киев, 1968.
7. *Ананченко К. О., Петровский Г. Н*. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 11 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики. Мн., 1997.
8. *Аристотель*. Собр. соч. В 4 т. Т. 1. М., 1976.
9. *Аристотель*. Собр. соч. В 4 т. Т. 3. М., 1976.
10. *Арнольд В. И*. Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции // Известия. 1998. 6 янв.
11. *Афанасьев В. Г*. Системность и общество. М., 1980.
12. *Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д*. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М., 1978.
13. *Ахундов М. Д*. Проблема прерывности и непрерывности пространства и времени. М., 1974.
14. *Барболин М. П*. Элементы прикладной математики (графы и экстремальные задачи) на факультативных занятиях в старших классах средней школы. Автореф. дисс. … канд. пед. наук. Л., 1976.
15. *Барр С*. Россыпи головоломок. М., 1984.
16. *Беллман Р*. Динамическое программирование. М., 1960.
17. *Березина Л. Ю*. Графы и их применение. М., 1979.
18. *Березина Л. Ю*. Использование графов в совершенствовании среднего математического образования. Автореф. дисс. … канд. пед. наук. М., 1975.
19. *Беркс А. В*. Введение к книге: Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., 1971.
20. *Бешенков С. А*. Новые составляющие нашего мировоззрения // Информатика и образование. 1999. № 10.
21. *Биркгофф Г.* Математика и психология. М., 1977.
22. *Блауберг И. В., Юдин Э. Г.* Становление и сущность системного подхода. М., 1973.
23. *Бобынин В. В.* Очерки по истории развития физико-математических наук в России // Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. М., 1885–1888.
24. *Богачев Л. В*. Логические задачи. М., 1985.
25. Большой энциклопедический словарь. Т. 2. М., 1991.
26. *Бом Д*. Квантовая теория. М., 1965.

27. *Борн М*. Физика в жизни моего поколения. М., 1963.
28. *Бочкин А. И*. Цели изучения информатики в школе и уровни работы с компьютером // Інфарматызацыя адукацыі. 1995. № 1.
29. *Брунер Дж*. Психология познания. М., 1977.
30. *Брызгалов Е. В*. Разбор арифметических выражений // Информатика и образование. 2000. № 10.
31. *Бугаев Н. В*. Математика и научно-философское мировоззрение // Философская и социологическая мысль. 1989. № 5.
32. *Бусленко Б. В*. Моделирование сложных систем. М., 1968.
33. *Вагнер Г*. Основы исследования операций: В 3 т. Т. 1. М., 1972.
34. *Васильев Н. Б., Егоров А. А*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М., 1988.
35. *Васильев С. И*. Применение элементов дискретного анализа в решениях задач школьного курса математики // Новые исследования в педагогических науках. 1980. № 2.
36. *Вейль Г*. Континуум // Математическое мышление. М., 1989.
37. *Вигнер Е*. Этюды о симметрии. М., 1971.
38. *Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд А. С., Жохов В. И*. Математика: учебник для 5 класса. М., 1990.
39. *Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд А. С., Жохова В. И*. Математика: учебник для 6 класса. М., 1993.
40. *Витгенштейн Л*. Логико-философский трактат // Философские работы. Ч. 1. М., 1994.
41. *Волгина В. Ф*. Графовое моделирование решений геометрических задач // Вечерняя средняя школа. 1975. № 1.
42. *Волгина В. Ф*. Графовый подход к закреплению математического материала // Математика в школе. 1975. № 2.
43. *Волков А. М., Колачев А. Г., Рыльский Г. И*. Математическое моделирование систем «человек-машина» // Авиационная эргономика и безопасность полетов. Киев, 1974.
44. *Волкова Н. А*. Привитие математической культуры графов на факультативных занятиях учащихся 9 классов. Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. М., 1975.
45. *Вулдридж Д*. Механизмы мозга. М., 1965.
46. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К*. Московские математические олимпиады. М., 1986.
47. *Гараничева С. А*. Проблемы преподавания предмета «Информатика и компьютерные технологии» // Адукацыя і выхаванне. 2000. № 8.
48. *Гастев Ю. А*. Гомоморфизмы и модели. М., 1975.
49. *Гастев Ю. А*. О гносеологических аспектах моделирования // Логика и методология науки. М., 1967.
50. *Гегель Г. В. Ф*. Наука логики: В 4 т. Т. 1. М., 1970.
51. *Гейтс Б*. Дорога в будущее. М., 1996.
52. *Глейзер Г. И*. История математики в школе. М., 1982.
53. *Глушков В. М*. Мышление и кибернетика // Вопр. философии. 1963. № 1.
54. *Глушков С. С*. Соотношение между алгеброй и геометрией в математике эпохи Возрождения // Историко-математические исследования. Вып. 29. М., 1985.
55. *Гнеденко Б. В*. О математике. М., 2000.

