АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КИБЕРНЕТИКА И ЛОГИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ СОВЕТ
ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ «КИБЕРНЕТИКА»
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

КИБЕРНЕТИКА И ЛОГИКА

Математико-логические аспекты становления идей кибернетики и развития вычислительной техники

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1978

Авторы данной книги рассказывают о развитии кибернетических идей в связи с логической формализацией с древнейших времен до начала XX в. Читатель познакомится с методологическими проблемами истории вычислительной техники и логических машин, математического аппарата кибернетики, с некоторыми философскими вопросами развития логических исчислений. Интерес представит также раздел о создании логических машин в России.

Ответственные редакторы

Б. В. БИРЮКОВ и А. Г. СПИРКИН

К $\frac{10508-204}{042(02)-78}$ 189—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге предпринята попытка осветить некоторые линии становления кибернетических идей, связанные с развитием вычислительной техники, а также математической и логической формализацией. Объединение математико-логической установки с иными математическими подходами, прежде всего с вероятностно-статистическими идеями и методами — на фоне глубокого интереса к вычислительным приборам, — было во многом определяющим в формировании замысла кибернетики как комплексного научного направления, имеющего своим предметом процессы управления и переработки информации в сложных системах. Эта синтетичность кибернетики четко усматривается в трудах Норберта Винера, Джона фон Неймана и Клода Шеннона. Единство математико-логического, вероятностно-статистического и машинного «начал» постоянно имели в виду пионеры отечественных кибернетических разработок — Алексей Андреевич Ляпунов и Михаил Львович Цетлин. О значимости для кибернетики логико-алгоритмического и вероятностного подходов — и их машинных реализаций — неоднократно писал в своих работах Аксель Иванович Берг.

Кибернетические исследования и разработки в области моделирования и автоматизации интеллектуальных процедур — направление так называемого искусственного интеллекта — влекут за собой переосмысление значительного массива данных, относящихся и к истории логики, и к истории техники. Нынешний рост авторитета логической формализации и алгоритмизации, вероятностно-статистических и экспериментально-машинных методов в научных исследованиях не есть какая-то мода — этот авторитет будет расти и впредь как выражение объективно действующей тенденции развития познавательного и конструктивного аппарата современных науки и практики.

Данная книга посвящена становлению кибернетических идей и тому ракурсу, под которым в свете кибернетики выступают некоторые хорошо известные интеллектуальные достижения прошлого. Авторы статей, помещенных в предлагаемой вниманию читателя книге, предприняли попытку осветить некоторые факты научного (в том числе философского) развития, которые, по их убеждению, можно отнести к предыстории и истории кибернетики. Непосредственным предметом рассмотрения в книге являются прежде всего вопросы развития вычислительной техники и логических машин, а также программирования (включая исторически первую постановку вопроса о соотношении вычислительной машины и мышления). Рассматриваются также некоторые аспекты прогресса логической формализации, имевшие место в прошлом веке (с которых, в определенном смысле, началась проблематика современной общей теории алгоритмов и исчислений). В книге находят отражение и вопросы, касающиеся дихотомии «непрерывностных» и «дискретностных» методов в математике в связи с развитием кибернетических идей (здесь используются материалы, относящиеся, в частности, к отечественной математике и кибернетике).

Первый цикл работ, помещенных в книге, относится к становлению и развитию вычислительной и логической техники, программированию цифровых машин и математическому аппарату кибернетики (исследование операций и др.). Он начинается статьей Л. Е. Майстрова «Взаимосвязь характеристик вычислительных машин в их развитии». В статье раскрываются некоторые закономерности эволюции вычислительной техники. Выделяя в развитии вычислительных устройств четыре больших периода — домеханический (период абака), механический, электромеханический и электронный, автор сосредоточивает внимание на показе того, как развивались основные параметры вычислительных машин (скорость выполнения операций, объем памяти, точность вычислений и надежность, габариты и вес машин и др.) в течение первых трех периодов. На основе проведенного анализа он приходит к тому выводу (представляющему ценность и для современных разработчиков ЭВМ и создателей их математического обеспечения), что на каждом историческом этапе прогресса вычислительных устройств распространение получали только те приборы и машины, основные характеристики которых находились в определенном внутреннем соответствии — согласии, определявшемся технологией изготовления приборов и закладывавшейся в них логической схемой переработки информации.

Вопросы истории вычислительной техники получают дальнейшее развитие в статье Р. С. Гутера и Ю. Л. Полунова «К истории разностных машин». Статья содержит очерк истории изобретения различных разностных машин, предназначенных для табулирования функций с практически постоянными разностями того или иного порядка. В ней описываются главные идеи, на которых основывалось устройство разностных машин, их конструктивные особенности, различия между ними, начиная с машин, создававшихся выдающимся английским ученым и изобретателем XIX в. Чарльзом Бэббеджем, и до машины Л. Дж. Комри, построенной в 1933 г.

Р. С. Гутеру и Ю. Л. Полунову принадлежат еще две статьи, причем обе они в той или иной степени связаны с именем Ч. Бэббеджа, — ученого, научная деятельность которого охватывала очень различные области и в первую очередь математику и экономику. Главным для Бэббеджа — делом его жизни — было изобретение вычислительных машин: разностной машины, предназначенной для табулирования функций с практически постоянными разностями, и знаменитой аналитической машины, которая явилась первой в истории человечества универсальной цифровой вычислительной машиной с программным управлением, прямой предшественницей современных электронных вычислительных машин. Принципы устройства современных ЭВМ в значительной степени повторяют принципы, заложенные Ч. Бэббеджем в его аналитическую машину.

Сотрудницей Бэббеджа во многих его научных изысканиях была дочь великого английского поэта Джорджа Байрона—леди Лавлейс. В статье «Августа Ада Лавлейс и возникновение программирования» упомянутые авторы рассказывают о жизни «первой программистки», подробно излагают ее идеи, дают анализ ее единственной научной работы. Эта работа относилась к вопросам программирования для аналитической машины Бэббеджа и предвосхитила основы современного программирования для цифровых вычислительных машин с программным управлением. Ряд высказанных Лавлейс в 1843 г. общих положений сохранил свое принципиальное значение и для современного программирования (например, принцип экономии рабочих ячеек). То же касается и предложенной ею терминологии. Такие термины, как «цикл», «рабочая ячейка» и другие, относятся к наиболее употребительным в современном программировании, причем и сейчас они употребляются в том именно смысле, в каком они были введены в работе А. А. Лавлейс.

В статье «Математические работы Чарльза Бэббеджа» содержится подробный разбор работ английского ученого в области математики. Эти работы известны мало, а между тем они весьма интересны в плане истории математического аппарата кибернетики. Большинство из них посвящено созданию «функционального исчисления» — области математики, аналогичной математическому анализу, в которой роль «переменной величины» играет функция. Центральное место в этих работах занимает подробная теория функциональных уравнений, разработанная Бэббеджем с большой полнотой. Наряду с этим Бэббеджу принадлежит ряд работ в области геометрии, теории чисел и в особенности в теории игр и статистических решений — области, которая как самостоятельная ветвь математики сформировалась лишь во второй половине нашего столетия. В статье дается анализ полученных Бэббеджем результатов и их места в современной математической науке.

Отмеченные выше статьи интересны не только тем, что в них изучаются некоторые мало известные вопросы развития устройств переработки информации и становления математического аппарата кибернетики, но и тем, что в них раскрывается примечательный факт: научная постановка вопроса о соотношении человека — математика, программиста, оператора — и информационно-вычислительного устройства имеет солидную историю. В описанном цикле статей затрагиваются также и некоторые вопросы логики, а именно те, которые связаны с характером логических схем, воплощающихся в конструкции вычислительных машин и в математическом аппарате, разрабатывавшемся Ч. Бэббеджем. Поэтому статья о логических машинах, написанная Г. Н. Поваровым и А. Е. Петровым, служит как бы естественным продолжением этого цикла. В ней освещается еще очень мало изученный вопрос, касающийся истории логических машин в России.

Создание логических машин — машин, выполняющих собственно логические, а не математические операции, — интереснейшая проблема истории логики и кибернетики. С ней связаны первые проекты искусственных «усилителей» человеческого разума широкого диапазона действия. Проблема эта породила первого фанатика «искусственного интеллекта» — Раймунда Луллия, первого корифея математизации логики — Готфрида Вильгельма Лейбница, первого создателя логической машины, получившей широкую известность, — Стенли Джевонса. Началу работ в этой области на русской почве и посвящена статья Г. Н. Поварова и А. Е. Петрова. В ней описываются логические приборы, созданные известными русскими физико-химиками П. Д. Хрущовым и А. Н. Щукаревым, — приборы, представлявшие собой модификации и усовершенствования машины упомянутого английского логика. История логических машин в нашей стране ставится авторами в связь с принципиальными вопросами моделирования мышления с помощью автоматических устройств — острой проблемой современной методологии кибернетики.

Статья по истории отечественных логических машин служит естественным «мостиком» к циклу работ логического и логико-методологического характера. Здесь изучаются некоторые аспекты и вопросы истории логико-математической формализации. Две статьи посвящены научному вкладу выдающегося математического логика XIX в., автора известных трехтомных «Лекций по алгебре логики» Эрнста Шрёдера, — ученого, в работах которого предвосхищаются некоторые постановки задачи разработки общей теории алгоритмов и исчислений. В статье Б. В. Бирюкова и А. Ю. Туровцевой «О логико-гносеологических взглядах Э. Шрёдера» рассматриваются методологические взгляды немецкого математика, его воззрения на предмет логики, учение о знаках и именах, его подход к построению логических исчислений. В статье С. Г. Ибрагимова «О логико-алгебраических работах Эрнста Шрёдера, предвосхитивших теорию квазигрупп», дается детальный анализ малоизвестных работ Шрёдера, в которых были заложены основы учения о таких современных алгебраических структурах, как квазигруппы и лупы.

Статьи, посвященные Э. Шрёдеру, примечательны в двух планах. Во-первых, в них прослеживается судьба логической программы Лейбница, утверждавшего возможность создания логико-математического языка, с помощью которого можно было бы автоматизировать поиск любых истин и доказательство любых теорем. Это фактически программа «искусственного интеллекта» (в той ее части, которая теоретически возможна и в определенном смысле реализуема). Из статей о Шрёдере следует, что эстафета Лейбница была принята этим выдающимся логиком, работы которого в известном смысле подытожили достижения алгебры логики XIX столетия. Второй существенный план этих статей — показ места Шрёдера в становлении общей теории исчислений. Немаловажным является и следующее обстоятельство: Шрёдер весьма мало изучен в отечественной и зарубежной литературе, а между тем алгебраическое направление в логической формализации ныне интенсивно развивается, и случается, что результаты Шрёдера открываются заново.

Последняя статья книги посвящена взаимосвязи различных форм идеи бесконечности в их историческом аспекте — вопросу, занимающему важное место в проблематике современных логических оснований математики и кибернетики. В работе Н. Н. Нуцубидзе, носящей название «О динамике взаимосвязей различных аспектов идеи бесконечности», анализируются методологические проблемы развития взаимоотношений между идеями непрерывности и дискретности в математическом познании. В статье характеризуется история представлений о непрерывном и дискретном в их диалектической взаимосвязи и противопоставлении, берущем начало еще в древней Греции. В качестве основных вех динамики дихотомии «дискретное—непрерывное» рассматриваются: генезис проблемы в античной науке, арифметизация математического анализа, изменения в подходе к проблеме, связанные с неклассическими направлениями в математике и логике, и, наконец, поворот, который придает ей кибернетика; основной вывод состоит в положении об идеализированном характере наших представлений о дискретном и непрерывном и об относительности их противопоставления.

Не так давно казалось, что проблематика соотношения дискретного и непрерывного имеет значение только для математики. Но сейчас обнаружилось, что подобно ситуации, существовавшей в античной науке, она получает преломление в ряде иных областей. Это во многом связано с идущей от кибернетики тенденцией к выдвижению на передний план конечной математики. Анализируя данную проблему, Н. Н. Нуцубидзе существенно опирается на методологические идеи отечественной математики и математической кибернетики.

Предлагая данную книгу вниманию читателя, интересующегося развитием кибернетико-логического знания, авторы и редакторы надеются, что публикуемые в ней исследования получат продолжение в дальнейших работах и история кибернетики (вместе с историей математической логики) станет интенсивным полем научных изысканий советских ученых.

Б. В. Бирюков

ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН В ИХ РАЗВИТИИ

Л. Е. Майстров

Если попытаться выделить наиболее важные характеристики современных электронных вычислительных машин (ЭВМ), то мы должны назвать: высокую скорость выполнения операций (быстродействие), большой объем памяти, точность результатов (надежность), размеры и вес машины и некоторые другие. В течение всей истории вычислительных машин, вплоть до возникновения электронных устройств, стоял вопрос об автоматизации вычислений. Ныне этот вопрос решен: процесс вычисления в ЭВМ полностью автоматизирован.

В истории вычислительных машин можно выделить четыре больших периода: домеханический (период абака), периоды механический, электромеханический и электронный [1] [1]. В данной работе ставится задача рассмотреть развитие основных характеристик вычислительных машин в течение первых трех периодов и начале четвертого.

В истории вычислительных машин довольно часто встречались ситуации, когда в угоду одной из характеристик машин пренебрегали требованиями, которые было естественно предъявить к другим характеристикам. Такие машины оказывались несовершенными, и от них быстро отказывались. В музеях мира хранится много машин, на которых неудобно считать. Еще больше их описано в энциклопедиях и книгах конца XIX и начала XX в. [2]. Распространение получали только те машины, основные характеристики которых находились в гармоническом единстве.

[1] Здесь и далее в этой книге — в квадратных скобках указывается номер позиции в списке литературы, помещенном в конце соответствующей статьи (*ред.*).

Период абака (домеханических устройств)

Характерное свойство счетных приспособлений этого периода — периода простейших вычислительных устройств — состоит в том, что в них не было автоматической передачи чисел из низшего разряда в высший (передачи десятков). Числа в таких приборах фиксировались количеством тех или иных предметов, а разряды — положением предметов. Выполнение арифметических операций сводилось к перекладыванию предметов по определенным правилам. К приспособлениям этого типа относятся различные счетные доски, счеты, суан-пан и т. п. Их объединяют одним названием — *абак*. К абаку можно в некотором смысле отнести и десять пальцев рук человека.

До введения десятичной позиционной системы абак был основным, а часто и единственным средством для материального осуществления операций. Возможности абака во многом определяли уровень математических знаний в большой исторический отрезок человеческой цивилизации, в первую очередь знаний арифметических и алгебраических. При выполнении операций на абаке — и при попытках распространения уже выработанных правил математических действий на более общие случаи — возникали проблемы и задачи, решение которых приводило к крупнейшим для своего времени математическим достижениям. Таким образом были, например, впервые введены (в древнем Китае) отрицательные числа [3]. Математическая задача считалась решенной, если ее можно было выполнить на абаке. Только с распространением десятичной позиционной системы счисления абак стал превращаться во вспомогательный счетный прибор.

Период абака условно можно считать продолжающимся с древнейших времен до начала XVII в., хотя он в различных странах начался и кончился в разное время. В частности, к нему мы относим и самые примитивные приемы счета, когда еще не было абака в собственном смысле.

С необходимостью считать люди столкнулись довольно рано: насечки на костяных и каменных изделиях, которые выражали результат счета, встречаются уже в палеолите [4]. От неолита сохранились неоспоримые свидетельства о существовании счета — в виде его фиксации на камнях, костях, глиняных изделиях и т. п. [5].

С развитием общества появилась необходимость в использовании довольно больших чисел, выкладки с которыми все усложнялись. Возникла потребность в приборах, которые облегчали бы счет. Простейший из таких «приборов» всегда был с человеком — это десять пальцев его рук. Современные исследования показали большое значение счета на пальцах для становления математики (см. [6], [7] и др.). «Простые арифметические действия с помощью пальцев осуществлялись как бы на своего рода счетной машине» ([8], с. 38). Происхождение десятичной системы счисления связано именно с *пальцевым счетом*; он нашел отражение в цифровых обозначениях древних вавилонян и египтян. У древних римлян существовало пальцевое изображение чисел, которое описано средневековым монахом Бедой Достопочтенным (VIII в.): различные загибы пальцев изображали единицы, десятки, сотни и тысячи, а определенные жесты рук позволяли считать до *миллиона*.

Пальцевым счетом пользовались не только торговцы или неграмотные люди, но и ученые. Так, крупнейший математик средневековой Европы Леонардо Пизанский рекомендовал пальцевый счет в качестве вспомогательного средства при вычислениях в позиционной системе счисления. Не случайно также и то, что в древнерусской нумерации единицы назывались «перстами», десятки — «составами». О происхождении шестидесятиричной системы у вавилонян существует целый ряд гипотез; согласно одной из них, «почти несомненно, что шестидесятиричная система счисления выработалась при обыкновенном счете на пальцах» ([9], с. 252).

Итак, счет на пальцах был существенным моментом в развитии домеханического этапа вычислительных устройств. Уже в пальцевом счете мы видим стремление к быстродействию и надежности. Так, у древних римлян умножение на пальцах в случае чисел, которые больше пяти и меньше десяти, сводилось к умножению чисел меньше пяти и сложению. Например, чтобы умножить 6 на 8 поступали следующим образом. На одной и другой руке загибали количество пальцев, соответствующее числу единиц, превышающих пять, соответственно, в первом и втором сомножителе (т. е. один палец на одной руке и три пальца на другой); далее складывали загнутые пальцы ($1+3=4$) — это было число десятков в произведении; затем перемножали незагнутые пальцы ($4\cdot 2=8$) — это были единицы; наконец, складывали полученные результаты: $6\cdot 8=40+8=48$. При этом в уме надежнее было производить операции над числами первой пятерки, чем второй.

Первым простейшим искусственным счетным прибором явилась *бирка*. Бирка — это деревянная палочка (значительно реже — костяная или даже каменная), на которой наносят насечки (зарубки). Вначале бирки служили для фиксации тех или иных чисел — чисел, выражавших величину собранного урожая, количество голов скота, величину долга при денежных отношениях, количество дней, прошедших от какого-нибудь события, и т. п. Кроме бирок для «записи на память» широкое распространение получили так называемые долговые бирки. На такую бирку зарубками наносилась величина долга, затем бирка раскалывалась так, чтобы раскол шел по зарубкам. Одна половина бирки оставалась у должника, другая — у кредитора. Во время расчета обе половинки складывались, зарубки при этом должны были совпасть. Аналогичные бирки были у пастухов для учета поголовья стада. Применялись бирки и в различных других случаях — они были очень широко распространены.

Среди разнообразных типов бирок выделяется особая группа — *счетные бирки*. Простейшие из них представляют собой аккуратные палочки с 10 или 12 зарубками. При помощи таких бирок считали не только в пределах первого десятка (или дюжины), но и десятками (дюжинами). Встречаются счетные бирки, на которых зарубки нанесены группами по две, три, четыре, пять и более. Такие бирки служили для удобства счета парами, тройками и т. д.

Самый простой прибор для сложения — это *линейка* с делениями, вдоль которой может передвигаться другая такая же линейка; сложение двух чисел сводится в этом случае к последовательным передвижениям линейки. Именно этот принцип встречается в счетных бирках. В музеях Эстонии, например, хранятся счетные бирки в виде квадратных в сечении, хорошо обструганных деревянных палочек, которые состоят из двух вилкообразных половинок; палочки могут перемещаться одна вдоль другой. Среди них встречаются бирки, у которых все четыре боковые грани покрыты группами зарубок (по пять штук);

группы отделены друг от друга косыми зарубками. Расстояние между прямыми зарубками, как и между косыми, одинаково. Передвигая половинки бирок друг относительно друга, можно производить сложение пятерок.

Принцип передвижения линеек был использован в приборе К. Казе, предложенном в 1720 г. Несколько пар линеек Казе расположил рядом; первая пара справа служила для складывания единиц, вторая — десятков и т. д. Весь прибор был смонтирован на одной пластинке, линейки имели зубчатый край и передвигались при помощи специально заостренной палочки. Наиболее совершенный прибор такого типа был построен в середине XIX в. Куммером.

В Чувашии обнаружены счетные бирки различной формы, с развитой системой знаков и приемов счета. Так, одни зарубки нанесены более глубоко, другие — менее; более глубокая зарубка означает число в 100 раз большее, чем менее глубокая. Кроме того, зарубки на одной стороне бирки обозначают числа в 100 раз большие, чем зарубки на другой стороне. Поворачивая бирку, мы тем самым увеличиваем значение зарубок в 100 раз. При такой системе записи встречаются довольно большие числа, вплоть до 35 000.

Бирки интересны как материальное свидетельство истории развития счета и записи его результатов. Они являлись не только документами, на которых записывались те или иные данные, — это были своеобразные счетные приборы.

В бирках впервые пришли в противоречие два требования: размер бирки и точность результатов. Удобно было иметь маленькую бирку, которую можно, например, поместить в кармане, но на такой бирке зарубки мелкие и пользоваться ею неудобно, в результате чего возникают ошибки — надежность результата понижается. Очень большие бирки, на которых отчетливо видны зарубки, были неудобны при хранении, переносе, да и в пользовании. Поэтому постепенно выработался наиболее распространенный средний размер бирки (20—30 см длины), при котором требования были удовлетворены: на такой бирке довольно четко можно было наносить и воспринимать зарубки и ею удобно было пользоваться.

Степень быстроты вычислений с помощью бирок была связана с системой зарубок, которые обозначали числа.

При любом счете его быстрота зависит от системы записи чисел. Это характерно и для бирок. Чаще всего на бирках встречается следующая система зарубок: зарубки вида | означали число 1, косая зарубка / число 5, крестообразная × — число 10, короткая ╷ — число $^1/_2$. Если бы не заботились о быстроте счета, то, например, число 5 обозначали бы пятью простыми зарубками: |||||. В некоторых случаях для увеличения быстроты счета система зарубок усложнялась, и это входило в противоречие с надежностью. Так, более глубокая зарубка **|** означала не 1, а 100; более глубокая косая зарубка **/** — не 5, а 500, и т. д. Конечно, такая система упрощала счет и увеличивала его скорость, но возрастала и вероятность ошибки: глубокую зарубку можно было перепутать с неглубокой. Поэтому подобная сложная система записи чисел на бирках не удержалась.

В долговых бирках, которые раскалывали на две части, в жертву надежности результата были принесены все остальные качества бирки. Такие бирки были неудобны для хранения (каждая половина хранилась отдельно); они были неудобны в употреблении (прикладывание двух половинок бирок друг к другу — медленная и кропотливая операция) и достаточно большими по размеру. Это делалось для того, чтобы результат сопоставления двух половинок бирок был надежен — надо было избежать долговых споров.

Конечно, об автоматизации (в современном значении этого слова) по отношению к биркам говорить не приходится, но первые намеки на нее, какие-то ее элементы, можно проследить уже здесь. Так, при сдвиге одной половинки бирки относительно другой сложение производилось «автоматически»; момент механизации был еще более нагляден в том случае, когда при повороте бирки происходило увеличение значения зарубки в 100 раз. Этот процесс напоминает поворот зубчатых колес в механических машинах последующего периода, с помощью которого производится автоматическая передача единицы в более высокий разряд.

У ряда народов был распространен *счет на веревках* при помощи узелков на них — приборе, который также заключал в себе некоторые элементы характеристик появившихся позднее вычислительных машин. При таком счете прежде всего следили за надежностью результатов.

Счетные узелки считались неприкосновенными и священными, и тот, кто завязывал или развязывал узел, не имея на то полномочий, заслуживал жестокой кары. Именно благодаря надежности узелковой фиксации чисел «в Европе вплоть до средних веков сохранились следы того, что завязанные узлы играли роль судебного доказательства» ([10], с. 215).

И в узелковом счете стремились различными комбинациями узлов увеличить скорость чтения и фиксации чисел. На квипу (так называлась счетная веревка в ряде стран Южной Америки) простой узел обозначал число 10, двойной — 100, тройной — 1000 и т. п. В этом случае, выигрывая в скорости, теряли в надежности, так как можно было перепутать, например, двойной узел с тройным, и т. п.

Элементы автоматизма при узелковом счете видны на следующем примере. У Геродота есть рассказ о том, что персидский царь Дарий, отправляясь в поход на скифов, приказал ионийцам остаться для охраны моста через реку Истер и, завязав на ремне 60 узлов, вручил его со словами: «Люди Ионии, возьмите этот ремень и поступите так, как я скажу вам: как только вы увидите, что я выступил против скифов, с того дня вы начнете ежедневно развязывать по одному узлу, и когда найдете, что дни, обозначенные этими узлами, уже миновали, то можете отправляться обратно к себе домой» ([11], с. 32—33). Развязывающие должны были поступать совершенно автоматически, они могли не уметь считать, им было нужно только каждый день развязывать один узел.

Но самым распространенным и важным прибором для вычислений в домеханический период был *абак*. На этом приборе мы можем проследить генезис всех основных характеристик вычислительных машин последующих времен.

На абаке выполнялись самые разнообразные вычисления, поэтому емкость абака была одной из его существенных характеристик, и она все время возрастала. В древнем мире обходились абаком не более чем в 6—8 разрядов. Это же относится и к Китаю VI—VIII вв. В X в. в Европе употребляли 12-колонный абак, а Герберт (ок. 940—1003), чтобы доказать универсальные возможности абака, предложил абак с 27 колонками, т. е. для чисел от 1 до 10^{27}.

Для увеличения надежности в абаках все время вводились различные усовершенствования. Так, римляне над столбцами абака ставили обозначения разрядов: I, X, C, M и т. д. Иногда эти обозначения имели условный вид. В неаполитанском музее хранится римский абак, на котором I означает единицы, X — десятки, C — сотни, ∞ — тысячи, ((|)) — десятки тысяч, (((|))) — сотни тысяч; |X| — тысячи тысяч. Усложнение систем обозначений себя не оправдало, так как возникала возможность ошибок в чтении этих обозначений, и от них вскоре отказались, оставив простые отметки разрядов.

Для увеличения надежности в европейском абаке столбцы объединяли в группы по три, отмечая их дугами сверху, т. е. в одну группу были объединены единицы, десятки, сотни; в другую — тысячи, десятки тысяч и сотни тысяч и т. д. Одно время было предложено использовать в абаке не камешки, а жетоны (апексы), на которых были условно обозначены цифры; например, вместо того чтобы положить четыре камешка, клали апекс, на котором была написана цифра четыре, и т. д. Однако, поскольку написание этих цифр было особое (оно оказало некоторое влияние на написание наших цифр), их освоение вызывало определенные трудности и путаницу, что не способствовало надежности результатов, поэтому апексы были вскоре оставлены. Для увеличения надежности вырабатывались строгие правила счета, которые выполнялись почти автоматически.

Одна из причин ошибок счета на абаке состоит в возможности случайного перемещения камешков из одного разряда в другой. Этот недостаток был устранен в абаках, у которых камешки (косточки) были нанизаны на проволоку (счеты, суан-пан, соробан). У этих типов абака был свой недостаток: косточки легко сдвигались с места от случайных толчков. Чтобы увеличить их устойчивость проволоки стали делать немного изогнутыми.

Размеры абака — примерно 40×50 см. Более мелкие абаки удобны для переноса, но на них легко сделать ошибку. На крупных абаках неудобно манипулировать со сложными выкладками (счет происходил очень медленно).

Борьба за скорость вычислений всегда была в центре внимания вычислителей. Ф. М. Свободский в конце

20-х годов XIX в. на созданном им абаке (комплекте счетов) извлекал кубический корень из 21-значного числа за 3 мин. Но такая скорость достигалась за счет увеличения размера абака, который состоял из соединения в общей раме от 12 до 30 счетов.

У большинства абаков емкость значительно превышала практические потребности (абак Герберта имел емкость 10^{27}; счеты, как правило, имеют емкость от 10^8 до 10^{10}), поэтому колонки для больших разрядов использовались в этом случае для памяти. На них откладывались исходные данные, промежуточные результаты и другие необходимые числа.

К домеханическим приборам относятся и *палочки Непера* (1617 г.), в основу устройства которых был положен способ умножения на бумаге, называвшийся решеткой (палочки Непера подробно описаны почти во всех книгах по истории математики).

Палочки Непера имели широкое распространение. Ими пользовались вплоть до XX в. В 1668 г. К. Шот предложил заменить палочки Непера цилиндрами, на поверхности которых нанесены ленты с таблицами умножения, как и на палочках Непера. Поворачивая соответствующие цилиндры, можно в нужной строке прочитать произведение множимого на однозначный множитель. При умножении на многозначное число такую процедуру нужно повторить для каждого разряда, а затем результаты поразрядного умножения сложить на бумаге.

Даже в XIX в., когда, казалось бы, имелось уже достаточно много разнообразных приборов, палочки Непера привлекали внимание многих изобретателей. В 1891 г. И. Блятер предложил бруски для умножения; в 1892 г. Прюво-Ле-Гюэ заменил счетные палочки брусками, которые монтировались в специальном ящике. В том же году Эггис вместо палочек применил узкие полосы и т. п. [2].

Конечно, палочки Непера еще только намечали подход к механизации и автоматизации вычислений, и, несмотря на то что выбор необходимых брусков и их выкладывание занимали довольно много времени, быстродействие операций увеличивалось. Так, умножение шестизначных чисел при помощи палочек Непера производится на одну пятую быстрее, чем на бумаге. При еще больших числах выгода во времени увеличивается. Палочки Непера

свели умножение любого числа на однозначное к сложению в уме однозначных чисел, а умножение многозначных чисел — к сложению поразрядных произведений. Это увеличило скорость и надежность вычислений.

Во всех приборах, основанных на палочках Непера, вычислителю нужно было внимательно следить за считкой результатов, так как десятки одного произведения нужно было складывать с единицами произведения следующего разряда, что могло приводить к ошибкам. Для увеличения надежности принимали разные меры. Так, например, иногда красили в один цвет правую половину одной полосы и левую половину смежной полосы (и так далее через одну полосу), так что те числа, которые нужно было складывать, оказывались на частях полос, окрашенных в один цвет. Кроме того, бруски складывались в специальные ящики с гнездами, весь прибор монтировался как одно целое с вращающимися цилиндрами, что повышало быстродействие.

В целом можно отметить, что палочки Непера — это вычислительный прибор, служивший в первую очередь для обеспечения надежности результатов; их использовали потому, что умножение на бумаге — достаточно утомительный процесс, при котором легко допустить ошибки. Кроме того, этот прибор давал и увеличение скорости вычислений.

Емкость прибора зависела от его размера, так как каждый новый разряд требовал новой палочки или бруска. Слишком маленькие и слишком большие приборы неудобны из-за увеличения количества ошибок и уменьшения скорости вычислений. Наиболее рациональными оказались палочки Непера около 20 см длины, а весь прибор — с 8—10 разрядами.

Механический период

Период механических счетных машин продолжался с начала XVII до конца XIX в. В это время было изобретено и построено огромное количество разнообразных машин: простейших механических машин, счетных машин со ступенчатым валиком, машин, основанных на новых принципах (использование колеса с переменным числом зубцов, непрерывной передачи десятков, пропорционального рычага и т. п.).

Наиболее типичными машинами механического периода являются *арифмометры* разного вида. Основные особенности арифмометров — автоматическая передача десятков и наличие подвижной каретки, что обеспечивает умножение. В связи с тем что десятичная позиционная система получила повсеместное распространение, арифмометры были лишь вспомогательным средством вычисления и не определяли уровень математических знаний — их роль была значительно скромнее. Арифмометры использовались в основном при обработке статистических данных, в бухгалтерском учете, при финансовых расчетах и т. п. Служили они вспомогательным средством и при вычислениях в научных исследованиях.

Одну из первых механических *счетных машин* предложил в 1623 г. В. Шиккард, профессор Тюбингенского университета. В письмах к И. Кеплеру, обнаруженных только в 1958 г., он описал свою счетную машину и составил ее схему (принцип действия этой машины восстановил Б. Фрейтаг-Лорингоф [12]). После этого были изготовлены модели машины Шиккарда; одна из них экспонируется в доме-музее И. Кеплера, на его родине в г. Вайле, вторая в г. Линце, в университете им. И. Кеплера.

Машина Шиккарда состояла из трех частей: суммирующего устройства (для сложения и вычитания), множительного устройства и механизма для фиксации промежуточных результатов. Принципиально новым было шестиразрядное суммирующее устройство, которое состояло из соединения зубчатых передач. Для каждого разряда была своя ось, на которой находилось по одной шестерне с десятью зубцами и по одному однозубому колесу («палец»). Последнее служило для дискретной передачи десятка в следующий разряд. Данная счетная машина достаточно полно описана в литературе (см. [1], [13]).

В машине Шиккарда можно увидеть ряд основных характеристик современных машин в их взаимодействии. Емкость ее составляла шесть разрядов. Дальнейшее увеличение емкости требовало соответствующего увеличения размеров машины, которая и так была достаточно громоздка. Передача накопленного десятка в следующий разряд при помощи длинного пальца повышала надежность машины, так как вычислитель должен был только набирать числа и считывать результат; ему не надо было

следить за передачей десятков, это делалось автоматически. Благодаря этому повышалось и быстродействие машины: сложение и вычитание состояло в наборе чисел и считывании результатов.

Умножение не было связано с аппаратом сложения и не было автоматизировано, поэтому оно происходило довольно медленно. Шиккард смонтировал вместе два совершенно разнородных аппарата для того, чтобы можно было проводить комбинированные расчеты. Для увеличения надежности при сложении в окошках считки появлялись набираемые первое слагаемое и сумма. Множительное устройство было хотя и медленным, но довольно надежным, так как нужно было только правильно считáть результат из заранее заготовленной таблицы. Деление заменялось повторным вычитанием. Третий блок машины Шиккарда явился прототипом запоминающих устройств современных машин.

Более известной, чем машина Шиккарда, оказалась *суммирующая машина Б. Паскаля*. Первый образец своей машины Паскаль сконструировал в 1641 г. Всего он изготовил несколько десятков машин. Некоторые из них дошли до нашего времени. Машина Паскаля с принципиальной точки зрения не отличалась от суммирующей части машины Шиккарда, хотя Паскаль ничего не знал о последней, но технически она была значительно совершеннее машины Шиккарда. Для увеличения надежности, чтобы избежать случайного поворота числовых колес, Паскаль применил храповое соединение. Перед набором чисел для ограничения поворота наборных колес в углубления, соответствующие набираемому числу, вставлялись штифты. Затем колеса поворачивались до упора в этот штифт. Это снижало скорость вычислений, но увеличивало надежность результата. Для удобства работы, а следовательно, для увеличения скорости счета, наборные числовые колеса вращались в горизонтальной плоскости. Имелись также окна считки, в которых были видны набираемые числа. Вычитание производилось путем поворота колес в ту же сторону, что и при сложении. Все это повышало надежность работы машины.

Емкость машин Паскаля составляла 6—8 разрядов. Колеса машины были расположены так, что если сообщать движение одному колесу, то оно передается на остальные колеса. Поэтому сила, которую надо было приложить для приведения механизма в движение, возрастала пропорционально числу колес, находящемуся в прямой зависимости от количества разрядов. Это ограничивало число разрядов машины. Скорость ее работы снижалась тем, что установка на нуль производилась последовательно: вначале на колесе единиц, потом десятков и т. д. Эта процедура отнимала много времени. Основным достижением машины Паскаля, был, как и в машине Шиккарда, автоматический перенос десятков в следующий разряд. В королевской привилегии на счетную машину, выданную Паскалю в 1649 г., подчеркивалось именно это: «Главное изобретение и существенное движение состоит в том, что каждое колесо или стержень некоторого разряда, совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру» ([14], с. 261).

Однако, решив принципиальной важности вопрос об автоматической передаче десятков, Паскаль не уделил должного внимания остальным характеристикам своего прибора. Габариты машины были значительными, и это при сравнительно небольшой емкости. Средний ее размер составлял примерно 40×15×10 см. Несмотря на все придуманные изобретателем приспособления, скорость работы машины была небольшой. «Мысль Паскаля, — писал Бине, — особенно для того времени, следует признать необычайно смелой, так как он задался целью заменить посредством чисто механических приспособлений деятельность нашего соображения и памяти. Но практический вопрос все еще остается открытым. Медленность хода механизма, придуманного Паскалем, очевидна» ([15], с. 102). Построив свою машину, Паскаль пришел к выводу, что ум человека действует автоматически и что некоторые умственные процессы не отличаются от механических. В этих выводах видно влияние философских взглядов Р. Декарта.

Машина Паскаля произвела на современников огромное впечатление и оказала влияние на многие изобретения в области счетной техники.

Первую счетную машину, на которой можно было не только складывать и вычитать, но умножать и делить, сконструировал и построил Г. Лейбниц. В 1673 г. он представил свою машину в Парижскую академию. В дальнейшем Лейбниц довольно долго занимался конструированием и совершенствованием своего вычислительного прибора.

Сложение и вычитание в *машине Лейбница* осуществляется при помощи зубчатых передач и сводится к набору чисел и считке результатов. Основу же машины составляют ступенчатые валики — цилиндрики с зубцами разной длины (эти цилиндрики и образуют валик, на котором нанесены зубцы в виде ступенек). Это изобретение Лейбница было первым осуществлением зубчатого колеса с переменным числом зубцов. Именно такое числовое колесо обеспечивает выполнение умножения и деления. Счетное колесо, насаженное на ось, могло передвигаться по оси. Передвигая счетное колесо вдоль ступенчатого валика, его можно было ввести в зацепление с нужным количеством зубцов валика — числового колеса. И при полном обороте ступенчатого валика счетное колесо поворачивалось только на то число зубцов, которое соответствовало множителю. Другое принципиальное нововведение Лейбница состояло в разделении машины на две части: подвижную и неподвижную. Подвижная часть (прототип современной подвижной каретки у арифмометров) позволяла производить поразрядное умножение.

Стремясь добиться возможности осуществления всех четырех действий арифметики, Лейбниц пренебрегал размерами машины. Она была очень громоздкой: 100×30××25 см; для ее установки изготовлялся специальный стол. Емкость машины ограничивалась размерами.

Введение подвижной каретки резко повысило скорость выполнения умножения. Для увеличения надежности Лейбниц ввел окна считки, которые имели такой же вид, как и у современных арифмометров. Но у его машины отсутствовал еще механизм гашения: каждое колесо устанавливалось в первоначальное положение самостоятельно, что уменьшало скорость вычисления.

В XVII и XVIII вв. в счетные машины было внесено много усовершенствований. Так, например, в 1783 г. И. Мюллер построил счетную машину, которая давала звонок, когда от нее требовали невыполнимого действия. Это повысило надежность результатов, но несколько снизило скорость работы, так как после попытки невыполнимого действия машину нужно было приводить в первоначальное состояние. При разработке различных усовершенствований машин со ступенчатым валиком много внимания уделялось уменьшению их размера. Некоторых успехов в этом направлении достиг Ф. М. Ган, сконструировавший в 70-е годы XVIII в. машину, которая — в отличие от машин Паскаля и Лейбница, имевших вид продолговатых ящиков, — представляла собой цилиндр. Это было достигнуто в результате того, что ступенчатые валики располагались вертикально, а не горизонтально; в результате получилась довольно большая экономия места: машина Гана, имея емкость в 14 разрядов, была значительно меньше по величине, чем машина Лейбница. Однако поворачивать ручку в горизонтальной плоскости было неудобно, и это снижало скорость вычисления. Вертикальное расположение ступенчатых валиков обусловливало то, что конструкция машины была довольно сложной, и это приводило к снижению надежности, к частым неисправностям. Так стремление к уменьшению размера машины ухудшало другие ее характеристики.

На другой технической основе в 1889 г. Дж. Эдмондсон создал аналогичную 8-разрядную машину. И хотя у нее были и счетчик оборотов, и механизм гашения, и реверсивные муфты (обеспечивавшие вращение ручки прибора при любых операциях в одном и том же направлении), и другие приспособления, облегчающие счет, — эта машина, как и машина Гана, из-за своих недостатков не получила распространения.

Мы не будем останавливаться на других машинах, которых в XVII и XVIII вв. было построено много (машины Буркхардта, Кнутцена, Лэпена, Герстена, Стенхоупа и др.). Все эти машины изготовлялись в одном или, в лучшем случае, в нескольких экземплярах. На них или совсем не работали, или работал лишь сам изобретатель. Усовершенствования основных характеристик машин были незначительными. Мы кратко остановимся только на машине Е. Якобсона. Это наиболее ранняя из сохранившихся в СССР машин, которая находится в хорошем состоянии.

Машина Якобсона была изготовлена не позже 1770 г. в Несвиже (ныне город в БССР). Она предназначена для выполнения четырех арифметических действий. Ее емкость составляла 10^9. Сложение производится поворотом числовых колес стандартным ключом, возврат в исходное положение осуществляется автоматически под действием пружины. Имеются окошки считки. Для выполнения операции вычитания нужно вращать другие числовые колеса. Этим достигается надежность результатов, так как перепутать числовые колеса для сложения и вычитания трудно: они расположены довольно далеко друг от друга. Но повышение надежности привело к увеличению размера машины, так как потребовался дополнительный ряд числовых колес. Для увеличения надежности числовые колеса в этой машине снабжены специальными пружинами, предохраняющими их от случайных поворотов. Все детали счетного механизма, связанные с одним разрядом, имеют свой номер — от одного до девяти. Эта нумерация исключает случайность перестановок при частичном разборе машины

Под шкалами в рядах сложения и вычитания находятся небольшие углубления, позволяющие точно фиксировать ключ поводка со стрелкой у нужной цифры. Это делает работу машины более надежной.

Специальный механизм для умножения чисел в машине отсутствует, но эту операцию можно производить путем повторного сложения. Для удобства умножения над дуговыми шкалами ряда вычитаний нанесена таблица умножения, которую, впрочем, можно использовать и как таблицу деления. Такие помещенные непосредственно на машине таблицы можно считать прототипом современной машинной памяти.

Деление выполняется как последовательное вычитание с фиксацией количества вычитаний, для чего существует специальный механизм. Количество вычитаний, т. е. частное от деления, читается в окошках считки ряда вычитаний. В окошках считки сложения видны числа, которые получаются в процессе вычисления. Процесс вычитания нужно проводить до тех пор, пока в окошках появятся все нули или число меньшее, чем делитель, т. е. остаток.

В верхнем ряду машины имеется девять дисков с числами, под каждым из них — круглое окошко, в котором можно читать любую из цифр диска при его повороте вокруг оси. Эти диски не связаны ни друг с другом, ни с прочими частями счетного механизма. Предназначены они для фиксации начальных данных и промежуточных результатов вычислений. Для аналогичной цели служит и съемная планка с шестью числовыми колесами, цифры которых видны в соответствующих окошках. Такие числовые колеса, которые не связаны с механизмом машины, мы можем рассматривать как приспособление для памяти машины.

В XIX в. было предложено много самых разнообразных машин, но большинство из них не получило распространения, так как их создатели заботились в основном только об отдельных характеристиках своего вычислительного прибора — таких, которые им представлялись наиболее важными.

Упомянем лишь некоторые из таких машин. В 1867 г. В. Я. Буняковский предложил прибор для сложения и вычитания, названный им *самосчетами*. Это был достаточно надежный прибор, но он обладал малой емкостью, а именно, равной 999. Непосредственно на приборе можно складывать и вычитать числа, не превышающие 14. Действия с большими числами на нем нужно было производить поразрядно. В результате в прибор пришлось вмонтировать небольшие счеты и грифельную доску для производства дополнительных вычислений. Все это создавало такие неудобства, что самосчеты не получили распространения.

В 1885 г. Пететин во Франции предложил *карманный прибор для сложения*. Он был удобен из-за малого размера, но обладал емкостью, равной 999; кроме того, операции на нем производились медленно. Прибор имел три кнопки: для единиц, десятков и сотен. При нажатии соответствующей кнопки происходил поворот числового колеса на единицу. Для набора каждого слагаемого кнопки надо было надавливать столько раз, сколько составляет сумма цифр соответствующего числа.

В 1889 г. Л. Болле выставил на Парижской выставке свой арифмометр. В его приборе была осуществлена идея Лейбница, в соответствии с которой умножение любого числа на однозначное производится одним поворотом рукоятки. В результате этого значительно сократилось время на выполнение умножения и отчасти деления; поэтому *арифмометр Болле* часто называют множительной машиной. Достигнуть быстродействия Болле удалось за счет усложнения машины, а следовательно, и уменьшения надежности и увеличения ее размера. Несмотря на усовершенствования, которые были внесены в эту машину Штейгером (арифмометр «Миллионер»), она из-за несоответствия

быстродействия, надежности и размера почти никакого распространения не получила.

Наиболее гармоничное для своего времени сочетание характеристик вычислительной машины нашло в машине Томаса. К. Томас в 1818 г. сконструировал, а в 1820 г. построил счетную машину, которую впервые назвал «арифмометром». Это была настолько удачная машина, что она выпускалась до конца XIX в. С *арифмометра Томаса* зарождается производство счетных машин. В XIX в. их было выпущено более 1500 штук, они использовались во многих странах.

В основу арифмометра Томаса был положен ступенчатый валик Лейбница. В дальнейшем машины, в которых применялся ступенчатый валик, стали называть «томас-машинами». На арифмометре Томаса достигалась довольно большая скорость вычислений: два 8-значных числа можно было умножить примерно за 15 сек., а разделить 16-значное число на 8-значное — за 25 сек. Машина была довольно надежна, имела контрольный счетчик, счетчик оборотов и другие приспособления для увеличения надежности, такие, например, как противоинерционные устройства. Емкость машины также вполне удовлетворяла вычислителей; вначале выпускались 8-разрядные машины, затем 10-разрядные, а в случае необходимости и других емкостей.

Благодаря разумному сочетанию своих основных характеристик арифмометр Томаса был наиболее распространенной счетной машиной в течение многих десятилетий. По существу только одна характеристика — размер машины — была в определенной диспропорции к остальным характеристикам. Ввиду того что диаметр ступенчатых валиков не мог быть сделан меньше определенного размера, а на каждый разряд требовался отдельный валик, арифмометр Томаса был достаточно громоздок.

Для уменьшения размера машины ступенчатые валики делали из полуцилиндров, а не цилиндров, размещали их на разных уровнях, в шахматном порядке или ставили вертикально (например, в машине Эдмондсона). Однако все это не было достаточно эффективно — машины Томаса оставались довольно больших размеров. Необходим был принципиально иной способ осуществления зубчатой передачи с переменным числом зубцов.

По-видимому, идея такой зубчатки высказывалась давно, но воплощение свое получила только в 70-х годах XIX в. В 1872 г. Ф. Болдуин в США получил патент на ее изобретение. Распространена была, однако, зубчатка не Болдуина, а петербургского инженера В. Т. Однера, который начал работать над своим арифмометром примерно в 1874 г. В 1890 г. он писал об этом: «После пятнадцатилетнего труда и постоянных улучшений мне удалось устроить аппарат, превосходящий значительно изобретенные моими предшественниками» ([16], с. 48). Однер получил патенты на свой арифмометр в 1878 г. в Германии, в 1879 г. — в России, а затем и в некоторых других странах.

Основная особенность арифмометра Однера состоит в применении зубчатых колес с переменным числом зубцов (сейчас такое колесо называется колесом Однера) вместо ступенчатых валиков Лейбница. Колесо Однера имеет очень простую конструкцию и небольшие размеры по сравнению со ступенчатым валиком. Таким образом, был устранен основной недостаток арифмометра Томаса.

Арифмометр Однера воплотил в себе наиболее гармонично, для механического этапа развития, основные характеристики вычислительных машин. Именно поэтому с 90-х годов XIX в. начинается триумфальное шествие арифмометра Однера во всем мире. Изобретатель наладил выпуск своих арифмометров в Петербурге (по 500 штук в год). Затем производство машин Однера было налажено повсеместно. Наиболее известными марками этих арифмометров были «Брунсвига», «Триумфатор» и др. В 1914 г. в России насчитывалось более 22 тыс. арифмометров Однера. В СССР наибольшее распространение получил арифмометр «Феликс» — незначительная модификация арифмометра Однера.

Машины Однера в первой четверти XX в. были основными математическими машинами, широко применявшимися во многих областях человеческой деятельности.

В истории создания новых механизмов и приборов нередка ситуация, когда изобретатель специально развивает только одну характеристику устройства, сознавая, что построенная таким образом машина будет фактически непригодной для эксплуатации. Это делается для того, чтобы подчеркнуть потенциальные возможности тех или иных сторон приборов определенного рода. В истории вычислительных машин это тоже имело место. Рассмотрим один подобный пример.

В 1876 г. П. Л. Чебышев на V сессии Французской ассоциации содействия преуспеванию наук (Париж) сделал доклад «Суммирующая машина с непрерывным движением»; в 1878 г. один экземпляр построенной им суммирующей машины он передал в Парижский музей искусств и ремесел, второй же оставил у себя (сейчас он хранится в Музее истории г. Ленинграда).

Принципиальное отличие *суммирующей машины Чебышева* от других арифмометров состояло в том, что она осуществляла непрерывную передачу десятков. В машинах с прерывной (дискретной) передачей, начиная с машин Шиккарда и Паскаля, колесо высшего разряда продвигается сразу на одно деление, как только на колесе низшего разряда накопится 10 единиц. При непрерывной передаче десятков соседнее колесо высшего разряда (а вместе с ним и все остальные колеса) постепенно поворачивается на одно деление, пока колесо младшего разряда совершает полный оборот. Чебышев достиг этого применением планетарной передачи.

Машина Чебышева оказалась менее удобной и надежной, чем существовавшие в то время машины (например, арифмометр Томаса). На суммирующей машине Чебышева складывать числа неудобно, а вычитать фактически нельзя; считывать правильно результаты трудно, а во многих случаях почти невозможно. Машина тяжела и громоздка. У нее нет ручки гашения результатов, ставить машину в исходное положение нужно для каждого разряда отдельно и обязательно начиная с меньших разрядов. Во время поворота числового колеса единиц числовое колесо десятков поворачивается в 10 раз медленнее, а числовое колесо сотен — медленнее в 100 раз и т. д. Таким образом, во время набора единиц вся суммирующая машина приходит в движение. В результате этого для поворота числовых колес требуются значительные усилия. Можно указать еще целый ряд неудобств, возникающих при пользовании этой машиной. На суммирующей машине Чебышева никто не считал, ею никто не пользовался. Нет свидетельства, что на ней считал и сам Чебышев.

П. Л. Чебышев не ставил перед собой задачи создания удобной для пользования машины; он выдвинул более существенную проблему: найти новый принцип, на котором могут строиться вычислительные машины. Эту проблему он и решил. Остальные же характеристики машины его не интересовали.

П. Л. Чебышев доказал, что вычислительные машины могут быть построены на принципе непрерывной передачи десятков. Но суммирующая машина явилась только первым шагом в этом доказательстве. В 1881 г. Чебышев передал в Парижский музей искусств и ремесел приставку (сделанную с учетом размеров хранившейся в музее суммирующей машины), которая давала возможность производить умножение и деление. При помощи этой приставки также никто не производил вычислений. Но ее созданием П. Л. Чебышев доказал, что возможны вычислительные приборы, в основе которых лежит непрерывная передача десятков.

Несмотря на то что Чебышев создавал свою машину не для практического применения, принцип непрерывной передачи стал применяться во многих счетчиках (например, в спидометрах Теслы). Это объясняется тем, что в счетчиках требуется только суммирование по одному и никаких других операций они не производят, поэтому для них существенны только надежность результата и достаточная скорость.

Появление электропривода резко увеличило скорости работы малых вычислительных машин. При дискретной передаче десятков с увеличением скорости неизбежно появляются толчки. При непрерывной передаче ход машины носит плавный характер, что позволяет без опасений поломок увеличивать скорость работы механических вычислительных устройств. Этот принцип используется в американской счетной машине «Мерченд», швейцарской «Директ» и в некоторых других.

