

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

# ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Омск  
2008

УДК 530.15

Г 97

Рекомендовано к изданию кафедрой кибернетики и ученым советом факультета компьютерных наук

**Гуц А.К.**  
**Г 97 Основы квантовой кибернетики.** – Омск:  
Полиграфический центр КАН, 2008. – 204 с.

ISBN 978-5-9931-0060-9

В книге излагаются некоторые разделы квантовой кибернетики. Это теория квантового компьютера и квантовых вычислений, элементы квантовой теории информации. Предлагается квантовая модель осознания. Описывается попытка Хамероффа и Пенроуза представить сущность сознания с точки зрения квантовой механики. Рассказывается о проблемах квантовой психопатологии и приводится эскиз квантовой теории времени.

Для студентов факультетов компьютерных наук, математических и физических факультетов.

УДК 530.15

Г 97

---

ISBN 978-5-9931-0060-9

© Гуц А.К., 2008

© ГОУ ВПО «Омский госуниверситет  
им. Ф.М. Достоевского», 2008

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>9</b>
<b>1 Классический компьютер</b>	<b>11</b>
1.1. Архитектура классического компьютера . . . . .	11
1.1.1. Коды команд, данных и машинное слово . . . . .	12
1.1.2. Ячейки . . . . .	13
1.1.3. Регистр . . . . .	14
1.1.4. Классическое вычисление . . . . .	14
1.1.5. Логические элементы . . . . .	15
1.2. История советских ЭВМ . . . . .	16
1.2.1. МЭСМ . . . . .	16
1.2.2. Сергей Лебедев . . . . .	17
1.2.3. БЭСМ-6 . . . . .	17
1.2.4. ЭВМ «Эльбрус-2» . . . . .	19
1.2.5. Специализированные ЭВМ . . . . .	20
1.2.6. СуперЭВМ МВС-1000МВ . . . . .	21
<b>2 «Наивная» квантовая механика</b>	<b>23</b>
2.1. Состояния . . . . .	23
2.2. Принципы «наивной» квантовой механики . . . . .	24
2.2.1. Амплитуда вероятности . . . . .	24
2.2.2. Пути переходов из состояния в состояние. Квантовая интерференция . . . . .	25

2.2.3.	Базисные состояния. Когерентная суперпозиция . . . . .	26
2.2.4.	Что такое базисные состояния в случае квантового компьютера? . . . . .	27
2.2.5.	Уравнение Шредингера . . . . .	28
2.2.6.	Измерение состояния. Редукция. Коллапс. Декогеренция . . . . .	29
2.2.7.	Кот Шредингера . . . . .	30
2.3.	Ричард Фейнман . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Квантовый компьютер</b>	<b>33</b>
3.1.	Организация и работа квантового компьютера . . . . .	33
3.1.1.	Кубит – единица квантовой информации . . . . .	33
3.1.2.	Состояния ячеек и регистров . . . . .	34
3.1.3.	Физическая реализация кубита, ячеек и регистров памяти . . . . .	35
3.1.4.	Работа процессора . . . . .	36
3.1.5.	Вычисления . . . . .	37
3.1.6.	Квантовые логические элементы – гейты (вентили) . . . . .	38
3.1.7.	Подавление эффектов декогерентизации . . . . .	40
3.2.	Неклассический логический элемент $\sqrt{НЕ}$ . . . . .	40
3.2.1.	Пример квантовых параллельных вычислений с помощью гейта $\sqrt{НЕ}$ . . . . .	42
3.3.	Юрий Манин . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Математические основы квантовой механики</b>	<b>47</b>
4.1.	Гильбертово пространство . . . . .	47
4.2.	Бра- и кет-векторы . . . . .	49
4.3.	Линейные операторы . . . . .	50
4.3.1.	Подпространства. Операторы проектирования . . . . .	52
4.4.	Постулаты квантовой механики . . . . .	54

4.4.1.	Измерение: случай вырожденных собственных значений . . . . .	57
4.5.	Тензорное произведение . . . . .	58
4.5.1.	Линейные операторы (гейты) в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .	60
4.5.2.	Пример. Гейт управляемого смещения фазы . . . . .	60
4.5.3.	Произвольные тензорные произведения .	61
4.6.	Квантовые состояния . . . . .	62
4.6.1.	Чистые и смешанные состояния. Матрица плотности . . . . .	62
4.6.2.	Сцепленные (перепутанные) состояния . .	64
4.6.3.	Измерение состояния системы . . . . .	66
4.6.4.	Декогеренция . . . . .	67
4.7.	Наблюдаемые. Измерение . . . . .	68
4.8.	Соотношение неопределенностей Гейзенберга . .	71
4.9.	Принцип дополнительности Бора . . . . .	73
4.10.	ЭПР-парадокс . . . . .	73
4.11.	Копенгагенская интерпретация квантовой механики . . . . .	75
4.12.	Многомировая интерпретация квантовой механики . . . . .	76
4.12.1.	Де Витт о теории Эверетта . . . . .	80
4.12.2.	Эверетт о своей теории . . . . .	81
4.12.3.	Уилер о теории Эверетта . . . . .	82
4.13.	Что такое физическая реальность? . . . . .	83
4.14.	Джон фон Нейман . . . . .	85
4.15.	Хью Эверетт III . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Квантовая логика</b> . . . . .	<b>90</b>
5.1.	Недистрибутивность квантовой логики . . . . .	90
5.2.	Проблема импликации в квантовой логике . . . .	92
5.3.	Квантовая логика фон Неймана-Биркгофа . . . .	92
5.3.1.	Истинностные свойства связок . . . . .	94
5.3.2.	Недистрибутивность связок. Спин $\frac{1}{2}$ . . . .	94
5.4.	Квантовая логика Рейхенбаха . . . . .	96
5.5.	Квантовая логика Гольдблатта . . . . .	98

<b>6</b>	<b>Квантовые вычисления</b>	<b>101</b>
6.1.	Организация вычислений на квантовом компьютере . . . . .	101
6.1.1.	Ввод начальных данных . . . . .	101
6.1.2.	Вычисление . . . . .	103
6.1.3.	Вывод результата . . . . .	103
6.2.	Исправление квантовых ошибок . . . . .	104
6.3.	Классический компьютер вычисляет всё, что вычисляет квантовый . . . . .	105
6.4.	Дэвид Дойч . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Квантовые алгоритмы</b>	<b>108</b>
7.1.	Алгоритм факторизации Шора . . . . .	108
7.2.	Классическая часть факторизации по Шору . . . . .	109
7.3.	Квантовая часть алгоритма Шора. Алгоритм нахождения периода функции $x^k \pmod n$ . . . . .	110
7.4.	Квантовое вычисление преобразования Фурье . . . . .	112
7.5.	Квантовая криптография . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Квантовая информация</b>	<b>118</b>
8.1.	Классическая теория информации . . . . .	118
8.1.1.	Классический канал связи с шумом. Теоремы Шеннона . . . . .	119
8.2.	Квантовая теория информации . . . . .	122
8.2.1.	Квантовый канал связи. Теоремы кодирования . . . . .	123
8.3.	Невозможность клонирования квантовой информации . . . . .	126
8.3.1.	Невозможность универсального клонирующего устройства . . . . .	127
8.3.2.	Клонирование двух ортогональных состояний . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Квантовая телекоммуникация</b>	<b>130</b>
9.1.	Базис Белла . . . . .	130
9.2.	Результаты измерения состояний Белла. Квантовая корреляция . . . . .	131

9.3. Протокол сверхплотного кодирования классической информации . . . . .	132
9.4. Протокол квантовой телепортации . . . . .	134
9.5. Квантовый криптографический протокол передачи информации . . . . .	137
9.6. Квантовый протокол BB84 . . . . .	138
<b>10 Квантовая реальность и модель осознания</b>	<b>141</b>
10.1. Что такое физическая реальность, реальный мир . . . . .	142
10.2. Физическая реальность и сознание . . . . .	144
10.3. Физическая реальность создается сознанием через деятельность . . . . .	145
10.4. Квантовый мир и физическая реальность . . . . .	146
10.5. Модель квантового рождения физической реальности . . . . .	148
10.6. Осознание . . . . .	151
10.7. Что ум созидает и что отражает . . . . .	152
10.8. Как разум меняет реальность . . . . .	155
<b>11 Квантовое время</b>	<b>157</b>
11.1. Квантовое описание сущностей . . . . .	159
11.2. Определение квантового времени . . . . .	159
11.3. Инфинитезимальный анализ Кока-Ловера . . . . .	160
11.4. Интерпретация инфинитезимального анализа Кока-Ловера . . . . .	162
11.4.1. Категории . . . . .	163
11.4.2. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$ . . . . .	164
11.4.3. Категория $\mathbf{Sets}^{L^{op}}$ в качестве интерпретации анализа Кока-Ловера . . . . .	165
<b>12 Квантовое сознание</b>	<b>168</b>
12.1. Квантовая модель Хамероффа-Пенроуза моментов сознания . . . . .	168

---

12.1.1. Квантовые когерентные суперпозиции в мозгу . . . . .	169
12.1.2. Объективная декогеренция <i>OR</i> . . . . .	172
12.1.3. Почему сознание возникает в «классической» системе . . . . .	173
12.2. Стюарт Хамерофф . . . . .	175
12.3. Роджер Пенроуз . . . . .	176
<b>13 Квантовая психопатология</b>	<b>178</b>
13.1. Парафрениии – следствие поломки микротрубочек в мозгу . . . . .	179
13.2. Микротрубочки при шизофрении . . . . .	180
13.3. Болезнь Альцгеймера . . . . .	182
<b>14 Квантовое зрение</b>	<b>184</b>
14.1. Сигналы в ответ на одиночные кванты света . . . . .	184
14.2. Квантовомеханическое описание системы «квант света - реакция самописца» . . . . .	187
<b>15 Устройство квантового компьютера</b>	<b>191</b>
15.1. Архитектура квантового компьютера . . . . .	191
15.2. Квантовый ЯМР-компьютер . . . . .	193
15.3. Квантовый компьютер, использующий ионные ловушки . . . . .	194
15.4. Квантовый компьютер D-Wave Orion . . . . .	196
<b>Литература</b>	<b>199</b>



# Введение

*Кибернетика* – наука об управлении, связи и способах получения, передачи, обработки и хранения информации как в неживой, так и в живой природе.

Основной объект исследования – кибернетические системы, рассматриваемые абстрактно, вне зависимости от их материальной природы. Каждая такая система представляет собой множество взаимосвязанных объектов (элементов системы), способных воспринимать, запоминать и перерабатывать информацию, а также обмениваться ею. Примеры кибернетических систем – ЭВМ, человеческий мозг, автоматические регуляторы в технике.

Изначальная цель кибернетиков, как пишет Ф. Капра, заключалась в создании точной науки о разуме [20, с.70]. Время рождения науки кибернетики совпало с временем построения первых ЭВМ. Вычислительные машины очеловечивались их создателями, а сам человек рассматривался как мощная ЭВМ, подобная той, которую предстоит построить в будущем. Для объяснения феномена сознания, разума стали использовать принципы организации и принципы работы ЭВМ. Вместо человека-машины XVI-XVIII веков, подобного механическим часам, или человека-электромашины XIX века появился человек-ЭВМ. Такова логика науки. Она пытается объяснить разум теми средствами и с помощью тех знаний, которыми располагает.

Поскольку квантовая механика пришла на смену классиче-

ской механике, то естественно, что вместо кибернетики появляется наука, называемая квантовой кибернетикой, а человека начинают рассматривать как квантовый компьютер.

Но применима ли квантовая механика к описанию макро-объектов, и к человеку в частности?

«Представление о том, что классическая механика описывает макромир, а квантовая механика – микромир, возникает ввиду того, что классическую механику не могут применить в физике элементарных частиц, атомов и молекул, в то время как квантовую механику не хотят применять к макроскопическим феноменам. Точнее говоря, классическая механика всюду ложна, в то время как квантовая механика, напротив, (гипотетически!) правильна; однако отклонения классической механики от квантовой в макроскопической области так малы, что они в современности находятся за пределами измерительной точности. Но соотношение неопределённостей, корпускулярно-волновой дуализм, квантование энергии и т.д. действуют также и в макромире! Таким образом, квантовая механика превосходит классическую механику» [44]. И вполне логичным является её использование при познании природы человеческого разума.

# Глава 1

## Классический компьютер

### 1.1. Архитектура классического компьютера

В 1946 году Джон фон Нейман (1903-1957) вместе с Г. Гольдштейном и А. Берксом написал и выпустил отчёт «Предварительное обсуждение логической конструкции электронной вычислительной машины».

Согласно фон Нейману, ЭВМ состоит из следующих основных блоков:

1. Устройства ввода/вывода информации.
2. Памяти компьютера.
3. Процессора, состоящего из устройства управления (УУ) и арифметико-логического устройства (АЛУ).

Машины, построенные на этих принципах, называются фон-неймановскими. Практически все ЭВМ, которыми мы сейчас пользуемся, работают на этих принципах.

В упомянутом отчёте были изложены также следующие об-

щие принципы работы ЭВМ <sup>1</sup>:

1. **Принцип двоичного кодирования.** Вся информация, поступающая в ЭВМ, кодируется с помощью двоичных сигналов, т.е. сигналов, имеющих только два состояния –  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , отвечающих двум возможным значениям 0,1 единицы информации – *бита*.
2. **Принцип программного управления.** Программа состоит из набора *команд*, которые выполняются процессором автоматически друг за другом в определённой последовательности.
3. **Принцип организации памяти.** Структурно (основная) память состоит из пронумерованных *ячеек*; процессору в произвольный момент времени доступна любая ячейка.
4. **Принцип однородности памяти.** Программы и данные хранятся в одной и той же памяти. Поэтому ЭВМ не различает, что хранится в данной ячейке памяти – число, текст или команда. Над командами можно выполнять такие же действия, как и над данными.
5. **Принцип адресности.** Областям памяти даются имена, причем так, что к хранящимся в них значениям можно было бы впоследствии обращаться или менять их в процессе выполнения программы с использованием присвоенных имен.

### 1.1.1. Коды команд, данных и машинное слово

Для того чтобы выполнить ту или иную операцию над данными ЭВМ, необходимо выполнить конкретную команду. Команда представляется некоторым двоичным кодом (числом) и

---

<sup>1</sup>В изложении Corwin, <http://www.ykt.ru/review/101100/index.htm>.

хранится в памяти. В памяти хранятся и алгебраические числа (данные), также представленные в форме двоичного кода<sup>2</sup>. Данным может быть не только алгебраическое число, но и просто набор цифр.

Количество разрядов у хранящихся данных и у команд делается одинаковым. Данное (команду), занимающее это количество разрядов, назовем *машинным словом*.

### 1.1.2. Ячейки

Память, как мы знаем, разбита на ячейки. Номер ячейки называется *адресом*. Сама же ячейка памяти разбита на фиксированное число разрядов и хранит одно машинное слово. Часто в литературе ячейка отождествляется с машинным словом.

Каждый разряд находится в состоянии 0 или 1.

Таким образом, если мы запишем разряд в символическом виде

$$|n_k\rangle, \quad n_k = 0, 1,$$

то ячейку можно представить в виде

$$|n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle. \quad (1.1)$$

Полезно теперь вспомнить, что натуральное число  $n$  можно задать в виде суммы

$$n = \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k = \sum_{l=1}^m n_{m-l} 2^{m-l},$$

последовательность коэффициентов  $n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0$  в кото-

---

<sup>2</sup>Под кодом понимается условная система знаков для представления информации в компьютере.

рой является двоичным кодом<sup>3</sup> числа  $n$ :

$$(n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0)_2 = \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k = \sum_{l=1}^m n_{m-l} 2^{m-l}.$$

Таким образом, ячейка (1.1) хранит число  $n$ , и мы можем написать

$$|n\rangle = |n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle,$$

воспринимая  $|n\rangle$  в качестве сокращенной записи для ячейки (1.1).

### 1.1.3. Регистр

*Регистр* – часть памяти компьютера обычно ёмкостью в одно машинное слово, предназначенная для запоминания (а иногда также и для преобразования) кодов.

Таким образом, чаще всего регистр – это другое название ячейки памяти.

Состояние регистра в момент времени  $t$  – это  $m$ -битовое состояние вида

$$|n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle.$$

### 1.1.4. Классическое вычисление

Представление информации в виде двоичного кода оказалось очень удобным для организации вычислений на ЭВМ, поскольку приходится иметь дело только с двумя цифрами – 0 и 1. Для технического осуществления вычислений можно найти множество физических реализаций двоичной системы среди электромагнитных явлений. Например, высокий потенциал в

<sup>3</sup>Для дробей двоичный код определяется следующим образом:

$$(0, n_l n_{l+1} \dots n_m)_2 = \sum_{k=l}^m n_k \frac{1}{2^{k-l+1}}.$$

точке схемы – 1, низкий – 0; ферромагнитное колечко намагничено в одном направлении – 1, в другом – 0.

Используя это представление, можно на простейших электронных схемах реализовать комбинации трех логических операций  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ . Каждая из таких схем является *логическим элементом*, которые все вместе составляют элементную базу ЭВМ.

### 1.1.5. Логические элементы

Из чего состоит процессор классического компьютера? Например, из схем, собранных из логических элементов.

*Логический элемент* – это простейшее устройство ЭВМ, выполняющее одну определенную логическую операцию над входными сигналами согласно правилам алгебры логики. Для логических элементов независимо от их физической реализации приняты дискретные значения входных и выходных сигналов; обычно это два уровня, которые условно принимаются за 0 и 1.

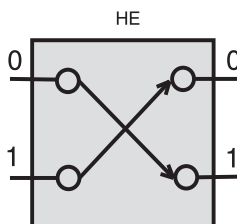


Рис. 1.1: Логический элемент «НЕ»

Широко распространены логические элементы из сочетаний элементов – «НЕ-И», «НЕ-ИЛИ». Логические элементы являются основными элементами для построения логических цепей компьютеров. Совокупность логических элементов образует логическую структуру блока, узла, устройства машины [4].

На рис. 1.1 изображен логический элемент «НЕ», который переводит 0 в 1 и 1 в 0.

Логические элементы – это технические устройства, реализующие некоторые логические операции классической логики. Так, элемент «НЕ» соответствует операции  $\neg$ , элемент «ИЛИ» – операции  $\vee$  и т.д.

## 1.2. История советских ЭВМ

### 1.2.1. МЭСМ

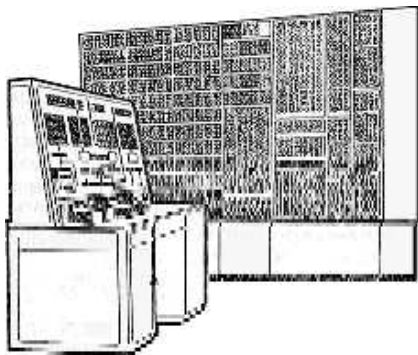


Рис. 1.2: МЭСМ

МЭСМ – малая электронная счётная машина – была первой отечественной универсальной ламповой ЭВМ в СССР. Создана в Институте электроники Академии наук Украины. Начало работ – 1948 год, завершение работ и официальный ввод в эксплуатацию – 1950 год. В 1952-1953 гг. МЭСМ была самой

быстродействующей и практически единственной регулярно эксплуатируемой ЭВМ в Европе.

Быстродействие – 50 операций в 1 секунду; ёмкость оперативного запоминающего устройства – 31 число и 63 команды; представление чисел – 16 двоичных разрядов с фиксированной перед старшим разрядом запятой; команды трехадресные, длиной 20 двоичных разрядов (из них 4 разряда – код операции); рабочая частота – 5 кГц.



### 1.2.2. Сергей Лебедев

Первая ЭВМ в СССР – малая электронная счётная машина – МЭСМ, начала создаваться в 1948 году группой работников под руководством Сергея Алексеевича Лебедева.

Её функциональная схема удовлетворяла почти всем принципам фон Неймана. МЭСМ была запущена в эксплуатацию в 1950 году [39, с.107].

Сергей Алексеевич Лебедев родился в Нижнем Новгороде. В 1928 г. он окончил Московское высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана (МВТУ).

В 1935 г. он получил звание профессора. В 1939 г., не имея ученой степени кандидата наук, защитил докторскую диссертацию. Тема диссертации связана с разработкой теории устойчивости энергосистем. В 1947 году назначен директором Института электротехники АН Украины, в котором и была создана МЭСМ.



Рис. 1.3: С.А. Лебедев (1902-1974)

### 1.2.3. БЭСМ-6

В 1950 г. С.А. Лебедев в Москве начал разработку Большой электронной счётной машины (БЭСМ). В 1956 г. С.А. Лебедев сделал доклад на Международной конференции по электронным счётным машинам в Дармштадте (ФРГ), который произвел сенсацию. БЭСМ оказалась лучшей ЭВМ в Европе! Машины серии БЭСМ (от БЭСМ-1 до БЭСМ-6) на момент своего создания были лучшими в классе универсальных ЭВМ. За работы по созданию БЭСМ-1 С.А. Лебедев получил звание

Героя Социалистического Труда.<sup>4</sup>

БЭСМ создана в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР. Работа над первой машиной была закончена в 1952 году. БЭСМ – трехадресная машина параллельного действия на электронных лампах (4000 ламп). Использована двоичная система счисления с плавающей запятой. Скорость БЭСМ 10 тысяч операций в 1 секунду.



Рис. 1.4: ЭВМ «БЭСМ-6»<sup>5</sup>

<sup>4</sup>См.: <http://www.bashedu.ru/konkurs/tarhov/russian/lebedev.htm>

<sup>5</sup>Рисунок с сайта <http://www.bashedu.ru/konkurs/tarhov/russian/besm.htm>

В 1967 создана вычислительная машина БЭСМ-6. Её быстроедействие около 1 миллиона операций в секунду.

Универсальная машина БЭСМ-6 использовалась во всех отраслях народного хозяйства (нефтепромыслы, планирование машиностроительных отраслей, создание автоматических линий, ядерный реактор, синхрофазотрон, обслуживаемые машиной).

Операционные системы, разработанные для управления БЭСМ-6: «Диспетчер-68» (Н.Л. Королев, В.П. Иванников и А.Н. Томилин), ОС «Дубна» (Н.Н. Говорун, И.Н. Силин) и ОС «Диспак» (В.Ф. Тюрин), а также ОС «Новый диспетчер-70» (В.П.Иванников) с развитыми средствами организации параллельных вычислений (соподчинение задач, аппарат параллельных процессов), режимом работы в реальном времени и возможностью организации многомашинного вычислительного комплекса.

Для БЭСМ существовали реализации многих распространенных в то время языков программирования: Алгол-60, Фортран, Паскаль, АПЛ, Лисп, Плэнер, РЕФАЛ, Форт и С.

#### 1.2.4. ЭВМ «Эльбрус-2»

Главный конструктор этой ЭВМ – В.С. Бурцев. Использовалась в оборонной отрасли, в ядерных исследовательских центрах в Арзамасе-16 и Челябинске-70, а с 1991 г. применялись в системе противоракетной обороны А-135 и на других военных объектах. За создание «Эльбруса-2» (1985 г.) конструкторы Б.А. Бабаян и другие получили Ленинскую премию, а Главный конструктор В.С. Бурцев и его соратники – Государственную премию.

Производительность 125 млн. оп./сек (MIPS), емкость оперативной памяти до 144 Мб или 16 Мслов (слово – 72 разряда).

Построена на базе интегральных схем ИС-100 (аналог серии Motorola 10000). Из-за высокой потребляемой мощности нуждалась в мощной системе кондиционирования. Всего было выпущено 30 машин «Эльбрус-2».

### 1.2.5. Специализированные ЭВМ

«Специализированные ЭВМ, созданные под руководством С.А. Лебедева для системы противоракетной обороны, стали основой достижения стратегического паритета СССР и США в период «холодной войны».

В 1952-1955 гг. учеником С.А. Лебедева В.С. Бурцевым были разработаны специализированные ЭВМ «Диана-1» и «Диана-2» для автоматического съёма данных с радиолокатора и автоматического слежения за целями». При помощи первой машины оцифровывались данные и цели, и истребителя. А при помощи второй ЭВМ осуществлялось наведение истребителя на самолет противника. Под Курском были проведены испытания системы в реальных условиях.



Рис. 1.5: В.С. Бурцев

Для системы противоракетной обороны (ПРО), генеральным конструктором которой был Г.В. Кисунько, в 1958 г. была предложена ламповая ЭВМ М-40, а немного позднее – М-50 (с плавающей точкой)<sup>6</sup>. «Впервые был реализован по структуре и принципу работы многопроцессорный комплекс. По пяти асинхронно работающим каналам осуществлялся обмен информацией с объектами, находящимися от М-40 на расстоянии от

100 до 200 километров. Система регистрации боевой работы давала возможность в реальном масштабе времени «проигрывать» и анализировать каждый пуск.

В 1961 году была впервые сбита баллистическая ракета. Такого комплекса радиолокационных средств, связанных вычислительной сетью, у американцев не было<sup>7</sup>.

В системах противоракетной обороны работали машины 5Э92, 5Э92Б, 5Э51, 5Э65, 5Э67, Эльбрус-1 и Эльбрус-2, 5Э261,

<sup>6</sup>См.: <http://www.tomsk.ru/Books/informatica/theory/chapter3/lebedev.html>

<sup>7</sup>См.: <http://2005.novayagazeta.ru/nomer/2005/61n/n61n-s25.shtml>

5Э262, 5Э265, 5Э266, 40У6.

### 1.2.6. СуперЭВМ МВС-1000МВ

Запущенная в 2004 году российская суперЭВМ МВС-1000М вышла на символический рубеж – 1 триллион операций в секунду. Машина, установленная в Вычислительном центре РАН, по мощности является 28-й в мире.

Такие суперкомпьютеры называются терафлопными. Производят их только США и небольшое количество Японии. Главным разработчиком МВС-1000М стал ученик Лебедева член-корреспондент РАН Владимир Левин.



Рис. 1.6: В.К. Левин



Рис. 1.7: СуперЭВМ МВС-1000М

В российском суперкомпьютере установлены 768 американских микропроцессоров «Альфа-256». Но архитектура машины, математика, повышение пиковой мощности и параметров устойчивости, уровень передачи информации – чисто российские ноу-хау.

Пиковая производительность МВС-1000М составляет  $10^{12}$  операций с плавающей точкой с двойной точностью в секунду. Общий объем оперативной памяти решающего поля – 768 Гбайт. Для размещения МВС-1000М требуется  $100 \text{ м}^2$ . Потребляемая мощность составляет 120 кВА. Операционная система Linux RedHat 6.2 (с поддержкой SMP).

## Глава 2

# «Наивная» квантовая механика

Обычно квантовую механику излагают так, что у читателя создается впечатление, будто речь идет о математическом аппарате, разработанном для описания мира элементарных частиц, атомов и молекул. Однако квантовая механика – это способ восприятия и описания окружающего нас физического мира и нас самих.

В этой главе даётся изложение квантовой механики, предложенное в учебнике Фейнмана [45], которое в нашем случае имеет в виду работу квантового компьютера.

### 2.1. Состояния

Два различаемых уровня входных и выходных сигналов, проходящих по цепям ЭВМ, которые мы обозначали выше как 0 и 1, – это некоторые *простейшие состояния*, наблюдаемые на входе и выходе любого логического элемента, или схемы, собранной из логических элементов. Для них выше мы использовали обозначения –  $|i\rangle$  и  $|i\rangle$ . Это *однобитовые состояния*.

Состояния могут быть более сложными,  $m$ -битовыми, т.е. являться набором  $m$  однобитовых состояний

$$|x\rangle \equiv \underbrace{|ij\dots k\rangle}_m.$$

Переход от одного состояния к другому

$$|x\rangle \rightarrow |y\rangle$$

является результатом вычисления, т.е. результатом выполнения машиной команды или программы.

Квантовый компьютер, о котором будет рассказано в следующей главе, строится на принципах квантовой механики. В этой главе дается одно из возможных изложений квантовой механики, максимально приближенное к тому, что требуется для описания работы квантового компьютера.

## 2.2. Принципы «наивной» квантовой механики

### 2.2.1. Амплитуда вероятности

**Принцип 1.** *Переходу из состояния  $|x\rangle$  в состояние  $|y\rangle$  соответствует амплитуда вероятности*

$$c_{xy} = \langle y|x\rangle,$$

*являющаяся комплексным числом, квадрат модуля которого есть вероятность перехода  $|x\rangle \rightarrow |y\rangle$ :*

$$P(x \rightarrow y) = |c_{xy}|^2 \equiv |\langle y|x\rangle|^2.$$



### 2.2.2. Пути переходов из состояния в состояние. Квантовая интерференция

**Принцип 2.** Если переход из состояния  $|x\rangle$  в состояние  $|y\rangle$  возможен по двум различными путям 1 и 2, то

$$\langle y|x\rangle = \langle y|x\rangle_{\text{через 1}} + \langle y|x\rangle_{\text{через 2}}. \quad (2.1)$$

В частности, если пути 1 и 2 связаны с «промежуточными» состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  соответственно, то формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\langle y|x\rangle = \langle y|1\rangle\langle 1|x\rangle + \langle y|2\rangle\langle 2|x\rangle. \quad (2.2)$$

Принцип 2 имеет важное следствие, которое означает, что вероятность  $P_{xy}$  перехода  $|x\rangle \rightarrow |y\rangle$  в общем случае не равна сумме вероятностей  $P_{xy}(1) + P_{xy}(2)$  переходов

$$|x\rangle \underbrace{\longrightarrow}_{\text{через 1}} |y\rangle, \quad |x\rangle \underbrace{\longrightarrow}_{\text{через 2}} |y\rangle,$$

поскольку

$$P_{xy} = P_{xy}(1) + P_{xy}(2) + 2\text{Re}[\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] \quad (2.3)$$

Последнее слагаемое в этой сумме

$$2\text{Re}[\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] \quad (2.4)$$

говорит о возможности явления *интерференции* двух путей перехода из  $|x\rangle$  в  $|y\rangle$ . Иначе говоря, с точки зрения квантовой механики, происходит *распараллеливание* переходного процесса из одного состояния в другое; мы не можем точно знать, по какому пути совершается переход, и поэтому должны приучить себя к мысли, что *переход совершается по двум путям одновременно*<sup>1</sup>, и это с необходимостью отражено в итоговой формуле (2.3). Однако в итоговом результате отражается

<sup>1</sup>Один из ведущих специалистов по теории квантовых вычислений Дойч считает, что в действительности сигнал проходит по одному пути, по другому идет «теневого» сигнал из *параллельной вселенной* [15].

вклад обоих путей. И как это ни противоречит житейской интуиции, поддержанной постулатами классической механики, высшая механика – это квантовая механика, и учёт её постулатов необходим для понимания принципов работы квантовых компьютеров и сути квантовых вычислений.

Обратим внимание на то, что изменение фаз амплитуд вероятностей

$$\langle y|x \rangle_{\text{через 1}} \rightarrow e^{i\theta} \langle y|x \rangle_{\text{через 1}}, \quad \langle y|x \rangle_{\text{через 2}} \rightarrow e^{i\omega} \langle y|x \rangle_{\text{через 2}},$$

как мы знаем, не меняет вероятности переходов из  $x$  в  $y$  по путям 1 или 2, но может изменить вклад интерференционного члена (2.4), поскольку

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[\langle y|x \rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x \rangle_{\text{через 2}}} ] &\rightarrow \\ &\rightarrow 2\text{Re}[e^{i(\theta-\omega)} \langle y|x \rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x \rangle_{\text{через 2}}} ]. \end{aligned}$$

Подбором разности фаз можно влиять на интерференционную картину. Интерференция становится *контролируемой*. Поэтому в теории квантовых вычислений можно говорить, что «результат решения (задачи – А.Г.) проявляется вследствие контролируемой интерференции множества вариантов вычислений» [40, с.98].

### 2.2.3. Базисные состояния. Когерентная суперпозиция

Самый общий вид формулы, выражающей сущность второго принципа квантовой механики и учитывающей один «промежуточный» этап набора возможных «базисных» состояний  $\alpha = 1, 2, \dots, k$ , как нетрудно видеть, является следующим

$$\langle y|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \langle y|\alpha \rangle \langle \alpha|x \rangle. \quad (2.5)$$

Уберем в правой и левой частях формулы (2.5) символ  $\langle y$ . Как результат получаем формулу

$$|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} |\alpha \rangle \langle \alpha|x \rangle. \quad (2.6)$$

Положив теперь, что  $c_\alpha = \langle \alpha | x \rangle$ , имеем разложение состояния  $|x\rangle$  по *базисным* состояниям:

$$|x\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_\alpha |\alpha\rangle. \quad (2.7)$$

Состояние (2.7) называют также *когерентной суперпозицией базисных состояний*.

Отметим при этом, что  $|c_\alpha|^2$  – это вероятность того, что, по сути дела, сигнал  $x$ , проходя по цепям ЭВМ, оказывается (и наблюдается) в состоянии  $\alpha$ .

#### 2.2.4. Что такое базисные состояния в случае квантового компьютера?

В квантовом компьютере базисные состояния – это всевозможные состояния регистра (оперативной) памяти.

Например, регистр с двумя разрядами имеет четыре базисных состояния

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle.$$

Классический регистр  $|x\rangle$  в момент времени  $t$  находится только в одном из этих состояний, а квантовый сразу во всех четырёх

$$|x\rangle = c_1|00\rangle + c_2|01\rangle + c_3|10\rangle + c_4|11\rangle.$$

Следовательно, различные пути перехода для состояния  $|x\rangle$  – это *одновременные параллельные* изменения каждого из базисных состояний, в результате которых получается новое состояние  $|y\rangle$ :

$$|y\rangle = c_1|00\rangle^\tau + c_2|01\rangle^\tau + c_3|10\rangle^\tau + c_4|11\rangle^\tau,$$

где символ  $\tau$  говорит о том, что мы имеем дело с изменённым базисным состоянием.

### 2.2.5. Уравнение Шредингера

**Принцип 3.** *Изменение состояния  $|x\rangle$  во времени задается формулой*

$$\begin{aligned} |x(t + \Delta t)\rangle &\equiv U(t + \Delta t, t)|x(t)\rangle = \\ &= \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} U(t + \Delta t, t)|\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$U(t, t) = I, \quad (2.9)$$

где  $U(t + \Delta t, t)$  – преобразование, меняющее состояние  $|x(t)\rangle$ ,  $I$  – тождественное преобразование.

Применяя к  $U(t + \Delta t, t)$  формулу конечных разностей

$$U(t + \Delta t, t) = U(t, t) + \frac{\partial U(t + \theta\Delta t, t)}{\partial t} \Delta t$$

и подставляя в (2.8), получаем

$$\begin{aligned} |x(t + \Delta t)\rangle &= \\ &= \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \left\{ I + \frac{\partial U(t + \theta\Delta t, t)}{\partial t} \Delta t \right\} |\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle = \\ &= \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} |\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle + \\ &+ \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial U(t + \theta\Delta t, t)}{\partial t} |\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle \Delta t = \\ &= |x(t)\rangle + \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial U(t + \theta\Delta t, t)}{\partial t} |\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle \Delta t. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{|x(t + \Delta t)\rangle - |x(t)\rangle}{\Delta t} = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial U(t + \theta\Delta t, t)}{\partial t} |\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle.$$

Устремляя  $\Delta t$  к 0, имеем

$$\frac{d}{dt}|x(t)\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial U(t,t)}{\partial t} |\alpha\rangle \langle \alpha|x(t)\rangle. \quad (2.10)$$

Вводя обозначение

$$-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}|x(t)\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial U(t,t)}{\partial t} |\alpha\rangle \langle \alpha|x(t)\rangle,$$

где  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж · сек – постоянная Планка, перепишем уравнение (2.10) в виде

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|x(t)\rangle = \widehat{H}|x(t)\rangle.} \quad (2.11)$$

Это знаменитое уравнение Шрёдингера, являющееся основой квантовой механики.

## 2.2.6. Измерение состояния. Редукция. Коллапс. Декогеренция

**Принцип 4.** *Измерение состояния*

$$|x\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_{\alpha} |\alpha\rangle$$

– это вмешательство классического прибора, приводящее к тому, что с вероятностью  $|c_{\alpha}|^2$  будет наблюдаться лишь одно из базисных состояний  $|\alpha\rangle$ .

Иначе говоря, измерение означает переход

$$|x\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_{\alpha} |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle, \quad (2.12)$$

называемый *редукцией*, или *коллапсом* (состояния)  $|x\rangle$ .

Редукция состояния  $|x\rangle$  происходит по той причине, что процедура измерения есть взаимодействие с классическим измеряющим аппаратом. Поскольку  $|x\rangle$  является когерентной суперпозицией, то при измерении происходит разрушение когерентной суперпозиции, т.е. имеет место *декогеренция*.

Разрушение когерентной суперпозиции базовых состояний – это ликвидация интерференции путей перехода из одного состояния к другому (см. § 2.2.2). Измеряющая классическая аппаратура – это часть окружающей квантовую систему среды. Поэтому можно заявить:

**Декогеренция – результат взаимодействия квантового компьютера с внешней средой, разрушающей параллеливание квантовых вычислений.** Следовательно, с декогеренцией на этапе вычислений необходимо бороться. Но она необходима на этапе вывода данных (см. ниже § 6.1.3).

### 2.2.7. Кот Шрёдингера

Следующий пример придумал один из создателей квантовой механики Эрвин Шрёдингер. Пример иллюстрирует «чужеродность»<sup>2</sup> Принципа 4 для квантовой механики, которая должна описывать явления *непрерывным* образом, исходя из уравнения Шрёдингера, т.е. на основе Принципа 3.

Пусть в закрытый ящик помещен кот. В ящике имеется механизм, содержащий радиоактивное ядро и ёмкость с ядовитым газом. Параметры эксперимента подобраны так, что вероятность того, что ядро распадется за 1 час, составляет 50%. Если ядро распадается, оно приводит механизм в действие, он открывает ёмкость с газом, и кот умирает. Согласно квантовой механике, если над ядром не производится наблюдения, то его состояние описывается суперпозицией (смешением, смесью)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

---

<sup>2</sup>Равным образом и «чужеродности» принципа коллапса волновой функции фон Неймана.

двух состояний – нераспавшегося ядра  $|0\rangle$  и распавшегося ядра – состояние  $|1\rangle$ , следовательно, кот, сидящий в ящике, и жив – состояние  $|0\rangle$ , и мёртв – состояние  $|1\rangle$  одновременно. Если же ящик открыть – декогеренция, то экспериментатор обязан увидеть только какое-нибудь одно конкретное состояние – «ядро распалось, кот мёртв» или «ядро не распалось, кот жив».