56. *Горелов А. А., Мамедов Н. М., Новик И. Б.* Философские вопросы моделирования // Философские вопросы естествознания. Ч. 2. М., 1976.
57. *Горячев А. А., Лесневский А. С.* Программы курса информатики для 1–9 классов средней школы // Информатика и образование. 1997. № 3.
58. *Готт В. С., Недзельский Ф. В.* Диалектика прерывности и непрерывности в физической науке. М., 1975.
59. *Градштейн И. С.* Прямая и обратная теоремы. М., 1973.
60. *Гращенко П. Л.* Моделирование случайности // Інфарматызацыя адукацыі. 1997. № 9.
61. *Грекова И.* Методологические особенности прикладной математики // Вопр. философии. 1976. № 6.
62. *Гутовская Г. В., Калита Л. И.* Информатика в начальной школе // Інфарматызацыя адукацыі. 1998. № 2.
63. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
64. *Декарт Р.* Рассуждение о методе // Избр. произведения. М., 1950.
65. Диалектика материального мира. Онтологическая функция материалистической диалектики. Л., 1985.
66. *Дрогалина Ж. А., Налимов В. В.* Семантика ритма: ритм как непосредственное вхождение в континуальный поток образов // Бессознательное: природа, функции, методы, исследования: В 4 т. Т. 3. Тбилиси, 1978.
67. *Дрозд В. Л., Касабуцкий Н. И., Катасонова А. Т., Столяр А. А., Чеботаревская Т. М.* Математика: Учебник для 4 класса начальной школы. Мн., 1995.
68. *Дьяченко В. К.* Общие формы организации процесса обучения. Красноярск, 1989.
69. *Евклид.* Начала. Книги VII–X. М.; Л., 1949.
70. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., 1990.
71. *Епишева О. Б., Крупич В. И.* Учить школьников учиться математике. М., 1990.
72. *Еровенко В. А., Шкундич Е. И.* Роль нестандартных примеров и методов в математическом развитии учащихся и студентов // Педагогические проблемы разноуровневой подготовки школьников и студентов в условиях реформирования образования. Ч. 2. Мн., 1998.
73. Зарубежные математические олимпиады. М., 1987.
74. *Зенкин А. А.* Комментарии к статье В. М Тихомирова «Финитизация бесконечности в классическом анализе» // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997.
75. *Зубов В. П.* Аристотель. М., 1963.
76. *Зубов В. П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX века. М., 1965.
77. *Зубов В. П.* Трактат Брадвардина «О континууме» // Историко-математические исследования. Вып. 13. М., 1960.
78. Интервью с академиком В. А. Ледневым // Информатика и образование. 1999. № 10.
79. Информатика. Программы средней общеобразовательной школы. Мн., 1998.
80. *Кантор Г.* Основы общего учения о многообразиях // Парадоксы бесконечного. Мн., 2000.

81. *Каплан Б. С., Рузин Н. К., Столяр А. А.* Методы обучения математике. Мн., 1981.

82. *Касабуцкий Н. И., Катасонова А. Т., Столяр А.А., Чеботаревская Т. М.* Математика: Учебник для 2 класса начальной школы. Мн., 1993.

83. *Катречко С. Л*. Бесконечность и теория поиска вывода // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997.

84. Кибернетика. Неограниченные возможности и возможные ограничения. М., 1979.

85. *Кириенко И. С*. Непрерывное обучение информатике // Информатика и образование. 2000. № 9.

86. *Клейн Ф*. Вопросы элементарной и высшей математики. Одесса, 1912.

87. *Кодряну И. Г.* Философские вопросы математического моделирования. Кишинев, 1978.

88. *Кодряну И. Г.* ЭВМ и математика. Кишинев, 1984.

89. *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987.

90. *Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С*. Геометрия: Учебник для 6 класса. М., 1970.

91. *Конаржевский Ю. А*. Система. Урок. Анализ. Псков, 1996.

92. *Коннов В. В., Клековкин Г. А., Коннова Л. П.* Геометрическая теория графов. М., 1999.

93. *Коннова Л. П*. Знакомьтесь, графы. Самара, 2001.

94. Концептуальные подходы к курсу «Информатика» в реформируемой общеобразовательной школе Республики Беларусь // Інфарматызацыя адукацыі. 1997. № 8.