Во всех упомянутых нами машинах механического периода от других характеристик отставала надежность: все они были таковы, что при работе на них было легко допустить ошибку (например, при рычажном наборе чисел легко ошибиться, не доведя рычаг до нужной цифры или переведя за нее). Поэтому в конце XIX в. были предложены различные клавишные машины, которые позволили увеличить также и скорость вычислений.

В 1888 г. К. Берроуз (США) получил патент на *записывающую суммирующую машину*, обладавшую повышенной надежностью. В 1896 г. Фельт и Таррант (США) конструируют записывающую машину для четырех действий; на этой машине записывается не только окончательный результат, но и результаты промежуточных вычислений.

Клавишный набор чисел увеличил надежность во всех типах арифмометров, но старые модели машин были плохо к нему приспособлены, поэтому в них не могли быть использованы все преимущества такого набора. В 1905 г. К. Гаман (Германия) предложил новый принцип работы машины, специально приспособленный к клавишному набору. Этот принцип получил название пропорционального рычага. Машина Гамана («Мерседес-Евклид») получила широкое распространение.

В машинах механического периода на автоматизм выполнения операций обращали недостаточно внимания. Многие действия должен был выполнять сам вычислитель. Но в первой половине XIX в. Ч. Бэббеджем был выдвинут замысел полностью автоматической вычислительной машины с программным управлением.

На Бэббеджа произвела большое впечатление организация труда при составлении математических таблиц во Франции в конце XVIII в. В связи с введением метрической системы французское правительство решило ввести принцип десятичности и в математику. Была сделана попытка делить каждый квадрант не на 90, а на 100 частей. Для такой перестройки требовалось пересчитать огромное число математических таблиц. Эта работа была поручена М. Прони, который принципиально реорганизовал расчетное дело. Всех вычислителей он разбил на три группы. В первую группу входило 5—6 математиков, которые подбирали удобные и необходимые аналитические выражения и затем передавали их во вторую группу, состоявшую из 9—10 человек. Задача второй группы состояла в преобразовании формул, полученных первой группой, к виду, удобному для работы с числами. Затем формулы передавались третьей группе, состоявшей примерно из 100 человек. Используя только сложение и вычитание, третья группа получала окончательные числовые результаты. Таков был путь расчета таблиц.

От сотрудников третьей группы не требовалось знания математики, превышавшего два первых действия арифметики. Умея довольно хорошо складывать и вычитать, они работали механически. Таким способом под руководством Прони было подготовлено множество самых разнообразных таблиц, которые составили 17 рукописных томов большого формата. Но переход к единице измерения углов, равного $^1/_{100}$ прямого угла, не произошел, и таблицы Прони никогда не издавались.

После ознакомления с описанной организацией работы над составлением таблиц Бэббедж пришел к идее создания машины, которая вычисляла бы таблицы так же, как это делали вычислители у Прони. Точнее говоря, машина должна была, по замыслу английского ученого, заменить третью группу вычислителей — группу, выполнившую почти всю счетную работу.

О работе Бэббеджа над своими машинами (вначале разностной, а затем аналитической) имеется довольно обширная литература (см., например, [1]), и мы не будем на этом останавливаться. Проанализируем лишь вопросы, касающиеся основных характеристик его машин.

Бэббедж уделял внимание только автоматизации вычислительного процесса и объему памяти машины. Он предполагал создать полностью автоматизированное устройство с необыкновенно большой памятью — 150 000 двоичных знаков — величина вполне приемлемая и для современных ЭВМ. Поскольку, однако, другим характеристикам машин не было уделено должного внимания, они оказывались громоздкими и сложными. Простейшая разностная машина Бэббеджа должна была весить 2 т, а ее стоимость исчислялась десятками тысяч фунтов стерлингов, аналитическая же машина никогда до конца построена не была; расхождение между заложенным в ней автоматическим управлением и другими ее характеристиками было слишком велико. Это явилось одной из основных причин того, что аналитическая машина не была завершена ни самим Бэббеджем, ни после него.

В случае полностью автоматизированной машины обеспечение адекватного значения остальных характеристик стало возможным лишь с появлением электроники. Более того, можно утверждать, что по-настоящему гармоничное сочетание всех характеристик вычислительных машин — при их полной автоматизации — было осуществлено только в ЭВМ второго поколения.

Итак, в механический период наилучшим решением был арифмометр Однера и его разновидности; этот арифмометр может служить образцом практически применяемого сочетания характеристик малой вычислительной машины механического периода. Заметим, что для создания этого прибора — как и других вычислительных машин данного периода — математическая теория играла второстепенную роль, так как почти все машины с математической точки зрения отражали позиционный десятичный принцип и правила действия с целыми числами и дробями.

В конце XIX в. потребность в счетных машинах возросла настолько, что ее уже не удовлетворяли ни арифмометры Однера, ни другие типы существовавших математических машин. Потребностям счетной практики не отвечали ни скорости машинного выполнения операций, ни емкости машин с одним счетчиком. Нужны были новые решения.

Электромеханический период

Прогресс вычислительной техники всегда был тесно связан с состоянием других областей науки и техники. С развитием теории электричества и практики использования электрических приборов, в первую очередь приборов, основанных на слабых токах, возник соответствующий опыт и в сфере вычислительной техники. Быстродействие арифмометров зависело во многом от скорости вращения ручки. И первое, с чего начинают, это замена ручки прибора, которую должен был крутить вычислитель, электроприводом или автономным электромотором. В результате скорость работы машины увеличилась до 500 об/мин (таковы, например, арифмометры «Вальтер», «Фацит», «Архимед» и др.). Следует отметить, что только теперь, с резким увеличением скорости работы машин, нашел применение разработанный П. Л. Чебышевым принцип непрерывной передачи десятков.

Машины с электрическим приводом имели однако существенный недостаток: ввод чисел и осуществление других операций в них производились медленно и ни в какое сравнение не шло со скоростью процесса вычисления. Возникла принципиальная диспропорция.

Для ускорения ввода чисел все описываемые машины переводятся на клавишную установку, тем более что это дает и бо́льшую надежность. Для ускорения операций и увеличения надежности вместо клавиатуры с клавишами на каждый разряд вводится всего десять клавиш, появляется кнопка гашения и много других усовершенствований. Но все это не дает принципиального решения вопроса. Использование электричества весьма сильно увеличило скорость работы механизма, и для того, чтобы привести остальные характеристики машины в соответствие с достигнутой скоростью вычислений, необходимым становилось дальнейшее значительное усиление автоматизации.

Таким образом, развитие счетных машин естественно шло в направлении автоматической машины, т. е. машины, которая после установки чисел работала бы без дальнейшего вмешательства вычислителя. Вначале были разработаны конструкции машин, автоматически выполняющих только деление. Такие машины получили название *полуавтоматов*. Создать автоматическое умножение вначале не стремились, так как при этом не получалось увеличение скорости выполнения умножения. Дело в том, что при обычном умножении на арифмометре можно широко применять различные способы сокращенного умножения, в зависимости от вида сомножителей. При автоматическом же умножении все операции проводились однотипно, по общему правилу. Но с увеличением скорости работы машин и умножение стало возможным производить автоматически. Так появились *автоматические* машины.

Полуавтоматические и автоматические электрические вычислительные машины («Рейнметалл», «Гаман-Селекта», ВК-2, ВММ-2 и др.) получили широкое распространение. В это же время принципиально расширяются возможности вычислительных машин, связанные с осуществлением программного управления их работой. В этом отношении существенную роль сыграла *счетная машина Г. Голлерита* (США), которая впервые была применена при обработке материалов переписи населения США в 1890 г. Голлерит назвал свою машину *табулятором*.

При переписях населения в США данные на каждое лицо выписывались в отдельную строчку переписного листа; затем они переносились на отдельную карточку с заранее напечатанными вариантами ответов; нужный вариант отмечался «птичкой»; ответы о возрасте, например, имели 10 вариантов: до 5 лет, от 6 до 10 лет, от 11 до 20 лет и т. д. Дальнейшая обработка материалов переписи состояла в том, что карточки с ответами раскладывались вручную на группы в соответствии с целью группировки, затем подсчитывалось количество карточек в каждой группе и результаты подсчета заносились в таблицы.

Созданная Голлеритом система для механизированной обработки материалов переписи учитывала эту ручную технику. На каждое лицо заводилась карточка, разделенная на колонки в соответствии с вопросами. В каждой колонке на месте, соответствовавшем положительному ответу на соответствующий вопрос, пробивалась дырочка; дырочки пробивались вместо отметок «птичкой». Было предусмотрено 10 позиций для пробивания дырочек. Пробивка карточек производилась медленно (80 карточек в час), но пробитые карточки — перфокарты позволяли производить механизированный подсчет данных переписи.

Табулятор Голлерита состоял из следующих основных составных частей: пресса, счетчика, сортировального ящика и источника энергии, которым служили электрические батареи. Перфокарты укладывались на нижнюю часть пресса, под которыми оказывались чашечки со ртутью. Количество чашечек соответствовало количеству возможных отверстий в карточке. Ко ртутным чашечкам подводился электроток. При помощи рукоятки верхняя подвижная часть пресса опускалась до соприкосновения с перфокартой. В верхней части пресса находились металлические стержни, снабженные пружинами, благодаря чему стержни отходили вверх, когда они встречали препятствие. Если препятствия не было и стержень проходил через отверстие, пробитое в карточке, цепь замыкалась через чашечку со ртутью, и на счетчике, соответствующем данному признаку, происходил отсчет единицы. В тех же местах, где отверстий в карточке не было, стержни не замыкали цепь, и на соответствующих счетчиках отсчетов не происходило.

Сортировальный ящик был соединен с основной частью машины. Каждая ячейка ящика была закрыта крышкой, которая удерживалась пружиной, управляемой электромагнитом. Когда карточка, на которой был пробит признак, пропускалась через пресс, цепь замыкалась и открывалась крышка соответствующего ящика. Карточка снималась с пресса и опускалась в открытый ящик. Затем крышка ящика закрывалась рукой.

На этой машине один человек мог пропустить до 1000 карточек в час. Данные карточек могли подсчитываться сразу по нескольким таблицам; кроме того, карточки после их обработки оказывались разложенными по ячейкам и готовыми для дальнейшей работы с ними.

В табуляторе Голлерита впервые практически было осуществлено управление работой вычислительной машины при помощи перфокарт. Вся система, в которую входили счетчики (сортировальная машина, пресс, перфоратор и т. п.), получила название *счетно-аналитической машины*.

После машины Голлерита появились другие машины аналогичного назначения и действия; в них были внесены некоторые упрощения и усовершенствования. Наиболее известными из них были машины Пауэрса, Лангфорда и несколько позже — Буля (1931 г.). Все эти машины, как и машины Голлерита, выпускались в различных вариантах: с клавишами и без клавиш, с выдачей результата на печать и без таковой, с горизонтальной и вертикальной сортировкой и т. п. Пробивку перфокарт стали осуществлять при помощи электромагнита, вычислителю необходимо было только замкнуть контакт. Вносились и другие усовершенствования.

Счетно-аналитические машины получили широкое распространение во многих странах. В СССР они стали применяться в 1925 г. К 1930 г. в нашей стране было установлено 62 машины, из них 40 были машинами Пауэрса и 22 — машинами Голлерита. В это же время в США было 4000 установок, в Германии — несколько сотен. В 1935 г. было налажено отечественное производство счетно-аналитических машин, и до 1939 г. выпущено около 200 комплектов; в основном это был «Табулятор-1» (Т-1).

Широкое распространение табуляторов было связано с теми преимуществами, которые имеют перфорационные машины. Преимущества эти состоят в основном в увеличении надежности и скорости работы. Надежность увеличивается за счет усиления механизации вычислений. После того как исходные данные пробиты в виде отверстий на перфокартах, вся остальная работа проводится машинами, входящими в вычислительный комплекс.

Но, несмотря на широкое распространение счетно-аналитических машин и непрерывное их усовершенствование, в них не была устранена основная диспропорция характеристик. Электрическая передача сигналов производилась с огромной скоростью, но счетчики оставались механическими, поэтому все операции развертывались медленно. С механическим принципом работы счетчиков были связаны и большие размеры таких машин. Программное управление при помощи перфокарт позволяло получать надежные результаты при довольно большой скорости, но подготовка перфокарт была процессом медленным и, главное, не связанным с остальной работой машины. В связи с этим счетно-аналитические машины требовали, кроме основных автоматов, целого ряда вспомогательных машин, что создавало большие препятствия для дальнейшего увеличения скорости вычислений. Все это обусловливало медленные темпы работы при потенциально больших резервах быстродействия. Кроме того, это влекло за собой большие размеры машин. Для того чтобы создать гармоничную машину, требовалось принципиально изменить процесс счета, полностью отказаться от механических счетчиков и перейти к электронике. Условия для этого сложились к началу 40-х годов XX в.

Электронный период

Переход к электронике как основе вычислительной техники был подготовлен всем развитием физики и технологии. На истории электроники мы не будем останавливаться, отметим только наиболее существенные моменты.

В 1884 г. Т. Эдисон описал открытое им явление термоэлектронной эмиссии. В 1897 г. Браун изобрел электроннолучевую трубку. В 1904 г. Дж. Флеминг применил электронноламповый диод в качестве детектора радиотелеграфного приемника. Триод был изобретен в 1906 г. Ли де Форестом. В 1913 г. А. Мейснер сконструировал ламповый генератор незатухающих колебаний. В 1918 г. М. А. Бонч-Бруевич изобрел ламповый триггер. Независимо от Бонч-Бруевича триггерная схема в 1919 г. была разработана У. Эклсом и Ф. Джорданом. Триггеры сыграли огромную роль в развитии вычислительной техники, так как позволили реализовывать различные типы цифровых схем.

Первые электронные счетчики появились в 30-х годах. Винн-Вильямсом были разработаны электронные счетчики на тиратронах. В дальнейшем стали использоваться и схемы на вакуумных лампах. В 1924 г. была разработана экранированная лампа с двумя сетками (тетрод), а в 1930—1931 гг. — пятиэлектродные лампы с тремя сетками (пентод).

К началу 40-х годов получила развитие теория электронных цепей, причем электронные схемы нашли широкое применение во многих областях техники, и прежде всего в радиотехнике, у истоков которой стоял А. С. Попов. Зарождалось телевидение, развивались радиолокация и электронная контрольно-измерительная техника. Таким образом, был накоплен существенный опыт в области проектирования электронных схем и появились потенциальные возможности применения электронных приборов в вычислительных устройствах.

В первой трети XX в. были созданы технические условия для реализации проектов универсальных электромеханических цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Проекты таких машин начали разрабатываться с середины 30-х годов. В 1936 г. К. Цузе (Германия) начал работать над проектом *машины с программным управлением* (Ц-1). В 1941 г. он построил машину Ц-3, выполненную полностью на электромагнитных реле. Она явилась первой в мире универсальной автоматической ЦВМ с программным управлением. Сложение выполнялось на ней за 0,3 сек., умножение — за 4—5 сек.; емкость памяти составляла 64 числа.

В начале 1945 г. Цузе закончил разработку усовершенствованного варианта машины Ц-3 (модель Ц-4). Благодаря высокой надежности эта модель находилась в эксплуатации вплоть до 1959 г.

Реализация аналогичной машины в США началась в 1939 г. с работы Г. Айкена, использовавшего стандартные детали перфорационных устройств, выпускавшихся фирмой ИБМ. В августе 1944 г. машина Айкена МАРК I была закончена и передана Гарвардскому университету, где и эксплуатировалась в течение 15 лет. Устройство управления этой машины состояло из зубчатого колеса, которое перематывало управляющую перфоленту. Скорость движения перфоленты составляла 200 шагов в 1 мин.

За один шаг перфоленты выполнялись операции сложения и вычитания (0,3 сек). Умножение и деление производились соответственно за 5,7 и 15,3 сек. Данные запоминали 72 счетчика сумматоров. Весила машина 5 т.

Наряду с работами Цузе и Айкена существенную роль в создании первых автоматических ЦВМ сыграли работы Дж. Стибица. В 1938 г. он разработал вычислительную машину «Белл I», способную оперировать с комплексными числами. Эта машина имела дистанционное управление, но в ней отсутствовало автоматическое управление, и по производительности ее можно сравнить с малыми вычислительными машинами. В 1942 г. под руководством Стибица был сконструирован линейный интерполятор («Белл II») с автоматически управляемой программой, записанной на перфоленте. Объем ее памяти составлял 5 пятизначных чисел. В машине «Белл II» впервые была применена разработанная Стибицем встроенная схема обнаружения ошибок: если не срабатывало требуемое реле, машина останавливалась.

К 1947 г. Стибиц изготовил машину «Белл V» с программным управлением. Машина содержала более 9 тыс. реле, весила около 10 т и занимала площадь около 90 м^2. Следует отметить, что эта машина была построена уже после создания первой электронной цифровой машины.

С помощью программно-управляемых релейных машин, разработанных в 40-х годах, можно было выполнять широкий круг математических операций. Однако скорость вычислений была сравнительно низкой. Так, например, машина «Белл V» производила арифметические действия над 7-разрядными числами со следующими скоростями: сложение и вычитание — за 0,3 сек, умножение — за 1 сек, деление — за 2,2 сек, извлечение квадратного корня — за 4,3 сек.

Создатели релейных машин с программным управлением стремились прежде всего к разработке полностью автоматического устройства и поэтому большое внимание уделяли надежности. Но другие характеристики этих машин — характеристики, на которые их создатели обращали мало внимания, — не гармонировали с полной автоматизацией. Это прежде всего сказывалось на сложности машин, которые имели огромный размер и вес. Кроме того, они обладали небольшой скоростью выполнения операций.

Цифровые машины с таким быстродействием не могли стать основой революционных изменений в таких областях техники, как авиационная, космическая, атомная и др. Повышение скорости функционирования ЦВМ могло произойти только в результате качественного технологического скачка, связанного с применением электронных элементов. Соответствующие условия были подготовлены всем предшествующим развитием электроники. Поэтому практически одновременно с началом работ над проектами автоматических релейных ЦВМ возникают идеи о замене электромеханических схем электронными.

Одна из первых попыток использовать электронные элементы в ЦВМ была предпринята в 1939—1941 гг. в США Дж. Атанасовым. Ко времени вступления США в войну (7 декабря 1941 г.) были изготовлены все основные блоки машины. В 1942 г. работы над машиной были прекращены, а через несколько лет машина была разобрана.

Проект *электронной* ЦВМ ЭНИАК был предложен в 1942 г. Дж. Маучли (США). Около года проект лежал без движения, пока им не заинтересовалась Баллистическая исследовательская лаборатория Армии США. Лаборатории было поручено составить баллистические таблицы для различных видов оружия. Быстродействие машины, предложенной Маучли, соответствовало поставленной задаче. Началось осуществление проекта, и в конце 1945 г. конструирование машины ЭНИАК было завершено. В феврале 1946 г. состоялась публичная демонстрация машины, а в 1947 г. ее передали в Баллистическую лабораторию, где она использовалась в качестве универсальной ЦВМ расчетного типа. Примером сложной задачи, которую решала данная машина, может служить система из пяти гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поток, возникающий вокруг тела вращения. Для каждого конкретного случая решение задачи требовало около часа машинного времени.

Роль ЦВМ ЭНИАК в развитии вычислительной техники определяется тем, что это была первая действующая машина, в которой использовались электронные схемы. Несмотря на недостатки, имевшиеся в конструкции машины, применение электронных ламп позволило достичь скоростей проведения операций примерно в 1000 раз больших, чем в электромеханических машинах. Так,

например, на МАРК I (1944 г.) скорость сложения составляла 300 мсек, а умножения — 5700 мсек, в наиболее быстродействующей электромеханической машине МАРК II (1947 г.) — 200 мсек и 700 мсек; соответствующие же числа для ЭНИАК были: 0,2 мсек и 2,8 мсек. Такое быстродействие привело к тому, что вычислительная техника из второстепенной отрасли производства превратилась в один из наиболее мощных и универсальных рычагов современной научно-технической революции.

Итак, при создании первой ЭВМ стремились прежде всего к большому быстродействию, что и было достигнуто (проблема автоматизации всего вычислительного процесса была решена ранее). Однако при этом обращалось недостаточное внимание на остальные характеристики машины. Применялся малоэффективный метод программирования. Для решения каждой новой задачи требовалась и новая схема соединений, на составление которой затрачивалось, в зависимости от сложности задачи, от 30 мин до 8 часов. Машина обладала малой емкостью запоминающего устройства — всего 20 чисел. Конструкция электронных схем машины ЭНИАК не отличалась стремлением к экономии электронных элементов. Так, в каждом счетчике применялось около 600 электронных ламп. Это привело к огромным размерам машины.

При разработке следующих ЭВМ — ЭДВАК и ИАС — было обращено внимание на улучшение тех характеристик предшествующей машины, которые были низкими. В ЭДВАК (1952 г.) использовалось всего 3500 электронных ламп, что в 5 раз меньше, чем в машине ЭНИАК. Такое уменьшение было достигнуто как за счет использования полупроводниковых диодов, так и за счет разработки памяти не на триггерных ячейках, а на ртутных ультразвуковых линиях задержки. Емкость запоминающего устройства составляла 1024 числа. По своим размерам ЭДВАК значительно меньше машины ЭНИАК и состоит из панелей высотой 2.14 м, занимающих площадь 13 м². Машины ЭНИАК и ЭДВАК были близкими друг другу по номинальному быстродействию. Однако наличие значительно более емкой внутренней памяти и другие особенности конструкции существенно повышали вычислительные возможности ЭДВАК. Реальное быстродействие машины ЭДВАК при решении научно-технических задач превосходило быстродействие машины ЭНИАК в 4,2 раза.

В эти же годы строится большое число других ЭВМ. Одной из них была машина SSEC (1947 г.), которая имела 13 тыс. вакуумных ламп. Это гигантская по своим размерам машина. Другими машинами были ИБМ -604, -607, -608, -609 — все они были со штеккерным программированием. В нашей стране создается самая быстродействующая ЦВМ в Европе — БЭСМ (1952 г.) и первая серийная машина «Стрела» (1953 г.). Появляются машины в Англии, Японии, ФРГ, Италии и других странах.

Все упомянутые машины были построены на электровакуумных элементах и относятся к так называемым машинам первого поколения. Десятилетний период преимущественного применения электровакуумных приборов в универсальных ЦВМ (50-е годы) характерен началом серийного производства электронных вычислительных машин, выделением вычислительной техники в самостоятельную область, оказывающую большое, часто решающее влияние на развитие других областей научно-технического прогресса, созданием электронно-вычислительной промышленности в ряде экономически развитых стран, в том числе в СССР.

Но, несмотря на все это, электронные машины первого поколения были далеко не гармоничными системами. В частности, при их разработке недостаточное внимание обращали на такие их параметры, как размер и вес: проблемы миниатюризации их элементов реально еще не были поставлены. Это вело к дороговизне машин и большой стоимости их эксплуатации.

Применение электронных ламп требует значительных расходов, связанных с установкой и эксплуатацией ЦВМ. Необходимо менять выходящие из строя лампы, а при их большом количестве это приходится делать очень часто. Требовались затраты, вызванные высоким уровнем мощности, потребляемой электронными лампами: на систему охлаждения, электропитание и др. Немалыми были и другие расходы, связанные с эксплуатацией машин.

Размеры электронных ламп во многом определяли габариты ЦВМ рассматриваемого периода. Даже при небольшом количестве ламп (порядка 1000) внутренние устройства ЦВМ требовали для своего размещения нескольких квадратных метров площади. Это служило серьезным препятствием для применения ЦВМ в условиях, когда вес и размеры аппаратуры должны быть весьма ограниченными (например, в авиации, космических аппаратах и других случаях). Ведь даже небольшое запоминающее устройство емкостью в 512 чисел по 30 двоичных разрядов требовало несколько десятков тысяч ламповых диодов и триодов.

Стремление к уменьшению числа электронных ламп является одной из важнейших особенностей подхода к конструированию вычислительных машин этого периода. Важным шагом здесь явилась замена ламповых диодов полупроводниковыми. Так, например, в машине СЕАК (США, 1950 г.) вместо ламповых было применено 10 500 германиевых диодов. В результате число электронных ламп сократилось до 750. Но удешевить машины первого поколения не удалось.

ЦВМ на электровакуумных элементах все равно оставались машинами далеко не гармоничными по своим основным характеристикам. При полной автоматизации и высоком быстродействии они отличались огромным размером, сложным устройством и были дорогостоящими в эксплуатации.

Создание и совершенствование машин, выполненных на дискретных полупроводниковых и магнитных элементах — машин второго поколения, — качественно новый шаг в развитии вычислительной техники. Производительность ЦВМ возросла по сравнению с соответствующими типами ламповых ЦВМ приблизительно на два порядка. На несколько порядков улучшились показатели надежности. На порядок возросла плотность монтажа. Значительно уменьшилась относительная стоимость, т. е. стоимость в пересчете на производительность, а также потребляемая мощность. Улучшились и многие другие характеристики. Все это привело к тому, что, начиная с машин второго поколения — а в особенности в машинах третьего поколения, т. е. машинах на интегральных схемах, — основные характеристики машин приспосабливаются к характеру тех задач, для решения которых они предназначаются.

Кроме универсальных ЭВМ ныне строят специальные машины, в которых те или иные характеристики в каком-то смысле гипертрофированы. Теперь это делается сознательно, а развитие электронно-машиностроительной технологии позволяет широко варьировать характеристики вычислительных устройств. Однако развитие и взаимосвязь характеристик ЭВМ, начиная со второго поколения, представляют собой самостоятельную большую тему, которая здесь не может быть освещена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апокин И. А., Майстров Л. Е.* Развитие вычислительных машин. М., 1974 (имеется библиография).
2. *Боольфон В. Г.* Приборы и механизмы для механического производства арифметических действий. М., 1896.
3. Математика в девяти книгах. — Историко-математические исследования, вып. X. М., 1957.
4. *Фролов Б. А.* Применение счета в палеолите и вопрос об истоках математики. — Известия Сибирского отделения АН СССР, 1965, № 9, вып. 3.
5. *Майстров Л. Е., Кузаков В. К.* Счет в палеолите. — Знание — сила, 1968, № 12.
6. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. М., 1967.
7. *Макляк Н. М.* Из истории пальцевого счета. — В кн.: Вопросы истории физико-математических наук. М., 1963.
8. История отечественной математики, т. 1. Киев, 1966.
9. *Веселовский И. Н.* Вавилонская математика. — Труды Института истории естествознания и техники, 1955, вып. V.
10. *Вейле К.* От бирки до азбуки. М.—Пг., 1923.
11. *Геродот.* История в девяти книгах. М., 1885.
12. *Freytag-Loringhoff B. von.* Über die erste Rechenmaschine. — Phys. Bl., 1958, Bd 14, N 8.
13. *Рыбников К. А.* История математики, ч. 1. [М], 1960.
14. *Кляус Е. М.* Блез Паскаль. — В кн.: У истоков классической науки. М., 1968.
15. *Кобринский Н., Пекелис В.* Быстрее мысли. М., 1959.
16. *Беспамятных Н. Д.* К истории счетных инструментов в России в XIX в. — Учен. зап. Гродненского пед. ин-та, вып. II. Минск, 1957.

К ИСТОРИИ РАЗНОСТНЫХ МАШИН

$\boxed{\text{Р. С. Гутер}}$, *Ю. Л. Полунов*

По мере развития и распространения средств вычислительной техники растет интерес к истории счетных машин и устройств, в той или иной степени подготовивших появление современных вычислительных машин. К их числу относятся и *разностные машины*, которые предназначались для табулирования функций по методу конечных разностей. В современных терминах разностные машины явились первыми специализированными цифровыми вычислительными машинами.

Работа разностной машины основана на известных положениях исчисления конечных разностей: имея значения функции y_0 и ее разностей $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$, можно последовательным сложением вычислить k ее следующих значений. Действительно,

$$\begin{array}{lll} y_1 = y_0 + \Delta y_0, & \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, & \\ y_2 = y_1 + \Delta y_1, & \Delta^2 y_1 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_0, & \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1, \\ y_3 = y_2 + \Delta y_2, & \ldots & \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

Так как многочлен n-й степени имеет (при табулировании с постоянным шагом) постоянные n-е разности, то задания $y_0, \Delta y_0, \ldots, \Delta^n y_0$ достаточно для продолжения таблицы значений многочлена с тем же шагом сколь угодно далеко. У функций более сложной природы разности любого порядка переменны. Однако при табулировании с определенным числом знаков на отдельных участках разности некоторого порядка можно считать практически постоянными, что позволяет табулировать такую функцию теми же приемами. При выходе за пределы этого участка нужно лишь сменить значения разностей, после чего можно продолжать вычисления по той же схеме для соответствующего нового участка, пока последняя разность остается практически постоянной.

На протяжении примерно 100 лет (1830—1930) был создан ряд интересных разностных машин. Их создание и конструктивные особенности представляют определенный интерес для истории развития средств вычислительной техники, но в отечественной литературе, кроме устаревшей монографии [1], эти вопросы не затрагиваются. Настоящая статья служит попыткой восполнить указанный пробел.

История создания первых разностных машин связана с именем Чарльза Бэббеджа (1791—1871). Правда, идея подобной машины впервые была высказана немецким военным инженером И. Г. Мюллером. Однако брошюра [2], в которой описан проект Мюллера, стала библиографической редкостью еще в XVIII в., и нет никаких сведений о том, что Бэббедж был с нею знаком. Во всяком случае, ни в многочисленных статьях, ни в автобиографии [3] весьма щепетильный в вопросах приоритета ученый не упоминает о Мюллере.

Работа Бэббеджа над разностными машинами описана в [4], поэтому здесь мы лишь бегло отметим ее основные этапы.

Стремление механизировать вычисление логарифмических и тригонометрических таблиц впервые возникло у Бэббеджа в 1812 или 1813 г. [4]. В 1820—1822 гг. он конструирует и собственноручно изготовляет модель, которая табулировала с 8 знаками функции, имеющими постоянные вторые разности.

Получив моральную поддержку Королевского общества и Астрономического общества и некоторую финансовую помощь правительства, Бэббедж начинает с июня 1823 г. строить машину, которая смогла бы табулировать функции с постоянными шестыми разностями с точностью до 20 знаков. Машина не была закончена — автор беспрестанно переделывал, модифицировал и усовершенствовал уже изготовленные узлы и конструкции. Кроме того, в 1834 г. Бэббедж пришел к идее *аналитической машины* — прообраза универсальной вычислительной машины — и на некоторое время охладел к разностной. Затратив на поддержку Бэббеджа около 17 тыс. фунтов стерлингов, правительство прекратило в 1842 г. финансирование его работы. Бэббеджу удалось построить лишь часть разностной машины, которая могла табулировать с 5 знаками функции с постоянными третьими разностями.

В 1848—1849 гг. Бэббедж сделал полный комплект чертежей разностной машины с учетом новых идей, возникших в процессе работы над аналитической, но и эта машина, как и ее предшественница, не была реализована [4].

Разностная машина Бэббеджа состояла из *вычислительной* и *печатающей частей* ([5], [6]). Вычислительная часть имела 3 м в длину и 1,5 м в ширину. Числа представлялись в ней с помощью регистров, состоящих си вертикально расположенных и находящихся на одной ози десятизубых колес, каждое из которых было жестко соединено с цифровым роликом. Каждой разности и каждому значению функции в машине соответствовал свой регистр. Всего таких регистров было 7. Регистр состоял из 18 колес диаметром 127 мм и 18 цифровых роликов того же диаметра и высотой 37 мм. Нижнее колесо представляло единицы, колесо, находящееся над ним, — десятки, следующее — сотни и т. д. Крайний левый регистр отводился для представления результатов табулирования (регистр таблицы), крайний правый — для представления постоянной (шестой) разности. Последний регистр имел еще одно или несколько расположенных сверху колес, использовавшихся в качестве счетчика оборотов оси регистра, содержимое которого соответствовало номеру n вычисленной строки таблицы.

Параллельно первому ряду из семи осей, несущих на себе колеса регистров, располагается второй ряд, также содержащий семь осей, которые могут быть названы *сумматорными*. Каждому зубчатому колесу регистра соответствуют три колеса на сумматорной оси (рис. 1). Нижнее и верхнее колеса (d и b соответственно) свободно вращаются на оси a, среднее колесо c жестко с ней связано. Это последнее колесо называется *ведущим* и имеет радиальный паз, проходящий через всю толщину колеса. В пазу перемещается штифт f, проходящий через всю высоту колеса и симметрично выступающий по обе его стороны. Нижнее колесо d называется *пассивным*. Оно находится в постоянном зацеплении с зубчатым колесом соответствующего разряда регистра и несет на своей верхней плоской стороне клин h. Наконец, верхнее —

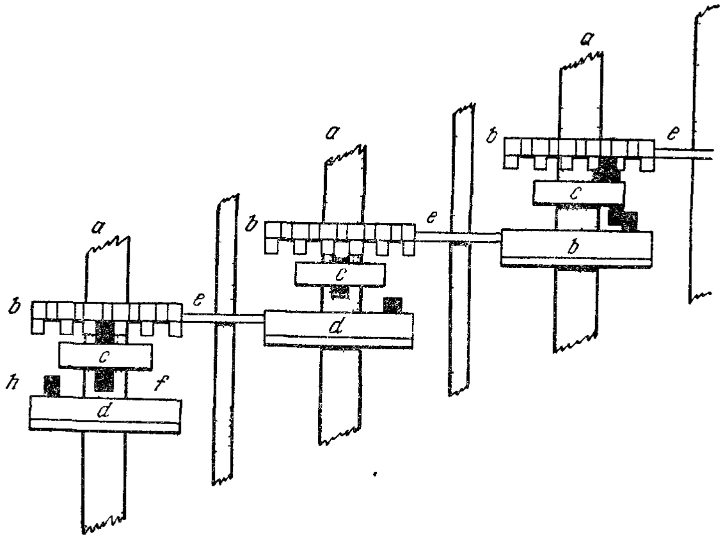

Рис. 1

суммирующее — колесо b является колесом корончатого типа и, кроме того, имеет сбоку длинный палец e.

Параллельно ряду сумматорных осей располагается ряд из семи *установочных осей*. Каждая ось несет на себе 18 установочных пальцев, назначение которых — подготовить к работе механизм сумматорной оси.

Процесс вычисления очередной строки таблицы носит последовательный характер. На каждом шаге вычисления содержимое регистра, хранящего левое слагаемое, остается неизменным. Очевидно, это обстоятельство навело Бэббеджа на мысль о возможности ускорения процесса вычисления очередной строки. Он разделил этот процесс на два такта. Во время первого такта содержимое второго, четвертого, шестого, восьмого и т. д. регистров складывается с содержимым первого, третьего, пятого, седьмого и т. д. В течение второго такта складываются содержимое третьего, пятого и т. д. регистров и второго, четвертого и т. д.

Таким образом, независимо от степени многочлена n, для получения любой строки таблицы требуется время,

равное удвоенному времени машинного выполнения операции сложения. Кроме того, Бэббедж отделил *фазу сложения* от *фазы переноса*: в течение первой фазы выполнялось лишь поразрядное сложение, во второй — к поразрядной сумме добавлялся перенос.

Перед началом вычислений в седьмом регистре вручную устанавливается значение постоянной разности. Затем приводится во вращение ведущая ось машины. Вычисление очередной строки таблицы происходит в течение оборота этой оси на 360°. При этом за первую и третью четверти оборота выполняются сложения первого и второго тактов, а за вторую и четвертую — соответствующие переносы.

Фаза сложения выполняется так. Во время фазы переноса предыдущего такта установочные пальцы, вращаясь вместе со своей осью, наталкиваются на плечо рычага, связанного с ведущим колесом c. При этом рычаг другим своим плечом нажимает на штифт f и вводит его между двумя зубьями корончатого колеса b; этим заканчивается подготовка механизма суммирования. Затем приводится во вращение сумматорная ось a и штифт f поворачивает корончатое колесо b. Поворот этого колеса происходит до тех пор, пока штифт своим нижним концом не натолкнется на клин h, который выводит его из зацепления с корончатым колесом. Последнее останавливается, и ведущее колесо c вращается далее вхолостую.

Одновременно с поворотом корончатого колеса n-го регистра происходит поворот пассивного колеса $(n+1)$-го регистра, которое связано с первым колесом пальцем e и, следовательно, поворот ведущего колеса $(n+1)$-го регистра. Поэтому суммирующие механизмы одного и того же разряда двух соседних регистров сдвинуты друг относительно друга так, как это показано на рис. 1.

Фаза переноса разделяется на два периода. Первый — подготовительный — выполняется во время фазы сложения. К нижней стороне каждого зубчатого колеса регистра (кроме первого) жестко прикреплено храповое колесо, которое поворачивается собачкой, находящейся в постоянном зацеплении с одним из его зубьев.

Собачка располагается так, что позволяет зубчатому колесу регистра поворачиваться сцепленным с ним пассивным колесом сумматорной оси, но препятствует вращению колеса в обратную сторону. На собачку одновре-

4 Заказ № 998

менно действуют пружина, стремящаяся оттянуть ее назад, и рычаг с крючком на свободном конце, препятствующий этому и прижимающий ее к зубу храповика. Когда колесо младшего разряда поворачивается от девятки к нулю, то палец, находящийся на оси регистра, нажимает на спусковой механизм, который отводит крючок рычага в сторону, освобождая собачку, и она под действием пружины переходит на следующий зуб храповика. Но это еще не перенос, а лишь подготовка к нему — машина запоминает необходимость переноса в данный разряд. Сам перенос происходит в следующей фазе: расположенный на оси регистра штифт переноса при вращении оси наталкивается на собачку и продвигает ее, а вместе с ней храповик, зубчатое колесо и цифровой ролик. Размеры и положение штифта таковы, что он может повернуть собачку и связанные с ней колеса лишь на $^1/_{10}$ оборота, после чего собачка вновь задерживается крючком рычага.

Интересно отметить, что Бэббедж одним из первых среди конструкторов счетных машин разделил выполнение переноса на два периода, чтобы избежать «накопления сопротивления движению счетных колес» — нежелательного эффекта, с которым неизбежно сталкивались конструкторы. Впоследствии такое разделение стало общепринятым.

Описанная выше схема получила название *схемы последовательного переноса*. Недостаток этой схемы заключается в том, что при возникновении переноса на несколько разрядов (например, при сложении 19. . . 99 с 1) фаза переноса может продолжаться много дольше, чем фаза поразрядного сложения.

Чтобы «уместить» фазу переноса в $^1/_4$ оборота ведущего вала машины, Бэббеджу пришлось усложнить механизм передачи десятков, увеличив диаметр оси регистра и расположив на ней штифты переноса по спирали. Таким образом, штифт переноса из 1-го разряда первым встречает собачку, которая продвигает колесо 2-го разряда на одно деление; если последнее находится в 9-й позиции, то его палец нажимает при переходе колеса от 9 к 0 на спусковой механизм, следствием чего является перемещение на 1 зуб в 3-м храповом колесе — лишь после этого штифт переноса из 2-го разряда, натолкнувшись на головку собачки, продвигает колесо 3-го разряда.

При табулировании функций с непостоянными последними разностями по ходу вычислений приходится вручную изменять установку соответствующего регистра. Чтобы вычислитель, работающий с машиной, не забывал об этом, Бэббедж ввел звонок, который включался при достижении машиной определенного шага вычислений.

Печатающая часть машины связана с вычислительной частью кулачками, имеющими форму улитки (аналогичные кулачки используются в механизме боя стенных часов). Эти кулачки жестко соединены с колесами регистра результата и при повороте последних поднимают на различную высоту особые рычаги. Последние поворачивают на определенный угол печатающий сектор, который несет на себе 10 пуансонов с цифрами.

Под сектором располагается рама, на которой фиксируется медная пластинка, а над ним помещается коленчатый рычаг. Выпрямляясь, этот рычаг с силой надавливает на один из пуансонов, находящийся под ним в данный момент, и запечатлевает на медной пластинке цифру. В следующем такте пластинка смещается влево, сектор поворачивается кулачком другого разряда, и на медную пластинку наносится следующая цифра и т. д.

Процессы вычисления и печатания в машине Бэббеджа могут быть совмещены во времени: при вычислении печатаются предыдущие результаты. После получения строки, выгравированной на медной пластинке, последняя сдвигается, подготавливая место для вывода результатов следующих вычислений. Пластинка использовалась для получения требуемого количества оттисков.

Таков в самых общих чертах проект разностной машины Бэббеджа.

В отличие от проекта, в изготовленной части машины крайний правый регистр отводился для представления результатов табулирования, а средний и левый регистры — для представления первой и второй разностей. Значение постоянной третьей разности задавалось положением десятизубого колеса, расположенного в глубине машины [1]. Верхние колеса левого регистра служили счетчиком числа оборотов ведущей оси, т. е. регистрировали номер строки таблицы. На верхнем ролике среднего

[1] Значение третьей разности не превышало поэтому числа 9.

регистра было написано «Вычисление закончено». После полного оборота ведущей оси, совершаемого с помощью рукоятки, ролик занимает положение, при котором эти слова появляются перед вычислителем.

Статья Д. Ларднера [5] побудила двух шведов — Георга Шютца и его сына Эдварда — начать разработку своего варианта разностной машины.

Сын трактирщика Пер Георг Шютц (1785—1873) в течение десяти лет занимался адвокатской деятельностью в провинции, а затем в Стокгольме [7]. В 1817 г. он купил типографию и вскоре стал совладельцем и соредактором влиятельной газеты «Аргус». Кроме того, Шютц издавал несколько журналов и выпустил ряд переводов классиков — Шекспира, Боккаччо, Вальтера Скотта.

Через несколько лет после знакомства со статьей Ларднера Шютц самостоятельно смастерил модели различных узлов машины. В 1837 г. к нему присоединился его сын Эдвард (1821—1881), оставивший для этого учебу в Королевском технологическом институте. К 1840 г. отец и сын построили модель, вычислявшую с 5 знаками линейную функцию, а к 1842 г. — вторую модель, которая табулировала с той же точностью функции с постоянными третьими разностями. В следующем году эта вторая модель, дополненная печатающим механизмом, демонстрировалась в Шведской академии наук.

Работа над моделями поглотила все сбережения Шютцев. Продав типографию, Георг становится в 1842 г. сотрудником газеты «Афтонбладет». В течение 8 лет Шютцы добивались финансовой поддержки. Наконец, в 1851 г. парламент решил выдать им 5 тыс. рикстaлеров (около 280 фунтов стерлингов) на довольно жестких условиях: если машина не будет закончена в течение года и не будет «полностью соответствовать предполагаемым целям», то деньги должны быть возвращены.

Среди членов Шведской академии нашлись люди, согласившиеся — в случае неудачи изобретателей — компенсировать затраты правительства, и Шютцы принялись за работу столь энергично, что парламент выделил им еще 5 тыс. риксталеров. К октябрю 1853 г. машина была закончена. В 1855 г. на Всемирной выставке в Париже она получила золотую медаль. Еще одну награду Шютцы получили в Лондоне — по ходатайству Бэббеджа их наградили почетной медалью Королевского общества.

В следующем году Георга Шютца избирают в Шведскую академию наук, он получает орден и годовую ренту в 1200 риксталеров.

Машина Шютцев была куплена американским бизнесменом М. Дж. Ф. Ратбоном для Дудлеевской обсерватории в Олбани (США), где использовалась для расчета астрономических таблиц до 1924 г. В 1858—1859 гг. английский инженер Б. Донкин построил по заказу правительства копию этой машины, которая использовалась для вычисления таблиц смертности для страховых компаний.

Разностная машина Шютцев табулирует с точностью до 15 знаков функции с постоянными четвертыми разностями и печатает первые 8 знаков результата вычислений ([1], [8]).

Вычислительная часть машины состоит из 15 вертикальных осей, на каждой из которых расположено по пять корончатых колес с цифровыми роликами. Горизонтальные ряды роликов образуют пять регистров — нижний ряд используется для представления четвертой (постоянной) разности, верхний — для представления результатов табулирования. В отличие от машины Бэббеджа шведская разностная машина «вытянута» в длину, что с конструктивной точки зрения более рационально.

Крайняя правая ось машины несет на себе ролики первого разряда всех регистров, соседняя — ролики второго разряда и т. д. Ролики могут иметь как десятичное деление, так и деление в угловых единицах: градусах, минутах, секундах. Как и в машине Бэббеджа, вычисление очередной строки таблицы осуществляется в два такта с помощью хитроумного спускового механизма, поворачивающего колеса верхнего регистра в соответствии с содержимым регистра, расположенного непосредственно под ним.

Передача десятков происходит следующим образом. При переходе ролика младшего разряда от 9 к 0 поворачивается небольшой рычажок, конец второго плеча которого зацепляется с колесом левого (старшего) разряда. Этим действием осуществляется запоминание переноса. Во время второго периода фазы переноса вдоль регистра с помощью цепи перемещается вертикально расположенный штифт. Наталкиваясь на выдвинутое плечо рычага, он возвращает рычаг в первоначальное положение, другое же его плечо в это время поворачивает на одно деление колесо старшего разряда.

Успехи Шютцев побудили к занятиям счетной техникой их соотечественника Мартина Виберга. В 1863 г. он привозит в Париж действующую разностную машину собственной конструкции. В ней используются идеи Бэббеджа и Шютца, но благодаря удачным конструктивным решениям она имеет меньшие размеры [9].

В машине Виберга 75 цифровых колес разбивалось на 15 групп (соответственно числу разрядов) по 5 колес в каждой, представлявших определенную цифру значения функции и каждой из четырех ее разностей. Первоначально в машине записывались значения y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$. На первом такте выполнялись сложения $y_1 + \Delta y_1 = y_2$, $\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1$, так что в машине оказывались записанными y_2, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$, а на втором такте — сложения $\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = \Delta y_2$, $\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1$, после чего в машине находились y_2, Δy_2, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1 = \Delta^4 y_0$; таким образом, все пять значений оказывались замененными на следующие.

Сложение в машине Виберга также осуществляется в две фазы. В процессе сложения с помощью специальных крючков, аналогичных защелкам в машине Бэббеджа, подготовляется фаза переноса. Последний осуществляется при втором обороте приводной рукоятки специальной лопастью. Переход к следующим значениям требует поэтому четырех оборотов приводной рукоятки.

Несколько слов о других разностных машинах и их создателях.

В 70-е годы (XIX в.) идеи Бэббеджа пересекают океан. В 1871 г. 22-летний студент Гарвардского колледжа Джордж Барнард Грант, страстный поклонник Бэббеджа и популяризатор его идей в США, предлагает свой вариант разностной машины [10]. Первый экземпляр машины Гранта, построенный к 1876 г., был передан Пенсильванскому университету. Созданный им несколько позже второй экземпляр свыше 20 лет эксплуатировался одной из американских страховых компаний.

В 1909 г. немецкий инженер К. Гаман, чье имя связано с созданием многих моделей клавишных арифмометров (например, «Гаусс», «Мерседес»), строит немецкую разностную машину [11]. Машина табулировала функции с постоянными вторыми разностями с точностью 8 знаков.

С ее помощью были получены логарифмическо-тригонометрические таблицы Баушингера—Петерса, изданные в 1910 г. Они используются в практике вычислений и в настоящее время.

Следующий этап в развитии разностных машин связан с именами английских математиков Г. К. Хадсона и в особенности Л. Дж. Комри.

Д-р Хадсон, сотрудник Департамента морского календаря, в 1914 г. впервые применил «коммерческую» счетную машину «Берроуз» для табулирования линейной функции. Его работы продолжил и развил Л. Дж. Комри, которого заслуженно следует считать прямым продолжателем идей Чарльза Бэббеджа в XX в.

Лесли Джон Комри (1893—1950) родился в Новой Зеландии на ферме своего отца, выходца из Шотландии. Закончив Оклендский университетский колледж в Англии, он в 1916 г. получил ученую степень магистра химии. Несмотря на глухоту, он добровольцем участвовал в первой мировой войне в составе Новозеландского экспедиционного корпуса и в боях потерял ногу. После войны он занялся астрономией и поступил в колледж св. Иоанна в Кембридже. В 1924 г. он получил степень доктора философии по астрономии и с 1925 г. работал в Департаменте морского календаря.

Ознакомившись с работами Бэббеджа и Хадсона, Комри решил механизировать табулирование, которое составляло основную часть деятельности сотрудников Департамента морского календаря. В 1928 г. он использовал счетную машину для табулирования функций с постоянными вторыми разностями. В 1931 г. с помощью машины «Берроуз» Комри вычислил и напечатал 7-значные и 8-значные таблицы основных тригонометрических функций с шагом в одну секунду дуги [12]. В том же 1931 г. он обратился к английскому правительству с настоятельной просьбой о финансировании работ по созданию разностной машины. Ему повезло больше чем Бэббеджу, да и сто лет прошли, видимо, не зря: согласие правительства было получено всего лишь через два года, и уже к концу 1933 г. разностная машина «Нейшенел» была построена. Она могла табулировать с точностью до 13 знаков функции с постоянными шестыми разностями — построенная через сто лет после Бэббеджа машина имела меньше возможностей, чем запроектированная последним.

Машиной Комри история разностных машин закончилась. Через десять с небольшим лет в США начала работать машина МАРК I — одна из первых автоматических цифровых вычислительных машин. Наступил новый этап в развитии средств вычислительной техники [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боольфон В. Г.* Приборы и машины для механического производства арифметических действий. М., 1896.
2. *Klipstein Ph.-E.* Beschreibung einer neu erfundenen Rechenmaschine. Frankfurt, 1786.
3. *Babbage Ch.* Passages from the life of a philosopher. London, 1864.
4. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Чарльз Бэббедж. М., 1973.
5. *Lardner D.* Babbage's calculating engines. — Edinburgh Review, 1834, July.
6. *Buxton L. H. D.* Charles Babbage and his difference engines. — Transactions of Newcomen Society. London, 1935, vol. XIV.
7. P. G. Scheutz, publicist, author, scientific mechanician, and Edvard Scheutz, enginear, — biography and bibliography. — Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 1947, vol. 2, N 18.
8. *Baxandall D.* Cataloge of the Collections in the Science Museum. . . Mathematics 1: Calculating Machines and Instruments. London, 1926.
9. *Jakob L.* Le calcul méchanique. Paris, 1911.
10. *Grant G. B.* On a new difference engine. — The American Journal of Science and Arts, ser. III, 1871, vol. 11, N 7.
11. *Galle A.* Mathematische Instrumente. Berlin, 1912.
12. *Comrie L. J.* Application of commercial calculating machines to scientific computing. — Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 1946, vol. 1, N 16.
13. *Майстров Л. Е., Апокин И. А.* Развитие вычислительных машин. М., 1974.

[2] В 1974 г. вышла книга [13], в которой освещаются некоторые из рассмотренных нами вопросов.

АВГУСТА АДА ЛАВЛЕЙС И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

|*Р. С. Гутер*|, *Ю. Л. Полунов*

Несколько страниц, исписанных в ночь перед дуэлью Эваристом Галуа, открыли миру гениального математика. Единственная песня — «Марсельеза», — сочиненная капитаном Руже де Лиллем, сделала его имя бессмертным. Составленные 28-летней графиней Августой Адой Лавлейс примечания к статье итальянского инженера Л. Ф. Менабреа об аналитической машине Ч. Бэббеджа дают основания считать ее первой программисткой, чье имя навсегда останется в истории вычислительной математики и вычислительной техники.

Чарльз Бэббедж, намного опередивший время своими работами, писал о статье Менабреа и примечаниях А. А. Лавлейс, что «взятые вместе, они дают тем, кто способен к пониманию рассуждений, полное объяснение того, что все разложения и операции анализа могут быть теперь выполнены с помощью машинерии» [1].