Вопрос стоит так: когда система перестаёт существовать как смешение (смесь) двух состояний и выбирает одно конкретное?

Цель мысленного эксперимента Шрёдингера – показать, что квантовая механика *неполна* без некоторых правил, которые указывают, при каких условиях применим Принцип 4, т.е. происходит декогеренция (коллапс волновой функции), и кот становится либо мёртвым, либо остается живым, но перестает быть смешением того и другого.

Напомним, что согласно математической логике, если теория  $T$  неполна, то она содержит утверждение  $A$ , которое невыводимо из принципов, на которых построена теория  $T$ . В нашем случае таким утверждением является Принцип 4. Но это означает возможность теории, в которой принцип 4 заменяется его отрицанием. Такую теорию, называемую в литературе *многомировой интерпретацией квантовой механики*<sup>3</sup>, предложил в 1957 году американский аспирант Хью Эверетт [63].

## 2.3. Ричард Фейнман

В 1982 году американский физик-теоретик нобелевский лауреат Ричард Фейнман опубликовал статью, в которой он обратил внимание на способность изолированной квантовой системы из  $m$  двухуровневых квантовых элементов находиться в когерентной суперпозиции из  $2^m$  булевых состояний, характеризующейся  $2^m$  комплексными числами.

Ясно, что для описания такого квантового состояния в классическом вычислительном устройстве потребовалось бы

---

<sup>3</sup>Теорию Эверетта называют часто теорией параллельных миров.

задать  $2^m$  комплексных чисел, т.е. понадобились бы экспоненциально большие вычислительные ресурсы.



Рис. 2.1: Р. Фейнман

Отсюда был сделан вывод о том, что эффективное численное моделирование квантовых систем, содержащих до сотни двухуровневых элементов, практически недоступно классическим компьютерам, но может эффективно осуществляться путем выполнения логических операций на квантовых системах, которые действуют на суперпозиции многих квантовых состояний.

«Законы физики не запрещают уменьшать размеры компьютера до тех пор, пока биты не достигнут размеров атомов и квантовое поведение не станет доминирующим» (Р. Фейнман, [47]).

«Я ... полагаю, что верно то, что с помощью подходящего класса квантовых машин вы сможете симулировать любую квантовую систему, включая физический мир» (Р. Фейнман, [46]).



## Глава 3

# КВАНТОВЫЙ КОМПЬЮТЕР

### 3.1. Организация и работа квантового компьютера

*Квантовый компьютер* – это та физическая система, которой мы будем интересоваться с точки зрения квантовой физики. Точнее, нас будет интересовать организация вычислений на компьютере, состояния которого в каждом такте (моменте дискретного времени) описываются с помощью постулатов квантовой механики. Такие вычисления и компьютер следует назвать *квантовыми*.

#### 3.1.1. Кубит – единица квантовой информации

По аналогии с классическим компьютером, информация в котором кодируется битами, имеющими только два состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , информация в квантовом компьютере кодируется в так называемых *квантовых битах* или *кубитах*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>*Кубит* = q(uantum)-бит. Слово «кубит» (qubit) ввел в употребление Бен Шумахер из Кенйон-колледжа (США) в 1995 году.

*Кубит* – это единица квантовой информации. Он также принимает только два значения – 0 и 1. Кубит в состоянии 0 обозначается как  $|0\rangle$ , а в состоянии 1 –  $|1\rangle$ . Это *1-кубитовые состояния*.

Соответственно, *m-кубитовое* базовое состояние имеет вид

$$|n\rangle = |n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle, \quad n_k = 0, 1. \quad (3.1)$$

Оно соответствует двоичному представлению числа целого  $n$ :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k = \\ &= (n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0)_2 \quad (\text{— в двоичной записи}). \end{aligned}$$

*Квантовый регистр* устроен почти так же, как и классический. Это цепочка квантовых битов – кубитов

$$|n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle, \quad n_k = 0, 1,$$

над которыми можно проводить одно- и двухкубитовые и другие (квантовые) логические операции.

### 3.1.2. Состояния ячеек и регистров

Прежде всего оказывается, что классический, т.е. привычный нам компьютер, не может быть квантовым. Дело в том, что в каждый момент времени его оперативная память всегда находится в строго определённом состоянии, складывающемся из состояний составляющих её ячеек.

Каждый бит информации, соответствующий состоянию компьютера (в частности конкретного регистра) и застывший в оперативной памяти компьютера на данном такте его работы, имеет точное значение – 0 или 1. Состояние классического компьютера (регистра) в момент времени  $t$  – это, например, конкретная последовательность

$$|\underbrace{01001011100011\dots}_m\rangle. \quad (3.2)$$

Напротив, состояние квантового компьютера (регистра) в момент времени  $t$  не является точно определенным и описывается линейной комбинацией с комплексными коэффициентами  $m$ -битовых состояний вида

$$|\psi\rangle = c_1 \underbrace{|01001011100011\dots\rangle}_m + c_2 \underbrace{|11001011100011\dots\rangle}_m + \dots, \quad (3.3)$$

причем вероятность того, что компьютер (регистр) находится в состоянии  $\underbrace{|01001011100011\dots\rangle}_m$ , равна  $|c_1|^2$ , вероятность нахождения в состоянии  $\underbrace{|11001011100011\dots\rangle}_m$  равна  $|c_2|^2$  и т.д. [13, с.36].

### 3.1.3. Физическая реализация кубита, ячеек и регистров памяти

Физической реализацией кубита может служить любая двух-уровневая (квантовомеханическая) система (спин, фотон, атом, молекула, ион). К примеру, проекция спина атома (+1) принимается для кубита за состояние  $|0\rangle$ , а проекция (-1) – за состояние  $|1\rangle$ .

Напомним, что физической реализацией классического бита может быть значение потенциала в точке электронной схемы: ниже 5 вольт – 0, выше – 1, или 1 – это наличие импульса тока, а 0 – его отсутствие.

В любом случае имеем два состояния классического бита –  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ . Однако в данный момент времени  $t$  бит (значение разряда ячейки памяти) находится лишь о одном из этих состояний. Действуют законы классической физики.

В случае кубита, который физически реализуется на уровне атомной физики, следует использовать законы квантовой физики. Это означает, что мы не можем уже сказать, что в момент времени  $t$  он находится *либо* в состоянии  $|0\rangle$ , *либо* в

состоянии  $|1\rangle$ . Он, пока мы не начнём *измерять, определять* его состояние, находится в состоянии *когерентной суперпозиции*, которое символически запишем в виде

$$|q\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle, \quad (3.4)$$

обоих возможных *базисных* состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ .

До измерения кубит может находиться в бесчисленном числе состояний; путем измерения из него можно извлечь только один классический бит информации. Измерение кубита заменяет его состояние на базисное.

Аналогично регистр, состоящий из  $m$  кубитов, будет находиться, как уже говорилось выше в § 3.1.2, в *когерентной суперпозиции* всех базисных состояний

$$|x\rangle = \sum_{n=0}^{2^m-1} c_n |n\rangle \equiv \sum_{n=0}^{2^m-1} c_n \underbrace{|n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle}_m.$$

### 3.1.4. Работа процессора

Процессор служит главным образом для того, чтобы менять состояние регистров. Делается это посредством физического воздействия на кубиты, которые в результате меняют свое состояние.

Например, если регистр состоит из  $m$  кубитов, а кубит представляет собой атом, то регистр – это квантовая система из  $m$  атомов. Воздействие на эту систему осуществляется с помощью специально подобранных импульсов лазеров. Лазерные импульсы влияют на электронные состояния атомов, и начальная когерентная суперпозиция развивается в другую. Происходит изменение состояния регистра.

Лазерными импульсами управляет уже классический компьютер, входящий в состав того устройства, которое мы называли квантовым компьютером.

### 3.1.5. Вычисления

Квантовые вычисления отвечают законам эволюции состояний  $|x(t)\rangle$  квантовой механики и, следовательно, описываются решениями уравнения Шрёдингера (2.11) с *гамильтонианом*  $\hat{H}$ , отвечающим типу данного квантового алгоритма. Уравнение Шрёдингера обратимо во времени, поэтому вычисления и не сопровождаются потерей информации.

Обозначим через  $|x(t)\rangle$  состояние регистра в момент дискретного времени  $t$ . Тогда конкретное квантовое вычисление имеет вид

$$|x(t+1)\rangle = \hat{U}|x(t)\rangle,$$

где  $\hat{U}$  – преобразование состояния  $|x(t)\rangle$ .

В соответствии с Принципом 3 квантовой механики

$$\hat{U}|x(t)\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_{\alpha}\hat{U}|\alpha\rangle.$$

Поэтому применительно к состоянию вида (3.3) квантовое вычисление принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{U}|\psi\rangle = c_1\hat{U}|\underbrace{01001011100011\dots}_m\rangle + \\ + c_2\hat{U}|\underbrace{11001011100011\dots}_m\rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эта формула говорит о том, что на данном такте происходит не только изменения конкретного  $m$ -кубитового состояния  $|\underbrace{01001011100011\dots}_m\rangle$ , но *параллельно* и всех других, число которых равно  $2^m$ . Причем делается это вычисление в один шаг! Классическому компьютеру для изменения  $2^m$   $m$ -битовых состояний потребовалось гораздо большее число шагов вычислений.

Способность квантового компьютера обрабатывать информацию параллельно колоссально ускоряет вычисления:

- «Если бы в нашем распоряжении были только классические компьютеры, каждый из которых работает с двоичными числами длины  $N$ , то для одновременной обработки  $2^N$  таких чисел было бы необходимо  $2^N$  компьютеров. Если же мы сумели построить квантовый компьютер, содержащий  $N$  кубитов, то один (!!!) этот компьютер одновременно обрабатывает все  $2^N$  чисел.

Если, скажем,  $N = 100$ , то мы получаем выигрыш в  $2^{100}$  раз, что примерно равно миллиону» [29, с.115-116].

- «Например, квантовый компьютер, оперирующий с 200 кубитами, может достичь такого же эффекта при разложении 400-разрядного числа на простые множители (это важная задача криптографии), как 2200 одновременных вычислений с классическими битами. Невозможно представить себе обычный компьютер с таким количеством процессоров. Специалисты говорят по этому поводу, что квантовый компьютер может производить подобные вычисления экспоненциально быстрее, чем лучшие из известных в настоящее время классических алгоритмов».

«Квантовый компьютер заменил последовательный перебор вариантов на единовременное измерение, которое даст результат, недостижимый в принципе дедуктивными методами» [10].

### 3.1.6. Квантовые логические элементы – гейты (вентили)

Классические логические элементы представляют собой с точки зрения математики простейшие преобразования, совершаемые над битами, т.е. они преобразуют поступающие на вход элемента 0 и 1, или с учетом наших обозначений  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , в них сами. Например, логический элемент «НЕ» можно представить как преобразование  $\widehat{NOT}$  вида

$$\widehat{NOT}|0\rangle = |1\rangle, \quad \widehat{NOT}|1\rangle = |0\rangle.$$

Теперь по аналогии можно представить *квантовые логические элементы* как простые преобразования кубитов. Другие названия для квантовых логических элементов : *гейты, вентили*.

В качестве примера рассмотрим так называемое преобразование Адамара  $\widehat{H}$ , которое действует на кубит следующим образом:

$$\begin{aligned}\widehat{H}|q\rangle &= \widehat{H}(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = \\ &= c_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + c_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Поскольку кубит (3.4) с точки зрения линейной алгебры представляет собой вектор, разложенный по двум базисным  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , то квантовый логический элемент является просто линейным преобразованием в этом двумерном векторном пространстве. Именно в таком направлении и был реализован фон Нейманом математический аппарат квантовой механики. Этот аппарат излагается в следующей главе 4.

В отличие от классического компьютера, где элементная база основывается всего на двух логических элементах, например на «НЕ» и «исключающее ИЛИ-НЕ», в теории квантового компьютера существует бесконечное количество (однокубитовых) логических элементов. Ниже в § 3.2 мы подробно рассмотрим логический элемент – гейт « $\sqrt{\text{НЕ}}$ », а здесь приведем два гейта, для которых использованы обозначения гл. 4:

$$\widehat{NOT} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

– гейт «НЕ» и

$$\widehat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|]$$

– гейт Адамара.

Доказано, что квантовый компьютер может быть построен всего из двух логических элементов: однокубитового  $\widehat{Q}(\theta, \varphi)$  и 2-кубитового « $C\widehat{NOT}$ » (управляемое НЕ).

Опишем гейт « $\widehat{CNOT}$ ». Достаточно показать, как он действует на базисные векторы:

$$\begin{aligned}\widehat{CNOT}(|00\rangle) &= |00\rangle, & \widehat{CNOT}(|01\rangle) &= |01\rangle, \\ \widehat{CNOT}(|10\rangle) &= |11\rangle, & \widehat{CNOT}(|11\rangle) &= |10\rangle.\end{aligned}$$

### 3.1.7. Подавление эффектов декогерентизации

Для нормальной работы квантового компьютера необходимо обеспечить максимальное подавление эффектов *декогерентизации* квантовых состояний, обусловленное взаимодействием системы кубитов с окружающей средой, что приводит к разрушению суперпозиций квантовых состояний и может сделать невозможной выполнение квантовых алгоритмов.

Время декогерентизации должно по крайней мере в 104 раза превышать время выполнения основных квантовых операций (времени такта). Для этого система кубитов должна быть достаточно слабо связана с окружением.

## 3.2. Неклассический логический элемент $\sqrt{NE}$

Убедимся, что, оставаясь в рамках действительного анализа, нельзя построить<sup>2</sup> логический элемент « $\sqrt{NE}$ » такой, для которого

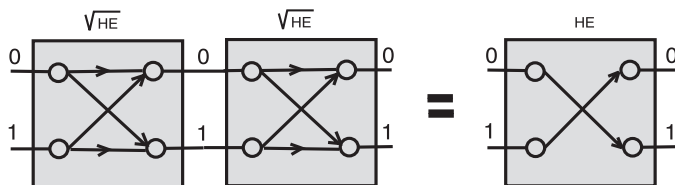
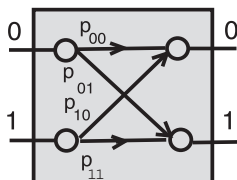
$$\sqrt{NE} \cdot \sqrt{NE} = NE. \quad (3.7)$$

Если бы формула (3.7) была справедлива, то соответствующая техническая схема имела вид, данный на рис.3.1

Предположим для большей общности, что переходы  $0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$  для элемента вида рис. 3.2, к которому принадлежит и элемент  $\sqrt{NE}$ , могут быть не только строго заданными, детерминистскими, но и *вероятностными*, т.е.

<sup>2</sup>При написании этого параграфа использовалась статья Д. Дойча и соавторов [59].



Рис. 3.1: Два элемента  $\sqrt{\text{НЕ}}$  дают элемент «НЕ» [59]Рис. 3.2: Логический элемент с вероятностями  $p_{ij}$  переходов  $i \rightarrow j$  [59]

происходить с той или иной вероятностью  $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$  соответственно. Для детерминистского элемента НЕ очевидно, что  $p_{00} = 0, p_{11} = 0, p_{01} = 1, p_{10} = 1$ .

Тогда для схемы рис. 3.1 имеем в соответствии с правилами теории вероятностей

$$p_{00}p_{00} + p_{01}p_{10} = 0, \quad p_{11}p_{11} + p_{10}p_{01} = 0, \quad (3.8)$$

$$p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} = 1, \quad p_{11}p_{10} + p_{10}p_{00} = 1. \quad (3.9)$$

Поскольку вероятности всегда неотрицательны, то из первых двух равенств (3.8) получаем:  $p_{00}p_{00} = 0, p_{01}p_{10} = 0, p_{11}p_{11} = 0, p_{10}p_{01} = 0$ . Отсюда следует, что  $p_{00} = 0, p_{11} = 0$  и  $p_{01} = 0 \vee p_{10} = 0$ .

Равенства (3.9) в таком случае сводятся к  $0 = 1$ . Другими словами, схема рис. 3.1 нереализуема в предположении о неотрицательности чисел  $p_{ij}$ . Следовательно, необходимо либо допустить, что существуют отрицательные вероятности, но это было бы слишком радикально, либо сохранить теорию вероятностей в неизменном виде, но отказаться от мысли, что числа

$p_{ij}$  являются вероятностями переходов между состояниями 0 и 1.

Выход подсказывает квантовая механика, где кроме понятия «вероятность» существует понятие «амплитуда вероятности»! Под амплитудой вероятности перехода  $i \rightarrow j$  физики подразумевают *комплексное число*  $c_{ij}$ , квадрат модуля которого  $|c_{ij}|^2$  дает вероятность перехода  $p_{ij}$ , т.е.

$$p_{ij} = |c_{ij}|^2. \quad (3.10)$$

Таким образом, если на рис.3.2 заменить  $p_{ij}$  на комплексные числа  $c_{ij}$ , то вместо уравнений (3.8), (3.9) следует рассмотреть уравнения

$$\begin{aligned} P(0 \rightarrow 0) &= |c_{00}c_{00} + c_{01}c_{10}|^2 = 0, \\ P(1 \rightarrow 1) &= |c_{11}c_{11} + c_{10}c_{01}|^2 = 0, \\ P(0 \rightarrow 1) &= |c_{00}c_{01} + c_{01}c_{11}|^2 = 1, \\ P(1 \rightarrow 0) &= |c_{11}c_{10} + c_{10}c_{00}|^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Эти уравнения имеют, например, следующее решение:  $c_{00} = c_{11} = i/\sqrt{2}$ ,  $c_{01} = c_{10} = 1/\sqrt{2}$ .

Итак, комплексные числа открывают новые возможности в конструировании ранее неизвестных логических элементов для компьютеров. Однако эти логические элементы не являются уже классическими, и для их создания нужно привлекать уже не классическую механику, а квантовую. Поэтому компьютер на новых логических элементах будет использовать в своей работе принципы квантовой механики, и называть его следуют *квантовым компьютером*.

### 3.2.1. Пример квантовых параллельных вычислений с помощью гейта $\sqrt{\text{НЕ}}$

Решение  $c_{00} = c_{11} = i/\sqrt{2}$ ,  $c_{01} = c_{10} = 1/\sqrt{2}$  уравнения (3.11) не является единственным. Можно рассмотреть следующее решение:  $c'_{00} = c'_{11} = i\sqrt{2}$ ,  $c'_{01} = e^{i\alpha}/\sqrt{2}$ ,  $c'_{10} = e^{-i\alpha}/\sqrt{2}$ .

Иначе говоря, мы можем у амплитуд вероятности менять аргумент или, как говорят физики, *фазу*, и это не отражается, как мы видим, на вероятностях изучаемых переходов, связанных со схемой 3.1.

Произвольность фазы у амплитуды вероятности, т.е. возможность умножения амплитуды вероятности на произвольный фазовый множитель вида  $e^{i\alpha}$ , обусловлена формулой (3.10), поскольку, как из нее следует, замена  $c_{ij}$  на  $c_{ij}e^{i\alpha}$  не отражается на вероятности перехода  $i \rightarrow j$ .

Однако на языке квантовой механики изменение фазы может привести к явлению *интерференции*<sup>3</sup>, и это имеет важные последствия для *квантовых вычислений*. Ведь именно выбор конкретных значений фаз для двух различных путей  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  прохождения сигнала на схеме, изображенной на рис.3.1, из 0 в 0 дает для них

$$c_{00}c_{00} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \quad c_{01}c_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

что приводит к суммарному эффекту «сложения» двух путей –  $P(0 \rightarrow 0) = 0$ .

Дойч продемонстрировал, что учет квантовой интерференции приводит к существенному уменьшению числа вычислений, которые необходимо проделать при решении задач на компьютере. Приведем пример сокращения вычислений за счет интерференции [59], принадлежащий Дойчу.

Рассмотрим отображения вида  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Существует ровно четыре различных отображения данного вида. Два из них назовем постоянными: для одного  $f(0) = f(1) = 0$ , для второго –  $f(0) = f(1) = 1$ . Предположим, что дается возможность произвести только одно вычисление для того, чтобы убедиться, является ли данная функция  $f$  постоянной. С точки зрения классических вычислений одного вычисления мало! Нужно сделать два вычисления: вычислить  $f(0)$  и  $f(1)$ .

На рис.3.3 приводится схема, состоящая из двух элементов  $\sqrt{\text{НЕ}}$  и элемента, меняющего фазу.

<sup>3</sup>Подробнее об интерференции было рассказано в § 2.2.2 (Принцип 2).

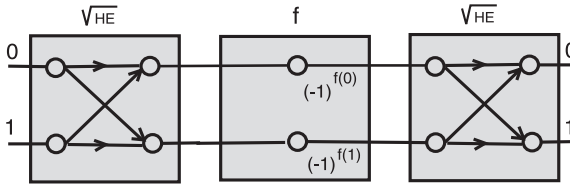


Рис. 3.3: Схема решения проблемы Дойча [59]

Вычисление  $0 \rightarrow 0$  идет по двум путям через элемент  $f$ . При верхнем пути амплитуда вероятности умножается на фазовый множитель  $(-1)^{f(0)}$ ; в случае нижнего пути – на  $(-1)^{f(1)}$ .

Полная амплитуда вероятности складывается из амплитуд вероятности каждого пути:  $i/\sqrt{2} \times (-1)^{f(0)} \times i/\sqrt{2} = -1/2 \times (-1)^{f(0)}$  и  $1/\sqrt{2} \times (-1)^{f(1)} \times 1/\sqrt{2} = 1/2 \times (-1)^{f(1)}$ . Сумма равна

$$\frac{1}{2} \left( (-1)^{f(1)} - (-1)^{f(0)} \right). \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) принимает значение 0 для постоянной функции и значения  $\pm 1$  для прочих. Соответственно вероятность перехода  $0 \rightarrow 0$  равна 0 для постоянных функций и 1 для других.

Вычисление сделано в один шаг! Продемонстрированный квантовый алгоритм вычисления показывает будущие возможности квантовых компьютеров.

«Квантовые вычисления можно свести к «распараллеливанию» одного алгоритма на множество субпроцессов, которые все вычисляются одновременно» [10]. Однако получаемый на выходе результат – это интерференция результатов параллельных вычислений (субпроцессов) [6, с.13]

### 3.3. Юрий Манин

Манин Юрий Иванович родился 16 февраля 1937 г. в Симферополе. Специалист в области алгебраической геометрии и

теории чисел.

Ю.И. Манин окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и с 1960 года работает в Математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова. С 1965 года он по совместительству профессор математики в МГУ.

Ю.И. Манин – автор или соавтор десяти монографий и около 180 статей по алгебраической геометрии, теории чисел, математической физике, истории культуры, психолингвистике. Его работы отмечены двумя премиями (Московского математического общества в 1963 году и Ленинской премией в 1967 году) и двумя международными медалями.

С 1990 года он – член-корреспондент АН СССР (РАН). Он также является членом ряда зарубежных академий (Голландской, Европейской, Геттингенской, Ватиканской), членом Общества Макса Планка и почётным профессором Боннского университета. В настоящее время он работает директором Института математики имени Макса Планка в Бонне, продолжая оставаться в штате Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.



Рис. 3.4: Ю.И. Манин

В 1980 году в своей книге «Вычислимое и невычислимое» Манин писал:

«Возможно  $\langle \dots \rangle$  нам недостаёт математической теории квантовых автоматов. Такие объекты могли бы показать нам математические модели детерминированных процессов с совершенно непривычными свойствами. Одна из причин этого в том, что квантовое пространство состояний обладает гораздо большей ёмкостью, чем классическое: там, где в классике имеется  $N$  дискретных состояний, в кван-

товой теории, допускающей их суперпозицию, имеется  $c^N$  планковских ячеек. При объединении классических систем их числа состояний  $N_1$  и  $N_2$  перемножаются, а в квантовом варианте получается  $c^{N_1 N_2}$ .

Эти грубые подсчеты показывают гораздо большую потенциальную сложность квантового поведения системы по сравнению с его классической имитацией  $\langle \dots \rangle$ .

Первая трудность при проведении этой программы состоит в выборе правильного баланса между математическими и физическими принципами. Квантовый автомат должен быть абстрактным: его математическая модель должна использовать лишь самые общие квантовые принципы, не предрешая физических реализаций. Тогда модель эволюции есть унитарное вращение в конечномерном гильбертовом пространстве, а модель виртуального разделения на подсистемы отвечает разложению пространства в тензорное произведение. Где-то в этой картине должно найти место взаимодействие, описываемое по традиции эрмитовыми операторами и вероятностями» [25, с.15].

## Глава 4

# Математические ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Для того чтобы лучше и более глубоко понимать содержание следующих глав, полезно ознакомиться с традиционным математическим аппаратом квантовой механикой. Ниже излагаются элементы теории гильбертовых пространств, теории линейных операторов и квантовой механики.

### 4.1. Гильбертово пространство

*Унитарное пространство* – это векторное пространство  $\mathcal{U}$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , снабженное скалярным произведением  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , удовлетворяющим следующим аксиомам:

- 1)  $\langle x|x \rangle \geq 0$ ;  $\langle x|x \rangle = 0 \iff |x \rangle = 0$ ;
- 2)  $\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$ ;
- 3)  $\langle ax + by|z \rangle = \bar{a}\langle x|z \rangle + \bar{b}\langle y, z \rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Векторы пространства  $\mathcal{U}$  мы обозначаем, следуя Дираку, как  $|x\rangle, |y\rangle, \dots$

С помощью скалярного произведения определяется *норма*  $\| |x\rangle \|$  вектора  $|x\rangle$ :

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Пространство  $\mathcal{U}$  называется *полным*, если всякая последовательность Коши  $\{|x_n\rangle\} \subset \mathcal{U}$  сходится, т.е.

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \| |x_n\rangle - |x_m\rangle \| = 0 \implies \exists |x\rangle (\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n\rangle = |x\rangle).$$

*Гильбертово пространство*  $\mathcal{H}$  – это полное унитарное пространство.

Размерность векторного пространства  $\mathcal{H}$  является *размерностью* пространства  $\mathcal{H}$  как гильбертова пространства и обозначается  $\dim \mathcal{H}$ . Размерность может быть конечной или бесконечной. В последнем случае пишут  $\dim \mathcal{H} = \infty$ .

Пусть  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$  – базис пространства  $\mathcal{H}$ . Тогда любой вектор  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  может быть единственным образом разложен по базисным векторам, т.е.

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |e_k\rangle, \quad (4.1)$$

где  $c_k \in \mathbb{C}$  – комплексные коэффициенты разложения.

Если базис *ортонормированный*, т.е.  $\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk}$ , то, умножая скалярно (4.1) на  $|e_j\rangle$ , найдем, что  $c_j = \langle e_j | x \rangle$ . Следовательно, (4.1) можно переписать в виде

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |e_k\rangle \langle e_k | x \rangle. \quad (4.2)$$

Формулы (4.1), (4.2) – это формулы (2.6), (2.7), предложенные при «наивном» изложении квантовой механики.



## 4.2. Бра- и кет-векторы

Векторы пространства  $\mathcal{H}$ , записываемые в виде  $|x\rangle$ , Дирак называл *кет-векторами*.

Можно ввести векторы другого сорта – *бра-векторы* вида  $\langle x|$ . Их также можно складывать, умножать на комплексные числа и раскладывать по базисным векторам. Иначе говоря, это элементы гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , но иной природы; они происходят от *линейных функционалов*, задаваемых на пространстве  $\mathcal{H}$ . Однако благодаря теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве, линейные функционалы отождествили с векторами, а в память об их славном прошлом им дали особую форму записи  $\langle x|$  и новое название – бра-векторы.

Связь между бра-вектором и кет-вектором выражается в том, что, будучи написанные рядом (бра-вектор воздействует на кет-вектор), они представляют скалярное произведение. Другими словами,

$$\langle y||x\rangle \equiv \langle y|x\rangle$$

– это скалярное произведение кет-вектора  $|y\rangle$  на кет-вектор  $|x\rangle$ .

Более того, если дан кет-вектор  $|x\rangle$ , разложенный по базису в виде (4.1), то ему однозначно отвечает бра-вектор  $\langle y|$ , который раскладывается по базису бра-векторов  $\langle e_1|, \langle e_2|, \dots$

$$\langle y| = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \langle e_k|. \quad (4.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle y|x\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \bar{c}_j \langle e_j| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k |e_k\rangle = \sum_{j,k=1}^{\infty} \bar{c}_j c_k \langle e_j|e_k\rangle = \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \bar{c}_j c_k \delta_{jk} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned}$$

в предположении *двойственности* базисов  $\{|e_j\rangle\}$  и  $\{|e_k\rangle\}$ , т.е. при условии

$$\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk}.$$

По аналогии с (4.2) находим  $\tilde{c}_k = \langle y | e_k \rangle$  и

$$\langle y | = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y | e_k \rangle \langle e_k |. \quad (4.4)$$

Если теперь взять кет-вектор

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |e_k\rangle \langle e_k | x \rangle, \quad (4.5)$$

то из (4.4) и (4.5) получаем

$$\langle y | x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y | e_k \rangle \langle e_k | x \rangle. \quad (4.6)$$

Эта формула имеет замечательную трактовку в рамках квантовой механики, о чем говорилось выше в § 2.2.2 (Принцип 2, формулы (2.2), (2.5)).

### 4.3. Линейные операторы

*Линейным оператором* в пространстве  $\mathcal{H}$  называется отображение  $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  такое, что

$$\hat{A}(a|x\rangle + b|x\rangle) = a\hat{A}(|x\rangle) + b\hat{A}(|x\rangle), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Для линейного оператора вместо  $\hat{A}(|x\rangle)$  пишут  $\hat{A}|x\rangle$ . Далее мы будем рассматривать только линейные операторы, поэтому слово «линейный» будем опускать.

*Единичный* (тождественный) оператор  $\hat{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  определяется с помощью равенства:  $\hat{I}|x\rangle = |x\rangle$ ,  $|x\rangle \in \mathcal{H}$ .

Нулевой оператор  $0 = \widehat{0} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  определяется с помощью равенства:  $0|x\rangle = 0$ ,  $|x\rangle \in \mathcal{H}$ .

Оператор  $\widehat{A}$  называется *эрмитовым*, если

$$\langle \widehat{A}x|x\rangle = \langle x|\widehat{A}x\rangle.$$

**Теорема 4.1.** *Собственное число  $\lambda$  эрмитова оператора  $\widehat{A}$ , т.е. число, удовлетворяющее уравнению*

$$\widehat{A}|x\rangle = \lambda|x\rangle, \quad (4.7)$$

*является действительным.*

Вектор  $|x\rangle$  в уравнении (4.7) называется *собственным*.

Оператор  $\widehat{U}$  – *унитарный*, если

$$\langle \widehat{U}x|\widehat{U}y\rangle = \langle x|y\rangle.$$

Унитарные операторы формализуют то, что называется в теории квантовых компьютеров *квантовыми логическими элементами, гейтами или вентилями* (см. § 3.1.6).

**Теорема 4.2.** *Если  $\widehat{A}$  эрмитовый оператор, то оператор*

$$\widehat{U} = e^{i\beta\widehat{A}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^k}{k!} \widehat{A}^k, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \widehat{A}^0 \equiv \widehat{I},$$

*является унитарным.*

Часто операторы задаются в форме комбинации бра- и кет-векторов. Например, возможно такое представление оператора

$$\widehat{P} = |a\rangle\langle b|,$$

действующий на вектор  $|x\rangle$  по формуле

$$\widehat{P}|x\rangle = |a\rangle\langle b|x\rangle.$$

Рассмотрим другой оператор

$$\widehat{A} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

в двумерном пространстве  $\mathcal{H}$  с ортонормированным базисом  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Его действие на вектор

$$|x\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$$

происходит следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{A}|x\rangle &= \widehat{A}(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = c_1\widehat{A}|0\rangle + c_2\widehat{A}|1\rangle = \\ &= c_1(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)|0\rangle + c_2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)|1\rangle = \\ &= c_1(|0\rangle\langle 0|0\rangle + |1\rangle\langle 1|0\rangle) + c_2(|0\rangle\langle 0|1\rangle + |1\rangle\langle 1|1\rangle) = \\ &= c_1|0\rangle + c_2|1\rangle = |x\rangle, \end{aligned}$$

поскольку

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \quad \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0.$$

### 4.3.1. Подпространства. Операторы проектирования

Пусть дано подмножество  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$  пространства  $\mathcal{H}$ . Оно называется *подпространством*, если его векторы сами образуют векторное пространство. Подпространство  $\mathcal{G}$  *замкнутое*<sup>1</sup>, если предел любой его сходящейся последовательности  $\{|x_n\rangle\}$  принадлежит  $\mathcal{G}$ .

Подпространства  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  *ортгоналичны*, если для любых  $|x\rangle \in \mathcal{G}_2$ ,  $|y\rangle \in \mathcal{G}_1$  имеем  $\langle x|y\rangle = 0$ .

*Ортгоналичное дополнение* к подпространству  $\mathcal{G}$  — это подпространство  $\mathcal{G}_\perp$  такое, что они ортгоналичны и для всякого  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  существуют единственные векторы  $|a_x\rangle \in \mathcal{G}$ ,  $|a_x^\perp\rangle \in \mathcal{G}_\perp$  такие, что

$$|x\rangle = |a_x\rangle + |a_x^\perp\rangle.$$

<sup>1</sup>Конечномерные подпространства всегда являются замкнутыми.

В таком случае пишем, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_\perp.$$

*Оператор проектирования*, или *проектор*, на подпространство  $\mathcal{G}$  – это линейный оператор  $\hat{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  такой, что

$$\hat{P}|x\rangle = |a_x\rangle.$$

Вместо  $\hat{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  часто пишут  $\hat{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Нетрудно убедиться, что оператор проектирования является эрмитовым и

$$\hat{P}^2 = \hat{P}.$$

Если  $|a_1\rangle, \dots, |a_m\rangle$  – ортонормированный базис подпространства  $\mathcal{G}$ , то оператор

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^m |a_j\rangle\langle a_j|$$

является оператором проектирования на  $\mathcal{G}$ .

Говорят, что  $\mathcal{H}$  *разложено в прямую сумму* взаимно ортогональных подпространств  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n, \dots$ , т.е. символически это записывается в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_n \oplus \dots,$$

если для любого  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  существуют единственные  $|x_j\rangle \in \mathcal{G}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  такие, что

$$|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + \dots + |x_n\rangle + \dots$$

Если  $\hat{P}_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}_j$   $j = 1, 2, \dots$  – оператор проектирования, то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{P}_j = \hat{I}.$$

## 4.4. Постулаты квантовой механики

Согласно современным воззрениям физиков, окружающий нас мир должен описываться и пониматься в рамках законов *квантовой механики*. Эта механика в 20-е годы XX века пришла на смену классической механике, созданной в XVII-XVIII веках усилиями Галилея и Ньютона.

Существует несколько различных способов изложения основ квантовой механики. Однако применительно к теории квантовых вычислений и квантовых компьютеров более приемлемым кажется язык Поля Дирака [14].

Квантовая механика изучает *физическую систему*, которая в данный момент времени может находиться в некотором *состоянии*  $|x\rangle$  из множества  $\mathcal{H}$  всех (допустимых) возможных *состояний*. Физические параметры, которые имеет физическая система и которые могут быть измерены в результате некоторого наблюдения  $A$ , – это действительные числа, являющиеся собственными числами некоторого эрмитового оператора  $\hat{A}$ .

**Постулат 1.** *Множество состояний физической системы образуют гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ . Вектор  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  называется вектором состояния, или волновой функцией.*

**Постулат 2.** *Вектор состояния физической системы  $|\psi(t)\rangle$  подчиняется уравнению Шрёдингера*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (4.8)$$

где  $\hat{H}$  – гамильтониан – эрмитовый оператор, характеризующий изучаемую физическую систему, а  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·сек – постоянная Планка.

Эволюция физической системы, т.е. принимаемые ею состояния в будущем, как следует из уравнения (4.8), может

быть выражена в следующем виде<sup>2</sup>

$$|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\psi(0)\rangle,$$

где

$$\widehat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}$$

– унитарный<sup>3</sup> оператор эволюции.

**Постулат 3.** *Наблюдаемая физическая величина  $A$  – это эрмитов оператор  $\widehat{A}$ .*

**Постулат 4.** *Пусть  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle, \dots$  – собственные векторы наблюдаемой величины  $\widehat{A}$ , образующие базис пространства состояний  $\mathcal{H}$ , а физическая система описывается вектором состояния*

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\psi_k\rangle. \quad (4.9)$$

Тогда  $|c_k|^2$  – вероятность того, что физическая система при измерении величины  $\widehat{A}$  окажется в состоянии  $|\psi_k\rangle$ . При этом наблюдаемая величина  $\widehat{A}$  принимает значение  $a_k$ , где  $a_k$  собственное значение оператора  $\widehat{A}$ :

$$\widehat{A}|\psi_k\rangle = a_k|\psi_k\rangle.$$

Комплексные числа  $c_k$  в разложении (4.9) называют *амплитудами вероятности*.

---

<sup>2</sup>Пусть  $\widehat{H}$  не зависит от времени. Имеем цепочку формальных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{d|\psi\rangle}{|\psi\rangle} &= -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}dt, \\ \ln |\psi(t)\rangle|_0^t &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{H}dt = -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t, \\ |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}|\psi(0)\rangle. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>См. теорему 4.2.

Формула (4.9) говорит о том, что система может (до измерения) находиться в данный момент времени  $t$  сразу во всех состояниях  $|\psi_k\rangle$ . Иначе говоря, данное состояние системы  $|\psi\rangle$ , называемое *когерентной суперпозицией*, не является точно определённым; квантовая система – вещь в себе, она не нуждается в самоопределении, уточнении своего состояния.

Для точного определения состояния системы необходим Наблюдатель, т.е. человек, наблюдающий за системой. Для того чтобы узнать, каково состояние системы, производится *измерение*.

**Постулат 5.** Пусть физическая система описывается соотношением (4.9). При измерении физической величины  $\hat{A}$  происходит выделение вполне определенного состояния  $|\psi_{k_0}\rangle$ , в котором она будет наблюдаться с вероятностью  $|c_{k_0}|^2$ .