95. Концепции структуры и содержания общего среднего образования (в 12-й школе) (проект) // Математика в школе. 2000. № 2.

96. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р*. Алгоритмы: построение и анализ. М., 1999.

97. *Котов В. М., Мельников О. И*. Информатика. Методы алгоритмизации: Учеб. пособие для 10–11 классов общеобразовательной школы с углубленным изучением информатики. Мн., 2000.

98. *Котов В. М., Мельников О. И*. Методы алгоритмизации и программирование. Программа для углубленного изучения информатики в 10–11 классах // Інфарматызацыя адукацыі. 1997. № 8.

99. *Котов В. М., Пилипчук Л. А., Соболевская Е. П.* Теория алгоритмов. Мн., 2001.

100. *Крельштейн Б. И.* Необходимые и достаточные условия. М., 1961.

101. *Крылов А. Н.* Мои воспоминания. М., 1963.

102. *Кудрявцев Л. Д*. Мысли о современной математике и ее изучении. М., 1977.

103. *Кузнецов А. А.* О концепции содержания образовательной области «Информатика» в 12-летней школе // Информатика и образование. 2000. № 7.

104. *Кузнецов А. А.* О месте информатики в учебном плане школы // Информатика и образование. 1999. № 10.

105. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М*. Дискретная математика для инженера. М., 1988.

106. *Куприянович В. В*. Осуществление дифференцированного подхода в обучении математике (из опыта работы). Витебск, 1989.

107. *Ланда Л. Н.* Алгоритмизация в обучении. М., 1966.

108. *Лебег А.* Об измерении величин. М., 1960.

109. *Легонький Г. И.* Педагогический процесс как целостная система. Харьков, 1979.

110. *Лейбниц Г. В.* Собр. соч.: В 4 т. Т. 1. М., 1982.

111. *Леонардо да Винчи*. Избр. естественно-научные произведения. М., 1955.

112. *Леонтьев А. Н*. Развитие высших форм запоминания // Психология памяти. М., 1998.

113. *Лернер И. Я*. Дидактическая система методов обучения. М., 1976.

114. *Линдсей П., Норман Д*. Переработка информации у человека. М., 1974.

115. *Лобачевский Н. И*. Полное собр. соч.: В 5 т. Т. 2. М.; Л. 1949.

116. *Лузин Н. Н*. Современное состояние теории функций действительного переменного. М.; Л. 1933.

117. *Лыскова В. Ю., Ракитина Е. А*. Применение логических схем понятий в курсе информатики // Информатика и образование. 2000. № 1.

118. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К.И., Суворова С. Б.* Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательной школы. М., 2000. 238 с.

119. *Максимов Н*. Загадки русского интеллекта // Общая газета. 1997. 17–23 апреля.

120. *Мандрик П. А., Репников В. И.* Математику на «пять». Мн., 1998.

121. Математика. Программы средней общеобразовательной школы. Мн., 1997.

122. *Матросов В. Л., Стеценко В. А*. Лекции по дискретной математике. М., 1997.

123. *Мейерович Л. Н*. Межпредметные связи курсов «Основы информатики и вычислительной техники» и «Математика» при выборе задач для практики по программированию // Изучение основ информатики и вычислительной техники. Опыт и перспективы. М., 1987.

124. *Мельников О. И*. Занимательные задачи по теории графов. Мн., 2001.

125. *Мельников О. И*. Использование графов для обучения математической индукции в школе // Евристика та дидактика точних наук. Вип. 10. Донецк, 1999.

126. *Мельников О. И*. Использование графовых задач для развития сообразительности школьников // Матэматыка: праблемы выкладання. 2001. № 3.

127. *Мельников О. И*. Методологические аспекты изучения дискретных математических моделей // Вестн. Маг. дзярж. ун-та. 1999. № 4.

128. *Мельников О. И*. Незнайка в стране графов. Мн., 2000.

129. *Мельников О. И*. Соотношение дискретных математических моделей и реальной действительности // Вестн. Маг. дзярж. ун-та. 1999. № 2–3.

130. *Мельников О. И*. Теория графов как составной элемент содержания школьного математического образования // Матэматыка: праблемы выкладання. 1999. № 1.

131. *Мельников О. И*. Технология применения теории графов в школе // Материалы 1-й открытой науч.-практ. конф. физ.-мат. лицея «Альфа» при Гродн. гос. ун-те. Гродно, 1998.

132. *Миклухо-Маклай Н. Н.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 1. М.; Л., 1950.