Августа Ада Лавлейс была дочерью великого поэта Джорджа Байрона. Однако хотя литература о Байроне почти неисчислима, сведения о жизни и научном творчестве его дочери крайне скудны. Основных источников всего лишь два: эссе лорда Боудена «Краткая история вычислений» [2], в котором используются сообщенные его автору воспоминания [1] Анны Вентуорт, внучки А. А. Лавлейс, и книга М. Мосли «Вспыльчивый гений. Жизнь Чарльза Бэббеджа, изобретателя» [3], где помещена переписка Ч. Бэббеджа и Августы Ады Лавлейс, хранящаяся в архиве Библиотеки Британского музея.

К сожалению, М. Мосли использовала эту переписку не наилучшим для наших целей образом: она уделяла

[1] Последние, видимо, основаны на рассказах матери или семейных архивах, так как Августа Ада Лавлейс скончалась задолго до рождения своей внучки.

основное внимание житейским коллизиям, иногда лишь с досадой упоминая, что заметная часть письма посвящена математическим рассуждениям. Не имея, к сожалению, доступа к архивам Британского музея, мы вынуждены ограничиться указанными источниками, к которым можно присоединить лишь автобиографические «Послания из жизни философа» Бэббеджа [1]. Некоторые другие источники были использованы для характеристики эпохи и складывавшихся ситуаций.

1

Семейная жизнь Джорджа Байрона сложилась неудачно. Он женился на Аннабелле Милбэнк 2 января 1815 г.; 10 декабря у них родилась дочь, которую назвали Августа Ада, а в январе 1816 г. супруги разъехались навсегда.

Из писем и дневников поэта видно, что разлука с дочерью причиняла ему нравственные страдания. В письме от 12 октября 1823 г. он пишет своей двоюродной сестре: «Мне хотелось бы, чтобы ты получила от леди Байрон сведения о наклонностях Ады, ее привычках, занятиях, нравственных качествах и характере, а также ее внешности. . . Общительна ли она или любит уединение, молчалива или разговорчива, любит ли читать или наоборот? Пылкая ли у нее натура? Надеюсь, что бог наградит ее чем угодно, но только не поэтическим даром. . .» ([4], с. 323—324).

Опасения поэта относительно «поэтического дара» Августы Ады были напрасны. Подобно донне Инессе, созданной воображением ее отца, Ада «имела ум математический», и в этом походила на свою мать.

Аннабелла Милбэнк (1792—1860) была весьма одаренным человеком. «Она незаурядная женщина, поэтесса, математик, философ», — записывает 30 ноября 1813 г. Байрон в своем дневнике ([4], с. 67). Аннабелла действительно любила математику и с детских лет до замужества занималась ею под руководством Уильяма Френда. Зять последнего, известный английский математик и логик Август де Морган, учил впоследствии ее дочь.

К сожалению, человеческие качества Аннабеллы Милбэнк были не столь замечательны, как ее математические способности. «Брак поэта, — писал один из его биографов, — вряд ли мог быть счастливым. Чопорная, мелочная, самоуверенная, усвоившая все ханжеские предрассудки провинциальной дворянской среды, Аннабелла была совершенно неспособна ни понять характер своего мужа, ни сочувствовать его стремлениям и деятельности. Да и сам Байрон . . . никак не был подготовлен своей предыдущей жизнью и воспитанием к заботам и жертвам, которые требовало от него супружество. . .» ([4], с. 350).

Впрочем, не о том ли писал и сам Байрон в «Дон-Жуане»

> Мне очень, очень жаль, что за повес
> Выходят замуж умные девицы,
> Ну, что же делать, если умный бес
> Ученым разговором тяготится?
> Я ближних уважаю интерес,
> Со мной такой ошибки не случится. . .?
>
> (см. [5], с. 13, стих 22).

Леди Байрон и ее друзья — профессор де Морган и его жена, математик-любитель Мэри Соммервил и Чарльз Бэббедж — поддерживали увлечение юной Ады математикой. Под руководством де Моргана она в 15 лет самостоятельно изучает «Геометрию» Пэйсли. Впрочем, Ада занималась не только математикой: она играла на нескольких музыкальных инструментах, особенно хорошо — на скрипке, в совершенстве знала французский и итальянский (последний — по пожеланию отца), а впоследствии и немецкий языки.

2

В мае 1833 г. Августа Ада была представлена при дворе. Но наряду со светскими развлечениями, которые так любила юная Ада, скачками, которыми она увлекалась и которые сыграли затем роковую роль в ее жизни, Ада продолжает проявлять интерес к науке. Она занимается астрономией, знакомится с фабриками, а в 1834 г. посещает лекции д-ра Д. Ларднера, посвященные разностной машине Бэббеджа.

К этому времени относится и первое посещение Адой мастерской Бэббеджа в Лондоне. Софи де Морган пишет в своих мемуарах: «В то время как большинство из присутствующих только глазело на это прекрасное устройство [речь идет о разностной машине] [2], выражая свое восхищение возгласами, подобно дикарям . . . юная мисс Байрон сумела понять принцип его действия и оценила необычайную красоту изобретения» ([6], с. 89).

Чарльз Бэббедж — человек сложный и противоречивый — искренне полюбил юную Августу Аду. Он находил в ней главное, что ценил в людях, — остроту ума. Быть может, сыграло роль и то, что Ада была почти ровесницей его рано умершей единственной дочери [3]. Бэббедж следит за научными занятиями Ады, посылает ей статьи и книги, представляющие интерес. Мери Соммервил вспоминает, что они вместе с Адой «часто посещали мистера Бэббеджа, работавшего над вычислительными машинами» и он всегда «приветливо встречал их, терпеливо объяснял устройство его машины и разъяснял практическую пользу автоматических вычислений» (цит. по: [2], с. 20).

Семейная жизнь Августы Ады сложилась счастливей, нежели ее родителей. В июле 1835 г. она вышла замуж за Уильяма, восемнадцатого лорда Кинга, ставшего впоследствии первым графом Лавлейсом. Сэр Уильям, которому в то время исполнилось 29 лет, был спокойным и приветливым человеком. Он с одобрением относился к научным занятиям своей жены и помогал ей, как мог, при работе над комментариями к статье Менабреа.

Чарльз Бэббедж стал постоянным посетителем лондонского дома Уильяма и Ады на Сент-Джеймской площади и их загородного имения Окхам-Парк. Супруги вели светский образ жизни, регулярно устраивая приемы и вечера, на которых бывал «весь Лондон». Один из постоянных посетителей этих вечеров, редактор популярного лондонского журнала «Экзаминер» Олбани Фонбланк оставил такой портрет хозяйки дома:

> Она была ни на кого не похожа и обладала талантом не поэтическим, но математическим и метафизическим. . . Наряду с совершенно мужской способностью к пониманию, проявлявшейся в умении решительно и быстро схватывать суть дела в целом, леди Лавлейс обладала всеми прелестями утонченного женского характера. Ее манеры, ее вкусы, ее образование — особенно музыкальное, в котором она достигла совершенства, — были женственными в наиболее прекрасном смысле этого слова, и поверхностный наблюдатель никогда не угадал бы, сколько внутренней силы и знания сокрыто под ее женской грацией. В той же степени, в которой она не терпела легкомыслия и банальность, она получала удовольствие от истинно интеллектуального общества и поэтому энергично искала знакомства со всеми, кто был известен в науке, искусстве и литературе ([3], с. 159).

[2] Здесь и далее в квадратных скобках — комментарий авторов данной статьи.

[3] Из восьми детей Бэббеджа до взрослых лет дожили лишь три сына. В 1828 г. Бэббедж почти одновременно потерял отца, жену и двух детей.

Не менее выразительна и автохарактеристика, данная Адой в одном из писем к Бэббеджу:

> Мой мозг — нечто большее, чем просто смертная субстанция; я надеюсь, время покажет это (если только мое дыхание и прочее не будет слишком быстро прогрессировать к смерти).
>
> Клянусь Дьяволом, что не пройдет и десяти лет, как я высосу некоторое количество жизненной крови из загадок вселенной, причем так, как этого не смогли бы сделать обычные смертные губы и умы. Никто не знает, какие ужасающие энергия и сила лежат еще не использованными в моем маленьком гибком существе.
>
> Я сказала «ужасающие», так как Вы можете вообразить, что это означает в некоторых обстоятельствах. Граф Л. иногда говорит: «Каким генералом могла бы ты быть!» Представьте меня со временем в общественных и политических заботах (я всегда мечтала обладать мировой властью, силой и славой — эта мечта никогда не сбудется. . .). Для вселенной хорошо, что мои устремления и честолюбие навсегда связаны с духовным миром и что я не собираюсь иметь дела с саблями, ядом и интригами вместо *x*, *y* и *z* (цит. по: [3], с. 174—175).

Портрет живописца сохранил образ привлекательной черноволосой женщины невысокого роста и хрупкого телосложения; недаром Бэббедж часто называл ее в письмах «леди-феей».

3

В первые годы замужества научные занятия Ады не были интенсивными. Видимо, причинами этого были дети — в мае 1836 г. родился первый сын, в феврале 1838 г. — дочь и в конце 1839 г. — второй сын, а также ее слабое здоровье. Однако, несмотря на болезни, семейные заботы и светские обязанности, Ада не оставляет мысли о совершенствовании в области математики.

Сразу же после рождения второго сына Ада обращается к Бэббеджу с просьбой порекомендовать ей преподавателя математики. Ада просит не считать ее излишне самоуверенной, но «она полагает, что имеет силы дойти так далеко в достижении своих целей, как она этого пожелает» ([3], с. 162).

Ч. Бэббедж отвечает (29 ноября 1839 г.): «Я думаю, что Ваши математические способности настолько очевидны, что не нуждаются в проверке. Я навел справки, но найти в настоящее время человека, которого я мог бы рекомендовать Вам как преподавателя, мне не удалось. Я продолжу поиски» (цит. по: [3], с. 162). В письме от 14 марта 1840 г. Ада пишет, что, если поиски преподавателя окажутся неудачными, она потратит 1840 год на совершенствование своих знаний немецкого языка.

Желания Ады совершенствоваться в математике не имели еще, видимо, конкретной направленности. Во всяком случае, нам не известны ни интересовавшие ее области математики, ни характер ее занятий. Но в начале 1841 г. ее намерения начинают приобретать конкретные формы. 5 января, приглашая Бэббеджа в Окхам-Парк, она пишет: «. . . Вы должны сообщить мне основные сведения, касающиеся Вашей машины [речь идет об аналитической машине]. У меня есть более чем одна причина желать этого» (цит. по: [3], с. 163). В следующем письме (от 12 января 1841 г.) Ада уже более определенно говорит о своих планах:

Я очень хочу говорить с Вами. Я намекну Вам, *о чем* [4]. Мне пришло в голову, что некоторое время в будущем (может быть, в течение трех или четырех, а возможно, даже многих лет) *моя голова* может служить Вам для Ваших целей и планов. Если так, если когда-либо смогу быть Вам полезной, моя голова будет принадлежать Вам. Именно по этому вопросу я хочу серьезно поговорить с Вами.

Вы всегда были для меня истинным, добрым и неоценимым другом, и я хотела бы любым способом отплатить за это, хотя я едва ли посмею так превозносить себя, чтобы надеяться, пусть даже робко, что я когда-либо буду достойна пытаться сослужить Вам интеллектуальную службу (цит. по: [3], с. 164).

22 февраля 1841 г. Ада сообщает Бэббеджу, что занимается вопросами, связанными с его вычислительными машинами, в частности, методом конечных разностей:

[4] Здесь и далее в письмах и цитатах подчеркнуто А. Лавлейс.

Я более, чем когда-либо, определилась в своих планах на будущее. . . Я намерена так организовать свою жизнь в городе, чтобы обеспечить себе возможность заниматься. . . несколько часов ежедневно. . . Я много думаю о возможном (полагаю, что могу сказать — вполне вероятном) сотрудничестве между нами в будущем. . . Я считаю, что результаты этого сотрудничества будут полезны для нас обоих и полагаю, что эта идея (которую, между прочим, я долго вынашивала в смутной и приблизительной форме) является одной из тех счастливых проявлений интуиции, которые временами приходят в голову так необъяснимо и удачно ([3], с. 164).

Чарльз Бэббедж в начале 40-х годов занимался в основном двумя вопросами (если не считать многочисленных побочных «увлечений», в конечном счете так или иначе связанных с вычислительными машинами): творческим и организационным. К первому относились выработка схем выполнения арифметических операций, разработка и совершенствование структуры аналитической машины, решение вопросов, выражаясь современным языком, программирования для этой машины и т. п. Ко второму — в то время более важному для ученого — относились попытки склонить правительство к финансированию работ по постройке аналитической машины.

Для успешного решения второго вопроса Бэббеджу необходимо было получить одобрение и поддержку его планов в различных кругах общества, чтобы создать общественное давление на правительство, как это удалось, например, при начале работы над разностной машиной. Поэтому оказалась необходимой популяризация идеи автоматических вычислений, четкое и законченное, но понятное для достаточно широких кругов изложение принципов действия аналитической машины, разъяснение различий между разностной и аналитической машинами и колоссальных преимуществ последней. Здесь и был источник научного сотрудничества Чарльза Бэббеджа и Августы Ады Лавлейс.

Сам Бэббедж говорил, что слишком занят работой над машинами, чтобы у него оставалось время описывать их. Разностную машину первым описал доктор Д. Ларднер [7]. Аналитическая машина была впервые описана итальянским военным инженером Л. Ф. Менабреа, впоследствии — генералом в армии Гарибальди, а затем премьер-министром Италии. Статья Л. Ф. Менабреа

«Очерк аналитической машины, изобретенной Чарльзом Бэббеджем» [8], опубликованная в октябре 1842 г. в XLI выпуске «Bibliothèque Universelle de Genéve», была написана на основе лекций, которые Бэббедж читал в 1840 г. в Турине, на конференции итальянских ученых, куда он был приглашен известным итальянским математиком М. Плана.

«Спустя некоторое время после появления его очерка,— писал Бэббедж в своих «Посланиях», — покойная графиня Лавлейс сообщила мне, что она перевела очерк Менабреа. Я спросил, почему она не написала самостоятельной статьи по этому вопросу, с которым была так хорошо знакома. На это леди Лавлейс отвечала, что эта мысль не пришла ей в голову. Тогда я предложил, чтобы она добавила некоторые примечания к очерку Менабреа. Эта идея была ею немедленно принята» ([9], с. 68). План примечаний разрабатывался совместно с Бэббеджем, который ограничивается в «Посланиях» фразой: «Мы обсуждали вместе различные иллюстрации, которые могли быть использованы; я предложил несколько, но выбор она сделала совершенно самостоятельно» ([9], с. 68).

Видимо, в это же время Бэббедж договорился с редактором солидного научного журнала «Ученые записки Тейлора» о публикации перевода статьи Менабреа и примечаний к нему.

Работа над примечаниями была закончена в 1843 г. Ада отсылала отдельные завершенные ею примечания Бэббеджу, который редактировал рукопись и возвращал ее автору, сопровождая краткими замечаниями. Они касались либо стиля и содержания примечаний, либо неточностей в истолковании автором каких-либо вопросов, лишь мельком упомянутых или вовсе обойденных Менабреа. Это, в частности, относится к вопросу о «картах переменных», многократно обсуждавшемуся в переписке Ады с Бэббеджем ([3], с. 169, 172—173).

Первый вариант перевода и примечаний к нему был передан в типографию 6 июля 1843 г. Спустя несколько дней графиня Лавлейс получила оттиски своей первой (к сожалению, и единственной) научной работы. Однако потребовался еще месяц напряженного труда, чтобы завершить работу. Отчасти в этом были виноваты печатники, допускавшие большое число опечаток, отчасти и автор, который непрерывно дополнял, исправлял и совершенствовал свои «Примечания». Уже после получения корректур, 10 июля, Ада пишет Бэббеджу: «Я хочу вставить в одно из моих примечаний кое-что о числах Бернулли в качестве примера того, как неявная функция может быть вычислена машиной без того, чтобы предварительно быть разрешенной с помощью головы и рук человека. Пришлите мне необходимые данные и формулы».

Бэббедж прислал все необходимые сведения. Более того, желая избавить Аду от трудностей, он сам составил, как мы сказали бы сейчас, алгоритм для нахождения этих чисел, но . . . допустил при этом грубую ошибку, которую Ада и обнаружила. 19 июля она сообщила Бэббеджу, что самостоятельно «составила список операций для вычисления каждого коэффициента для каждой переменной» ([3], с. 177), т. е. написала программу для вычисления чисел Бернулли.

Эта программа вызвала восторг Бэббеджа. Он считал, что ее описание достойно отдельной статьи, а не скромных примечаний к переводу. Бэббедж договорился о публикации такой статьи в одном из научных журналов, но графиня Лавлейс не приняла предложения, так как это было связано с отказом или, по крайней мере, задержкой публикации примечаний в журнале Тейлора, а она считала невозможным не сдержать данного ею обещания.

Ежедневно, а иногда и по нескольку раз в день слуга графини отвозил из Окхам-Парка в Лондон страницы «Примечаний» с поправками и дополнениями. Бэббедж просматривал их и либо отсылал с замечаниями обратно, либо передавал в типографию Тейлора. Когда возникали особые трудности, Ада приезжала в Лондон, чтобы разрешить их в личной беседе. Так, 13 июля она просит Бэббеджа прийти на Сент-Джеймскую площадь в 9 часов утра: «Столь ранний час выбран мною потому, что надо сделать очень многое» ([3], с. 177). Через 12 дней Ада вновь просит встречи в городе, так как «не может быть спокойной относительно всех примечаний, если не прочтет их ему вслух перед тем, как они будут окончательно отпечатаны» ([3], с. 178).

Нельзя сказать, чтобы Бэббедж, охотно помогавший своей «леди-фее», был внимательным редактором. Он часто путал параграфы, таблицы, листы верстки, по нескольку раз правил одни и те же листы, оставляя без внимания новый их вариант, а иногда и терял некоторые страницы. Все это раздражало и весьма досаждало пунктуальной

5 Заказ № 998

леди Аде. Впрочем, и она была не очень «удобным» автором для своего редактора. Ада очень ревниво относилась к попыткам Бэббеджа исправлять что-либо в ее работе без ее ведома: «Я очень раздосадована тем, что Вы изменили мое примечание. Вы знаете, что я всегда соглашаюсь сделать любые необходимые изменения, но самостоятельно, и я не терплю, чтобы кто-либо вмешивался в то, что я предлагаю. Если я не права, то, полагаю, в состоянии внести изменения при сверке, если Вы, конечно, пришлете мне корректуры» ([3], с. 170).

Неудивительно поэтому, когда в другом письме она пишет: «Вы будете изумлены и до некоторой степени будете торжествовать, когда *я признáюсь*, что *полностью* одобряю Ваши изменения в моем подстрочном примечании» ([3], с. 180).

Надо сказать, что Бэббедж, вообще человек желчный и раздражительный, нетерпимый и к критике, и к возражениям, в данном случае проявлял максимум чуткости и тактичности. Он высоко ценил и ее способности, и ее работу и, зная, как много значит его высокая оценка для неуравновешенной и легко впадающей в крайности Ады, не жалел хвалебных слов по ее адресу, впрочем вполне ею заслуженных.

«Я получил наслаждение от примечания *D*. Оно написано Вашим обычным ясным стилем» (30 июня 1843 г., [3], с. 169). «Мне очень не хочется расставаться с превосходным и философским рассмотрением Аналитической машины, содержащимся в примечании *A* . . . Пожалуйста, не изменяйте его и позвольте мне задержать примечание до понедельника. . . Чем больше я читаю Ваши примечания, тем больше поражаюсь Вашей интуиции и сожалею, что раньше не исследовал столь богатую жилу благороднейшего металла» (2 июля, [3], с. 171).

Поддержка и теплые слова Бэббеджа укрепляли уверенность Ады и давали ей силы для работы. «Мне кажется, — пишет она 10 июля, — что я весьма успешно завершаю мои примечания; и если даже выход «Ученых записок Тейлора» придется на неделю-другую задержать, мистеру Тейлору стоит подождать». Затем 28 июля: «Я счастлива узнать, что мои Примечания требуют по существу очень мало исправлений. Сказать по правде, я сама несколько поражена ими и не могу не быть пораженной — хотя речь идет обо мне самой — их действительно прекрасным стилем и его превосходством над стилем самого очерка. Я заставила графа Л. много смеяться тому невозмутимому тону, с которым я заметила: «Ну, я очень довольна этим моим первенцем. Это необычайно прекрасный ребенок и он вырастет в человека первоклассной величины и силы» ([3], с. 179—180).

Успехи давались Аде большим напряжением сил и не без ущерба для здоровья. «Я работала успешно весь день», — пишет она Бэббеджу 2 июля ([3], с. 171). «Я работаю для Вас очень усердно, подобно Дьяволу (которым, возможно, я и являюсь)», — 10 июля. «Я работала непрерывно с семи часов утра, до тех пор, пока не была вынуждена оставить работу из-за полной невозможности сконцентрировать далее внимание. . . Вы не представляете, сколько трудностей у меня было с тригонометрическим примечанием *E*» — 26 июля ([3], с. 178). «Примечание *B* доведет меня до смерти, хотя я и сделала в нем совсем небольшие изменения» — 1 августа ([3], с. 183). «Я едва ли смогу описать Вам, как меня мучит и изводит болезнь. . . Правда, сегодня я снова хорошо дышу и чувствую себя лучше во всех отношениях благодаря средствам доктора Л., который, кажется, понимает, как надо лечить» — 4 июля ([3], с. 172).

Наконец, 6 августа 1843 г. Бэббедж отсылает Аде последние замечания, а 8 августа просит ее переслать все оставшиеся материалы непосредственно в типографию Тейлора; номер должен выйти через несколько дней. Лихорадочная напряженная работа закончена!

Ада долго не могла решить, как подписать перевод статьи Менабреа и «Примечания». Не в обычаях того времени было для графини подписывать литературные произведения. Тем не менее Аде хотелось, чтобы последующие работы, о которых она мечтала, могли как-то связываться с ее именем. По совету мужа она решает, не называя переводчика, под каждым примечанием поставить свои инициалы — A. A. L.

4

«Ученые записки Тейлора» появились в книжных лавках Лондона в конце августа 1843 г. и вызвали немалый интерес у читающей публики.

По воспоминаниям современника, Л. Ф. Менабреа «был очень удивлен, когда узнал, что его „Очерк“ не только точно переведен, но и снабжен интересными научными примечаниями и что все это сделано автором, чьи инициалы не могли быть связаны ни с одним из современных математиков» ([3], с. 184).

Старый друг леди Байрон и бывший учитель Ады профессор Август де Морган отозвался на выход «Записок» письмом, пересылая которое Бэббеджу, Ада писала: «Посылаю Вам очень теплое и одобрительное письмо де Моргана о моей статье. Я никогда не ожидала, что он столь благосклонно отзовется о моем несовершенном юношеском сочинении» ([3], с. 192).

«Благосклонные отзывы» известного ученого, высказанные им в «одобрительном письме», не вполне совпадали с его мнением о математических способностях и творческих возможностях его ученицы. Это видно из другого письма де Моргана, написанного в 1844 г. «строго конфиденциально» леди Аннабелле Байрон ([3], с. 194—195).

Де Морган пишет, что чувствует себя обязанным сообщить леди Байрон, что способности ее дочери «к размышлениям над абстрактными математическими и метафизическими проблемами являются совершенно необычными» для любого начинающего, будь то мужчина или женщина. Леди Лавлейс, очевидно, полна решимости не только достичь существующих границ знания, но и выйти за их пределы. Движущей силой ее намерений является не желание добиться известности (хотя ее характеру и присуще тщеславие), но неудержимое влечение к математике.

«Трактат о машине Бэббеджа, — пишет далее де Морган, — довольно славная работа, но я полагаю, что мог бы показать несколько примеров вопросов, задававшихся леди Лавлейс по поводу новых для нее понятий, из которых любой математик увидит, что данный трактат вовсе не критерий того, чего можно от нее ожидать». Де Морган предсказывает, что Ада могла бы стать в будущем первоклассным математиком-исследователем, но это может пагубно сказаться на ее здоровье. Леди Лавлейс, без сомнения, способна выдержать те умственные напряжения, которые связаны с занятиями подобного рода. Однако до тех пор, пока предмет исследования не овладел полностью ее вниманием, увлечение математикой может и не отразиться на здоровье, но позже, когда (как это обычно бывает) все ее мысли будут непрерывно и всецело концентрироваться на этом предмете, «начнется борьба между умом и телом».

Реакция Аннабеллы Байрон на письмо Августа де Моргана нам не известна. Впрочем, видимо, она и не слишком интересна для нас: трудно предположить, что Ада, давно вышедшая из-под влияния эмоционально чуждой ей матери, своенравная и глубоко убежденная в своих математических способностях (особенно после успеха «Примечаний»), последовала бы советам матери, не совпадающим с ее собственными намерениями, даже если такие советы и были.

Уже 11 августа 1843 г., спустя два-три дня после отправки в типографию последних материалов, Ада в письме Бэббеджу задает ему вопрос: «Оставит ли Бэббедж интеллект и способности «леди-феи» на службе своим великим целям?» ([3], с. 177—178). Ответ Бэббеджа, тронутого письмом Ады, которую он теперь стал называть «моим дорогим Интерпретатором», был, разумеется, положительным.

В том же письме от 11 августа Ада предлагает — с согласия Бэббеджа — консультировать всех интересующихся по вопросам, связанным с его машинами, чтобы сам Бэббедж все свои силы мог употребить для работы. Этому плану не суждено было сбыться.

К сожалению, другое предложение стало предметом совместных забот Чарльза Бэббеджа и супругов Лавлейс: попытка изобрести беспроигрышную систему ставок на бегах, попытка, которая стала источником нравственных страданий леди Ады и окрасила в мрачные тона и без того трагические последние годы ее жизни. Почему же двое ученых поставили перед собою такую, мягко говоря, сомнительную цель?

4 ноября 1842 г. правительство Великобритании — в лице премьер-министра сэра Роберта Пиля — окончательно отказало Бэббеджу в финансировании его работ над вычислительными машинами. Бэббедж был вынужден самостоятельно изыскивать средства для продолжения «главного дела» своей жизни. Он готовился — исключительно по финансовым соображениям — писать роман; придумал и собирался изготовить автомат для игры в «крестики и нолики», полагая заработать деньги демонстрацией этого автомата. Но. . . «труд упорный» не то чтобы был ему тошен, а попросту не был свойствен

его натуре. Августа Ада Лавлейс в этом отношении нисколько не походила на него.

«Вы ничего не говорите об игре в „крестики и нолики“,—писала она Бэббеджу, — в Вашем последнем письме. Я опасаюсь, что автомат никогда не будет *доведен до конца*. Я хотела бы, чтобы Вы *закончили* что-нибудь, особенно если это что-нибудь сможет давать нечто золотое или серебряное» ([3], с. 201).

По всей видимости, система беспроигрышных ставок — еще один вариант «получения чего-либо золотого или серебряного». Леди Ада могла рассматривать создание такой системы и как научную задачу, хотя, взявшись за нее, следовало заведомо отказаться от честолюбивых мечтаний — такую работу нельзя опубликовать, даже под инициалами. Несмотря на это и на всевозможные моральные соображения против этого пути, граф и графиня Лавлейс и Чарльз Бэббедж принялись за разработку — и практическую проверку правильности — системы беспроигрышных ставок на бегах, дабы добыть деньги для продолжения работы Бэббеджа над вычислительными машинами.

Начиная с 1844 г. вплоть до смерти Ады в 1852 г. события развиваются по законам мрачной викторианской мелодрамы, завершившейся трагическим концом. Об этом периоде жизни Ады известно очень мало. Вероятно, Чарльз Бэббедж, опасаясь за репутацию леди Лавлейс, уничтожил большую часть своей переписки с «леди-феей». Читая сохранившиеся письма, трудно даже представить, что графиня на протяжении почти восьми лет вела двойную жизнь: с одной стороны — вечерние приемы, загородные прогулки, светские увлечения (собачки, птички, лошади), а с другой — рискованная и азартная игра, необходимость знакомств (иногда косвенных, а иногда и прямых) с жокеями, букмекерами, разными «околоипподромными» личностями, мучительные попытки создать «систему», которые не приводили к успехам.

Чем была заполнена видимая жизнь Ады? Она часто сообщает Бэббеджу о поведении и привычках ее пернатых друзей и четвероногих приятелей: супруги Лавлейс, подобно многим «людям света», держали и свору собак. Она спрашивает совета, как пригласить на обед графиню Харли — друга Менабреа и Бэббеджа, — не будучи ей представленной. Она с негодованием пишет Бэббеджу

о шутовском выступлении в парламенте премьера Роберта Пиля, заявившего, что вычислительная машина пригодна лишь для вычисления времени, в течение которого она будет использоваться.

Она сообщает Бэббеджу о своих детях. Тринадцатилетний Генри записался юнгой в британский флот и шлет ей очаровательные письма с экватора и мыса Доброй Надежды [5]. Младший сын живет у леди Байрон, которая сделала его своим наследником; он проявляет несомненные — хотя отчасти и опасные — способности к рисованию карикатур. Дочь также находится у бабушки; у нее слабые легкие, и Ада очень обеспокоена ее здоровьем [6].

И — ни слова о «системе», об «ипподромной активности». . . Лишь однажды встречается (30.IX 1848 г.): «Я думаю, между прочим, *обо всех* [курсив наш] *играх* [курсив Ады] и о системе обозначений для них. Если какая-нибудь хорошая идея придет мне в голову, я не забуду сообщить Вам» ([3], с. 200).

Любопытно, что в сохранившихся письмах часто упоминается некая «книга», просто «книга», без указания названия и автора. Например, в октябре 1844 г.: «Я совершенно не могу, к сожалению, обойтись сегодня без книги. Она необходима мне, так как в настоящий момент я постоянно обращаюсь к ней, но я думаю Вы сможете получить ее завтра» ([3], с. 193). В том же месяце: «Я пошлю книгу непосредственно Вам, и Вы скажете по получении, как долго захотите держать ее у себя» ([3], с. 197). 11.II 1849 г.: «Я пошлю Вам книгу во вторник: полагаю, Вы

---

[5] Судьба старшего сына Ады трагична. Не выдержав муштры военного флота, он перешел в торговый, начал пить и умер в возрасте 26 лет от туберкулеза.

[6] Здоровье дочери впоследствии улучшилось, и она дожила до глубокой старости. Анна Блант (в замужестве) унаследовала многие способности матери и ее любовь к лошадям. Она была замечательным лингвистом, художником и музыкантом, но жизнь свою посвятила изучению арабских племен и арабских лошадей. Вместе с мужем, поэтом Уилфридом Скавеном Блантом, она много путешествовала в аравийских пустынях и стала одним из выдающихся специалистов по арабскому языку и арабской этнографии. Супруги Блант привезли в Англию несколько арабских скакунов и организовали знаменитые впоследствии Граббетские конюшни. После смерти леди Анны, в годы первой мировой войны, ее дело продолжала ее дочь, леди Вентуорт. Таким образом, увлечение Ады Лавлейс лошадьми превратилось в семейную традицию (см. [2], с. 21—22).

сможете оставить ее у себя до пятницы» ([3], с. 206). 20.IX 1849: «Не забудьте о новой обложке, которую Вы обещали принести для книги. Бедная книга очень обтрепалась. Я многое хочу объяснить Вам, но в письме этого сделать нельзя. . . Я не могу расшифровать некоторые обозначения в работе, о которой идет речь» ([3], с. 206).

В свою очередь Бэббедж отвечает: «У меня есть дела на среду и они помешают мне выполнить Ваши пожелания относительно книги» (4.XII 1848 г., [3], с. 205).

Контекст, в котором упоминается «книга», позволяет предположить, что под этим словом Ада и Бэббедж понимали «систему» — перечень сведений и правил для установления ставок на бегах. Можно полагать (см., например, [3]), что эта система основывалась на статистических закономерностях. Во всяком случае, в молодые годы Бэббедж увлекался теорией вероятностей и статистикой и был одним из инициаторов создания Лондонского статистического общества. Он был также автором нескольких работ в этой области, например [10].

Бэббедж, очевидно, не только участвовал в разработке «системы», но и действовал как посредник между Адой и букмекерами. Об этом свидетельствуют некоторые письма почти «детективного» характера. Например, письмо от 20 ноября 1848 г. ([3], с. 204):

Моя дорогая леди Лавлейс!

Ваше письмо было доставлено вовремя. С помощью железной дороги и кэба я добрался до м-ра Гриффитса, однако не получил от него никаких новостей, а только адрес в Плейстоу. М-р Г. посоветовал мне навести справки на мургейтском вокзале. Это вынудило меня вновь вернуться в город, где я отправил почтой, переадресовав, Ваши письма и оставил на вокзале письменные указания о Ваших распоряжениях относительно среды.

Разумеется, «система» не оправдала надежд. Проиграв довольно внушительную сумму, Бэббедж и граф Лавлейс отказались от участия в ее совершенствовании. Но леди Ада, азартная и упрямая, продолжала играть. Вероятно, ни граф Лавлейс, ни Бэббедж не знали, насколько сильно она оказалась втянутой в эту рискованную игру, истратив на нее почти все свои личные средства.

В начале 50-х годов у Ады появляются первые признаки страшной болезни. В ноябре 1850 г. она пишет Бэббеджу: «Здоровье мое. . . настолько плохое, что

я хочу принять Ваше предложение и показаться по приезде в Лондон Вашим медицинским друзьям» ([3], с 209). Но что могли врачи противопоставить раку в XIX столетии . . . Болезнь быстро прогрессировала: летом 1852 г. Ада уже не поднимается с постели. Перед смертью она сообщает мужу, что дважды закладывала фамильные жемчуга и дважды упрашивала мать выкупить их. Более того, она оказалась в руках группы мошенников, которые шантажируют ее, грозя придать гласности участие Ады в игре.

Понимая смятение и растерянность слабовольного и мягкотелого графа, Ада обращается к Бэббеджу. Ее последние пожелания выражены в письме от 12 августа 1852 г. ([3], с. 213):

Дорогой Бэббедж!

Я пишу Вам это письмо на тот случай, если я внезапно умру и не успею закончить завещание. Я прошу Вас, как моего душеприказчика, сделать следующее:

1. Обратитесь к моей матери за суммой в 600 фунтов стерлингов. Вы израсходуете их так, как я велела это сделать в частной беседе с Вами.

2. Сходите к моим банкирам господам Драммондам и получите мой счет и сальдо (если таковое имеется), а также все мои старые счета.

3. Уничтожьте после полного ознакомления те из бумаг и вещей, переданных Вам мною, которые Вы сочтете нужным.

Любую сумму, полученную у моих банкиров, Вы добавите к вышеупомянутым 600 фунтам и употребите аналогичным образом.

В полной уверенности в точном выполнении вышесказанного остаюсь

Ваша искренняя и любящая

Августа Ада Лавлейс.

Нет сомнения, что 600 фунтов и «любая сумма, полученная от банкиров» должны были быть употреблены на выкуп у букмекеров бумаг, связанных с игрой Ады на скачках и могущих ее скомпрометировать.

Ада скончалась 27 ноября 1852 г., не дожив нескольких дней до 37 лет, в том же возрасте, что и лорд Байрон. Согласно завещанию, она была похоронена (3 декабря) рядом с могилой отца в семейном склепе Байронов в Ноттингемпшире ([3], с 215).

5

Первым изобретением Бэббеджа в области вычислительной техники была *разностная машина*, предназначенная для табулирования функций.

Как известно, для многочлена n-й степени конечные разности n-го порядка (с постоянным шагом) постоянны. Верно и обратное: если n-е разности некоторой функции для любого шага постоянны, то эта функция является многочленом n-й степени. Если задать начальное значение функции и начальные значения разностей, то, пользуясь постоянством последней разности, можно, складывая очередные значения разностей, получать последовательные значения функции, продолжая таблицу как угодно далеко.

Для функций, отличных от многочленов, можно выделить участки изменения аргумента, на которых разности некоторого порядка практически постоянны в пределах точности вычислений. Поэтому на таких участках можно табулировать функцию, исходя из начальных значений разностей, как и многочлен.

На этом и основана идея разностной машины Бэббеджа. По его замыслу, эта машина должна была табулировать с точностью до 20 значащих цифр функции с постоянными шестыми разностями. Однако Бэббеджу удалось построить лишь небольшую часть машины, которая работала с постоянными третьими разностями.

Аналитическая машина Бэббеджа является не только предшественницей, но во многих отношениях и прообразом современных электронных вычислительных машин с программным управлением. Во всяком случае, структура современных универсальных цифровых машин повторяет структуру машины Бэббеджа.

Аналитическая машина имела следующие составные части:

1) «склад» для хранения чисел;

2) «мельницу» для выполнения арифметических действий;

3) устройство, управляющее операциями машины (Бэббедж не дал ему названия);

4) устройства ввода и вывода данных.

Для хранения чисел в «складе» Бэббедж предлагал использовать регистры из десятичных счетных колес,

использовавшихся в арифмометре Паскаля. Каждое колесо запоминало один десятичный знак. Бэббедж считал, что «склад» должен иметь емкость в 1000 чисел по 50 десятичных знаков. Для сравнения укажем, что память одной из первых английских ЭВМ (EDSAC) имела объем 250 десятиразрядных чисел.

Перенос чисел из «склада» в «мельницу» должен был осуществляться с помощью зубчатых реек, зацепляющихся с зубцами на колесах. Каждая рейка продвигалась до тех пор, пока колесо не переходило в нулевое положение. Это движение стержнями и связями передавалось другому колесу и посредством другой рейки использовалось для перемещения в нужное положение одного из колес регистра «мельницы».

Особое внимание Бэббедж уделил выполнению арифметических операций. Именно при конструировании «мельницы» ему удалось сделать одно из наиболее выдающихся своих изобретений: систему предварительного (по современной терминологии — с к в о з н о г о) переноса, которая фактически используется в вычислительных машинах и до настоящего времени.

Чтобы легче разобраться в этом изобретении, представим себе, что счетные колеса приводятся в движение электричеством и могут перемещаться из данной позиции в следующую приложением электрического импульса к входному зажиму.

Применявшаяся ранее система последовательного переноса изобразится тогда схемой, показанной на рис. 1. Во время фазы сложения импульсы, представляющие добавляемое слагаемое, прикладываются к входным зажимам счетных колес C_1—C_4 регистра, в котором находится второе слагаемое. Двухпозиционные ключи S_1—S_3 находятся в положении, показанном на схеме. Они замыкаются, если соответствующие колеса (C_1—C_3) проходят от 9 к 0. В следующей фазе — переноса — импульсы прикладываются к проводникам 1, 2 и 3, и если ключи замкнуты, то они перемещают колеса C_1, C_2 и C_3 соответственно на одну позицию. Между импульсами переноса должно оставаться время для переключения, если соответствующее колесо передвинулось в этой фазе от 9 к 0. В результате этого при работе с многоразрядными числами фаза переноса может длиться много дольше фазы сложения.

В схеме сквозного переноса, изобретенной Бэббеджем, перенос во всех разрядах происходит одновременно. В этой схеме (см. рис. 2) переключатели нормально находятся в нейтральном положении. Если некоторое колесо переходит от 9 к 0, то замыкается верхний контакт, если

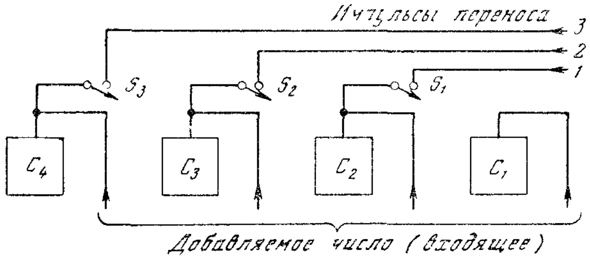

Рис. 1

переходят от 8 к 9, то нижний; в остальных случаях переключатель остается в нейтральном положении. Единственный импульс, приложенный к линии переноса, производит одновременный перенос во всех разрядах.

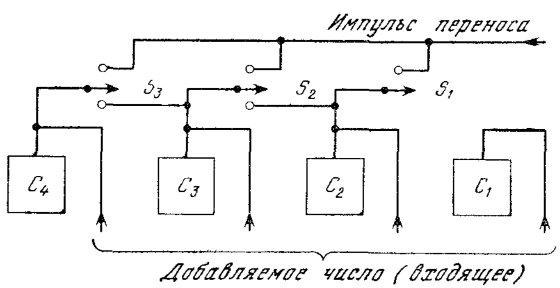

Рис. 2

Этим значительно сокращается время для выполнения фазы переноса, а тем самым и для всей операции сложения. При вычитании, которое выполняется введением дополнительной шестерни, вращающей колеса в противоположную сторону, перенос возникает при переходе от 0 к 9. В «мельнице» предусматривался и контроль за переполнением разрядной сетки Если это происходило, то звенел звонок.

Умножение и деление в аналитической машине выполнялось последовательными сложениями и вычитаниями соответственно. Время выполнения арифметических операций оценивалось так: сложение и вычитание — 1 сек; умножение (двух пятидесятиразрядных чисел) — 1 мин; деление (сторазрядного числа на пятидесятиразрядное) 1 мин.

Для устройства управления аналитической машины Ч. Бэббедж предложил использовать механизм, аналогичный механизму ткацкого станка Жаккара. Так как он играет принципиальную роль, то полезно коротко познакомиться с его работой.

Ткань представляет собой переплетение взаимно перпендикулярных нитей. Нити основы (продольные) продеты через глазки́ — отверстия в проволочных петлях. При самом простом переплетении петли поднимаются через одну, приподнимая продетые через них нити основы. Между поднятыми и оставшимися на месте нитями образуется промежуток, в который челнок протягивает за собой нить утка́ (поперечную), после чего поднятые петли опускаются, а затем поднимаются остальные. При более сложном узоре переплетения петли следует приподнимать в различных других комбинациях.

Сын лионского ткача Ж.-М. Жаккар изобрел в 1801 г. механизм, позволяющий автоматизировать движения петель, а вместе с ними и нитей основы ткацкого станка, в соответствии с требуемым узором. Это делалось с помощью набора картонных карт с пробитыми в них отверстиями — перфокарт. В станке Жаккара глазки́ связаны с длинными иглами, упирающимися в перфокарту. Встречая отверстие, иглы продвигаются, в результате чего связанные с ними глазки́ будут приподниматься. Иглы, упирающиеся в карты в том месте, где отверстия нет, остаются на месте вместе со связанными с ними глазка́ми. Таким образом, промежуток для челнока, в который протягивается уто́к, а тем самым и узор переплетения нитей, определяется набором отверстий на соответствующих картах.

Идея Бэббеджа заключалась в том, чтобы заставить два жаккаровских механизма с цепочкой карт в каждом управлять действиями машины. Один механизм с «картами операций» должен был соединяться с «мельницей» и приводить ее в состояние готовности для выполнения требуемой операции в зависимости от пробитых на карте отверстий.

Второй механизм должен был управлять переносом чисел из «склада» в «мельницу» и обратно. Для этого механизма готовились «поставляющие карты» для передачи чисел в арифметическое устройство и «получающие карты» для передачи в обратном направлении. В свою очередь «поставляющие карты» делились на «нулевые», при использовании которых содержимое регистра после выдачи числа стиралось, и «сохраняющие».

Таким образом, с помощью жаккаровских карт — прообраза современных перфокарт — Бэббедж предполагал осуществить автоматическое управление процессом

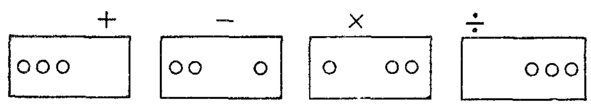

Рис. 3

вычислений и ввод числовой информации в машину. Воспроизводимый из «Посланий. . .» рисунок (рис. 3) показывает, как должны были выглядеть операционные карты.

Бэббедж рассматривал и некоторые вопросы программирования, в частности весьма важную идею условной передачи управления.

Один из видных итальянских математиков того времени, профессор О. Ф.Мосотти, обратился к Бэббеджу во время его пребывания в Турине по поводу следующего затруднения. «Он заметил, что теперь вполне готов поверить в способность механизма овладеть арифметическими и даже алгебраическим соотношениями в любой нужной степени. Но он добавил, что не может понять, как машина может сделать выбор, который часто необходим при аналитическом исследовании [т. е. в процессе вычислений], когда представляются два или более путей, особенно в том случае, когда правильный путь, как это часто бывает, не известен до тех пор, пока не проделаны предшествующие вычисления» ([9], с. 64).

В ответ на это Бэббедж показал, что решение вопроса о выборе одного из двух возможных путей зависит от

того, какой знак (плюс или минус) имеет некоторая вычисляемая величина. Если она отрицательна, то это значит, что из меньшего числа вычитается большее. Процесс переноса приведет в этом случае к тому, что во всех разрядах слева от «существенных» цифр появятся девятки. Движение механизма переноса, который заставил бы девятку появиться левее самого левого из существующих в машине разрядов, можно использовать для пуска любой требуемой цепи действий.

Поскольку соответствующий рычаг движется только в случае отрицательного результата, то действие будет иметь место условно. Бэббедж предполагал для этой условной операции использовать движение вперед или назад карт в механизме Жаккара: если карты продвинутся вперед, то часть программы будет опущена; если они продвинутся назад, то часть программы будет повторена.

6

Как мы уже говорили, статья Л. Ф. Менабреа представляет собой, как это указывает сам автор, конспект лекций, прочитанных Ч. Бэббеджем в Турине. Ее объем в английском переводе составляет 20 страниц, из которых не менее страницы занимают подстрочные примечания переводчика. В то же время дополнительные «Примечания переводчика» имеют объем 50 страниц. Уже из этого сопоставления видно, что А. А. Лавлейс отнюдь не ограничилась ролью комментатора переводимой ею статьи. Мы не станем подробно разбирать статью Менабреа, а ограничимся лишь теми ее местами, к которым относятся примечания переводчика.

Говоря о машине Паскаля, Менабреа указывает, что она мало пригодна для практических вычислений, так как может выполнять лишь четыре действия арифметики. В своем подстрочном примечании переводчик поясняет, что аналитическая машина обладает теми же возможностями, но может образовывать из этих действий бесчисленное множество разнообразных комбинаций, тогда как для арифметической машины Паскаля эти четыре действия — конечная цель. Иначе говоря, то что для одной машины — конец, для другой лишь начало.

В следующем подстрочном примечании переводчик возражает против утверждения автора статьи о том, что «аналитическая машина выросла из разностной». Более подробно об этом же идет речь в «Примечании A», которое непосредственно относится к словам статьи Менабреа: «Разностная машина есть просто *осуществление* [или *выражение*, *expression*] одной частной теоремы анализа».

«Примечание A» является самым большим (занимает 13 страниц) и посвящено общим вопросам работы аналитической машины и сравнению ее с разностной. Разностная машина, сказано здесь, предназначена для табулирования интеграла уравнения $\Delta^7 u_z = 0$, который имеет вид $u_z = a + bx + cx^2 + \ldots + dx^6$. Постоянные a, b, . . . , d представлены в машине положением дисков, объединенных в семь колонн. Разностная машина может т о ч н о табулировать любые ряды, чьи общие члены могут быть представлены в приведенной форме, и п р и б л и ж е н н о в н е к о т о р о м и н т е р в а л е любые другие ряды, к которым применим метод конечных разностей. Напротив, аналитическая машина предназначается не только для табулирования некоторой частной функции, но и для разложения и табулирования любой функции. «По существу [аналитическую] машину можно характеризовать как материальное воплощение любой неопределенной функции любой степени общности и сложности, например, $F(x, y, z, \log x, \sin y, x^p, \ldots)$, которая, как легко видеть, является функцией всех других возможных функций любого числа переменных» ([11]; см. [9], с. 245).

В начальном состоянии машина готова с помощью жаккаровских перфокарт получить информацию о том, какую с п е ц и а л ь н у ю функцию мы хотим разложить или протабулировать. Эти карты содержат закон разложения и заставляют механизм машины действовать соответствующим образом. Они не имеют никакого отношения к числовому материалу. Они определяют лишь операции, которые должны быть выполнены над любым числовым материалом, предварительно введенным в машину.

Изучая работу аналитической машины, мы обнаруживаем, что необходимо строго различать *операции*, *объекты, над которыми операции совершаются*, и *результаты операций*.

Мы обращаем на это внимание не только потому, что это совершенно необходимо для понимания работы аналитической машины и оценки ее возможностей, но также и потому, что это обычно мало принимается во внимание при изучении математики вообще. . . Очень желательно, чтобы при прохождении математического процесса как через человеческий мозг, так и через среду неживого механизма была равная необходимость в том, чтобы рассуждения, связанные с операциями, занимали место ясной и четко определенной области объекта анализа. . .

Под словом *операция* мы понимаем любой процесс, который изменяет взаимное отношение двух или более вещей, какого рода эти отношения ни были бы. Это наиболее общее определение, охватывающее все предметы во вселенной. . . Наука об операциях, как происходящая от математики, но более специальная, есть самостоятельная наука, имеющая абстрактные истины и значения, независимые от объекта, к которому мы применяем свои рассуждения и преобразования. Те, кто знаком с этим, знают, что если верны некоторые основные положения, то из них обязательно следует справедливость некоторых других комбинаций соотношений; эти комбинации не ограничены в своем разнообразии и масштабах, если выводы из первоначальных отношений достаточно продвинуты.

То обстоятельство, что самостоятельный характер науки об операциях слабо ощущается многими, заключается в действенном смысле многих символов, используемых в математических обозначениях. Во-первых, символы операций часто являются *также* символами результатов *операции* [7]. Во-вторых, цифры — символы числовых величин — служат *также* символами *операций* (например, при возведении в степень) ([9], с. 247).

Операционный механизм может быть приведен в действие независимо от объекта, над которым должна производиться операция. Этот механизм может действовать не только над числами, но и над другими объектами, основные соотношения между которыми могут быть выражены с помощью абстрактной науки об операциях и которые могут быть приспособлены к действию операционных обозначений и механизма машины. Предположим, например, что соотношения между высотами звуков в гармонии и музыкальной композиции поддаются такой обработке; тогда машина сможет сочинять искусно составленные музыкальные произведения любой сложности или длительности.

---

[7] Аналогичное высказывание было сделано спустя сто с небольшим лет: «Диалектическое единство результата и пути, к нему ведущего, широко используется в современной математике», — писала С. А. Яновская в 1974 г. ([12], с. 11).

> Аналитическая машина есть *воплощение науки об операциях*, сконструированная специально для действий над абстрактными числами как объектами этих операций ([9], с. 252).

Разностная машина воплощает частную и ограниченную группу операций. Аналитическая и разностная машины соотносятся как анализ и арифметика. Разностная машина по своей природе строго арифметическая, но нет «демаркационной линии», которая ограничивала бы возможности аналитической машины. Эти возможности соизмеримы с нашим знанием законов анализа и ограничиваются лишь этим знанием. Машина позволяет нам полностью использовать уровень человеческих знаний принципов и законов анализа, так как увеличивает нашу способность выполнять операции над числами и алгебраическими символами.

Большие возможности аналитической машины определяются использованием принципа Жаккара. «Можно сказать, что аналитическая машина *ткет алгебраические узоры*, подобно тому, как станок Жаккара ткет цветы и листья» ([9], с. 252).

Разностная машина, которая табулирует функцию и печатает полученные результаты, выгодно отличается от своих предшественниц тем, что не требует вмешательства человека в процесс вычислений. Но она ограничена арифметическими вычислениями. Использование карт освобождает от уз арифметики: механизм аналитической машины может объединять в различные комбинации общие символы в любой последовательности и неограниченном разнообразии, устанавливая связь между операциями в машине и в абстрактной области математики.

> Для дальнейшего использования анализа развит новый, обширный и мощный язык, с помощью которого основные законы анализа выражаются настолько хорошо, что они могут быть быстрее и точнее практически применены для нужд человечества, чем это позволяли сделать ранее находящиеся в нашем распоряжении средства. Таким образом, не только мысленные и материальные, но также теоретические и практические стороны математики тесно и эффективно связываются между собой ([9], с. 253).