Процедура скачкообразного перехода

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_{k_0}\rangle,$$

данная Постулатом 5, называется *редукцией (коллапсом) волновой функции*. Она не может быть описана как непрерывная эволюция, описываемая уравнением Шрёдингера.

Формально физическая процедура измерения заключается в применении оператора *проектирования*, имеющего вид

$$\hat{P}_{k_0} = |\psi_{k_0}\rangle\langle\psi_{k_0}| : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

к состоянию (4.9):

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k_0}|\psi\rangle &= |\psi_{k_0}\rangle\langle\psi_{k_0}| \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\psi_k\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\psi_{k_0}\rangle\langle\psi_{k_0}|\psi_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\psi_{k_0}\rangle \delta_{k_0 k} = c_{k_0} |\psi_{k_0}\rangle. \end{aligned}$$

Запишем амплитуду вероятности в виде

$$c_k = |c_k| e^{i\phi_k}, \quad \phi_k = \arg c_k.$$



Смысл  $|c_k|$ , а точнее  $|c_k|^2$ , был разъяснен выше. Фазы амплитуд вероятностей, т.е. действительные числа  $\phi_k$ , описывают *интерференцию* между различными состояниями физической системы, которая говорит об особой *квантовой связи* между ними и оказывается очень полезной при организации *квантовых вычислений* на *квантовых компьютерах*. Но об этом уже говорилось.

#### 4.4.1. Измерение: случай вырожденных собственных значений

Собственное значение  $a_k$  наблюдаемой величины  $\hat{A}$  может быть *вырожденным*, т.е. может существовать конечное число различных линейно независимых векторов  $|\psi_{k_i}\rangle, i = 1, \dots, g_k$  таких, что

$$\hat{A}|\psi_{k_i}\rangle = a_k|\psi_{k_i}\rangle, \quad i = 1, \dots, g_k.$$

Векторы  $|\psi_{k_i}\rangle, i = 1, \dots, g_k$ , образуют замкнутое линейное подпространство  $\mathcal{H}_{a_k}$  гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . Число  $g_k$  – степень вырождения собственного числа  $a_k$ . Ясно,  $g_k = \dim \mathcal{H}_{a_k}$ .

Измерение значения  $a_k$  в случае его вырождения можно описать как оператор проектирования

$$\hat{P}_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{a_k}. \quad (4.10)$$

Формулу (4.9) с учетом вырождений надо переписать в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_k} c_{k_i} |\psi_{k_i}\rangle. \quad (4.11)$$

При измерении происходит коллапс состояния (4.11) и система переходит в состояние, являющееся вектором подпространства  $\mathcal{H}_{k_0}$ . Для наблюдаемой величины  $\hat{A}$  будет измерено значение  $a_{k_0}$ .

Если наблюдаемая величина  $\hat{A}$  имеет *дискретный спектр* собственных значений  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  и  $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_n, \dots$  соот-

ветствующие им операторы проектирования (4.10), то справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n = \hat{I}. \quad (4.12)$$

В таком случае говорят, что совокупность  $\mathcal{P} = \{P_n\}$  образует *разложение единицы* в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Можем написать, что

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{P}_n. \quad (4.13)$$

Из этого соотношения видно, что физическая наблюдаемая величина  $\hat{A}$  полностью определяется набором своих собственных значений и совокупностью  $\mathcal{P} = \{\hat{P}_n\}$  операторов проектирования на подпространства  $\mathcal{H}_{a_n}$ .

Кроме (4.12) имеют место также следующие соотношения:

$$\hat{P}_n \geq 0, \quad (4.14)$$

т.е.

$$\forall |x\rangle (\langle x | \hat{P}_n | x \rangle \geq 0),$$

и

$$\hat{P}_n \hat{P}_m = 0 \quad (n \neq m). \quad (4.15)$$

Последнее означает ортогональность подпространств  $\mathcal{H}_{a_n}$  и  $\mathcal{H}_{a_m}$ , т.е. если  $|x\rangle \in \mathcal{H}_{a_n}$ ,  $|y\rangle \in \mathcal{H}_{a_m}$ , то  $\langle x | y \rangle = 0$ .

Из (4.12), (4.15) следует, что имеет место *разложение пространства  $\mathcal{H}$  в виде прямой суммы своих подпространств*:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{a_1} \oplus \mathcal{H}_{a_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{a_n} \oplus \dots$$

## 4.5. Тензорное произведение

Пусть даны два гильбертовых пространства  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$ , пусть  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots\}$  и  $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \dots\}$  их базисы, наконец,

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |e_k\rangle \in \mathcal{H}, \quad |u\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k |f_k\rangle \in \mathcal{G}. \quad (4.16)$$

*Тензорным произведением* пространств  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  называется пространство, обозначаемое как  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ , базис в котором имеет вид

$$|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

и, следовательно, векторы которого могут быть представлены в виде записи

$$\sum_{i=1, k=1}^{\infty} \gamma_{ik} (|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle).$$

В частности, *тензорное произведение* векторов (4.16), т.е.

$$|x\rangle \otimes |u\rangle = \sum_{i=1, k=1}^{\infty} \alpha_i \beta_k (|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle),$$

является вектором пространства  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ .

Таким образом, мы имеем операцию  $\otimes$  на векторах, обладающую свойствами:

- 1)  $(|x\rangle + |y\rangle) \otimes |u\rangle = |x\rangle \otimes |u\rangle + |y\rangle \otimes |u\rangle$ ;
- 2)  $(\lambda|x\rangle) \otimes (\mu|u\rangle) = \lambda\mu(|x\rangle \otimes |u\rangle)$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

Вектор  $|x\rangle \otimes |u\rangle$  удобно записывать в более сокращенном виде

$$|xu\rangle.$$

Скалярное произведение на  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$  вводится следующим образом:

$$\langle xu|yv\rangle = \langle x|y\rangle \langle u|v\rangle.$$

*Тензорное произведение используется для описания сложной (составной) системы, состоящей из двух подсистем. Состояния  $|x\rangle$  одной подсистемы берутся в пространстве  $\mathcal{H}$ , а состояния  $|u\rangle$  другой – в пространстве  $\mathcal{G}$ . Следовательно, состояния сложной (составной) системы описываются векторами  $|xu\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ .*

### 4.5.1. Линейные операторы (гейты) в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Пусть  $\widehat{A}_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$  оператор в пространстве  $\mathcal{H}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда строится оператор  $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2 : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , действующий покомпонентно, т.е.

$$(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2)(|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle) = \widehat{A}_1|x_1\rangle \otimes \widehat{A}_2|x_2\rangle$$

или в других обозначениях

$$(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2)|x_1x_2\rangle = |\widehat{A}_1|x_1\rangle\widehat{A}_2|x_2\rangle\rangle.$$

### 4.5.2. Пример. Гейт управляемого смещения фазы

Пусть дано двумерное пространство  $\mathcal{H}^2$ . Его базис

$$|0\rangle, |1\rangle.$$

Тогда пространство  $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$  четырёхмерно и его базис

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle.$$

В этом базисе рассмотрим оператор (гейт), называемый гейтом управляемого смещения фазы

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Его действие на  $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$  определяется следующим образом:

$$\widehat{R}|xy\rangle = e^{ixy\phi}|xy\rangle.$$

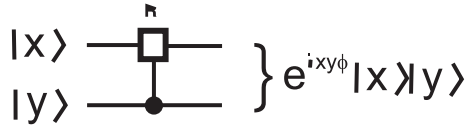


Рис. 4.1: Гейт управляемого смещения фазы. Каждая горизонтальная линия представляет эволюцию одного кубита во времени (движение слева направо). Символы, расположенные на двух линиях и соединенные вертикальным отрезком, представляют двухкубитовый гейт управляемого смещения фазы с данными двумя кубитами.

### 4.5.3. Произвольные тензорные произведения

Можно рассматривать тензорные произведения  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$  любого числа гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ . Векторы таких произведений

$$|x_1 \dots x_p\rangle = |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_p\rangle$$

называют *тензорами*, и их можно задавать в самой общей виде как формальные суммы

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} \gamma_{i_1 \dots i_p} (|e_{i_1}^1\rangle \otimes \dots \otimes |e_{i_p}^p\rangle),$$

где  $\{|e_1^k\rangle, |e_2^k\rangle, \dots\}$  – базис в пространстве  $\mathcal{H}_k$ .

Мы видим, что базис в пространстве  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$  состоит из выражений

$$|e_{i_1}^1 \dots e_{i_p}^p\rangle = |e_{i_1}^1\rangle \otimes \dots \otimes |e_{i_p}^p\rangle, \quad (4.17)$$

$$i_1 = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_1, \quad \dots, \quad i_p = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_p.$$

Он является ортонормированным, если таковыми являются базисы  $\{|e_1^k\rangle, |e_2^k\rangle, \dots\}$  в пространствах  $\mathcal{H}_k$ .

При этом скалярное произведение тензоров  $|x_1 \dots x_p\rangle$  и  $|y_1 \dots y_p\rangle$  находится следующим образом:

$$\langle x_1 \dots x_p | y_1 \dots y_p \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle \dots \langle x_p | y_p \rangle.$$

Пусть  $\hat{A}_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$  оператор в пространстве  $\mathcal{H}_i$ . Тогда строится оператор  $\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_p : \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$ , действующий покомпонентно, т.е.

$$(\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_p)(|x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_p\rangle) = \hat{A}_1|x_1\rangle \otimes \dots \otimes \hat{A}_p|x_p\rangle$$

или в других обозначениях

$$(\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_p)|x_1\dots x_p\rangle = |\hat{A}_1|x_1\rangle\dots\hat{A}_p|x_p\rangle\rangle.$$

*Тензорное произведение  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$  используется для описания состояний сложной (составной) системы, состоящей из подсистем, состояния  $|x_1\rangle, \dots, |x_p\rangle$  которых описываются в пространствах  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_1$  соответственно.*

## 4.6. Квантовые состояния

Физическая система – это материальная вещь. При её точном описании мы стараемся выдать исчерпывающий набор числовых или функциональных характеристик. С формальной стороны, *конкретный набор характеристик есть не что иное, как состояние системы.* В самом простом случае состояние физической системы – это вектор  $(s_1, s_2, \dots)$  в некотором (математическом) пространстве.

Как задается состояние квантовой системы, т.е. физической системы, изучаемой с помощью квантовой механики?

### 4.6.1. Чистые и смешанные состояния. Матрица плотности

В гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  любой вектор может являть квантовое состояние физической системы. Такие состояния, формально записываемые в виде формулы

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |e_k\rangle,$$

называют *чистыми* состояниями.

Напомним, что чистое состояние называется также *квантовой когерентной суперпозицией*.

Более общим понятием квантового состояния системы является смешанное состояние.

*Смешанное* состояние состоит из некоторого числа чистых состояний  $|x_i\rangle$ , в которых система может оказаться с вероятностью  $p_i$ ,  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_i p_i = 1$ .

В действительности эти чистые состояния трудно выявить, и для исследования смешанных систем необходимо более подходящее математическое описание, с которым можно было бы легко оперировать в математических выкладках. Таким описанием является понятие *матрицы плотности*, придуманное фон Нейманом в 1927 году.

Фон Нейман ассоциировал чистое состояние  $|x\rangle$  с оператором

$$|x\rangle\langle x|,$$

а смешанное состояние  $\{|x_i\rangle, p_i\}_{i \in I}$  с оператором

$$\sum_{i \in I} p_i |x_i\rangle\langle x_i|.$$

Затем фон Нейман изучил алгебраические свойства этих операторов и дал следующее определение смешанного состояния, которое в действительности является определением любого квантового состояния.

*Смешанное состояние* – это линейный оператор  $\hat{\rho}$  в гильбертовом пространстве, удовлетворяющий условиям:

- 1)  $\hat{\rho}$  – эрмитов оператор;
- 2) след  $Sp [\hat{\rho}] = 1$ ;
- 3)  $\langle a|\hat{\rho}|a\rangle \geq 0$  для любого вектор  $a \in \mathcal{H}$ .

Поскольку любой оператор в базисе задается матрицей, то фон Нейман назвал оператор  $\hat{\rho}$  *матрицей плотности*.

Если  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots$  – собственные векторы, а  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  – собственные числа оператора  $\hat{\rho}$ , то имеет место так называемое *спектральное разложение*:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1,$$

т.е. любое состояние есть сумма (смесь) чистых состояний.

### 4.6.2. Сцепленные (перепутанные) состояния

Вектор  $|\psi\rangle$  тензорного произведения  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$  описывает *сцепленное*, или другое используемое название – *перепутанное*,<sup>4</sup> квантовое состояние, если его нельзя представить в виде тензорного произведения чистых состояний пространств  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ , т.е.

$$|\psi\rangle \neq |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_p\rangle,$$

где  $|x_i\rangle \in \mathcal{H}_i (i = 1, \dots, p)$ .

Другими словами, *сцепленное* состояние – это состояние сложной системы, которое не может быть представлено как (простое) тензорное произведение состояний, составляющих ее подсистем<sup>5</sup>.

Пусть  $\mathcal{H}^2$  двумерное гильбертово пространство с базисом, который записан в виде  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Тогда состояние вида

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle]$$

<sup>4</sup>Перепутанное, сцепленное – различные переводы английского слова entangled.

<sup>5</sup>Сцепленность на языке волновой функции  $\psi(x_1, x_2)$ , описывающей взаимодействие с гамильтонианом

$$\hat{H}(x_1, x_2) = \hat{H}_1(x_1) + \hat{H}_2(x_2) + \hat{H}_{int}(x_1, x_2),$$

означает, что

$$\psi(x_1, x_2) \neq \psi_1(x_1) \cdot \psi_2(x_2).$$



или в другом виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle]$$

является сцепленным состоянием.

В случае сцепленного состояния «невозможно разделить систему на локальные объекты и сказать, что вот это – один объект, а вот это – другой. Всегда есть некоторая часть системы, которая принадлежит обоим объектам в равной степени. Подсистемы сцеплены, переплетены, запутаны между собой подобно сиаским близнецам и составляют единое целое, пусть даже в какой-то незначительной своей части. Описание таких систем в рамках «локальной объективной теории», которая предполагает наличие независимых объектов, становится невозможным. Точнее, классическую физику можно рассматривать как некоторое приближение при описании физической реальности, когда квантовые корреляции<sup>6</sup> незначительны по сравнению с теми классическими корреляциями, на которых мы останавливаем свое внимание, т.е. на тех физических характеристиках системы, которые характеризуют локальный объект. Например, если взять сиаских близнецов, классическая физика будет способна описать характеристики каждого из близнецов по отдельности и такое описание будет в чем-то достаточно разумным. Но при таком описании невозможно будет учесть самого главного, что такие близнецы неразрывно связаны друг с другом, пусть даже самым незначительным участком своего тела, и не могут, например, перемещаться независимо друг от друга. Хотя, согласно классическому описанию, ничто не запрещает им находиться в разных комнатах. Согласитесь, ценность такого описания сразу резко падает. В отличие от этого квантовая механика может описать объект и как единое целое, и как отдельные локальные его части. Классическое описание становится при этом частным случаем квантовомеханического описания, когда мы преднамеренно пренебрегаем отдельными свойствами всей системы

---

<sup>6</sup>Корреляция – это устоявшееся название в квантовой механике для того, что именуется связью – АГ.

как единого целого. При таком подходе мы уже будем понимать, с какой целью и для чего мы используем классический подход, не забывая о границах его применимости, и не будем легкомысленно утверждать, что такое описание дает нам исчерпывающую информацию об объекте» [16].

Сцепленность есть особая форма квантовой связи (корреляции) в составных, сложных системах. В классической механике все связи силовые, в данном случае речь идёт о несилевой связи, не имеющей классического аналога. «Она возникает в системе, состоящей из двух и более взаимодействующих подсистем (или взаимодействовавших ранее, а затем разделенных), и представляет собой суперпозицию альтернативных (взаимоисключающих с классической точки зрения) состояний, которая не может быть реализована в классической физике. Для таких систем флуктуации отдельных частей взаимосвязаны, но не посредством обычных взаимодействий путем обмена энергией (классических корреляций), ограниченных, например, скоростью света, а посредством нелокальных квантовых корреляций, когда изменение одной части системы в тот же самый момент времени, т.е. мгновенно, сказывается на остальных ее частях (даже разделенных в пространстве, в пределе и на бесконечно больших расстояниях)» [16].

### 4.6.3. Измерение состояния системы

Предположим, что чистое состояние системы описывается вектором в пространстве  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p$ , т.е. тензором

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} \gamma_{i_1 \dots i_p} (|e_{i_1}^1\rangle \otimes \dots \otimes |e_{i_p}^p\rangle).$$

Мы производим измерение этого квантового состояния в (ортонормированном) базисе (4.17), применяя оператор

$$\hat{P} = |e_{j_1}^1 \dots e_{j_p}^p\rangle \langle e_{j_1}^1 \dots e_{j_p}^p|.$$

Получим тензор

$$\hat{P}|\psi\rangle = \gamma_{j_1 \dots j_p} (|e_{j_1}^1\rangle \otimes \dots \otimes |e_{j_p}^p\rangle).$$

Иначе говоря, с вероятностью  $|\gamma_{j_1 \dots j_p}|^2$  мы обнаружим исследуемую систему в конкретном состоянии  $|e_{j_1}^1\rangle \otimes \dots \otimes |e_{j_p}^p\rangle$ .

#### 4.6.4. Декогеренция

*Декогеренция* – это физический процесс, который сопровождается потерей когерентности квантовых суперпозиций в результате взаимодействия системы с окружением. В частности, это происходит при измерении [16].

Декогеренция при измерении дается Постулатом 5 и имеет вид

$$\sum_k c_k |\psi_k\rangle \rightarrow |\psi_{k_0}\rangle.$$

Это упрощенное представление о процессе декогеренции, именуемое редукцией, или коллапсом волновой функции  $|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle$ .

Для более полного *формального* описания декогеренции необходимо в формулах учесть среду и взаимодействие с ней изучаемой квантовой системы  $S$ .

Пусть квантовая система  $S$  находится в состоянии когерентной суперпозиции

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle,$$

а окружающая среда  $\mathcal{E}$  – в состоянии  $|\mathcal{E}_0\rangle$ . Тогда взаимодействие, являющееся унитарной эволюцией составной системы  $S + \mathcal{E}$  и описываемой посредством уравнения Шрёдингера, может быть представлено следующим образом [43, с.278]:

$$\left( \sum_k c_k |\psi_k\rangle \right) \otimes |\mathcal{E}_0\rangle \rightarrow \sum_k c_k (|\psi_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle) = |\Psi\rangle,$$

где  $|\mathcal{E}_k\rangle$  – состояния среды после взаимодействия с квантовой системой. Получили после взаимодействия сцепленное состояние составной системы; состояния  $|\psi_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$  являются скоррелированными.

Запишем для состояния  $|\Psi\rangle$  матрицу плотности и вычислим её след по степеням свободы среды  $\mathcal{E}$  [27, с.31-32]. При этом унитарность эволюции разрушается. Получим матрицу плотности квантовой системы после взаимодействия:

$$\hat{\rho} = Sp_{\mathcal{E}} [ |\Psi\rangle\langle\Psi| ] = \sum_{k,l} c_k \bar{c}_l \langle \mathcal{E}_k | \mathcal{E}_l \rangle |\psi_k\rangle\langle\psi_l|. \quad (4.18)$$

Как правило, считается, что имеет место нормировка волновых функций  $|\mathcal{E}_k\rangle$ , т.е.  $\langle \mathcal{E}_k | \mathcal{E}_k \rangle = 1$ .

Допустим, что среда такова, что выполняются условия ортогональности:

$$\langle \mathcal{E}_k | \mathcal{E}_l \rangle = 0, \quad (k \neq l). \quad (4.19)$$

Эти условия являются объективной характеристикой измеряющей макроскопической аппаратуры, постулируются как стандартное наблюдение (см. ниже в § 4.7) и означают, что информация о кубитах переходит к окружению [43, с.278].

Взаимодействие квантовой системы со средой, удовлетворяющей условиям (4.19), приводит к тому, что состояние квантовой системы имеет диагональный вид:

$$\hat{\rho} = \sum_k |c_k|^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k|,$$

или

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & & & \\ & |c_2|^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & |c_k|^2 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Это смешанное, не чистое, состояние. Следовательно, произошла потеря когерентности.

## 4.7. Наблюдаемые. Измерение

Основными понятиями квантовой механики являются: понятие состояния и понятие наблюдаемой.

В «квантовой механике имеется трудность в смысле ее неполноты, поскольку она нуждается в понятии классического прибора, измеряющего квантовые наблюдаемые, как важные ингредиенты теории. Поэтому принимается, что существуют два мира: классический мир и квантовый мир. В классическом мире измерения классических наблюдаемых производятся классическими приборами. В рамках стандартного изложения теории, в квантовом мире измерения квантовых наблюдаемых производятся также классическими приборами. Поэтому теория квантовых измерений рассматривается как что-то особым образом отличающееся от классических измерений»<sup>7</sup>.

С понятием состояний мы познакомились выше в § 4.6. Что в квантовой механике понимают под наблюдаемыми и как они измеряются?

*Наблюдаемая* – это набор эрмитовых операторов  $\mathcal{M} = \{\widehat{M}_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\}_{j \in J}$ , которые являются *разложением единицы* в пространстве  $\mathcal{H}$ , т.е. выполняются условия:

- 1)  $\widehat{M}_j \geq 0$ ,
- 2)  $\sum_{j \in J} \widehat{M}_j = 1$ .

*Стандартная наблюдаемая* – это наблюдаемая  $\mathcal{P} = \{P_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\}_{j \in J}$  в пространстве  $\mathcal{H}$ , являющаяся ортогональной, т.е. выполняются дополнительные условия:

- 1)  $\widehat{P}_j^2 = \widehat{P}_j$ ,
- 2)  $\widehat{P}_j \widehat{P}_k = 0$ .

Сравнивая это определение со сказанным в § 4.4.1 и с формулой (4.13), видим, что стандартная наблюдаемая – это набор операторов проектирования, которые строятся по физической наблюдаемой  $\widehat{A}$ . Каждый проектор  $\widehat{P}_j$  отвечает некоторой области  $D$  спектра наблюдаемой  $\widehat{A}$ . При этом подпространство  $\mathcal{H}_D$ , на которое  $\widehat{P}_j$  проектирует пространство  $\mathcal{H}$ , натянуто на собственные векторы с собственными значениями, принадлежащими области  $D$ .

---

<sup>7</sup>Манько В.И. Обычная квантовая механика без волновой функции. См. <http://www.ntv.ru/gordon/archive/4383>

Понятие (нестандартной) наблюдаемой является обобщением понятия физической наблюдаемой [50, с.22-23].

Если физическая система находится в состоянии  $\widehat{\rho}$ , то *измерение наблюдаемой*  $\mathcal{M}$  в состоянии  $\widehat{\rho}$  заключается в применении операторов  $\widehat{M}_j$  к состоянию  $\widehat{\rho}$ ,<sup>8</sup> т.е. вычисляются [30, с.322-323]:

1)

$$\widehat{\rho}_j = \frac{\widehat{M}_j \widehat{\rho} \widehat{M}_j}{Sp [\widehat{\rho} \widehat{M}_j]} \quad (4.21)$$

– матрица плотности, которая описывает состояние системы *после* измерения;

2)

$$p_j = Sp [\widehat{\rho} \widehat{M}_j]$$

– вероятность наблюдения системы в состоянии (4.21) после измерения.

Мы описали процедуру *редукции матрицы плотности*, которая расширяет процедуру редукции волновой функции (см. § 4.4, Постулат 5).

Полное описание состояния системы  $\widehat{\rho}$  после наблюдения  $\mathcal{M}$  дается матрицей плотности

$$\widehat{\rho}_{\mathcal{M}} = \sum_{j \in J} p_j \widehat{\rho}_j = \sum_{j \in J} \widehat{M}_j \widehat{\rho} \widehat{M}_j. \quad (4.22)$$

**Пример 4.1.** Если

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} |a|^2 & z(t) \\ z(t) & |b|^2 \end{pmatrix},$$

где  $z(t)$  очень и очень маленькая величина.

Пусть дана наблюдаемая

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда

$$\widehat{\rho}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>8</sup>Сравни с описанием измерения в § 4.6.3.

Как видим, отличие  $\hat{\rho}$  от  $\hat{\rho}_M$  за счет малости  $z(t)$  может быть таким, что его практически невозможно обнаружить. Тем не менее, мы имеем дело с редукцией матрицы плотности<sup>9</sup>,

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_M,$$

т.е. с нарушением причинной эволюции, описываемой уравнением Шрёдингера [66].

## 4.8. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Пусть даны две наблюдаемые физические величины  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  и квантовое состояние  $|\psi\rangle$ .

Справедливо неравенство

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|, \quad (4.23)$$

называемое *соотношением неопределенностей Гейзенберга*.

Здесь

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$$

– среднее квадратичное отклонение величины  $\hat{A}$  от своего среднего значения,

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

– среднее значение величины  $\hat{A}$  в состоянии  $|\psi\rangle$ ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

– коммутатор операторов  $\hat{B}$  и  $\hat{B}$ .

<sup>9</sup>Обратим внимание на то, что матрица  $\hat{\rho}_M$  диагональная, как это и должно быть при декогеренции (см. § 4.6.4).

Известно, что две наблюдаемые величины  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  имеют один и тот же ортонормированный базис из собственных векторов  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  в том и только в том случае, когда они коммутируют, т.е.  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ .

Это означает, что коммутируемые физические величины могут быть одновременно измерены, причем, как видно из соотношения неопределенностей Гейзенберга, в этом случае ошибки  $\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}$  при измерении данных величин никак не связаны. Напротив, в случае некоммутируемых физических величин всё более точное измерение величины  $\hat{A}$ , т.е.

$$\Delta\hat{A} \rightarrow 0,$$

ухудшает возможность точного одновременного измерения величины  $\hat{B}$ :

$$\Delta\hat{B} \xrightarrow{\hat{A} \rightarrow 0} \infty.$$

Таким образом, если  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , то точное знание одной из физических величин исключает точное знание другой [52, с.607]. Фактически это означает, что измерение одной физической величины у квантовой системы приводит к возмущению другой физической величины.

Парой некоммутирующих физических величин является координата частицы и импульс частицы. Следовательно, их невозможно одновременно точно измерить. Именно это попытался опровергнуть Эйнштейн в своем споре с Бором относительно неполноты квантовой механики как физической теории, претендующей на совершенное описание явления микромира. Аргумент Эйнштена известен под названием ЭПР-парадокс<sup>10</sup>, изложение которого дано чуть ниже в § 4.10.

---

<sup>10</sup> *Парадокс* в переводе с греческого означает странный, неожиданный. В логике под парадоксом понимают противоречие, полученное в результате логически формально правильного рассуждения, приводящего к взаимно противоречащим заключениям.



## 4.9. Принцип дополнительности Бора

Невозможность точного одновременного измерения координаты и импульса частицы (и других сопряженных физических величин) стало основанием для того, чтобы в 1927 году Нильс Бор дал формулировку одного из важнейших принципов квантовой механики – *принципа дополнительности*.

Согласно этому принципу, для полного описания квантовомеханических явлений необходимо применять два взаимоисключающих («дополнительных») набора классических понятий, два набора классических приборов, совокупность которых дает исчерпывающую информацию об этих явлениях как о целостных. Например, дополнительными в квантовой механике являются пространственно-временная и энергетически-импульсная картины <sup>11</sup>.

## 4.10. ЭПР-парадокс

Согласно соотношению неопределенностей, мы не можем одновременно измерить точные значения координаты и импульса частицы. Причина этого состоит в том, что, производя измерение одной величины, мы вносим принципиально неустранимые возмущения в ее движение и искажаем значение другой величины.

Однако в 1936 году Эйнштейн, Подольский и Розен [52] предложили мысленный эксперимент, который, как они утверждали, позволяет вопреки соотношению неопределенностей совершенно точно одновременно определить координату и импульс частицы.

Суть эксперимента в следующем. Допустим, две одинаковые частицы  $A$  и  $B$  образовались в результате распада третьей частицы  $C$ . Будем считать, что частицы разлетаются так, что их координаты удовлетворяют соотношению  $q_A = -q_B$ . По закону сохранения импульса их суммарный импульс должен быть равен исходному импульсу третьей частицы  $p_C = p_A + p_B$ ,

<sup>11</sup>См. Википедия. <http://ru.wikipedia.org>

т.е. импульсы двух частиц должны быть связаны. Теперь если измерить импульс первой частицы  $A$ , то по закону сохранения импульса можно совершенно точно рассчитать импульс второй. При измерении импульса частицы  $A$  мы, конечно, искажаем значения ее координаты. Но наше измерение не оказывает никакого возмущения на координату частицы  $B$ , поскольку она улетела далеко от частицы  $A$ , и, следовательно, они уже не взаимодействуют. Поэтому мы можем точно измерить координату  $q_B$  второй частицы. Таким образом, мы находим точные значения координаты и импульса второй частицы  $B$ , т.е.

$$\Delta q_B = \Delta p_B = 0.$$

Но эти равенства противоречат соотношению неопределенностей. Таким образом, заявляет Эйнштейн, законы квантовой механики являются неполными и должны быть в будущем уточнены.

Парадокс – это истина, похожая на ложь. Мы только видим противоречие. Оно выходит на первый план потому, что на задний план отошло утверждение «частицы разлетелись друг от друга и, следовательно, уже не взаимодействуют», и, следовательно, измерение импульса частицы  $A$  не вносит искажения в координату частицы  $B$ . Однако такой вывод неверен (А.Д.Александров, 1952, см.[1]). Оказывается, существует возможность, при которой законы квантовой механики останутся абсолютными. Для этого нужно предположить, что две разошедшиеся на большое расстояние друг от друга частицы остаются связанными; эта связь особая, она выражается в наличии у частиц общей волновой функции<sup>12</sup>. Тогда возмущение, вносимое измерением в состояние первой частицы, мгновенно возмущает и состояние второй, после чего искажается значение второй физической величины как у первой, так и у второй частицы.

Связанные таким образом частицы называются в квантовой механике сцепленными (перепутанными) и описываются

---

<sup>12</sup>Именно таков пример, приводимый Эйнштейном, Подольским и Розеном [52].

единой волновой функцией, на каком бы расстоянии они ни находились. Передаваемое возмущение называется корреляцией состояний частиц  $A$  и  $B$ .

Казалось бы, такое предположение противоречит теории относительности, запрещающей распространение сигналов быстрее скорости света (принцип локальности). В данном же случае возмущение должно распространяться мгновенно, ибо частицы могут находиться на любом расстоянии друг от друга к моменту проведения измерения.

Но противоречия с теорией относительности нет. По законам квантовой механики возмущение, вносимое при измерении, случайно. В этом случае мгновенная передача возмущения, т.е. корреляция состояний двух частиц, не есть передача сигнала, т.к. не может нести информацию.

Получается, что парадоксу есть объяснение, логически совместимое и с теорией относительности, и с квантовой механикой.

## 4.11. Копенгагенская интерпретация квантовой механики

Процедура, описанная Постулатом 5, носит название *коллапса*, или *редукции* волновой функции квантовой системы. Она составляет основное содержание так называемой *копенгагенской интерпретации* квантовой механики. Такую трактовку квантовой механики дали фон Нейман, Бор, Гейзенберг и др.

Копенгагенская интерпретация квантовой механики содержит очевидное противоречие между «дискретным» характером коллапса и непрерывным описанием ее эволюции квантовой системы, вытекающим из уравнения Шрёдингера.

Уравнение Шрёдингера при любых начальных данных абсолютно точно дает предсказание о будущем квантовой системы, описываемой волновой функцией. Волновая функция, как решение дифференциального уравнения, непрерывно меняется с течением времени. Это говорит о том, что имеет место

**непрерывная эволюция** квантовой системы. При этом нет никакой необходимости говорить о том, наблюдается или нет состояние квантовой системы (Постулат 2).

Однако если мы начинаем говорить о наблюдателе, который желает узнать, какое значение имеет физическая величина  $\hat{A}$ , а для этого наблюдатель должен произвести измерение величины  $\hat{A}$ , то в результате измерения система **скачком** оказывается в конкретном состоянии, скажем  $|\psi_{k_0}\rangle$ , причем это наблюдение не является абсолютной истиной. Оно носит вероятностный характер; вероятность данного наблюдения равна  $|c_{k_0}|^2$ .

В силу указанного противоречивого, одновременно, с одной стороны, детерминистского, **непрерывного**, а с другой – **скачкообразного**, вероятностного, т.е. недетерминистского характера предсказаний квантовой механики в ее копенгагенской интерпретации, Постулат 5 **не является** бесспорным. И хотя на сегодня копенгагенская интерпретация признается практически всеми физиками и в силу этого только такая интерпретация исповедуется на лекциях по квантовой механике во всех университетах, ряд выдающихся физиков, в их числе и один из создателей теории квантовых вычислений Давид Дойч, склонны придерживаться иной, *эвереттовской интерпретации* квантовой механики [15, 17].

## 4.12. Многомировая интерпретация квантовой механики

Имеются различные способы разъяснения того, что понимают под измерением состояния квантовой системы. Таким образом, мы должны констатировать, что существует «проблема измерения». Варианты решения «проблемы измерения» называются обычно интерпретациями квантовой механики.

Одну из самых фантастических интерпретаций предложил в 1957 году Хью Эверетт III [63]. Позже эта интерпретация получила название многомировой интерпретации квантовой ме-

ханики [71].

Согласно Эверетту, различные компоненты когерентной суперпозиции (4.9) соответствуют различным классическим мирам, одинаково реальным. Иначе говоря, мир *расщеплён* на множество миров. Любой наблюдатель тоже оказывается в состоянии суперпозиции, т.е. его сознание также «расщепляется»; в каждом из миров оказывается «двойник», осознающий то, что происходит в этом мире.

Следовательно, никакого коллапса волновой функции при измерении не происходит. Каждый «двойник» видит (измеряет) то, что происходит в том мире, который он осознает. Число  $|c_k|^2$  при этом указывает, в какой части всех возможных миров «двойники» видят одно и то же.

Как происходит расщепление миров и сознания? Эверетт описывает это следующим образом [63].

Пусть нам дана физическая система  $S$ , в которой наблюдателю приписана волновая функция  $|\psi^0\rangle$ . Тогда состояние наблюдателя, память которого содержит представления событий  $A, B, \dots, C$ , записываем в виде

$$|\psi_{[A,B,\dots,C]}^0\rangle.$$

Наблюдение физической величины  $A$ , имеющей собственную волновую функцию  $|\phi_i\rangle$  в системе  $S$  наблюдателем с начальным состоянием  $|\psi^0\rangle$  состоит во взаимодействии, которое в указанном промежутке времени  $[0, T]$  преобразует состояние

$$|\psi^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi_{[\dots]}^0\rangle \quad (4.24)$$

в новое состояние

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi_{[\dots,a_i]}^0\rangle,$$

где  $a_i$  характеризует состояние  $|\phi_i\rangle$ , т.е. отражает регистрацию собственного значения  $a_i$ . Под преобразованием мы понимаем решение  $|\psi^{S+0}\rangle(t)$  уравнения Шрёдингера с начальным данным (4.24) при  $t = 0$  и с

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\psi^{S+0}\rangle(T).$$

Мы описали идеальный случай, когда система остается в собственном состоянии  $|\phi_i\rangle$ . В общем случае, если начальное состояние системы является несобственным, а общим состоянием  $\sum_i a_i |\phi_i\rangle$ , конечное состояние будет иметь вид

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle |\psi_{[\dots, a_i]}^0\rangle. \quad (4.25)$$

Мы видим, что в каждом элементе суперпозиции  $|\phi_i\rangle |\psi_{[\dots, a_i]}^0\rangle$  состояние системы наблюдаемого объекта есть особенное собственное состояние наблюдения и, *более того, состояние наблюдателя описывает наблюдателя как определенно осознающего именно это особенное состояние системы* [63]. Таким образом, наблюдатель ветвится! его двойники осознают только ими наблюдаемые значения  $a_i$ .

Рассмотрим еще более общую ситуацию, когда имеем системы  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , находящиеся в состояниях  $|\psi^{S_2}\rangle, |\psi^{S_1}\rangle, \dots, |\psi^{S_n}\rangle$ , и наблюдается система  $S_1$ . Тогда начальное состояние

$$|\psi^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = |\psi^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots]}^0\rangle$$

преобразуется в конечное состояние

$$\begin{aligned} |\psi_1^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle &= \\ &= \sum_i a_i^1 |\phi_i^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots, a_i^1]}^0\rangle, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где  $|\phi_i^{S_1}\rangle$  – собственные функции наблюдения.

И здесь мы видим ветвление наблюдателя.

При повторном наблюдении (измерении) в системе  $S_2$  состояние (4.26) даст состояние

$$\begin{aligned} |\psi_2^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle &= \\ &= \sum_i \sum_j a_i^1 a_j^2 |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle |\psi^{S_3}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots, a_i^1 a_j^2]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Повторное наблюдение ведет к новому ветвлению наблюдателя и, естественно, того, что он наблюдает.

И вообще после проведения  $r$  измерений ( $r \leq n$ ) получим состояние

$$\begin{aligned} & |\psi_r^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \\ & = \sum_{i,j,\dots,k} a_i^1 a_j^2 \dots a_k^r |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle \dots |\phi_k^{S_r}\rangle |\psi^{S_{r+1}}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[a_i^1 a_j^2 \dots a_k^r]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

«Таким образом, с каждым последующим наблюдением (или взаимодействием), наблюдатель ветвится во множество различных состояний. Каждая ветвь представляет собой иной результат измерения и соответствующего собственного состояния системы объекта наблюдения. Все ветви существуют одновременно в суперпозиции после любой последовательности наблюдений.

Траектория конфигурации памяти наблюдателя, выполняющего последовательность измерений, не есть линейная последовательность конфигураций памяти, а есть ветвящееся дерево, со всеми возможными результатами, существующими одновременно в конечной суперпозиции с различными коэффициентами» [63].

«Многомировая интерпретация обходится без коллапса. В этой интерпретации все возможные результаты измерения квантовой системы рассматриваются как реализуемые. Отвергается обычное представление, будто лишь один из возможных результатов реализуется, а остальные остаются «на бумаге», т.е. могли появиться в Реальности, но так и не появились. В эвереттовской интерпретации постулируется, что коллапс вообще не происходит, так что в сумме векторов (4.9) сохраняются все слагаемые. То явление, которое описывается как коллапс вектора состояния, является лишь кажущимся, т.е. связано с сознанием наблюдателя. С точки зрения интерпретации Эверетта, различные картины мира соответствуют различным результатам измерения и, следовательно, классически несовместимы, тем не менее, сосуществуют в квантовом мире. Лишь

в сознании наблюдателя появляется единственный результат измерения, т.е. единственная классическая картина мира.