133. *Миллер Дж., Галантер Е., Прибрам К*. Планы и структура поведения. М., 1965.

134. *Миняйлова Е. Л*. Информатика – не цель, а средство для реализации медиаобразования // Інфарматызацыя адукацыі. 1998. № 2.

135. *Миняйлова Е. Л., Вербовиков Д. А., Милеев А. С., Русаков С. Г.* Открытое письмо «О путях реформирования информатики в общей концепции реформы школы» // Інфарматызацыя адукацыі. 1998. № 3.

136. *Морозов К. Е.* Математическое моделирование в научном познании. М., 1969.

137. *Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б.* Физика: Учебник для 11 класса средней школы. М., 1991.

138. *Нагибин Ф. Ф.* Достаточные и необходимые условия // Математика в школе. 1972. № 3.

139. *Нейман Дж. фон.* Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М., 1956.

140. *Нейман Дж. фон.* Общая и логическая теория автоматов // Тьюринг А. Может ли машина мыслить? М., 1960.

141. *Нейман Дж. фон.* Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., 1971.

142. *Новик И. А.* Перспективные направления исследований по теории и методике обучения математике и требования к ним. Мн., 1998.

143. *Новик И. Б.* Вопросы стиля мышления в естествознании. М., 1975.

144. *Новик И. Б.* О моделировании сложных систем. М., 1965.

145. *Новиков А. И.* К вопросу о реформе математического образования // Математика в школе. 2000. № 6.

146. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб., 2001.

147. *Павловский А. И.* Алгоритмы: разработка и анализ. Мн., 1999.

148. *Павловский А. И., Пупцев А. Е.* Задачи целочисленной арифметики в углубленном курсе информатики // Інфарматызацыя адукацыі. 1997. № 9.

149. *Павловский А. И., Пупцев А. Е.* Понятие эффективности алгоритма в углубленном курсе информатики «Программирование и информационные системы» // Інфарматызацыя адукацыі. 1998. № 2.

150. *Панчешникова Л. М.* О системном подходе в методических исследованиях // Советская педагогика. 1973. № 4.

151. *Папи Ф., Папи Ж.* Дети и графы. М., 1974.

152. *Певзнер Л. В.* Вопросы преемственности обучения информатике в системе непрерывного образования // Новые технологии обучения в системе непрерывного образования: В 3 т. Т. 3. Мн., 1995.

153. *Петрова В. Т.* Лекции по алгебре и геометрии: В 2 т. Т. 1. М., 1999.

154. *Пиаже Ж.* Математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. М., 1960.

155. *Пойа Д.* Как решать задачу. М., 1961.

156. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975.

157. *Приходько С. А.* Теоретические основы использования компьютерных технологий при обучении решению топологических задач на графах // Тезисы докладов 8-й Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пущино, 2001.

158. *Пронжилло О. О.* Графы в школе: от задач к теории // Матэматыка: праблемы выкладання. 2002. № 1.

159. *Пуанкаре А.* Математическое творчество // Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970.

160. *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983.

161. *Раушенбах Б.* Идея выше повседневности // Общая газета. 2002. 17–23 янв.