Для работы разностной машины необходимо установить на ее колоннах числа, представляющие первоначальные значения разностей для данной функции. Но эти данные должны быть предварительно вычислены человеком. Следовательно, процесс анализа должен быть проделан в человеческой голове, чтобы получить возможность для синтезирующей работы разностной машины. В то же время работа аналитической машины носит равно анализирующий и синтезирующий характер. Ей требуется знать лишь последовательность и распределение операций, которые должны быть выполнены. Числовые данные должны, конечно, иметься, но они могут быть вполне произвольными, не связанными с необходимостью предварительных вычислений.

Можно, конечно, сказать, что для получения начальных числовых данных также должен быть выполнен некоторый аналитический процесс и что здесь лежит источник ошибок; другим источником ошибок может быть неверный порядок следования карт. Однако менее вероятно ошибиться в операциях для пуска машины, чем при получении точных числовых данных.

Конечно, для аналитической машины мы должны затратить некоторый аналитический труд в одном смысле. Зато в другом смысле аналитическая машина щедро вознаграждает нас. Надо помнить, что карты, составленные для любой данной формулы, обладают всей общностью алгебры и содержат в себе бесконечное количество частных случаев.

Краткий пересказ «Примечания *A*», приведенный выше и содержащий некоторые точные цитаты, дает возможность судить о его содержании и форме.

Автор примечания ставила перед собой задачу уточнения фактов, относящихся к разностной и аналитической машинам Бэббеджа, так как «в умах людей существует значительная неясность относительно этого предмета в целом» ([9], с. 254). Она указывает на два укоренившихся недоразумения.

Многие предполагают, что аналитическая машина является отпрыском разностной и что она выросла из своей предшественницы благодаря естественной или случайной комбинации идей, заложенных в разностной машине. Такое предположение противоречит фактам. Хотя вообще такая преемственность возможна, идея аналитической машины могла возникнуть независимо от идеи разностной и до нее.

Второе недоразумение связано с задержкой в разработке разностной машины. Многие считают, что задержка произошла оттого, что аналитическая машина была изобретена в процессе изготовления разностной машины. Это неверно, поскольку задержка в работе над разностной машиной началась задолго до того, как была изобретена аналитическая.

Те, кто подходят к использованию машины чересчур утилитарно, быть может, чувствуют, что уникальные возможности аналитической машины относятся к абстрактной науке, а не к тому, что связано с обыденными каждодневными людскими интересами. Эти люди, которые не питают симпатий или вовсе незнакомы ни с какой областью науки, которую они считают *бесполезной* (в соответствии с *их* пониманием этого слова), думают, что работа над новой машиной — в то время, как работа над предыдущей успешно продвигается — является непродуктивной тратой денег и времени. Однако мы не сомневаемся, что благодаря широким возможностям аналитической машины даже в утилитарном смысле могут быть получены практически очень ценные результаты.

Все, наверное, согласятся, что достроить разностную машину лучше, чем оставить обе вычислительные машины незавершенными. Мы верим, что существующие трудности не приведут к тому, что наше поколение будет знакомо с этими изобретениями лишь с помощью пера, чернил и бумаги. Заботясь о репутации нашей страны в будущей истории, мы еще больше надеемся, что эти трудности не приведут к тому, что строительство машины будет завершено другой нацией и другим правительством ([9], с. 256).

Вряд ли есть необходимость объяснять читателю, в чей адрес направлена процитированная филиппика.

«Примечание *B*» А. Лавлейс посвящено описанию «склада». «Склад» содержит определенное число колонн, составленных из дисков, на боковой грани которых выгравированы цифры от 0 до 9. В каждой колонне нижний диск представляет единицы, следующий над ним — десятки и т. д. Колонны автор называет «колоннами переменных» и обозначает буквой V с индексами (от *Variables*). Кроме числовых значений переменных на них могут быть записаны также и числовые значения входящих в формулу констант. Таким образом, колонна есть ячейка памяти машины Бэббеджа. Разрядность записанного числа определяется числом дисков.

Автор предлагает графически изображать колонну переменных следующим образом. Вверху изображается кружок, предназначенный для знака (+ или —) или других чисто символических результатов. Ниже кружка помещаются нули, обозначающие диски, находящиеся в нулевом состоянии; количество их соответствует количеству разрядов, имеющихся для изображения числа. Если на данной колонне записано некоторое число, то нули заменяются значащими цифрами, причем нижний диск и соответственно нижняя цифра изображает единицы, следующая сверху — десятки т. д. Внизу под описанной колонной помещается квадрат, который служит для записи символа переменной, числовое значение которой записано на этой колонне. Например, три переменные a, n, x, имеющие числовые значения $a=5$, $n=7$ и $x=98$, изобразятся так:

$$\begin{array}{ccc}
V_1 & V_2 & V_3 \\
\oplus & \oplus & \oplus \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 9 \\
5 & 7 & 8 \\
\boxed{a} & \boxed{n} & \boxed{x}
\end{array}$$

Из указанных переменных можно получить различные функции, требующие для своего вычисления различных операций. Если, скажем, речь идет о функции ax^n, то для получения результата необходимо выполнить шесть умножений, чтобы получить x^n (для наших данных 98^7), и еще одно умножение на коэффициент a (5×98^7). Всего, таким образом, требуется семь умножений, однако они должны выполняться над парами чисел, полученных с различных колонн. Этот факт еще раз иллюстрирует сделанное в «Примечании *A*» замечание относительно независимости характера управления операциями машины.

Операционные карты лишь определяют последовательность выполнения операций. Они переключают механизм мельницы в ряд различных состояний, которые называются *состоянием сложения*, *состоянием умножения* и т. п. В каждый данный момент существует только одно из этих состояний и в мельницу доставляется только одна пара чисел, взятых с определенных колонн. Для этого необходимо использовать другие карты — *распределяющие*, которые содержат номера колонн.

Эти карты будут двух классов. Первый класс карт позволяет производить передачу чисел из склада в мельницу. Это — *снабжающие* карты, которые обеспечивают мельницу соответствующей пищей. Другой класс карт разрешает переменным в складе получать числа с мельницы; это — *доставляющие* карты; они определяют местонахождение результатов, промежуточных и окончательных. Снабжающие карты в свою очередь делятся на два класса, о чем речь идет далее, в «Примечании *D*».

Из сказанного выше ясно, что представления о структуре команды программно-управляемой машины, которыми владела автор «Примечаний», вполне соответствуют современным.

В «Примечании *C*» речь идет о необходимости упрощения механизма Жаккара для использования его в аналитической машине. Автор указывает на изобретение метода возврата карт. Цель этого изобретения состоит в том, чтобы обеспечить использование какой-либо отдельной операционной карты или группы карт любое количество раз. Это есть осуществление идеи условной передачи управления, о которой Бэббедж сообщал Мосотти (см. раздел 5 нашей статьи). Повторное использование карт находит широкое применение в *циклах*, о которых подробно говорится в примечании *E*. На практике это легко достигается вращением в обратном направлении призмы, на которой подвешена цепь карт.

«Примечание *D*» содержит подробное описание программы решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Автор начинает с классификации типов использования колонн «склада» в процессе вычисления, рассматривая три различных возможности:

1) колонны, данные на которых установлены заранее;
2) колонны, получающие окончательные результаты;
3) колонны, получающие промежуточные результаты, необходимые для получения окончательных.

Соответствующие переменные, как и содержащие их колонны, могут быть названы *вторичными*, или *рабочими*. Квадрат под этими ячейками, естественно, не содержит фиксированного символа. Заметим, что точно такая же классификация ячеек памяти используется в программировании и в настоящее время, включая и термин *рабочие ячейки* (см. [13] или [14]).

При передаче числа из склада возникают две возможности: число возвращается на ту же колонну либо колонна очищается, т. е. ее содержимое делается равным нулю. В связи с этим снабжающие карты делаются двух типов. Первые выбирают число с колонны склада и передают его в мельницу, а затем возвращают это число снова на ту же колонну. Эти карты называются «удерживающими картами». Вторые после выбора числа из склада переводят все диски колонны в нулевое состояние; они называются «нулевыми».

В соответствии со сказанным в «Примечании *B*» колонны склада (ячейки памяти) обозначаются буквами V с индексами, т. е. V_1, V_2, . . . Для контроля содержимого колонн автор вводит левый верхний индекс. Если этот индекс—нуль, то колонна свободна. Например, запись $^0V_3$ означает, что в колонне V_3 никакое число не хранится.

При записи числа на некоторую колонну следует сменить левый индекс на 1. Таким образом, запись ^1V означает, что на колонне V хранится число, причем это сделано в п е р в ы е. Если на ту же колонну заносится новое число, то следует писать ^2V независимо от того, делается ли такая запись непосредственно после использования числа ^1V или после того, как колонна V побывала снова в состоянии ^0V. Эта символика облегчает чтение и разбор программы, хотя для работы машины, разумеется, значения не имеет.

Система линейных уравнений записывается в виде:

$$mx + ny = d,$$
$$m'x + n'y = d'.$$

Шесть колонн (от V_0 до V_5) отводятся для записи коэффициентов так, что, например, $V_0 = m$. Далее, колонны V_6, V_7, ..., V_{11} отводятся под рабочие переменные (рабочие ячейки), а колонны V_{15}, V_{16} — для результатов x и y.

Решение системы требует шести операций умножения, трех вычитаний и двух делений, причем операции сгруппированы так, что сначала *выполняются* все умножения, затем все вычитания и *лишь затем деления*. На каждую операцию требуются две снабжающие карты и одна доставляющая для передачи полученного результата в склад. Поскольку каждый из заданных коэффициентов участвует в двух *операциях*, при первой выборке каждого из склада применяется удерживающая снабжающая карта, а при второй — нулевая, с тем чтобы использованные колонны освобождались.

В приведенной программе на каждую операцию требуется три карты переменных. В некоторых случаях их может быть больше, так как может возникнуть необходимость поместить некоторые результаты сразу на несколько колонн.

Содержимое каждой колонны после выполнения каждой операции приведено в табл. 1, заимствованной из [11] (примечание *D*). Эта таблица подробно комментируется в тексте. Любопытно заметить, что один из первых современных учебников программирования [14] содержит в качестве первого примера программы ту же задачу, изображенную таблицей, почти полностью совпадающей с *приводимой нами*.

Кроме подробного описания программы, «Примечание *D*» *содержит* еще два *замечания*, высказанных по поводу *той же программы*, но имеющих общий характер и вполне актуальных и *для современного* программирования.

Первое замечание относится к последовательности выполнения операций. Автор указывает, что *этот вопрос* весьма интересен и важен и рекомендует выбирать тот из возможных вариантов, который требует меньше времени.

Второе замечание относится к экономии рабочих ячеек. Указывается, что вовсе не обязательно выделять для каждого промежуточного результата отдельную рабочую ячейку (колонну). Если, например, одно из слагаемых в дальнейших вычислениях не потребуется, то сумму можно записать снова на ту же колонну, которую до операции занимало уже ненужное слагаемое. С учетом левого индекса эту операцию можно записывать в виде ${}^{m+1}V_n = {}^{q}V_p + {}^{m}V_n$ или короче, без указаний левого индекса: $V_n = V_p + V_n$. Последняя запись совпадает с принятой сейчас в содержательных обозначениях и на языке «Фортран».

Таблица 1

Номер операции	Характер операции	Входные переменные						Рабочие переменные									Выходные переменные	
		${}^1V_0$ + 0 0 0 0	${}^1V_1$ + 0 0 0 0	${}^1V_2$ + 0 0 0 0	${}^1V_3$ + 0 0 0 0	${}^1V_4$ + 0 0 0 0	${}^1V_5$ + 0 0 0 0	${}^0V_6$ + 0 0 0 0	${}^0V_7$ + 0 0 0 0	${}^0V_8$ + 0 0 0 0	${}^0V_9$ + 0 0 0 0	${}^0V_{10}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{11}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{12}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{13}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{14}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{15}$ + 0 0 0 0	${}^0V_{16}$ + 0 0 0 0
		$\boxed{m}$	$\boxed{n}$	$\boxed{d}$	$\boxed{m'}$	$\boxed{n'}$	$\boxed{d'}$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\ }$	$\boxed{\frac{dn'-d'n}{mn'-m'n}\ x}$	$\boxed{\frac{d'm-dm'}{mn'-m'n}\ y}$
1	×	m				n'		mn'										
2	×		n		m'				$m'n$									
3	×			d		0				dn'								
4	\		0				d'				$d'n$							
5	×	0					0					$d'm$						
6	×			0	0								dm'					
7	—							0	0					$(mn'-m'n)$				
8	—									0	0				$(dn'-d'n)$			
9	—											0	0			$(d'm-dm')$		
10	—													$(mn'-m'n)$	0		$\frac{dn'-d'n}{mn'-m'n}=x$	
11	—													0		0		$\frac{d'm-dm'}{mn'-m'n}=y$

«Примечание E» относится к тому месту статьи Менабреа, в котором идет речь о возможностях машины в области операций с аналитическими выражениями. В статье читаем: «Машина не только способна выполнять те арифметические операции, которые определяются данной алгебраической формулой, но способна и к аналитическим вычислениям. . . При этом предполагается, что аналитическое выражение, с которым оперируют, разложено по степеням переменной или по определенным функциям той же переменной, например, круговым; то же предполагается и относительно результата» ([9], с. 238).

Менабреа рассматривает пример перемножения $a+bx^1$ и $A+B\cos^1 x$, относительно которого А. А. Лавлейс в «Примечании E» отмечает, что он «выбран вследствие его простоты, ясности и краткости, с целью просто пояснить характер работы машины в случае аналитических вычислений, содержащих переменные» ([9], с. 271), а также указывает несоответствие в записи: для единообразия необходимо было множители записывать в виде ax^0+bx^1 и $A\cos^0 x+B\cos^1 x$.

В «Примечании E» более подробно рассматривается перемножение множителей

$$A+A_1\cos\vartheta+A_2\cos 2\vartheta+A_3\cos 3\vartheta$$

и

$$B+B_1\cos\vartheta$$

в предположении, что результат представляется в виде

$$C+C_1\cos\vartheta+C_2\cos 2\vartheta+C_3\cos 3\vartheta+\ldots$$

Прежде всего отмечается, что возможны три способа получения числовых значений некоторого аналитического выражения:

1. Можно пожелать найти «коллективное» значение всей формулы, без какого-либо учета конкретного типа комбинаций величин, которые в эту формулу входят. Величины, полученные таким образом, имеют строго арифметическую природу в наиболее узком смысле и никак не отражают природу процесса, с помощью которого они были получены.

2. Мы можем предложить машине вычислить числовое значение каждого члена формулы или ряда и сохранять эти результаты отдельно.

3. Может оказаться желательным вычислить числовое значение различных составляющих каждого члена и сохранять все эти результаты отдельно.

Таким образом, в первом случае речь идет о получении окончательного числового результата, так что структура первоначального аналитического выражения оказывается при этом безвозвратно потерянной. Во втором и третьем случаях речь идет уже о проникновении в структуру формулы в меньшей или большей степени и сохранении каких-то элементов этой структуры в памяти машины, что и должно дать возможность использовать машину для работы с формулами.

Далее автор пишет: «Многие люди, недостаточно знакомые с математическими исследованиями, полагают, что поскольку цель машины выдать результаты в *числовой форме*, характер *ее процессов* должен быть соответственно *арифметическим* или *числовым*, а не *алгебраическим* и *аналитическим*. Это ошибка. Машина может упорядочивать и комбинировать числовые величины точно так же, как если бы они были буквами или другими символами более общей природы» ([9], с. 273).

Нетрудно заметить связь между этими высказываниями и той областью использования современных вычислительных машин, которую принято называть *аналитическим программированием*. Правда, эти работы начались практически лишь после широкого внедрения алфавитно-цифровых печатающих устройств, однако их наличие не является необходимым. А. А. Лавлейс прекрасно это понимала. Вот что находим мы в «Примечании E» по этому поводу:

Она [машина] может создать три типа результатов. . . *символические*, как уже упоминалось в примечаниях A и B; *числовые* (главная и основная цель) и *алгебраические* в *буквенных обозначениях*. Последнее вряд ли следует считать необходимым или желательным дополнением к возможностям машины, в частности потому, что устройства, необходимые для реализации этих возможностей, грозят увеличить сложность и размеры механизма до такой степени, что это будет полностью обесценивать преимущества машины . . . Главная цель изобретения заключается в переводе на *числовой* язык общих формул анализа. . . законы образования которых мы уже знаем.

Однако было бы ошибкой предположить, что поскольку *результат* . . . получается в обозначениях наиболее ограниченной науки, то и *процессы*, следовательно, также ограничены этой наукой.

Цель машины состоит по существу в том, чтобы придать *наибольшую практическую эффективность* средствам *цифровой интерпретации* более высокой науки анализа, тогда как она [машина] использует процессы и комбинации этой последней [всюду курсив А. А. Л.] ([9], с. 273).

Возвращаясь к приведенному выше примеру умножения тригонометрических выражений, автор подробно рассматривает выражение коэффициентов C, C_1, C_2,... результата через заданные коэффициенты множителей и расположение требуемых операций. Устанавливается, что эти выражения имеют вид:

$$C = BA + \frac{1}{2} B_1 A_1,$$

$$C_1 = BA_1 + B_1 A + \frac{1}{2} B_1 A_2,$$

$$C_n = BA_n + \frac{1}{2} B_1 (A_{n-1} + A_{n+2}) \text{ для всех } n \geqslant 2$$

(для удобства читателя мы пользуемся современными обозначениями).

Соответственно этому машина будет вычислять первые два члена с помощью отдельных групп операционных карт, а группа карт для вычисления третьего члена C_2 может быть использована многократно в дальнейшем для вычисления всех последующих. Это замечание используется для введения понятия цикла: «Если имеется выражение *общего члена*, то существует *рекуррентная группа*[8] *операций*... Ради определенности и краткости *рекуррентную группу* назовем *циклом*. *Цикл* операций, таким образом, может рассматриваться как обозначение любой группы операций, которая повторяется *более чем один раз* ... хотя бы только *дважды*... Сущность цикла составляет повторяемость операций» ([9], с. 277).

Приведенное выше определение цикла почти дословно совпадает с приводящимися в современных учебниках программирования. Далее, аналогично строятся определения *цикла циклов*, т. е. кратных циклов различной кратности, причем эти определения также практически не отличаются от современных. В качестве примеров кратных циклов приводятся задачи вычисления «функций различных порядков», т. е. суперпозиций.

[8] Разумеется, термин «группа» у Лавлейс не несет современного алгебраического смысла.

«Примечание F» посвящено разбору примера, который должен еще раз продемонстрировать, насколько использование системы циклов и принципа возврата карт в механизме Жаккара уменьшает количество требуемых операционных карт и облегчает организацию вычислений.

Рассматривается задача исключения девяти переменных из системы десяти линейных уравнений вида

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 + \ldots = p,$$

$$a^1x_0 + b^1x_1 + c^1x_2 + d^1x_3 + \ldots = p^1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для исключения x_0 из первой пары уравнений требуется два умножения и вычитание при каждой из переменных, т. е. 10 ($\times$, $\times$, —) для одной пары, а значит, 90 ($\times$, $\times$, —) для исключения x_0 из всех уравнений. Аналогично для исключения x_1 понадобится 72 ($\times$, $\times$, —). Общее число операций составит 330 групп, а фактически потребное число операционных карт — три, так как благодаря организации цикла можно повторять операции ($\times$, $\times$, —) нужное число раз. Требуется только менять определенным образом карты с номерами колонн, числа с которых участвуют в вычислениях.

Применение вычислительной машины позволит получить численные значения функций, имеющих огромное значение как для теории, так и для практики, — функций, получение которых требует процессов столь долгих, что, несмотря на теоретическую осуществимость, их практическое завершение весьма сомнительно. В качестве примера такой задачи автор указывает проблему трех тел, для решения которой необходимо знать 295 коэффициентов лунных возмущений.

«Примечание G» начинается общими высказываниями о возможностях вычислительных машин, весьма близкими дискуссии, происходившей примерно через 120 лет после выхода в свет перевода статьи Менабреа.

Желательно предостеречь против преувеличения возможностей аналитической машины. При рассмотрении любого нового предмета существует тенденция, с одной стороны, переоценить то, что мы считаем интересным или замечательным, а с другой стороны, тенденция к недооценке истинного положения вещей, когда мы обнаруживаем, что наши устойчивые представления должны быть заменены.

Аналитическая машина не претендует на то, чтобы создавать что-то *действительно новое*. Машина может *выполнить все то, что мы умеем ей предписать*. Она может *следовать* анализу, но она не может *предугадать* какие-либо аналитические зависимости или истины. Функции машины заключаются в том, чтобы помочь нам *получить* то, с чем мы уже знакомы ([9], с. 284).

Конечно, в 1843 г. эти высказывания нельзя было считать актуальными. Однако для дискуссии 1963 г. (см. [15]) они выглядят вполне уместными и не цитировались, видимо, только потому, что были достаточно подробно разобраны в знаменитой статье Алана Тьюринга «Может ли машина мыслить?», где имеется целый параграф, озаглавленный «Возражения леди Лавлейс» ([16], с. 43 — 45).

В «Примечании G» А. А. Лавлейс указывает, что, хотя машина служит прежде всего средством вычислений, она влияет на развитие науки не только непосредственным образом: благодаря возможности преобразования и комбинирования истин и формул анализа она проливает новый свет на отношения и природу многих объектов исследования.

Отвечая на вопрос «действительно ли машина способна следовать анализу в его полном объеме», А. А. Лавлейс формулирует следующие основные особенности аналитической машины.

1. Она выполняет четыре арифметические операции над любыми числами.

2. Специальные приемы и конструкции обеспечивают отсутствие каких бы то ни было ограничений как на величину используемых чисел, так и на их количество.

3. Эти числа и величины могут сочетаться в алгебраических или арифметических соотношениях, не ограниченных по разнообразию, сложности или размерам.

4. Она использует алгебраические знаки соответственно некоторым законам и образует логические следствия из этих законов.

5. Она может подставлять одну формулу вместо другой, удаляя первую из колонн, на которых она представлена, и записывая вторую вместо нее.

6. Она обеспечивает единственное значение.

В последнем пункте имеется в виду возможность выбора пути вычислений в зависимости от характера получающихся промежуточных результатов при помощи условных переходов, который обеспечивает единственный определенный результат.

Интегрирование и дифференцирование на машине требует нескольких замечаний. Машина может выполнять эти операции одним из двух способов.

Во-первых, при помощи операционных и распределяющих карт мы можем приказать машине продолжать вычисления до тех пор, пока не будет достигнут некоторый предел.

Во-вторых, машина может (если известна форма предела для рассматриваемой функции) выполнить дифференцирование или интегрирование непосредственной подстановкой.

Вообще машина не может совершить предельного перехода даже для самых простых и элементарных случаев иначе, чем указанными выше способами. Машина в состоянии манипулировать лишь с **конечными** приращениями; ее можно в действительности рассматривать как воплощение исчисления конечных разностей.

Завершается «Примечание G» подробным разбором программы вычисления чисел Бернулли.

Числа Бернулли определяются здесь общепринятым и сейчас способом, через производящую функцию $f(x) = \frac{x}{\exp x - 1}$, однако их нумерация не совпадает с принятой в большинстве современных руководств. Разложение производящей функции автор записывает в виде

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + B_5\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots,$$

так что числу Бернулли B_{2n} в общепринятых современных обозначениях ([17], с. 1090 — 1094) соответствует B_{2n+1} в обозначениях А. А. Лавлейс.

Разложив знаменатель производящей функции в ряд по степеням x и сократив на x, мы получаем равенство

$$1 = \left(1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right).$$

С другой стороны, произведение рядов справа можно представить в форме ряда

$$1 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \ldots,$$

и приведенное выше равенство показывает, что $D_n=0$ для любого n. Вычисляя последовательно коэффициенты D_{2k-1} из произведения рядов и приравнивая их нулю, получаем уравнение для определения чисел Бернулли. Они будут иметь вид:

$$\frac{1}{3!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}+B_1\frac{1}{2!}=0,$$

$$\frac{1}{5!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}+B_1\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}+B_3\frac{1}{4!}=0,$$

$$\frac{1}{7!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}+B_1\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5!}+B_3\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3!}+B_5\frac{1}{6!}=0,$$

и вообще

$$\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n)!}+B_1\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}+$$
$$+B_3\frac{1}{4!}\frac{1}{(2n-3)!}+\ldots+B_{2n-1}\frac{1}{(2n)!}=0.$$

Последнее выражение удобно преобразовать, умножив все члены на $(2n)!$ и объединив первые слагаемые, что дает

$$0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}+B_1\frac{2n}{2}+B_3\frac{2n(2n-1)(2n-3)}{2\cdot3\cdot4}+$$
$$+B_5\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+B_{2n-1}.$$

Эта формула является основной при программировании (см. табл. 2). Программа строится как сложный двойной цикл. Наружный цикл идет по индексу числа Бернулли. Внутри его имеется небольшой внутренний цикл для вычисления множителей при числах Бернулли с предыдущими индексами, причем умножение и деление выполняются последовательно, что препятствует накоплению ошибок округления.

7

После подробного разбора содержания «Примечаний» естественно поставить вопрос о том, насколько самостоятельна была Августа Ада Лавлейс в своей работе. Являются ли эти «Примечания» просто пересказом ее бесед с Бэббеджем (так же, как статья Менабреа является лишь конспектом лекций Бэббеджа) или же они были результатом ее самостоятельного «переосмысливания» и углубления идей Бэббеджа.

Разумеется, точный ответ на этот вопрос в наше время невозможен. Тем не менее мы можем пытаться строить предположения, сравнивая статью Менабреа и «Примечания» с тем, что писал об аналитической машине сам Бэббедж.

Ч. Бэббедж посвятил аналитической машине главу VIII своих «Посланий» и главу XIII в книге «Выставка 1851 года, или Взгляд на промышленность, науку и английское правительство» [18]. В них затронуты лишь некоторые вопросы, связанные с машиной, и в значительно меньшем масштабе, нежели в статье Менабреа и «Примечаниях» Лавлейс. Объясняя эту «узость», Бэббедж писал: «Для того чтобы описать последовательные улучшения, вносимые в аналитическую машину, потребовалось бы много томов. Я хочу здесь отметить несколько наиболее важных функций машины и дать умам, которые должным образом подготовлены к этому, некоторую информацию, могущую устранить те смутные признаки удивления машиной и сомнения в самой возможности ее осуществления, которыми она была окружена в умах людей наиболее просвещенных» ([9], с. 55).

Следуя этому намерению, Бэббедж рассматривает в упомянутых работах главным образом следующие вопросы:

1) проблему создания быстродействующего устройства переноса при выполнении арифметических операций (в частности, им приводится описание устройства переноса «с предварением»);

2) общую структуру машины, использование механизма Жаккара и перфокарт для управления ее работой, порядок выполнения вычислений;

3) технику использования в процессе вычислений констант и таблиц;

4) возможность «обработки» машиной алгебраических формул и получения результатов в символической форме;

5) технику «условной передачи управления».

За исключением первого, чисто технического, вопроса, все остальные освещены в статье Менабреа достаточно подробно. Однако ни Бэббедж, ни Менабреа не упоминают ни слова о таком принципиально важном для программирования вопросе, как организация циклов и связь рекуррентных формул с циклическими процессами вычислений.

7 Заказ № 998

Таблица 2

Номера операций	Характер операции	Переменные участвующие в операции	Переменные получающие значение	Указание изменений в значениях переменных	Сообщенные значения	Входные переменные $^1V_1$	$^1V_2$	$^1V_3$	$^0V_4$	$^0V_5$
						○ 0 0 1 $\boxed{1}$	○ 0 0 2 $\boxed{2}$	○ 0 0 4 $\boxed{n}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$
1	×	$^1V_2 \times {}^1V_3$	$^1V_4, {}^1V_5, {}^1V_6$	$\left\{\begin{matrix} ^1V_2 = {}^1V_2 \\ ^1V_3 = {}^1V_3 \end{matrix}\right\}$	$= 2n$ …		2	n	$2n$	$2n$
2	−	$^1V_4 - {}^1V_1$	$^2V_4$ …	$\left\{\begin{matrix} ^1V_4 = {}^2V_4 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= 2n-1$ …	1			$2n-1$	
3	+	$^1V_3 + {}^1V_1$	$^2V_5$.	$\left\{\begin{matrix} ^1V_5 = {}^2V_5 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= 2n+1$ …	1	…	…	.	$2n+1$
4	÷	$^2V_5 \div {}^2V_4$	$^1V_{11}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^2V_5 = {}^0V_5 \\ ^2V_4 = {}^0V_4 \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n-1}{2n+1}$ …				0	0
5	÷	$^1V_{11} \div {}^1V_2$	$^2V_{11}$	$\left\{\begin{matrix} ^1V_{11} = {}^2V_{11} \\ ^1V_2 = {}^1V_2 \end{matrix}\right\}$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ …	.	2	.	.	
6	−	$^0V_{13} - {}^2V_{11}$	$^1V_{13}$	$\left\{\begin{matrix} ^2V_{11} = {}^0V_{11} \\ ^0V_{13} = {}^1V_{13} \end{matrix}\right\}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$ …	.		.		..
7	−	$^1V_3 - {}^1V_1$	$^1V_{10}$	$\left\{\begin{matrix} ^1V_3 = {}^1V_3 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= n-1 (=3)$ …	1		n		
8	+	$^1V_2 + {}^0V_7$	$^1V_7$.	$\left\{\begin{matrix} ^1V_2 = {}^1V_2 \\ ^0V_7 = {}^1V_7 \end{matrix}\right\}$	$= 2+0=2$ …	..	2		.	
9	÷	$^1V_6 \div {}^1V_7$	$^3V_{11}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_6 = {}^1V_6 \\ ^0V_{11} = {}^3V_{11} \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n}{2} = A_1$ …	.	.		.	.
10	×	$^1V_{21} \times {}^3V_{11}$	$^1V_{12}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_{21} = {}^1V_{21} \\ ^3V_{11} = {}^3V_{11} \end{matrix}\right\}$	$= B_1 \frac{2n}{2} = B_1 A_1$ …	.	.	..	.	..
11	+	$^1V_{12} + {}^1V_{13}$	$^2V_{13}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_{12} = {}^0V_{12} \\ ^1V_{13} = {}^2V_{13} \end{matrix}\right\}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \frac{2n}{2}$ …	.	.	.	.	..
12	−	$^1V_{10} - {}^1V_1$	$^2V_{10}$ …	$\left\{\begin{matrix} ^1V_{10} = {}^2V_{10} \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= n-2 (=2)$ …	1	..	..		..
13	−	$^1V_6 - {}^1V_1$	$^2V_6$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_6 = {}^2V_6 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= 2n-1$ …	1	..	…	..	.
14	+	$^1V_1 + {}^1V_7$	$^2V_7$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_1 = {}^1V_1 \\ ^1V_7 = {}^2V_7 \end{matrix}\right\}$	$= 2+1=3$ …	1	…	…	…	..
15	÷	$^2V_6 \div {}^2V_7$	$^1V_8$.	$\left\{\begin{matrix} ^2V_6 = {}^2V_6 \\ ^2V_7 = {}^2V_7 \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n-1}{3}$ …	.	.	…		…
16	×	$^1V_8 \times {}^3V_{11}$	$^4V_{11}$ . . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_8 = {}^0V_8 \\ ^3V_{11} = {}^4V_{11} \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$ …	.	…	..	.	.
17	−	$^2V_6 - {}^1V_1$	$^3V_6$.	$\left\{\begin{matrix} ^2V_6 = {}^3V_6 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= 2n-2$ …	1	..	..	..	.
18	+	$^1V_1 + {}^2V_7$	$^5V_7$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^2V_7 = {}^3V_7 \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= 3+1=4$ …	1	.	.	.	.
19	÷	$^3V_6 \div {}^3V_7$	^1V .	$\left\{\begin{matrix} ^2V_8 = {}^3V_8 \\ ^2V_7 = {}^3V_7 \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n-2}{4}$ …	..	.	.	.	..
20	×	$^1V_9 \times {}^4V_{11}$	$^5V_{11}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_9 = {}^0V_9 \\ ^4V_{11} = {}^5V_{11} \end{matrix}\right\}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = A_3$ . . .	…	…	…	…	…
21	×	$^1V_{22} \times {}^5V_{11}$	$^0V_{12}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^1V_{22} = {}^1V_{12} \\ ^0V_{12} = {}^2V_{12} \end{matrix}\right\}$	$= B_3 \cdot \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = B_3 A_2$.	…	…	…	.	.
22	+	$^2V_{12} + {}^2V_{13}$	$^3V_{13}$ . .	$\left\{\begin{matrix} ^2V_{12} = {}^0V_{12} \\ ^2V_{13} = {}^3V_{13} \end{matrix}\right\}$	$= A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_2$ …	…	…	…	…	…
23	−	$^2V_{10} - {}^1V_1$	$^3V_{10}$ …	$\left\{\begin{matrix} ^2V_{10} = {}^3V_{10} \\ ^1V_1 = {}^1V_1 \end{matrix}\right\}$	$= n-3 (=1)$ …	1	..	…	…	…
Здесь следует повторять операции с тринадцатой по двадцать третью										
24	+	$^4V_{13} + {}^0V_{24}$	$^1V_{24}$ …	$\left\{\begin{matrix} ^4V_{13} = {}^0V_{13} \\ ^0V_{24} = {}^1V_{24} \end{matrix}\right\}$	$= B_7$ …	…	…	…	…	…
25	+	$^1V_1 + {}^1V_3$	$^1V_3$ …	$\left\{\begin{matrix} ^1V_1 = {}^1V_1 \\ ^1V_3 = {}^1V_3 \\ ^5V_6 = {}^0V_6 \\ ^5V_7 = {}^0V_7 \end{matrix}\right\}$	$= n+1 = 4+1 = 5$ …	1	…	$n+1$	..	.

Номера операций	Рабочие переменные $^0V_6$	$^0V_7$	$^0V_8$	$^0V_9$	$^0V_{10}$	$^0V_{11}$	$^0V_{12}$	$^0V_{13}$	Выходные переменные $^1V_{21}$	$^1V_{22}$	$^1V_{23}$	$^0V_{24}$
	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ 0 0 0 $\boxed{}$	○ $\boxed{B_1}$	○ $\boxed{B_3}$	○ $\boxed{B_3}$	○ $\boxed{B_5}$
1	$2n$											
2												
3												
4	…	..	…	…	..	$\frac{2n-1}{2n+1}$						
5	…	…	.	…	…	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$						
6	…	…	…	…	…	0	…	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$				
7	…	.	…	…	$n-1$							
8	.	2										
9	$2n$	2	…	…	..	$\frac{2n}{2} = A_1$						
10	…	…	…	.	..	$\frac{2n}{2} = A_1$	$B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	…	B_1			
11	…	..	…	…	..	…	0	$\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}\right\}$				
12	..	.	…	…	$n-2$							
13	$2n-1$											
14	..	3										
15	$2n-1$	3	$\frac{2n-1}{3}$									
16	…	…	0	…	…	$\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$						
17	$2n-2$											
18	…	4										
19	$2n-2$	4	…	$\frac{2n-2}{4}$	..	$\left\{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4}\right\} = A_2$						
20	…	…	…	0								
21	.	…	…	…	…	0	$B_3 A_3$	…	.	B_2		
22	…	…	…	…	…	…	0	$\{A + B_1 A_1 + B_3 A_3\}$				
23	…	…	…	…	$n-3$					.		
Здесь следует повторять операции с тринадцатой по двадцать третью												
24	…	…	…	…	..	…	…	…	…	.	…	B
25	0	0										

Мы можем, следовательно, полагать, что эти важные вопросы, подробное рассмотрение которых в примечаниях *E* и *G* производится почти на современном уровне, явились результатом самостоятельного творчества Ады Лавлейс. По-видимому, Бэббедж, будучи крайне щепетильным в вопросах авторства, решил писать в своих «Посланиях», вышедших уже после смерти Ады, лишь о том, что принадлежало только ему.

Точно так же Аде Лавлейс можно, несомненно, приписать авторство терминов, не встречавшихся у Бэббеджа. Сюда относятся термины *цикл*, *рабочие переменные* (или — *рабочие колонны*, иначе — *рабочие ячейки*). Сюда же следует отнести и наименование карт. У Бэббеджа и Менабреа встречается термин «карты переменных». Ада называет их *распределяющими картами* и дает в «Примечании *B*» их подробную классификацию, детализируя их назначение.

Вместе с тем влияние Бэббеджа чувствуется, конечно, на всей работе. Кроме вполне очевидных вопросов, относящихся к вычислительным машинам, мы хотим отметить особое внимание, которое уделяется «науке об операциях» (см. «Примечание *A*»). Это внимание представляется тесно связанным с интересами Бэббеджа и его работами по функциональному исчислению. Бэббедж неоднократно обращался к этой области математики в своих работах[9] и следил за работами других авторов в течение всей своей жизни. Так, в своих «Посланиях» он пишет: «Несколько месяцев тому назад я обратился к статье в „Philos. Transact." 1844 г,. чтобы изучить некоторые аналитические исследования, представляющие большой интерес[10]. Они относятся к отделению символов операций от символов величин — вопрос особенно интересный для меня, так как аналитическая машина *содержит воплощение этого метода*» ([10], с. 71).

Аналитическая машина Бэббеджа не была построена и программы, написанные Августой Адой Лавлейс, никогда не отлаживались и не работали. Но, несмотря на это они, как и «Примечания» в целом, навсегда останутся в истории вычислительной математики и вычислительной техники как первые работы в области программирования. Слова *цикл* и *рабочие ячейки* относятся к наиболее употребительным программистским терминам и вряд ли станут менее употребительны в обозримом будущем. Будем же помнить, кто произнес их впервые.

[9] См. нашу статью «Математические работы Чарльза Бэббеджа» в настоящем сборнике.

[10] По всей вероятности, имелась в виду статья Дж. Буля «Об одном общем методе в анализе» [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babbage C.* Passages from the life of a philosopher. London, 1864, VIII: Of Analytical Engine (перепечатано в [9]).
2. *Bowden B. V.* Preface. Brief history of computation. — In: Faster than thought. Ed. by B. V. Bowden, London, 1953.
3. *Moseley M.* Irascible Genius. A life of Charles Babbage, inventor. Chicago, 1970.
4. *Байрон Дж.* Дневники и письма. Издание подготовили З. Е. Александрова, А. А. Елистратова, А. Н. Николюкин. М., **1963**.
5. *Байрон Дж.* Дон Жуан, пер. Т. Гнедич. М.—Л., 1959.
6. *Morgan S. E. de.* Memoires of Augustus De Morgan. London, 1862.
7. *Lardner D.* Babbage's calculating engine. — Edinburgh Review, 1834, July (перепечатано в [9]).
8. *Menabrea L. F.* Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage, Esq. Перепечатано в [9].
9. Charles Babbage and his calculating engines. Ed. by P. and E. Morrison. N. Y., 1959.
10. *Babbage C.* An examination of some questions connected with game of chance. — Trasactions of the Royal Society of Edinburgh, 1820, vol. IX.
11. *Lovelace A. A.* Note by the Translator. Перепечатано в [9].
12. *Яновская С. А.* Предисловие к русскому переводу книги А. Тарского «Введение в логику и методологию дедуктивных наук» (М., 1948).
13. *Гутер Р. С.*, *Резниковский П. Т.*, *Резник С. М.* Программирование и вычислительная математика, вып. 1. М., 1971.
14. *Китов А. И.*, *Криницкий Н. А.* Электронные вычислительные машины и программирование. М., 1955.
15. Возможное и невозможное в кибернетике. М., 1963.
16. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? М., 1960.
17. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
18. *Babbage C.* Exposition of 1851, or Views of the Industry, the Science and the Government of England. London, 1851.
19. *Boole G.* On a general method in analysis. — Philosophical Transactions, 1844, vol. 134, part II.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЧАРЛЬЗА БЭББЕДЖА

Р. С. Гутер, *Ю. Л. Полунов*

Чарльз Бэббедж был человеком с широкими научными интересами ([1], [2]), но все же после вычислительных машин, которые были «главным делом его жизни» (см. [1]), на первом месте у него стояла математика. Математические работы Бэббеджа мало известны. В доступной нам литературе по истории математики лишь в книге Г. Вилейтнера [3] упоминается работа Бэббеджа. Имя Бэббеджа встречается также в «Очерке» Д. Я. Стройка [4], но в нем идет речь лишь об участии Бэббеджа в создании «Аналитического общества».

Из списка работ, помещенного Бэббеджем в своих автобиографических «Посланиях из жизни философа» [1], к математике относятся 18. К сожалению, не все из них доступны для советского читателя, так как многих журналов начала XIX в., в которых публиковались работы Бэббеджа, либо вообще нет в наших библиотеках, либо они имеются не в полном комплекте. Кроме того, поиски его работ затруднены тем, что в упомянутом списке много путаницы в годах и номерах томов и даже в названиях журналов, где работы публиковались.

1

Бэббедж закончил кембриджский колледж св. Петра и получил степень бакалавра в 1814 г. и магистра в 1817 г. Первая его самостоятельная работа носила математический характер и была выполнена еще в студенческие годы. Это была заметка «О бесконечных произведениях» [5], напечатанная в 1813 г. в Кембридже в «Записках Аналитического общества», в числе основателей которого был Бэббедж.

Упомянутые «Записки» являются библиографической редкостью. Но об этой работе можно судить по упоминанию о ней в книге друга Бэббеджа — Гершеля [6], изданной в Кембридже в 1820 г. Здесь в главе «Упражнения в суммировании рядов с помощью интегрирования их общих членов» ([6], с. 61) рассматривается произведение вида

$$P_z = \operatorname{tg}\theta\,(\operatorname{tg}2\theta)^{1/2}(\operatorname{tg}4\theta)^{1/4}\ldots(\operatorname{tg}2^z\theta)^{2^{-z}},$$

значение которого находится с помощью суммирования ряда

$$\ln\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}2\theta+\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}4\theta+\ldots$$

Дж. Гершель указывает, что значение бесконечного произведения P_z при $z\to\infty$, как и значение аналогичного произведения, связанного с суммированием ряда обратных синусов

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin 2\theta}+\ldots,$$

были получены Бэббеджем в его работе [5].

2

Более серьезная работа Ч. Бэббеджа также была выполнена фактически еще в студенческие годы. Это был большой, состоящий из двух частей, мемуар «Очерк функционального исчисления» ([7], [8]). Он опубликован в Трудах лондонского Королевского общества (часть I доложена 15 июня 1815 г., часть II — 14 марта 1816 г.). Так как Бэббедж не был тогда членом Королевского общества, работа была представлена У. Г. Волластоном, бывшим в то время секретарем общества.

Эта работа Бэббеджа посвящена изучению функциональных уравнений достаточно общего вида. В первой части рассматриваются уравнения относительно неизвестных функций одного аргумента; во второй части речь идет об уравнениях с неизвестными функциями двух переменных.

Хотя дискуссия об определении понятия функции была ко времени этой публикации еще далека от завершения, Бэббедж, начиная свою работу определением функции, делает это в достаточной степени мимоходом. При этом в своем определении он делает акцент на операционно-вычислительной стороне дела, что, впрочем, было его постоянной точкой зрения и в дальнейшем. Первая фраза мемуара гласит: «Термин *функция* давно успешно используется в анализе с целью обозначения результата любой операции, которая может быть выполнена над величиной (quantity)».

После нескольких общих высказываний относительно прямых и обратных задач и большей трудности последних, автор вводит понятие функционального уравнения, всячески подчеркивая их аналогию с обычными.

Если неизвестная величина x задана посредством уравнения, то ставится вопрос, как определить ее значение; аналогично, если неизвестная функция ψ задана посредством некоторого функционального уравнения, то требуется определить ее вид. В первом случае определяемое есть величина; во втором предметом исследования становится форма, присвоенная величине. В одном случае изменяется степень неизвестной величины, входящей в уравнение; в другом представляют интерес различные порядки функции ([7], с. 390).

Под «порядком функции» Бэббедж понимает порядок суперпозиции и на этом строит классификацию функциональных уравнений: «Если в некоторую функцию ψx вместо x подставить первоначальную функцию, то получим $\psi\psi x$ или $\psi^2 x$; ее называют второй функцией от x. Если процесс повторять, то результат $\psi^2\psi x$ или $\psi^3 x$ есть третья функция от x» ([7] с. 390). Отметим попутно, что Бэббедж не отделяет знак функции от аргумента скобками и пишет ψx вместо принятого теперь $\psi(x)$. Так писали в первой половине XVIII в.; так же пишут и сейчас в теории операторов и в математической логике.

Далее приводится классификация функциональных уравнений:

О функциональном уравнении говорят, что оно первого порядка, если оно содержит только первую функцию неизвестной величины, например:

$$\psi ax + x\psi x - x^n = 0,$$

$$\left(\psi x + \psi \frac{1}{x}\right)^n - ax + x^2 = 0.$$

Если входит вторая функция, то уравнение относят ко второму порядку, таковы:

$$\psi^2 x = x,$$

$$\psi(x+\psi x)+(\psi x - x)^2=0 \quad ([7], \text{ с. } 390\text{—}391).$$

В качестве задач, сводящихся к функциональным уравнениям, автор приводит две геометрические задачи. Одна из них есть известная задача Паппа. Рассматривается кривая, обладающая двумя взаимно перпендикулярными асимптотами. Проведем окружность, касающуюся

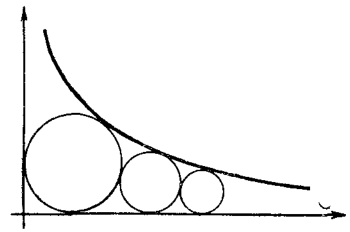

Рис. 1

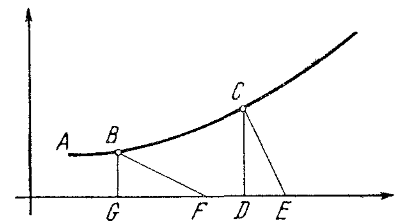

Рис. 2

кривой и обеих асимптот; затем проведем вторую окружность, касающуюся кривой, асимптоты и первой окружности и т. д. (см. рис. 1). Если вид кривой известен, то можно определить отношение суммы площадей всех кругов к площади всей фигуры, ограниченной кривой и ее асимптотами. Обратная задача приводит к функциональному уравнению: предположив указанное отношение заданным, определить вид кривой.

Другая задача такова. В произвольной точке C кривой ABC строятся ордината CD, нормаль CE и поднормаль DE. Затем треугольник CDE поворачивается так, чтобы катет CD шел по оси Ox, а катет DE был параллелен Oy. Передвинем этот треугольник так, чтобы катет DE совпал с GB (рис. 2), т. е. стал ординатой некоторой точки B кривой. Какой должна быть кривая, чтобы нормаль к ней в точке B совпала с гипотенузой BF получившегося треугольника BFG? Как отмечает Бэббедж, на тесную связь между этими двумя задачами ему указал Гершель.

Переходя к методам решения функциональных уравнений, Ч. Бэббедж упоминает предшествующие работы Г. Монжа и П. С. Лапласа, в которых решались некоторые функциональные уравнения путем сведения их к уравнениям в конечных разностях, одновременно указывая, что некоторые работы в этой области оказались для него недоступными. Среди последних он называет работу Ф. А. Арбогаста, удостоенную премии Петербургской академии наук в 1790 г. Эту и некоторые последующие работы Арбогаста по функциональным уравнениям см. в [9].

В рассматриваемой работе ставится задача отыскания общего решения функциональных уравнений различных видов *в предположении, что известно частное решение*. Однако определение общего решения выбрано наиболее удобным для его нахождения образом. Автор пишет: «Для удобства я буду называть всякое решение функционального уравнения, содержащее одну или несколько произвольных функций, общим решением; однако, если решение такого уравнения содержит только произвольную постоянную, я буду называть его частным решением» ([7], с. 395).

Следует, впрочем, отметить, что такой подход к понятию общего решения функционального уравнения оставался общепринятым еще довольно долгое время и после рассматриваемых работ Бэббеджа. Так, один из первых на русском языке и довольно полных обзоров функционального исчисления, опубликованный в 1876 г. А. И. Ливенцовым, дает следующее определение: «Мы будем называть общим решением функционального уравнения такое удовлетворяющее этому уравнению выражение искомой функции, которое заключает в себе произвольные функции; если это выражение содержит произвольные постоянные, то мы его будем называть полным решением; если же, наконец, оно не будет содержать в себе никаких произвольных величин, то мы дадим ему название частного решения» ([10], с. 95). Как видно, это определение практически не отличается от определения Бэббеджа.

Сначала Бэббедж рассматривает восемь задач, относящихся к функциональным уравнениям первого порядка, т. е. уравнениям, содержащим одну искомую функцию и не содержащим ее суперпозицию.

З а д а ч а I. Требуется решить уравнение $\psi x=\psi\alpha x$, где α — известная функция, предполагая известным частное решение $fx=f\alpha x$.

В современных обозначениях уравнение записывается в виде $\psi(x)=\psi(\alpha(x))$. Общим решением (разумеется, в смысле приведенного выше определения Бэббеджа) будет $\psi=\varphi f$, где φ — произвольная функция. В качестве примера приводится уравнение $\psi(x)=\psi(-x)$, частным решением которого является $fx=x^2$, так что общее решение записывается в виде $\psi(x)=\varphi(x^2)$.

Заметим, что природа «произвольной функции φ» остается здесь крайне неопределенной. Разумеется, речь идет не о гладкости или непрерывности φ, — ясно, что она предполагалась достаточно хорошей, — а о том, допускает ли φ лишь конечное или, быть может, бесконечное число операций. В связи с этим нельзя ответить на вопрос, считал ли Бэббедж, что его общее решение вообще не содержит заведомо четной функции $\cos x$, или же он считал возможным представить $\cos x$ в виде $\varphi(x^2)$ с помощью степенного ряда.

З а д а ч а II. Ищется общее решение того же уравнения $\psi x=\psi\alpha x$ в предположении, что известно частное решение другого — функция $fx=f\alpha^2x$ (напомним, что под α^2 следует понимать суперпозицию известной функции α).

Общее решение записывается Бэббеджем в этом случае в виде $\psi x=\bar{\varphi}\{fx, f\alpha x\}$, где $\bar{\varphi}$ означает произвольную с и м м е т р и ч н у ю функцию двух аргументов.

К функциональному уравнению рассматриваемого вида приводит следующая геометрическая задача: «определить вид кривой, такой, что если произведение абсцисс двух точек равны заданному квадрату, то ординаты этих точек равны между собой» ([7], с. 397—398). Из условия сразу следует $\psi x=\psi\dfrac{a^2}{x}$, откуда получаем решение в виде[1] $\psi x=\bar{\varphi}\left\{x, \dfrac{a^2}{x}\right\}$. Если, в частности, положить $\bar{\varphi}\{u, v\}=u+v$, то в качестве решения получаем простую гиперболу $xy-x^2=a^2$.

З а д а ч а III. Ищется решение уравнения $\psi x=Ax\times\psi\alpha x$ в предположении, что известно частное решение $f(x)$ этого уравнения, а также уравнения $\psi x=\psi\alpha^2x$.

Обозначив частное решение последнего уравнения через f_1x, Бэббедж показывает, что общее решение первоначального уравнения (опять-таки в определенном выше смысле) можно записать в виде $\psi x=fx\times\varphi f_1x$, где φ — произвольная функция.

[1] В подлиннике опечатка: вместо $\bar{\varphi}\left\{x, \dfrac{a^2}{x}\right\}$ напечатано $\bar{\varphi}\left\{x, \dfrac{a^2}{x^2}\right\}$.

Задача IV. Уравнение[2] $\psi x = Ax \times \psi\alpha x + Bx$, частное решение которого предполагается известным, с помощью обычного приема сводится к способу, рассмотренному в задаче III. В качестве частного случая рассматривается уравнение $\psi(e^y) \pm e^{-y} = Ay$, решение которого, как указывает автор, использовалось Гершелем в 1814 г. при определении сумм некоторых интересных рядов ([7], с. 401).