Для наглядности говорят о том, что существуют различные классические миры (эвереттовские параллельные миры), из которых сознание индивидуального наблюдателя воспринимает лишь один» [28]. Остальные миры воспринимаются «двойниками», появившимися при расщеплении сознания наблюдателя. Фактически это иные независимые наблюдатели, живущие в параллельных мирах. Каждый наблюдатель осознает только то, что существует в его мире.

#### 4.12.1. Де Витт о теории Эверетта

Де Витт в статье «Квантовая механика и реальность» (1970), перепечатанной в сборнике [71], пишет о ветвящихся мирах Эверетта:

«Признать столь необычный взгляд на вещи нам, разумеется, мешает то обстоятельство, что принятие такой точки зрения вынуждает нас верить в реальность всех одновременных миров, ... в каждом из которых измерения дали различные результаты. Тем не менее это именно то, в чем хотел бы нас убедить [создатель этой теории] ... Такой мир постоянно делится на чудовищно большое число ветвей, возникающих вследствие аналогичных измерениям взаимодействиям между мириадами его компонент. Кроме того, каждый квантовый переход, происходящий в каждой звезде, в каждой галактике, в каждом далеком уголке нашей Вселенной, приводит к ветвлению нашего локального мира на Земле на мириады копий.

Я хорошо помню тот шок, который я испытал при первом знакомстве с концепцией множественных миров. Мысль о том, что  $10^{100}$  ваших слегка несовершенных двойников постоянно ветвятся, порождая новых двойников, которые в конце концов



становятся совершенно неузнаваемыми, не так-то легко примирить со здравым смыслом» [11, с.22-23].

#### 4.12.2. Эверетт о своей теории

В примечании, сделанном при корректуре статьи, Эверетт написал [63]:

«После того как я разослал оттиски статьи, многие корреспонденты подняли вопрос о «переходе от возможного к реальному», ссылаясь на то, что в «реальности», как свидетельствует наш опыт, не существует такого ветвления состояний наблюдателя и что «реально» всегда существует только одна ветвь. Поскольку это соображение может прийти в голову читателям, я предлагаю следующее объяснение.

Весь вопрос о переходе от «возможного» к «реальному» решается в моей теории просто: такого перехода не существует, и такой переход не является необходимым для того, чтобы теория согласовывалась с опытом. С точки зрения моей теории *все* элементы суперпозиции (все «ветви») «реальны», причем ни один элемент не более «реален», чем другой. Нет необходимости предполагать, что все элементы, кроме одного, каким-то образом уничтожаются, так как каждый элемент суперпозиции в отдельности удовлетворяет волновому уравнению совершенно независимо от того, наличествуют или отсутствуют («реальны» или «нереальны») остальные элементы. Из того, что одна ветвь никак не действует на другую, следует, что наблюдатель не может ничего знать о процессе «ветвления».

Аргументы типа того, что картина мира в такой теории противоречит имеющемуся опыту, поскольку мы не наблюдаем никакого ветвления, похожи

на критику теории Коперника на том основании, что подвижность Земли как реальный физический факт несовместима с интерпретацией природы с позиции здравого смысла, поскольку мы не ощущаем движения Земли. И в том, и в другом случае несостоятельность такого рода аргументов становится очевидной, когда удастся показать, что сама теория предсказывает наш опыт таким, какой он есть. (В случае теории Коперника понадобилось создание физики Ньютона прежде, чем удалось показать, что обитатели Земли не ощущают и не могут ощущать ее движение)» [11, с.21-22].

### 4.12.3. Уилер о теории Эверетта

Научный руководитель Эверетта лауреат нобелевской премии Уилер вначале поддержал теорию Эверетта и способствовал ее опубликованию. Но затем отказался от нее:

«Нельзя не признать, что диссертация Эверетта свидетельствует о недюжинной фантазии автора и весьма поучительна. И мы некогда разделяли его точку зрения. Однако если мы бросим ретроспективный взгляд, то станет ясно, что предложенный Эвереттом ход неверен. Во-первых, такая формулировка квантовой механики порочит квант. Она с самого начала отрицает, то квантовый характер природы может служить путеводной нитью для построения плана всей физики. Эта формулировка говорит вам: «Возьмите для объяснения мира любой гамильтониан – этот, тот или какой-нибудь другой. Я слишком возвышенна, и мне нет дела до того, какой именно гамильтониан вам нужен и есть ли вообще какой-нибудь гамильтониан. Вы даёте мне какой угодно мир, и я возвращаю вам множество миров. Не стоит ждать от меня помощи в объяснении этого мира».

Во-вторых, бесконечно много наблюдаемых миров ложатся на плечи физиков тяжким грузом метафизического багажа. Эти миры, по-видимому, нарушают выдвинутое Д.И. Менделеевым требование к любой истинно научной теории, что «она должна быть открыта для разрушения».

Вигнер, Вейцеккер и Уилер выдвинули более подробные возражения (совершенно различные по духу) против интерпретации квантовой механики на основе понятия относительного состояния, или множественности миров. Трудно назвать кого-нибудь, кто усматривал бы в этой теории подтверждение детерминизма». <sup>13</sup>

## 4.13. Что такое физическая реальность?

Все интерпретации квантовой механики говорят о физической реальности. В копенгагенской интерпретации реальность единственна, а в эвереттовской – физических реальностей множество.

Но что имеют в виду физики, когда говорят о физической реальности? Чаще всего имеют в виду тот объективный мир, который существует вне нас. Отсюда слово «объективный». Но это не есть точное определение физической реальности. Это скорее расплывчатые философские рассуждения о некоем мире вещей вне нас.

По мысли Эйнштейна, определение физической реальности должно быть дано на основе результатов экспериментов и измерений. Эйнштейн, Подольский и Розен предложили следующее определение физической реальности, которую назовем ЭПР-реальностью:

---

<sup>13</sup>Цит. по [11, с.23].

Если мы можем, без какого то ни было возмущения системы, предсказать с достоверностью (т.е. вероятностью, равной единице) значение некоторой физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой величине.

Закроем глаза и подбросим монету. Возможны три (!) исхода: орел, решка и монета стала на ребро. Имеем квантовое состояние

$$|\psi\rangle = c_1|\text{орел}\rangle + c_2|\text{решка}\rangle + c_3|\text{ребро}\rangle.$$

Произведем измерение с целью узнать, что там с монетой. Для этого откроем глаза. В копенгагенской интерпретации невозможно достоверное предсказание. Мы видим, что монета стоит на ребре, но знаем, что этот исход не был единственно возможным, его вероятность равна  $|c_3|^2$ , но так случилось, что именно он реализовался, т.е. стал физической реальностью. Квантовая теория в копенгагенской интерпретации дает только вероятностные предсказания. Копенгагенская реальность не является эйнштейновой реальностью.

В эвереттовской интерпретации (по крайней мере) три мира: в одном открывший глаза видит орла, в другом – решку, в третьем – монета стоит на ребре. Следовательно, поскольку я, человек, не могу видеть монеты сразу в трёх состояниях, то очевидно, что имеем расщеплённого наблюдателя, а точнее, трёх наблюдателей, каждый из которых видит только одно состояние монеты. Но нужно придать еще смысл коэффициентам  $c_i$ . Если мы следуем определению ЭПР-реальности, то не может быть речи о вероятностях. Считаем, что  $|c_i|^2$  – это доля миров, в которых монета находится в соответствующем этому коэффициенту состоянии. Следовательно, миров Эверетта бесконечное множество, но все они физически реальны по Эйнштейну-Подольскому-Розену, ибо эксперименты по подбрасыванию монеты и измерения (открытия глаз) достоверно дают предсказание, что монета будет находиться в таком-то состоянии.

Таким образом, определение физической реальности, данное Эйнштейном, Подольским и Розеном, делает миры Эверетта объективно реальными. Более того, физических реальностей бесконечно много. Именно это и смущает в эвереттовской интерпретации; смущает бесконечное и, казалось бы, излишнее, чрезмерное обилие физических реальностей. Так и хочется сказать, что физическая реальность одна!

Посмотрим на ночное небо. Тысячи звёзд! А в действительности миллиарды звёзд. Зачем так много?! К чему такое обилие? Да потому, что это отвечает определению ЭПР-реальности. Астрофизик достоверно предсказывает, что существуют такие «солнца»-звёзды, которые можно назвать голубыми гигантами. Вот на небе и наблюдаем сотни голубых гигантов.

Критерий ЭПР-реальности, «хотя он далеко не исчерпывает всех возможных способов распознавания физической реальности, по крайней мере, даёт нам один из таких способов, коль скоро выполняются сформулированные в нём условия» [52, с.605].

## 4.14. Джон фон Нейман

Джон фон Нейман – американский математик и физик<sup>14</sup>. Работал в различных областях науки: функциональный анализ, квантовая механика, логика, метеорология. Внёс большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения. Его теория игр сыграла важную роль в экономике.

Янош фон Нейман был старшим из трёх сыновей преуспевающего будапештского банкира Макса фон Неймана.

В 1925 фон Нейман получает диплом инженера-химика в Цюрихе и успешно защищает диссертацию «Аксиоматическое построение теории множеств» на звание доктора философии в Будапештском университете. Совершенствует свои знания в знаменитом Геттингенском университете, где в то время читали лекции люди, чьи имена стали гордостью науки: К. Рунге, Ф. Клейн, Э. Ландау, Д. Гильберт, Э. Цермело, Г. Вейль,

<sup>14</sup>См.: <http://encyklopedia.narod.ru/bios/nauka/neumann/neumann.html>

Г. Минковский, Ф. Франк, М. Борн и другие. Приглашенными лекторами были Г.Лоренц, Н.Бор, М. Планк, П. Эренфест, А. Пуанкаре, А. Зоммерфельд <..>

Совместно с Д. Гильбертом и Л. Нордгеймом фон Нейман написал статью «Об основаниях квантовой механики». Потом выпускает серию работ: «Математическое обоснование квантовой механики», «Теоретико-вероятностное построение квантовой механики» и «Термодинамика квантовомеханических систем». В работах фон Неймана квантовая механика обрела свой естественный язык – язык операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний. В его работах была подведена прочная математическая основа под статистическую интерпретацию квантовой механики, введено новое понятие матрицы плотности.



Рис. 4.2: Джон фон Нейман (1903-1957)

В 1927 году фон Нейман становится приват-доцентом Берлинского, а с 1929 года – Гамбургского университета.

В 1929 году фон Нейман получает приглашение прочитать в течение одного семестра цикл лекций в Принстонском университете. В США фон Нейман впервые оказался в 1930 году. Вскоре после приезда Иоганн фон Нейман для многих коллег становится просто Джонни. В 1931 году фон Нейман окончательно расстаётся с Гамбургским университетом, чтобы принять профессию в Принстоне.

Первая ЭВМ была построена в 1943-1946 годах в школе инженеров-электриков Мура Пенсильванского университета и получила название ЭНИАК (по первым буквам английского названия – электронный цифровой интегратор и вычислитель). Фон Нейман подсказал её разработчикам, как можно модифицировать ЭНИАК, чтобы упростить его программирование.

В создании следующей машины – ЭДВАК (электронный автоматический вычислитель с дискретными переменными) фон Нейман принял уже более активное участие. Он разработал подробную логическую схему машины, в которой структурными единицами были не физические элементы цепей, а идеализированные вычислительные элементы.

## 4.15. Хью Эверетт III

Хью Эверетт III родился 11 ноября 1930 года в Вашингтоне, близ которого и провёл всю жизнь<sup>15</sup>.

После школы Эверетт поступает на инженерно-химический факультет Католического Университета Америки (Вашингтон). В 1953 г. получает диплом бакалавра Magna Cum Laude.

Дальнейшее образование в Принстоне Эверетт получает при поддержке Национального Научного Фонда и военного ведомства, за что впоследствии будет несколько лет, по его выражению, «работать на генералов» (прилагать теорию игр к вопросам военного снабжения и многое другое). Первый курс аспирантуры проводит под руководством математика Шумейкера. На втором курсе переходит к физику Джону Уилеру, одному из отцов атомного проекта.

В 1955 году Эверетт получает степень магистра физики. В январе 1956 года на свет появляется его главная 137-страничная работа «Теория вселенской волновой функции» (позже переизданная в сборнике 1973 года [71]).

В сентябре 1956 года он ушел в «работу на генералов». Прислушав в октябре 1956 года спецкурс по ядерному оружию в Нью-Мехико, Эверетт был приглашен основать и возглавить



Рис. 4.3: Хью Эверетт III (1930-1982)

<sup>15</sup>Использованы материалы биографии Эверетта, размещенные на сайте <http://everettian.chat.ru/Russian/biography.html>

пентагоновскую Группу оценки систем вооружений под эгидой Института Оборонного Анализа – негосударственной организации. Сферой его интересов становятся компьютеры, а редкие отныне публикации в открытой печати посвящены теории игр. Эверетт разработал множество различных алгоритмов, носящих ныне его имя. Самой сложной своей задачей он называл созданный им в одиночку на рубеже 50-х и 60-х гг. текстовый редактор.

В июле 1957 года в журнале «Reviews of Modern Physics» при поддержке Уилера, написавшего послесловие, вышла главная статья Эверетта «Формулировка квантовой теории в терминах «соотнесенных состояний» [63]. При корректуре Эверетт вставил в неё фразы о расщеплении и ветвлении миров (см. § 4.12.2). Научный мир никак не отреагировал на эту статью. В 1959 году Эверетт общался с Бором. Но Бор остался на позициях копенгагенской интерпретации квантовой механики, в разработке которой он принимал самое активное участие.



Рис. 4.4: Б. Де Витт

Эверетт перестал интересоваться квантовой механикой и сосредоточился на работе в Институте Оборонного Анализа. В 1965 году он с четырьмя коллегами по Группе оценки систем вооружений основал «Лямбда Корпорейшн». В 1973 г. создал и возглавил уже практически целиком необоронную «DBS Корпорейшн», которой было суждено его пережить, а позже в Рослине – собственное туристическое агентство «Кей Тревэл».

Эверетт был до кончины вице-президентом «Эмерикен Менеджмент Системс Инкорпорейтет»; занимался собственным бизнесом в области мини-компьютеров; сдавал в аренду жилой комплекс в Сан-Томасе; основал на паях с талантливой ученицей Де Витта Элян Цянь корпорацию по разработке про-



граммных продуктов «Monowave» (она существует и сейчас, специализируясь на задачах распознавания речи).

В апреле 1972 г. Де Витт, разработавший многомировую интерпретацию квантовой механики и обнаруживший, что практически то же сделал Эверетт 15 лет назад, начал переписку с издателями о выпуске книги, содержащего главный квантовомеханический труд Эверетта и подборку статей других авторов по этой проблематике. В книге была использована терминология «многомирия» [71]. Первое время после выхода книги в 1973 году Эверетту эта терминология не совсем нравилась, но она быстро привилась всюду и практически вытеснила его собственную терминологию «соотнесенных состояний» – «объект-наблюдатель».

Уилер хотя и сопроводил статью Эверетта 1957 года почти панегириком, позже зарезервировал за собой право по четвергам не верить в эвереттовскую интерпретацию и даже просил называть ее теорией «Эверетта-но-уже-не-Уилера».

19 июля 1982 года Эверетт умер от внезапного сердечного приступа.

# Глава 5

## Квантовая логика

*Квантовая логика* – это наука, описывающая логические связи высказываний, касающихся объектов и фактов квантовой механики.

### 5.1. Недистрибутивность квантовой логики

В квантовой механике были обнаружены логические формулы, которые противоречили классическому закону дистрибутивности:

$$(A \vee B) \& C \equiv (A \& C) \vee (B \& C).$$

Действительно [7, с.10], пусть на пути электрона между источником электронов и фотопластинкой поставлена стенка с двумя щелями  $A$  и  $B$  (рис.5.1). Пусть высказывание  $A$  означает «электрон проходит через щель  $A$ », высказывание  $B$  – «электрон проходит через щель  $B$ » и, наконец,  $C$  – «электрон оставляет точечный след на фотопластинке».

Высказывания  $(A \vee B) \& C$ ,  $(A \& C) \vee (B \& C)$  истинны, если электрон проходит через одну из щелей и оставляет точечный след на фотопластинке. Закон дистрибутивности говорит как

раз о том, что оба приведённых высказывания тождественны в том смысле, что ведут к одному результату – точечному следу на фотопластинке.

Однако, как известно, если открыты обе щели, то след будет не точечным: на фотопластинке обнаруживается так называемая дифракционная картина (рис.5.2).

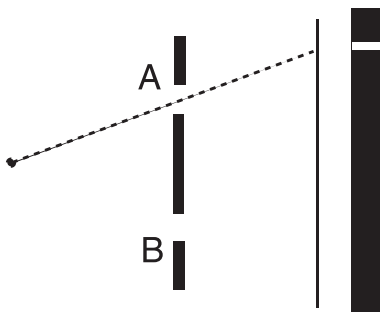


Рис. 5.1: Схема двущелевого эксперимента

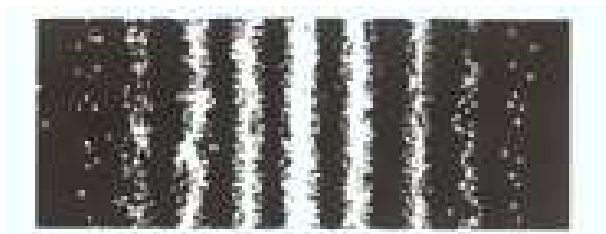


Рис. 5.2: Дифракционная картина

Напрашивается вывод, что в квантовой механике действует логика, в которой нет закона дистрибутивности.

## 5.2. Проблема импликации в квантовой логике

При изложении логики квантовой механики в варианте фон Неймана и Биркгофа импликация интерпретировалась как теоретико-множественное включение. Это означало, что импликация в квантовой логике не являлась высказыванием логической системы, подобно тому как в классической логике импликация  $A \Rightarrow B$  равносильна высказыванию  $\neg A \vee B$  [7, с.23].

## 5.3. Квантовая логика фон Неймана-Биркгофа

Представим кратко самую первую двузначную квантовую логику, предложенную фон Нейманом и Биркгофом в 1936 году.

Как мы знаем, чистые состояния физической системы – это векторы гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . С учетом вырождения собственных значений наблюдаемых физических величин следует иметь в виду, что при измерении система может оказаться в одном из состояний, принадлежащих замкнутому подпространству пространства  $\mathcal{H}$ .

Следовательно, (логическое) *высказывание*  $A$  о свойстве физической системы, полагают фон Нейман и Биркгоф, должно ассоциироваться с замкнутым подпространством  $\mathcal{H}_A$  пространства  $\mathcal{H}$ . Точнее, высказывание  $A$  о системе истинно тогда и только тогда, когда состояние  $p$  системы – это вектор  $|x_p\rangle$  некоторого замкнутого подпространства  $\mathcal{H}_A$  пространства  $\mathcal{H}$ .

Определим логические связи в двузначной логике фон Неймана и Биркгофа:

1. Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  высказывания о системе, то  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  – высказывание, ассоциированное с замкнутым подпространством:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} &\equiv Cl[\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}] = \\ &= Cl[\{|x\rangle : |x\rangle = \alpha|y\rangle + \beta|z\rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |y\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, |z\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}\}], \end{aligned}$$

где  $Cl$  – знак операции топологического замыкания. Это означает, что  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$  состоит не только из линейных комбинаций вида  $|x\rangle = \alpha|y\rangle + \beta|z\rangle$ , но и из их пределов.

2. Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  высказывания о системе, то  $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$  – высказывание, ассоциированное с подпространством:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A} \& \mathcal{B}} \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{B}} = \{|x\rangle : |x\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, |x\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}\}.$$

3. Высказыванию  $\neg \mathcal{A}$  соответствует ортогональное дополнение замкнутого подпространства  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ , т.е.

$$\mathcal{H}_{\neg \mathcal{A}} \equiv \{|x\rangle : \langle x|y\rangle = 0, |y\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}\}.$$

4. Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  высказывания о системе, то  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  – высказывание, истинное, если имеет место теоретико-множественное включение  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ .

5. Всегда истинному высказыванию, значение которого обозначаем как  $\top$ , соответствует само пространство  $\mathcal{H}$ , т.е.

$$\mathcal{H}_{\top} \equiv \mathcal{H}.$$

5. Всегда ложному высказыванию, значение которого обозначаем как  $\perp$ , соответствует нулевое подпространство  $\{0\}$ , т.е.

$$\mathcal{H}_{\perp} \equiv \{0\}.$$

Справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A} &= \perp, \\ \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A} &= \top, \\ \neg \top &= \perp, \\ \neg \perp &= \top, \\ \neg(\neg \mathcal{A}) &= \mathcal{A}. \end{aligned}$$

### 5.3.1. Истинностные свойства связок

**Импликация.** Пусть дано  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  и  $\mathcal{A} = \top$ . Это означает, что система имеет состояние  $p$ , для которого  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ . Так как  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ , то  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Значит,  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Следовательно,  $\mathcal{B} = \top$ . Мы можем сказать, что *истинность* импликации  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  позволяет сделать вывод: «если  $\mathcal{A}$  истинно, то  $\mathcal{B}$  истинно». Так обстоит дело и в классической логике.

**Конъюнкция.** Пусть  $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$  истинно. Значит,  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Но тогда  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  и  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Следовательно,  $\mathcal{A} = \top$  и  $\mathcal{B} = \top$ . Очевидно и обратное утверждение. Таким образом, с конъюнкцией всё обстоит так же, как в классической логике.

**Дизъюнкция.** Так как  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset Cl[\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}]$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \subset Cl[\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}]$ , то  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ . Следовательно, если  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{B}$  истинно, то  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  истинно. Однако обратное неверно. В самом деле, если  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  истинно, то  $v_p \in Cl[\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}]$ . Но это не означает, что  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  или  $v_p \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ , так как в общем случае  $Cl[\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{B}}]$  содержит векторы, не входящие в  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  или в  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Таким образом, если  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  истинно, то это не означает, что истинно  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{B}$ . Как видим, **дизъюнкция фон Неймана-Биркгофа не является классической** [54].

В [54] показано, что причиной неклассического поведения дизъюнкции является существования ЭПР-подобных корреляций.

### 5.3.2. Недистрибутивность связок. Спин $\frac{1}{2}$

Частицы со спином  $\frac{1}{2}$  описываются векторами в двумерном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}^2$  [70].

Если рассматриваются проекции спина на ось  $z$ , то имеем пропозициональную логическую систему, порожденную высказываниями

$$L = \{\perp, \mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+, \top\},$$

где  $\mathcal{A}_-$  – высказывание о том, что проекция спина на ось  $z$  равна  $-\frac{1}{2}$ , а  $\mathcal{A}_+$  – говорит, что проекция спина равна  $+\frac{1}{2}$ .

Система  $L$  ассоциируется с пространством  $\mathcal{H}^2$ , причем  $\perp = \{0\}$ ,  $\top = \mathcal{H}^2$ .

Возьмем другую ось, скажем,  $z'$ , не параллельную  $z$ . Тогда имеем другую пропозициональную логическую систему:

$$L' = \{\perp, \mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+, \top\},$$

где  $\mathcal{B}_-$  – высказывание о том, что проекция спина на ось  $z'$  равна  $-\frac{1}{2}$ , а  $\mathcal{B}_+$  – говорит, что проекция спина равна  $+\frac{1}{2}$ .

Система  $L$  ассоциируется также с пространством  $\mathcal{H}^2$ , причем  $\perp = \{0\}$ ,  $\top = \mathcal{H}^2$ .

Рассмотрим пропозициональную систему, порожденную высказываниями

$$L \oplus L' = \{\perp, \mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+, \mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+, \top\}.$$

С ней ассоциируется по-прежнему пространство  $\mathcal{H}^2$ .

Алгебра высказываний  $L \oplus L'$  не является булевой, поскольку для связок  $\vee, \&$  не выполняются свойства дистрибутивности [70].

В самом деле, допустим, что дистрибутивность имеет место. Тогда имеем:

$$\mathcal{A}_- \vee (\mathcal{B}_- \& \neg \mathcal{B}_-) \equiv (\mathcal{A}_- \vee \mathcal{B}_-) \& (\mathcal{A}_- \vee \neg \mathcal{B}_-),$$

$$\mathcal{A}_- \vee \perp \equiv \top \& \top,$$

$$\mathcal{A}_- \equiv \top.$$

Но это неверно, поскольку  $\mathcal{A}_- = \top$  означает, что  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_-} = \mathcal{H}^2$ .

Аналогично

$$\mathcal{A}_- \& (\mathcal{B}_- \vee \neg \mathcal{B}_-) \equiv (\mathcal{A}_- \& \mathcal{B}_-) \vee (\mathcal{A}_- \& \neg \mathcal{B}_-).$$

$$\mathcal{A}_- \& \top \equiv \perp \vee \perp,$$

$$\mathcal{A}_- \equiv \perp.$$

Но это также неверно, поскольку  $\mathcal{A}_- = \perp$  означает, что  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_-} = \{0\}$ , в то время как измеренное состояние  $p$  спина частицы есть ненулевой вектор  $v_p \in \mathcal{H}^2$ .

## 5.4. Квантовая логика Рейхенбаха

В 1946 году Рейхенбах построил квантовую логику, которая должна была адекватно отразить принцип дополнительности Бора (см. § 4.9).

Логика Рейхенбаха трёхзначна. Рейхенбах связывал необходимость в трёхзначной логике с построением такой интерпретации квантовой теории, которая бы исключала утверждения о возможности одновременного измерения дополнительных величин, оставляя в то же время осмысленными утверждения об их одновременной реальности. Это достигается приписыванием третьего значения истинности («неопределённо») высказыванию, скажем, о величине импульса в том случае, когда высказывание о некоторой величине координаты имеет значение «истинно» [69, S.30].

Таким образом, в логике Рейхенбаха каждое высказывание о квантовой системе может иметь одно из трёх истинностных значений:  $\top$  (истина),  $\perp$  (ложь) и  $\dagger$  (неопределённо).

В квантовой логике Рейхенбаха допускаются конъюнкция  $\&$ , дизъюнкция  $\vee$ , три отрицания  $\sim$  (циклическое),  $\neg$  (диаметральное),  $-$  (полное) и три импликации  $\Rightarrow$  (стандартная),  $\rightarrow$  (альтернативная),  $\supset$  (квазиимпликация).

Вводятся следующие таблицы истинности для логических связей.

Для бинарных связей

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \& B$	$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \supset B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\dagger$	$\top$	$\dagger$	$\dagger$	$\perp$	$\dagger$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\dagger$	$\top$	$\top$	$\dagger$	$\top$	$\top$	$\dagger$
$\dagger$	$\dagger$	$\dagger$	$\dagger$	$\top$	$\top$	$\dagger$
$\dagger$	$\perp$	$\dagger$	$\perp$	$\dagger$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\dagger$
$\perp$	$\dagger$	$\dagger$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\dagger$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\dagger$



## Для отрицаний

$A$	$\sim A$	$\neg A$	$-A$
$\top$	$\dagger$	$\perp$	$\dagger$
$\dagger$	$\perp$	$\dagger$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

## Для двух эквивалентностей

$A$	$B$	$A \equiv B$	$A \cong B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\dagger$	$\dagger$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\dagger$	$\top$	$\dagger$	$\perp$
$\dagger$	$\dagger$	$\top$	$\top$
$\dagger$	$\perp$	$\dagger$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\dagger$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

Два высказывания  $A, B$  находятся в *отношении дополнителности*  $\Delta$  тогда и только тогда, когда 1) они не могут быть одновременно истинными, 2) они не могут быть одновременно ложными, 3) если одно из них истинно или ложно, то второе неопределенно, 4) если одно из них является неопределённым, то второе может принимать любое значение.

Высказывания, находящиеся в отношении дополнителности, – это высказывания о двух одновременно неизмеримых наблюдаемых величинах, таких, как, например, координата и импульс частицы.

Отношение дополнителности  $A\Delta B$  характеризуется таблицей:

$A$	$B$	$A\Delta B$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\dagger$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\dagger$	$\top$	$\top$
$\dagger$	$\dagger$	$\top$
$\dagger$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\dagger$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Существование высказываний, находящихся в отношении дополнительности, может постулироваться посредством формулы:

$$A \vee \neg A \rightarrow \sim \sim B.$$

## 5.5. Квантовая логика Гольдблатта

*Решётка* – это частично упорядоченное множество  $\langle P, \preceq \rangle$ , в котором для любых двух элементов  $x, y \in P$  имеется

- 1) наибольшая нижняя грань  $x \sqcap y$ ;
- 2) наименьшая верхняя грань  $x \sqcup y$ .

Обозначим через  $O$  (единственный) элемент в  $P$ , который удовлетворяет условию  $O \preceq x$  для любого  $x \in P$ . Через  $I$  обозначаем элемент такой, что  $x \preceq I$  для любого  $x \in P$ . Элементы  $O, I$ , когда они существуют, называются *универсальными гранями*.

*Орторешётка* – это решётка с универсальными гранями и унарной операцией  $a \rightarrow a^\perp$  такой, что

$$a \sqcup a^\perp = O, \quad a \sqcap a^\perp = I,$$

$$(a^\perp)^\perp = a,$$

$$(a \sqcap b)^\perp = a^\perp \sqcup b^\perp, \quad (a \sqcup b)^\perp = a^\perp \sqcap b^\perp.$$

Дистрибутивная орторешётка, т.е. такая, для которой справедливы равенства

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c),$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c),$$

является булевой алгеброй.

Примером недистрибутивной орторешётки служит множество  $L(\mathcal{H})$ , элементами которого являются замкнутые подпространства гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . Решёточные операции  $\perp, \sqcap, \sqcup$  – это операции ортогонального дополнения, пересечения и суммы подпространств (см. § 5.3),  $O = \{0\}, I = \mathcal{H}$ .

Мы построим квантовую логику, если опишем формальное исчисление, которое допускает интерпретацию в орторешётке, а значит, и в значимой для квантовой механики орторешётке  $L(\mathcal{H})$ .

#### Аксиомы.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\vdash \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \&\mathcal{B} &\vdash \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \&\mathcal{B} &\vdash \mathcal{B} \\ \mathcal{A} &\vdash \neg\neg\mathcal{A} \\ \neg\neg\mathcal{A} &\vdash \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \&\neg\mathcal{A} &\vdash \mathcal{B} \end{aligned}$$

#### Правила вывода.

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{C}} \\ \frac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \&\mathcal{C}} \\ \frac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Здесь формула  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  означает, что  $\mathcal{B}$  выводима из  $\mathcal{A}$ .

Полагаем

$$A \vee B \equiv_{def} \neg(\neg A \& \neg B)$$

и добавляем еще одну аксиому:

$$A \& (\neg A \vee (A \& B)) \vdash B$$

Получаем квантовую логику Гольдблатта  $\mathbf{L}_G$  [7, с.43-44].

При интерпретации считаем, что

$$A \vdash B$$

тогда и только тогда, когда

$$\nu(A) \leq \nu(B),$$

где  $\nu$  есть функция из множества правильно построенных формул логики  $\mathbf{L}_G$  в орторешётку, причем связи  $\neg, \&, \vee$  интерпретируются как ортодополнение  $^\perp$  и решёточные пересечение  $\sqcap$  и сумма  $\sqcup$  соответственно.

## Глава 6

# Квантовые вычисления

*Квантовые вычисления* – это вычисления, производимые на квантовом компьютере.

### 6.1. Организация вычислений на квантовом компьютере

Опишем последовательные этапы работы квантового компьютера, реализующего квантовую программу вычисления значений функции  $F(n)$ ,  $n = 0, \dots, 2^m - 1$ .

#### 6.1.1. Ввод начальных данных

Дано базовое состояние регистра (памяти):

$$|\underbrace{00\dots 0}_m\rangle \equiv \underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_m. \quad (6.1)$$

Квантовый регистр приводится в  $m$ -кубитовое состояние:

$$\sum_{n=0}^{2^m-1} c_n |n\rangle \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sum_{n_{m-1}=0}^1 \sum_{n_{m-2}=0}^1 \dots \sum_{n_0=0}^1 c_{n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0} |n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0\rangle =, \\ &= \sum_{n_{m-1}=0}^1 \sum_{n_{m-2}=0}^1 \dots \sum_{n_0=0}^1 c_{n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0} |n_{m-1}\rangle \otimes |n_{m-2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_0\rangle, \end{aligned}$$

где

$$n = (n_{m-1}n_{m-2}\dots n_0)_2 = \sum_{l=1}^m n_{m-l} 2^{m-l}$$

и

$$\sum_{n=0}^{2^m-1} |c_n|^2 = 1.$$

Делается это с помощью последовательного применения к состоянию (6.1) гейтов<sup>1</sup>  $\hat{U}^{(1)}, \hat{U}^{(2)}, \dots, \hat{U}^{(m)}$

$$\hat{U}^{(m)} \hat{U}^{(m-1)} \dots \hat{U}^{(1)} | \underbrace{00\dots 0}_m \rangle,$$

$$\hat{U}^{(k)} = \hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I} \otimes \underbrace{\hat{U}_1}_k \otimes \hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I},$$

где  $\hat{U}^{(k)}$  действует только на  $k$ -й кубит посредством гейта  $\hat{U}_1$ , преобразующего однокубитовое состояние.

Например, если

$$\hat{U}_1|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \hat{U}_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

то

$$\hat{U}^{(m)} \hat{U}^{(m-1)} \dots \hat{U}^{(1)} | \underbrace{00\dots 0}_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{n=0}^{2^m-1} |n\rangle. \quad (6.2)$$

(Здесь все  $m$ -кубитовые базовые состояния равновероятны).

Состояние (6.2) является начальным. Ввод информации завершен.

---

<sup>1</sup>Гейт – квантовый аналог логического элемента. См. § 3.1.6 и Принцип 3.

### 6.1.2. Вычисление

Вычисление – это преобразование  $\hat{U}_F$  начального состояния (6.2), согласно принципу 3 квантовой механики,

$$\hat{U}_F \left( \sum_{n=0}^{2^m-1} c_n |n\rangle \right) = \sum_{n=0}^{2^m-1} c_n |F(n)\rangle. \quad (6.3)$$

В случае (6.2) имеем

$$\hat{U}_F \left( \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{n=0}^{2^m-1} |n\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{n=0}^{2^m-1} |F(n)\rangle. \quad (6.4)$$

Конкретная реализация преобразования  $\hat{U}_F$  представляет собой запрограммированный квантовый алгоритм вычисления<sup>2</sup> значений функции  $F$ .

Как видно из формулы (6.3), в один шаг вычислены сразу все значения функции  $F$ . Это эффект параллельности квантовых вычислений.

### 6.1.3. Вывод результата

Вывод результата в квантовом компьютеринге – это измерение квантового состояния (6.3). В силу принципа 4 квантовой механики вмешательство измеряющего устройства (устройство вывода данных) означает декогеренцию состояния (6.3). Мы получаем значение  $F(n)$  лишь с вероятностью  $|c_n|^2$ .

В нашем примере (6.2) с равной вероятностью  $1/2^m$  любое значение  $F(n)$ !

Получаемый на выходе результат вычислений вследствие декогеренции, т.е. в соответствии с принципом 4, как видим, носит *вероятностный характер*! Иначе говоря, то, что получено на выходе, – состояние (регистра)  $|\alpha\rangle$  – верно лишь с некоторой вероятностью  $|c_\alpha|^2$ . «Наблюдение (части) памяти – не то

<sup>2</sup>Например, в § 7.4 дана реализация квантового вычисления так называемого дискретного преобразования Фурье в виде последовательности гейтов.

же самое, что «печать результата». Мы должны спланировать серию прогонов одной и той же квантовой программы и последующую классическую обработку наблюдаемых результатов, и мы можем только надеяться получить желаемый результат с вероятностью, близкой к единице» [26, с.271].

## 6.2. Исправление квантовых ошибок

Классические компьютеры надежны, поскольку производимые вычисления можно защитить от *сбоев*, т.е. от ошибок, возникающих вследствие воздействия окружающей среды.

Взаимодействие квантового компьютера с окружающей средой ведет к декогеренции, которая разрушает когерентную суперпозицию и тем самым останавливает то, что делает квантовые вычисления привлекательными по сравнению с классическими, – их параллельность.

Возникновение декогеренции – то же, что появление сбоев в работе классических ЭВМ, поэтому борьбу с декогеренцией, её преодоление называют *исправлением квантовых ошибок*.

Декогеренцию, а также *квантовый шум*, т.е. взаимодействие  $m$ -кубита  $|q\rangle$  со средой  $\mathcal{E}$ , можно представить в виде:

$$|q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0\rangle \rightarrow \sum_k \widehat{E}_{i_k} |q\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle, \quad (6.5)$$

где  $|\mathcal{E}_0\rangle$  – состояние среды до взаимодействия,  $\widehat{E}_j$  –  $j$ -й оператор ошибки (тип ошибки,  $j = 1, 2, 3$ ),  $|\mathcal{E}_k\rangle$  –  $k$ -е состояние среды после взаимодействия.

Возможно три типа ошибок, которые искажают исходный код.

1) Ошибка перереворота битов  $\widehat{E}_1$ :

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle;$$



это делает оператор Паули  $\hat{\sigma}_1$ ;

$$\hat{\sigma}_1(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = c_2|0\rangle + c_1|1\rangle.$$

2) Ошибка фазы  $\hat{E}_3$

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow -|1\rangle; \end{aligned}$$

это делает оператор Паули  $\hat{\sigma}_3$ ;

$$\hat{\sigma}_3(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (c_1|0\rangle + c_2|1\rangle) = c_1|0\rangle - c_2|1\rangle.$$

3) Одновременное появление обеих ошибок, т.е. действует оператор ошибки  $\hat{E}_2 = \hat{E}_1\hat{E}_3 = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3 = -i\hat{\sigma}_2$ .

*Исправление квантовых ошибок* – это процесс *Cr*, организованный в ходе работы квантового компьютера, который переводит состояния вида  $\hat{E}_{i_k}|q\rangle$  в  $|q\rangle$  [43, с.302].

В результате имеем восстановление чистого состояния регистра  $|q\rangle$ :

$$\sum_k \hat{E}_{i_k}|q\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \xrightarrow{Cr} |q\rangle \otimes |\mathcal{E}_f\rangle,$$

свободного от помех (сцепленности со средой).