162. *Рогановский Н. М*. Методика преподавания математики в средней школе. Мн., 1990.
163. *Родионов В*. Графы и кратчайшие расстояния в них // Математика. 2001. № 15; № 16.
164. *Рыбников К. А*. Введение в методологию математики. М., 1994.
165. *Рыбников К. А*. Комбинаторный анализ. Очерки истории. М., 1996.
166. *Садовский В. Н*. Основы всеобщей теории систем. М., 1974.
167. *Самарский А. А., Михайлов А. П*. Математическое моделирование. М., 1997.
168. *Саркисян А. А., Колягин Ю. М*. Познакомьтесь с топологией. М., 1976.
169. *Сетров М. И*. Основы функциональной теории организации. М., 1972.
170. *Скатецкий В. Г*. Развитие творческих умений учащихся в процессе изучения математики в начальной школе // Адукацыя і выхаванне. 2000. № 8.
171. *Сманцер А. П*. Педагогические основы преемственности в обучении школьников и студентов. Теория и практика. Мн., 1995.
172. *Сманцер А. П., Певзнер Л. В*. Дисциплина «Информатика» с точки зрения общей теории преемственности // Інфарматызацыя адукацыі. 1997. № 9.
173. *Смолянинов А. А*. Первые уроки по теме «Моделирование» // Информатика и образование. 1998. № 8.
174. Справаздача па навукова-даследчай тэме: «Канцэпцыя матэматычнай адукацыі і праграма па матэматыцы для агульнай сярэдняй школы». Магілеў, 1997.
175. *Таха Х*. Введение в исследование операций. М., 1985.
176. *Терешин Н. А*. Прикладная направленность школьного курса математики. М., 1990.
177. *Тихомиров В. М*. Финитизация бесконечности в классическом анализе // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997.
178. *Тьюринг А*. Может ли машина мыслить? М., 1960.
179. *Тюхтин В. С*. Отражение, системы, кибернетика. Теория отражения в свете кибернетики и системного подхода. М., 1972.
180. *Уемов А. М*. Логические основы метода моделирования. М., 1971.
181. *Уилсон Р*. Введение в теорию графов. М., 1977.
182. *Успенский В. А., Семенов А. Л*. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., 1987.
183. *Фейербах Л*. История философии: В 3 т. Т. 2. М., 1974.
184. *Флоренский П. А*. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» // Историко-математические исследования. Вып. 30. М., 1986.
185. *Фомин Д. Ф*. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб., 1994.
186. *Френкель А., Бар-Хиллел И*. Основания теории множеств. М., 1966.
187. *Фридман А. А*. Предисловие к книге: Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудноресшаемые задачи. М., 1982.
188. *Фройденталь Г*. Математика как педагогическая задача. Ч. 1. М., 1982.
189. *Хабибуллин К. Я*. Граф-схемы в геометрических задачах // Математика в школе. 1999. № 4.

190. *Харланов А. А.* Методическое пособие для учителей и преподавателей средних учебных заведений и учебных заведений нового типа в классах с углубленным изучением информатики. Мн., 1997.
191. *Чеботаревская Т. М., Катасонова А. Т., Дрозд В. Л., Касабуцкий Н. И., Столяр А. А.* Математика: Учебник для 3 класса общеобразовательной школы. Мн., 2000.
192. *Чеботаревская Т. М., Николаева В. В., Бондарева Л. А.* Нестандартные задачи для младших школьников. Могилев, 1997. 110 с.
193. *Чеботаревская Т. М., Николаева В. В., Лещенко Л. В., Бондарева Л. А.* Текстовые задачи во втором классе. Могилев, 1998. 44 с.
194. *Чеботаревская Т. М., Николаева В. В., Лещенко Л. В., Бондарева Л. А.* Текстовые задачи в третьем классе. Могилев, 1998. 64 с.
195. *Чеботаревская Т. М., Николаева В. В., Лещенко Л. В., Бондарева Л. А.* Текстовые задачи в четвертом классе. Могилев, 1998. 72 с.
196. *Чириков М. В., Юшкевич А. П.* Логарифмы Непера // История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 2 т. Т. 2. М., 1970.
197. *Чошанов М. А.* Анализ стандарта школьной математики в США // Математика в школе. 2000. № 2.
198. *Чошанов М. А.* Сертификация школьных учителей математики в США // Математика в школе. 2000. № 3.
199. *Шанин Н. А.* О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л.Гудстейна // Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. М.,1970.
200. *Шлык В. А.* Компьютер и математическое образование // Пути развития общеобразовательной школы. Минск, 1997.
201. *Шпольский Э. В.* Атомная физика: В 2 т. Т. 1. М.; Л., 1949.
202. *Шредингер Э.* Избр. тр. по квантовой механике. М., 1976.
203. *Штофф В. А.* Моделирование и философия. М.; Л., 1966.
204. *Штофф В. А.* Роль моделей в познании. Л., 1963.
205. *Щедровицкий Г. П.* Система педагогических исследований (методологический анализ) // Педагогика и логика. М., 1993.
206. *Эддингтон А.* Пространство, время и тяготение. Одесса, 1923.
207. *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М., 1965.
208. *Яглом И. М.* Математические структуры и математическое моделирование. М., 1980.
209. *Яненко Н. Н.* Методологические проблемы современной математики // Вопросы философии. 1981. № 8.
210. *Guman A.* Decomposition of a visual scene into three-demention bodies // Automatic interpretation and clasification of images. New York, 1969, 1974.
211. *Leibniz G.W.* Mathematische Schriften. V. 6. Halle, 1849–1863.
212. *Leibniz G.W.* Philosophishe Schriften. Bd. 4. Berlin, 1863.
213. *Nicole Oresme*. Le Livre du ciet et du monde. «Mediaeval studies». Vol. III. Paris, 1941.
214. *Poincare H.* Du role de l'intuition et de la logique en mathematiques. C. R. du II Congr. Intern. Des Math. Paris, 1900.