Задача V. Более общее уравнение

$$\psi x + Ax \times \psi\alpha x + Bx \times \psi\beta x + \ldots + Nx \times \psi\nu x + X = 0$$

тем же приемом редуцируется к аналогичному уравнению, не содержащему свободного члена. Важный частный случай такого уравнения имеет вид

$$\psi x + Ax \times \psi\alpha x + Bx \times \psi\alpha^2 x + \ldots + Nx \times \psi\alpha^{n-1} x = 0.$$

Если известно частное решение fx этого уравнения, то общее можно записать в виде

$$\varphi x = fx \times \bar{\chi}\{x,\ \alpha x,\ \alpha^2 x,\ \ldots,\ \alpha^{n-1} x\},$$

где $\bar{\chi}$ — произвольная симметричная функция своих n аргументов. Общее уравнение с любым $\alpha, \beta, \ldots$ не рассматривается.

Задача VI. Ищется функция от x, удовлетворяющая равенствам

$$\varphi x = \varphi\alpha x = \varphi\beta x = \ldots = \varphi\nu x.$$

Для отыскания общего решения уравнения находится сначала функция f, удовлетворяющая равенству $fx = f\alpha x$. Затем ищется функция f_1 по уравнению $f_1 f_x = f_1 f\beta x$ $(= f_1 f\alpha\beta x)$ и т. д., вплоть до функции f_n, для которой $f_n f_{n-1} \ldots fx = f_n f_{n-1} \ldots f\nu x$. Если теперь φ означает произвольную функцию, то общее решение первоначального уравнения можно записать в виде

$$\varphi\{f_n f_{n-1} \ldots f_1 fx\}.$$

Задача VII. Пусть заданы две системы функций, $\alpha x,\ \beta x, \ldots, \nu x$ и $\alpha_1 x,\ \beta_1 x, \ldots, \nu_1 x$. Требуется определить функцию ψ, удовлетворяющую системе уравнений

$$\psi\alpha x = \psi\alpha_1 x,$$

$$\psi\beta x = \psi\beta_1 x,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\psi\nu x = \psi\nu_1 x.$$

Определим f из уравнения $f\alpha x = f\alpha_1 x$, возьмем некоторое частное решение и найдем f_1 из уравнения $f_1 f\alpha\beta x = f_1 f\alpha_1\beta_1 x = f_1 f\alpha\beta_1 x$. Действуя аналогично, находим f_2 из уравнения $f_2 f_1 f\alpha\beta\gamma x = f_2 f_1 f\alpha\beta_1\gamma_1 x = f_2 f_1 f\alpha\beta\gamma_1 x$ и т. д. и, наконец, f_n из уравнения

$$f_n f_{n-1} \ldots f_1 f\alpha\beta\gamma \ldots \nu x = f_n f_{n-1} \ldots f_1 f\alpha\beta\gamma \ldots \nu_1 x.$$

Общее решение системы, как и в предыдущем случае, можно представить в форме

$$\psi x = \varphi f_n f_{n-1} \ldots f\alpha\beta \ldots \nu x.$$

Задача VIII. Ищется общее решение уравнения[3] $F\{x,\ \psi x,\ \psi\alpha x,\ \ldots, \psi\nu x\} = 0$; предполагается известным одно частное решение, содержащее одну или несколько произвольных постоянных.

В соответствии с задачей VI найдем произвольную функцию, которая сохранится без изменения при подстановке вместо x величин $\alpha x,\ \beta x, \ldots, \nu x$ и назовем ее φx. Пусть частное решение первоначального уравнения есть $\psi x = f\{x,\ a,\ b,\ c, \ldots\}$. Так как произвольные постоянные $a, b, \ldots$ не входят в первоначальное уравнение, то общее решение можно получить, заменив их произвольными функциями вида φx, определенными выше. Окончательно общее решение уравнения можно записать так:

$$\psi x = f_1\{x,\ \varphi x,\ \varphi_1 x,\ \varphi_2 x, \ldots\}.$$

По всей видимости, Бэббедж хорошо понимал недостатки своего определения общего решения. Поэтому в конце той части своей работы, которая посвящена уравнениям первого порядка, он помещает замечание «О числе произвольных функций, входящих в полное решение функционального уравнения» ([7], с. 408—409). Здесь автор пишет:

Когда из функционального уравнения первого порядка мы определяем вид неизвестной функции, могут вводиться одна или несколько произвольных постоянных величин; как я уже говорил в предыдущей задаче, их можно заменить произвольными функциями

[2] В качестве знака умножения Бэббедж употреблял как точку (которая может опускаться), так и знак «$\times$» (предполагая, как обычно, что знак умножения связывает теснее, чем знак сложения). Он также использовал скобки различных видов. В дальнейшем изложении авторы этой статьи не стремились к унификации обозначений.

[3] В подлиннике приведена только левая часть.

неизвестной величины, которые удовлетворяют предписанным условиям.[1]

Естественно возникает вопрос, каково число этих произвольных функций и сколько их самое большее может быть в общем решении некоторого данного функционального уравнения.

Далее Бэббедж показывает, что решение функционального уравнения первого порядка может содержать любое число n произвольных постоянных. Что касается числа произвольных функций, то автор ограничивается сообщением, что он в настоящее время ответить на этот вопрос не в состоянии.

Следующий раздел посвящен функциональным уравнениям второго и высших порядков и содержит задачи IX—XXI.

Во всех решениях этих задач, так же, впрочем, как и в первой части, характерно преобладание формально-выкладочных методов и техники преобразований, без стремления донести до читателя (или осмыслить самому!) содержательную сторону выкладок. Бэббедж считает возможным пользоваться символическими операторами, не только не обосновывая справедливость получающихся равенств, но даже не останавливаясь на их введении. Наиболее характерным примером является использование оператора $\Delta=\psi-1$ в решении задачи IX, которую мы рассмотрим несколько подробнее.

З а д а ч а IX. Требуется решить уравнение

$$\psi^2 x = x. \tag{a}$$

Вычитая φx из обеих частей, получаем $\psi^2 x-\psi x=-\psi x+x=-(\psi x-x)$, откуда

$$\Delta\psi x = -\Delta x; \tag{b}$$

умножая (a) на ψx, получаем $\psi^2 x\times\psi x=\psi x\times x$.

Из этого мы замечаем, что (b) следует проинтегрировать в предположении постоянства $x\psi x$, что дает $\psi x=-x+c=-x+f\,(x\psi x)$, где f означает произвольную функцию; ψ определяется из уравнения $\psi x+x-f\,(x\psi x)=0$.

Записав произвольную функцию f в виде $f^{-1}f_1$, получим

$$f\,(x+\psi x)-f_1(x\psi x)=0 \text{ ([7], с. 410).} \tag{c}$$

З а д а ч а X. Рассматривается то же уравнение $\psi^2 x=x$ другим методом. В предположении, что известно частное решение этого уравнения $f^2 x=x$, общее решение записывается в виде $\psi x=\varphi^{-1}f\varphi x$, где φ — произвольная функция, а φ^{-1} — обратная ей.

З а д а ч а XI. Дано уравнение $\psi^n x=x$. Подстановка $\psi x=\varphi^{-1}f\varphi x$ приводит его к виду $\varphi^{-1}f^n\varphi x=x$. Если предположить известным частное решение f последнего уравнения, то общее решение первоначального записывается, как и в предыдущей задаче, в форме $\psi x=\varphi^{-1}\,f\varphi x$.

Решение этого уравнения Бэббеджем упоминается, как уже было указано выше, в книге Г. Вилейтнера [3]. Приводится также (довольно искусственная) геометрическая задача, сводящаяся к уравнению этого типа.

Это уравнение под названием «уравнения Бэббеджа» подробно рассматривается в монографии Кучмы [11], где приводится общее решение уравнения $\varphi^n x=x$, полученное лишь в 1951 г. (см. [21], с. 288—289).

З а д а ч а XII. Дано уравнение $\psi^2 x=\alpha x$, где α — известная функция. Это уравнение решается с помощью предыдущей подстановки, Указывается, что это уравнение ранее было изучено Лапласом.

З а д а ч а XIII. Рассматривается уравнение $\psi^n x=\alpha x$, где α — известная функция. Уравнение решается аналогично уравнению в задаче XI. Оно также рассматривается в книге Кучмы [11].

З а д а ч а XIV. Уравнение $\psi\alpha\varphi\beta x=\gamma x$, где α, β, γ — известные функции, приводится к уравнению вида $\psi^n y=Fy$.

В задачах XV и XVI другими методами рассматриваются уравнения $\psi^2 x=x$ и $\psi^n x=x$.

З а д а ч а XVII. Ищется решение уравнения $\psi^\alpha\,(y,\ \psi y)=y$, где α — известная функция двух аргументов. Для решения уравнения преобразуется с помощью уже использованной подстановки $\psi y=\varphi^{-1}f\varphi y$. Кроме того, приводится геометрическая задача, сводящаяся к функциональному уравнению $x=\psi\left(\sqrt{x^2+(\psi x)^2}\right)$.

З а д а ч а XVIII. Показано, как с помощью задачи VI редуцировать уравнение $F\,(x,\ \psi x,\ \psi^2\alpha x,\ \ldots,\ \psi^n\nu x)=0$ к уравнению, рассматривающемуся в следующей задаче.

З а д а ч а XIX. Рассматривается уравнение $F\{x,\ \psi x,\ \psi^2 x,\ \ldots,\ \psi^n x\}=0$. Его общее решение записывается в виде $\chi\{x,\ fx,\ f^2 x,\ \ldots,\ f^n x\}$, где χ — симметричная функция своих аргументов, а f — частное решение вспомогательного уравнения.

Приводится также следующая геометрическая задача. Определить вид кривой, обладающей следующим свойством: берутся две произвольные точки кривой так, чтобы абсцисса второй равнялась ординате первой. Тогда произведение ординат этих точек должно равняться квадрату абсциссы первой точки.

Задача сводится к функциональному уравнению $\psi^2 x \times \psi x = x^2$, решением которого является кривая третьего порядка $yx^2 = a^3$.

Задача XX совпадает с задачей XVIII.

Задача XXI. Рассматривается уравнение $F\{x, \psi x, \psi\alpha(x, \psi\beta x)\} = 0$. Это уравнение также сводится к уравнению, рассмотренному в задаче XIX.

3

Вторая часть [8] мемуара «Очерк функционального исчисления» посвящена главным образом функциональным уравнениям с неизвестными функциями от двух аргументов; но в ней затрагиваются и другие вопросы. Эта работа вдвое больше предыдущей, написана в том же стиле и содержит рассмотрение 42 задач.

Прежде всего указывается, что суперпозиция функций двух переменных представляет большое число различных возможностей. Так, в функции $\psi(x, y)$ можно заменить той же функцией первый аргумент, второй или оба одновременно. Для функций более высокого порядка число возможностей еще более возрастает. Бэббедж предлагает систему обозначений для различных типов суперпозиций. Например,

$$\psi^{2,1}(x, y) = \psi(\psi(x, y), y),$$
$$\psi^{1,2}(x, y) = \psi(x, \psi(x, y)),$$
$$\psi^{2,2}(x, y) = \psi(\psi(x, y), \psi(x, y)).$$

Далее обсуждаются достоинства и недостатки введенной системы обозначений.

Задачи I—VII посвящены уравнениям первого порядка и вполне аналогичны рассмотренным в первой части. Поэтому мы ограничимся лишь приведением уравнений, остановившись чуть более подробно на задаче I. По ней можно

судить, что все результаты носят здесь довольно частный характер.

Задача I. Требуется решить уравнение $\psi(x, y) = \psi(\alpha x, \beta y)$. Как ранее и всюду в дальнейшем, α, β, γ, ... означают известные, а φ, ψ, χ — неизвестные или произвольные функции.

Положим $\psi(x, y) = \varphi(fx, f_1 y)$. Тогда заданное уравнение можно записать в виде $\varphi(fx, f_1 y) = \varphi(f\alpha x, f_1\beta y)$. Определив f и f_1 из двух уравнений $fx = f\alpha x$ и $f_1 y = f_1 \beta y$ и взяв произвольную функцию φ, можем записать общее решение в виде $\psi(x, y) = \varphi(fx, f_1 y)$ ([8], с. 184—185).

Задача II. Другое общее решение того же уравнения $\psi(x, y) = \psi(\alpha x, \beta y)$ получается путем применения иного приема.

Задача III. Рассматривается уравнение $\psi(x, y) = \psi(\alpha(x, y), \beta(x, y))$.

Задача IV. То же уравнение.

Задача V. Уравнение вида $\psi(x, y) = A(x, y) \times \psi(\alpha(x, y), \beta(x, y))$.

Задача VI. Уравнение вида $\psi(x, y) = A(x, y) \times \psi(\alpha(x, y), \beta(x, y)) + B(x, y)$ обычным приемом сводится к предыдущему.

Задача VII. Даны две последовательности функций $\alpha(x, y)$, $\alpha_1(x, y)$, $\alpha_2(x, y)$, ... и $\beta(x, y)$, $\beta_1(x, y)$, $\beta_2(x, y)$, ... Ищется функция, удовлетворяющая условиям

$$\psi(x, y) = \psi(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = \psi(\alpha_1(x, y), \beta_1(x, y)) = \ldots$$

Далее идет раздел, посвященный функциональным уравнениям второго и высших порядков, содержащим функции двух и более переменных (задачи VIII—XXX). Мы снова ограничимся лишь формулировкой задач, да и то не всех, чтобы не входить в детали сложных обозначений Бэббеджа для различных типов суперпозиций.

Задача VIII. Рассматривается уравнение $\psi^{2,1}(x, y) = x$. Напомним, что $\psi^{2,1}(x, y)$ означает $\psi(\psi(x, y), y)$. Таким образом, речь идет об уравнении $\psi(\psi(x, y), y) = x$.

Задача IX. Уравнение $\psi^{2,2}(x, y) = 0$. Смысл обозначения был указан выше.

Задача X. Уравнение $\psi^{2,2}(x, y) = a$ $(a = \mathrm{const})$.

Задача XI. Уравнение $\psi^{n,n}(x, y) = ax + by$. Обозначение слева имеет аналогичный определенному выше смысл — оба аргумента n раз заменяются той же функцией ψ.

Задача XII. Уравнение $\psi^{n,n}(x, y)=a\{\psi(x, y)\}^b$.

Задача XIII. Уравнение $\psi^{2,2}(x, y)=F\psi(x, y)$, где F — заданная функция.

Задача XIV. Уравнение $\psi^{n,n}(x, y)=F\psi(x, y)$.

Задача XV. Уравнение $\psi^{n,n}(x, y)=F\psi^{n-p,n-p}(x, y)$; p — целое, $0<p<n$.

Задача XVII. Уравнение

$$F\{\psi(x, y), \psi^{2,2}(x, y), \ldots, \psi^{p,p}(x, p)\}=0.$$

Задача XVIII. Уравнение $\psi^{p,p}(x, y)=F(x, y)$; справа — заданная функция.

Задача XX. Уравнение $\psi^{2,1}(x, y)=\psi^{1,2}(x, y)$.

Задача XXIII. Уравнение $F\{x, \psi^{1,2}(x, y)\}=F\{\psi^{2,1}(x, y), y\}$.

Задача XXVI. Уравнение

$$F\{x, y, \psi(x, y), \psi^{1,2}(x, y), \psi^{2,1}(x, y), \ldots\}=0.$$

Последний раздел статьи носит название «Новый метод решения функциональных уравнений первого порядка, а также дифференциальных функциональных уравнений» и содержит задачи XXXI—XLII. Бэббедж пишет ([8], с. 229):

Новый метод, объяснение которого я здесь предлагаю, приложим только к уравнениям вида

$$F\{x, \psi x, \psi\alpha x, \psi\alpha^2 x, \ldots, \psi\alpha^n x\}=0,$$

где α должна быть такой функцией, чтобы $\alpha^{n-1}x=x$. Метод задачи VII первой части позволяет любое функциональное уравнение первого порядка привести к этому виду.

Наложенное ограничение на α позволяет, однако, рассматривать некоторые функциональные уравнения, содержащие кроме неизвестной функции также и ее производные.

Приведем некоторые задачи из этого раздела.

Задача XXXI. Рассмотрим уравнение $F\{x, \psi x, \psi\alpha x\}=0$, причем $\alpha^2 x=x$. Разрешим его относительно ψx. Пусть $\psi x=F_1\{x, \psi\alpha x\}$. Подставим сюда αx вместо x. Тогда получим $\psi\alpha x=F_1\{\alpha x, \psi\alpha^2 x\}=F_1\{\alpha x, \psi x\}$.

Подставив полученное значение $\psi\alpha x$ в предыдущее уравнение, находим $\psi x=F_1\{x, F_1(\alpha x, \psi x)\}$, откуда уже легко выразить ψx через x и αx. Аналогичное, хотя и более громоздкое, выражение можно получить, если условие $\alpha^2 x=x$ заменить условием $\alpha^3 x=x$.

Задача XXXII. Более общее уравнение $F\{x, \psi x, \psi\alpha x, \ldots, \psi\alpha^n x\}=0$ с дополнительным условием[4] $\alpha^{n+1}x=x$ решается аналогичным методом, хотя и требует более громоздких преобразований. Бэббедж приводит также несколько конкретных примеров, из которых наиболее любопытен пример уравнения $\psi x\psi\alpha x+fx\psi x=f_1 x$. Применение указанного алгоритма приводит к представлению решения в виде конечной цепной дроби.

Задача XXXIII. Дано уравнение

$$\varphi\alpha x=\frac{d\psi x}{dx},$$

где α — известная функция, такая, что $\alpha^2 x=x$.

Заменив x на αx, найдем $\psi\alpha^2 x$ (равное ψx):

$$\psi\alpha^2 x=\frac{d\psi\alpha x}{d\alpha x},$$

или после дифференцирования и в силу первоначального уравнения

$$\psi\alpha x=\frac{d}{dx}\cdot\frac{d\psi\alpha x}{d\alpha x}.$$

Так как

$$\frac{d\psi\alpha x}{d\alpha x}=\frac{d\psi\alpha x}{dx}\cdot\left(\frac{d\alpha x}{dx}\right)^{-1},$$

то

$$\psi\alpha x=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d\psi\alpha x}{dx}\cdot\left(\frac{d\alpha x}{dx}\right)^{-1}\right\}.$$

В последнем уравнении достаточно положить $\psi\alpha x=z$, и мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$z=\frac{d}{dx}\left\{\frac{dz}{dx}\cdot\left(\frac{d\alpha x}{dx}\right)^{-1}\right\}.$$

Задача XXXIV. Аналогично решается уравнение

$$\psi\alpha x=\frac{d^n\psi x}{dx^n}$$

с дополнительным условием $\alpha^p x=x$.

[4] В подлиннике напечатано $\alpha^{n+1}=x$.

Задача XXXV. Несколько более сложных преобразований требует более общее уравнение

$$F\left\{x,\ \psi x,\ \psi\alpha x,\ \frac{d\psi x}{dx}\right\}=0$$

с дополнительным условием $\alpha^p x = x$.

Задача XXXVII. Требуется определить вид функции ψ, такой [5], что $\int dx\psi^2 x = \psi a$, где интеграл берется между пределами $x=0$ и $x=a$.

Введем функцию $\varphi(x, v)$ таким образом, чтобы $\psi(x, v) - \varphi(0, v) = v$; вид функции φ определяется написанным функциональным уравнением. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $\int dx\psi^2 x = \varphi(x, \psi a)$.

Дифференцирование обеих частей полученного равенства приводит к уравнению вида

$$\psi^2 x = \frac{d}{dx}\varphi(x,\ \psi a),$$

где справа стоит известная функция (см. задачу XII первой части работы).

Задача XXXIX. Рассматривается уравнение

$$\psi(x,\ y)=\frac{d\psi(x,\ \alpha y)}{dx}$$

с условием $\alpha^p y = y$.

Задача XLI. Рассматривается уравнение

$$F\left\{x,\ y,\ \psi(x, y),\ \psi(\alpha x, y), \ldots, \frac{d^n\psi(x,\ \beta y)}{dx^n},\ \frac{d^k\psi(\alpha^2 x,\ y)}{dy^k}, \ldots\right\}=0$$

с дополнительными условиями $\alpha^p x = x$ и $\beta^q y = y$.

Последней рассматривается конкретная геометрическая задача.

Задача XLII. Требуется определить вид кривой, такой, что для ее произвольной точки длина отрезка нормали до пересечения с осью абсцисс была равна ординате кривой в этой последней точке.

Если (x, y) — координаты произвольной точки, то длина отрезка нормали равна $\sqrt{y^2+(yy')^2}$, а абсцисса точки пересечения нормали с осью Ox равна $x+yy'$. Поэтому

[5] Сохраняем обозначения подлинника.

сформулированная задача приводит к уравнению

$$(\psi x)^2+\left(\psi x\frac{d\psi x}{dx}\right)^2=\left(\psi\left(x+\psi x\frac{d\psi x}{dx}\right)\right)^2.$$

Бэббедж приводит это функциональное уравнение к дифференциальному уравнению с произвольной функцией

$$y^2=\frac{xydy}{dx}+\varphi\left(\frac{ydy}{dx}\right).$$

Далее идет рассуждение, весьма характерное для математиков того времени:

Для примера примем $\varphi\left(\frac{ydy}{dx}\right)$ равным $d\,\frac{ydy}{dx}$; мы найдем, что уравнение кривой будет $y=(a+x)\,c$; c — постоянная, введенная интегрированием, и, подставляя это значение y в первоначальное функциональное уравнение, мы найдем $c=0$, так что $y=(a+x)\,0$.

Предположим, что a бесконечно и равно $\frac{b}{c}$; тогда

$$y=\left(\frac{b}{c}+x\right)c=b+cx=b,$$

так как $c=0$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox, которая действительно удовлетворяет условиям задачи.

Если мы положим $\varphi\left(\frac{ydy}{dx}\right)=a^2$ (=const), то получим $x = c\sqrt{y^2-a^2}$. Подстановка этого значения в первоначальное уравнение дает для определения c уравнение $c^2(c^2+1)=0$, откуда $c=0$ и $c=\pm\sqrt{-1}$; используя это последнее значение, мы имеем

$$x=\sqrt{-1}\times\sqrt{y^2-a^2}=\sqrt{a^2-y^2};$$

последнее есть уравнение окружности, и очевидно, что эта кривая удовлетворяет поставленному условию ([8], с. 255).

В конце работы Бэббедж указывает на целесообразность дальнейшего изучения систем функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями и проблемы их исключения, справедливо полагая, что это изучение могло бы оказаться весьма полезным при решении дифференциальных уравнений с частными производными. Кроме того, он считает возможным разработку теории экстремумов в функциональном исчислении с использованием понятия вариации и методов, аналогичных методам вариационного исчисления.

4

Опубликованная в 1817 г. (доложена 17 апреля 1817 г.) очередная работа Ч. Бэббеджа носит название «Замечания об аналогии, существующей между функциональным исчислением и другими ветвями анализа» [12]. По существу в ней нет конкретных результатов, а есть лишь отдельные примеры аналогий в задачах, относящихся к переменным или к функциям.

Речь идет о построении аппарата «функционального исчисления»; мы бы сказали сейчас — «функционального анализа», но этот термин уже занят и имеет иной смысл. Впрочем, последнее утверждение не совсем правильно; термин «функциональный анализ» возник именно таким путем, как название исчисления, в котором обычные переменные величины были замещены функциями; просто смысл и содержание «математического анализа переменных величин» в последние годы XIX в. понимались уже совсем не так, как в начальные. Кроме того, как мы уже указывали, Бэббедж всегда считал центральной операционно-вычислительную сторону понятия функции.

Рассуждения Бэббеджа о роли аналогий в математике весьма любопытны и современны. Например, в начале этой статьи он пишет:

В настоящей работе я намереваюсь предложить Королевскому обществу несколько замечаний относительно использования рассуждений по аналогии в математике и иллюстрировать это некоторыми поразительными фактами, которые встречаются, если сравнивать функциональное исчисление с другими видами исчислений, которые давно известны математикам. Использование такого инструмента, быть может, покажется неожиданным для тех, кто привык рассматривать эту науку как основанную больше всего на строгих доказательствах и может вообразить, что неясности и ошибки, которые *аналогия* [6], если ее неумело использовать, иногда вводит в иную науку, могут быть перенесены в эту.

Тем не менее только как указатель пути к открытию аналогия может быть использована, и для этой цели она замечательно приспособлена ([12], с. 197).

[6] Курсив Бэббеджа.

Далее Бэббедж приводит примеры следующих аналогий. В анализе встречается дробь $\frac{a^x - b^x}{x}$, которая теряет смысл при $x=0$. Однако эта дробь при $x \to 0$ «принимает хорошо известное действительное значение $\log \frac{a}{b}$» ([12], с. 198). В функциональном исчислении можно рассматривать дробь $\frac{\psi x - \psi \frac{1}{x}}{\psi x}$, которая имеет смысл для любой функции ψx и обращается в выражение $\frac{0}{0}$ при $\psi x = 0$. Значение этой дроби при $\psi x = 0$ можно получить так.

Пусть φx — произвольная функция, отличная от нуля; предположим, что ψx можно представить в виде $\psi x = v\varphi x + v^2 \varphi_1 x + \ldots$, откуда следует, что $\psi x = 0$ при $v = 0$. Тогда

$$\psi \frac{1}{x} = v\varphi \frac{1}{x} + v^2 \varphi_1 \frac{1}{x} + \ldots$$

Подставляя эти значения ψx и $\psi \frac{1}{x}$ в интересующую нас дробь, сократив на v и полагая затем $v = 0$, получим $\frac{\psi x - \psi \frac{1}{x}}{\varphi x} = \frac{\varphi x - \varphi \frac{1}{x}}{\varphi x}$, что и дает значение первоначального неопределенного выражения при $\psi x = 0$.

В качестве еще одного примера раскрытия неопределенностей в функциональном исчислении приводится дробь $\frac{f_1 x - fxf_1 \alpha x}{1 - fxf\alpha x}$, которая становится неопределенной для функций, удовлетворяющих уравнениям $fxf\alpha x = 1$ и $fxf_1 \alpha x = f_1 x$. Такие дроби могут возникать при решении функциональных уравнений; например, уравнение $\psi x + fx\psi \alpha x = f_1 x$ имеет решение $\psi x = \frac{f_1 x - fxf_1 \alpha x}{1 - fxf\alpha x}$.

Еще одной, заслуживающей быть отмеченной, аналогией, на которую обратил внимание Бэббедж, является аналогия между корнями из единицы в общей алгебре и решениями уравнения $\psi^n x = x$ в функциональном исчислении. Для уравнения $r^n = 1$, если число r_1 является корнем этого уравнения, то все степени $r_1, r_1^2, r_1^3, \ldots, r_1^{n-1}$ также удовлетворяют этому уравнению. Более того, корень r_1

может быть примитивным, и тогда все его степени дают *все* корни этого уравнения.

Для функционального уравнения $\psi^n x = x$ если αx удовлетворяет этому уравнению, то ему удовлетворяют также и все функции вида αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$, . . ., $\alpha^{n-1} x$. Бэббедж высказывает надежду, что отмеченная аналогия позволит пролить свет на проблему общего решения функционального уравнения.

Затем Бэббедж указывает на такую аналогию. Для линейных дифференциальных уравнений Эйлер и Даламбер указали прием, с помощью которого решение неоднородного уравнения («с свободным членом») сводится к решению однородного. Этот же прием использовался им при решении функциональных уравнений, например, при сведении уравнения $\psi x = Ax \times \psi \alpha x + Bx$ к уравнению вида $\psi x = Ax \times \psi \alpha x$ (см. [7] и раздел II нашей статьи).

Для функциональных уравнений первого порядка, содержащих функции от двух независимых переменных (см. III и [8]), можно построить классификацию возможных решений, вполне аналогичную различению полного, общего и особого интегралов для дифференциального уравнения первого порядка в частных производных по двум аргументам.

Последнее замечание автора статьи [12] касается применения к функциональным уравнениям аналога метода интегрирующего множителя.

Рассмотрим простое функциональное уравнение первого порядка $\psi x + fx\psi\alpha x = f_1 x$, где $\alpha^2 x = x$; умножим его на множитель φx, который следует попытаться подобрать так, чтобы полученное вновь уравнение было симметрично относительно ψx и $\psi \alpha x$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $\varphi x = f\alpha x \varphi \alpha x$ и $fx f\alpha x = 1$. В этом случае мы получаем $\varphi x = \frac{1}{\sqrt{fx}}$, так что первоначальное уравнение приведется к виду

$$\frac{\psi x}{\sqrt{fx}} + \sqrt{fx}\,\psi\alpha x = \frac{\psi x}{\sqrt{fx}} + \frac{\psi \alpha x}{\sqrt{f\alpha x}} = \frac{f_1 x}{\sqrt{fx}}.$$

Вводя новую искомую функцию $\chi x = \frac{\psi x}{\sqrt{fx}}$, приходим к функциональному уравнению уже известного вида $\chi x + \chi \alpha x = f_2 x$. Этот метод приложим к уравнениям первого порядка, но, «вероятно, приложим также с некоторыми модификациями и к уравнениям высших порядков» ([12], с. 214).

В заключение Бэббедж выражает надежду, что эти — а также и многие другие — аналогии между общей алгеброй, интегральным исчислением и дифференциальными уравнениями, с одной стороны, и функциональным исчислением, с другой, позволят исследователям далеко продвинуть развитие функционального исчисления.

5

Следующей работой Бэббеджа в области математики является мемуар «О некоторых новых методах исследования сумм нескольких классов бесконечных рядов» ([13]), доложенный в Лондонском королевском обществе 1 апреля 1819 г.

Работа посвящена нахождению конечных выражений для сумм некоторых рядов, содержащих степени синусов и косинусов кратных аргументов. Бэббедж указывает, что результаты были получены им несколько лет назад, но он не публиковал их, так как некоторые из полученных тогда выражений были явно ошибочны. Метод же, который он излагает в настоящей работе, предлагая назвать его *методом горизонтального разложения и вертикального суммирования*, приводит к верным результатам при соблюдении некоторых указываемых им дополнительных условий.

По существу речь идет здесь о формальных преобразованиях степенных рядов в более сложные и почленном интегрировании их, без каких-либо предположений относительно их сходимости.

Вот как получаются исходные формулы первой части работы:

Пусть теперь требуется исследовать суммы рядов

$$\frac{A_1 x}{(\sin\theta)^n} + \frac{A_2 x^2}{(\sin 2\theta)^n} + \frac{A_3 x^3}{(\sin 3\theta)^n} + \ldots$$

Положим $\psi x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ Заменим здесь x на v^{2z}; тогда получим

$$\psi v^{2z} = A_1 v^{2z} + A_2 v^{4z} + A_3 v^{6z} + \ldots$$

Интегрируем [7] обе части, замечая, что $\sum v^{2iz} = \frac{v^{2z}}{v^2 - 1}$; тогда

[7] На самом деле здесь выполняется не интегрирование, а такая операция: $2z$ заменяется последовательно на $2iz$, а затем производится почленное суммирование всех рядов по $i = 1, 2, \ldots$

получим

$$\sum \psi v^{2z} = A_1 \frac{v^{2z}}{v^2-1} + A_2 \frac{v^{4z}}{v^4-1} + A_3 \frac{v^{6z}}{v^6-1} + \ldots$$

Повторяя интегрирование[8] n раз, находим

$$\sum^n \psi v^{2z} = A_1 \frac{v^{2z}}{(v^2-1)^n} + A_2 \frac{v^{4z}}{(v^4-1)^n} + A_3 \frac{v^{6z}}{(v^6-1)^n} + \ldots$$

Примем $v=\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta$; тогда получим уравнение[9]

$$(2\sqrt{-1})^n \sum^n \psi v^{2z} = A_1 \frac{v^{2z-n}}{(\sin\theta)^n} + A_2 \frac{v^{4z-2n}}{(\sin 2\theta)^n} + A_3 \frac{v^{6z-3n}}{(\sin 3\theta)^n} + \ldots$$

Заменим в последнем уравнении z на $z+\frac{n}{2}$ и получим

$$(2\sqrt{-1})^n \sum^n \psi v^{2z+n} = A_1 \frac{v^{2z}}{(\sin\theta)^n} + A_2 \frac{v^{4z}}{(\sin 2\theta)^n} + A_3 \frac{v^{6z}}{(\sin 3\theta)_n} + \ldots = A_1 \frac{x}{(\sin\theta)^n} + A_2 \frac{x^2}{(\sin 2\theta)^n} + A_3 \frac{x^3}{(\sin 3\theta)^n} + \ldots \qquad (1)$$

Если после интегрирования заменить v на v^{-1} и затем положить $v=\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta$, то мы получим

$$(-2\sqrt{-1})^n \sum^n \psi v^{-2z-n} = A_1 \frac{v^{-2z}}{(\sin\theta)^n} + A_2 \frac{v^{-4z}}{(\sin 2\theta)^n} + A_3 \frac{v^{-6z}}{(\sin 3\theta)^n} + \ldots = A_1 \frac{x^{-1}}{(\sin\theta)^n} + A_2 \frac{x^{-2}}{(\sin 2\theta)^n} + A_3 \frac{x^{-3}}{(\sin 3\theta)^n} + \ldots \qquad (2)$$

([13], с. 253—254).

Комбинируя ряды (1) и (2) при некоторых конкретных значениях A_i, Бэббедж получает различные соотношения, например:

$$\frac{\log x}{\theta} = \frac{x-x^{-1}}{\sin\theta} - \frac{x^2-x^{-2}}{\sin 2\theta} + \frac{x^3-x^{-3}}{\sin 3\theta} - \ldots,$$

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} - \frac{\sin 2\theta'}{\sin 2\theta} + \frac{\sin 3\theta'}{\sin 3\theta} - \ldots,$$

$$\frac{\pi\log x}{2\theta} = \frac{x-x^{-1}}{1-\sin\theta} - \frac{x-x^{-3}}{3\cdot\sin 3\theta} + \frac{x-x^{-5}}{5\cdot\sin 5\theta} - \ldots$$

[8] См. предыдущее примечание.

[9] Легко проверить, что $v^{2k}-1=2\sqrt{-1}\,v^k\sin k\theta$ $(k=1, 2, \ldots)$.

При этом неоднократно используются некоторые расходящиеся числовые ряды, встречающиеся еще у Эйлера; например, *для определения произвольной постоянной* b в одном из рядов автор пишет: «$1+b\sqrt{-1}=2-2+2-2+\ldots=1$, откуда вытекает $b=0$» ([13], с. 260—261).

Общий принцип горизонтального разложения и вертикального суммирования формулируется в работе следующим образом: «Эти ухищрения являются лишь частными случаями гораздо более общего принципа, используемого для отыскания значений переменных, для которых ряд допускает суммирование, тогда как, вообще говоря, он невыразим в конечном виде ([13], с. 266). Этот принцип описывается следующим образом. Пусть K означает некоторую операцию, такую, как интегрирование, или соответственно дифференцирование, или взятие конечных разностей, или любую другую операцию, удовлетворяющую только условию $K(X+Y)=KX+KY$. Пусть тогда $K\,\Psi x=A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\ldots$

Заменим последовательно x на $\alpha x, \alpha^2 x, \ldots, \alpha^{n-1}x$:

$$K\psi\alpha x = A_1\alpha x + A_2\alpha x^2 + A_3\alpha x^3 + \ldots,$$
$$K\psi\alpha^2 x = A_1\alpha^2 x + A_2\alpha^2 x^2 + A_3\alpha^2 x^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K\psi\alpha^{n-1}x = A_1\alpha^{n-1}x + A_2\alpha^{n-1}x^2 + A_3\alpha^{n-1}x^3 + \ldots$$

Складывая все это вместе, получим $K\{\psi x+\psi\alpha x+\psi\alpha^2 x+\ldots+\psi\alpha^{n-1}x\}$ равным ряду, общий член которого есть[10] $A_n\{x^n+\alpha x^n+\alpha^2 x^n+\ldots+\alpha^{n-1}x^n\}$.

Предположим теперь, что операцию, обозначенную через K, над функцией ψ выполнить невозможно, но функция ψ такова, что $\psi x+\psi\alpha x+\psi\alpha^2 x+\ldots+\psi\alpha^{n-1}x$ представляет функцию, над которой операция K оказывается уже выполнимой; тогда, обозначив эту новую функцию через ψ_1, будем иметь[11]

$$K\psi_1 x = SA_i\{x^i+\alpha x^i+\ldots+\alpha^{n-1}x^i\}.$$

Если α — такая функция, что $\alpha^n x=x$, то можно достаточно сильно изменять ψ, чтобы она удовлетворяла этим условиям. Пусть теперь x определяется уравнением $x=\alpha x$

[10] В подлиннике опечатка: опущены все показатели степени n внутри скобки.

[11] Буквой S Бэббедж обозначает суммирование по $i=1, 2, \ldots$

и r — корень этого уравнения, так что $r = \alpha r = \alpha^2 r = \ldots$ $\ldots = \alpha^{n-1} r$. Тогда получается равенство

$$K\psi_1 x = nSA_i r^i = n\{A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots\},$$

обеспечивающее выполнимость операции K для x, равного r; тем самым найдено значение ряда $A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ для частных значений x, удовлетворяющих уравнению $\alpha x = x$. ([13], с. 266—268).

Вторая часть этой работы Ч. Бэббеджа посвящена применению общего приема для некоторых частных задач при использовании «давно известных формул» для расходящихся рядов:

$$1^{2n} - 2^{2n} + 3^{2n} - 4^{2n} + \ldots = 1^{2n+1} - 3^{2n+1} + 5^{2n+1} - \ldots = 0,$$

$$\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \ldots = \frac{1}{2}.$$

Среди полученных результатов можно отметить, например, формулу

$$\int_0^1 \left\{\cos\frac{\theta\sqrt{-1}}{\pi}\log\frac{1}{v}\right\}^n dv = \int_0^1 \left(\frac{v^{\frac{\theta}{\pi}} + v^{-\frac{\theta}{\pi}}}{2}\right)^n dv =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{1 - n\frac{\theta}{\pi}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{1 + (2-n)\frac{\theta}{\pi}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{1 + (4-n)\frac{\theta}{\pi}} + \ldots\right\}.$$

Главным, однако, являются не полученные конкретные формулы, а указание условий, «при которых применение описанного метода не будет приводить к некорректным результатам» ([13], с. 271). По сути Бэббеджу приходится иметь дело с двойным рядом. Поэтому для нас ясен смысл одного из условий — метод будет приводить к правильным результатам, если обеспечить конечность горизонтальных рядов.

Интересно также следующее рассуждение. Пусть $f(x)$ разлагается в ряд по четным степеням x: $f(x) = A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots$ Тогда

$$\frac{f(x)}{x^{2k}} = \frac{A}{x^{2k}} + \frac{B}{x^{2k-2}} + \ldots + K + Lx^2 + Mx^4 + \ldots$$

Подставляя вместо x последовательно $2x$, $3x$, $4x, \ldots$ и суммируя получающиеся ряды почленно с переменными знаками, находим слева ряд

$$\frac{1}{x^{2k}}\left\{\frac{f(x)}{1^{2k}} - \frac{f(2x)}{2^k} + \frac{f(3x)}{3^k} - \frac{f(4x)}{4^k} + \ldots\right\}.$$

Ряды справа, соответствующие отрицательным степеням x, суммируются известным способом — их суммы выражаются через числа Бернулли и степени π. Все остальные ряды являются расходящимися. Для первого из них принимается безоговорочно

$$K - K + K - K + \ldots = \frac{1}{2}K.$$

Далее Бэббедж пишет:

Если мы обратимся к исследованию этого процесса, то можем заметить, что вертикальной колонкой Lx^2 $(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots)$ можно пренебречь, потому что входящий сюда множителем ряд равен нулю; по той же причине можно пренебречь и вертикальной колонкой $Mx^4(1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots)$ и аналогично для всех остальных вертикальных колонок. Теперь, хотя совершенно законно опустить одну или некоторое конечное число таких вертикальных колонок, которые умножаются на множитель, равный нулю, уже незаконно пренебрегать бесконечным количеством членов, каждый из которых умножается на нуль, без того, чтобы доказать, что сумма всех членов не умножается при этом на бесконечную величину: это есть возможная причина неверного результата, и я пришел к заключению, как заранее об этом узнать. Объясню теперь, как можно устранить возможность ошибочных выводов или, лучше, как определить условия справедливости теоремы. Мы рассматриваем ряды

$$Lx^2(1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots) + Mx^4(1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots) + Nx^6(1^6 - 2^6 + 3^6 - \ldots)$$

как равные нулю.

Один из этих рядов, умножающихся на степень x, можно представить как появляющийся из ряда

$$1^{2n}y - 2^{2n}y^2 + 3^{2n}y^3 - \ldots$$

Когда $y \neq 1$, назовем этот ряд $K_n(y)$ и вместо $y = 1$ подставим $y = 1 + 0$, что отличается от 1 на бесконечно малую величину 0; тогда будем иметь

$$K_n(1+0) = C_{1,n} + C_{2,n}0 + C_{3,n}0^2 + \ldots,$$

где

$$C_{1,n} = 1^{2n} - 2^{2n} + 3^{2n} - \ldots, \quad C_{2,n} = 1^{2n+1} - 2^{2n-1} + 3^{2n+1} - \ldots;$$

посредством подстановки значения K_n $(1+0)$ в игнорируемый ряд получим

$$\{Lx^2C_{1,1} + Mx^4C_{1,2} + Nx^6C_{1,3} + \ldots\} + 0\,\{Lx^2C_{2,1} + Mx^4C_{2,2} + Nx^6C_{2,3} + \ldots\} + 0^2\,\{Lx^2C_{3,1} + Mx^4C_{3,2} + Nx^6C_{3,3} + \ldots\} + \ldots$$

Наш следующий шаг должен состоять в установлении конечности или бесконечности рядов, составляющих строки ([13], с. 271—273).

Легко заметить, что использованный здесь Бэббеджем прием родствен методу суммирования расходящихся рядов, известному под названием метода суммирования Абеля — Пуассона. Поэтому особенно интересно упоминание в конце статьи о том, что автор обсуждал уже подготовленную к печати статью с С. Д. Пуассоном: «Этот джентльмен заметил, что несколько лет назад исследовал почти подобные ряды, пытаясь интегрировать уравнения движения планет» ([13], с. 281).

6

Остановимся еще на двух работах Ч. Бэббеджа, относящихся к функциональному исчислению и функциональным уравнениям. Одна из них — «О приложении функционального исчисления к открытию локальных теорем и поризмов» [11]. Она помечена июлем 1818 г., доложена на заседании эдинбургского Королевского общества 1 мая 1820 г. и напечатана в трудах этого Королевского общества в 1823 г. «Настоящая работа, — пишет автор, — представляет еще один пример многочисленных случаев скрытого родства между областями математики, рассматриваемыми обычно как наиболее удаленные» ([14], с. 337).

Бэббедж рассматривает «периодические кривые», определяемые следующим свойством. Берется точка на кривой с некоторой абсциссой. Затем строится вторая точка, абсцисса которой равна ординате первой точки. Этот процесс повторяется n раз и ордината последней точки

оказывается равной абсциссе первоначальной. Кривые, обладающие таким свойством, Бэббедж называет, следуя Гершелю, периодическими кривыми порядка n.

Задача отыскания уравнения этой кривой сводится к решению функционального уравнения $\psi^n x = x$, которое было рассмотрено Бэббеджем в одной из первых его работ (см. раздел 2 нашей статьи). Как показал Горнер в 1817 г., общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$\psi x = \varphi^{-1}\left\{\frac{a+bx}{C - \dfrac{b^2 - 2bc\cos\dfrac{k\pi}{n} + c^2}{2\left(1+\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)a}\,x}\right\}.$$

В частности, периодическая кривая второго порядка определяется следующим свойством: для любой пары точек кривой, если абсцисса второй точки равна ординате первой, то ордината второй точки равна абсциссе первой. Легко видеть, что таким свойством обладает, например, окружность $x^2+y^2=a^2$, а также равнобочная гипербола $xy=a$.

Далее ставится следующая геометрическая задача. «Пусть ABC — периодическая кривая второго порядка с уравнением $y=\alpha x$ и DB, EC — две соответствующие ординаты; ищется другая кривая AFG, для которой сумма ординат, проведенных в точках D и E, равна заданной постоянной» ([14], с. 341).

Легко видеть, что если $y=\psi x$ — уравнение искомой кривой, то функция ψ удовлетворяет функциональному уравнению $\psi x + \psi\alpha x = c$, общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi x = \frac{c\varphi x}{\varphi x + \varphi\alpha x},$$

где φ — произвольная функция.

Отсюда выводится следующий «поризм» [12]:

Пусть дана периодическая кривая второго порядка, принадлежащая описанному семейству; тогда можно всегда найти такую но-

[12] Судя по контексту ([14], с. 338, 341, 342 и др.), слово «поризм» употребляется Бэббеджем не в смысле софизма или противоречия, а в смысле «утверждение» или «геометрическое свойство».

вую кривую, что если взять две абсциссы, соответствующие относительно новой кривой и построить в них ординаты заданной, то при продолжении каждой из них вверх на величину, равную другой, концы ординат будут располагаться на прямой линии, параллельной оси абсцисс. Если продолжать каждую из построенных ординат вниз на величину, равную другой ординате, то концы продолженных ординат будут лежать на кривой, подобной, равной и параллельно расположенной относительно первоначально заданной ([14], с. 341—342).

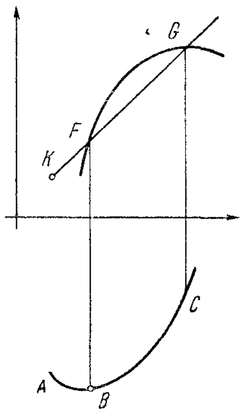

Рис. 3

Рассматривая конкретные функции αx, например $\alpha x=\sqrt{a^2-x^2}$ или $\alpha x=-x$, автор получает некоторые частные случаи этого утверждения. Аналогичным образом построены и остальные «поризмы».

Так, рассматривая семейство кривых, определяемых функциональным уравнением

$$\psi x=\frac{1}{\alpha x}\cdot\frac{c\,(x-\alpha x)\,\varphi x}{\varphi x+\varphi\alpha x},$$

Бэббедж выводит следующее геометрическое свойство:

Пусть дана некоторая кривая этого семейства; можно найти такую точку K, что если провести через нее по некоторому направлению прямую KG, пересекающую заданную кривую в двух точках (F и G), и ординаты в этих точках продлить ниже оси абсцисс до тех пор, пока отрезки от оси не сделаются равными абсциссам соответствующих точек пересечения, то точки, которые при этом получаются, принадлежат периодической кривой второго порядка (ABC) ([14], с. 345; см. рис. 3).

Как и раньше, для конкретных функций αx из этого общего утверждения выводятся интересные частные случаи. Например, для $\alpha x=\sqrt{a^2-x^2}$ получающаяся периодическая кривая второго порядка ABC будет окружностью.

Такого рода «поризмы» строятся далее и для некоторых других семейств кривых, определяемых функциональными уравнениями.

Еще одна его работа служит приложением к уже упоминавшейся книге Дж. Гершеля [6] и полностью посвящена функциональным уравнениям. О том, какой интерес

вызывали у математиков того времени работы Бэббеджа по функциональным уравнениям, можно судить, например, и по тому факту, что это приложение было подробно прореферировано вскоре после выхода книги (в 1821 г.) Ж. Жергоном [15] в томе 12 «Анналов чистой и прикладной математики», так что с этими работами могли после этого ознакомиться и французские математики.

Собственно, новых по сравнению с [7] результатов работа не содержит. Как и реферат Жергонна, она состоит из введения и трех параграфов. Введение начинается с геометрической задачи, приводящей к функциональному уравнению

$$a\psi\left[\frac{a\,(x-a)}{x}\right]-x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]=ax.$$

Далее приводится общее определение функционального уравнения и понятие периодической кривой (см. выше).

Периодическим кривым посвящен раздел 1. Здесь рассматриваются периодические кривые второго и третьего порядка, периодические кривые m-го порядка с уравнением вида $x^m+y^m=a^m$ и общий вид уравнения периодической кривой, выведенный Горнером [13], который приведен нами на с. 127.

Далее, в § 2 рассматривается функциональное уравнение вида $F\{x,\ \psi\ (x),\ \psi\ (fx)\}=0$, где ψ — искомая функция, а f — периодическая второго порядка в рассматриваемом смысле. Впрочем, фактически разбирается не уравнение общего вида, а несколько частных случаев для конкретных функций F, например уравнение $\psi\,(x)-a\psi\left(\frac{1}{x}\right)=e^x$. Решение таких уравнений получается с помощью общего вида решения функционального уравнения для периодических кривых.

Наконец, параграф 3 — «Случай, когда предыдущий метод неприменим», — содержит решение уравнений того же вида, но для других функций F, которые решаются без обращения к выражению Горнера. Здесь используются приемы, аналогичные применявшимся при решении задач I—VI работы [7] (см. раздел 2 нашей статьи).

[13] К сожалению, точная ссылка на статью У. Т. Горнера в [16] и [14] отсутствует.

9 Заказ № 998

7

Несколько небольших по объему работ Бэббеджа посвящены различным областям математики. Отметим в первую очередь работу «Доказательство теоремы относительно простых чисел» [16], опубликованную в «Эдинбургском философском журнале» и посвященную теории чисел. Здесь автор касается теории делимости. Подобно Варингу, построившему выражение, делящееся на n тогда и только тогда, когда n простое, Бэббедж строит аналогичное выражение для n^2. Именно он показывает, что выражение

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot 2^{n-1} - 1$$

делится на n^2 *в том и только в том случае, когда n простое* число.

Следующей идет трехстраничная «Заметка по поводу исключения» [17]. В ней автор указывает на класс систем уравнений, в которых исключение неизвестных облегчается благодаря их специальному виду.

Прежде всего автор рассматривает систему двух уравнений с двумя неизвестными вида $F\{x, y\}=0$ и $F\{y, x\}=0$ и пишет: «Так как первое из этих уравнений содержит x точно таким же образом, как второе содержит y, то. . . нет никаких оснований, чтобы x имело значение, отличное от y : мы можем, следовательно, предположить его равным y и. . . имеем $F\{x, x\}=0$, из которого мы находим некоторые значения x и также y . . .» ([17], с. 356).

Рассмотрев два примера таких систем, Бэббедж указывает, что этот прием может быть распространен на системы вида $F\{x, f(x, y)\}=0$, $F\{f(x, y), x\}=0$, приводя также пример решения такой системы.

История возникновения работы Бэббеджа «Об определении общего члена нового класса бесконечных рядов» [18], опубликованной в «Трудах Кембриджского философского общества», связана с его работой над разностной машиной. Вот как об этом пишет сам автор:

> Предмет исследования, к которому я приступаю в настоящей работе, имеет источник в обстоятельстве, которое, я полагаю, пока еще является единственным в истории математической науки, хотя

> здесь существует значительная вероятность, что оно не долго останется изолированным примером аналитического исследования, предполагающего и делающего необходимым прогресс машин, приспособленных для численных расчетов ([13], с. 259).

Далее Бэббедж пишет, что, работая над разностной машиной, он «заметил способ переделки, при котором вычисляемый ряд всегда имеет вторые разности равными числу единиц младшего разряда последнего вычисляемого члена ряда; другая форма машины делает первую, или третью, или вообще некоторую данную разность равной единицам младшего разряда последнего вычисляемого члена» ([13], с. 259). В рассматриваемой работе речь идет о нахождении выражения общего члена для такого ряда.

Легко видеть, что разность соответствующего порядка оказывается периодической. Бэббедж начинает с конкретного примера — с первой разности вида:

члены ряда	2	4	8	16	22	24	28	36	42	44	...
разности	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	...

и для него легко получает, что если номер n члена такого ряда представляется в виде $n=4v+i$ (v, i — натуральные, $0 \leqslant i \leqslant 3$), то общий член ряда u_n представляется в форме $u_n=20v+2^i$.