Разработаны различные методы исправления квантовых ошибок (см. [43, § 7]).

### 6.3. Классический компьютер вычисляет всё, что вычисляет квантовый

Как известно, решение уравнения Шрёдингера можно записать в виде

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H} dt} |\psi(0)\rangle.$$

Это квантовая эволюция начального регистра  $|\psi(0)\rangle$ . Отсюда видно, что найти  $|\psi(t)\rangle$  можно, производя классические вычисления экспоненты от матрицы. Это крайне трудоёмкие вычисления, но, в принципе, выполнимые. Следовательно, классический компьютер может вычислить всё, что вычисляет квантовый компьютер, и нет никакого шанса построить квантовый компьютер, вычисляющий классически невычислимые функции.

## 6.4. Дэвид Дойч



Рис. 6.1: Дэвид Дойч

Дэвид Дойч – английский математик из Центра квантовых вычислений Оксфордского университета.

Получил премию и медаль Дирака в 1998 году «...за пионерские работы по квантовому вычислению, приведшие к концепции квантового компьютера, и за вклад в понимание того, как такие устройства могут

быть построены из квантовых логических элементов в квантовых сетях».

Дойч – автор замечательной книги «Структура реальности», в которой он объединяет гипотезу существования множества взаимодействующих параллельных вселенных (Мультиверс) с теорией параллельных квантовых вычислений.

Из интервью Дойча: <sup>3</sup>

*«Как вы пришли к идее квантовых вычислений?  
Размышляя над какими вопросами – скорее философскими, чем физическими?»*

---

<sup>3</sup>Леонид Левкович-Маслюк. «Дэвид Дойч: «...все это, собственно, одно и то же». См. сайт: <http://www.computerra.ru/online/firstpage/hisi/6061/>

– Представьте, да. Когда я впервые написал формулы, математическое описание того, что мы сегодня называем квантовым компьютером, я думал именно о модели множественных миров. А точнее, о том, о чем вы только что спросили: как можно было бы экспериментально проверить эту модель, оценить ее в сравнении с другими интерпретациями. Вы знаете, что в квантовой теории крайне важна роль наблюдателя, влияющего на события микромира, которые он наблюдает. Не углубляясь сейчас в физику, я просто скажу, что для моего гипотетического эксперимента мне было необходимо ввести в картину квантово-механического наблюдателя. Но как? Ведь мы слишком горячи и некогерентны для квантовых эффектов. А вот как: давайте вообразим «искусственного человека», такого, который может считаться наблюдателем, потому что он обладает сознанием, подчиняется законам физики, может делать эксперименты, – но, с другой стороны, такого, что его мозг работает когерентным образом в смысле квантовой механики. Вот это и была идея: пусть у нас есть программа искусственного интеллекта, работающая на том, что мы сегодня назвали бы квантовым компьютером, тогда можно написать программу для этого компьютера (в сущности, я это и сделал в своей работе), которая бы определила, происходит ли некое явление. И если оно не происходит, вы убеждаетесь, что у вас есть множественные копии наблюдателя.

Я не публиковал это семь лет. Работа была сделана в 1977 году, еще до защиты диссертации. Я написал статью и послал ее в «Physical Review», а они сказали: у нас правило – не печатать статьи по интерпретациям квантовой механики. Ну, я и отложил ее в сторону. Но когда мне говорили, что все интерпретации множественных миров экспериментально непроверяемы, я давал этим людям препринт той статьи. Некоторые его читали и соглашались со мной».

## Глава 7

# Квантовые алгоритмы

*Квантовый алгоритм* – это алгоритм, основанный на квантовых вычислениях. Как правило, основное внимание привлечено к таким квантовым алгоритмам, которые более эффективны, чем классические алгоритмы. На сегодня создано большое число квантовых алгоритмов.

В этой главе мы изучим подробно один из наиболее известных квантовых алгоритмов – алгоритм факторизации Шора. На его примере хорошо видны основные приёмы, используемые при создании квантовых алгоритмов.

### 7.1. Алгоритм факторизации Шора

Факторизовать натуральное число  $n$  – это значит надо найти хотя бы один его делитель  $p$ . Тогда имеем  $n = pq$ .

Классический алгоритм Ленгстры находит разложение числа  $n$  на простые множители за  $O(e^{an^{1/3}})$  шагов.

Квантовый алгоритм Шора делает это гораздо быстрее. Он имеет полиномиальную сложность  $O(n^2 \log n \log \log n)$ .

## 7.2. Классическая часть факторизации по Шору

Итак, дано  $n$ . Случайным образом берем натуральное число  $x$ . Можно считать, что  $n$  и  $x$  взаимно просты, т.е. у них нет общих делителей, кроме 1<sup>1</sup>.

Рассмотрим функцию  $f(k) = x^k \pmod{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Выпишем значения последовательностей  $\{x^k\}$  и  $\{f(k)\}$ . Нетрудно вычислить, что

$$1, x, \dots, x^{r-1}, x^r, x^{r+1}, \dots$$

$$\underbrace{1, x, \dots}_r, \underbrace{1, x, \dots}_r, \underbrace{1, x, \dots}_r, \dots$$

Как видим, для  $\{f(k)\}$  имеет место периодическое повторение значений через  $r$  шагов. Число  $r$  называется периодом. Оно является минимальным числом с данным свойством периодичности. Наличие периода можно записать в виде равенства

$$x^r = 1 \pmod{n} \quad (7.1)$$

или

$$f(k+r) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Если число  $r$  нечётное, то повторим выбор числа  $x$  и нахождение периода; до тех пор повторяя процедуру, пока  $r$  не окажется чётным. Доказано [48], что нужный выбор  $x$  происходит с вероятностью  $1/2$ . Поэтому многих попыток делать не придётся.

Но как вычислить период  $r$ ? Это как раз и делается с помощью квантовой части алгоритма Шора. Опишем его ниже в § 7.3. А пока вернемся к факторизации.

<sup>1</sup>С помощью алгоритма Евклида ищется наибольший общий делитель (НОД) для  $n, x$ . Если он найден – это  $m$ , то найден и делитель для  $n$ , т.е.  $n$  факторизовано. Такой успех невероятен, когда  $n \sim 10^{200}$  и  $n = pq$  и  $p, q$  большие простые числа. Сложность нахождения  $m = \text{НОД}(n, x)$ ,  $n \geq x$  равна  $O(\log \log x)$ .

Итак, имеем чётный период  $r$ . Тогда уравнение (7.1) можно переписать в виде

$$(x^{r/2})^2 - 1 = 0 \pmod{n}$$

или

$$(x^{r/2} - 1)(x^{r/2} + 1) = 0 \pmod{n}.$$

Но из этого равенства следует, что существует натуральное  $s$  такое, что

$$(x^{r/2} - 1)(x^{r/2} + 1) = ns.$$

Данное равенство говорит о том, что либо  $(x^{r/2} - 1)$ , либо  $(x^{r/2} + 1)$  имеет общий множитель с  $n$ .

Ищем с помощью классического алгоритма Евклида НОД( $n, (x^{r/2} - 1)$ ) и НОД( $n, (x^{r/2} + 1)$ ). Пусть найдено число  $p$ . Это и есть то, что решает задачу факторизацию.

### 7.3. Квантовая часть алгоритма Шора. Алгоритм нахождения периода функции $x^k \pmod{n}$

Подберем натуральное число  $N = 2^m$  так, что  $n^2 \leq N < 2n^2$ . Исходное состояние квантового компьютера имеет вид

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \equiv \underbrace{|00\dots 0\rangle}_m \otimes |0\rangle, \quad (7.3)$$

причем в первом регистре имеем  $m$  кубитов; число кубитов во втором регистре считаем достаточным для решения нашей задачи, т.е. столько, сколько нужно. Действуя гейтом  $\hat{U} \otimes \hat{I}$ , где

$$\hat{U} = \hat{U}^{(m)} \hat{U}^{(m-1)} \dots \hat{U}^{(1)}$$

– гейт из § 6.1.1, на (7.3) получим состояние

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} |a\rangle \otimes |0\rangle. \quad (7.4)$$

Во втором регистре вычисляются  $f(a)$ . Для этого (7.4) применим гейт  $\widehat{I} \otimes \widehat{U}_f$  (см. § 6.1.2; подробности мы опускаем). Имеем в результате

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} |a\rangle \otimes |x^a \pmod{n}\rangle.$$

К первому регистру применяем преобразование Фурье (соответствующее квантовое вычисление этого преобразования дано ниже в § 7.4):

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} e^{2\pi i ac/N} |c\rangle.$$

Теперь состояние компьютера станет

$$\frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{c=0}^{N-1} e^{2\pi i ac/N} |c\rangle \otimes |x^a \pmod{n}\rangle. \quad (7.5)$$

Производим измерение состояний  $|c\rangle$  и  $|x^k \pmod{n}\rangle$ . Произойдет коллапс волновой функции (7.5) к состоянию  $|c\rangle \otimes |x^k \pmod{n}\rangle$  с вероятностью

$$P = \left| \frac{1}{N} \sum_{\substack{a: x^a = x^k \pmod{n} \\ 0 \leq a < N}} e^{2\pi i kc/N} \right|^2.$$

Шор [48] произвёл оценку этого выражения и показал, что  $P \geq \frac{1}{3r^2}$ , если найдется натуральное  $d$ , удовлетворяющее неравенству

$$\left| \frac{c}{N} - \frac{d}{r} \right| < \frac{1}{2N}.$$

Существуют классические алгоритмы, позволяющие найти за полиномиальное время оценку снизу для  $d/r$ .

Осталось понять, как по числу  $d/r$  найти период  $r$ .

Если  $d$  и  $r$  взаимно просты, то поскольку нам известна дробь  $d/r$ , то известен и её знаменатель  $r$ .

Число  $r$  нашли по  $c$ , а точнее, по состоянию  $|c\rangle \otimes |x^k(\text{mod } n)\rangle$ . Сколько таких состояний дают возможность вычислить  $r$  указанным способом? Столько сколько есть  $d$  взаимно простых с  $r$ . Таких  $d$ , как утверждает теория чисел, ровно  $\phi(r)$ , где  $\phi$  – функция Эйлера. Каждое такое  $d/r$  близко к  $c/N$ . Итак, нужных нам  $c$   $\phi(r)$ .

Вспомним, что функция  $|x^k(\text{mod } n)$  имеет  $r$  значений.

Следовательно, можем получить при измерении  $r\phi(r)$  нужных состояний  $|c\rangle \otimes |x^k(\text{mod } n)\rangle$ , т.е. таких, что позволяют вычислить  $r$ . Это всё благоприятные исходы измерения.

Каждое состояние  $|c\rangle \otimes |x^k(\text{mod } n)\rangle$  обнаруживается при измерении с вероятностью  $1/3r^2$ .

Значит, в результате измерения получаем, что  $r$  вычисляется с вероятностью не меньшей, чем  $r\phi(r) \cdot 1/3r^2 = \phi(r)/3r$ .

Известно, что  $\phi(r)/r > \delta / \log \log r$  для некоторой константы  $\delta$ . Отсюда следует, что после  $O(\log \log r)$  прогонок программы (вычислений) на квантовом компьютере мы найдем  $r$  с вероятностью не меньшей  $\delta$ . Это очень большая вероятность. И это обеспечивает успех алгоритму Шора в решении задачи факторизации.

## 7.4. Квантовое вычисление преобразования Фурье

Покажем, с помощью каких гейтов реализуется на квантовом компьютере вычисление преобразования Фурье:

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} \exp\left(\frac{2\pi iac}{2^m}\right) |c\rangle. \quad (7.6)$$

Прежде всего вспомним о принятых для регистров обозначениях (см. § 1.1.2):

$$|c\rangle = |c_{m-1}c_{m-2}\dots c_0\rangle, \quad c = (c_{m-1}c_{m-2}\dots c_0)_2 = \sum_{l=1}^m c_{m-l}2^{m-l}.$$



Поэтому можем переписать (7.6) как

$$\begin{aligned}
\widehat{F}|a\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} \exp\left(\frac{2\pi i a c}{2^m}\right) |c\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c_{m-1}=0}^1 \dots \sum_{c_0=0}^1 \exp\left(2\pi i a \sum_{l=1}^m \frac{c_{m-l}}{2^l}\right) |c_{m-1} \dots c_0\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c_{m-1}=0}^1 \dots \sum_{c_0=0}^1 \bigotimes_{l=1}^m \exp\left(2\pi i a \frac{c_{m-l}}{2^l}\right) |c_{m-l}\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \bigotimes_{l=1}^m \left[ \sum_{c_{m-l}=0}^1 \exp\left(2\pi i a \frac{c_{m-l}}{2^l}\right) |c_{m-l}\rangle \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \bigotimes_{l=1}^m \left[ |0\rangle + \exp\left(2\pi i a \frac{1}{2^l}\right) |1\rangle \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (0, a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i (0, a_1 a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes \dots \\
&\quad \dots \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i (0, a_{m-1} a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right), \tag{7.7}
\end{aligned}$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2^l} &= \sum_{j=1}^m a_{m-j} 2^{m-j-l} = \\
&= \sum_{j=1}^{m-l} a_{m-j} 2^{m-j-l} + \sum_{j=m-l+1}^m a_{m-j} 2^{m-j-l},
\end{aligned}$$

где первая сумма – это целое число  $a^+(l) = (a_{m-1} \dots a_l)_2$ , а вторая – дробь  $a^-(l) = (0, a_{l-1} \dots a_0)_2$ , и

$$e^{2\pi i [a^+(l) + a^-(l)]} = e^{2\pi i a^+(l)} e^{2\pi i a^-(l)} = 1 \cdot e^{2\pi i a^-(l)} = e^{2\pi i a^-(l)}.$$

Теперь достаточно найти последовательность гейтов, переводящих  $m$ -кубит  $|a\rangle$  в (7.7).

Переходим к нахождению гейтов, которые дадут нам выражение (7.7).

Пусть дан гейт Адамара, который можно записать в виде:

$$\widehat{H}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^1 (-1)^{x \cdot y} |y\rangle,$$

где  $|x\rangle, |y\rangle$  – кубиты.

Тогда

$$\begin{aligned} & (\widehat{H} \otimes \underbrace{\widehat{I} \otimes \dots \otimes \widehat{I}}_{m-1}) |a_{m-1}\rangle \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-1)^{0 \cdot a_{m-1}} |0\rangle + (-1)^{1 \cdot a_{m-1}} |1\rangle) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{2\pi i \frac{1}{2}})^{a_{m-1}} |1\rangle) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{1}{2} a_{m-1}} |1\rangle) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2\pi i (0, a_{m-1})^2} |1\rangle) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим двухкубитовые гейты управляемого смещения фазы (см. § 4.5.2) вида :

$$\widehat{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\frac{2\pi i}{2^k}\right) \end{pmatrix}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Как они действуют на  $|a\rangle$ , показано на рис.7.1.

Опишем последовательные действия каждого гейта верхней последовательности гейтов  $\widehat{H}, \widehat{R}_2, \dots, \widehat{R}_m$  на  $|a\rangle$ :

1) результат действия  $\widehat{H}$  дает

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2\pi i (0, a_{m-1})^2} |1\rangle) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle;$$

2) теперь к этому регистру применяем  $\widehat{R}_2$ . Получим, используя формулу действия гейта  $\widehat{R}_2$  из § 4.6.2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-1} a_{m-2})_2} |1\rangle \right) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle;$$

и так далее.

Наконец, применение  $\widehat{R}_m$  дает

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-1} a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle.$$

Следовательно, применение всей верхней последовательности гейтов дает следующий результат:

$$\begin{aligned} & (\widehat{R}_m \widehat{R}_{m-1} \dots \widehat{R}_2) (\widehat{H} \otimes \underbrace{\widehat{I} \otimes \dots \otimes \widehat{I}}_{m-1}) |a_{m-1}\rangle \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-1} a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes |a_{m-2} \dots a_0\rangle. \end{aligned} \quad (7.8)$$

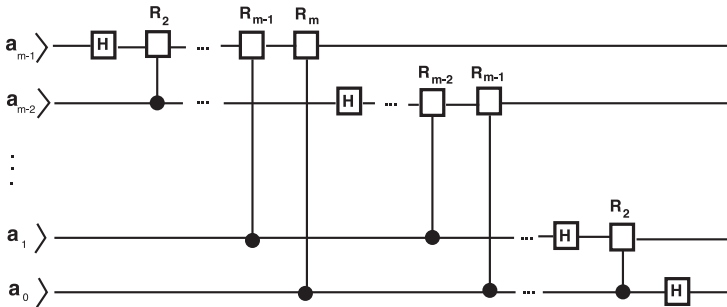


Рис. 7.1: «Ток» гейтов, реализующих дискретное преобразование Фурье. Каждая горизонтальная линия представляет эволюцию одного кубита во времени (движение слева направо). Символ, расположенный на одной линии, представляет однокубитовый гейт. Символы, расположенные на двух линиях и соединенные вертикальным отрезком, представляют двухкубитовые гейты с данными двумя кубитами

Действие второй сверху последовательности гейтов  $\widehat{H}, \widehat{R}_2, \dots, \widehat{R}_{m-1}$  на (7.8) дает такой результат:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-1} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes \\ & \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes |a_{m-3} \dots a_0\rangle. \end{aligned}$$

Проводя остальные гейты, данные на рис. 7.1, получим окончательно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2^m}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-1} a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes \\ & \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_{m-2} \dots a_0)_2} |1\rangle \right) \otimes \dots \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i(0, a_0)_2} |1\rangle \right). \quad (7.9) \end{aligned}$$

Это в точности (7.7), но в обратном порядке. Нужный порядок достигается применением к (7.9) гейта

$$\widehat{O}|x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_m\rangle = |x_m\rangle \otimes \dots \otimes |x_1\rangle.$$

## 7.5. Квантовая криптография

Современная криптография для шифрования информации использует достижения теории чисел. Популярная криптосистема RSA использует то, что для разложения числа на произведение двух простых множителей необходимо проделать такой объем вычислений, на который современному компьютеру потребуется время, в течение которого интерес к расшифровке будет полностью утерян.

Действительно, ведь с помощью лучшего классического алгоритма классический компьютер производительностью в 200 миллион операций в секунду решает задачу факторизации для 250-значного числа за 10 миллионов лет!

«Квантовые компьютеры обещают крах современной криптографии. Расшифровка современных кодов сводится к разложению очень больших чисел на множители, и Питер Шор

(1994) придумал, как это можно сделать быстро на квантовом компьютере. Если квантовый компьютер Шора будет построен, в тот же миг все существующие коды – и банковские, и военные – станут ненадежными. Впрочем, теория квантовых компьютеров и здесь предлагает выход: для шифрования тогда можно будет применить другой квантовый компьютер, код которого уже нельзя будет раскрыть за приемлемое время»<sup>2</sup>.

Возможно, что 10 бит хватит для реализации на квантовом компьютере квантового кодирования Шумахера, представляющего интерес для квантовой криптографии [13], а найденные Шором [48] квантовые алгоритмы разложения числа на простые множители и вычисления дискретного логарифма позволят раскрывать шифр RSA.

«Квантовый компьютер, чтобы быть полезным для криптографии, должен хранить хотя бы несколько десятков квантовых единиц информации (кубитов). Пока же построены только компьютеры из двух кубитов».<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Рузаев Д. Квантовая голова. <http://old.russ.ru/edu/academ/20000118-pr.html>

<sup>3</sup>Рузаев Д. Квантовая голова. <http://old.russ.ru/edu/academ/20000118-pr.html>

## Глава 8

# Квантовая информация

*Квантовая информация* – это данные, находящиеся в квантовой системе.

Квантовую информацию можно передать, но нельзя клонировать (скопировать, размножить).

Чтобы извлечь классическую информацию, содержащуюся в квантовой системе, т.е., чтобы превратить квантовую информацию в классическую, необходимо произвести измерение. Измерение – это наблюдение, производимое классической аппаратурой.

### 8.1. Классическая теория информации

Передаваемые по любому физическому каналу данные – это слова, составленные их букв. Конечный набор используемых букв образуют алфавит. Обозначим через  $\mathcal{X}$  – алфавит.

Пусть по каналу передаются буквы  $x$  алфавита  $\mathcal{X}$ . Буквы берутся случайным образом, буква  $x$  выбирается с вероятностью  $p_x$ . Следовательно, имеем случайную величину  $X$ .

Энтропия случайной величины  $X$  есть число

$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x \log p_x \quad (8.1)$$

с соглашением  $0 \log 0 = 0$ <sup>1</sup>.

Энтропия – это мера недостатка, дефицита, неопределённости информации о величине  $X$ . Очевидно, что  $H \geq 0$ .

Информация случайной величины  $X$  равна

$$I(X) = H_0 - H(X), \quad (8.2)$$

где  $H_0$  – начальная энтропия о величине  $X$ , т.е. тот дефицит информации, который имелся до начала передачи букв по каналу связи. Поскольку  $H_0, H(X) \geq 0$ , то  $I(X)$  говорит об уменьшении дефицита, неопределённости в информации, которое наступает после передачи. Иначе говоря, раз неопределённость уменьшается, то это означает получение новых данных, новой информации  $I(X)$  о величине  $X$ .

### 8.1.1. Классический канал связи с шумом. Теоремы Шеннона

Любой реальный канал связи накладывает помехи на передаваемые сигналы, искажая передаваемые буквы из  $\mathcal{X} = \{x\}$ . Вместо буквы  $x$  приходит буква  $y$ . Следовательно, на выходе получают буквы, вообще говоря, буквы из алфавита  $\mathcal{Y} = \{y\}$ . Такой канал называют *каналом с шумом*.

Канал с шумом характеризуется набором условных вероятностей  $\{\mathbf{P}\{y|x\}\}$ . Число  $\mathbf{P}\{y|x\}$  – это условная вероятность того, что принята буква  $y$  при условии, что была передана

<sup>1</sup>Здесь  $\log = \log_2$ .

буква  $x$ . На выходе, таким образом, имеем дело со случайной величиной  $Y$ .

Канал с шумом обозначаем как  $\mathbf{P}\{y|x\}$ .

Уменьшение информационного содержания источника описывается *шенноновским количеством информации* :

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y),$$

где

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

– *условная энтропия* входа  $X$  относительно выхода  $Y$  и

$$H(X, Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{x,y} \log p_{x,y}$$

– *совместная энтропия* пары случайных величин  $(X, Y)$ , соответствующей совместному распределению вероятностей  $p_{x,y} = \mathbf{P}(y|x)p_x$ .

Справедлива также формула

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

В этой формуле:

$H(Y)$  – энтропия выхода; она говорит об уровне дефицита информации о данных на выходе;

$H(Y|X)$  – составляющая, обусловленная *шумом* [50, с.12].

Более того,

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y).$$

*Канал без памяти* – это канал  $\mathbf{P}\{y|x\}$ , который действует на каждую передаваемую букву независимо.

*Пропускная способность* канала без памяти есть число

$$C = \max_{\{p_x\}} I(X; Y), \quad (8.3)$$

где максимум берётся по всем возможным распределениям  $\{p_x\}$  на входе.



По каналу пересылаем слова  $x^{(n)} = x_1x_2\dots x_n$  длины  $n$ . С ними связывается случайная величина  $X^n$ . Вероятность слова  $x^{(n)}$  равна

$$p_{x^{(n)}} = p_{x_1}p_{x_2}\dots p_{x_n}.$$

На выходе канала с шумом вместо  $x^{(n)}$  имеем слово  $y^{(n)} = y_1y_2\dots y_n$  длины  $n$ . Это случайная величина  $Y^n$ . Имеем условные вероятности для канала без памяти

$$p(y^{(n)}|x^{(n)}) = p(y_1|x_1) \cdot \dots \cdot p(y_n|x_n).$$

*Кодом*  $(W, V)$  размера  $N$  для канала  $\mathbf{P}\{y|x\}$  называется совокупность из  $N$  входных слов  $W = \{w^{(1)}, \dots, w^{(N)}\}$  в алфавите  $\mathcal{X}$  длины  $n$  вместе с разбиением множества  $\mathcal{Y}^n$  на непересекающиеся подмножества  $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(N)} \subset \mathcal{Y}^n$ .

Множества  $V^{(j)}$  называются *решающими областями*, образованные выходными словами в канале связи.

С кодом  $(W, V)$  ассоциируется следующее *правило принятия решения*:

- 1) если на выходе принято слово  $y^{(n)} \in V^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , то принимается решение, что было послано слово  $w^{(j)}$ ;
- 2) если на выходе принято слово  $y^{(n)} \in V^{(0)}$ , то никакого определенного решения не принимается.

Число

$$R = \frac{\log N}{n} \tag{8.4}$$

называют *скоростью передачи*, и равна она числу передаваемых битов на символ для данного кода.

*Средняя вероятность ошибки* равна

$$\bar{P}_e(W, V) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(1 - p(V^{(j)}|w^{(j)})\right),$$

где

$$p(V^{(j)}|w^{(j)}) = \mathbf{P}\{Y^n \in V^{(j)}|X^n = w^{(j)}\}.$$

**Теорема 8.1 (Шеннон).** Пусть

$$p_e(n, N) = \min_{W, V} \bar{P}_e(W, V)$$

– минимальная средняя ошибка для всех возможных кодов размера  $N$  со словами длины  $n$ .

Тогда

1) если  $R < C$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_e(n, 2^{nR}) = 0$  (прямая теорема кодирования);

2) если  $R > C$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_e(n, 2^{nR}) = 1$  (обратная теорема кодирования). ■

## 8.2. Квантовая теория информации

Квантовая информация содержится в неизвестных квантовых состояниях.

Если дано квантовое состояние, задаваемое матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|,$$

то соответствующая ему энтропия фон Неймана равна

$$H(\hat{\rho}) = -Sp [\hat{\rho} \log \hat{\rho}]. \quad (8.5)$$

Для чистого состояния

$$H(|v\rangle\langle v|) = 0,$$

означающее полную его определённую.

### 8.2.1. Квантовый канал связи. Теоремы кодирования

*Квантовый канал связи* букву  $x$  из алфавита  $\mathcal{X}$  представляет как квантовые состояния  $S_x \in \mathcal{H}$ .

Пусть дана наблюдаемая  $\mathcal{M} = \{\widehat{M}_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$ , которая измеряется на выходе канала, и ее измеренные состояния на выходе обозначаем буквами алфавита  $\mathcal{Y}$ .

Обозначим как

$$p_{\mathcal{M}}(y|x) = Sp [\widehat{S}_x \widehat{M}_y]$$

условную вероятность обнаружить при измерении букву  $y$ , т.е. на выходе, при условии, что было послана буква  $x$ . Здесь  $\widehat{S}_x$  – матрица плотности, ассоциированная с состоянием  $S_x$  (см. § 4.6.1).

Пусть заранее дано (априорное) распределение вероятностей  $\pi = \{\pi_x\}$  букв алфавита  $\mathcal{X}$ .

*Шенноновская взаимная информация между входом и выходом* определяется следующим образом:

$$I_1(\pi, \mathcal{M}) = \sum_x \pi_x \sum_y p_{\mathcal{M}}(y|x) [\log p_{\mathcal{M}}(y|x) - \log \sum_z p_{\mathcal{M}}(y|z) \pi_z],$$

Число

$$C_1 = \max_{\pi, \mathcal{M}} I_1(\pi, \mathcal{M})$$

есть максимальное количество информации, допускаемое законами квантовой механики.

**Теорема 8.2 (Холево об энтропийной границе).**

$$I_1(\pi, \mathcal{M}) \leq H\left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_x \widehat{S}_x\right) - \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_x H(\widehat{S}_x). \quad (8.6)$$

Пусть по квантовому каналу передаются не буквы, а слова  $w$  длины  $n$ .

Квантовый канал связи слова  $w = x_1 \dots x_n$  из алфавита  $\mathcal{X}$  представляет как квантовые состояния

$$S_w = S_{x_1} \otimes \dots \otimes S_{x_n} \in \mathcal{H}^{\otimes n},$$

где введено обозначение

$$\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n\text{-раз}}.$$

Данное определение квантового канала соответствует определению классического канала без памяти [50, с.54].

На выходе производится измерение некоторой наблюдаемой  $\mathcal{M}^{(n)} = \{\widehat{M}_j^{(n)}\}$  в пространстве  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ . Обозначим измеренные состояния на выходе как  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Пусть

$$p_{\mathcal{M}^{(n)}}(j|w) = Sp [\widehat{S}_w \widehat{M}_j^{(n)}]$$

– условная вероятность обнаружить при измерении состояние  $j$ , т.е. на выходе, при условии, что было послано слово  $w$ , где  $\widehat{S}_w$  – матрица плотности, ассоциированная с состоянием  $S_w$  (см. § 4.6.1).

Тогда шенноновская взаимная информация между входом

и выходом равна

$$I_n(\pi^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)}) = \sum_w \pi_w \sum_j p_{\mathcal{M}^{(n)}}(j|w) [\log p_{\mathcal{M}^{(n)}}(j|w) - \log \sum_{w'} p_{\mathcal{M}^{(n)}}(j|w') \pi_{w'}],$$

и

$$C_n = \max_{\pi^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)}} I_n(\pi^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)}).$$

Для классического канала без памяти всегда  $C_n = nC_1$ , а для квантового возможно неравенство  $C_n > nC_1$ . Это проявление корреляций Эйнштейна-Подольского-Розена [50, с.55].

Изучим теперь квантовый аналог теорем Шеннона о кодировании.

*Кодом*  $(W, \mathcal{M}^{(n)})$  *размера*  $N$  для квантового канала связи называется совокупность из  $N$  входных слов  $W = \{w^{(1)}, \dots, w^{(N)}\}$  в алфавите  $\mathcal{X}$  длины  $n$  вместе с наблюдаемой  $\mathcal{M}^{(n)} = \{\widehat{M}_j^{(n)}\}$  в  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  с выходами  $j = 0, 1, \dots, N$ . Выход  $j = 0$  означает отказ от принятия решения.

*Средняя вероятность ошибки* равна

$$\bar{P}_e(W, \mathcal{M}^{(n)}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [1 - \underbrace{p_{\mathcal{M}^{(n)}}(j|w^{(j)})}_{\text{вероятность правильного решения}}] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [1 - Sp[\widehat{S}_{w_j} \widehat{M}_j^{(n)}]].$$

*Классическая пропускная способность* квантового канала

связи – это число

$$C = \max_{\pi} \left[ H\left(\sum_x \pi_x \hat{S}_x\right) - \sum_x \pi_x H(\hat{S}_x) \right]. \quad (8.7)$$

Справедлив аналог теоремы Шеннона:

**Теорема 8.3 (квантовая теорема кодирования).** Пусть

$$p_e(n, N) = \min_{W, \mathcal{M}^{(n)}} \bar{P}_e(W, \mathcal{M}^{(n)})$$

– минимальная средняя ошибка для всех возможных кодов размера  $N$  со словами длины  $n$ .

Тогда

1) если  $R < C$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_e(n, 2^{nR}) = 0$  (прямая теорема кодирования);

2) если  $R > C$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_e(n, 2^{nR}) \neq 0$  (обратная теорема кодирования). ■

### 8.3. Невозможность клонирования квантовой информации

Информация, содержащаяся в неизвестном (неизмеренном) квантовом состоянии, имеет качественные отличия от классической и поэтому заслуживает специального термина *квантовая информация* [50, с.35]. В частности, квантовую информацию нельзя клонировать.

*Клонирование* – это квантовое (унитарное) вычисление

$$\hat{U} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H},$$

для которого для квантового состояния  $|a\rangle$  имеет место равенство

$$\hat{U}|a0\rangle = |aa\rangle. \quad (8.8)$$

Иначе говоря, в ходе квантовой (унитарной) эволюции появляется еще одно состояние идентичное исходному, а исходное состояние сохраняется в неизменном виде.

Квантовое состояние *неизвестно*, если оно не было подвергнуто процедуре измерения, влекущей декогеренцию. Если дан кубит

$$|q\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle,$$

то мы не можем сказать, каково его значение, —  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$ . Однако, производя измерение, мы можем, например, сказать, что значение кубита  $|q\rangle = |1\rangle$ . Естественно, эта информация может быть размножена, т.е. клонирована. Формально это делает оператор  $C\widehat{NOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 0| \otimes \widehat{NOT}$ :

$$C\widehat{NOT}|10\rangle = |11\rangle.$$

### 8.3.1. Невозможность универсального клонирующего устройства

Но может ли быть клонировано неизвестное состояние кубита  $|q\rangle$ ? Если состояние неизвестно, то можно, конечно, применять к вектору  $|q\rangle$  любой унитарный оператор в надежде, что получим клонирование. Но как ксерокс создает копию *любого* документа, так хотелось бы иметь *универсальный аппарат*, т.е. некоторый специальный унитарный оператор  $\widehat{U}$ , который клонирует *любой* вектор  $|a\rangle$ , т.е. любое неизвестное состояние  $|a\rangle$ . Ответ, как следует из следующей теоремы, отрицательный, такого универсального аппарата для размножения неизвестного квантового состояния нет.

**Теорема 8.4.** (Вуттерс, Зурек [73]) *Универсальное клонирование неизвестного квантового состояния невозможно.*

**Доказательство.**

Доказываем от противного. Допустим, что (универсальное) клонирование возможно. Тогда легко порождаются клоны трех состояний:

$$\widehat{U}|a0\rangle = |aa\rangle, \quad \widehat{U}|b0\rangle = |bb\rangle,$$

и аналогично для

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$$

имеем

$$\begin{aligned} \widehat{U}|c0\rangle &= |cc\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|aa\rangle + |ab\rangle + |ba\rangle + |bb\rangle). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Но

$$\begin{aligned} \widehat{U}|c0\rangle &= U \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |0\rangle \right) = \\ &= \widehat{U} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|a0\rangle + |b0\rangle) \right) = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{U}|a0\rangle + \widehat{U}|b0\rangle) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle + |bb\rangle). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Равенства (8.9), (8.10) противоречат друг другу. Теорема доказана. ■

### 8.3.2. Клонирование двух ортогональных состояний

Клонировующий оператор, как мы помним, должен быть унитарным, т.е. должно выполняться равенство

$$\langle \widehat{U}a0 | \widehat{U}b0 \rangle = \langle a0 | b0 \rangle.$$

С учетом (8.8) имеем

$$\langle aa | bb \rangle = \langle a0 | b0 \rangle.$$

Вспоминая определение скалярного произведения для тензорного произведения пространств (§ 4.5), получаем

$$\langle a|b\rangle\langle a|b\rangle = \langle a|b\rangle\langle 0|0\rangle = \langle a|b\rangle$$



или

$$\langle a|b \rangle^2 = \langle a|b \rangle.$$

Данное равенство возможно только в двух случаях: когда  $\langle a|b \rangle = 0$  или  $\langle a|b \rangle = 1$ . Второй случай означает  $|a\rangle = |b\rangle$ , т.е. состояния неразличимы. Первый случай говорит о том, что клонирование двух<sup>2</sup> ортогональных состояний возможно и, соответственно, неортогональных – невозможно.

---

<sup>2</sup>Мы не требуем клонирования третьего состояния, что может привести к противоречию, как и при доказательстве теоремы 8.4.

## Глава 9

# Квантовая телекоммуникация

*Квантовая телекоммуникация* – это способы передачи информации посредством квантовых каналов, т.е. с помощью аппаратуры, представляющей собой квантовые физические системы. Работа квантовых физических систем описывается с обязательным привлечением принципов квантовой механики.

### 9.1. Базис Белла

Рассмотрим четырехмерное гильбертово пространство  $\Omega^4$  всех 2-кубитов, состоящее из тензоров вида

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle.$$

Однако можно задать ортонормированный базис в  $\Omega^4$  из четырех сцепленных состояний Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |00\rangle + |11\rangle ], \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |00\rangle - |11\rangle ], \quad (9.1)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |01\rangle + |10\rangle ], \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |01\rangle - |10\rangle ] \quad (9.2)$$

– базис Белла, и тогда любое 2-кубитовое чистое квантовое состояние представимо в виде

$$|\psi\rangle = \beta_{00}|\Phi^+\rangle + \beta_{01}|\Psi^+\rangle + \beta_{11}|\Psi^-\rangle + \beta_{10}|\Phi^-\rangle.$$

## 9.2. Результаты измерения состояний Белла. Квантовая корреляция

Сцепленные состояния Белла реализуются как квантовые физические системы. Чаще всего это пара элементарных частиц. Каждая из этих частиц обладает особой характеристикой, называемой *спином*. Спин принимает одно из двух возможных взаимоисключающих значений – 0 или 1. Соответствующие состояния частиц –  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$ . Пара частиц при этом может находиться в одном из состояний Белла. Пусть это состояние

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle].$$

Тогда если при измерении мы находим, что спин частицы 1 –  $|0\rangle$ , то мы сразу узнаем, что спин частицы 2 –  $|1\rangle$ . Если же при измерении спина частицы 1 мы нашли, что ее спин равен  $|1\rangle$ , то мы мгновенно можем сказать, что спин частицы 2 равен  $|0\rangle$ .

Обратим внимание, что при измерении мы имеем дело только с частицей 1. Спин частицы 2 определяется *мгновенно* без какого-либо воздействия на частицу 2! При этом частица 2 может находиться сколь угодно далеко от частицы 1. Данное обстоятельство является экспериментальным фактом, впервые установленным Аспектом, Гранджиром и Роджером в 1981 году [56] и именуемым *квантовой корреляцией* сцепленных частиц.

Квантовая корреляция представляет собой *нелокальное явление*. *Локальным* называется явление, для которого изменение, производимое в одном месте  $A$ , проявляется в другом пространственно удаленном месте  $B$  не мгновенно, а *по истечении некоторого времени*, необходимого для того, чтобы

воздействие от  $A$  достигло  $B$ . При этом скорость передачи воздействия конечна и не может превышать скорости света в соответствии с теорией относительности.

Квантовая корреляция сцепленных частиц является одним из важнейших фактов реальности, используемых в квантовой кибернетике.

Пару сцепленных частиц чисто теоретически придумали в 1936 году Эйнштейн, Подольский и Розен. Поэтому такую пару часто называют ЭПР-парой.

### 9.3. Протокол сверхплотного кодирования классической информации

Рассмотрим Алису и Боба, находящихся вдали друг от друга. Задача, которую пытается решить Алиса, состоит в том, что она должна передать Бобу информацию объемом в 2 бита. Для этого она должна использовать только один кубит<sup>1</sup>, представляющий физическую частицу. Разрешима ли поставленная задача? Да. Делается это следующим образом.

**Шаг 1.** Мы предполагаем, что кубит  $A$ , находящийся в распоряжении Алисы, – это одна из двух частиц  $A$  и  $B$ , образующих квантовую систему, находящуюся в сцепленном состоянии. Для определенности, скажем, это 2-кубит

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle]. \quad (9.3)$$

Данный 2-кубит может быть предоставлен им заранее некой третьей стороной, способной создавать сцепленные состояния (см. § 4.6.2). Допустим, что частицы  $A$  и  $B$  – фотоны, а Алиса и Боб связаны оптоволоконным квантовым каналом, по которому Алиса может отослать свой кубит-частицу Бобу.

---

<sup>1</sup>В случае классических каналов, классических средств связи нужно посылать две единицы информации; мы же пытаемся послать *одну* единицу информации, но *квантовую!*

**Шаг 2.** Но прежде чем отослать свой кубит, Алиса начинает кодировать информацию из двух битов, используя 2-кубит (9.3) и воздействуя только на свой. Воздействие осуществляется посредством прогонки 2-кубита через тот или иной гейт. Иначе говоря, на вход выбранного гейта – логического элемента квантового компьютера – подается 2-кубит (9.3), а на выходе получаем 2-кубит  $|\Phi\rangle$ . Если Алиса желает передать сообщение 00, то она ничего не делает с кубитом  $A$ ; если передается сообщение 01, то используется гейт

$$\widehat{NOT} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|.$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \widehat{NOT} \otimes \widehat{I} : |\Phi^+\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)|0\rangle \otimes \widehat{I}|0\rangle + (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)|1\rangle \otimes \widehat{I}|1\rangle] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(|1\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1|0\rangle) \otimes |0\rangle + (|1\rangle\langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 1|1\rangle) \otimes |1\rangle] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle + |01\rangle] = |\Psi^+\rangle. \end{aligned}$$

Для кодирования информации 10 берется гейт

$$\widehat{Z} : c_1|0\rangle + c_2|1\rangle \rightarrow c_1|0\rangle - c_2|1\rangle,$$

$$\widehat{Z} \otimes I : |\Phi^+\rangle \rightarrow |\Phi^-\rangle.$$

Наконец, сообщение 11 кодируется с помощью гейта

$$i\widehat{Y} : c_1|0\rangle + c_2|1\rangle \rightarrow c_1|1\rangle - c_2|0\rangle,$$

$$i\widehat{Y} \otimes \widehat{I} : |\Phi^+\rangle \rightarrow |\Psi^-\rangle.$$

Кодирование информации закончено, 2-кубит изменился, и теперь является одним из векторов базиса Белла. Теперь Алиса отправляет Бобу свой кубит, свою модифицированную частицу  $A$  по квантовому каналу связи.

**Шаг 3.** Боб, получивший модифицированную частицу  $\tilde{A}$ , становится обладателем физической системы, состоящей из двух частиц и находящейся в одном из сцепленных квантовых состояний Белла:

$$|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle.$$

Если Боб узнает, каким конкретным вектором Белла он обладает, то он тем самым знает, какое сообщение ему было послано.

**Шаг 4.** Но как различить состояние 2-кубита  $|\Phi\rangle$ ? Для этого надо пропустить 2-кубит  $|\Phi\rangle$  через гейт

$$\hat{B} = (C\hat{N}\hat{O}T \circ (\hat{H} \otimes \hat{I}))^{-1} = (\hat{H} \otimes \hat{I}) \circ C\hat{N}\hat{O}T.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \hat{B}|\Phi^+\rangle &= |00\rangle, & \hat{B}|\Psi^+\rangle &= |01\rangle, \\ \hat{B}|\Phi^-\rangle &= |10\rangle, & \hat{B}|\Psi^-\rangle &= |11\rangle, \end{aligned}$$

то мы получим один из базисных 2-кубитов. Производя теперь измерение

$$\hat{P} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|,$$

получим с вероятностью 1 одно из закодированных сообщений: 00, 01, 10 или 11.

## 9.4. Протокол квантовой телепортации

Под телепортацией в научно-фантастических романах понимают мгновенное перемещение в пространстве материальных тел.

В теории квантовой информации *квантовая телепортация* – это специфически квантовая двухканальная передача информации о квантовом состоянии системы [58].

Покажем, как осуществляется телепортация. Пусть Алиса обладает частицей 1, находящейся в квантовом состоянии, описываемом кубитом

$$|\psi_1\rangle = c_1|0\rangle_1 + c_2|1\rangle_1, \quad (9.4)$$

где индекс 1 помечает частицу 1. Алиса не может переслать Бобу свою частицу, у нее нет возможности переслать частицу 1 как физическую материальную вещь. Тогда остается только одно – сообщить Бобу информацию о квантовом состоянии частицы 1, т.е. передать кубит (9.4).

**Шаг 1.** Мы предполагаем, что Алиса и Боб имеют в распоряжении соответственно частицу 2 и частицу 3, находящиеся в сцепленном состоянии. Для определенности скажем: это 2-кубит

$$|\Phi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_2|0\rangle_3], \quad (9.5)$$

где индексы 2,3 помечают частицы 2 и 3. Данный 2-кубит предоставлен заранее некоей третьей стороной, способной создавать сцепленные состояния.

**Шаг 2.** Квантовое состояние системы из всех трех частиц 1,2 и 3 имеет вид

$$|\psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi\rangle_{23}$$

и может быть записано в виде разложения по состояниям Белла:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} = & \frac{1}{2} [ |\Psi^-\rangle_{12} (-c_1|0\rangle_3 - c_2|1\rangle_3) + \\ & + |\Psi^+\rangle_{12} (-c_1|0\rangle_3 + c_2|1\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12} (c_1|1\rangle_3 + c_2|0\rangle_3) + \\ & + |\Phi^+\rangle_{12} (c_1|1\rangle_3 - c_2|0\rangle_3) ]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

**Шаг 3.** На этом шаге Алиса проводит измерение (белловских) состояний частиц 1 и 2, т.е. применит к состоянию один из операторов проектирования:

$$|\Psi^-\rangle_{12} \langle\Psi^-|, \quad |\Psi^+\rangle_{12} \langle\Psi^+|,$$

$$|\Phi^-\rangle_{12\ 21}\langle\Phi^-|, \quad |\Phi^+\rangle_{12\ 21}\langle\Phi^+|.$$

Допустим, что применяется третий оператор:

$$|\Phi^-\rangle_{12\ 21}\langle\Phi^-|. \quad (9.7)$$

Тогда

$$|\Phi^-\rangle_{12\ 21}\langle\Phi^-|(|\psi\rangle_{123}) = \frac{1}{2}[c_1|1\rangle_3 + c_2|0\rangle_3].$$

Это означает, что сразу *после измерения* в силу квантовой корреляции частица 3, находящаяся у Боба, оказывается в состоянии

$$c_1|1\rangle_3 + c_2|0\rangle_3.$$

**Шаг 4.** Алиса по классическому каналу связи (по email) сообщает Бобу, какой оператор проектирования она применяла.

**Шаг 5.** Боб, узнав от Алисы об использованном операторе проектирования, применяет к своей частице 3 унитарное преобразование  $\hat{U}$ , а точнее, одно из четырех  $\hat{I}, \hat{\sigma}_1, i\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ , отвечающих одному из использованных операторов проектирования<sup>2</sup>. В данном случае это следующее преобразование  $\hat{U} = \hat{\sigma}_1$ :

$$\hat{U}[c_1|1\rangle_3 + c_2|0\rangle_3] = c_1|0\rangle_3 + c_2|1\rangle_3.$$

Совершение унитарного преобразование, как мы помним, – это прогонка кубита через некоторый гейт. В результате частица 3 принимает исходное состояние частицы 1, что и хотела сделать Алиса. Телепортация завершена.

**Замечание 9.1.** Частица 1 после измерения (9.7) теряет свое исходное состояние (9.4), т.к. она сцепляется (перепутывается) с частицей 2. Это происходит в полном соответствии с теоремой о запрете клонирования квантового состояния.

<sup>2</sup>  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$  – матрицы Паули



**Замечание 9.2.** Из своих измерений Алиса не получает никакой информации о телепортируемом состоянии: во время телепортации коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  остаются неизвестными. Иначе говоря, состояние частицы 1, которой она располагала, осталось для Алисы неизвестным. Алиса всего лишь передала Бобу *само квантовое состояние* своей частицы 1. Более того, Боб, поскольку он не производил никаких измерений, также ничего не знает о новом состоянии своей частицы 3.

## 9.5. Квантовый криптографический протокол передачи информации

Если Алиса посылает сообщение Бобу, то в случае классической связи ничто не мешает третьей стороне – Еве – перехватывать, а значит, копировать информацию. Биты классической информации переносятся классическими объектами, т.е. физическими объектами, подчиняющимися законам неклассической физики. То или иное состояние такого физического объекта используется в качестве кода (бита) информации. Чтобы перехватить информацию, Еве достаточно замерить состояние объекта-носителя информации. При этом состояние объекта-носителя не меняется, и, следовательно, информация, которую переносит объект-носитель, не искажается и поступает к Бобу в первоначальном виде<sup>3</sup>. Факт перехвата информации Евой остается скрытым от Алисы и Боба.

В случае квантового канала связи, например в случае оптоволоконного канала и квантового объекта-носителя, каковым является отдельно взятый фотон, мы имеем дело с кубитом

$$|x\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle,$$

т.е. с объектом-носителем информации, являющимся квантовой системой и находящимся в неизвестном квантовом состоянии. Как мы знаем, теорема о клонировании запрещает проиллюстрировать копирование переносимой информации.

<sup>3</sup>Рассматривается классический канал связи без шума.

Более того, если Ева предпринимает попытку узнать код, переносимый фотоном, а эта попытка есть не что иное, как процедура измерения состояния фотона, то состояние фотона в силу принципа неопределённости Гейзенберга меняется, и фотон попадает к Бобу с повреждённым кодом, что мгновенно обнаруживается Бобом. Иначе говоря, попытка перехвата информации становится известной.

## 9.6. Квантовый протокол BB84

Протокол BB84 разработ в 1984 году Беннетом и Brassаром.

Его цель – порождение (распределение, передача) секретного ключа для кодирования секретной информации по каналу связи.

Система включает передатчик (Алиса) и приёмник (Боб).

Передатчик может использовать генератор, чтобы посылать фотоны в одной из четырёх поляризаций:

$$|0^\circ\rangle \rightarrow \text{бит } 0,$$

$$|90^\circ\rangle \rightarrow \text{бит } 1$$

или

$$|45^\circ\rangle \rightarrow \text{бит } 0,$$

$$|135^\circ\rangle \rightarrow \text{бит } 1.$$

Приёмник на другом конце использует аппаратуру для измерения поляризации получаемых фотонов.

Согласно законам квантовой механики, приёмник может различать либо тип прямолинейной поляризации (0 или 90), либо тип диагональной поляризации (45 или 135); но ни в коем случае не сможет различить оба типа одновременно.

*Распределение ключа*, т.е. передача ключа требует несколько шагов.

**Шаг 1.** Передатчик (Алиса) посылает фотоны Бобу с одной из четырёх поляризаций, которая выбирается случайно.

**Шаг 2.** Для каждого поступающего фотона получатель (Боб) выбирает произвольно, т.е. с вероятностью  $1/2$ , тип измерения: прямолинейный или диагональный. Получатель записывает результаты измерений, но держит их в секрете.

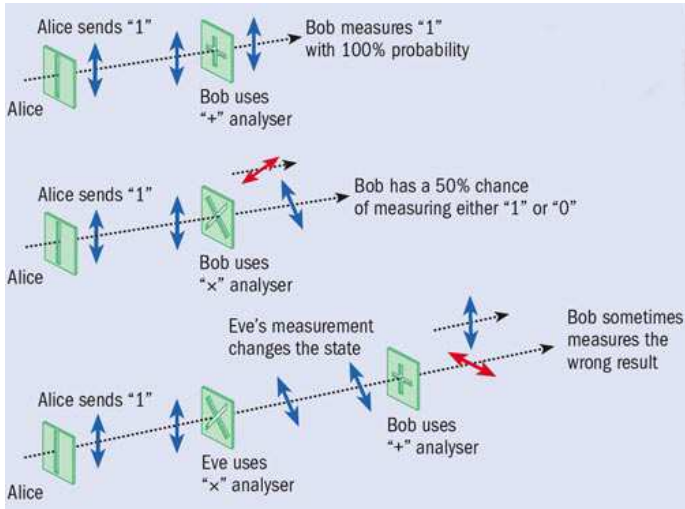


Рис. 9.1: Протокол BB84

Вероятность правильного измерения поляризации фотона равна

$$P = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \quad (9.8)$$

Поясним эту формулу. Вероятность правильного выбора Бобом типа измерения (аппаратуры) –  $1/2$ . Если выбор верен, то с вероятностью 1 поляризация определена верно (имеем первое слагаемое  $(1/2) \cdot 1$  в (9.8)), если нет – то измерение даст правильный результат только в половине случаев  $(1/2 \cdot 1/2)$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>С достоверностью отличить вертикально поляризованный фотон от фотона, поляризованного под углом  $45^\circ$ , невозможно. Поэтому измерение с помощью неправильно выбранной аппаратуры выдаёт результат

**Шаг 3.** Получатель (Боб) публично, по открытому каналу заявляет использованный тип измерения для каждого фотона (но не результаты измерений).

**Шаг 4.** Передатчик (Алиса) сообщает Бобу, опять-таки по открытому каналу, какие замеры были правильного типа.

**Шаг 5.** Алиса и Боб (передатчик и получатель) выбирают все случаи, в которых замеры получателя были правильного типа. Эти случаи переводят в биты (1 и 0), забыв про другие, и таким образом получают секретный ключ.

Злоумышленник (Ева), пытающийся перехватить сообщение, обязательно вызовет ошибки в этой передаче, поскольку он не знает заранее тип поляризации каждого фотона, а квантовая механика не позволит ему одновременно измерить тип поляризации двух несвязанных между собой видов (прямолинейная и диагональная поляризация).

Поэтому Ева в половине случаев перехваченных фотонов воспользуется неправильной аппаратурой и, следовательно, определит правильно поляризацию лишь с вероятностью  $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ . Перехваченный фотон Ева после замера перешлёт Бобу. В половине случаев, т.е. 25% пересылаемых Евой Бобу фотонов будут иметь искажённую поляризацию. Это приведет к тому, что их поляризация Бобом не будет определена с достоверностью 1. Если бы Ева не перехватывала фотоны, то они все пришли бы с неискаженной поляризацией. Поэтому наличие большого процента ошибок послужит Бобу и Алисе сигналом того, что канал прослушивается злоумышленником.

Таким образом, законные пользователи квантового канала – Алиса и Боб – могут тестировать его на возможность подслушивания посредством отправки серии фотонов с оговоренной ими поляризацией. Показывая по открытому каналу произвольное подмножество переданных ключевых битов и проверяя уровень ошибок, они всегда смогут узнать, прослушивается канал или нет: если процент ошибок велик, то можно предположить, что не обошлось без вмешательства Евы.

---

замера, т.е. определяет поляризацию, но он, естественно, верен лишь в половине случаев, т.е. с вероятностью  $1/2$ .

## Глава 10

# Квантовая реальность и модель осознания

Вас смешит невежество Времян, полагающих, что есть только одна Реальность. Нас же смешит невежество Вечных, которые знают, что реальностей много, но думают, что существовать может только одна.

А. Азимов, «Конец Вечности».

Для исследователя, работающего в естествознании, очевидно существование внешнего мира, мира вещей. Стены, деревья *всем* видны и препятствуют попыткам пройти сквозь них и, следовательно, *реальны*, а сны, фантазии доступны только их владельцу и поэтому *нереальны*. Но виртуальная компьютерная реальность доступна уже всем, хотя считается (и в этом уверены все) нереальной, несмотря на то, что в ней о стены также можно разбить лоб.

Где грань между реальным и нереальным? Почему мы осознаем, что мы есть, что мы существуем, что мы реальны?

Не является ли окружающая нас Реальность воплощени-

ем наших идей, наших фантазий? Каков механизм осознания нашего присутствия в Реальности? Одна ли Реальность или существует множество реальностей?

## 10.1. Что такое физическая реальность, реальный мир

Что мы понимаем под словами «реальный мир», или «физический мир»?

*Реальность* – это то в нашей жизни, с чем нельзя не считаться<sup>1</sup>. Под «то» мы понимаем как материальные вещи, так и идеальное, имеющее место в мыслях, в идеях, в книгах, в изображениях и т.д. Мы не можем не считаться с тем, что огонь обжигает и ведёт к тяжёлым ранам; падение с большой высоты означает смерть или переломы костей. Нам приходится считаться с тем, что поведение другого человека не может быть нами в ряде случаев изменено, если тот иначе мыслит или имеет иные убеждения, которым остается верным даже под пытками.

Форенский пишет, что необратимость времени есть признак реальности пространства-времени. Действительно, нам приходится считаться с невозвратимостью того, что мы сохраним в своей памяти и того, что называем своим прошлым. И одновременно мы не можем не принимать в расчёт будущее – о тех, кто это делает, говорят, что они предусмотрительны.

В современной хроногеометрии принято считать, что физическая реальность, т.е. пространство-время, состоит из событий и образует четырехмерный континуум.

Однако далеко не все события пространства-времени можно рассматривать как *реальные*. Пространство-время всего

---

<sup>1</sup>Отсюда не следует справедливость утверждения, что *нереально то, с чем можно не считаться*. Дело в том, что ошибочно думать, что при построении утверждений, приводимых в книгах, следует использовать двусмысленную логику. Логика высказываний русского языка отнюдь не двусмысленная.

лишь *бытие как таковое*, совокупность свободных возможностей. То, что мы относим к реальности, – это то, что самоконструируется для *сознания*<sup>2</sup>.

Реальность – продукт, (само)конструируемый<sup>3</sup> большим множеством субъектов, точнее, их индивидуальными сознаниями, посредством воплощения (материализации) скоррелированных идей в форме вещей объективно и независимо существующего внешнего мира и являющий собой совокупность возможностей, занимающих часть Мира событий. Отражаясь в мозгу, порожденная реальность опознается сознанием субъекта как воплощённая идея, что приводит к осознанию субъектом своего присутствия в реальности.

С реальностью субъекту приходится считаться, поскольку она плод объединённых (скоррелированных) усилий множества индивидуальных сознаний, а не сон отдельного разума.

Отсюда становится понятным, почему реальность продолжает существовать, если кто-то умирает. Раз реальность – плод объединённых (скоррелированных) усилий множества индивидуальных сознаний, то прекращение усилий одного ума по созиданию (поддержанию) реальности почти всегда является исчезающе малым воздействием, и это не приводит, как правило, к катастрофическому изменению реальности.

Исключением являются воздействия в окрестностях бифуркационных множеств. Но поскольку нахождение вблизи бифуркационных множеств не является типичным (общим правилом), то распространённым является мнение, что среда обитания, мир вещей может существовать без нас, а мы существовать без среды, т.е. *нашей* физической реальности, не можем [23].

Вместе с этим сознание, как нам думается, являясь кван-

---

<sup>2</sup>Переосмысленное высказывание Германа Вейля [9, с.194].

<sup>3</sup>Мы должны дописывать слово «(само)» поскольку сами субъекты – часть вещественного мира; следовательно, конструируют не только Мир, но и самих себя.

товой сущностью  $|\mathcal{Y}\rangle$ , существует во множестве форм [19]:

$$|\mathcal{Y}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |\mathcal{Y}_i\rangle.$$

Поэтому смерть – это прекращение существования одной из форм сознания  $|\mathcal{Y}_i\rangle$ , и как следствие (или по причине?) имеет место разрушение тела. Но вполне возможен переход к другой форме существования сознания  $|\mathcal{Y}_j\rangle$ , а значит, возможно любое иное существование (см. гл. 11) в той же самой реальности либо существование в новой физической реальности, являющейся иным плодом объединённых (скоррелированных) усилий множества индивидуальных сознаний (см. ниже в конце § 10.5).

Осознание своего присутствия в реальности, в Мире, осуществляется так, что Мир предстает перед сознанием в форме того, что мы называем существованием в пространстве и во времени. Поэтому Кант и писал, что пространство и время представляют собой формы чистого созерцания.

## 10.2. Физическая реальность и сознание

**Эйнштейн:** «Вера в существование внешнего мира, независимого от воспринимающего субъекта, лежит в основе всего естествознания. Но так как чувственное восприятие дает информацию об этом внешнем мире, или о «физической реальности», опосредствованно, мы можем охватить последнюю только путем рассуждений. Из этого следует, что наши представления о физической реальности не могут быть окончательными. Мы всегда должны быть готовы изменить эти представления, т.е. изменить аксиоматическую базу физики, чтобы обосновать факты восприятия логически<sup>4</sup> наиболее совершенным образом» [53, с.136].

<sup>4</sup>Следует еще задуматься о логике, используемой для обоснования фактов восприятия. Модальные логики, например, как известно, ведут к



**Тагор:** «Наш мир относителен, его реальность зависит от нашего сознания» [53, с.130]. «Наука доказала, что стол как твердое тело – это одна лишь видимость и, следовательно, то, что человеческий разум воспринимает как стол, не существовало, если бы не было человеческого разума. В то же время следует признать и то, что элементарная физическая реальность стола представляет собой не что иное, как множество отдельных вращающихся центров электрических сил и, следовательно, также принадлежит человеческому разуму» [53, с.132].

**Эйнштейн:** «Если есть реальность, не зависящая от человека, то должна быть истина, отвечающая этой реальности, и отрицание первой влечет за собой отрицание последней» [53, с.131].

**Тагор:** «Существует реальность бумаги, бесконечно далекая от реальности литературы. Для моли, поедающей бумагу, литература абсолютно не существует, но для разума человека литература как истина имеет большую ценность, чем сама бумага. Точно так же, если существует какая-нибудь истина, не находящаяся в рациональном или чувственном отношении к человеческому разуму, она будет оставаться ничем до тех пор, пока мы будем существами с разумом человека» [53, с.133]

### 10.3. Физическая реальность создается сознанием через деятельность

**Бондаренко:** «Мира, в котором была одна истина, уже нет ... Мир традиционной и интуиционистской математики – это разные математики... Мир всегда есть множество миров (или реальностей). И вместе с тем мир един [5, с.16]...

Мир, который мы понимаем – это мир, который можем задать в нашем пространстве и времени опыта, через структуры и схемы деятельности познающего существа, задающие этой

---

многовариантным интерпретациям, к множественным (двузначным) мирам (реальностям) в семантике Крипке. – А.Г.

деятельностью свои пространства и время. Этот явленный нам мир, воссозданный на своих основаниях, одновременно допускается самим миром, является фактом мира и вписывается в связи Вселенной. Поэтому мы не можем вернуться в прежнее положение мира ..., в мир до того, как он был воспринят, наблюдался, познавался [5, с.16].

Научный взгляд на мир мы «покупаем» ценой расплаты непонимания сознания, которое научным же образом (объективно, доказательно, контролируемо и рационально) исследовать невозможно (оно уже было использовано в качестве основания теоретического анализа) [5, с.134].

Научные утверждения о вещах мира возможны потому, что мы можем их создать... Если я совершаю какую-то процедуру (она не всегда проговаривается, но имплицитно содержится в любом состоявшемся научном диспуте), связанную с приданием каким-то состояниям моего сознания и опыта свойств, присущих миру вне этих состояний. Это вынесение в действительность не любых состояний сознания и опыта, но лишь тех, о которых я могу говорить доказательно, опытно их проверять [5, с.135].

... Мы имеем дело с миром, который нам явлен через модели и схемы нашей деятельности, а затем, случившись как-то, чем извлекается опыт бытия, сами эти модели и схемы являются элементами мира. Модели фактов сами становятся фактом, *существуют*. Иначе говоря, действия мира в качестве явленных предметов и вещей (а ведь вещи сами по себе не есть явления) существуют как реальность, а не наше представление [5, с.136-137]» .

## 10.4. Квантовый мир и физическая реальность

Внешний мир, который вместо классической механики Ньютона мы должны описывать с помощью квантовой механики, является объективной физической реальностью лишь в рамках

эвереттовской интерпретации квантовой механики [29, с.176], свойства которого могут обладать неклассическими свойствами.

В рамках квантовой механики внешнему миру ставится в соответствие вектор в гильбертовом пространстве  $|\psi\rangle$ , который является суперпозицией некоторого набора базисных состояний:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\psi_k\rangle. \quad (10.1)$$

Векторы  $|\psi_k\rangle$  – это собственные векторы некоторой наблюдаемой физической величины  $A$ . Все они представляют собой классические миры, в которых физическая величина  $A$  имеет различные значения  $a_i$ .

В копенгагенской интерпретации квантовой механики реальным является только один из этого бесконечного набора потенциальных классических миров. Он дается нам при измерении величины  $A$ . Это и есть объективная физическая реальность, которую наблюдает наше сознание.

В эвереттовской интерпретации квантовой механики одинаково реальными являются все классические миры, все они являются физическими реальностями, но каждый из них наблюдается своим наблюдателем, а тот который наблюдаем мы, – это наша физическая реальность. Многообразие миров, по Эверетту, рождается в момент, когда Наблюдатель измеряет величину  $A$ . При этом происходит расщепление миров, задаваемое в виде формулы (10.1) с одновременным расщеплением сознания на сознания, наблюдающие свой классический мир.

Ниже мы переинтерпретируем интерпретацию Эверетта, заменяя «Наблюдателя» на «материальную Природу», которая преобразуется при взаимодействии с субъектами. В ходе этих взаимодействий рождаются разнообразные реальные физические реальности. У Эверетта Наблюдатель и процедура измерения, ведущая к расщеплению миров, на наш взгляд, – откупная дань традиционному подходу к квантовой механике,

на которую пошел Эверетт, предложивший и без того революционный подход к описанию Мира вне нас и одновременно нас содержащему.

## 10.5. Модель квантового рождения физической реальности

Предполагается, что существует нечто, обозначаемое как 0 и называемое *материальной Природой*, которая существует объективно, т.е. независимо от того, есть ли люди или их нет вообще (например, все погибли в мировом катаклизме). Природе приписываем  $\psi$ -функцию состояния  $|\psi^0\rangle$ . События  $A, B, \dots, C$ , происходящие в Природе, оставляют свой «след», и это записываем следующим образом:

$$|\psi^0_{[A,B,\dots,C]}\rangle.$$

Субъект  $S$ , наделенный индивидуальным сознанием, которое обладает «идеей» (=«фантазией»)  $A$  с собственной волновой функцией  $|\phi_i\rangle$  в системе  $S$ , вступает во взаимодействие с Природой, начальное состояние которой  $|\psi^0\rangle$ . Результатом взаимодействия, проистекающим во *времени* и занимающим промежуток времени  $[0, T]$ , является попытка реализации идеи  $A$ .<sup>5</sup> Иными словами, начальное состояние ( $t = 0$ )

$$|\psi^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots]}\rangle \quad (10.2)$$

преобразуется в новое состояние

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots,a_i]}\rangle,$$

---

<sup>5</sup>Скорее надо говорить не о *взаимодействии, протекающем во времени* – это фразеология классической физики, а о квантовой корреляции Природы и сознания индивида. Но сознания разных индивидов не скоррелированы. Реализация «идеи»  $A$  разными сознаниями – это две разные квантовые корреляции, касающиеся Природы. Они вынуждены быть *последовательными*, а значит рождается то, что мы называем *физическим объективным временем*. Следовательно, сознания рождают Реальность во времени. Эту мысль подсказал автору проф. А.А.Берс.

где  $a_i$  характеризует состояние  $|\phi_i\rangle$ , т.е. отражает  $i$ -ю форму реализации «идеи» (фантазии)  $A$ . Под преобразованием мы понимаем решение  $|\psi^{S+0}\rangle(t)$  уравнения Шрёдингера с начальным данным (10.2) при  $t = 0$  и с

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\psi^{S+0}\rangle(T).$$

Мы описали идеальный случай, когда индивидуальное сознание остается в собственном состоянии  $|\phi_i\rangle$ . В общем случае, если начальное состояние индивидуального сознания является несобственным, а общим состоянием  $\sum_i a_i |\phi_i\rangle$ , конечное состояние системы «субъект-Природа» будет иметь вид

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle |\psi_{[\dots a_i]}^0\rangle. \quad (10.3)$$

Мы видим, что в каждом элементе суперпозиции  $|\phi_i\rangle |\psi_{[\dots a_i]}^0\rangle$  состояние Природы есть особенное собственное состояние *потенциальной реальности*, и, более того, состояние Природы описывает Природу как определенно состоящую из набора потенциальных реальностей. Таким образом, Природа ветвится! В каждой потенциальной реальности субъект обнаружит различные наблюдаемые значения  $a_i$  идеи  $A$ , и его сознание разветвится, оказываясь в состояниях  $|\phi_i\rangle$ .

Рассмотрим еще более общую ситуацию, когда имеем несколько субъектов  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , находящихся в состояниях  $|\psi^{S_2}\rangle, |\psi^{S_1}\rangle, \dots, |\psi^{S_n}\rangle$ . Пусть первый субъект  $S_1$  начинает реализовать идею-фантазию  $A^1$ . Тогда начальное состояние

$$|\psi^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = |\psi^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots]}^0\rangle$$

преобразуется в конечное состояние

$$|\psi_1^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \sum_i a_i^1 |\phi_i^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots a_1]}^0\rangle, \quad (10.4)$$

где  $|\phi_i^{S_1}\rangle$  – собственные функции сознания субъекта  $S_1$ .

И здесь мы видим ветвление сознания и Природы.

Если теперь во взаимодействие вступает второй субъект  $S_2$ , реализующий свою идею-фантазию  $A^2$ , то состояние (10.4) даст состояние

$$\begin{aligned} & |\psi_2^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \\ & = \sum_i \sum_j a_i^1 a_j^2 |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle |\psi^{S_3}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Действия второго субъекта ведут к новому ветвлению Природы и индивидуального сознания и, естественно, того, что он наблюдает.

Потенциальная реальность  $|\psi_{[\dots a_i]}^0\rangle$ , навязываемая Природе субъектом  $S_1$ , будет поддержана вторым субъектом в форме  $a_j^2$ , если потенциальная реальность  $|\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2]}^0\rangle$  коррелирует с потенциальной реальностью  $|\psi_{[\dots a_i]}^0\rangle$ . Под корреляцией можно понимать, например, пропорциональность двух указанных потенциальных реальностей как векторов гильбертова пространства состояний Природы, т.е. если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} (|\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2]}^0\rangle = \lambda |\psi_{[\dots a_i]}^0\rangle). \quad (10.6)$$

И вообще, после действия  $r$  субъектов по реализации своих идей-фантазий ( $r \leq n$ ) получим состояние

$$\begin{aligned} & |\psi_r^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \\ & = \sum_{i,j,\dots,m,k} a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle \dots |\phi_m^{S_{r-1}}\rangle |\phi_k^{S_r}\rangle |\psi^{S_{r+1}}\rangle \dots \\ & \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Если число субъектов достаточно велико, то реализуемые ими идеи в форме потенциальных реальностей приведут к рождению<sup>6</sup> актуальной **физической реальности**

$$R = |\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle, \quad (10.8)$$

<sup>6</sup> Нескоррелированные потенциальные реальности остаются с нами в форме грёз субъектов, их породивших.

если

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{C} (|\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle &= \lambda |\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1}]}^0\rangle = \dots \\ \dots &= \lambda |\psi_{[\dots a_i^1 a_j^2]}^0\rangle = \lambda |\psi_{[\dots a_i^1]}^0\rangle). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Очевидно, таких физических реальностей может быть много –  $R, R', R'', \dots$  – это всё эвереттовские параллельные вселенные, но одновременно существует множество потенциальных реальностей, так и не ставших актуальной физической реальностью. Это происходит потому, что действия индивидуальных сознаний не оказались скоррелированными. Иначе говоря, не все идеи-фантазии реализуются; многие из них остаются снами-миражами.

## 10.6. Осознание

*Осознание* – это отдавание себе отчёта, что мы есть в данном месте и в данное время, т.е. *присутствуем*. Как это описать математически? Традиционно считается, что мир в нас отражается; отражается в нашем мозгу. Но почему мозг знает, что он отражает реальность?

Физическая реальность  $R$ , данная формулой (10.8), – есть, в частности, нечто, созданное по «матрице»  $M$ , состоящей из набора идей-фантазий  $A, B, \dots$ . Это первый этап на пути к осознанию – рождение физической реальности. На втором этапе рожденная реальность отражается, т.е. воспринимается мозгом. В мозгу появляется отпечаток  $\widetilde{M}$ . На третьем этапе матрица  $M$  сравнивается с отпечатком  $\widetilde{M}$ . При совпадении (почти совпадении) мозг «видит себя в реальности (10.8)». Это и есть отдавание себе отчёта о присутствии (местонахождении), т.е. акт осознания: «..сущее, которое мы сами всегда суть и которое среди прочего обладает бытийной возможностью спрашивания, мы терминологически схватываем как *присутствие*» [49, с.22].

## 10.7. Что ум созидает и что отражает

Индивидуальный разум (ум) обладает материальным носителем – телом и мозгом в частности. Мозг таков, каков *генотип*<sup>7</sup> индивида.

Вообще, материальная реализация генотипа, а точнее его *фенотип*<sup>8</sup>, есть результат взаимодействия генотипа и окружающей среды [38, с.122]. Генетические влияния объясняют в ряде случаев (например, для изменчивости показателей интеллекта) 50% фенотипической изменчивости. За остальные 50% в ответе особенности среды обитания [38, с.123].

Поскольку не бывает людей, кроме монозиготных (МЗ, однойцовых) близнецов, с полностью идентичным набором генов, т.е. с одним и тем же генотипом, то каждый индивидуум (разум)  $i$ , порождая реальность, налагает на нее совершенно индивидуальный след  $M_{iR}$ , отпечаток своей матрицы  $M_i$ .

Физическая реальность  $R$ , состоящая из всевозможных индивидуальных следов  $M_{iR}$ , отражается в мозгу индивидуума  $i$  в форме  $\widetilde{M}_{iR}$ . Отпечаток  $\widetilde{M}_{iR}$  – результат индивидуального восприятия реальности  $R$ ; он состоит из интегральных (усредненных) идей-фантазий. Осознание – это узнавание в отпечатке  $\widetilde{M}_{iR}$  своей матрицы  $M_i$ .

Следовательно, мозг индивидуума  $i$  должен «видеть» как  $\widetilde{M}_{iR}$ , так и  $M_i$ . Отпечаток  $\widetilde{M}_{iR}$  – это знание о реальности  $R$ , а опознанное  $M_i$  в  $\widetilde{M}_{iR}$  – сознание своего присутствия в ней. Значит, и  $\widetilde{M}_{iR}$  и  $M_i$  должны обнаруживаться в реакции мозга на восприятие реальности  $R$ .

Поскольку монозиготные близнецы являются генетически копиями друг друга и проживают в одной семье, воспитываясь в одинаковых общесемейных условиях, различия между ними могут быть объяснены только влияниями неразделяемой ими, уникальной для каждого индивидуальной средой [38,

<sup>7</sup> *Генотип* – сумма всех генов организма, наследственная конструкция организма, совокупность всех наследуемых задатков организма [38, с.54].

<sup>8</sup> *Фенотип* – любые проявления живущего организма – его морфологические, физиологические, психологические и поведенческие особенности [38, с.54].



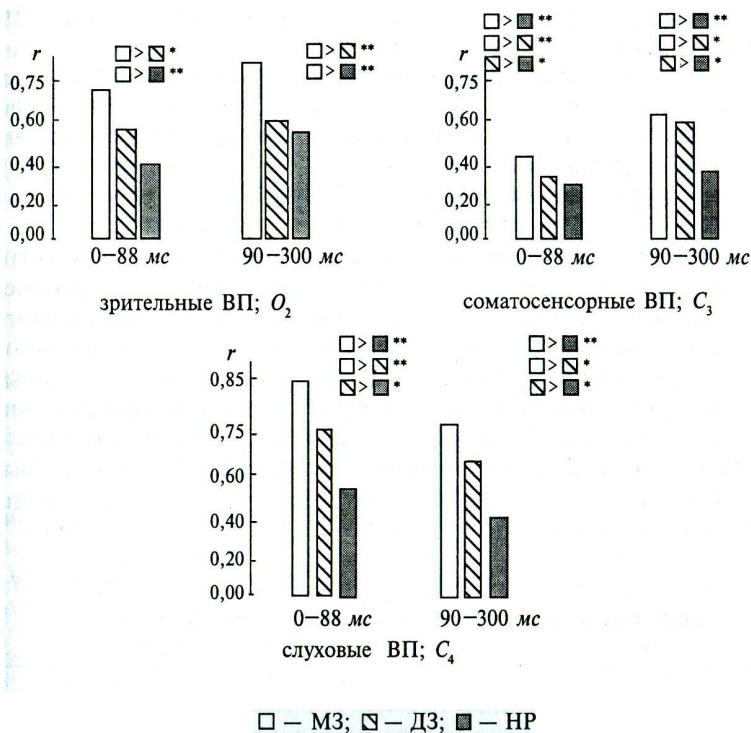


Рис. 10.1: Усредненные коэффициенты корреляции, полученные при сравнении волновой формы ВП. В каждой из трех групп (МЗ, ДЗ, НР) волновую форму попарно коррелировали, а затем усредняли [38, с.315]

с.133-134] Следовательно, можно предположить, что МЗ близнецы должны лучше улавливать усреднённый «единый» отпечаток реальности, чем даже дизиготные (ДЗ, разнородные) близнецы, сохраняя при этом индивидуальную вариативность восприятия. Иначе говоря, если  $i, j$  — МЗ близнецы, а  $k, l$  — ДЗ близнецы, то  $\tilde{M}_{iR}$  и  $\tilde{M}_{jR}$  должны быть лучше скоррелированы, чем  $\tilde{M}_{kR}$  и  $\tilde{M}_{lR}$ .