Этот пример фактически полностью описывает ряды, у которых **первые** разности равны соответствующим единицам последнего члена, так как при любом начальном члене разности через один-два шага выходят на ту же периодическую последовательность 2, 4, 8, 6. Исключение составляет только ряд, первый член которого оканчивается нулем или пятеркой: один имеет все члены совпадающими, другой — все, начиная со второго.

Если описанная зависимость определяет **вторую** разность, то период получается длины 10, но он так же универсален, как и в предыдущем случае. Поэтому и здесь можно ограничиться конкретным примером, что Бэббедж и делает.

В работе рассматривается и более сложный случай. Именно, пусть v означает число единиц последнего разряда в записи u_n; рассматривается ряд, разность которого определяется равенством $\Delta u_n=a \times v+b$, где a и b — фиксированные постоянные. Для такого ряда выводится разностное уравнение.

Еще одна небольшая заметка «Рассмотрение метода Эйлера для решения задачи о движении коня в шахматной игре» [19] посвящена задаче, типичной для современной дискретной математики.

Известна поставленная и решенная Л. Эйлером задача о нахождении движения коня по шахматной доске, при котором конь, двигаясь по обычным шахматным правилам, обходит всю доску, попадая в каждое поле ровно по одному разу, возвращаясь последним (64-м) ходом на первоначальное поле. Отказываясь сначала от последнего условия, т. е. допуская, чтобы последнее поле не было связано ходом коня с первоначальным, Бэббедж подробно рассматривает возможность и способы получения из такого пути другого, удовлетворяющего всем первоначальным условиям.

Задача отыскания всех возможных путей, удовлетворяющих условиям Эйлера, в принципе может быть решена методом полного перебора. Работа [19] дает — в современных нам терминах — эвристический метод сокращения перебора.

8

Особое место занимают работы Бэббеджа в области теории вероятностей и математической статистики. По большей части они посвящены конкретным прикладным задачам, так что их можно не считать математическими работами в узком смысле этого слова. Но некоторые из них носят чисто математический характер.

Мы хотим прежде всего остановиться на статье «Рассмотрение некоторых вопросов, связанных с играми, основанными на случае» [20], напечатанной в трудах эдинбургского Королевского общества. Хотя эта работа была доложена 21 марта 1820 г. и опубликована в 1823 г., можно полагать, что она имеет прямое отношение к разработке системы беспроигрышных ставок на бегах, чем Бэббедж занимался с 1844 г. совместно с супругами Лавлейс [14].

Автор ставит перед собой в этой работе скромные задачи: получить выражение для величины ставки (и для суммы выигрыша, если исходы последовательности игр известны) при различных стратегиях (Бэббедж не употреблял этого термина) игрока.

[14] Подробнее см. нашу статью «Августа Ада Лавлейс и возникновение программирования» в настоящей книге.

Самой простой и распространенной стратегией был *мартингал* — удвоение ставки при проигрыше очередной партии. Точнее говоря, пусть при некоторой игре с вероятностью выигрыша 0,5 ставка игрока равна $2u$. Тогда сумма выигрыша будет равна $2u\,(-1)^a$, где a — четное в случае выигрыша и нечетное в случае проигрыша, а следующая ставка $2u$ в случае выигрыша и $4u$ в случае проигрыша. Бэббедж предлагает записывать эту ставку в виде $2u \times 2^{\frac{1-(-1)^a}{2}}$, где a имеет указанный выше смысл.

Правда, при определении общего члена последовательности ставок Бэббедж ошибся. Так, для ставки в третьей партии он дает выражение

$$u\,\{2+[1-(-1)^b]+[1-(-1)^b]\,[1-(-1)^a]\}$$

([20], с. 158), где a и b определяются исходами первой и второй партий, как сказано выше. Легко проверить, что эта формула дает правильный результат во всех случаях, кроме одного: проигрыш в первой и выигрыш во второй партиях. Действительно, для этого случая $a=2k+1$, а $b=2k$, и формула Бэббеджа дает ставку $2u$, тогда как на самом деле ставка должна быть равна $4u$ вследствие удвоения после проигрыша первой партии. Правильная формула для ставки в третьей партии имеет вид

$$u\,\{2+[1-(-1)^a]+[1-(-1)^b]+\tfrac{1}{2}[1-(-1)^a]\,[1-(-1)^b]\}.$$

Впрочем, можно смело утверждать, что не эта ошибка была причиной неудачи при разработке упомянутой выше системы.

Из-за допущенной ошибки общее выражение для величины выигрыша для описанной стратегии, которое у Бэббеджа имеет вид $u\{1(-1)^b+2(-1)^c+3\,(-1)^d+\ldots)\}$ ([20], с. 159), оказывается справедливым не для всех возможных последовательностей известных результатов партий.

Вторая стратегия игрока, рассматриваемая автором, такова. Игрок начинает серию игр при вероятности выигрыша каждой партии 0,5 с начальной ставкой u. Если он выигрывает, то следующая ставка уменьшается на фиксированную величину v, если же случится проигрыш, то игрок увеличивает ставку на ту же величину v. Таким образом, ставка при второй партии будет $u+(-1)^a v$, где a имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае.

В отличие от первой стратегии при второй общая сумма выигрыша не зависит от последовательности распределения выигрышей и однозначно определяется общим числом выигранных и проигранных партий. Если число выигранных партий p, а проигранных q, то общий выигрыш игрока при такой стратегии равен

$$W = (p-q)u - v\frac{(p-q)^2-(p+q)}{2}$$

([20], с. 161).

Игру с постоянной ставкой можно рассматривать как некий аналог схемы независимых испытаний Бернулли, в которой вероятность наступления события в последовательности испытаний сохраняется независимо от исхода каждого испытания. Аналогичным образом можно сопоставить две описанные выше стратегии с простой цепью Маркова, в которой вероятность наступления события при k-м испытании однозначно определяется результатом $(k-1)$-го испытания. Дальнейшие рассматриваемые Бэббеджем стратегии можно сравнить с более сложными цепями «с предысторией», где вероятность наступления события при данном испытании меняется в зависимости от результатов нескольких предыдущих.

Третья стратегия в [20] определяет ставку в зависимости от результатов двух последовательных партий. Именно если из двух последовательных партий одна оказывается выигранной, а другая проигранной, то ставка сохраняется. Если игрок выигрывает две партии подряд, то он уменьшает ставку на величину v, если же две партии подряд оказываются проигранными, то ставка увеличивается на ту же величину v. В первых двух партиях ставка предполагается одинаковой; ее величина по-прежнему обозначается через u.

Ставка в третьей партии при этой стратегии равна

$$u - v\left(\frac{(-1)^a+(-1)^b}{2}\right)$$

([20], с. 164). Для этой стратегии, кроме числа выигранных и проигранных партий, имеет значение еще и число «переходов», которые определяются так. Запишем игру в виде последовательности знаков + или —, обозначив знаком + каждую выигранную и знаком — каждую проигранную партию. «Переходом» назовем каждую смену знака в этой последовательности.

Пусть в данной игре p партий выиграно, q проиграно, и число переходов равно k. Тогда общая сумма выигрыша при рассматриваемой стратегии равна

$$W = (p-q)u - \frac{v}{2}[(p-q)^2 - 2(p+q) + 2k + 2 - (-1)^a(p-q)],$$

где a определяется результатом первой партии. При $p=q$ результат первой партии не влияет на величину выигрыша, который будет равен $W_1 = v(2p-k-1)$.

Ч. Бэббедж рассматривает еще три, более сложные, стратегии. Первая из них определяется результатами трех последовательных партий. Именно, при трех выигрышах подряд первоначальная ставка u уменьшается на величину v, а при трех проигрышах увеличивается на v. Если же исходы в трех партиях различны, то при двух выигрышах ставка уменьшается на $v/_3$, а при двух проигрышах увеличивается на $^v/_3$. Таким образом, ставка u по результатам трех предыдущих партий превращается в

$$u - v\frac{(-1)^a+(-1)^b+(-1)^c}{3}.$$

Две последние стратегии более сложны, и мы не станем останавливаться на их рассмотрении.

Еще одна работа Бэббеджа по теории вероятностей представляет собой приложение к его религиозно-философскому «Девятому бриджуотеровскому трактату» и носит название «Замечание об аргументе Юма относительно чудес» [21]. Если основываться на используемой автором терминологии, то эту работу можно рассматривать как курьез: здесь подсчитывается вероятность или невероятность (дополнение вероятности до единицы) чудес, исходя из данных свидетельских показаний, причем учитывается количество свидетелей и их надежность (вероятность того, что они говорят правду).

Однако если отвлечься от чудес и воскрешения из мертвых (которое, кстати сказать, автор после своих расчетов полагает невероятным) и воспользоваться современной терминологией, то можно заметить, что Бэббедж отдельно подсчитывает две различные вероятности: вероятность принять статистическую гипотезу в том случае, когда она неверна, и отклонить ее, когда она верна.

Мы не можем утверждать, что Бэббедж был первым, кто заметил различие этих ситуаций, но, во всяком случае, из [21] ясно, что уже он умел четко различать их.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babbage C.* Passages from the life of a philosopher. London, 1864.
2. *Bowden B. V.* Brief history of computation. — In: Faster than thought. London, 1953.
3. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., 1960.
4. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1964.
5. *Babbage C.* On continued products. — In: Memoires of the Analytical Society. Cambridge, 1813.
6. *Herschel J. F. W.* A collection of examples of the application of the calculus of finite differences. Cambridge, 1820.
7. *Babbage C.* An essay towards the calculus of functions. — Philos. Trans., 1815, vol. 105.
8. *Babbage C.* An essay towards the calculus of functions, part 2. — Philos. Trans., 1816, vol. 106.
9. *Arbogast L. F. A.* Du calcul des dérivations. Strasbourg, 1800.
10. *Ливенцов А. И.* Опыт систематического изложения функционального счисления с одним независимым переменным. — Математический сборник, 1876, т. VIII, вып. 1.
11. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968.
12. *Babbage C.* Observations on the analogy which subsists between the calculus of functions and other branches of analysis. — Philos. Trans., 1817, vol. 107.
13. *Babbage C.* On some new methods of the investigating of several classes of infinite series. — Philos., Trans, 1819, vol. 109.
14. *Babbage C.* On the application of analysis to the discovery of local theorems and porisms. — Trans., Roy. Soc. Edinburgh, 1820, vol. IX.
15. *Gergonne J. D.* Des équations fonctionnelles. — Ann. math. pure et appl., 1821, vol. XII.
16. *Babbage C.* Demonstration of a theorem relating to prime numbers. — Edinburgh Philos. J., 1819, vol. 1.
17. *Babbage C.* Note respecting elimination. — J. Sci. and Art, 1817, vol. 1.
18. *Babbage C.* On the determination of the general term of a new class of infinite series. — Trans. Cambridge Philos. Soc., 1827, vol. 2.
19. *Babbage C.* An account of Euler's method of solving a problem relating to the knight's move at chess. — J. Sci. and Art, 1817, vol. 1.
20. *Babbage C.* An examination of some questions connected with games of chance. — Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1823, vol. IX.
21. *Babbage C.* The ninth Bridgewater treatise. Note to chapter X: On Hume's argument miracles. London, 1838.

РУССКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Г. Н. Поваров, А. Е. Петров

Строительство логических машин — интересная глава истории логики и кибернетики. В ней запечатлены первые проекты создания искусственного разума и первые споры о возможности этого, Такие машины строились и в нашей стране. В заметке В. А. Велигжанина и Г. Н. Поварова [1] рассказывалось о несправедливо забытых работах русских ученых П. Д. Хрущова и А. Н. Щукарева. Эта заметка, однако, оставляла ряд вопросов открытыми. Ныне благодаря откликам читателей и дальнейшим поискам источников нам удалось восполнить некоторые пробелы. Особенно ценные сведения сообщила кандидат химических наук Л. А. Щукарева, дочь А. Н. Щукарева. Обнаружены также упоминания, впрочем беглые и требующие проверки, о других подобных машинах. Собранный материал излагается в настоящей статье.

Кратко о предшествующих событиях. Идея логической машины появилась в XIII в., у испанского схоластика Раймунда Луллия, рассматривалась затем Лейбницем и получила новое развитие в XIX в., после возникновения математической логики. В 1870 г. английский философ и экономист Вильям Стэнли Джевонс (1835—1882) построил в Манчестере «логическое пианино», которое извлекало из алгебраически записанных посылок следствия, выделяя допустимые комбинации терминов. Это называют также разложением высказываний на конституэнты. Опыт — скромный, но обещающий, привлекший внимание к проблеме механического рассуждения. Книга Джевонса «Основы науки» с описанием его машины была переведена на русский язык в 1881 г. ([2], см. также [3],[4]). Перевод выполнил известный философ, литературный критик и пропагандист естественных наук М. А. Антонович (1835—1918).

Конец XIX и начало XX в. — эпоха расцвета русской логики, быстро развивавшейся и легко воспринимавшей новые идеи. Необычное изобретение Джевонса возбудило интерес наших исследователей мышления и послужило образцом для нескольких отечественных логических приборов.

В 1893 г. профессор математики Новороссийского университета в Одессе[1] И. В. Слешинский опубликовал статью о машине Джевонса [5]. Иван Владиславович Слешинский (Jan Śleszyński, в другом написании Sleszyński, 1854—1931) — польский ученый, долгое время живший в России; о нем см. [6], [7]. Он родился в с. Лысенке Киевской губернии, учился в Новороссийском университете, затем стал его приват-доцентом (1883) и профессором (1893). Математический подход к мышлению нашел в Слешинском горячего сторонника. В 1909 г. он перевел на русский язык «Алгебру логики» Луи Кутюра, снабдив ее своими прибавлениями [8]. Эта книга много лет была одним из основных учебников математической логики. В 1911 г. Слешинский переселился в Краков, где преподавал в Ягеллонском университете. В 1925—1929 гг. там были напечатаны на польском языке его лекции по теории доказательства, в обработке С. К. Зарембы [9]; это весьма интересный и изящный курс, рисующий историческое развитие логической науки.

Упомянутая выше статья [5] представляет собою сообщение, читанное 24 сентября 1893 г. на заседании математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. Она содержит ссылки на английское издание «Основ науки» 1892 г. и дает подробное объяснение работы логической машины. Джевонсу и его машине посвящена также одна из глав второго тома лекций [9].

Строителями логических машин стали Павел Дмитриевич Хрущов (1849—1909) и Александр Николаевич Щукарев (1864—1936) — видные физико-химики, внесшие ценный вклад в науку о веществах [10]—[14]. Это были люди широких интересов, придававшие большое значение методологическим вопросам. Впрочем, математическая логика как новое орудие дедукции привлекла внимание целого ряда наших физиков и химиков.

[1] Ныне этот университет называется Одесским и носит имя И. И. Мечникова.

П. Д. Хрущов[2] родился в Петербурге. Он происходил из старинного и богатого дворянского рода. Его отец в царствование Александра II был товарищем министра государственных имуществ и участвовал в подготовке крестьянской реформы. Сын же еще в молодости увлекся наукой и отказался от службы. Хрущов учился в Петербурге, Дерпте и Лейпциге, работал в зарубежных химических лабораториях, а по возвращении в Россию устроил собственную лабораторию в своем имении Карасевка, под Харьковом. В этой лаборатории им и его сотрудниками были выполнены многочисленные исследования. Он был известен также как земский деятель.

В 1889 г. Харьковский университет присвоил Хрущову honoris causa степень доктора химии и признал его в звании приват-доцента. В 90-х годах он прочитал в этом университете несколько специальных курсов. Из них отметим последний: «Общие методы физических наук» (осень 1897 г.); по свидетельству проф. В. Ф. Тимофеева ([10], с. 27) в нем рассматривались — наряду с учением об опыте и измерении — теории мышления и элементы логики. Большинство слушателей составляли профессора и лаборанты. Павел Дмитриевич готовил рукопись к печати, но не успел привести ее в порядок. В 1903 г. Московский университет пригласил Хрущова организовать электрохимическую лабораторию. Ученый взялся за дело и даже начал чтение лекций по своему предмету, но смерть дочери и резкое ухудшение здоровья заставили его осенью 1904 г. вернуться домой.

А. Н. Щукарев родился в Москве, в семье мелкого служащего. По окончании Московского университета он преподавал в средних учебных заведениях и работал сверхштатным лаборантом в лаборатории проф. В. Ф. Лугинина. В 1906 г. Щукарев защитил магистерскую диссертацию и стал приват-доцентом, а в 1909 г. защитил докторскую диссертацию. В 1911 г. он был избран профессором Харьковского технологического института и с тех пор жил на Украине. После реорганизации этого института в 1930 г. состоял профессором Харьковского химико-технологического института[3]; в 1931 г. ушел

[2] Встречается также написание «Хрущев».

[3] Харьковский технологический институт, основанный в 1885 г. и получивший в 1923 г. имя В. И. Ленина, был разделен в 1930 г. на отраслевые институты: механико-машиностроительный,

на пенсию и затем был консультантом ряда научно-исследовательских учреждений.

Кроме химии — своего главного дела, Щукарев занимался логикой и методологией науки. Ему принадлежит несколько статей по этим вопросам и книга «Проблемы теории познания в их приложениях к вопросам естествознания и в разработке его методами» [15], написанная на основе публичных лекций, которые он читал в Москве в 1905—1907 гг. и позже в Харькове. Эта книга была выпущена в 1913 г. в Одессе известным научным издательством «Mathesis» [4]. Энтузиаст точных методов, Щукарев везде стремился трактовать предметы математически [5].

Память о логических машинах, сконструированных русскими учеными, сохранилась плохо, и поиски материалов были сопряжены с трудностями. Предыдущая публикация [1] опиралась главным образом на скупые указания в названной книге [15] и на популярный очерк А. Н. Сокова в журнале «Вокруг света» о лекции, которую прочитал Щукарев в 1914 г. в Московском политехническом музее [17]. О том, что он делал с машиной дальше, не было никаких известий. Теперь мы можем также воспользоваться другими материалами, в том числе статьей ученого [18], его рукописью, находящейся в Государственной библиотеке СССР им. В. И. Ленина [19] [6], и полемической статьей выступившего против него И. Е. Орлова [20]. Эти источники показывают, что А. Н. Щукарев продолжал свои работы в советское время и что они вызвали любопытную дискуссию, предваряющую в некотором роде позднейшие кибернетические споры.

Мы узнали кое-что новое и о машине П. Д. Хрущова, но в обстоятельствах ее создания еще остается много неясного. Ее рисунки и краткое описание приведены в книге Щукарева ([15], с. 49—53). В сборнике, посвященном памяти усопшего исследователя, о машине нет ни слова ([10], см. также [11]). Александр Николаевич, приехав

химико-технологический и др. В 1949 г. восстановлен как Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина.

[4] На титульном листе Щукарев ошибочно назван профессором Харьковского университета. В том же издательстве вышла ранее «Алгебра логики» Кутюра.

[5] См. также его статьи в сборнике [16], одна из которых посвящена количественному исследованию общественных явлений.

[6] На эту рукопись нам указала Л. А. Щукарева.

в 1911 г. в Харьков, нашел ее в университете, куда она, по-видимому, попала вместе с приборами карасевской лаборатории. Как сообщает В. Ф. Тимофеев ([10], с. 28), после смерти владельца вдова передала эти приборы кафедре неорганической и физической химии.

Интерес Хрущова к логическим проблемам засвидетельствован курсом 1897 г., но о времени постройки машины можно только делать догадки, В заметке [1] было высказано предположение, что это произошло где-то в 1890—1900 гг. Однако в статье Щукарева [18] утверждается, что Хрущов построил машину в Москве, а это побуждает думать скорее о 900-х годах. Возможно, Павел Дмитриевич хотел также читать в Московском университете лекции по методологии и обсуждать в них идеи Джевонса. В таком случае кажется вероятным, что Щукарев узнал о приборе своего коллеги еще в это время, до переезда в Харьков; Александр Николаевич был связан с университетом и сам занимался теорией мышления.

Еще одно упоминание о конструкторской деятельности Хрущова мы нашли у видного логика С. И. Поварнина (1870—1952), в книге, изданной в 1917 г. [21]. Поварнин был тогда приват-доцентом Петроградского университета [7]. Говоря о машине Джевонса, он указывает в примечании: «Один экземпляр этой машины, построенный умершим уже П. Д. Хрущовым, имеется в Харьковском университете. Насколько мне известно, это единственный экземпляр, имеющийся в России» ([21], с. 103). Имя Щукарева не названо, что несколько удивляет, но, может быть, Поварнин отождествлял его машину с хрущовской.

Впрочем, об этих опытах знали, вероятно, лишь немногие. Философ К. Ф. Жаков (1866—1926) посвятил логической машине целую главу своей книги [22], но назвал в ней только имена Луллия и Джевонса. Это было в 1912 г.

Машина Хрущова представляет собою высокий ящик с клавиатурой для набора посылок и заключенными внутри штангами, которые показывают в прорезях ящика возможные комбинации терминов. Каждая посылка вводится в машину отдельно. На левом ряду клавиш набирается подлежащее, на правом — сказуемое. Как и у

[7] Напомним, что в начале войны столица была переименована.

Джевонса, предложение «X есть Y» записывается в виде равенства $X=XY$ («X есть X и Y»). Это соответствует логическому неравенству (включению) $X \leqslant Y$ у других авторов.

Посылки могут содержать четыре термина. Положительные понятия обозначаются большими буквами (A, B, C, D), отрицательные — соответствующими малыми (a, b, c, d). Дозволяется сложение понятий (разделительные суждения). Каждая посылка исключает определенные комбинации (если $X=XY$, то $Xy=0$). После набора посылок штанги с исключенными комбинациями поднимаются и в прорезях остаются допустимые, согласные с условиями.

Например, предложения «Железо есть металл» и «Металл есть элемент» записываются в виде $A=AB$ и $B=BC$, если обозначить железо через A, металл — через B и элемент — через C. Из 16 возможных комбинаций четырех терминов несовместимы с этими условиями восемь:

$$ABcD, \quad ABcd, \quad AbCD, \quad AbCd,$$
$$AbcD, \quad Abcd, \quad aBcD, \quad aBcd.$$

Остается восемь допустимых комбинаций:

$$ABCD, \quad ABCd, \quad aBCD, \quad aBCd,$$
$$abCD, \quad abCd, \quad abcD, \quad abcd.$$

Отбрасывая лишнюю здесь четвертую букву, получаем заключения: «Железо есть металл и элемент ($A=ABC$)»; «Нежелезо есть или металл, или неметалл; или элемент, или неэлемент ($a=aBC+abC+abc$)»; «Металл есть элемент ($B=ABC+aBC$), но неметалл может быть элементом или неэлементом ($b=abC+abc$)». Действительно, A есть сумма четырех комбинаций ABC, ABc, AbC, Abc, но три из них пусты; и т. д.

А. Н. Щукарев использовал прибор Хрущова, а затем построил свой собственный. Позже он писал об этом:

> Машина Дживонса [8] была воспроизведена у нас в России один раз в Петрограде, один раз в Одессе (по сообщенным мне сведениям) и один раз в Москве покойным проф. Хрущовым. Один экземпляр ее мне удалось получить «в наследство» в Харькове, где он, после соответствующей репарации, и был мною демонстрирован. Этот экземпляр описан мною в моей книге «Проблемы теории познания» («Mathesis», 1912). Под влиянием этой демонстрации, повторенной по настоянию публики почти 10 раз, я сделал попытку построить несколько видоизмененный экземпляр, введя в конструкцию Дживонса некоторые усовершенствования. Усовершенствования эти, впрочем, были не принципиального характера. Я просто придал инструменту несколько меньшие размеры, сделал его весь из металла и устранил кое-какие конструктивные дефекты, которых в приборе Дживонса, надо сознаться, было довольно порядочно. Некоторым дальнейшим шагом вперед было присоединение к инструменту особого светового экрана, на котором передается работа машины и на котором результаты «мышления» появляются не в условно-буквенной форме, как на самой машине Дживонса, а в обыкновенной словесной форме ([18], с. 826—827).

Слова о постройке машины в Петрограде и Одессе привлекают внимание, но они нуждаются в проверке. Других сведений об этом мы не имеем. Можно попытаться связать одесский экземпляр с деятельностью И. В. Слешинского, но последний только пересказывает Джевонса и не говорит ничего о новых опытах ни в статье [5], ни в позднейших лекциях [9].

К статье Л. М. Андреасова [12] об Обществе физико-химических наук при Харьковском университете приложен перечень докладов, прочитанных на заседаниях этого общества до 1915 г. В их числе за 1912 г. указан доклад А. Н. Щукарева «Логическая машина» ([12], с. 278) [9]. По-видимому, речь шла о машине Хрущова. В апреле 1914 г. Щукарев демонстрировал новую машину в Политехническом музее в Москве, о чем рассказывает в своей заметке Соков: «Профессор Харьковского технологического института А. Н. Щукарев в большой аудитории Политехнического музея прочел лекцию на тему «Познание и мышление» и демонстрировал «машину логического мышления», изобретенную англичанином

---

[8] Щукарев писал «Дживонс» вместо обычной (и более правильной) транскрипции «Джевонс».

[9] В этом перечне довольно часто встречается и имя П. Д. Хрущова, но он выступал лишь с физическими и химическими сообщениями. Упомянутое общество было учреждено в 1893 г. и преобразовано в 1934 г. в Харьковское отделение Всесоюзного химического общества им. Д. И. Менделеева.

Джевонсом и усовершенствованную лектором» ([16], с. 287; см. также объявления в газетах [23] и [24]).

В 10-е годы Щукарев не раз показывал прибор и в южных городах. Эти лекции, по-видимому, имели успех. В личном архиве ученого, хранимом Л. А. Щукаревой, находится письмо профессора Харьковского технологического института Е. И. Орлова от 17 ноября 1917 г., в котором он как председатель химической секции Студенческого технического общества благодарит Александра Николаевича за доклад о логической машине [10].

Машина Щукарева представляла собою ящик (25 см длины, 25 см ширины и 40 см высоты). Подобно машинам Джевонса и Хрущова, она разлагала посылки с четырьмя терминами на комбинации этих терминов, но, как мы уже знаем, допустимые комбинации появлялись не только в смотровых щелях, но и на световом экране. Штанги машины были соединены с электрическими контактами, замыкавшими ряды ламп на световом экране, на котором заранее были написаны различные комбинации в виде готовых фраз.

В 20-е годы Щукарев выступал в Москве и Ленинграде, о чем мы знаем также из писем очевидцев, а в августе 1925 г. в ленинградском научно-популярном журнале «Вестник знания» появилась его небольшая, но программно важная статья «Механизация мышления». Написанная просто и ясно, она содержит общий взгляд Щукарева на эту проблему и краткий очерк его работ. Выше мы привели из нее цитату.

Щукарев отмечает древнее начало опытов механизации мышления и ее постепенное усложнение. «Открытие того факта, что человеческое мышление до некоторой степени механично и что процесс этот можно ускорить или ему содействовать помощью некоторых механических приспособлений, — это наблюдение принадлежит, в сущности говоря, глубочайшей древности» ([18], с. 825). Обрисовав развитие счетных инструментов («приемов механического счета»), ученый затем переходит к истории создания логических машин и рассказывает об опытах Джевонса и своих собственных.

---

[10] Е. И. Орлов (1865—1944) — известный химик, впоследствии член АН УССР (не смешивать с И. Е. Орловым, автором полемической статьи!).

В 1870 г. известный английский математик и логик . . . сделал попытку продолжить механизацию мышления далее и перенести ее на логический процесс умозаключения. Механичность процесса умозаключения или логического вывода была известна также очень давно. Ее заметил еще Аристотель, подведший все разнообразие логических выводов к трем основным типам и впервые предложивший обозначать понятия буквами.

Дживонс пошел далее. Он установил полный параллелизм между логическим выводом и математической операцией решения двух уравнений с двумя неизвестными (там же, с. 826).

Важно указание на возможность практического применения логической машины для решения сложных логических задач. «Что касается практических приложений машины Дживонса, то сам автор ее думал, что она таковых иметь не может и, может быть, будет пригодна для демонстрирования при преподавании логики. Однако это может быть и не так» (там же, с. 829). Щукарев описывает решение на машине юридической задачи, предложенной ему в 1916 г. одним из ростовских студентов. «Возможно, что и в других аналогичных случаях логическая машина может найти практические применения» (там же, с. 830). Особенно отмечается удобство машинной обработки разделительных суждений, в которых люди часто путаются «считая всякое „или“ за исключение». В отличие от исходной машины Джевонса, машина Щукарева не уничтожала комбинаций с отрицанием подлежащего.

В архиве Щукарева сохранилось письмо видного зоолога и географа П. Ю. Шмидта (1872—1949), состоявшего тогда профессором Ленинградского сельскохозяйственного института. Оно свидетельствует о том, что идеи Александра Николаевича находили благоприятный отклик у некоторых ученых. Из этого письма, помеченного 11 февраля 1926 г., мы узнаем, что Шмидт присутствовал на лекции Щукарева в Ленинграде и что показанная там логическая машина весьма его заинтересовала. Он сообщает, что готовит статью о ней для одного из иллюстрированных журналов, и просит прислать необходимый материал. Он советует также усовершенствовать машину для демонстрации в большой аудитории: «Я думаю, что надо было бы заменить экран маленьким проекционным приспособлением, сделать рамку 9×9 с 16 окошечками, закрываемыми створками, которые приводились бы в движение небольшими электромагнитами, и вставлять диапозитив с предложениями. Тогда можно было бы проектировать на экран и результаты были бы гораздо эффективнее»[11].

В наше время, когда электронные вычислительные машины стали постоянными спутниками ученых и инженеров, когда автоматизируются сложные процессы управления, а исследования по искусственному разуму вырастают в одно из ключевых направлений науки, пионерское значение работ А. Н. Щукарева, как и его предшественников, кажется неоспоримым. Заметим также, что современные универсальные вычислительные машины, как отмечал еще Н. Винер ([25], гл. V), являются вместе с тем логическими машинами. Именно введение логических операций сделало их такими гибкими; оно же позволяет им моделировать рассуждение. Таким образом, арифметическая ветвь «разумных автоматов» соединилась с логической.

В 20-е годы, однако, формальная логика представлялась многим слишком абстрактной и метафизической для приложения к жизни. Эти взгляды нашли выражение в статье И. Е. Орлова, который в 1926 г. на страницах журнала «Под знаменем марксизма» подверг работы Щукарева резкой критике:

> Около года тому назад в Москве проф. А. Н. Щукарев демонстрировал в публичной лекции «мыслящую машину», изобретенную Джевонсом, а проф. Щукаревым заново сконструированную. Эта же машина была им ранее демонстрирована в других местах с определенным успехом среди слушателей. Конечно, претензии проф. Щукарева, выставляющего школьное пособие Джевонса в качестве «мыслящего» аппарата, а также наивное изумление его слушателей — все это не лишено некоторого комизма. Но все-таки данная тема заслуживает внимательного рассмотрения, так как самим фактом существования подобной «логической машины» нас хотят убедить в формаль ном характере мышления, в возможности его механизации ([20], с. 72).

И. Е. Орлов, профессиональный химик, в 20-х годах активно выступал по философским вопросам науки. Ему принадлежит ряд статей в журнале «Под знаменем марксизма», а незадолго до рассматриваемых событий

[11] Статья, упомянутая П. Ю. Шмидтом, не разыскана.

в свет вышла его книга «Логика естествознания» [26] Орлов был смел и ставил иногда интересные вопросы, но как видно теперь, его взгляды на процесс познания были слишком упрощенными, а оценки нового в науке часто страдали близорукостью. Например, он упорно отказывал в научном значении теории относительности Эйнштейна.

Спор с проф. Щукаревым также нельзя считать удачей критика. Суждения его поспешны, прогнозы неверны. Однако интересно рассмотреть существо приведенных аргументов, так как в них обсуждаются важные стороны проблемы, не раз обсуждавшиеся затем в дискуссиях об искусственном разуме. Это прежде всего вопрос о г р а н и ц а х ф о р м а л и з а ц и и. Подчеркивая неформальную сторону мышления, Орлов решительно отрицал возможность механизации умственного труда, кроме простейших специальных операций, какие выполняли тогда малые счетные машины типа арифмометра. Однако мы знаем, что развитие вычислительной техники пошло совсем иначе, по линии механизации целых комплексов, целых программ операций. То, что мышление в своей основе неформально, отнюдь не исключает успешной формализации значительных его фрагментов; надо лишь правильно связать форму с содержанием.

Столь же ошибочным был взгляд критика на математическую логику («логическое исчисление»), которую он считал полезной для исследований по основаниям математики, но совершенно непригодной для решения практических задач, опять-таки ввиду ее формального характера. «Еще никто не открыл посредством алгебры логики никаких новых истин, никто не прибегал к ее помощи на практике в каких-либо затруднительных обстоятельствах» ([18], с. 80). Отсюда — оценка машины Щукарева как бесплодной, нелепой затеи.

Между тем более проницательные мыслители уже тогда предвидели внедрение логических исчислений в технику [12]. Вполне оправдалось также предположение, что математическая логика облегчит механизацию умственного труда. Нынешние машины выполняют при этом гораздо более сложные логические операции, нежели их

[12] На возможность технического применения этих исчислений указывали, например, в России П. Эренфест (1910) и Н. М. Герсеванов (1923); см. [4].

скромные прототипы начала века. Мы убеждаемся еще раз, что при оценке новых идей ссылка на существующий опыт чревата большим риском. Здесь необходимо принимать во внимание не только наличные результаты, но и возможные перспективы, возможное будущее расширение опыта.

Из «Логики естествознания» и других работ Орлова [13] вытекает, что он сводил научное мышление к индукции, а в ней главную роль отводил заключению по аналогии, наглядному, интуитивному обобщению, толкуя интуицию как биологическое приспособление интеллекта к среде. Эйнштейна он порицал за отрыв от опыта и математический формализм, а в самой математике приветствовал движение интуиционистов. Формальной дедукции им приписывалось лишь чисто подсобное, узко ограниченное значение.

Конечно, такой односторонний эмпиризм далек от принципов материалистической диалектики и современного научного метода. Чувственный опыт и интуиция необходимы науке, но она не может также обойтись без абстракции и дедукции, включая их развитые, математические формы [14]. Резкий же упор на интуицию сообщает позиции Орлова известный (пусть даже неосознанный) субъективистский оттенок. Хотя Орлов сумел предвосхитить некоторые идеи позднейшей эвристики и модальной логики [28], непонимание другой стороны предмета привела его к серьезным промахам. Щукарев, ученый более крупного калибра, лучше понимал, как развивается наука.

Заметим, что в своей статье Щукарев достаточно осторожен в выводах и говорит лишь о механизации **некоторых** мыслительных процессов для облегчения умственного труда человека. Критик логической машины напрасно приписывал ее конструктору крайние воззрения. Еще выразительнее в этом отношении заметка Сокова, где рассказ о лекции Щукарева завершается следующими словами: «Если мы имеем арифмометры, складывающие, вычитающие, умножающие миллионные цифры поворотом рычага,

[13] См., например, [27], [28].

[14] Редакция журнала «Под знаменем марксизма» снабдила упомянутую статью [27] примечанием о том, что она считает характеристику диалектического метода Орловым «неполной и недостаточной».

то, очевидно, время требует иметь логическую машину, способную делать безошибочные выводы и умозаключения, одним нажиманием соответствующих клавиш. Это сохранит массу времени, оставив человеку область творчества, гипотез, фантазии, вдохновения — душу жизни» ([17], с. 287).

Из книги «Проблемы теории познания» [15] видно, что Щукарев думал также о расширении формального аппарата мышления, о создании новой, «дифференциальной» логики. Дискретность обычной логики он противопоставлял непрерывности окружающей нас физической среды, предвосхищая постановку этого вопроса в современных кибернетических работах (ср. [30]). Эта часть его наследия требует, однако, более обстоятельного разбора, чем мы можем здесь дать [15].

Вопрос о соотношении формально-логического и наглядно-интуитивного в мышлении привлекает и ныне внимание многих исследователей естественного и искусственного интеллекта. Предыдущий пример хорошо показывает опасность поспешных, поверхностных оценок и необходимость внимательного анализа фактов. Проблема искусственного разума сложна и многогранна. Вероятно, мы не ошибемся, если скажем, что окончательные границы механизации мысли можно установить лишь экспериментальным путем (см. также [31]). Заметим еще, что в современной кибернетической литературе обсуждается возможность моделирования не только формальных, но и с о д е р ж а т е л ь н ы х мыслительных процессов (семантические машины).

По-видимому, Щукарев не смог или не пожелал выступить в печати с ответом на критику. По крайней мере, мы не нашли такого ответа. По сообщению Л. А. Щукаревой, ученый в последний раз читал лекции о логической машине в конце 20-х годов в Харькове и затем передал ее в Харьковский университет, на кафедру математики. Дальнейшая судьба прибора неизвестна.

[15] Книга «Проблемы теории познания», которой мы касаемся лишь мимоходом, содержит целый ряд набросков кибернетических идей. В философских вопросах Щукарев стоял в общем, по нашему мнению, на позициях естественнонаучного материализма. Было бы, вероятно, интересно сопоставить его взгляды со взглядами его коллеги и современника В. И. Вернадского. Вернадский вместе со Щукаревым участвовал в сборнике [16].

В 1933 г. Щукарев закончил логико-философскую рукопись «Опыт обоснования системы структурного реализма» и в 1934 г. сдал ее экземпляры в Библиотеку им. В. И. Ленина в Москве и библиотеку АН СССР в Ленинграде. В этой рукописи, в гл. I, посвященной развитию научной символики, приводится описание логической машины и ее фотографии.

В последние годы жизни внимание ученого сосредоточилось на физико-химических проблемах, к которым он подходил очень широко. Так, его интересовала термодинамика живой клетки. В апреле 1936 г. А. Н. Щукарев скончался. Некрологи ([13], [14]), как и более поздние статьи в Большой советской и Украинской советской энциклопедиях, упоминают только о том, что он сделал в физике и химии. Работы же его по механизации мышления оказались совершенно забытыми. Можно пожалеть об этом, ибо приближалось время бурного развития автоматизации и широких кибернетических обобщений.

Забвение стало нарушаться лишь в 60-х годах. Уже после публикации заметки [1] мы узнали о юбилейной статье проф. А. Е. Луцкого [32], написанной к столетию со дня рождения Щукарева и содержащей краткое упоминание о его логической машине. Луцкий отмечает выдающиеся изобретательские способности Щукарева, называет логическую машину «первой кибернетической» и приводит ее изображение. Впрочем эта статья, помещенная в химическом сборнике, ускользнула от внимания историков математической логики. В подробной монографии Н. И. Стяжкина [3], где описаны работы Джевонса и Слешинского, нет ни имени Щукарева, ни имени Хрущова.

По-видимому, первая следующая специальная логическая машина в нашей стране была построена в 1956 г. под руководством одного из авторов этих строк студентом Московского инженерно-физического института В. Н. Родиным [16]. Однако, как было указано выше, функции логических устройств еще ранее приняли на себя электронные универсальные вычислительные машины.

---

[16] Эта логическая машина, в целом подобная машине Джевонса, имела техническое назначение. О развитии логических машин за рубежом см. [34] — [36].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Велигжанин В. А., Поваров Г. Н.* К истории создания логических машин в России. — Вопросы философии, 1971, № 3.
2. *Джевонс В. С.* Основы науки. СПб., 1881.
3. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М., 1967.
4. *Поваров Г. Н.* Логика на службе автоматизации и технического прогресса. — Вопросы философии, 1959, № 10.
5. *Слешинский И.* Логическая машина Джевонса. — Вестник опытной физики и элементарной математики, 1893, семестр XV, № 7 (175).
6. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968.
7. *Dianni J., Wachułka A.* Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej. Warszawa, 1963.
8. *Кутюра Л.* Алгебра логики. Одесса, 1909.
9. *Sleszyński J.* Teorja dowodu. Opracował S. K. Zaremba. Kraków, t. 1, 1925; t. 2, 1929.
10. Памяти Павла Дмитриевича Хрущова. Харьков, 1912.
11. *Стрелков И. И.* Развитие воззрений Н. Н. Бекетова на природу химического сродства в работах П. Д. Хрущева. — В кн.: Из истории отечественной химии. Роль ученых Харьковского университета в развитии химической науки. Харьков, 1952.
12. *Андреасов Л. М.* Деятельность физико-химического общества при Харьковском университете (1872—1915). — Там же.
13. Проф. Александр Николаевич Щукарев (Некролог). — Журнал прикладной химии, 1936, т. 9, вып. 9.
14. Олександр Миколаевич Щукарев (Некролог). — Український хемічний журнал, 1936, т. 11, кн. 4.
15. *Щукарев А. Н.* Проблемы теории познания в их приложениях к вопросам естествознания и в разработке его методами. Одесса, 1913.
16. Сборник по философии естествознания. Статьи А. Бачинского, В. Вернадского, И. Огнева и др. М., 1906.
17. *Соков А. Н.* Мыслительная машина. — Вокруг света, 1914, № 18.
18. *Щукарев А. Н.* Механизация мышления (Логическая машина Дживонса). — Вестник знания, 1925, № 12.
19. *Щукарев А. Н.* Опыт обоснования системы структурного реализма. — Государственная библиотека СССР им. В. И. Ленина, Музейное собрание, ф. 178, 1934, пост. № 11.
20. *Орлов И.* О рационализации умственного труда. — Под знаменем марксизма, 1926, № 12.
21. *Поварнин С.* Логика отношений, ее сущность и значение. Пг., 1917.
22. *Жаков К. Ф.* Логика (с эволюционной точки зрения). СПб., 1912.
23. Московские ведомости, 1914 г., 18 апреля.
24. Русские ведомости, 1914 г., 16 апреля.
25. *Винер Н.* Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. Изд. 2-е. М., 1968.
26. *Орлов И. Е.* Логика естествознания. М.—Л., 1925.
27. *Орлов И.* Логика формальная, естественнонаучная и диалектика. — Под знаменем марксизма, 1924, № 6/7.

28. *Орлов И. Е.* Реализм в естествознании и индуктивный метод. — Вопросы философии и психологии, 1916, кн. 131 (1).
29. *Орлов И. Е.* Исчисление совместимости предложений. — Математический сборник, 1928, т. 35, вып. 3/4.
30. *Биркгофф Г.* Математика и психология. М., 1977.
31. *Поваров Г. Н.* Предисловие. — В кн.: Э. Беркли. Символическая логика и разумные машины. М., 1961.
32. *Луцкий А. Е.* Памяти профессора А. Н. Щукарева. — Вестник Харьковского политехнического института, 1966, № 6 (54) (Химия и химическая технология органических веществ, вып. 1).
33. *Родин В. Н.* Электронный анализатор контактных схем. — Автоматика и телемеханика, 1957, т. 18, № 5.
34. *Беркли Э.* Символическая логика и разумные машины. М., 1961.
35. *Nemes T.* Kybernetische Maschinen. Berlin, 1967.
36. *Gardner M.* Logic machines, diagrams and Boolean algebra. New York, 1968.

ЛОГИКО-ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ ВЗГЛЯДЫ ЭРНСТА ШРЁДЕРА

Б. В. Бирюков, А. Ю. Туровцева

Немецкий логик и математик конца прошлого столетия Эрнст Шрёдер известен прежде всего работами по алгебре логики. В своем трехтомном труде [1] «Лекции по алгебре логики»[1] он впервые дал систематическое изложение этой алгебры, внеся в логико-алгебраическую теорию, созданную Дж. Булем и развитую затем рядом других математических логиков XIX в., много нового и оригинального. Как говорит А. Чёрч, «Лекции» Шрёдера представляют собой «квалифицированный компендиум и системати-

---

[1] В экземпляре книги, которым пользовались авторы этой статьи (он принадлежал покойной проф. С. А. Яновской и ныне хранится в библиотеке кафедры математической логики механико-математического факультета Московского университета), обе части тома II объединены в единое целое в составе одной книги: часть первая охватывает лекции 15—23, а часть вторая — лекции 24—27 и добавления 7 и 8. Разграничение частей проведено только в оглавлении тома, где обе части разделяются некрологом Я. Люрота (см. ниже), предисловием редактора тома Е. Мюллера и очень кратким вводным и «промежуточным» вступительными словами автора (Vor- und Zwischenwort des Verfassers); «промежуточное» введение Шрёдера мыслилось им, по-видимому, как текст, предваряющий лекцию 24, которой должна была начинаться вторая часть тома II. В едином томе II, на титуле которого ошибочно значится «вторая часть» (zweite Abteilung) и который помечен 1905 годом, все упомянутые тексты помещены, однако, в начале тома, а лекции 23 и 24 ничем не разделены.

В переиздании 1966 г. сохранен набор издания 1890—1905 гг., но с учетом составленных самим Шрёдером «исправлений» ко всем трем томам (эти исправления были отдельно напечатаны в книгах трехтомника); в частности, без изменения оставлена отмеченная выше общая структура второго тома. Издание 1966 г. отличается от книг 1890—1905 гг. тем, что из тома I изъято оглавление будущего второго тома, а из тома II — оглавление тома I, а также некоторыми другими несущественными моментами (например, оглавление тома II приведено в соответствие с фактическим расположением его материалов). Текст томов «Лекций» издания 1966 г. постранично совпадает с текстом издания 1880—1905 гг.

зацию работы его предшественников; они содержат также его собственные результаты, и их можно рассматривать как охватывающие почти все, что было важного в заключительной форме алгебры логики XIX века, включая алгебру отношений» ([2], с. 284). Э. Шрёдеру принадлежит решение проблемы разрешения для алгебры классов, доказательство существования недистрибутивных структур (решеток), открытие принципа двойственности и некоторых других важных законов логики, разработка одного из первых вариантов теории типов, развернутое изложение алгебры и логики отношений, попытка построения теории, в некотором смысле предвосхищающей современную общую теорию алгоритмов и исчислений, и многое другое (ср. [3], с. 520—521). Вклад Шрёдера в формирование современного математизированного облика формальной логики велик, и нет, пожалуй, ни одного систематического и обширного труда по логике, в котором не было бы ссылок на тот или иной его результат.

Несмотря на постоянное упоминание в современной математико-логической литературе результатов, полученных Э. Шрёдером, многие стороны его творчества в исследованиях историко-логического профиля до сих пор не освещены. Если его младшему современнику Г. Фреге ныне посвящен ряд монографий и множество статей, то литература о Э. Шрёдере как математическом логике гораздо более бедна; работ, по которым можно было бы составить конкретное представление об идеях и результатах Шрёдера, о месте, которое он занимает в истории логической мысли, о его философских взглядах, о тех нитях, которые связывают его наследство с современной наукой, еще мало.

Из историко-логических исследований, в которых содержится общая оценка роли Э. Шрёдера в формировании математической логики, следует отметить опубликованную еще в 1918 г., но и поныне не потерявшую своего значения книгу К. И. Льюиса «Обзор символической логики» [4] и трехтомный «Трактат о формальной логике» Й. Йоргенсена (1931 г.) [5]. К сожалению, как в этих монографиях, так и в более поздних трудах, содержащих анализ различных историко-логических вопросов, вклад Шрёдера в логику (и методологию науки) рассматривается недостаточно обстоятельно, обычно в связи с теми или иными проблемами современных логических исследований. Даже в синтетических работах по истории логики анализу наследства Шрёдера уделяется неоправданно мало места. Так, в монографии В. и М. Нил «Развитие логики» (1962 г.) [6] Э. Шрёдеру отведена всего одна страница, а в книге Н. И. Стяжкина «Формирование математической логики» (1967 г.) [7] — шесть страниц.

Не претендуя на полноту, ниже мы укажем работы, в которых отмечаются те или иные стороны логического наследства немецкого логика и математика. Отдельные результаты Шрёдера упоминаются в исторических обзорах, посвященных становлению ряда важных разделов или проблем современной логики; эти обзоры содержатся, в частности, в таких фундаментальных трудах, как переведенные на русский язык монографии Г. Биркгофа [8], А. Чёрча [9], Х. Карри [10], а также С. К. Клини [11]. Из работ, специально посвященных Э. Шрёдеру и его исследованиям, надлежит прежде всего назвать статью-некролог Я. Люрота [12], рецензии ([13]—[16] и др.) на работы Шрёдера, энциклопедические персоналии [17], [2], [3]. В изданной в Англии и США «Философской энциклопедии», в статье по истории логики, помещенной в томе 5, Шрёдеру посвящен раздел, написанный И. Томасом ([18], p. 553—554).

Примечательно внимание, которое было уделено работам Шрёдера в России. Не говоря уже об исследованиях П. С. Порецкого, творчески работавшего в рамках «булево-шрёдеровского» направления логики (достаточно указать его результаты, изложенные в труде 1881 года «О способах решения логических равенств. . .» [19], в 80—90-х годах прошлого века появились и прямые изложения шрёдеровской алгебры логики. В 1888 г. М. Волков издал книгу (объемом в 65 с.) «Логическое исчисление» [20]. В предисловии к ней он отмечает четыре «важнейших работы», которыми он пользовался при ее составлении; это были книга Дж. Буля «Исследование законов мысли» [21], вторая часть труда Р. Грасмана «Учение о формах или математика» [22], работа Э. Шрёдера «Сфера операций логического исчисления» [23] и исследование П. С. Порецкого [19.] Как следует из текста книги Волкова, последний в значительной мере следует Шрёдеру. На исследования Шрёдера обратили внимание также русские логики-философы (примером может служить книга П. Лейкфельда [24]). В 1894 г. русский историк математики В. В. Бобынин дал изложение (почти перевод) [25] работы Шрёдера 1877 г. [23]. На результаты автора «Лекций по алгебре логики» в значительной степени опиралась известная книга Л. Кутюра, вышедшая в русском переводе в 1909 г. [26].

В последующие годы — вплоть до наших дней — в литературе обсуждались разнообразные вопросы, касающиеся математико-логического и логико-философского наследия Шрёдера (см., например, [27]—[38]). Вклад Шрёдера в логику (и основания математики) в той или иной степени освещается в монографиях и статьях, посвященных истории логической мысли и относящихся к достаточно различным этапам и аспектам разработки историко-логической и историко-математической проблематики, от книги П. Лейкфельда [24] до работ Н. И. Стяжкина, Ф. А. Медведева и фундаментальной хрестоматии К. Берки и Л. Крейзера [39]—[51].

Для понимания места Э. Шрёдера в истории науки очень важными являются публикации тех его современников, которые работали над проблемами логики и оснований математики и так или иначе выражали свое отношение к работам рассматриваемого нами ученого. Здесь надлежит прежде всего назвать П. С. Порецкого [19], Э. Гуссерля, Г. Фреге (см. [52]—[54] и др.), Дж. Пеано и Р. Дедекинда. Следует заметить, что сравнительный анализ подходов к логике и ее приложениям в математике, которые развивали Шрёдер, Фреге и Пеано, фактически только начинается; сопоставление взглядов и результатов Шрёдера и Дедекинда — с точки зрения истории теории множеств — содержится в монографии [45].

На русском языке — если не считать сделанного В. В. Бобыниным упомянутого выше перевода-изложения исследования Шрёдера «Сфера операций логического исчисления» (1877 г.) — представлено всего лишь одно исследование немецкого ученого: его статья «Об алгорифмах и исчислениях» [55]; кроме того, в русском переводе имеется написанная Шрёдером совместно с Р. Штурмом и Л. Зонке статья о Германе Грасмане [56].