Именно это мы видим в результатах измерений так называ-

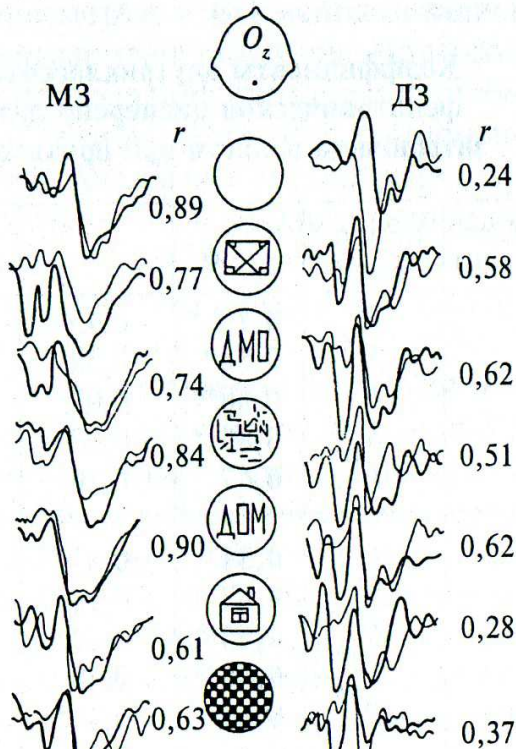


Рис. 10.2: Зрительные вызванные потенциалы (ВП) затылочной области в парах МЗ и ДЗ близнецов. Толстой линией обозначены ВП одного близнеца, тонкой – другого. Числа – коэффициенты корреляции (сходства ВП по волновой форме в целом в зависимости от стимула) [38, с.319]

емых вызванных потенциалов (ВП), т.е. биоэлектрических колебаний, возникающих в нервных структурах в ответ на внешнее раздражение в строго определённой временной связи с началом его действия. На рис. 10.1 даны усреднённые коэффици-

енты корреляции, полученные при сравнении волновой формы ВП для МЗ и ДЗ близнецов и для группы неродственников (НР) в ответ на вспышки света, звуковые тоны и щелчки, а также на электрокожные раздражения правого указательного пальца (соматосенсорные ВП).

Зрительные вызванные потенциалы в затылочной области в парах МЗ и ДЗ близнецов существенно зависят от содержания стимула (вспышка, симметричная фигура, буквы ДМО, набор элементов, слово ДОМ, рисунок дома, шахматное поле). На рис. 10.2 дана волновая форма в целом зрительных вызванных потенциалов для каждого из близнецов и приведены их коэффициенты корреляции. Достаточно большие значения корреляции указывают на «единое»  $\widetilde{M}_{iR}$ , а индивидуально неповторимые волновые формы для каждого из близнецов указывают на наличие  $M_i$  в  $M_{iR}$ .

## 10.8. Как разум меняет реальность

В действительности надо говорить не об изменении реальности, а о смене реальности.

Формула (10.7) показывает, что на каждом шаге реальность

$$R = |\psi^0_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_r]} \rangle$$

находится в квантовой корреляции (связи) с состояниями  $n$  субъектов

$$|\phi_i^{S_1} \rangle |\phi_j^{S_2} \rangle \dots |\phi_m^{S_{r-1}} \rangle |\phi_k^{S_r} \rangle |\psi^{S_{r+1}} \rangle \dots |\psi^{S_n} \rangle,$$

из которых к данному моменту  $r$  реализовали свои идеи-фантазии  $A^1, \dots, A^r$ .

Иначе говоря, фантазиям отвечает конкретная реальность, которая *есть*. Реальностей *много*, и *все они есть*. Реальность  $R$  существует, но видится всеми субъектами сразу и устойчиво от поколения к поколению постольку, поскольку идеи-фантазии субъектов сами скореллированы, как это определено условием (10.9).

Реальности и совокупности идей-фантазий субъектов, как видно из формулы (10.7), на каждом шаге «эволюции» представляют собой сцепленное квантовое состояние всего Бытия как гигантской квантовой системы.

## Глава 11

# Квантовое время

Существует великое различие между умом и телом, состоящее в том, что тело по природе своей всегда делимо, ум же совершенно неделим.

Рене Декарт.

Мир вокруг нас – это мир вещей (тело) и мир сознания (ум). Как говорилось в гл. 10, мир вещей формируется в виде физической реальности благодаря его осознанию, и созданная реальность, отражаясь в нашем мозгу, предстает перед нами как объективно существующий Мир.

Однако постулаты<sup>1</sup> квантовой механики предписывают расщепление (ветвление, размножение) всех форм существования сущностей. Поэтому физическая реальность существует во множестве разновидностей, и это описывается с помощью квантовой механики как представление решения  $|\psi\rangle$  уравнения Шрёдингера в виде квантовой когерентной суперпозиции:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |\psi_i\rangle,$$

---

<sup>1</sup>См., например, Постулат 4 в гл. 4.

т.е. мир вещей расщепляется (ветвится).

При этом каждая физическая реальность  $|\psi_i\rangle$  существует вне времени. Время появляется при осознании физической реальности.

«Прохождение времени, которое является самой сутью понятия, должно рассматриваться лишь как черта сознания, не имеющая объективного оригинала. Объективный мир просто есть, он не случается. Лишь для взора моего сознания, карабкающегося по мировой линии жизни моего тела, порождается часть мира как образ, плывущий в пространстве и непрерывно меняющийся во времени» (Г. Вейль, 1923, [72, с.128]).

Таким образом, следует отождествить сознание и время. Это отвечает духу философии Канта.

Форм осознания любой сущности  $|x\rangle$ , и физической реальности  $|\psi_i\rangle$  в частности, т.е. форм времени, также в соответствии с законами квантовой механики может быть множество:

$$\ell A, \ell B, \ell C, \dots$$

Следовательно, одна и та же физическая реальность  $|\psi_i\rangle$  может быть представлена как бесконечное множество различных форм существования осознания (времени):

$$|(\psi_i)_{\ell A}\rangle, |(\psi_i)_{\ell B}\rangle, |(\psi_i)_{\ell C}\rangle, \dots$$

Знаком  $\ell A$  мы обозначаем конкретное (локальное, local) сознание; совокупность (локальных) сознаний образует сознание как таковое  $\mathbf{L}$ . Локальные сознания (времена) – это ветви сознания  $\mathbf{L}$ .

Описание расщепления (ветвления) сознания, т.е. описание квантового времени, дается в этой главе.

## 11.1. Квантовое описание сущностей

Квантовая физика – это физика, пришедшая на смену классической ньютоновской физике, так же, как физика Ньютона заменила в свое время физику Аристотеля. Это означает, что любое явление мы должны описывать в терминах квантовой физики, и квантовой механики в частности.

Но поскольку многие явления макромира достаточно хорошо описываются в рамках старой, ньютоновской физики, то нет необходимости привлекать более сложный формализм квантовой физики. Вместе с тем совершенно неправильно считать, что квантовые эффекты проявляются только в области микромира. Здесь достаточно напомнить о квантовой сцепленности состояний частиц, составляющих квантовую систему: квантовая корреляция экспериментально установлена для частиц, разнесенных на несколько метров.

В чем проявляются эффекты квантовой физики при изучении физической системы? В том, что состояние системы  $|x\rangle$  может представляться в форме квантовой когерентной суперпозиции:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |x_i\rangle.$$

Как это сказывается в том случае, когда мы изучаем *время*?

## 11.2. Определение квантового времени

Чтобы ответить на данный вопрос, нужно дать определение времени. Но сделать это чрезвычайно трудно, поскольку время есть самая загадочная и неподдающаяся человеческому пониманию сущность.

Одно из самых старых философских определений времени было дано Энгельсом в XIX веке: *время – это форма существования материи*. Поскольку окружающие нас вещи материальны, то время – это единая для всех вещей форма их

существования.

Следовательно, время с точки зрения квантовой механики есть то, что любой физической вещи, системе  $|x\rangle$ , предоставляет возможность находиться в квантовой когерентной суперпозиции:

$$|x\rangle = \sum_{\ell A \in \mathbf{L}} c_{\ell A} |x_{\ell A}\rangle, \quad (11.1)$$

где индекс  $\ell A$  метит конкретную *форму существования вещи-системы*, а  $\mathbf{L}$  – совокупность всех форм существования материальных вещей.

Формулу (11.1) полезно записать в интегральном виде

$$|x\rangle = \int_{\mathbf{L}} c_{\ell A} |x(\ell A)\rangle \mathcal{D}[\ell A]. \quad (11.2)$$

Таким образом, *квантовое время – это когерентная суперпозиция всех форм существования материи.*

### 11.3. Инфинитезимальный анализ Кока-Ловера

Для формализации процедуры расщепления сознания (времени) необходимо подобрать адекватный математический аппарат.

Стандартный математический анализ Ньютона-Лейбница для этого не пригоден. Нам необходимо, чтобы в пространстве-времени  $\mathcal{M}$  любой элемент  $x$  мог быть осознан различными способами:

$$x \in_{\ell A} \mathcal{M}, \quad x \in_{\ell B} \mathcal{M}, \quad x \in_{\ell C} \mathcal{M}, \dots$$

Это легко делается в рамках так называемого инфинитезимального анализа Кока-Ловера [12, 61].



Однако этот анализ базируется на *интуиционистской логике* и на том, что поле действительных чисел  $\mathbb{R}$  заменяется на коммутативное кольцо  $R$ . Естественно, следуют максимально сохранить свойства множества действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

Инфинитезимальный анализ Кока-Ловера исходит из следующих аксиом [62, с.87]):

(A1)  $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  – коммутативное кольцо.

(A2)  $\forall x \in R (\forall y \in D(x \cdot y = 0) \Rightarrow x = 0)$ , где

$$D = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

(A3) (**Аксиома Кока-Ловера**). Для любого

$$\forall (f \in R^R) \exists ! b \in R \forall d \in D (f(x + d) = f(x) + b \cdot d).$$

Далее полагаем  $b = f'(x)$ .

Как показано в [61], *аксиома (A3) несовместима с законом исключенного третьего*. Иначе говоря, мы имеем дело с интуиционистской логикой.

Как видим, аксиома (A3) вводит в теорию производные для функций. Все функции в анализе Кока-Ловера являются дифференцируемыми. Правила дифференцирования такие же, как в классическом анализе [61].

(A4) Бинарные отношения  $<$  и  $\leq$  на  $R$  совместимы с кольцевой структурой, т.е. рефлексивны и транзитивны,  $0 < 1$ , и

$$\forall x, y \in R (x > 0 \ \& \ y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0 \ \& \ x + y > 0),$$

$$\forall x, y \in R (x \geq 0 \ \& \ y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0 \ \& \ x + y \geq 0),$$

$$\forall x \in R (x^2 > 0 \Rightarrow x \geq 0),$$

$$\forall x \in R (x^n = 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 0).$$

Элементы  $x \in R$ , для которых  $x^n = 0$  для некоторого  $n$ , называются *нильпотентами*.

(A5) (Аксиома интеграла).

$$\forall f \in R^{[0,1]} \exists! g \in R^{[0,1]} (g(0) = 0 \ \& \ \forall x \in [0, 1] (g'(x) = f(x)),$$

где  $[0, 1] = \{x \in R : 0 \leq x \ \& \ x \leq 1\}$ .

Таким образом, мы сохраняем теорию первообразных и вводим определенные интегралы, используя стандартную символическую запись

$$g(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Интегралы обладают обычными свойствами аддитивности и однородности, а также следующими свойствами:

$$(A6) \ \forall f \in R^{[0,1]} ((\forall x \in [0, 1] f(x) > 0) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > 0).$$

$$(A7) \ \forall f \in R^{[0,1]} ((\forall x \in [0, 1] f(x) \geq 0) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq 0).$$

## 11.4. Интерпретация инфинитезимального анализа Кока-Ловера

Работать в системе аксиом, данной в § 11.3, неудобно из-за интуиционистской логики. Более привычно рассуждать, используя классическую двузначную логику. Поэтому желательно найти интерпретацию найденному формальному аппарату, которая опиралась бы на двузначную логику.

Из-за того, что принимаемая аксиома Кока-Ловера несовместима с законом исключенного третьего, нельзя дать интерпретацию в рамках теории множеств Кантора **Sets**.

Удобно использовать интерпретации, являющиеся так называемыми *категориями* вида  $\mathbf{Sets}^{L^{op}}$ , содержащие как подкатегорию категории гладких многообразий  $\mathbf{M}$  [61, 62]. Дадим определение категории для того, чтобы понять, как устроены эти интерпретации.

### 11.4.1. Категории

Категория  $\mathcal{K}$  включает в себя:

- 1) объекты  $A, B, C, \dots$ ;
- 2) морфизмы  $f, g, h, \dots$ ;
- 3) каждый морфизм  $f$  связан с двумя объектами  $A, B$ ; первый называют областью определения морфизма, а второй – областью значений. Используются обозначения  $f : A \rightarrow B$  или  $A \xrightarrow{f} B$ ;
- 4) для каждого объекта  $A$  имеется тождественный морфизм  $1_A : A \rightarrow A$ ;
- 5) для каждой пары морфизмов  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  определена композиция морфизмов  $g \circ f : A \rightarrow C$ . Композиция должна удовлетворять двум условиям:
  - (i) Закон идентичности. Если дан морфизм  $f : A \rightarrow B$ , то  $1_B \circ f = f$  и  $f \circ 1_A = f$ .
  - (ii) Закон ассоциативности. Если даны морфизмы  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ , то  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

Совокупность морфизмов из  $A$  в  $B$  обозначают как  $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$  или просто как  $\text{Hom}(A, B)$ .

Совокупность всех множеств по Кантору  $\mathbf{Sets}$  является категорией. Её объекты – множества, а морфизмы – отображения. Совокупность всех гладких многообразий  $\mathbf{M}$  также образует категорию; её объекты – гладкие многообразия, а морфизмы – гладкие отображения.

**Подкатегория.** Пусть дана категория  $\mathcal{K}$ . Совокупность  $\mathcal{K}'$  её объектов и морфизмов, которые образуют категорию, называется *подкатегорией*.

**Двойственная категория.** Если дана категория  $\mathcal{K}$ , то легко строится *двойственная категория*  $\mathcal{K}^{op}$ . Она имеет те же са-

мые объекты, что категория  $\mathcal{K}$ , а морфизмы получаются из морфизмов категории  $\mathcal{K}$  «обращением стрелки», т.е. если в  $\mathcal{K}$  есть морфизм  $f : A \rightarrow B$ , то в  $\mathcal{K}^{op}$  рассматривается морфизм  $f : B \rightarrow A$ .

*Диаграммой* в категории  $\mathcal{K}$  называется совокупность объектов  $A_i, A_j, \dots$  вместе с некоторыми морфизмами  $f : A_i \rightarrow A_j$  между отдельными объектами из этой диаграммы (между данной парой объектов может быть несколько морфизмов, а может и не быть их вовсе).

### 11.4.2. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$

*Функтором*  $F$  из категории  $\mathcal{K}$  в категорию  $\mathcal{E}$  называется функция, которая ставит в соответствие

1) каждому объекту  $A$  категории  $\mathcal{K}$  объект  $F(A)$  категории  $\mathcal{E}$ ;

2) каждому морфизму  $f : A \rightarrow B$  категории  $\mathcal{K}$  морфизм  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  категории  $\mathcal{E}$  такой, что

$$\text{а) } F(1_A) = 1_{F(A)};$$

$$\text{б) } F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ для любых морфизмов } f, g, \text{ для которых определена композиция } g \circ f.$$

**Категория функторов.** Пусть даны две категории  $\mathcal{K}, \mathcal{E}$ . Построим *категорию функторов*  $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$ , объектами которой являются функторы из  $\mathcal{K}$  в  $\mathcal{E}$ .

Определим морфизмы категории  $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$ . Возьмем два функтора  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$  и  $G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$ . *Морфизм*  $\tau : F \rightarrow G$  *объекта*  $F$  *в объект*  $G$  называется *естественным преобразованием* функтора  $F$  в функтор  $G$  и состоит из семейства морфизмов  $\{\tau_A : F(A) \rightarrow G(A), \text{ где } A \text{ — любой объект категории } \mathcal{K}\}$ . Причем морфизм  $\tau_A : F(A) \rightarrow G(A)$  таков, что для любого мор-

физма  $f : A \rightarrow B$  диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\
 \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 B & & F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B)
 \end{array}$$

коммутативна, т.е.  $G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f)$ .

Морфизмы  $\tau_A$  называются *компонентами* естественного преобразования  $\tau$ .

### 11.4.3. Категория $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ в качестве интерпретации анализа Кока-Ловера

Теперь мы можем описать интерпретацию  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$  инфинитезимального анализа Кока-Ловера, работая с которой мы действуем в рамках классической двузначной логики, но которая даст нам возможность автоматически расщеплять любые сущности.

Мы берем категорию  $\mathbf{L}$ , которая является дуальной категорией для категории конечно порожденных  $C^\infty$ -колец.

Категория  $\mathbf{L}$  называется *категорией локусов* [62]. Объектами категории  $\mathbf{L}$  являются все те же конечно порожденные  $C^\infty$ -кольца, а морфизмами – обращенные морфизмы категории конечно порожденных  $C^\infty$ -колец. Принято во избежание путаницы объекты (локусы) категории  $\mathbf{L}$  обозначать как  $\ell A$ , где  $A$  –  $C^\infty$ -кольцо.

Конечно порожденное  $C^\infty$ -кольцо  $\ell A$  – это кольцо вида  $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$  для некоторого натурального числа  $n$  и некоторого конечно порожденного идеала  $I$ . Конечно порожденный идеал  $I = (f_1, \dots, f_k)$  кольца  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , порожденный функциями  $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , состоит из функций вида  $\sum_{i=1}^k g_i f_i$ , где  $g_1, \dots, g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  – произвольные гладкие функции.

Локусы  $\ell A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$  можно использовать для интерпретации локальных сознаний, о которых мы говорили в начале гл. 11.

Для нас важно, что при интерпретации

$$R = \ell C^\infty(\mathbb{R}).$$

Упомянутый в аксиоме (A3) объект

$$D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(x^2).$$

Нильпотенты из  $D$  часто называют *инфинитезимальными*, т.е. бесконечно малыми элементами.

Наконец, самое важное для нас – посмотреть, как происходит расщепление сущностей. В данном случае, как выглядит, например, расщепление (ветвление) «действительного числа»  $r \in R$ ?

В интерпретации **Sets**<sup>L<sup>op</sup></sup> вещественное число  $r$  при «осознании»  $\ell A$ , т.е.  $r \in_{\ell A} R$ , где  $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ , – это класс эквивалентности  $f(x) \bmod I$ , где  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = A$ .

Иначе говоря, число – это функция, которая зависит от выбора локуса  $\ell A$ . В самом простом случае при выборе двух разных «осознаний»  $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$  и  $\ell B = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$  при  $n \neq m$  «число»  $r \in_{\ell A} R = f(x_1, \dots, x_n)$ , а  $r \in_{\ell B} R = g(x_1, \dots, x_m)$ , т.е. зависят от разного числа переменных!

Таким образом, мы имеем многовариантность «действительного числа»  $r \in R$ , возникающую вследствие расщепления сознания **L**. Мы можем написать, что имеет место формальная сумма

$$|r\rangle = \sum_{\ell A \in \mathbf{L}} c_{\ell A} |r_{\ell A}\rangle.$$

Это согласуется с тем, о чем говорилось в §§ 11.1, 11.2.

Заметим, что инфинитезималь  $d \in_{\ell A} D$  – это класс  $f(x) \bmod I$  с  $f^2 \in I$ .

Осталось указать, что *функция* из  $f \in_{\ell A} R^R$  – это класс  $F(x, a) \bmod \pi^*(I)$ , где  $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  и  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – проекция;  $\pi^*(I)$  – идеал, порожденный  $\{f \circ \pi : f \in I\}$ . Поэтому

---

представитель  $F$  функции  $f$  из  $R^R$  есть функция  $F(-, a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , зависящая гладко от параметра  $a \in \mathbb{R}^n$ .

Мы отсылаем к книге [12], где подробно излагается теория многовариантных (расщепляющихся) пространства-времени, электрона, электромагнитных волн и т.д.

## Глава 12

# Квантовое сознание

Квантовая кибернетика не могла оставить без внимания проблему объяснения природы сознания. Физика долго избегала эту проблему и не рассматривала её в качестве своей важнейшей задачи. Однако в конце XX века необходимость обоснования теории измерения в квантовой механике, а также развитие теории квантового компьютера заставили физиков задуматься над исходной задачей кибернетики [20, с.70].

### 12.1. Квантовая модель Хамероффа-Пенроуза моментов сознания

В работах Пенроуза и Хамероффа предложен механизм сознания [64], согласно которому сознание человека представляет собой дискретизированные процессы, реализованные на основе перестроек в отдельных белковых молекулах микротрубочек, образующих так называемый цитоскелет нейронов головного мозга, и описываемые как сменяющие друг друга квантовые процессы когеренции и «объективной» декогеренции. При этом «объективная» декогеренция – это особый аналог декогеренции, наступающей при достижении порога неустойчивости, связанного с выбором геометрии пространства-времени. На-



бор возможных геометрий, их отбор должен осуществляться в соответствии с квантовой гравитацией – теорией, которая объединяет общую теорию относительности и квантовую механику и о которой мы сегодня имеем лишь самые приближенные представления.

### 12.1.1. Квантовые когерентные суперпозиции в мозгу

Мозг человека состоит, в частности, из особых нервных клеток, называемых нейронами.

*Нейрон* (от греч. *νευρον* – нерв) – нервная клетка, состоящая из тела и отходящих от него отростков – относительно коротких дендритов и длинного аксона; основная структурная и функциональная единица нервной системы. Нейроны проводят нервные импульсы от рецепторов в центральную нервную систему (чувствительный нейрон), от центральной нервной системы к исполнительным органам (двигательный нейрон), соединяют между собой несколько других нервных клеток (вставочные нейроны). Взаимодействуют нейроны между собой и с клетками исполнительных органов через синапсы. У колорацки число нейронов  $10^2$ , у человека – более  $10^{10}$ .

Нейрон пронизан трехмерной сеткой из белковых нитей (филаментов), называемой *цитоскелетом*. Цитоскелет является аналогом скелета организма человека, состоящего из твердых костей, гибких связок, соединяющих кости между собой, и мягких мышц, которые прикреплены к костям и, с силой меняя форму, изменяют взаимное расположение разных костей и мягких тканей тела относительно костей. В клетке роль костей и мышц выполняют специальные белки. Вся система таких белков – филаментов – и представляет собой цитоскелет. В зависимости от диаметра филаменты разделяются на три группы: микрофиламенты (6-8 нм), промежуточные волокна (около 10 нм) и микротрубочки (около 25 нм). Микротрубочки – важная часть «скелета» клетки.

Микротрубочки представляют собой полые цилиндры диа-

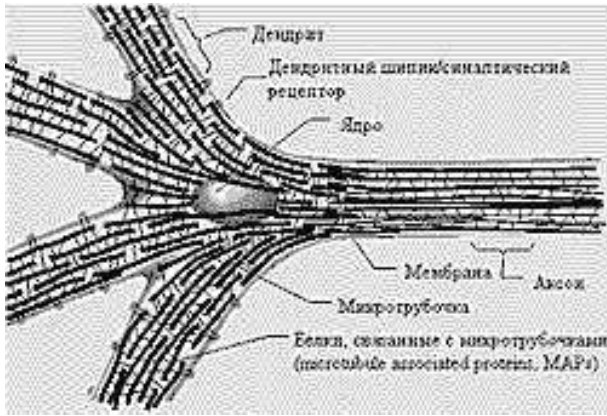


Рис. 12.1: Микротрубочки в нейроне

метром около 25 нм с толщиной стенки около 5 нм. Стенка цилиндра состоит из линейных полимеров тубулина с продольно ориентированными гетеродимерами.

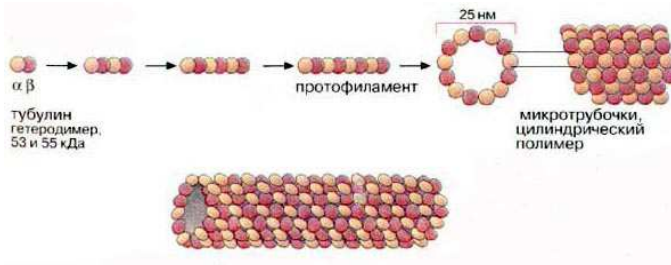


Рис. 12.2: Микротрубочки

Тубулины – это молекулы-димеры, т.е. они могут существовать по крайней мере в двух пространственных конфигурациях (конформациях). Для того чтобы произошло «переключение» из одной конформации в другую, достаточно, чтобы единственный электрон «переехал с места на место». Поверх-

ность микротрубочки составлена из тубулинов, расположенных в узлах правильной решетки. Конфигурация каждого тубулина зависит от конфигурации его соседей.

Микротрубочки являются динамическими структурами, т.е. постоянно изменяющимися во времени. Они одновременно собираются и разбираются.

Две конфигурации тубулина представляют два чистых квантовых состояния тубулина. Они образуют квантовый кубит, представляющий квантовое состояние тубулина.

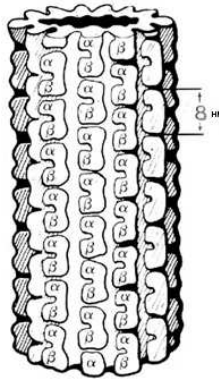


Рис. 12.3: Микротрубочка,  $\alpha$ -,  $\beta$ -мономеры, образующие тубулин

$$|\text{Э}\rangle = c_1 |\text{Я}\rangle + c_2 |\text{Б}\rangle$$

Рис. 12.4: Квантовый кубит из двух конфигураций тубулина

Предполагается, что в микротрубочках какое-то число тубулинов может образовывать большие *когерентные квантовые суперпозиции*.

Что такое квантовая когерентность<sup>1</sup>? Этот феномен воз-

<sup>1</sup>Пенроуз предпочитает называть сцепленность когеренцией (см. Хокинг С. и др. Большое, малое и человеческий разум. СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2008. С.149.

никает при условиях, позволяющих большому числу частиц образовывать совместно единое квантовое состояние, практически не сцепленное с окружением [37, с.210].

Дав такое определение, можно уточнить высказанное выше предположение: допускается, что моменту сознания предшествует появление глобальной квантовой когерентной суперпозиции, в которой либо участвует вся совокупность микротрубочек в цитоскелетах большого семейства нейронов мозга, либо между когерентными состояниями различных микротрубочек в мозге возникает квантовая сцепленность [37, с.242]. Сказанное означает невозможность полностью классического описания коллективного поведения совокупности микротрубочек. Иначе говоря, нельзя использовать только ту часть физики, которая обходится в описании явлений без привлечения идей и аппарата квантовой механики.

Последовательные перестройки конфигурации тубулинов можно рассматривать как своеобразные «квантовые вычисления». Эти вычисления, в свою очередь, влияют на передачу сигналов между нейронами.

### 12.1.2. Объективная декогеренция *OR*

Большая совокупность тубулинов некоторое время находится в глобальной квантовой когерентной суперпозиции (шаг 6 на рис. 12.5), которая способна переходить в классическое состояние с помощью особой процедуры *OR*, подобной коллапсу или декогеренции состояния квантовой системы, но которая на сегодня не имеет точного описания в современной квантовой теории. Этот переход и есть «момент сознания». Поток таких событий и образует субъективно ощущаемый «поток сознания».

Какое число микротрубочек участвует в акте сознания? Среднее количество тубулинов, находящихся в сцепленном состоянии при реализации «момента сознания», оценивается в один миллиард. Для этого с большим запасом хватает тысячи нейронов. В более сложной модели «оркестрованной *OR*» с участием белков MAPs, связывающих микротрубочки друг

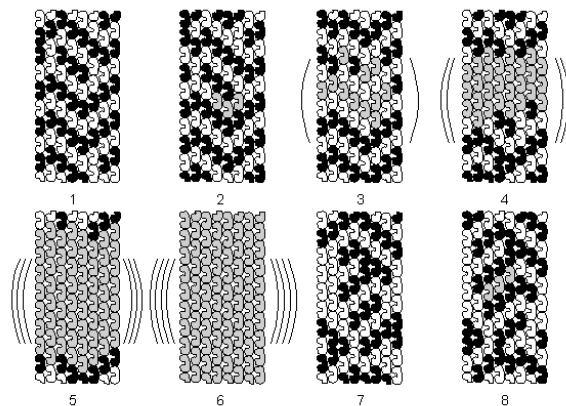


Рис. 12.5: Микротрубочка переходит в когерентное квантовое состояние (шаг 6)

с другом, количество «моментов сознания» в мозгу человека может достигать сотен миллионов в секунду. В нервной системе червя, с его 302 нейронами и примерно тремя миллиардами тубулинов, «моментов сознания» будет не более двух в секунду – на большее нейронов не хватит.

Не всякий материал одинаково пригоден в качестве субстрата конструкции, в которой должно «зародиться сознание».

### 12.1.3. Почему сознание возникает в «классической» системе

Квантовые вычисления сами по себе, как мы знаем, неустойчивы.

«Для осуществления устойчивых вычислений нужна гибридная система, сочетающая классические и квантовые принципы. Отсюда понятно, почему необходимы подчиненные классическим законам нервные процессы. Роль «классической» подсистемы заключается в стабилизации, регуляции

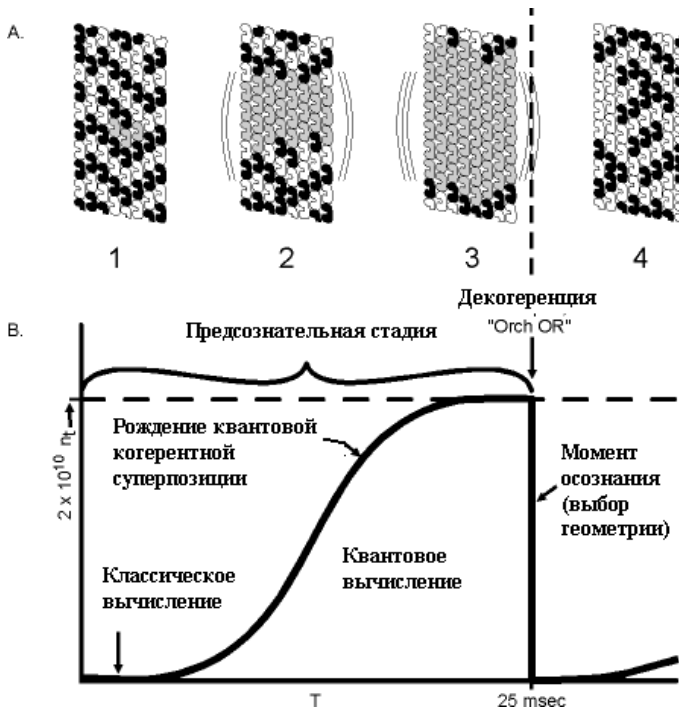


Рис. 12.6: Рождение «момента сознания» благодаря *OR*. А. Перестройки (вычисления) в микротрубочке. В. График числа тубулинов, переходящих в квантовую когерентную суперпозицию

«квантовой» подсистемы нашего мозга, в ее управлении. «Классическая» подсистема задает для «квантовой» внешний потенциал и граничные условия – и тем самым задает характер ее функционирования. «Классическая» подсистема также осуществляет измерения над «квантовой», и именно этот измерительный процесс, как мы полагаем, создает «актуально переживаемое», т. е. «чувственность».

В целом функциональное сознание – это продукт совместной деятельности «классической» и «квантовой» подсистем,

хотя субъективно сознание коррелятивно только квантовым состояниям. (Конечно, проводимое здесь различие «классического» и «квантового» не является абсолютным. «Классическая» подсистема также обладает квантовыми свойствами, но эти свойства проявляются лишь на уровне составляющих ее микроскопических частей, тогда как «квантовая» подсистема проявляет свои квантовые свойства в макромасштабе. Иными словами, «классическая» подсистема – это некоторое усреднение по множеству индивидуальных микроскопических квантовых систем)» [18].

Мозг, как классическая система, выполняет еще одну функцию. Дело в том, что микротрубочки имеются во всех клетках всех организмов, за исключением некоторых бактерий. Так что же, печень или желудок тоже обладают сознанием? Думается, что нет, не обладают. В таком случае то, что сознание рождается в мозгу, тесно связано с его классическим устройством.

## 12.2. Стюарт Хамерофф

**Born:** July 16, 1947 – Buffalo, New York.

### **Education**

1965 – Cleveland Heights High School, Cleveland, Ohio.

1969 – B.S. University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA (Chemistry).

1973 – M.D. Hahnemann Medical College, Philadelphia, PA.

### **Employment/Appointment**

1973-74 – Internship, Tucson Medical Center, Tucson, Arizona.

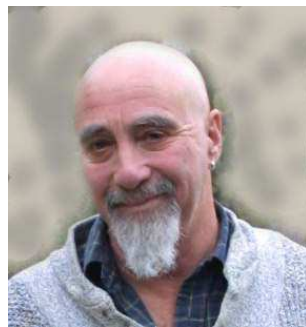


Рис. 12.7: Stuart Hameroff

1975-77 – Residency, Department of Anesthesiology, University of Arizona Health Sciences Center, Tucson, Arizona (Chief Resident, 1976-77).

1977-present – Present Attending physician/anesthesiologist, Department of Anesthesiology, University Medical Center, University Physicians Incorporated, University of Arizona Health Sciences Center.

1978 – Assistant Professor.

1979 – Certified by American Board of Anesthesiology.

1979-85 – Director, Pain Clinic/Pain Service.

1984 – Associate Professor with Tenure.

1994 – Joint Appointment, Associate Professor, Department of Psychology, University of Arizona.

1995 – Professor, Department of Anesthesiology and Psychology, University of Arizona.

1999 – Associate Director, Center for Consciousness Studies, University of Arizona.

2003 – Emeritus Professor, Departments of Anesthesiology and Psychology, The University of Arizona.

### **Research interests.**

Consciousness studies, quantum mechanical/general relativity approaches to consciousness, protein conformational dynamics, molecular mechanisms of anesthetic gas molecules, information processing in cytoskeletal microtubules, quantum information science, essential features of living systems, nanotechnology, nanomedicine, philosophical pan-protopsyichism, coherence and decoherence.

## **12.3. Роджер Пенроуз**

«Sir Roger Penrose (born 8 August 1931) is an English mathematical physicist and Emeritus Rouse Ball Professor of Mathematics at the University of Oxford. He is highly regarded for his work in mathematical physics, in particular his contributions to general relativity and cosmology. He is also a recreational mathematician and controversial philosopher. Roger Penrose is



the son of scientist Lionel S. Penrose and Margaret Leathes, and the brother of mathematician Oliver Penrose and chess grandmaster Jonathan Penrose.



Рис. 12.8: Roger Penrose

Penrose earned his Ph.D. at Cambridge in 1958, writing a thesis on tensor methods in algebraic geometry under the well known algebraist and geometer John A. Todd. In 1965 at Cambridge, Penrose and physicist Steven Hawking proved that singularities (such as black holes) could be formed from the gravitational collapse of dying immense stars.

In 1967, Penrose invented the twistor theory which maps geometric objects in Minkowski space into the 4-dimensional complex space with the metric signature  $(2,2)$ . In 1969 he conjectured the cosmic censorship hypothesis.

Penrose has written controversial books on the connection between fundamental physics and human consciousness»<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>См. Wikipedia по адресу [http://en.wikipedia.org/wiki/Roger\\_Penrose#Career](http://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose#Career)

## Глава 13

# Квантовая ПСИХОПАТОЛОГИЯ

Понимание того, что мозг и вычислительная машина имеют много общего, может привести к новым ценным методам в психопатологии и даже в психиатрии.

Н.Винер, «Кибернетика».

Взгляд на работу мозга как на квантовый компьютер позволяет понять, какова причина тех или иных психических патологий.

В соответствии со взглядами Хамероффа и Пенроуза (гл.12) осознание проистекает нормально, без каких-либо патологий в том случае, когда в микротрубочках ничто не препятствует рождению когерентных суперпозиций в ходе квантовых вычислений. Мозг работает нормально, подобно тому как работает компьютер, если его механизм компьютера, его процессор и память не имеют повреждений. Повреждения влекут сбой в

работе мозга, каковыми и являются психические расстройства. В частности, это парафрения, шизофрения и болезнь Альцгеймера.

### 13.1. Парафрениии – следствие поломки микротрубочек в мозгу

Парафрения<sup>1</sup> – наиболее тяжелая форма бредового синдрома, более тяжелая, чем паранойя или параноид. Парафрения – психическое расстройство, характеризующееся систематизированным бредом и галлюцинациями при отсутствии каких-либо других явных симптомов психического заболевания. Утрата контакта с окружающей действительностью при парафрении проявляется у человека только в виде бреда и галлюцинаций. Парафрения развивается преимущественно у глухих людей или лиц пожилого возраста. Иногда у таких больных по прошествии нескольких лет могут появиться другие симптомы шизофрении. Поэтому в настоящее время вопрос о том, является ли парафрения самостоятельным заболеванием или нет, остается спорным.

«Группа ученых под руководством доктора Мануэля Казановы (Manuel Casanova) из Медицинского колледжа Джорджии исследовала мозг 64 пациентов с парафренией и 18 здоровых людей.

Было установлено, что при парафрении откладывается так называемый тау-белок в нервных клетках в области мозга, известной как гишпокамп. Тау-белок в клетках регулирует образование микротрубочек, которые составляют «скелет» клетки и служат для проведения информации из одной ее части в другую. В результате отложения тау-белка разрушают микротрубочки, информация внутри клетки не передается и наблюдается ее дисфункция.

---

<sup>1</sup>Парафрения по клинической картине стоит близко к параноидной шизофрении. Парафрения отличается от шизофрении длительно сохраняющейся живостью эмоциональной сферы и относительной психической сохранностью.

Согласно статистике, до одного процента населения планеты страдает шизофренией. Из них примерно у каждого пятого наблюдается заболевание, которое изучалось в данном исследовании»<sup>2</sup>.

## 13.2. Микротрубочки при шизофрении

Исследования Н.А. Урановой [42] по установлению нейроморфологических особенностей дофаминергической системы мозга при шизофрении в структурах, являющихся источником дофаминовых проекций на уровне среднего мозга (комплекс черная субстанция – вентральное поле покрышки среднего мозга), и в структурах, в которых оканчиваются аксоны дофаминовых нейронов (хвостатое ядро, префронтальная кора, передняя лимбическая кора), показали, что:

« – Ультраструктура черной субстанции. В случаях шизофрении по сравнению с контролем в этой области мозга четко выступала своего рода мозаичность, когда на фоне неизменных участков ткани выделялись клетки с признаками различных структурных изменений. Наиболее часто встречались нейроны с разной степенью гиперхромии. Имелись также сморщенные клетки, которых больше было в случаях непрерывнотекущей шизофрении. В дофаминовых нейронах имелось обилие типичных для них гранул нейромеланина, а также обилие липофусциновых гранул, липидных капель и лизосом на разных стадиях трансформации. Наиболее измененными внутриклеточными органеллами при шизофрении оказались митохондрии, в которых выявлено набухание, деформация и разрушение крист, появление осмиофильных включений; можно было видеть связь измененных митохондрий с липидными включениями. Хотя сходные изменения митохондрий обнаруживались и в контрольном материале, степень таких изменений при шизофрении была значительно выше. **В отдельных**

<sup>2</sup>См. сайт: <http://gradusnik.ru/rus/mednews/1/2002-04-23-08-05>

нормохромных нейронах были видны дистрофические изменения в виде разного рода включений в соме и аксонах электронноплотного нитевидного материала, напоминающего измененные нейрофиламенты и микротрубочки. Эти включения располагались в зоне гранулярного эндоплазматического ретикулума, вытесняя последний. Достаточно выраженными они были в 8 случаях шизофрении (у лиц старше 60 лет) и одном контрольном наблюдении (больной 73 лет). Это:

– Ультраструктура головки хвостатого ядра (нигростриатная система). Большинство нейронов в хвостатом ядре при шизофрении были нормохромными с типичной для них цитоплазмой, которая не претерпевала изменений, за исключением увеличения количества липофусциновых гранул и лизосом. Здесь редко встречались хроматолитические и гиперхромные нейроны, что существенно отличало спектр изменений ультраструктуры нейронов хвостатого ядра от описанных выше структур. Лишь в отдельных случаях параноидной шизофрении, с небольшой длительностью и началом болезни в возрасте до 25 лет наблюдались не только гиперхромные, но и сморщенные нейроны.

Структура большинства отростков нейронов, в частности дендритов, миелиновых и безмиелиновых волокон и синаптических контактов, была сохранной. **Но некоторые дендриты были набухшими, в них отсутствовали митохондрии и микротрубочки...**

– В префронтальной коре <..> изменения нейронов были более выраженными полиморфными. Этот полиморфизм определялся большим числом клеток с разной степенью гиперхромных изменений – в диапазоне от нормохромных до сморщенных нейронов, нейронов с признаками периферического хроматолиза, нейронов, нагруженных липофусцином, липидными включениями и лизосомами, которые были расположены среди клеток с сохранной ультраструктурой. В отростках нейронов отмечалось набухание дендритов, **отсутствие в них микротрубочек...».**

### 13.3. Болезнь Альцгеймера

Болезнь Альцгеймера<sup>3</sup> – начинающееся в предстарческом возрасте атрофическое заболевание головного мозга, приводящее к тотальному слабоумию. Главное место в клинической картине прогрессирующего слабоумия занимает распад памяти.

По мере развития болезни Альцгеймера у окружающих складывается впечатление, что больные разучились выполнять привычные действия, настолько бестолково и неправильно они делают знакомую работу. Они не могут стирать, бриться, готовить еду, убираться и т.д. Болезнь приводит их к полной беспомощности. Вместе с тем для данного вида старческого слабоумия характерны нарушения речи и письма. По мере прогрессирования нарушений памяти речь больных становится все более непонятной, нарушается логическая связь, теряется смысл. При письме нарушается конструкция букв и слов. Часто вместо письма больные чертят бесконечные круги и волнистые линии.

На поздних этапах развития болезни Альцгеймера появляются различные эпилептические припадки, что является важным диагностическим признаком. К исходу болезни на фоне тотального слабоумия резко усиливается мышечный тонус, больные лежат в эмбриональной позе, отмечают насильственные гримасы плача и смеха.

«По современным представлениям, большинство болезней, приуроченных к пожилому возрасту (канцерогенез, атеросклероз, инсулинонезависимый сахарный диабет, болезнь Альцгеймера и др.), так или иначе связано с устойчивым развитием на клеточном уровне окислительного стресса. В этой связи нам представлялось важным обратить внимание на весьма вероятную последовательность событий: **дестабилизация цитоскелета (микротрубочек)** – снижение интенсивности потребления  $O_2$  митохондриями – возрастание внутриклеточного напряжения  $O_2$  (окислительный стресс) – развитие различных

---

<sup>3</sup>Материалы web-страницы «Болезнь Альцгеймера» по адресу: <http://www.arhimed-center.ru/razdel7/group33/article88.htm>

патологий по кислородно-перекисному механизму. Хотя в этой цепи событий **дезорганизация микротрубочек** не является главным процессом, снижающим эффективность биоэнергетики (такovým считают нарушение самой дыхательной системы митохондрий), но вклад ее в ограничение окислительного фосфорилирования и в соответствующие негативные последствия, по-видимому, ощутим для клетки.

Весьма любопытны ... материалы о связи болезни Альцгеймера (БА), относящейся к категории свободнорадикальных патологий старения, с состоянием цитоскелета в клетках мозга. Эти данные получены при изучении полимеризации тубулина в микротрубочках в присутствии ионов алюминия. Последние, как оказалось, в концентрациях, сопоставимых с обнаруженными в мозге при БА, вызывали изменения в фосфорилировании белков микротрубочек и приводили к образованию аномальных агрегатов. Авторы данного исследования (Шевцов, Бурбаева, 1998) полагают, что накапливающиеся в мозге ионы алюминия могут нарушить ход сборки микротрубочек путем искажения процесса фосфорилирования их белков, и это обстоятельство может быть одной из причин развития нейродегенеративных процессов при БА.

К пониманию названных фактов можно ... подойти с «кислородно-перекисных» позиций, полагая, что дезорганизация микротрубочек ионами  $Al_3^+$  ведет, согласно вышеизложенному, к окислительному стрессу в клетках мозга при БА» [24].

## Глава 14

# Квантовое зрение

Мы видим реальность, окружающую нас, посредством зрения. Глаз способен различать отдельные кванты света, отдельные фотоны [34, с.427]. Нас интересует, нельзя ли на основе экспериментальных данных о том, как мозг воспринимает кванты света, в сочетании с эвереттовской интерпретацией квантовой механики, увидеть, как те же самые кванты воспринимаются мозгом в параллельной вселенной Эверетта?

### 14.1. Сигналы в ответ на одиночные кванты света

Для регистрации реакции глаза на одиночные кванты света регистрировались мембранные токи в наружных сегментах палочек. Специальный электрод с тонким кончиком подсасывается к наружному сегменту палочки, выступающему из кусочка сетчатки. Узконаправленный пучок света освещает строго одну фоторецепторную клетку [34, с.427]. «Чтобы измерить сигналы в ответ на одиночные кванты света, Бейлор с коллегами регистрировали токи от отдельных палочек в сетчатках жаббы, обезьяны и человека (рис.14.1). Эти опыты представляют собой уникальный пример эксперимента, в котором показано,



как такой сложный процесс, как восприятие слабых вспышек света, может коррелировать с изменениями, происходящими на уровне отдельных молекул.

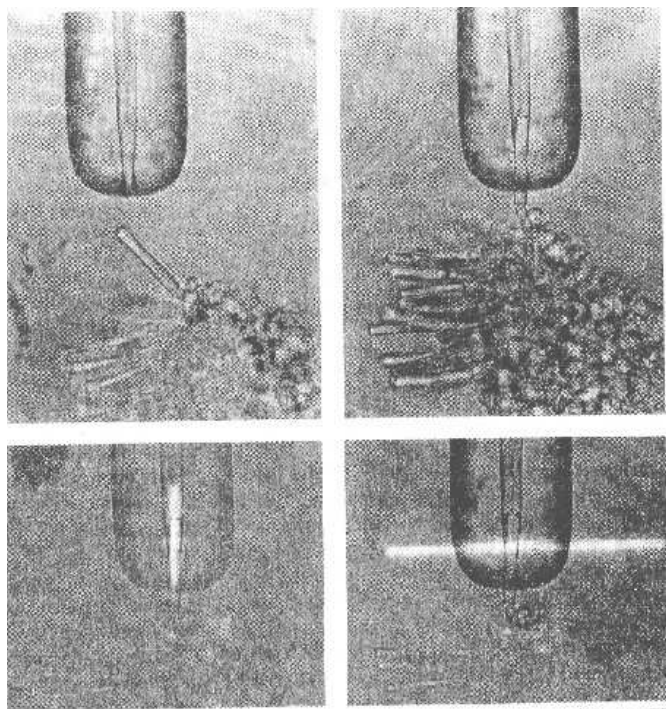


Рис. 14.1: Метод регистрации мембранных токов в наружных сегментах палочек. Специальный электрод с тонким кончиком подсасывается к наружному сегменту палочки, выступающему из кусочка сетчатки. Узконаправленный пучок света освещает строго одну фоторецепторную клетку [34, с.427]

Процедура по изоляции фрагмента сетчатки от животного либо трупного материала должна для этих экспериментов производиться в темноте. Для измерения тока наружный сегмент

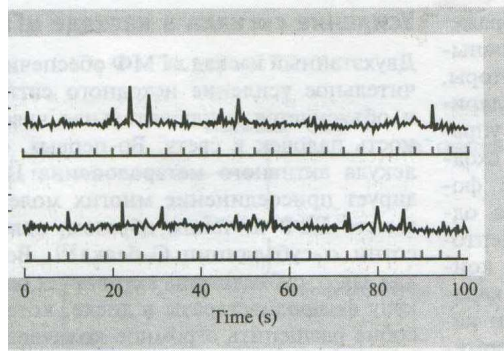


Рис. 14.2: Сигналы, записанные при помощи всасывающего электрода в области наружного сегмента палочки обезьяны. (А) Ответы на слабые вспышки света (показанные нижней линией с подписью «Light»), показано две записи. Наблюдается флуктуация тока квантового характера. Миниатюрные пики соответствуют активации зрительных пигментов отдельными фотонами. Довольно часто фотоизомеризация не возникает [34, с.428]

палочки засасывается в тонкую пипетку (см. рис.14.1). Как и ожидалось, эти эксперименты показывают, что в темноте ток постоянно течет внутрь наружного сегмента. Вспышки света приводят к закрытию каналов в наружном сегменте, вызывая уменьшение «темнового» тока. На рис.14.2 показаны ответы наружного сегмента на очень слабые вспышки света, соответствующие 1-2 квантам. Амплитуда токов невелика и пропорциональна числу поглощенных квантов. Иногда вспышка вызывает одиночный ответ, иногда – двойной, а иногда – вообще никакой реакции» [34, с.428-429].

Повторяя эксперимент и набирая статистику, можно найти плотность функции распределения  $\phi(z)$ , где  $z$  – величина, характеризующая отклонение самописца, регистрирующего сигнал.

Примем, что  $z = 0$  отвечает наиболее вероятному отклику самописца  $Z$ .

Графики, приведенные на рис. 14.3, показывают, что функ-

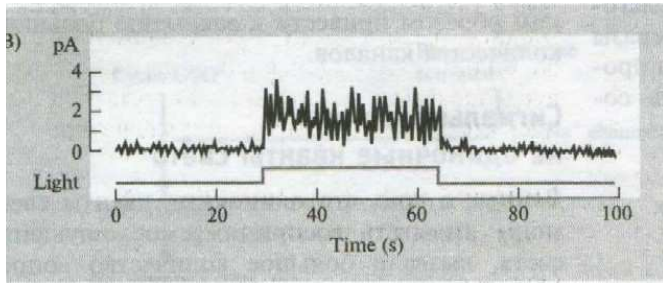


Рис. 14.3: Постоянное, более сильное освещение (нижний график) приводит к серии сигналов [34, с.428]

ция распределения  $\phi^2(z)$  одна и та же для квантов любой интенсивности.

## 14.2. Квантовомеханическое описание системы «квант света - реакция самописца»

Обозначаем величину интенсивности кванта света через  $s$  и предполагаем, что система «квант света  $s$  - реакция самописца ( $z$ )» описывается уравнением Шредингера

$$\frac{d\Psi}{dt} = (H_{qv} + H_z + V_I)\Psi \quad (14.1)$$

с начальным данным

$$\Psi(z, s, 0) = \phi(z)\chi(s). \quad (14.2)$$

Считая, что время взаимодействия, т.е. отклика (реакции) глаза на квант света столь мало, что в течение этого времени действием членов  $H_{qv} + H_z$  гамильтониана можно пренебречь [63], [27, с.169], и принимая

$$V_I = -iz\hbar \frac{\partial}{\partial s},$$

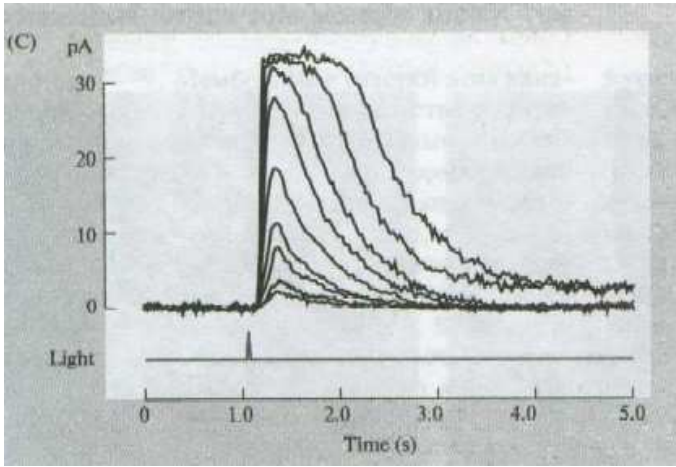


Рис. 14.4: Сигналы, вызванные вспышками разной интенсивности

находим решение нашей задачи:

$$\Psi(z, s, t) = \phi(z)\chi(s - zt). \quad (14.3)$$

Перепишем это выражение в виде [63]

$$\Psi(z, s, t) = \int \left(\frac{1}{N_{s'}}\right) \xi_{s'}(z, t) \delta(s - s') ds', \quad (14.4)$$

где

$$\xi_{s'}(z, t) = N_{s'} \phi(z) \chi(s' - zt)$$

и

$$\left(\frac{1}{N_{s'}}\right)^2 = \int \phi^*(z) \phi(z) \chi^*(s' - zt) \chi(s' - zt) dz.$$

Выражение (14.5) – это суперпозиция (с коэффициентами  $\frac{1}{N_{s'}}$ ) состояний

$$\Psi_{s'} = \xi_{s'}(z, t) \delta(s - s')$$

системы. Каждый элемент суперпозиции  $\Psi_{s'}$  описывает состояние, в котором квант света имеет интенсивность  $s = s'$ , а соотношенное состояние подсистемы «реакция самописца ( $z$ )» задается функцией  $\xi_{s'}(z, t)$ .

Если  $\chi(s)$  является достаточно острой (около  $\delta(s - s_0)$ ), то  $\xi_{s'}(z, t)$  подобна  $\delta(z - (s' - s_0)/t)$  и, следовательно,  $z = (s' - s_0)/t$ .

При  $t \rightarrow \infty$   $z \rightarrow 0$ , т.е. с течением времени самописец будет показывать наиболее вероятное значение своего отклонения. Такой вывод вполне приемлем.

Но в таком случае при фиксированном  $t = T$  формула

$$\Psi(z, s, T) = \int \left(\frac{1}{N_{s'}}\right) \xi_{s'}(z, T) \delta(s - s') ds' \quad (14.5)$$

говорит, как отметил Эверетт, о разветвлении вселенной, при котором в каждой вселенной квант света имеет *различную* интенсивность  $s'$ , а наблюдатель фиксирует отклонение самописца на величину  $z = (s' - s_0)/T$ .



Рис. 14.5: Изображение здания с разной яркостью

Представим  $\Psi(z, s, T)$  в виде

$$\Psi(z, s, T) = \int \phi(z') \delta(z - z') \chi(s - z'T) dz',$$

т.е. как суперпозицию состояний  $\psi_{z'} = \delta(z - z')\chi(s - z'T)$  с коэффициентами  $\phi(z')$ . Каждый из членов  $\psi_{z'}$  суперпозиции описывает состояние системы, а точнее вселенную, в которой самописец показывает отклонение  $z = z'$ , а квант света имеет интенсивность  $s = z'T$ . Число  $|\phi(z')|^2$  — это количество вселенных, в которых  $z = z', s = z'T$ . Полная определенность, никаких вероятностей. Сознание, переходя от вселенной к похожей, близкой по устройству вселенной, видит ту же картину, но с другой яркостью (рис. 14.5).

Однако если разум (сознание) использует одни и те же глаза в каждой вселенной, то он сможет увидеть только то, что доступно глазам как физическому устройству. И, видимо, большинство миров ему закрыты посредством органов зрения.

## Глава 15

# Устройство квантового компьютера

### 15.1. Архитектура квантового компьютера

*Квантовый компьютер* – это физическая система (техническое устройство), которая:

1. Имеет процессор, являющийся квантовой системой, состоящей из квантовых частиц, т.е. частиц, подчиняющихся принципам квантовой механики, физически реализующих кубиты.

2. Имеется возможность приводить систему в точно известное начальное состояние.

3. Степень изоляции от внешней среды должна быть очень высока (борьба с декогеренцией).

4. Надо уметь менять состояние системы согласно заданной последовательности унитарных преобразований. Другими словами, необходимо реализовать в системе квантовые логические элементы (гейты).

5. Необходимо иметь возможность выполнять измерения

состояния системы, при которых это состояние переходит в одно из чистых состояний – результат измерения.

6. Управление работой квантового процессора осуществляет классический компьютер.

Схема устройства квантового компьютера дана на рис. 15.1.

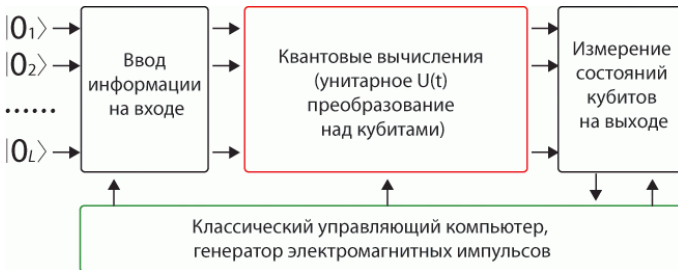


Рис. 15.1: Устройства квантового компьютера

Сегодня считаются реальными следующие направления в создании квантового компьютера<sup>1</sup>:

- подход относится к так называемым ЯМР-технологиям, т.е. технологиям, использующим ядерно магнитный резонанс; считается, что много кубитов на них получить вряд ли удастся (сейчас рекорд – 10);
- квантовый компьютер, использующий ионные ловушки. Уже получены сцепленные состояния ионов меди и магния (тоже в районе десяти штук).
- адиабатические квантовые компьютеры. Исходные данные задачи кодируются исходным состоянием набора кубитов – тем, которое имеет наименьшую возможную энергию. Потом систему начинают медленно менять. И

<sup>1</sup>Левкович-Маслюк Л. // Компьютерра. N.9 от 09 марта 2007 года. <http://offline.computerra.ru/2007/677/310169/>



это состояние минимальной энергии («основное состояние») тоже медленно меняется, но всё время остается (по идее) состоянием с минимальной возможной энергией. И в конце концов процесс выходит на такую конфигурацию этого основного состояния, которая и кодирует ответ. Именно эту архитектуру выбрала для своего квантового компьютера канадская фирма D-Wave (см. § 15.4).

## 15.2. Квантовый ЯМР-компьютер

Берется раствор молекул и помещается при комнатной температуре во внешнее магнитное поле. При этом атомные ядра, обладающие ядерным спином, т.е. являющиеся как бы маленькими магнитами, займут одно из двух положений – по полю и против него (это один кубит). Их эволюция, т.е. квантовые логические элементы (гейты), осуществляется с помощью так называемых резонансных радиоимпульсов. В молекулах между ядрами разных атомов через общие валентные электроны происходят спин-спиновые взаимодействия. Эти связи кубитов должны служить для установления между ними логических отношений.

В США специалисты отработывали эту идею на двухкубитовых молекулах хлороформа  $^{13}\text{CHCl}_3$ . Один кубит – ядро углерода, второй – водорода (хлор в процессе вычислений не участвует). Подобрав определённую последовательность радиоимпульсов (в этом состоит программирование в таких компьютерах), удалось построить логическую функцию «НЕ».

Для приготовления начального состояния необходима температура  $< 10^{-3}\text{K}$ . Помимо трудностей с охлаждением, при такой температуре возрастают нежелательные взаимодействия молекул друг с другом.

На построенных квантовых ЯМР-компьютерах были осуществлены: алгоритм Гровера поиска данных, квантовое фурье-преобразование, квантовая коррекция ошибок, квантовая телепортация, квантовое моделирование и другие операции.

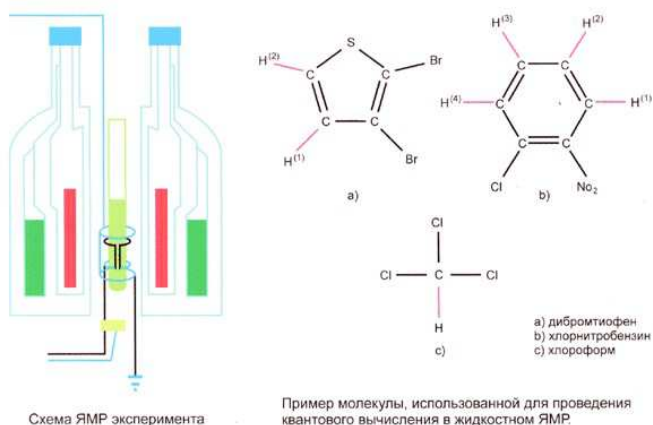


Рис. 15.2: Схема ЯМР-компьютера [32]

К сожалению, квантовые ЯМР-компьютеры на молекулах органической жидкости не смогут иметь число кубитов значительно больше десяти. Их следует рассматривать лишь как прототипы будущих квантовых компьютеров.

### 15.3. Квантовый компьютер, использующий ионные ловушки

Схема ионной ловушки дана на рис. 15.3. Она состоит из четырёх прутков-электродов, расположенных так, чтобы сформировать трёхмерную клетку. Показаны однозаряженные ионы, выстроенные в одномерную цепочку. Каждый ион находится в одном из состояний двухуровневого основного состояния сверхтонкой структуры. «Любое движение одного из ионов передаётся посредством электростатического отталкивания другим ионам в ловушке, индуцируя различные коллективные движения, известные как фононы. Отдельный ион может быть приведён в движение посредством лазерной пушки, направ-

ленной на него, и каждый ион может быть управляем независимо, потому что межоионное разделение гораздо больше, чем длина волны, которая индуцирует его возбуждение. Комбинирование лазерного света и фононов может индуцировать нетривиальную логику, которая может быть использована в квантовых вычислениях»<sup>2</sup>.

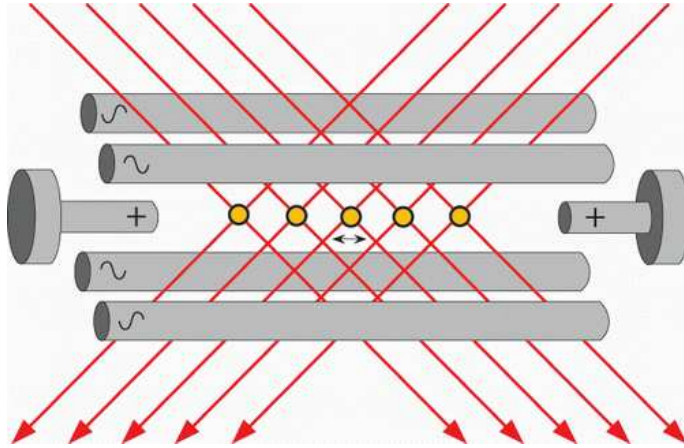


Рис. 15.3: Модельный квантовый компьютер на ионных ловушках. В линейной структуре благодаря взаимному отталкиванию ионы (цепочка из кружочков) находятся на расстоянии  $\sim 20$  мкм. Каждый ион управляется парой лазерных лучей и представляет собой кубит

Взаимодействие между заряженными ионами в одномерной цепочке этих ловушек, необходимое для создания более, чем однокубитового регистра, осуществляется посредством возбуждения их коллективного движения, а индивидуальное управление ими – с помощью лазеров инфракрасного диапазона.

Первый прототип квантового компьютера на этих принципах был предложен австрийскими физиками И. Цираком и П. Цоллером в 1995 году.

<sup>2</sup>См. <http://amster.nm.ru/qtech/general01.html>

Основными недостатками данного типа квантовых компьютеров являются необходимость создания сверхнизких температур, обеспечение устойчивости состояний ионов в цепочке и ограниченность возможного числа кубитов значением  $< 40$ .

## 15.4. Квантовый компьютер D-Wave Orion

В 2007 году канадская фирма D-Wave объявила о создании коммерческого квантового компьютера Orion.

Сегодня люди науки не склонны признавать компьютер Orion в качестве квантового компьютера. Хотя многие специалисты отнеслись к этому скептически, приведем описание этого устройства.

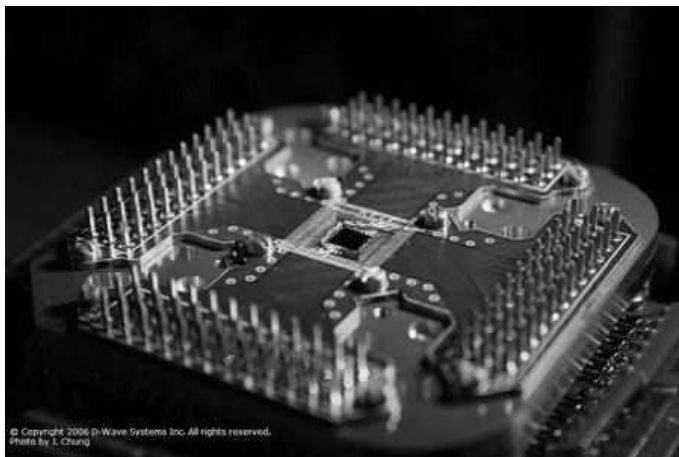


Рис. 15.4: 16-кубитовый процессор Orion.

Компьютер D-Wave Orion построен на кремниевом чипе (рис. 15.4), который содержит 16 кубитов, соединенных друг с другом. Каждый кубит состоит из кристалла ниобия, помещенного в катушку индуктивности.

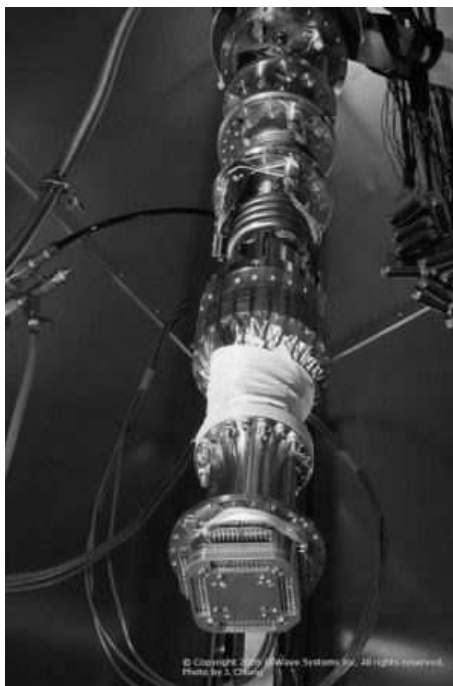


Рис. 15.5: Процессор Orion, закрепленный на криогенном «холодильнике» Leiden

Электрический ток, протекающий по катушке, генерирует магнитное поле, а оно, в свою очередь, вызывает изменение состояния кубита. Ниобий реагирует на магнитные поля; параметры магнитных полей можно легко измерить; их изменения, вызванные ниобием, могут быть переведены в результат, который и является решением задачи.

Как удалось реализовать кубиты из кристаллов ниобия? В ниобии находится множество электронов.

Электроны – это фермионы, они не могут быть одновременно в одном квантовом состоянии. Но их заставляют принимать одновременно одно и то же квантовое состояние, охла-

ждая жидким гелием до  $-273,145\text{ C}$ , т.е. почти до абсолютного нуля. При такой температуре электроны образуют куперовые пары<sup>3</sup>; пары являются бозоннами, а бозоны могут все разом находиться в одинаковом состоянии. Как видим, данный процессор (чип) требует мощного охлаждения (рис. 15.5).

Итак, все электроны в кристалле ниобия ведут себя синхронно, и все разом являют собой состояние кубита. Это и есть физическая реализация кубита.

Элементная база, на которой работает Orion, – решетка из сверхпроводящих элементов, колец из алюминия и ниобия. Состояние кубита здесь зависит от наличия или отсутствия магнитного потока через кольцо.

При помощи определённым образом меняющихся магнитных полей произойдет воздействие на кубиты.

Квантовые логические элементы (гейты), меняющие состояние всех кубитов сразу, реализуются с помощью специальных программ для классических компьютеров, управляющих тем физическим оборудованием, которое меняет состояние кубитов, а также производит измерение их состояний.

В конечном счете, компьютер Orion – аналоговое устройство. Работа программ квантового компьютера – это процесс аналогового физического моделирования, а программы в цифровых вычислительных машинах, по существу, выполняют математические процедуры.

---

<sup>3</sup>Идею использовать куперовы пары в квантовых точках, связанных переходами Джозефсона, предложил в 1998 году Д.В. Аверин [57].

# Литература

- [1] Александров А.Д. *О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике* // Доклады АН СССР. 1952. Т.84, N.2. С.253-256.
- [2] Александров А.Д. *О смысле волновой функции* // Доклады АН СССР. 1952. Т.85, N.2. С.291-294.
- [3] Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. *Основы криптографии*. М.: Гелиос АРВ, 2001.
- [4] *Большая советская энциклопедия*. М., 1969-1978.
- [5] Бондаренко И.А. *Феноменология бытийственного сознания*. М., 2000.
- [6] Браунштейн С.Л. *Квантовые вычисления: учебное руководство* // Квантовый компьютер. 1999. Т.1, N1 С.11-34.
- [7] Васюков В.П. *Квантовая логика*. М.: ПЕР СЭ, 2005.
- [8] Валиев К.А., Кокин А.А. *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*. М./Ижевск: РХД, 2001.
- [9] Вейль Г. *Геметрия и физика* / Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
- [10] Вербицкий М. *Easy listening for the hard of hearing (легкая музыка для немного оглохших)*.  
– <http://www.arctogaia.com/VTORZH/verbit.htm>
- [11] Гарднер М. *Путешествие во времени*. М.: Мир, 1990.
- [12] Гуц А.К. *Элементы теории времени*. Омск: Издательство Диалог-Сибирь, 2004.
- [13] Дивинченцо Д. *Квантовые вычисления* // Квантовый компьютер. 1999. Т.1, N1 С.35-59.
- [14] Дирак П. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979.
- [15] Дойч Д. *Структура реальности*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

- [16] Доронин С.И. Роль и значение квантовой теории в свете ее последних достижений // *Квантовая Магия*. 2004. Т.1, Вып.1. С.1101-1122. <http://www.fund-intent.ru/science/scns035.shtml#gl>
- [17] *Квантовая механика Эверетта* // Сайт в Интернете. – <http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/Everett>.
- [18] Иванов Е.М. *Сознание и квантовые компьютеры*. – [http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philsience/8\\_00/06\\_Ivan.htm](http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philsience/8_00/06_Ivan.htm)
- [19] Каминский А.В. *Введение в физику сознания*. 1997.
- [20] Капра Ф. *Паутина жизни*. Киев/Москва: София / Гелиос, 2002.
- [21] Кузин Л.Т. *Основы кибернетики*. М.: Энергия, 1973.
- [22] Лем С. *Диалоги*. М.: Транзиткнига, 2005.
- [23] *Привычный способ восприятия времени – причина войн на планете* / Сайт в Интернете: 5-й путь. Теория мембранной природы человека. – [http://the-fifth-way.narod.ru/t\\_time.html](http://the-fifth-way.narod.ru/t_time.html)
- [24] Лю Б.Н., Исмаилов Б.И. *Состояние микротрубочек цитоскелета и внутриклеточный уровень рО<sub>2</sub> в норме и при патологии* / Рак – проблема XXI века. Сб. научных трудов, посвященных 40-летию Казахского НИИ онкологии и радиологии. Алматы, 2000. С.415-417.
- [25] Манин Ю.И. *Вычислимое и невычислимое*. М.: Советское радио, 1980.
- [26] Манин Ю.И. *Классическое и квантовое вычисление и факторизация Шора*. / Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [27] Менский М.Б. *Квантовые измерения и декогеренция*. М.: Физматлит, 2001.
- [28] Менский М.Б. *Квантовая механика, сознание и мост между двумя культурами* // Вопросы философии. 2004. N.6. С.64-74.
- [29] Менский М.Б. *Человек и квантовый мир*. Фрязино: Век2, 2005.
- [30] Мессиа А. *Квантовая механика*. Т.1. М.:ФМ, 1978.
- [31] Меськов В.С. *Очерки по логике квантовой механики*. М., 1986.
- [32] Неизвестный И.Г. *Квантовый компьютер и его полупроводниковая элементарная база*. – <http://www.psj.nsu.ru/lector/neizvestniy/3.html>
- [33] Нейман Дж. *Математические основы квантовой механики*. М.: Наука, 1964.
- [34] Николис Дж., Мартин А.Р., Валлас Б.Дж., Фукс П.А. *От нейрона к мозгу*. М.: УРСС, 2003.
- [35] Ожигов Ю.И. *Квантовые вычисления*. М.: МГУ, 2003.



- [36] Пенроуз Р. *Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики*. М., 2003.
- [37] Пенроуз Р. *Тени разума. В поисках науки о сознании*. П. М.-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2005.
- [38] Равич-Щербо И.В., Марютина Т.М., Григоренко Е.Л. *Психогенетика*. М.: Аспект Пресс, 2000.
- [39] Смирнов А.Д. *Архитектура вычислительных систем*. М.: Наука, 1990.
- [40] Стин Э. *Квантовые вычисления*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
- [41] Уилсон Р.А. *Квантовая психология*. К.: «ЯНУС», 2001.
- [42] Уранова Н.А. *Дофаминергическая система мозга при шизофрении (ультраструктурно-морфометрическое исследование)*. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени док-ра мед. наук
- [43] *Физика квантовой информации* / Ред. Д.Боумейстер, А.Экерт, А.Цайлингер. М.: Постмаркет, 2002.
- [44] Фоллмер Г. *Эволюционная теория познания*.
- [45] Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике. Квантовая механика*. Т.8. М.:Мир, 1966.
- [46] Фейнман Р. *Моделирование физики на компьютерах* / Сб.: Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ред. ж-ла «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 1999. С.96-124.
- [47] Фейнман Р. *Квантовомеханические компьютеры* / Сб.: Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ред. ж-ла «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 1999. С.125-156.
- [48] Шор П. *Полиномиальные по времени алгоритмы разложения числа на простые множители и нахождение дискретного логарифма для квантового компьютера*. / Сб.: Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ред. ж-ла «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 1999. С.200-247.
- [49] Хайдеггер М. *Бытие и время*. М.: Фолио, 2003.
- [50] Холево А.С. *Введение в квантовую теорию информации*. М.: МЦНМО, 2002.
- [51] Шевцов П.Н., Шевцова Е.Ф., Бурбаева Г.Ш., Бачурин С.О. *Нарушение сборки микротрубочек мозга человека при болезни Альцгеймера // Бюллетень экспериментальной биологии и медицины*. 2006. Т.141, N.2. С.229.
- [52] Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. *Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным?* / Эйнштейн А. Собрание научных сочинений. Т.3. М.: Наука, 1968.

- [53] Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. Т.4. М.: Наука, 1967.
- [54] Aerts D., D'Hondt E., Gabora L. Why disjunction in quantum logic is not classical. Los Alamos arxiv: quant-ph/007041v1 (2000).
- [55] Aharonov D. *Quantum computation*. – Arxiv: quant-ph/9812037 (1998).
- [56] Aspect A., Grangier P., Roger G. *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem* // Phys. Phys. Lett. 1981. V.47. P.460.
- [57] Averin D. V. *Quant Computing and Quantum Measurement with Mesoscopic Josev-son Junctions*. – ArXiv.quant-ph/0008114 (2000).
- [58] Bennett C.H., Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A., Wootters W.K. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels* // Phys. Rev. Lett. 1993. N.70. P.1895-1899.
- [59] Deutsch D., Ekert A., Lupacchini R. *Machines, Logic and Quantum Physics*. – Los Alamos arXiv:math.HO/9911150 (1999).
- [60] Ekert A., Hayden P., Hitoshi I. Basic concept in quantum computation. – Los Alamos arXiv:quant-ph/0011013 (2000).
- [61] Kock A. *Synthetic Differential Geometry*. Cambridge University Press, 1981.
- [62] Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer-Verlag, 1991.
- [63] Everett H. *"Relative state" formulation of quantum mechanics* // Reviews of Modern Physics. 1957. V.29. P.454-462.
- [64] Hameroff S., Penrose R. *Orchestrated Objective Reduction of Quantum Coherence in Brain Microtubules: The "Orch OR" Model for Consciousness*. – <http://www.hameroff.com/penrose-hameroff/orchOR.html>
- [65] Feynman R. *Simulating physics with computers* // Internat. J. Theoret. Phys. 1982. N.21. P.467-488.
- [66] Gambini R. *The measurement problem and the reduction postulate of quantum mechanics*. ArXiv: quant-ph/9803025v2 .
- [67] Grössing G. *Quantum cybernetics : towards a unification of relativity and quantum theory via circularly causal modeling*. New York: Springer, 2000.
- [68] Preskill J. *Quantum information and computation* // Lect. Notes in Phys. 1999. No.229.
- [69] Reichenbach H. *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*. LosAngeles. 1946.
- [70] Svozil K. *Quantum logic. Brief outline*. ArXiv: quant-ph/9902042v2 (1999).

- 
- [71] *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* / D. DeWitt, N.Graham (editors). Princeton: Princeton University Press, 1973.
- [72] Weyl H. *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, 1923.
- [73] Wootters W.K, Zurek W.H. *A single quantum cannot be cloned* // Nature. 1982. N.299. P.802.

# ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Александр Константинович Гуц

Редактор Е.В. Брусницына

---

Подписано в печать 01.10.08.  
Формат 60 × 84 1/16. Печ.л. 16,8. Уч.-изд.л. 17,5.  
Тираж 250 экз.

---

Полиграфический центр КАН  
644050, Омск-50, пр. Мира, 11а  
тел. (3812) 65-23-73  
Лицензия ПЛД N. 58-47 от 21.04.97 г.