В чем же можно видеть причину недостаточного внимания к Шрёдеру как в отечественной, так и в зарубежной историко-логической и историко-математической литературе? Ответ на этот вопрос следует, по-видимому, искать в том, что творчество Э. Шрёдера приходится на переломный период развития математической логики. Алгебра логики началась с работы Дж. Буля «Математический анализ логики» (1847 г.), хотя ряд вопросов, относящихся к алгебраическому представлению логических законов, изучался еще Лейбницем; после Буля значительные усовершенствования в аппарат алгебры логики были внесены С. Джевонсом, Ч. Пирсом, П. С. Порецким и др. Алгебраическая форма логики — форма, в которой математическая логика преимущественно разрабатывалась в XIX в., — получила свое завершение в «Лекциях» Шрёдера. Однако, когда создавался этот синтетический труд, в логике — прежде всего благодаря работам Г. Фреге — возникла новая мощная струя: струя, положившая начало в определенном смысле более общему математико-логическому подходу, основанному на представлении логики в виде исчисления предикатов и служащему решению задач логического обоснования математики. Это привело к тому, что алгебраический подход в логике, высшей точкой которого явились труды Э. Шрёдера и русского математика П. С. Порецкого, отошел на задний план, и хотя исследование алгебры, созданной Булем, Джевонсом, Шрёдером, Порецким и др., продолжалось (здесь следует указать на работы А. Уайтхеда, Э. Хантингтона, Л. Лёвенгейма и других), они находились в некотором смысле на периферии математической логики. В развитии логики в это время начался новый этап, специфической чертой которого был переход от алгебраического представления логики к логистическому методу, к изучению предмета формальной логики посредством построения формализованных языков — языков того типа, который впервые был представлен в пионерной работе Г. Фреге 1879 г. «Запись в понятиях» [57] [2]. Фундаментальные Principia mathematica А. Н. Уайтхеда и Б. Рассела [59] завершили процесс становления математической логики как дедуктивной основы математики, а развернутая Д. Гильбертом (начиная с его доклада на III Международном конгрессе математиков в 1904 г. [60]) программа логического анализа оснований математического знания — программа метаматематических иссле-

[2] Название этой работы Г. Фреге — Begriffsschrift — по-русски обычно передается термином «исчисление понятий» (см., например, работу [58]). Однако такой перевод не очень соответствует смыслу фрегевского термина — «система записи понятий» или «система записи с помощью понятий». Поэтому более целесообразен перевод «Запись в понятиях», еще в 40-х годах предложенный С. А. Яновской и А. А. Ерофеевым.

дований — на долгие годы определила главное направление математико-логических изысканий [3].

Алгебра логики, как представлялось в течение десятилетий, стояла в стороне от этого направления. Ситуация, однако, постепенно менялась. Это было вызвано не только открывшимися в 30-х годах приложениями алгебры логики в технике, но и — причем это, пожалуй, прежде всего — уяснением глубокой связи, существующей между метаматематикой (как теорией математического доказательства) и алгеброй. Связь эта реализуется ныне в интенсивно развивающихся исследованиях по *теории моделей* математических (и логико-математических) исчислений [4] — теории, в свете которой алгебро-логические системы, рассматривавшиеся Шрёдером, оказываются лишь примерами — правда, очень важными — возможных алгебраических (и теоретико-множественных) интерпретаций логических исчислений. Современное развитие логики явственно свидетельствует об увеличении в ней «удельного веса» алгебраических методов (ср. [10]). На новом уровне происходит своего рода возврат к шрёдеровским методам.

Особым ответвлением современных логико-алгебраических и теоретико-множественных разработок является *теория отношений*, особенно теория *бинарных* отношений; последняя оказывается ныне все более тесно связанной с кибернетическими и семиотическими постановками задач (ср. [64]). Но данная теория получила у Шрёдера детальную разработку, и современные исследователи, работающие в данной области (см., например, [65]), прямо указывают на Шрёдера как на одного из зачинателей теории бинарных отношений.

Здесь преждевременно говорить о некоторых других линиях, связывающих наследство Шрёдера с математической логикой наших дней. Некоторые из них будут отмечены в последующем изложении. Но одно обстоятельство следует подчеркнуть с самого начала: становление современной математической логики невозможно понять,

[3] Интересно в связи с этим отметить, что в хрестоматии — снабженном комментариями сборнике классических текстов по современной логике под ред. К. Берки и А. Крейзера [51] — алгебра логики почти не представлена.

[4] Мы не имеем здесь возможности останавливаться на характеристике логико-алгебраической теории моделей и отсылаем читателя к таким книгам, как [61] — [63].

не учтя в полной мере обобщающих исследований немецкого математика. Ибо алгебра логики XIX в. явилась тем истоком, из которого в конечном счете выросла вся математическая логика. Изучение процесса формирования этой алгебры и последующего перехода к аксиоматическому методу является поэтому важным вкладом в историю современной формальной логики, позволяя более ясно понять сущность и своеобразие нынешних особенностей ее развития. В этом плане исследование творчества Шрёдера, стоящего на рубеже двух главных этапов становления математической логики, представляет особый интерес.

В данной статье рассматриваются основные методологические и логические идеи Э. Шрёдера и некоторые характерные черты предложенных им исчислений. Анализ его логико-гносеологических воззрений послужит нам базой для осмысления вклада немецкого математика в защиту и развитие логической программы Лейбница — вклада, особенно интересного в свете современной теории алгоритмов и исчислений, некоторые предвосхищения которой мы находим у того же Шрёдера (см. работу С. Г. Ибрагимова [66], помещенную в данной книге).

Эрнст Шрёдер и его труды

Описание жизненного и творческого пути Э. Шрёдера содержится в статье-некрологе, написанной его коллегой и другом Я. Люротом [12], который сам занимался некоторыми вопросами алгебры логики (Люроту принадлежит работа [67], посвященная алгебре отношений; она указана в списке литературы во втором томе «Лекций» Шрёдера). Статья Люрота дает весьма квалифицированный и полный обзор основного содержания работ рассматриваемого нами немецкого математика [5]. В конце статьи приводится список публикаций Шрёдера, расположен-

[5] Статья [12] была написана еще до подготовки к печати второй части тома II «Лекций» Шрёдера; Люрот сожалеет в ней о том, что упомянутый том оказался незавершенным. Она вышла в свет в 1903 г. в ежегоднике Германского математического общества. При публикации Е. Мюллером упомянутой части (1905 г.) она была, по-видимому, предпослана тексту Шрёдера.

ных в порядке выхода их в свет [6]. Краткие биографические сведения и перечень основных его работ можно также найти в известном биографическом словаре Поггендорфа ([68], S. 1212—1213; [69], S. 1132—1133]). Но, конечно, главным источником для нас являются работы самого Шрёдера, на которые мы и будем прежде всего опираться.

Эрнст (полное имя: Эрнст Фридрих Вильгельм Карл) Шрёдер родился 25 ноября 1841 г. в Мангейме [7] в семье директора средней школы (Bürgerschule), впоследствии преобразованной в реальную гимназию. Отец Эрнста был естествоиспытателем, интересы которого охватывали минералогию, химию и физику. Семейная установка определила жизненный путь будущего логика, который, завершив среднее образование, решил заняться изучением физико-математических наук. Он учился сначала в Гейдельбергском университете (где он в 1862 г. сдал экзамен на ученую степень доктора философии), а затем, до 1864 г., — в университете г. Кёнигсберга. После этого началась его педагогическая деятельность в качестве преподавателя в средних и высших учебных заведениях и интенсивные научные исследования, которые он начал еще в Гейдельберге, опубликовав свою первую работу — по геометрии. После краткого периода службы за границей — в Цюрихе, где Шрёдер, в частности, преподавал в политехникуме, он возвратился в Германию и с 1868 г. (по Поггендорфу — с 1867 г.) вел преподавание в средних учебных заведениях в Карлсруэ и Пфорцгейме. В 1870 г., когда разразилась франко-прусская война, Шрёдер добровольцем поступил на военную службу, но его участие в военных действиях было весьма кратким, так как он был отозван из армии в связи с назначением профессором про- и реальной гимназии в Баден-Бадене. С 1874 г. Шрёдер — ординарный профессор Высшей технической школы (политехникума) в Дармштадте, а с 1876 г. — ординарный

[6] Для некоторых работ Люрот указал время и место написания их Шрёдером. Зато не во всех случаях им был указан год выхода в свет соответствующей публикации. Список, по-видимому, неполон; во всяком случае, в нем нет данных о статье, написанной Э. Шрёдером совместно с Р. Штурмом и Л. Зонке, которую в русском переводе издал В. В. Бобынин [56].

[7] Мангейм как место рождения Эрнста Шрёдера называет Люрот. В словаре Поггендорфа указано, что Шрёдер родился в Пфорцгейме.

профессор математики аналогичной высшей школы в Карлсруэ, где он, по сообщению Люрота, преподавал арифметику, тригонометрию и «высший анализ». В этот период ему было присвоено звание надворного советника (Hofrat). Умер Шрёдер в Карлсруэ 16 (по данным Поггендорфа — 17) июля 1902 г. Как отмечает Люрот, его заболевание было очень непродолжительным и вызванным, как предполагали его коллеги, переохлаждением организма, случившимся во время длительной велосипедной поездки, которую перед этим предпринял Шрёдер — заядлый спортсмен. Автор некролога в качестве причины смерти Шрёдера называет «воспаление мозга».

Из статьи [12] можно составить общее представление о личности создателя «Лекций по алгебре логики». По характеристике Я. Люрота, Шрёдер был замкнутым человеком, нелегко сходившимся с людьми. Причину этого биограф Шрёдера видит отчасти в том, что, обнаружив с раннего возраста хорошие способности, будущий математический логик в детстве обучался вместе с учениками, превосходившими его по возрасту, и все свои силы посвящал занятиям. Люрот пишет:

> Страстное увлечение познанием природы и живой интерес к философским рассуждениям сказались очень рано, поэтому выбор специальности не был для Шрёдера трудным делом, и уже на десятом году жизни у него был твердый план посвятить себя занятиям математикой и физикой, сочетая их с преподаванием ([12], S. IV).

Первая небольшая работа Шрёдера — «О многоугольнике с дробным числом сторон» [70] — была опубликована, когда он был еще студентом. Несмотря на большую педагогическую нагрузку, Шрёдер — всю жизнь усердный труженик — никогда не прерывал систематических научных исследований. Не будучи женатым, он свое свободное время посвящал изучению иностранных языков, спорту, а также занятиям ботаникой. Уже в восемь лет он хорошо говорил по-латыни, позднее изучил английский, французский и испанский языки; занимался он и русским языком. Такая лингвистическая база позволяла Шрёдеру быть в курсе всего нового, что появлялось в логике его времени.

Свой «Учебник арифметики и алгебры для учителей и учащихся, том 1» [71], содержавший ряд новых и интересных идей и получивший высокую оценку уже у современников, Шрёдер написал в Баден-Бадене. Я. Люрот [12] уделяет большое место раскрытию основного замысла этого труда (он вышел в 1873 г. в г. Лейпциге), первоначально задуманного автором в виде четырехтомного курса (остальные три тома Шрёдер так и не написал). Из изложения Люрота ясно видна общая логическая — в смысле с о в р е м е н н ы х логических оснований математики — направленность этого учебника. Шрёдер обстоятельно рассматривает в нем понятие числа, указывая в качестве основной аксиомы, лежащей в основе всех чисел, то свойство, что количество должно быть независимо от процесса вычисления и что пересчет одного и того же множества всегда должен давать одно и то же количество. Ознакомление с исходными идеями Шрёдера, как они выражены в его «Учебнике», приводит современного исследователя истории математики — Ф. А. Медведева к заключению, что в этой книге «теоретико-множественный взгляд на обоснование арифметики выражен вполне определенно» ([45], с. 77). И действительно, характеристика понятия множества (Menge), принадлежащая Шрёдеру, весьма сходна с канторовским определением множества как «многого, мыслимого нами как единое»; при объяснении понятия натурального числа в «Учебнике» Шрёдера используется идея взаимно-однозначного соответствия, на которую опирается последующее различение кардинальных и порядковых чисел и т. п. (см. [45], с. 77—78). При этом, однако, уже в этой книге Шрёдер использует некоторые логические средства, а именно знаки подчинения $\subset$ и включения (субсумции) $\Subset$, которым впоследствии суждено было играть существенную роль в его алгебре логики.

Большое внимание в «Учебнике» Шрёдера уделяется прямым и обратным арифметическим операциям. От связанных с этим вопросов Шрёдер переходит к задаче обобщения арифметики натуральных чисел. Постановка этой задачи — главный научный вклад Шрёдера в этой работе, ибо, уточняя ее, автор «Учебника арифметики и алгебры» попытался выявить законы, лежащие в основе арифметики (такие, как законы коммутативности и ассоциативности арифметических операций) и проследить последствия отказа от тех или иных из них. Именно в этой книге (и в ряде тематически связанных с ней публикаций) Шрёдер в какой-то мере предвосхищает современный подход общей теории алгоритмов и исчислений (используя при этом сам термин «алгоритм» — Algorithmus) [8].

Как утверждает Я. Люрот, Шрёдер заинтересовался вопросами математического представления логики уже при подготовке «Учебника по арифметике и алгебре», по-видимому, под влиянием «теории форм» Р. Грасмана (см. третью часть труда последнего [22]). Увлечение логикой определило всю последующую научную жизнь Шрёдера. После переезда в 1876 г. в Карлсруе, Шрёдер принялся за изучение произведений Дж. Буля, А. де Моргана, Ч. Пирса и других работ по символической логике английских и американских исследователей; параллельно он изучал труды по философско-психологической логике — Х. Зигварта, А. Тренделенбурга, Р. Лотце, В. Вундта и других известных авторов, — стремясь углубить свои представления в области философских оснований логики. В 1877 г. Шрёдер издал книгу «Сфера операций логического исчисления» [23], в которой поставил задачу представить в единообразной и возможно более ясной форме результаты Дж. Буля и его последователей. Уже в этой небольшой (около сорока страниц) работе (идеи которой получили развитие в ряде последующих публикаций) он значительно продвинул вперед и упростил алгебру логики Буля, отказавшись от использования числовых коэффициентов и введя вместо неудобных в обращении операций деления и вычитания операцию «отрицания».

Сразу же вслед за этим Шрёдер приступил к подготовке своего основного труда — «Лекций по алгебре логики» [1]; первый том «Лекций» вышел в 1890 г., а все издание завершилось в 1905 г., уже после смерти автора, публикацией части 2 второго тома. Этот труд покоился на тщательном исследовании идей и результатов Буля и более поздних представителей математической логики и охватывал три основных раздела алгебры логики: исчисление классов, исчисление высказываний и исчисление отношений.

———

[8] Анализу этой стороны математико-логического наследия Э. Шрёдера посвящены работы С. Г. Ибрагимова [32], [66]. Ибрагимов, впрочем, указывает на то, что упомянутые понятия у Шрёдера столь сильно отличаются от современных понятий алгоритма и исчисления, что по своей сути «ближе к таким современным алгебраическим понятиям, как понятие квазигруппы» ([66], с. 253 данной книги).

Первый том «Лекций» Шрёдера посвящен, грубо говоря, логике классов. В качестве введения ко всему труду в этом томе помещено обширное «Введение». В нем рассматривается предмет и задачи логики, дедукция и индукция, анализируются понятия о логике объема и логике содержания и вообще освещается целый ряд общеметодологических вопросов формальной логики. Значительное место в этом введении занимает развернутое описание идей Лейбница о создании совершенного искусственного логического языка и выявление конкретных путей их воплощения. В дальнейшем — в четырнадцати лекциях первого тома — детальнейшим образом описывается логика классов, возникающая в качестве интерпретации шрёдеровского «тождественного исчисления областей некоторого многообразия» [9]. Из понятий логики классов Шрёдер особое внимание уделяет понятию включения классов (субсумции) и операции отрицания (дополнения) классов; он подробно рассматривает проблемы, связанные с переходом от символического языка к обычному разговорному языку и обратно. Усовершенствовав разработанные Булем приемы приведения логических выражений к нормальной форме, он дает решение проблемы разрешения для исчисления классов, создав для этого так называемый метод дихотомии. В приложениях к первому тому он показывает независимость одного из законов дистрибутивности от остальных принципов исчисления классов и приводит первые примеры недистрибутивных структур (решеток).

Во втором томе Шрёдер переходит к логике высказываний и «комбинированному» исчислению классов и высказываний. В начале первой части второго тома «Лекций» он указывает на тот недостаток теории, изложенной в первом томе, что она позволяет оперировать только общими суждениями и что частные суждения вводятся в нее с большим трудом. Этот недостаток он теперь преодолевает путем введения операции, обратной для операции сложения (объединения) классов, — операции вычитания классов и использования наряду с отношением равенства также и отношения неравенства. Вслед за Х. Макколлом он ставит в соответствие каждому суждению «оценочный знак»

[9] Основные черты «тождественного исчисления» Шрёдера освещаются в работе [31].

0, если это суждение ложно, и «оценочный знак» 1, если оно истинно. Рассматривая — в соответствии с философской традицией — высказывания (суждения) как состоящие из понятий, Шрёдер дает двойную интерпретацию формул вида $a \mathrel{=\!\!\!(} b$. А именно формула $a \mathrel{=\!\!\!(} b$, в которой a и b представляют *понятия*, указывает, что понятие a *подчинено* понятию b; если же a и b являются *высказываниями*, данная формула утверждает, что высказывание a заключает в себе, или имеет своим *следствием*, высказывание b. Пытаясь свести две возможные интерпретации логики классов — интерпретацию с помощью понятий и интерпретацию с помощью высказываний — к одной, Шрёдер вводит, вслед за Булем, представление об объеме высказывания. Он говорит, что понятие определяет класс тех предметов, к которым оно относится (объем понятия), высказывание же определяет класс тех случаев, или моментов времени, в которые оно истинно. После подробного рассмотрения логики высказываний следует переход к силлогистике. Шрёдер приводит пять возможных отношений, в которых могут находиться между собой два произвольных класса (отношения, исследовавшиеся Ж. Д. Жергоном), и четыре «примитивных» (primitive) формы суждения де Моргана, в которых фигурируют два класса, и производит детальный анализ возникающих в связи с этим логических возможностей. Полученные результаты он использует для исследования силлогистики.

В третьем томе (часть 1) «Лекций», имеющем заголовок «Алгебра и логика отношений», рассматривается исчисление отношений, разработанное прежде всего Ч. Пирсом и — во многом независимо от него — самим Шрёдером. Том этот (вторая часть которого так и не была написана) посвящен «сфере операций логики отношений» (Operationskreis der relativen Logik), причем отношений *бинарных* (binären Relative), которые, говорит Шрёдер, составляют естественный исходный пункт теории отношений вообще.

Для понимания того места, которое занимает третий том «Лекций» в архитектонике всего труда Шрёдера, существенно учесть обстоятельства его создания автором. Согласно первоначальному плану, запечатленному в помещенном в томе I оглавлении еще не существовавшего второго тома, логике отношений должно было быть посвящено окончание (начиная с лекции 24) последнего. Однако, как говорит Шрёдер в «Новом вступительном слове автора ко второму тому» и «Промежуточном слове»[10], этот план пришлось изменить, выделив теорию отношений в отдельный том, а вторую часть тома II (лекции 24—27) посвятить другим вопросам (это были вопросы, связанные с материалом первых двух томов). В «Промежуточном слове» Шрёдер пишет о себе, что он, вероятно, никогда так не ошибался в оценке объема своего труда, имеющихся в нем пробелов и трудностей их заполнения, как в данном случае. Этот просчет Шрёдер объясняет тем, что в основу изложения логики отношений он намеревался положить статью Ч. Пирса [72] объемом всего в 18 печатных страниц. «Громадная важность этой работы, — пишет Шрёдер, — стала для меня ясной лишь при детальной разработке теории» ([1], том II, S. XXIV); последняя и вылилась в первоначально не предполагавшийся третий том «Лекций».

В понимании **отношения**, как оно фигурирует в томе III «Лекций», Шрёдер следует Пирсу. Он, в частности, использует понятие «релятива» (Relativ); релятив a есть совокупность всех высказываний, которые позволяют установить, находятся ли два данных индивида i и j друг к другу в отношении A. С высказыванием «i находится к j в отношении A» связывается знак значения отношения $a_{i,j}$ — **реляционный коэффициент**, как его называет Шрёдер, который принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, ложно или истинно упомянутое высказывание. Релятив a, принадлежащий отношению A, есть совокупность всех высказываний или всех реляционных коэффициентов, соответствующих всевозможным упорядоченным парам элементов некоторой предметной области.

По выражению Люрота, Э. Шрёдер был «систематизирующим математиком», которому доставляли большую радость пересмотр всех возможных вариантов некоторой задачи и решение всех встретившихся при этом проблем (см. [12], S. XVII). Следует, однако, учитывать, что «систематизационная» установка Шрёдера была связана с той главной задачей, которую он ставил перед собой во всей своей научной деятельности, — с разработкой, в соответствии с замыслом Г. Лейбница, всеобщей «пасиграфии». Развертывая с чрезвычайной тщательностью логическую теорию бинарных отношений, Шрёдер руководился идеей, что это послужит существенным шагом вперед в достижении данной цели — создания общепонятного, не зависящего от национальных языков символического языка, служащего средством научного анализа. К вопросу о создании такого символического искусственного языка, о познавательном значении знаков вообще он неоднократно возвращался в ряде своих публикаций [73]—[75].

Э. Шрёдер был глубоким знатоком логической литературы — не только литературы по алгебре логики XIX столетия, но и более ранних работ, шедших в русле математико-логической традиции, связывающей Лейбница и Буля. Он также вполне владел багажом нематематической (традиционной) логики, и в его работах мы находим ссылки не только на Дж. Буля, А. де Моргана, С. Джевонса, Р. Грасмана, Ч. Пирса, Р. Дедекинда, Дж. Пеано и П. С. Порецкого, но и на работы X. Зигварта, А. Тренделенбурга, Г. Лотце. Ф. Ибервега и В. Вундта. Из трудов немецких логиков Шрёдер особенно отмечает работы Р. Грасмана. О том, какую роль для Шрёдера сыграли идеи Ч. Пирса, мы уже говорили. Знал Шрёдер и работы Г. Фреге. Сразу после выхода труда Фреге 1879 г. [57] Шрёдер опубликовал на него рецензию [76]. В томе I «Лекций» в списке литературы фигурируют работы Фреге [57], [77], [78], [52]. Любопытно, что, указав в этом списке фрегевские «Основания арифметики» [52], Шрёдер присовокупил тут же обширное (для библиографии) добавление относительно содержащейся в этой книге критики его «Учебника арифметики и алгебры». Он не может признать, что автор «Записи в понятиях» «так уж прав» и возражает Фреге в ряде пунктов (см. [1], Bd S. 704). В списке дополнительной литературы, помещенном в томе II «Лекций», указаны труды Фреге [54], [53], [79]. Шрёдер, по-видимому, не успел (или не пожелал) ответить на критику со стороны Фреге, содержавшуюся в [53]. Оба математических логика вряд ли хорошо понимали друг друга. Небезынтересно, что в библиографии к своим «Лекциям» Шрёдер не приводит ни одной статьи Фреге, освещающей [illegible] семантике основных логических и математических понятий[11].

[10] См. подстрочное примечание 1 на с. 153.

[11] Что касается Г. Фреге, то к критике различных аспектов построений Шрёдера он возвращался неоднократно: соответствующие

После кончины Э. Шрёдера в 1902 г. в его архиве было обнаружено много рукописей научного содержания. Судьбе этого наследства посвящено «Предисловие редактора» (Vorbemerkungen des Herausgebers), помещенное в томе II (1905 г.) непосредственно после статьи Я. Люрота. Оно принадлежит редактору тома Е. Мюллеру.

Как пишет Мюллер, рукописи Шрёдера, согласно воле покойного, были переданы Германскому математическому обществу (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) в целях отбора из них материалов, заслуживающих публикации, и осуществления издания. По поручению Общества (и назначенной им комиссии по разбору шрёдеровских манускриптов) Е. Мюллер осуществил публикацию второй части тома II. Результатом, по-видимому, и явился единый том II (1905 г.), в котором, как мы уже говорили, обе части составили единое целое. Через несколько лет Е. Мюллер от имени Шрёдера издал двумя частями [12] (1909 и 1910 гг.) «Очерк алгебры логики» [83]. Объясняя в предисловии к первой части происхождение этой работы, Мюллер пишет, что в рукописном наследии Шрёдера были обнаружены краткие наброски и отдельные замечания в связи с задуманным Шрёдером «очерком» алгебры логики. Хотя Шрёдер не оставил каких-либо кусков текста предполагаемой работы, из его заметок следовало, что автор предполагал не просто произвести извлечения из своего обширного труда, но в ряде существенных пунктов улучшить обоснование и изложение

замечания разбросаны во многих его произведениях, в ряде материалов посмертно изданного его «Наследия» и научной переписки [80]. О некоторых пунктах фрегевской критики мы скажем ниже. Здесь отметим только, что в первом томе упомянутого издания опубликовано его «Рассуждение о смысле и значении» (Ausführungen über Sinn und Bedeutung; название дано редакторами книги — Г. Гермесом, Ф. Камбартелем и Ф. Каульбахом), относительно которого указывается, что этот материал представляет собой вторую часть содержимого папки, озаглавленной «Шрёдеровская логика»; эта папка в полном виде существовала до гибели рукописей Фреге (история манускриптов последнего описана в [81]; см. также рецензию [82]); ее первую часть составлял черновик фрегевской статьи [53] «Критическое освещение некоторых пунктов в «Лекциях по алгебре логики» Э. Шрёдера» (см. примечание издателей «Наследия» Фреге ([80], Bd 1, S. 128).

12 На титуле значилось: «В трех частях», — однако третья часть так и не была подготовлена Мюллером.

алгебро-логических вопросов, а также привлечь новую литературу. Очевидно, говорит Е. Мюллер, что Шрёдер придавал немаловажное значение осуществлению своего замысла, который, однако, он не успел выполнить. Мюллер продолжает:

> Если алгебра логики, по крайней мере в Германии, и в самом деле до сих пор не завоевала того внимания и уважения, которого она заслуживает, то причина этого отчасти, быть может, состоит в отсутствии краткого, но вместе с тем полного руководства, в котором описывались бы важнейшие ее методы и результаты [13] ([1], Bd III (изд. 1966 г.), S. 653).

Попытке восполнить этот пробел и должен был служить подготовленный Е. Мюллером «Очерк» шрёдеровской алгебры логики. По сравнению с «Лекциями» Шрёдера «Очерк» действительно краток: содержит немногим более 200 страниц (шрёдеровский трехтомник почти в 10 раз больше по объему). Как указывает составитель, первая его часть основывается исключительно на оставшихся от Шрёдера набросках. Во второй части Мюллер в ряде пунктов видоизменяет подход Шрёдера (делая, например, больший акцент на исчислении высказываний) и использует новейшую литературу (в частности, доклад Л. Левенгейма в Берлинском математическом обществе, сделанный в июне 1908 г.).

Впрочем, подготовленный Мюллером «Очерк» вряд ли заменяет капитальный труд Шрёдера — его «Лекции по алгебре логики». Конечно, «Лекции» чересчур уж обстоятельны — Шрёдер решал в них не только задачу изложения и развития современной ему алгебры логики, но и ее гносеологического обоснования и популяризации; они полны всевозможных отступлений, и главное в них зачастую не очень четко проступает за менее значительными деталями. Но труд Шрёдера оказал значительное влияние на развитие математической логики и не потерял интереса для современной науки. Можно, разумеется, следуя совету Х. Карри ([10], с. 236), знакомиться с алгеброй логики по упоминавшейся выше книге Л. Кутюра, излагающего на считанных страницах то, чему Шрёдер посвятил объемистый том; но при этом опреде-

13 На французском языке, говорит Мюллер, такое руководство существует — это книга Л. Кутюра [26].

ленно будет потеряно впечатление постепенного становления этой ветви логики и исчезнет атмосфера оживленной борьбы и полемики с логиками самых разных направлений, которая так характерна для работ Шрёдера и прежде всего для его «Лекций по алгебре логики».

Философские взгляды

Э. Шрёдер был математиком и логиком, а не профессиональным философом; он не стремился развить какую-либо философско-логическую систему. Производя в ходе изложения логики те или иные экскурсы философского характера, он обычно оговаривал, что не является специалистом в философии и с удовольствием передал бы обсуждение соответствующих проблем более компетентным и профессионально подготовленным людям. Понимая необходимость теоретико-познавательного анализа оснований логических доктрин, он вместе с тем отделял эти основания от самих формально-логических построений.

Интерес Э. Шрёдера к философии был значителен. Сам характер тех проблем, которыми он занимался в качестве логика, направлял его внимание в сторону проблем теории познания, таких, как вопросы о природе человеческого мышления и объективном характере его законов, о возможности универсального символического языка, о процессе образования понятий. Следует, однако, подчеркнуть, что, будучи одним из крупнейших логиков своего времени, Шрёдер в области философии не был ни самостоятелен, ни вполне последователен.

Влияние на Э. Шрёдера оказали не столько профессиональные философы, сколько склонные к философским выводам и обобщениям математические логики и естествоиспытатели, а среди последних прежде всего — его современник, знаменитый немецкий физиолог и физик Герман Гельмгольц. Как известно, в решении ряда важных философских проблем Гельмгольц проявил себя как «непоследовательный кантианец» [14]; он то признавал априорный характер законов мышления и видел в ощущениях только «символы» внешних вещей, то склонялся к идее о реальном существовании пространства и времени, утверждая, что наши понятия и представления являются только действиями, производимыми на наше сознание внешними предметами. Сходных непоследовательных взглядов придерживался и Шрёдер — с тем, однако, отличием, что он, пожалуй, в большей мере, чем Гельмгольц, тяготел к стихийному материализму.

Будучи ученым «систематизирующего» склада ума, не оставляющим не прописанной ни одной детали в той обширной картине, которую он разворачивал перед читателем, Шрёдер счел необходимым предварить непосредственное содержание своих «Лекций по алгебре логики» философско-методологическим и психолого-семиотическим введением. В нем Шрёдер рассматривает природу человеческого мышления и характер управляющих им законов с тем, чтобы подвести читателя к пониманию феномена логического.

Свои философские рассуждения Шрёдер начинает с мысли о том, что для каждого человека существование его собственного «я» является не подлежащим сомнению, неоспоримым фактом. Он пишет:

> Осторожные философы во все времена исходили из этого самого надежного факта и должны столь же предусмотрительно поступать и в будущем ([1], Bd I, S. 18).

«Я» каждого человека, или, как говорит Шрёдер, его «микрокосм», слагается из последовательных состояний его сознания; оно представляет собой особый идеальный мир, мир широко понимаемого мышления человека. Сущность мышления заключается в объединении множественного и разнородного в единое. Из ощущений, восприятий, представлений, воспоминаний, уже готовых мыслей и убеждений, отличающихся друг от друга и представляющих только разрозненные данные, мышление человека, сводя воедино различное, создает целостное представление о мире. Природа этого процесса объединения множественного кажется Шрёдеру загадочной и даже непостижимой. Уже в простейшем случае двух ощущений трудно сказать, почему они соединяются в представление о едином явлении. Когда, например, человек видит на небе яркую вспышку света, а затем слышит раскаты грома, его сознание соединяет эти два ощущения разной модальности в единое представление о молнии. Однако это соединение таково, что ощущения сохраняют свою самостоятельность — они объединяются,

[14] См. ([84], с. 246).

но не сливаются. Поскольку они связаны с функционированием разных органов человеческого организма, можно предположить, что если бы организм был устроен иначе, складывающееся из ощущений представление было бы совершенно другим. И Шрёдер утверждает:

Это объединение, «положение единым» *двоякого* или многого, это «придание цельности множественному», совершающееся в сознании мыслящего субъекта, я считаю непостижимым процессом (ibid., S. 21).

Наряду с миром сознания человека, или *микрокосмом*, имеется также внешний мир, или *макрокосм*. Тем, что заставляет нас признать существование последнего, является, утверждает Шрёдер, «возникающий в раннем детстве и потом непрерывно продолжающийся внутренний опыт — переживание того, что мы не можем произвольно изменять определенные части непосредственно осознаваемого мира нашей мысли» (ibid., S. 22). Правда, другие части мира мысли или сознания мы можем формировать по своему усмотрению; мы способны, например, представить, когда нам этого захочется, зеленую новогоднюю елку, вообразить снежный покров, представить себе красный свет, вспомнить приятное событие и тому подобное. Существенно, однако, что в мышлении имеется содержание, не зависящее от нашей воли, — содержание, которое мы не в состоянии произвольным образом изменять или устранять. Мы, например, не можем по своей воле устранить чувство голода, когда его испытываем, игнорировать ярко слепящий свет, с трудом отгоняем мы отдельные воспоминания и т. д. Некоторые состояния нашего сознания мы воспринимаем как неприятные, связанные с чувством горя или скорби, некоторые — как безразличные, иные — как радостные, несущие наслаждение и удовлетворение. В определенной степени мы способны ограничивать наши психические реакции, но во многом они все же ускользают из-под контроля сознания. Шрёдер говорит:

И тому, что воспринимается нашим сознанием как *несвободное*, что уклоняется от непосредственного влияния нашей воли, мы приписываем *некоторой, лежащей вне нас причине*, и совокупность этих причин — причин, которым мы придаем собственное бытие, самостоятельное существование. . ., и образует для нас «не-я», или *внешний мир* (ibid., S. 25).

Таким образом, к утверждению о бытии внешнего мира Шрёдер приходит, отправляясь от положения о непосредственной данности нашего сознания и наличия в нем определенной «инертной», не подчиняющейся нашей воле части. Этот переход предполагает, согласно Шрёдеру, господство во всем нашем мышлении принципа причинности — принципа, в соответствии с которым мы должны указывать причину для всякого факта сознания. И именно потому, что в самом сознании нет ничего, чем можно было бы объяснить определенную ограниченность его содержания, мы вынуждены вынести причины этой ограниченности вовне и согласиться с существованием не только микро-, но и макрокосма. Этот переход предполагает также наличие у человека свободной в определенных пределах воли. Шрёдер считает, что наука подтверждает это последнее предположение и что, если даже свобода воли является иллюзией и в действительности наша воля связана некоторой необходимостью, у нас нет никакой возможности познать эту необходимость. При этом к внешнему миру относится не только все то, что лежит вне человека, но и его тело, хотя оно ближе к микрокосму, чем что-либо иное.

В заключение своих общефилософских рассуждений Шрёдер пишет:

Мы присоединились к обычному взгляду, признающему независимое существование внешнего мира, а в нем других людей вопросом, не вызывающим сомнения, окончательно решенным (ibid., S. 27).

По поводу концепции Дж. Беркли, согласно которой внешний мир не обладает реальностью, а является всего лишь иллюзией, навеянной человеку духом божьим, Шрёдер замечает, что это убеждение нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Его можно только принять или отвергнуть — без всякого обоснования. Шрёдер указывает при этом, что аргументация де Моргана, связывавшего признание внешнего мира с единообразием его человеческих представлений, — это окольный путь решения данного вопроса. Со своей стороны он приводит ряд доводов, призванных если не доказать существование макрокосма, то, по крайней мере, сделать более убедительной уверенность в его бытии. Шрёдер ссылается, в частности, на то, что наши ощущения и представления, возникшие в результате воспоминания, гораздо слабее непосредственно данных, навязанных нам чем-то внешним, чувственных впечатлений. Последние всегда сопровождаются переживанием напряжения и ожидания удовольствия или страдания. Мы не насытимся представлением о том, что съели лакомый кусок; от воображаемой боли мы страдаем гораздо меньше, чем от боли действительной. Представления о запахе фиалки недостаточно для получения удовольствия от него, так как у нас в этом случае отсутствует соответствующее ощущение.

> На этой невозможности непосредственного создания в нашем сознании ощущений, носящих приятный характер, а также чувственных впечатлений о чем-то, находящемся вне нас, и основывается вообще. . . наше познание внешнего мира. . . Именно из-за ограниченности нашей власти над содержанием нашего сознания в дальнейшем бывает так, что относительно многих представляемых вещей у нас сначала возникает только установка на выдвижение задач или *целей* — целей, достижение которых связано с поиском *средств*; что осуществления, реализации этой власти мы часто достигаем лишь окольным путем (ibid., S. 28—29).

Наши ощущения, представления, аффекты и состояния воли даны нам непосредственно; лишь они имеют доступ в наше сознание. С определенной вероятностью мы можем судить также о состояниях сознания других людей. Однако, полагает Шрёдер, мы не можем сказать, чем являются «сами по себе» вещи окружающего нас мира. Они реально существуют и даны нам в чувственном опыте, но мы не в состоянии «извлечь» их из этого опыта и судить о них беспристрастно. Наши ощущения определяются не только внешним воздействием на них, но и организацией самого человека, его органов чувств и мозга, и поэтому человек не может вообразить мир «сам по себе», схватить «вещь в себе». Физика сводит звук, тепло, свет к чему-то отличному от того, чем нам кажутся эти явления, — к процессам движения, к колебаниям материальных частиц. Зеленый луг вовсе не является зеленым независимо от воспринимающего его цвет человека; единственное, чем обладает луг, — это способностью интенсивного отражения падающего на него света в определенной части светового спектра.

> Образно говоря, мы не можем отделить картину мира от цвета тех очков, через которые мы смотрим на мир, отграничить их друг от друга, разобщить их (ibid., S. 30).

Если природу «вещей в себе» обозначить через a, субъективный момент, привносимый в восприятие вещей нашими органами чувств, — через x, а то, какими вещи нам являются, через A, то, пишет Шрёдер, склонный все переводить на язык математики, можно сказать, что A является функцией от x и a: $A=f(x, a)$. Поскольку мы не в состоянии уточнить значение x, мы не можем произвести переход от A к a: с достоверностью или хотя бы с вероятностью извлечь из A знание о природе a.

В этих рассуждениях Шрёдера о зависимости наших ощущений от устройства наших органов чувств и о принципиальной невозможности познания «вещей в себе» мало оригинального. Шрёдер просто повторяет то, что ему кажется твердо установленным «метафизикой» и получившим всеобщее признание в «профессиональных» философских кругах, а именно кантианское положение о жесткой грани, разделяющей мир «вещей в себе» и мир явлений, дополненное аргументами сторонников «физиологического идеализма». Шрёдер явно следует Г. Гельмгольцу, позиция которого отчетливо видна из следующей, приводимой В. И. Лениным, цитаты:

> Наши ощущения суть именно действия, которые вызываются в наших органах внешними причинами, и то обстоятельство, как обнаруживается такое действие, зависит, разумеется, весьма существенно от характера аппарата, на который оказывается действие. Поскольку качество нашего ощущения дает нам весть о свойствах внешнего воздействия, которым вызвано это ощущение, — постольку ощущение может считаться *знаком* (Zeichen) его, но не *изображением*. Ибо от изображения требуется известное сходство с изображаемым предметом. . . От знака же не требуется никакого сходства с тем, знаком чего он является ([84], с. 246—247) [15].

---

[15] О том, что мнение, отстаивавшееся Г. Гельмгольцем, было довольно распространено в Германии, говорит следующее рассуждение немецкого философа Ф. Ланге: «раз доказано, что качество наших чувственных восприятий вполне и совершенно зависит от устройства наших органов, то нельзя уже более устранять предикатом «бесспорно, но нелепо» то положение, что и вся та с в я з ь, в которую мы приводим наши чувственные восприятия, короче говоря, — весь наш о п ы т обусловлен психической

Э. Шрёдер повторяет также идею Гельмгольца о том, что к допущению вещей внешнего мира мы приходим, основываясь на законе причинности, который является априорной предпосылкой познания. Таким образом, к Э. Шрёдеру вполне приложимы слова В. И. Ленина, сказанные им о Гельмгольце: он «покушается провести подобие принципиальной грани между „явлением“ и „вещью в себе“» ([84], с. 247).

Следует, однако, отметить, что позиция Шрёдера в некоторых важных пунктах отличается от позиции Гельмгольца. Шрёдер, правда, говорит, что «вопрос о „сходстве“ некоторой „вещи в себе“ и нашего представления о ней, является, по-видимому [16]. . . бессмысленным. Вещь и представление о ней могут быть несравнимыми, подобно симфонии и живописи» ([1], Bd I, S. 31). Однако он настаивает на существовании определенного соответствия между «вещью в себе» и нашими представлениями о ней. Последнее может не быть взаимнооднозначным: вполне возможно, что наше сознание способно воспринимать каждую «вещь в себе» только как некоторое множество вещей; что оно не в состоянии познавать «вещи в себе», рассматриваемые изолированно друг от друга. Соответствие между представлением и вещью может напоминать отношение знака и обозначаемого, предмета и его имени, но несомненно, что оно должно иметь место и подчиняться определенным закономерностям. Мы читаем у Шрёдера:

> Все познание внешнего мира нуждается в той предпосылке, что в воздействии, оказываемом на нас вещами, в способе, каким они нам «являются», реализуется некоторая *необходимость* (определяемая природой вещей в себе, природой нашей способности восприятия и *отношением, взаимным расположением*, в котором находятся. . . вещи и наши органы чувств) (ibid., S. 29).

Именно благодаря этому, по Шрёдеру, мы вправе говорить не только о наших представлениях, но и о стоящих за ними «вещах в себе», несмотря на то что последние «настойчиво ускользают» от нашего познания. Например, располагая представлением о восходе Солнца и о наступлении дня, мы высказываемся о стоящих за этими представлениями «вещах в себе», например, говорим, что восход Солнца является причиной наступления дня. Базой для подобного утверждения являются не только наши субъективные представления (они, как таковые, могли бы быть связаны и произвольно), но и нечто, п р и н у ж д а ю щ е е нас в силу естественной необходимости признавать наличие причинной связи между двумя данными явлениями. Этим принуждающим нас фактором является закономерное соответствие между внешними вещами и нашими идеями о них [17]. Без такого соответствия эмпирическая наука была бы попросту невозможна. Нельзя было бы даже поставить такие вопросы, как вопрос о том, есть ли вода на обратной стороне Луны (так как эта сторона, говорит Шрёдер, никогда и никому не была еще дана в опыте), или о том, является ли реальное физическое пространство трехмерным (и это несмотря на то, что данное в опыте пространство вне всякого сомнения трехмерно).

Признание объективно необходимого соответствия между «вещью в себе» и нашим представлением о ней позволяет, продолжает Шрёдер, объяснить целый ряд различий, которые оказываются совершенно непонятными в случае, если такое соответствие отвергается. Например, исходя из упомянутого соответствия можно показать, что представление о некоторой вещи может отличаться от представления о ее представлении: если представление о лошади живо, из этого еще не следует, что жива и сама лошадь; вполне допустимо также отвергать наличие измерений у представления о пространстве, признавая вместе с тем трехмерность самого пространства.

Приведенные высказывания Э. Шрёдера говорят о непоследовательности его материалистических установок, о том, что он находился под влиянием распространенного

организацией, которая заставляет нас испытывать то, что мы испытываем, и мыслить так, как мы мыслим» ([85], с 3—4).

[16] Здесь Шрёдер делает ссылку на труд Г. Гельмгольца [86]. Заметим, что приведенная выше ленинская цитата из Гельмгольца также взята из этого труда ([86], S. 226).

[17] Н. И. Стяжкин в книге «Формирование математической логики» утверждает, что в методологических установках Шрёдера преобладают стихийно-материалистические тенденции. При этом он ссылается на только что изложенное место из шрёдеровских «Лекций» (см. [7], с. 351). Очевидно, однако, что приведенное рассуждение Шрёдера свидетельствует только об убеждении немецкого математического логика в наличии некоторой объективной связи между «вещами в себе» и нашими представлениями о них.

в его время кантианства. Шрёдер признавал существование независимого от человеческого сознания внешнего мира и наличие объективной закономерной связи между ним и нашими представлениями о нем, однако, оперируя кантианским понятием «вещи в себе», не мог объяснить процесса перехода от незнания к знанию. Ему было чуждо понимание роли критерия практики в познании, в свете которого только и делается понятным, как «вещь в себе» становится «вещью для нас».

Вопрос о предмете логики

Согласно Э. Шрёдеру логика в широком смысле слова должна заниматься исследованием правил, соблюдение которых способствует познанию истины. Поскольку постижение истины есть дело мышления, предмет логики можно предварительно определить как мышление, конечной целью которого является познание истины.

Познающее мышление, направленное на установление истины, Шрёдер противопоставляет художественному творчеству, мышлению в фантастических образах, простому повествованию и описанию. Только первое является собственным предметом логического изучения и только к нему непосредственно относятся принципы, открываемые в процессе логического исследования. Предметом логического анализа не могут быть, по мысли Э. Шрёдера, также и высказывания, выражающие юридические нормы. Это же, считал он, верно и относительно тех мыслительных процессов, которые непосредственно связаны с состояниями наших чувств и воли — призывами, желаниями, вопросами, просьбами, приказами, для выражения которых в языке имеются междометия, восклицательные частицы, а также оптативные и повелительные формы глаголов (см.[1], Bd I, S. 1); все эти процессы не относятся к сфере логики.

Таким образом, Шрёдер занимал традиционную для логической науки своего времени позицию, согласно которой из сферы логического заранее исключалась значительная часть языково-мыслительных процессов — и это несмотря на то, что, например, попытки распространения логического подхода на вопросительные предложения имели к тому времени уже достаточную историю.

Необходимой предпосылкой логики, как и всякой иной науки, является, согласно Э. Шрёдеру, тезис о том, что помимо познающего субъекта существует также познаваемое им, — некоторая «истина», являющаяся единственной в каждом конкретном случае и признаваемая с необходимостью всеми, кто имеет интеллект, подобный нашему, обладает нормальной силой ума и находится в условиях, благоприятных для познания. Этот тезис относится к теории познания, и возникает вопрос, можно ли развивать логику как научную дисциплину в условиях, когда — как считал Шрёдер — не существует надежного обоснования этого тезиса. Отвечая на этот вопрос утвердительно, он критикует тех, кто изображает гносеологию как ступень, предшествующую логике, или пытается вплести ее в само изложение логики. В действительности, утверждает Шрёдер, логика обладает известной самостоятельностью в отношении теории познания и философии вообще и в определенном смысле должна предшествовать им. Всякое обоснование и всякое исследование, в том числе и теоретико-познавательное исследование, требуют рассуждений, проводимых по правилам логики. И если бы логика вознамерилась ждать своего обоснования от теории познания, которая в свою очередь пользуется логикой, то неизбежно возник бы замкнутый круг. На деле же формальную логику как особую дисциплину можно развивать независимо от гносеологии (ibid., S. 2).

В логике принято выделять две части: *дедуктивную логику* и *логику индуктивную*. Последняя, говорит Шрёдер, имеет дело с принципами, касающимися проведения наблюдений, опытов и экспериментов. Индуктивная логика исследует вопрос о том, как происходит использование опытных данных для расширения знания. Она выясняет, как на основе тех немногочисленных фактов, которые доставлены нам восприятием, благодаря процессу обобщения (индуктивного умозаключения, индукции) становится возможным переход к универсальным общим суждениям (правилам или законам), охватывающим и объясняющим не только наблюдавшиеся уже явления некоторого рода, но и явления (того же рода), которые не воспринимались ранее. Индуктивная логика свидетельствует о том, что информация, получаемая в результате индуктивного обобщения, не является непогрешимой, абсолютно надежной, что она может претендовать только на бо́льшую или меньшую вероятность.

Свой анализ Шрёдер ограничивает дедуктивной логикой, называемой им также «логикой в узком смысле», «формальной логикой» и «логикой в смысле древних»[18]. В первом приближении, говорит он, дедуктивную логику можно определить как исследование законов логически последовательного мышления. Это определение является не особенно ясным, так как трудно сказать, что́ именно представляет собой такое мышление. Очевидно, что выражение «логически последовательное» говорит больше, чем просто «последовательное», так как бывает «последовательность наизнанку», последовательная нелогичность. Но ни «последовательное», ни «логически последовательное» не является самоочевидной характеристикой мышления.

Некоторые современные Э. Шрёдеру логики считали, что отличительной особенностью логически правильного, последовательного (folgerichtig) мышления является его непротиворечивость. Шрёдер в связи с этим указывает, что свойство логически последовательного мышления не вступать в противоречие с самим собой, разумеется, необходимо, однако как таковое оно неспособно объяснить природу логической последовательности. Прежде всего не является вполне ясным само понятие «противоречия». Пытаясь уяснить это понятие, Шрёдер делит все противоречия на непосредственные и опосредованные (явные и скрытые). Первые могут быть четко определены, попытка уточнения вторых совершенно безнадежна. Противоречие может содержаться уже в отдельном высказывании: «Я не могу говорить», «Я умер», «Круглое тело не является круглым», «Если данное событие произойдет, то оно не произойдет», «Бытие есть небытие» и т. п. Наиболее ясными примерами противоречий являются противоречия, составленные из двух высказываний, одно из которых является отрицанием другого: «*А* есть *В*» и «*А* не есть *В*», «Это утверждение истинно» и «Это утверждение не является истинным», «Марс обитаем» и «Марс не обитаем» и т. п. Но при переходе к дальнейшим примерам схема противоречия неизбежно размывается. Например, высказывания «Некоторые люди умны» и «Некоторые люди не умны» не выражает противоречия, так как во втором суждении могут иметься в виду не те люди, о которых утверждается в первом суждении.

Противоречивость высказывания, согласно Шрёдеру, является его чисто формальным свойством. В ее наличии можно убедиться, заменяя содержательные части противоречивого высказывания частями противоположного содержания и вновь получая противоречивое высказывание («Марс обитаем и Марс не обитаем» — «Марс является необитаемым и Марс не является необитаемым»). Очень важным является, по мнению Шрёдера, и то, что всякое явное противоречие допускает сведе́ние к противоречию, слагающемуся из некоторого высказывания и его отрицания. Можно, таким образом, сказать, что высказывание «Круглое тело не является круглым» противоречиво, так как вместе с аналитически истинным высказыванием «Круглое тело является круглым» оно порождает противоречие упомянутого выше вида.

Скрытые противоречия могут сводиться к явным, но, как подчеркивает Шрёдер, само это сведе́ние требует обращения к логически последовательному мышлению. Последнее не может поэтому о п р е д е л я т ь с я как мышление, являющееся внутренне непротиворечивым. Против такого определения говорит и тот факт, что теоретически возможно бесконечное множество непротиворечивых исчислений, претендующих на описание мышления. Из одного того, что какое-то из этих исчислений непротиворечиво, не следует еще, что оно является правильным описанием реального мышления.

Таким образом, заключает Шрёдер, принцип непротиворечивости не является единственным принципом, определяющим логически последовательное дедуктивное мышление. Он не вполне ясен из-за существования наряду с явными также скрытых противоречий и не позволяет однозначно выделить логическое исчисление из бесконечного множества возможных непротиворечивых описаний мышления. Логически последовательное мышление может быть определено с достаточной полнотой только путем ссылки на то, что оно связано с сознанием очевидности,

[18] Э. Шрёдер не придавал значения античному учению об индукции, что, вероятнее всего, было связано с тем, что в его время индуктивные теории греко-римских авторов (в частности, Филодема из Гадары, жившего в I в. до н. э.) не были еще реставрированы (ср. [87], с. 102—112).

ясности и оставляет впечатление чего-то такого, что совершается по необходимости и с убеждением абсолютной достоверности. Коротко говоря, логически последовательное мышление, по Шредеру, есть не просто непротиворечивое мышление — это мышление необходимое.

Пытаясь разъяснить смысл *логической необходимости*, Э. Шредер указывает следующие ее характеристики. Прежде всего она не носит субъективного характера, так как является одной и той же для всех мыслящих людей. Из нее вытекает требование непротиворечивости, так как именно она заставляет в случае двух противоречащих друг другу суждений принять одно и отбросить другое. Она не распространяется на индуктивные выводы, которые могут «*не* давать убеждения в абсолютной достоверности, полной безошибочности истины и которые поэтому все относятся не к области логически последовательного мышления, а к эмпирическому познанию» ([1], Bd I, S. 9).

Было бы натяжкой видеть в этих рассуждениях Шредера явные предвосхищения развернувшихся в математической логике и основаниях математики десятилетия спустя дискуссий о роли критерия непротиворечивости в математико-логических теориях. Но определенное сходство их с исходной установкой брауэровского интуиционизма усмотреть, пожалуй, можно. Шредеровские взгляды — там, где автор «Лекций по алгебре логики» говорит о сознании очевидности, ясности, необходимости логических переходов, отдавая «логической очевидности» приоритет перед непротиворечивостью, — носят, так сказать, «протоинтуиционистский» характер. Эту характеристику укрепляет и четко проводимая Шредером установка на, говоря современным языком, семиотическое обоснование логики (см. ниже).

Вернемся, однако, к шредеровскому пониманию логической необходимости. Дедуктивное мышление, в котором господствует рассматриваемая необходимость, включает, во-первых, аналитические истины, т. е. утверждения, истинные независимо от каких-либо фактов, в силу одних только значений входящих в них терминов (Шредер называет такие утверждения «тождественными суждениями»), и, во-вторых, логически необходимые переходы от имеющихся убеждений (Überzeugungen) к новым убеждениям. Именно эти переходы являются собственным предметом дедуктивной логики. Дедукция исключает апелляцию к фактам, к знаниям, не зарегистрированным среди уже «имеющихся». Восприятие в случае дедукции играет вспомогательную роль: оно ограничено наблюдением имен или знаков вещей, проведением различий между знаками и отождествлением двух разных случаев появления одного и того же имени или знака. Поэтому, говорит Шредер, при решении вопросов, касающихся правомерности дедукции, незрячий может оказаться в худшем положении, чем зрячий, так как лишен способности к визуальному опознаванию знаков.

Восприятие формы знаков является самым простым видом наблюдения, менее всего подвержено ошибкам и может приводить к одинаковым результатам самых разных людей. Именно на этой простоте знаковой деятельности — столь существенной для дедукции — основывается наше убеждение в непогрешимости дедуктивного рассуждения как процесса перехода от наличных убеждений к новым убеждениям. В «Лекциях по алгебре логики» мы читаем:

> если этот процесс носит чисто дедуктивный характер, так что в ходе него не привлекаются никакие новые восприятия, касающиеся тех самых вещей, о познании которых идет речь, то в нем нельзя апеллировать к тем фактам опыта, которые не были ранее зарегистрированы в числе «имеющихся», т. е. в числе тех познавательных данных или убеждений, которые были приняты в качестве исходного пункта дедукции. . . Однако дедукция не совсем отказывается от мощных вспомогательных средств чувственного восприятия. А именно, допускается зрительное восприятие имен или *знаков* вещей. Как раз в высшей своей форме, когда дедукция при решении самых запутанных из своих задач прибегает к *вычислениям*, обнаруживается, что наблюдение знаков является ее существенным и характерным признаком (ibid., S. 10).

Шредер подчеркивает нормативный, общеобязательный характер законов дедуктивной логики, указывая на то, что необходимость, находящая в них свое выражение, отлична как от физиологически-психологической, так и от физической необходимости. Все, что происходит в мире, пишет он, имеет причину и является в этом смысле необходимым. Наличие в определенный момент у определенного человека определенных мыслей можно объяснить физическими и физиологическими причинами, но открываемая при этом необходимость окажется разной для разных людей, даже если они размышляют как будто совершенно одинаково. Кроме того, необходимым в этом смысле будет всякое реальное размышление, независимо от того, является оно правильным или нет. С точки зрения же логики необходимо только правильное мышление, от истины всегда ведущее к истине. Законы логики — это не законы реального эмпирического мышления, а нормативные предписания, определяющие, чтó должно быть сделано для обнаружения истины. Логически последовательное мышление определяется Шрёдером как объективно необходимое мышление, одинаковое для всех людей и исключающее обращение к опыту для проверки своей правильности (ibid., S. 12—13). В конечном счете убеждение в надежности и общеобязательности логически последовательного мышления, в его объективной необходимости является постулатом, лежащим в фундаменте не только любого дедуктивного рассуждения, но и науки вообще. Если отбросить этот постулат, наука исчезнет — останется только субъективное, случайное мнение.

Шрёдер отказывается дальше продолжать уточнение того, чтó собой представляет необходимость, характерная для законов дедуктивной логики. Для этого, говорит он, потребовалось бы ответить на вопросы: Что такое мышление? Что такое необходимость? Что такое закон? и тому подобное. Эти темы можно обсуждать до бесконечности, не приходя к согласию. Кроме того, попытка ответить на указанные вопросы до исследования конкретных законов мышления была бы не только трудным, но и преждевременным делом. Логика в известной мере независима от философии («метафизики», говорит Шрёдер, и теории познания) и психологии, и ее можно развивать, не обращая внимания на ответы, которые даются на приведенные — и подобные им — вопросы. Именно эта независимость дает логике возможность развиваться, не ожидая решения многих теоретико-познавательных проблем, и устанавливать то неопровержимое ядро, вокруг которого можно было бы сосредоточить все ветви философии и знания вообще (ibid., S. 17—18).

В этих рассуждениях Шрёдера о предмете логики и о необходимом нормативном характере ее законов особый интерес представляет их ясно выраженная *антипсихологическая* направленность. Во второй половине XIX в. для исследования психики человека стал применяться экспериментальный метод и возникла новая «точная» дисциплина — экспериментальная психология. Стремление связать философию с некоторыми интенсивно развивающимися областями конкретных научных исследований привело к развитию концепции «психологизма» в логике — концепции, претендовавшей на роль точной и вместе с тем связанной с экспериментом логической теории [19].

Психологический подход к логике и теории познания в последней трети XIX в. был преобладающим. Особенно прочными его позиции были в Германии (Х. Зигварт, В. Вундт, Ф. Брентано, Т. Липпс, Б. Эрдман и др.). «Психологисты» считали логику частью психологии, отрицали специфический нормативный характер законов логики и призывали заниматься не идеальными нормативными связями мыслей, а реальной «физикой мышления», действительным его функционированием. В этой обстановке растущего влияния психологизма твердая и последовательная антипсихологическая позиция Шрёдера (как и его младшего современника — Г. Фреге), критика им немецких «логических психологистов» выполняла важную функцию. Антипсихологические представления Шрёдера о логически последовательном мышлении были очевидным образом связаны с общей его установкой на описание логической последовательности в рамках некоторого «универсального», не допускающего субъективизма и двусмысленности исчисления. Концепция антипсихологизма оказала влияние на современных Шрёдеру логиков и философов, в частности на Э. Гуссерля, который после периода увлечения психологизмом выступил с его резкой критикой.

В первой своей книге — «Философия арифметики, том I», вышедшей в 1891 г. [89], Гуссерль занимал последовательно психологическую позицию, следуя в основном идеям своего учителя Ф. Брентано. Эта позиция была подвергнута критике в рецензии Г. Фреге [90],

[19] О психологизме в логике см., например, [42], [88].

которая произвела на Гуссерля большое впечатление. Он отказался от замысла создания второго тома упомянутой книги. Вместо этого им был написан обширный труд «Логические исследования» (его первый том вышел в 1900 г.) [91]. В нем Гуссерль выступил с критикой психологизма, в частности логического психологизма Х. Зигварта. От этой работы ведет свое происхождение и сам термин «психологизм», означающий, как разъясняет Т. Котарбиньский, приписывание психологической природы непсихологическим проблемам и положениям, в частности положениям логики. «После борьбы Гуссерля с Зигвартом, — пишет Т. Котарбиньский, — дело психологизма в формальной логике было и остается проигранным» ([42], с. 566). Польский ученый, однако, не вполне прав, заявляя, что Гуссерль «стал зачинателем и победоносным поборником антипсихологизма» (там же, с. 566). Как отмечает сам Котарбиньский, задолго до Гуссерля противником психологизма в логике и теории познания был Б. Больцано, стремившийся последовательно разграничить логическое как мыслительное с о д е р ж а н и е от психологического как мыслительного п р о ц е с с а. Против психологизма до Гуссерля выступали в Германии также неокантианцы (Г. Когэн, П. Наторп и др.). Самое же важное, пожалуй, состоит в том, что антипсихологическая установка в логике естественным образом возникала из применения в ней математических методов, и так называемые точные — т. е. математические — логики, наиболее видными представителями которых были Г. Фреге, Ч. Пирс и Э. Шрёдер, «автоматически» заняли антипсихологические позиции.

Э. Гуссерлю были известны работы Шрёдера: он написал обстоятельную критическую рецензию [15] на первый том «Лекций» Шрёдера, а именно во введении к этому тому Шрёдер подробно обсуждает проблему нормативного и объективно необходимого характера законов логики. Через работы Шрёдера Гуссерль мог познакомиться и с представлениями о формальной логике Ч. Пирса. И можно предположить — хотя Гуссерль [91] об этом не говорит, — что позиция математических логиков оказала на него определенное влияние [20].

[20] Следует также отметить, что К. Штумпф, который был учителем Э. Гуссерля в период пребывания последнего в Галле в 1884—1888 гг. и которому Гуссерль посвятил свои «Логические исследования», не являлся чистым сторонником психологизма. Соответствующие взгляды Штумпфа явились, по существу, связующим звеном между идеями другого учителя Гуссерля — Ф. Брентано и учением самого Гуссерля. Стоит, пожалуй, упомянуть и о том, что, перейдя на позиции антипсихологизма, Гуссерль выступил не только против психологистов (и прежде всего Х. Зигварта) — и не только против неокантианцев — он критиковал и математических логиков. Однако здесь не место входить в детали его логико-философской концепции.

«Точные» логики были сходны в убеждении, что законы логики являются не простыми описаниями эмпирически данных процессов рассуждения, а имеют нормативный характер. Законы логики — это нормы или условия, с которыми должно сообразовываться рациональное рассуждение, если оно претендует на обоснованность, на способность вести от истины к истине. Законы логики, утверждали и Г. Фреге и Э. Шрёдер, — это законы истины, те необходимые и объективные условия, нарушение которых лишает рассуждение его принудительной силы и не позволяет ему постигать истину.

«Психологисты» тоже отмечали нормативный аспект логических законов. Например, Х. Зигварт (мыслитель, которому Шрёдер во многом следовал в философской интерпретации логики) считал, что задачей логики является руководство мышлением в поисках истины, а свою концепцию логики называл «нормативно-психологической» (см. [92]). Он правильно отмечал, что логика строит искусственные языки и логические схемы верных рассуждений. Вместе с тем он полагал, что она является эмпирической наукой в том смысле, что при построении этих схем и при их интерпретации опирается на определенные факты, касающиеся мышления и открываемые экспериментальной психологией. В отличие от этого математические логики, в частности Шрёдер, решительно отвергали психологическое обоснование законов логики, подчеркивая объективно необходимый и общеобязательный характер последних.

Среди математических логиков той эпохи наиболее последовательным и резким антипсихологистом был Г. Фреге. Даже у Шрёдера он находил определенные элементы психологизма. В труде «Основания арифметики»

[52] он указывает на «специальную аксиому» Шрёдера, введенную последним в «Учебник арифметики и алгебры», как на пример того, что математик тоже способен смешивать основания доказательства с психологическими или физическими условиями его осуществления (эта аксиома, именуемая Шрёдером «аксиомой стабильности символов», утверждает, что на протяжении каждого рассуждения или доказательства знаки должны оставаться в нашей памяти — или лучше на бумаге — неизменными) [21].

Нам представляется, что с позиций современных логики и кибернетики не следует торопиться с провозглашением бескомпромиссной концепции логического антипсихологизма наподобие фрегевской. Проводимые в настоящее время работы по моделированию познавательных процессов и «искусственному интеллекту» предъявляют определенные требования к известному синтезу логической и психологической позиций в изучении мышления (с.[93]). Синтез этот связан с семиотической установкой, все четче проявляющейся в логико-методологическом аппарате современной науки, с более широким пониманием сферы логического, с распространением метода логической формализации на нормы, оценки, вопросительные предложения и др. Сопоставляя с этой точки зрения антипсихологизм Шрёдера и Фреге, мы приходим к заключению, что, хотя Фреге в данном вопросе был, несомненно, гораздо последовательнее автора «Лекций по алгебре логики», взгляды последнего были, так сказать, более гибкими. Шрёдер рано умер, Фреге же прожил до 1925 г., и его воззрения претерпели значительную эволюцию. К концу жизни ему пришлось — при продумывании новой, отличной от логицизма, концепции обоснования математики — привлечь к своему анализу феномена логического, именно психолого-семиотические соображения (см. первый том «Наследства» Фреге [80] и введение к нему [94], написанное Г. Гермесом, Ф. Камбартелем и Ф. Каульбахом; ср. также рецензию [82]).

[21] Н. И. Стяжкин относит эту аксиому к «начаткам семиотических высказываний» в трудах Э. Шрёдера (см. [7], с. 356). Как мы увидим ниже, у автора «Лекций по алгебре логики» были не просто «начатки» семиотики — ему принадлежат достаточно обстоятельные рассмотрения семиотического характера.

Для взглядов Шрёдера на предмет формальной логики характерно подчеркивание того, что логика имеет дело с анализом способов получения истин. Оправдание существования логики как науки, говорит он, состоит в том, что она позволяет разграничивать умозаключения правильные и умозаключения неправильные. Трактуя дедуктивное *логическое следование* как главный объект логических исследований, Шрёдер формулирует общепринятое ныне в логике (и глубоко уходящее в ее историю) семантическое определение этого понятия, согласно которому «схема рассуждения» (Schlussfolgerung) правильна, если при любой интерпретации входящих в нее внелогических выражений она из верных посылок позволяет получать верное же заключение (поэтому для демонстрации логической неправильности схемы рассуждения достаточно обнаружения единственного примера, в котором посылки должны быть признаны истинными, в то время как заключение — ложным). Все выражения, не являющиеся ни истинными, ни ложными, исключаются им из поля зрения логики; в результате оказывается, что логика неспособна участвовать в обосновании норм, планов, целей и т. п. — языково-мыслительных образований, существенно связанных с использованием выражений, лишенных истинностных значений.

Развитие современной логики показало, что подобное сужение предмета логики лишено убедительных оснований. Но в эпоху Шрёдера такое понимание логики господствовало почти безраздельно. В этом отношении автор «Лекций по алгебре логики» просто шагал «в ногу с веком».

Подведем итог сказанному в данном разделе. Э. Шрёдер неуклонно стремился провести ясное различие между формальной логикой, с одной стороны, теорией познания и психологией мышления — с другой. В условиях конца прошлого века, когда эти области исследования обычно четко не разделялись и их изложение переплеталось, идея Шрёдера об относительной независимости логики от теории познания, о независимости ее выводов от заключений экспериментальной психологии, о возможности разработки логического исчисления без ссылок на психолого-гносеологические аргументы имела прогрессивный характер и способствовала росту самостоятельности математико-логических исследований и более энергичному их развертыванию. Шрёдер, однако, склонен был переоценивать «самостоятельность» логики; в ее взаимоотношениях с гносеологией и психологией он учитывал только «статическую» сторону, связанную с тем, что логика дает теории познания и психологии формальный аппарат, необходимый для оценки правильности проводимых рассуждений. «Динамическая» сторона их взаимоотношений, связанная с тем, что гносеология и психология служат источником новых постановок задач в логике, импульсом к созданию новых логических исчислений и источником их интерпретаций, наконец, полем приложений математико-логического аппарата, осталась так и не учтенной в подробнейшем логико-философском анализе, осуществленном Шрёдером.

Семиотические рассмотрения

Выше мы касались взглядов Шрёдера на отношение формальной логики — прежде всего алгебры логики — к гносеологии как области, в определенном смысле предшествующей логике. Но не только теоретико-познавательные рассмотрения служат уяснению исходных пунктов логических конструкций. Имеется еще одна исследовательская сфера, выводы которой немаловажны для логики. Это теория знаковых систем, общая теория языков — естественных и искусственных, или семиотика, особенно тот ее раздел, который касается вопросов смысла знаков и их отношения к обозначаемым ими внеязыковым реалиям, — семантика. На протяжении всей истории логики последняя была тесно связана с рассмотрениями семиотического характера. Более того, логика — формальная логика, математическая логика — явилась одной из тех наук, идеи которой легли в основу с о в р е м е н н о й семиотики как науки, тесно взаимодействующей с кибернетикой и включающей в себя такие направления разработок, как теории информационно-поисковых языков, порождающих грамматик и формализованная логическая семантика.

Из логиков прошлого столетия, работы которых оказали существенное влияние на формирование центральных идей и проблем семиотики, ныне принято

называть Ч. Пирса, Г. Фреге и Дж. Пеано. Историческая справедливость требует, однако, чтобы в число предшественников семиотики был включен также их современник Э. Шрёдер. Он вложил много труда и таланта не только в разработку логических проблем языка, но в развитие общих представлений о знаках и знаковых системах. Он постоянно подчеркивал громадную важность знаков в жизни человека и общества, необходимость их глубокого и тщательного исследования. Им были выдвинуты и проанализированы требования, которым должны удовлетворять знаки, используемые в научном языке («принципы обозначения»), в логическом плане рассмотрена классификация знаков и имен. Определенный вклад Шрёдер внес также в разработку логической символики и терминологии и в анализ проблем, связанных с построением «совершенного» языка. Все это показывает, что Шрёдера с полным правом можно отнести к тем, кто стоит у истоков современной семиотики.

К вопросу о функции знаков в процессе познания Шрёдер обращался неоднократно. Особый интерес представляют в связи с этим его работы «О знаках» и «О пасиграфии», а также раздел В помещенного в томе I «Лекций» Введения — раздел, который Шрёдер озаглавил «Предварительные рассмотрения, касающиеся знаков и имен». Рассмотрения эти начинаются с того, что Шрёдер отмечает А. Тренделенбурга как мыслителя, которому он следует в оценке познавательного значения знаков. Работа Тренделенбурга «Очерки по истории философии» [95], первые две главы которой посвящены Лейбницу, особенно Лейбницевому проекту «всеобщей характеристики» (см. ниже), широко используются Шрёдером [22]. Однако Шрёдер учитывает не только взгляды Лейбница — в своем анализе он принимает во внимание также семантическую теорию Дж. Милля и концепцию

---

[22] Освещением математико-логических идей Лейбница эта работа А. Тренделенбурга выгодно отличается от известного сочинения того же автора — «Логические исследования», имеющегося в русском переводе [96]; последнее, если говорить о логике, целиком развертывалось в русле доматематической логики. Хотя в библиографию к тому I своих «Лекций» Э. Шрёдер включил ссылку на третье издание упомянутых исследований [97] (их первое издание вышло в 1840 г., т. е. задолго до «Очерков» [95]; русский перевод сделан со второго издания, появившегося в 1862 г.), в своем труде он мало принимал его во внимание.

С. Джевонса, в отличие от семантики Милля связанную с математическим представлением логики. О чрезвычайной важности знаков и вытекающей из этого необходимости их глубокого изучения Шрёдер говорит в ряде других работ. При этом он обычно указывает на Лейбница, являющегося, по меткому выражению Г. Шольца, величайшим теоретиком символики. В своем докладе «О пасиграфии», речь о котором пойдет в следующем разделе этой статьи, Шрёдер с сочувствием повторяет высказывание Лейбница о том, что, кроме основателя религии или правителя государства, вряд ли кто-нибудь мог бы оказать бóльшую услугу человечеству, чем тот, кто изобрел бы совершенный символический язык (см.[77], с. 147).

Исходным пунктом семиотических рассуждений Шрёдера является то положение, что развертыванию любой, даже самой элементарной из дедуктивных наук, должно предпосылаться указание на чрезвычайную важность *знаков*. Введение знаков представляется Шрёдеру едва ли не тем, что решающим образом способствовало возвышению человеческого рода над миром животных. Он пишет:

> По-видимому, только с переходом к «обозначающей» или «символизирующей» деятельности. . . человеческий род на деле сдвинулся с абсолютного нуля цивилизации и поднялся над уровнем животного мира; едва ли существует что-либо, что в такой же мере способствовало прогрессу человеческого духа, в какой способствовал *знак* вещи ([1], S. 38).

Благодаря тому что знаки срастаются с представлениями, говорит Шрёдер, употребление знаков позволяет значительно усилить человеческое мышление. С помощью знаков можно разделить слившиеся друг с другом представления, присвоив каждому из них свое имя и зафиксировав тем самым их различие. Используя знаки, можно, далее, из получившихся отдельных представлений образовать новое единство, которое отличается от прежнего уясненностью своей структуры. Знак является средством, с помощью которого мы схватываем вещи и формируем абстрактные представления. Если бы не было знаков, мы оказались бы не в состоянии оторваться от чувственных впечатлений и подняться до всеобщности:

> пользуясь словесными знаками, мышление получает, с одной стороны, свободу, с другой стороны, — определенность. — Далее, только благодаря знаку, делающему возможным единство мысли и цели у многих людей — *одну* волю, *одну* душу, осуществляется то единение человеческих сил, на которое опирается жизнь человека как индивида, принадлежащего всему поколению, опирается воспитание и образование (ibid., S. 38).

Особенно велика роль письменных знаков, связывающих людей в пространстве и времени. «Письменность формирует и умножает исторический дух человечества», «знак, объединяющий людей, летит невидимым лучом от страны к стране, от одной части света к другой, охватывая своим господством весь земной шар» (ibid., S. 39).

Те огромные преимущества, которые дает употребление знаков, прямо указывают на необходимость глубокого и тщательного их изучения и умелого применения. Подчеркивая могущество знаков и слагающегося из них языка, Шрёдер одновременно отмечал и то, что неправильное употребление и переоценка возможностей знаков и языка способны заводить человеческую мысль в тупик. «Самым действенным и самым щедрым средством для достижения обширного и всестороннего взаимопонимания между людьми является, несомненно, язык» (ibid., S. 37), говорит Шредер — и однако же в другом месте с одобрением цитирует четверостишье поэта В. Шефеля, которое в прозе можно передать так:

> Язык рафинированно богат, но он имеет границы, и я думаю, что еще нет слов для выражения самых тонких и глубоких мыслей (ibid., S. 143).

Э. Шрёдер указывает, что знаки нужны не только для передачи другим наших мыслей, но и для формирования самих мыслей. В этой функции знаки оказывают огромное влияние на мышление. Неудачные знаки, плохо построенный язык даже простую проблему способны сделать неразрешимой; а задача, получившая адекватное знаковое выражение, нередко оказывается наполовину решенной. Язык могуч, но его могущество имеет пределы; он не является абсолютно совершенным. Шрёдер присоединяется к словам Ф. Бэкона, сказавшего, что не только рассудок господствует над словами, но и слова оказывают могущественное влияние на рассудок.

> Поэтому мы должны согласиться с Джевонсом, который говорит, что с точки зрения приобретения навыков корректного мышле-

ния и рассуждения ничто не имеет большего значения, чем основательное знакомство с великими несовершенствами языка (ibid., S. 52).

Умелое введение и употребление знаков должно подчиняться целому ряду требований, именуемых Шрёдером *принципами обозначения* (Principien der Bezeichnung). Шрёдер подробно рассматривает три следующих требования: знак должен быть компактным, он должен быть рационально составленным и, наконец, связываться с одной и только одной вещью.

То, чем является знак как таковой, каким образом он может быть построен из более простых знаков, ни в коем случае не может быть для нас полностью безразличным. Знаки, служащие для частого употребления, должны быть прежде всего достаточно короткими и простыми, всякое их усложнение и увеличение оказывает тормозящее влияние на мышление. Используя громоздкие знаки, мы столь же мало в состоянии продвинуться в любом рассуждении, как и в том случае, если бы высекали на камне название каждого используемого нами представления, писал Шрёдер. Из знаков, имеющихся в языках, лучше всего удовлетворяют требованиям компактности б у к в ы. Их число невелико, но оно может быть как угодно увеличено приписыванием цифр в качестве индексов. Буквы используются, как правило, в качестве переменных; для специальных понятий полезно вводить особые знаки. Следует, однако, помнить, что изобретение или выбор нового знака не является полностью произвольным; его следует согласовывать с исторической традицией и соображениями целесообразности.

Сложный знак должен быть рационально составлен из более простых или самых простых знаков. Многословные имена, являющиеся пространными описаниями, конечно, не удовлетворяют этому требованию.

В силу бесчисленных несовершенств словесного языка — несовершенств, которые хотя и объяснимы исторически, однако ни в коей мере не могут быть оправданы объективно, — пользование языком требует нередко высокой степени умения (ibid., S. 47).

Наиболее существенным, фундаментальным требованием к *знакам* и *именам* — Шрёдер употребляет понятие имени не в языковедческом, а в логическом смысле,

близко к тому значению, в каком это понятие используется Дж. С. Миллем, о чем речь ниже, — является требование, чтобы знак, имя при каждом появлении (во всяком случае, в определенный отрезок времени) вызывало или возбуждало одно и то же представление, одну и ту же мысль и у того, кто его производит, и у того, кто его воспринимает. Отступление от этого требования противоречит самой цели акта обозначения и лишает процесс познания всех преимуществ, связанных со знаками. Если говорящий отступает от значения, приданного им ранее какому-то знаку, имени, заменяет это значение другим, то слушателю невозможно понять, о чем, собственно, идет речь. Обозначение не может быть успешным, если взаимосвязь между знаком и обозначаемой им вещью все время изменяется, если имена ускользают, так сказать, от представляемых ими вещей и значения большинства входящих в рассуждение знаков не сохраняются неизменными хотя бы временно, до окончания предпринятого рассуждения. «Имя должно иметь некоторое твердо установившееся или постоянное значение; в своем применении оно должно быть *«односмысленным»* или быть nomen *univocum*» (ibid., S. 48). Если в одном и том же месте находятся одновременно три господина Мюллера, то легко представить себе, пишет Шрёдер, ту путаницу или даже конфуз, которые могут возникнуть, если назвать или упомянуть «господина Мюллера».

Требование однозначности имен устанавливает тот идеал, к которому должны стремиться все языки и к которому они постепенно приближаются в процессе своего развития; Шрёдер говорит:

подобно тому как вещь и *представление* о вещи находятся в закономерном однозначном соответствии друг с другом, так и между тем, что представляется, и его знаком должно сформироваться однозначное соответствие, т. е. вещь и ее знак должны выступать как однозначно связанные друг с другом, так что последний может быть с полным правом назван заместителем или представителем первой (ibid., S. 48).

Одна и та же вещь может иметь много различных имен, что находится в соответствии с задачами обмена мыслями между людьми и не должно поэтому считаться недостатком языка. В крайнем случае, говорит Шрёдер, это можно рассматривать как «некоторую роскошь, быть может, какое-то расточительство» (ibid., S. 49). Причиной различных наименований одной и той же вещи является то, что она может рассматриваться с разных точек зрения, причем не всегда легко установить, относятся ли данные определения или описания к одной и той же или к разным вещам. То, что людям в конце концов удается добиваться единообразного употребления имен как при обозначении предметов материального мира, так и при наименовании трудно уловимых явлений духовной жизни, говорит Шрёдер, на первый взгляд даже вызывает удивление.

В самом деле. Естественные языки содержат множество имен, не удовлетворяющих требованию однозначности. Подобные имена называются «двусмысленными» или «многосмысленными» — по латыни nomen aequivocum или nomen ambiguum, — и вопрос о возможности и целесообразности их исключения из языка является предметом дискуссий. Шредер ссылается, в частности, на взгляд, согласно которому выполнение требования однозначности обозначений привело бы к значительному обеднению этих языков, не дав никаких существенных выгод. В связи с этим он замечает, что наличие двусмысленных и многосмысленных имен вовсе не является чем-то совершенно безобидным. Такие имена могут быть источником недоразумений и неправильных выводов. Например, в суждениях: «Все металлы суть химические элементы» и «Латунь — металл» слово «металл» имеет различный смысл. Каждое из этих суждений может быть признано вполне правомерным, если входящему в него слову «металл» придается соответствующий смысл; но если мы не замечаем указанной двусмысленности, мы можем прийти к неверному заключению, что латунь является химическим элементом. Другой рассматриваемый Шрёдером пример принадлежит А. де Моргану. Суждение «Только мудрец является (подлинно) богатым» (Solus sapiens est dives) логически полностью эквивалентно суждению «Каждый богатый является мудрым» (Omnis dives est sapiens). Но разве из этого следует, что каждый человек, имеющий деньги, обладает мудростью? Вовсе нет, так как в данных суждениях «богатый» означает внутренне, духовно богатого человека. Всякий раз, когда происходит неосознаваемое смешение двух или более значений некоторого слова, рассуждающий рискует прийти к ошибочному заключению. Шрёдер указывает

также на то, что многосмысленные выражения могут служить для сознательного введения в заблуждение, например применяться для демагогического воздействия на людей (ibid., S. 53).

Шредеровские рассмотрения проблемы точности семантики языковых выражений ведутся им при четкой ориентации на сложившуюся логическую традицию: автор «Лекций по алгебре логики» в своем логико-семантическом анализе языка опирается на идеи «Логики» Пор-Рояля, на высказывания Дж. С. Милля, А. де Моргана, С. Джевонса. Обращает на себя внимание также факт сходства — при несомненной независимости друг от друга — взглядов Э. Шредера и Г. Фреге на логическое несовершенство естественных языков. Критика Фреге, правда, глубже шредеровской, так как распространяется на язык современной ему математики, недостатки которого от Шрёдера, в общем, ускользали [23]. Но общая направленность предпринятого ими анализа уязвимых — с точки зрения логики — сторон обычных разговорных языков одинакова. Это можно рассматривать как свидетельство естественно возникшего стремления ученых, создававших строгий математико-логический язык, отграничить последний от естественного языка и раскрыть его преимущества в научном употреблении.

Вернемся, однако, к логико-семантическим взглядам Шредера. Автор «Лекций по алгебре логики» отмечал, что требование однозначности имен не должно распространяться на все случаи употребления естественного языка. Оно относится прежде всего и главным образом к языку теории, языку, используемому для проведения некоторых последовательных, оцениваемых с точки зрения логической правильности рассуждений. И очевидно, что оно совершенно неприложимо, например, к языку поэзии, неотъемлемой частью которого являются многосмысленные выражения. Такие выражения неизбежны и в языке науки, если мы рассматриваем науку как развивающееся явление. В процессе развития научного знания языковые выражения, обладающие двой-

[23] Отметим попутно, что критика естественного языка — достаточно решительная уже в прижизненно опубликованных работах Фреге, в частности в статьях логико-семантического цикла, — приняла особенно острый характер в последний период его жизни, о чем свидетельствуют материалы его «Наследия» [80].

ственным смыслом, постепенно ограничиваются и уточняются, давая начало двум или более новым именам, удовлетворяющим требованию однозначности. В теории же, писал Шрёдер, имея в виду относительно завершенную систему знания, «мы в каждом случае должны предполагать выполненным фундаментальное требование единосмысленности, необходимое для того, чтобы знак полностью выполнял свое назначение, а приступая к приложениям (логики — *Б. Б.*, *А. Т.*), всегда считать этот идеал осуществимым» ([1], Bd I, S. 54). Ясно, что требование однозначности обедняет в некотором смысле язык, делает его менее поэтичным. Логический анализ языка, говорит Шрёдер, напоминает стирание пыльцы с крылышек бабочки, в результате чего исчезают великолепные краски и остается только голый остов крылышек. Но этот анализ одновременно и усиливает язык, возмещая определенную потерю красоты резким увеличением его последовательности и ясности.

Из всех знаков особый интерес Шрёдера привлекают и м е н а. Свое рассуждение о них он начинает с понятия слова. Не определяя этого понятия, Шрёдер указывает, что имя — это слово, словосочетание или знак, который употребляется в соответствии с определенным соглашением для указания объекта мышления, для обозначения «вещи» (ibid., S. 43). Не всякое слово является именем, так как имеются слова, не обозначающие каких-либо вещей и служащие только для образования имен из других слов. Не каждое имя представляет собой отдельное слово, ибо наряду с однословными именами имеются имена, составленные из нескольких слов. Особую группу имен образуют «аналитические», как их называет Шрёдер, выражения — выражения, состоящие из букв или цифр и построенные с помощью особых связующих знаков. Такие выражения широко используются в науке; в качестве примера Шредер приводит формулу $a\ (b+c)$.

Стремясь уяснить понятие имени, Э. Шрёдер анализирует способы выражения имен в обычном языке. В «культурных языках» (Kultursprachen), указывает он, можно выделить десять типов слов; если учесть, что междометия не имеют значимости в логическом плане, а артикли в ряде языков отсутствуют, то остается восемь типов. Из этих восьми типов пять могут использоваться для выражения имен. Это существительные (в именительном падеже), прилагательные, глаголы (из них образуются отглагольные существительные), числительные и местоимения. Слова остальных трех типов (наречия, предлоги и связки) неспособны быть именами. Вслед за «логиками аристотелевой школы» (схоластами) Шредер называет эти слова «синкатегорематическими» выражениями, так как они могут обозначать некоторую вещь (выражать нечто) только вместе с другими словами и этим принципиально отличаются от имен, или «категорематических» выражений. Вторым различием, которое Шрёдер проводит, отталкиваясь от логических идей схоластов, является, говоря современным языком, различение у п о т р е б л е н и я языковых выражений как обозначений вещей — внеязыковых объектов и у п о м и н а н и я, или автонимного употребления выражений: различение *suppositio nominalis* и *suppositio formalis* выражений. В высказывании «Лошадь есть имя существительное» слово «лошадь» фигурирует в ситуации suppositio nominalis — является субъектом высказывания к а к с л о в о, а не как обозначение определенного объекта; оно не представляет того предмета, именем которого является, а само становится объектом суждения. В высказывании же «Лошадь имеет четыре копыта и два уха» это слово выступает в контексте suppositio materialis: предметом высказывания является не слово, а обозначаемое, т. е. определенного вида животное, которому в высказывании приписываются определенные признаки. Различие этих «суппозиций» существенно, и тот, кто не хотел бы его признавать, должен был бы согласиться с тем, что некоторые имена существительные имеют копыта и уши (ibid., S. 44). Примечательно, что Шрёдер — он сам на это указывает — меняет смысл схоластической терминологии (схоласты употребляли обе «суппозиции» как раз в противоположном смысле; см. [39], S. 188 ff.), делая ее более естественной для современной логики. Субъектами суждения (в «материальной суппозиции») могут быть только категорематические выражения, а синкатегорематические выражения — обстоятельственные слова, предлоги, союзы, существительные в косвенных падежах и т. п. ими быть не могут, так как не являются именами. Нельзя, например, сказать «Артура был в комнате», «К сожалению достойно сожаления» и т. п., но можно сказать «К сожалению — русский оборот»[24], но только потому, что «к сожалению» стоит здесь в «номинальной суппозиции» и означает выражение «к сожалению».

Все имена Шрёдер разделяет на *собственные* и *общие*. В этом отношении автор «Лекций по алгебре логики» не прокладывает новых путей в логической семантике — в отличие, скажем, от Фреге с его учением о (собственных) именах, их смысле и значении (Bedeutung; в современной литературе чаще говорят «денотат»), о различии между предметом и понятием [98], [99]. Впрочем, не следует думать, что семантика Фреге, развитая А. Чёрчем и положенная в основу его известной монографии 1956 г. (русский перевод [9]), а Р. Карнапу давшая исходный пункт для обширного логико-семантического исследования (вышедшего в том же году; русский перевод [100]), единственно плодотворная в логике. Сложившаяся в польской логической школе теория семантических (или, как ее ныне чаще называют, синтаксических) категорий языковых выражений — начало ей положил С. Лесневский, а подробно разработал К. Айдукович (см. его работу [101]) — в вопросе о понимании имен примыкает к «дофрегевской» традиции, наиболее развернуто представленной в известном труде Дж. С. Милля 1843 г. (русский перевод, второе издание [102]). В этой теории собственные имена (т. е. имена отдельных вещей, индивидов) и имена общие принадлежат к одной и той же синтаксической (семантической) категории. Такой подход вполне может служить корректным семиотическим основанием развертывания всего здания современной логики (примером чего может служить, скажем, книга [103]).

Э. Шрёдер, естественно, следует «дофрегевской» традиции и говорит о *собственных* и *общих* именах. Первые обозначают индивидуумов, вторые относятся к классам индивидуумов. Шрёдер считает, что это различение имеет фундаментальный характер для логики и обращает внимание на трудности, связанные с его проведением. Примерами собственных имен являются «Меркурий», «Венера», «Земля», «24 полк нынешней германской армии», «Цербер» и т. д. Эти имена могут относиться как к реальным, так и к вымышленным предметам. Сложность их употребления связана прежде всего с трудностями отождествления разных состояний вещи, приводящего к «одной и той же вещи». Весьма затруднительно сказать, когда некоторая вещь остается «той же самой» и может быть называема одним и тем же именем. Современный Берлин, говорит Шрёдер, отличается от Берлина конца прошлого (восемнадцатого) века, и тем не менее оба эти столь отличающиеся друг от друга города мы называем одним именем. В самом узком смысле собственным именем вещь может быть обозначена только в определенный миг или момент своего бытия. Но если бы мы твердо придерживались этого положения, то столкнулись бы с непреодолимыми трудностями. Употребление собственных имен основывается на изоляции, обособлении, отделении тех вещей, к которым они относятся. Такая изоляция не всегда легко осуществима, и ее обычно трудно обосновать. Например, когда мы говорим о Земле, то чтó мы имеем в виду: только земной шар или относим к обозначаемому словом «Земля» объекту также и атмосферу? Ничто не мешает нам мыслить любой предмет без какой-то его части, поэтому трудно указать некие общие принципы «обособления» тех вещей, к которым мы намерены прилагать собственные имена.

Общее имя относится к классу вещей и притом таким образом, что оно может быть высказано о каждом элементе этого класса: оно, как говорит Шрёдер, обозначает этот класс д и с т р и б у т и в н о (разделительно); например, общее имя «планета» с равным правом может быть отнесено и к Земле, и к Марсу, и к Юпитеру, и ко всякой иной планете. При этом все те свойства, которые мыслятся в содержании данного имени, в полном своем составе должны иметься у каждого из тех объектов, к которому оно приложимо. Дистрибутивный характер общего имени напоминает распространение инфекционной болезни: если сотня лиц заражается скарлатиной, то каждый из них заражается не сотой частью этой болезни, а просто-напросто скарлатиной: «то, что высказывается о роде, имеет силу также и для каждого входящего в него индивида» ([1], Bd I, S. 68)[25].

---

[24] У Шрёдера: «Leider ist ein deutscher Adverbium».

[25] Традиционное по своему характеру учение Э. Шрёдера об именах встретило критику со стороны Э. Гуссерля [15], с которой солидаризовался (и которую углубил) Г. Фреге. Эта солидарность выражена в письме Фреге Гуссерлю от 24 мая 1891 г. (см. [80], Bd 2, S. 93—95). В материале «Рассуждение о смысле и значении»

Имена общие Шрёдер тщательно отличает от имен, называемых им *коллективными*. В рассмотрении этого вопроса (и в используемых примерах) он следует изложению С. Джевонса (см. [104], Lesson III). Коллективные имена хотя и относятся — подобно общим именам — к множествам предметов, но имеют их в виду как единый объект, именем которого они и являются. Сущность общего имени состоит в его дистрибутивном употреблении, сущность коллективного имени — в с о б и р а т е л ь н о м употреблении. Свойства, мыслимые в содержаниях коллективных имен, относятся только к классам вещей, рассматриваемых как отдельные предметы, и неприложимы к индивидам, входящим в эти классы.

Коллективными именами могут обозначаться любые вещи, состоящие из частей. Поэтому каждое имя, служащее для обозначения некоторого мыслимого объекта, может по сути дела выступать как коллективное имя. Такие имена могут истолковываться и как общие, и как коллективные. Например, «армия» является общим именем, поскольку этим словом обозначается и германская, и французская, и любая иная армия; вместе с тем «армия» является коллективным именем относительно отдельных солдат, составляющих ее. Имя «библиотека» тоже является и общим, и коллективным; это общее имя, поскольку подразумевает библиотеку господина A, библиотеку господина B и т. д; но это и коллективное имя, так как библиотека есть собрание отдельных книг. Еще пример — имя «книга», которое является общим именем относительно конкретных книг и коллективным относительно своих страниц. Таким образом, почти для каждого общего имени можно указать такой аспект, в котором оно является коллективным именем. Шрёдер указывает, что и такое слово, как «все», может пониматься как в распределительном, так и в собирательном смысле. В первом случае оно означает «каждый из указанных объектов», во втором — «совокупность указанных объектов» (ibid., S. 74).

Другим важным подразделением имен является разделение их на *абсолютные* (безотносительные) и *относительные*. Относительное имя приписывается вещи на том основании, что она находится в определенном отношении к одной или нескольким иным вещам. Примерами таких имен являются имена «причина», «следствие», «удаленное место», «отец», «сын», «подобно», «равно», «различно». Никто не может быть назван отцом, если у него нет детей; определенное место может именоваться отдаленным только в том случае, если оно сопоставляется с другим местом, и т. д. Многие относительные имена таковы, что трудно сказать с полной определенностью, сколько предметов объединяются отношениями, зафиксированными этими именами. Например, имя «обвинитель» предполагает по меньшей мере двух людей, один из которых предполагается правонарушителем, в чем его и обвиняет второй. Но это отношение можно развернуть, включив в качестве его членов заседание суда, на котором слушается дело, статью свода законов, на которой основывается обвинение, и т. д. В современных терминах это рассуждение Шрёдера означает, что вместо отношения «x есть обвинитель y» могут рассматриваться более «детализированные» отношения «x есть обвинитель y на заседании суда z», «x есть обвинитель y по статье закона z на заседании суда u» и т. п.

Что касается традиционного (в нематематической логике) деления имен на положительные и отрицательные, абстрактные и конкретные, то Шрёдер считает, что оно достаточно субъективно и не имеет сколько-нибудь важного значения для логики.

Задача реализации логической программы Лейбница

Семиотические рассмотрения автора «Лекций по алгебре логики» касаются прежде всего естественного языка. Их смысл состоит в том, чтобы служить связующим звеном между теми логико-гносеологическими вопросами, с которых Шрёдер начал свой анализ логики, и ее символическим представлением, развертыванием логики, использующим «пасиграфию». Изложение вопросов семиотического (а более точно, логико-семантического) ха-

---

(написанном, по заключению издателей фрегевского «Наследия», не ранее 1892 г.) Фреге в качестве основного недостатка принятого Шрёдером подхода указывает на то, что создатель «Лекций по алгебре логики» не проводит различия между понятием и предметом (см. [80], Bd 1, S. 134—135). Критические замечания Фреге и в наши дни выглядят во многом убедительными. Однако мы не станем задерживаться здесь на этом вопросе.

рактера имело, таким образом, цель подготовить переход к символической, в алгебраических терминах, трактовке логики, обосновать н е о б х о д и м о с т ь такого перехода.

Во «Введении» к «Лекциям по алгебре логики» семиотическим рассмотрениям посвящен раздел С, носящий длинный заголовок «О понятиях. Деление, определение и категории, пасиграфия. Логика содержания или логика объема? О суждениях, умозаключениях и логической последовательности (Folgerichrigkeit. — *Б. Б.*, *А. Т.*). Почему алгебра логики?»

Исходным пунктом рассуждений, долженствующих подвести читателя к идее о необходимости исчисленческой трактовки логики, является Шрёдеров анализ *понятия* как определенной мыслительной формы. Это объясняется тем, что логическое исчисление понимается Э. Шрёдером (так же как и Г. Фреге) как «запись в понятиях» (Begriffsschrift) [26]. Шрёдер начинает с рассмотрения вопроса: если кроме единичных имен имеются также и общие имена, то как определяется, к каким вещам приложимо некоторое общее имя? Ответ, который он на него дает, состоит в следующем: одним и тем же общим именем обозначаются такие вещи, которые в известном отношении выступают как одинаковые, имеющие одни и те же признаки; это возможно потому, что у человека имеется способность к усмотрению различного и восприятию сходного, одинакового. В психологическом плане этому соответствует «процесс, завершающийся тем, что мы связываем с данным общим именем некоторое понятие» ([1], Bd I, S. 81). Совпадающие признаки вещей, обозначаемых одним и тем же общим именем, в человеческом сознании «укрепляют» друг друга и при актах повторного представления мыслятся интенсивнее, в то время как несовпадающие признаки отступают на второй план. Это происходит благодаря человеческой способности к абстракции: мы, говорит Шрёдер, в состоянии концентрировать внимание на определенных признаках мыслимой вещи, отвлекаясь или «абстрагируясь» от других признаков; в результате образуется «*понятие*, notio, conceptus, conception о вещах, обозначаемых общим именем. . . Его (понятия. — *Б. Б.*, *А. Т.*) «сущность» (essentia) *или*, как иначе говорят, его «*содержание*» (complexus, intent) образуют общие признаки вещей, обозначаемых общим именем. . . В противоположность этому содержанию совокупность, класс индивидов, которые охватываются (дистрибутивно) этим общим именем, называют «*объемом*» (ambitus, sphaera, extent) соответствующего понятия» (ibid., S. 83). Далее Шрёдер говорит, что индивидуальную или единичную вещь тоже можно рассматривать как «понятие», поскольку она мыслится как комплекс своих признаков; ибо для понятия характерно именно то, что соответствующее ему имя охватывает определенную группу признаков, отграничиваемую от других признаков.

Мы видим, таким образом, что взгляды Шрёдера на понятие были вполне «традиционными»: сходное изложение можно найти во многих руководствах по нематематической логике XIX в., например у Х. Зигварта, на которого в ходе описанных рассуждений часто ссылается Шрёдер. Суть дела, однако, состоит в том, что Э. Шрёдеру (отталкивающемуся здесь уже от А. Тренделенбурга и его анализа логических идей Лейбница) уче-

---

[26] Правда, Э. Шрёдер не считал, что работы Фреге идут в том же направлении, что и его труд. В примечании на с. 95 первого тома «Лекций» он вскользь замечает, что разработанный Фреге метод «записи в понятиях» не может претендовать на роль «универсального» языка — он представляет собой «только логическую (хотя и нецелесообразную) систему знакового представления суждений»; при этом Шрёдер ссылается на свою рецензию [76] работы Фреге 1879 г. [57]. Со своей стороны автор труда «Запись в понятиях» не считал отвечающим сути дела символический язык шрёдеровской алгебры логики. В письме Д. Гильберту от 1 октября 1895 г. Фреге писал: «Естественный путь, который ведет к символике, как мне представляется, состоит в том, что, чувствуя затруднения, с которыми связано исследование, проводящееся с помощью слов, — затруднения, проистекающие из широты, неясности и неточности словесного языка, — создают для их преодоления язык знаков, на котором исследование может проводиться более ясно и точно. Следовательно, сначала потребность, потом ее удовлетворение. В противоположность этому начинать с создания символики, а потом отыскивать для нее применения — это кажется менее плодотворным. Быть может, символика Буля—Шрёдера—Пеано пошла по этому пути» ([80], Bd 2, S. 59).

Отвергая общность системы понятий, разработанной в логической теории Фреге, Шрёдер был вряд ли прав, и последующее развитие математической логики пошло скорее по пути Фреге, чем Шрёдера. Но о принятии фрегевской «рисунчатой» логической символики, конечно, не могло быть и речи: привился, грубо говоря, расселовский вариант символики Пеано.

ние об абстракции и образовании понятий служит для обоснования необходимости логического исчисления как «исчисления понятий»: если выражения обычного языка необходимо многозначны и плохо приспособлены для целей логики (например, многозначным является в естественном языке слово «есть», играющее в логике существенную роль), то понятия могут быть лишены этого недостатка, если для их выражения использовать не естественный язык, а специальную символику. Так возникает задача разработки подходящей, адекватной символики, с помощью которой можно было бы поставить в закономерное соответствие, «или (говоря словами Тренделенбурга) привести в непосредственное соприкосновение форму знака и содержание понятия, заменив слова, фактически имеющиеся в языке, такими придуманными нами знаками, которые представляют признаки, разграничиваемые и обобщаемые данным понятием, именно так, как их разграничивает и обобщает это понятие»; такая система обозначений, говорит Шрёдер (со ссылкой на того же Тренделенбурга), «если ее можно распространить на *всю* область мыслимых объектов. . . — *характеристический язык* понятий, «*запись в понятиях*» — явится, в противоположность различным национальным языкам, *всеобщим* языком вещей (*пасиграфией*)»; создание такой системы обозначений будет знаменовать реализацию старой идеи «*универсального* языка, в философском плане являющегося научным» (ibid., S. 93).

Итак, Э. Шрёдер вводит свой методологический анализ в общее русло математико-логических идей, зачинателем которых явился Г. В. Лейбниц, провозгласивший знаменитую программу разработки универсального символического языка и аппарата формальной выводимости. Характеризуя эту линию, Шрёдер пишет, что исчисленческая трактовка логического материала — «трактовка, толчок которой дал Лейбниц и работа над которой была продолжена Ламбертом и Плуке, — впервые нашла своего рода почти совершенное воплощение в основополагающем труде Джорджа Буля „Законы мысли“» (затем Шрёдер подчеркивает также значение другой основополагающей для математизации логики работы: статьи Ч. Пирса «Об алгебре логики», 1880, автор которой опирался на идеи А. де Моргана) (ibid., S. 119).

Охарактеризуем кратко те идеи Г. Лейбница, развитием и конкретизацией которых занимались и Дж. Буль, и Ч. Пирс, и Э. Шрёдер [27].

Лейбниц не оставил разработанной системы логики, но в своих письмах, набросках, фрагментах и замечаниях, относящихся почти ко всем периодам своей научной деятельности, он высказывал мысли, ставшие со времени исходным пунктом формирования современной концепции логики. Уже в пятнадцатилетнем возрасте у него возникла идея преобразования всего человеческого познания с помощью логико-комбинаторных средств. И этот замысел впоследствии вылился в программу «универсальной характеристики» — арифметизованной логики, которая позволила бы представлять произвольные предметы и отношения между ними наподобие того, как в математике с помощью математической символики представляются числа и связи между ними. Эта программа зиждилась на убеждении, что логические отношения, конституирующие форму рассуждения, аналогичны связям между числами, лежащими в основе вычислительных операций арифметики. Отсюда следовало заключение, что мыслительные рассуждения представляют собой один из видов вычислений и что правила логики могут быть сформулированы в виде некоторого «исчисления»; применение этих правил должно опираться только на форму или внешний вид знаков и игнорировать содержание тех выражений, которые представляются этими знаками. Знаки исчисления необязательно должны обозначать «количества» — исчисление должно быть устроено так, чтобы его символическими средствами можно было пользоваться во всяком умозаключении; и можно придумать бесконечно много способов исчисления. Лейбниц неоднократно писал о той важной роли, которую должна сыграть новая логика для философии и других наук, не обладающих точностью математики, выражая надежду, что наступит такое время, когда вместо того, чтобы спорить, люди возьмут карандаши и будут вычислять [28].

---

[27] Логические взгляды Лейбница освещаются во многих работах; из них отметим некоторые, имеющиеся на русском языке ([105]; [42], гл. 14; [106]; [107]; [7], гл. 5); краткий абрис лейбницевой концепции логики как универсального по своим возможностям исчисления содержится также в кн. [108], гл. 2.

[28] Вот одно из подобных высказываний: «Единственное средство улучшить наши умозаключения состоит в том, чтобы сделать их

Таким образом, Лейбниц освободил понятие «исчисления» от однозначной связи с понятием «количества», казавшейся подавляющему большинству математиков и философов его времени совершенно естественной и нерасторжимой. Он выдвинул идею создания искусственного символического языка (characteristica universalis) и логического исчисления (calculus racionator). Тем самым он фактически очертил контуры математической логики, в частности контуры алгебраизации (и арифметизации) логики. Неудивительно, что его идеи были с полным пониманием восприняты Э. Шрёдером.

Не рассматривая специально программы Лейбница, ограничимся той ее выразительной характеристикой, которая дана С. Богомоловым в работе, относящейся к 1913 г.

> Лейбницу рисуется идеал общего метода, благодаря которому окажется возможным систематизировать вечные истины, доказывать их и даже открывать новые; для этого прежде всего надо разложить все понятия на простейшие, подобно тому, как в математике составные числа разлагаются на произведение простых множителей; число составных понятий не может быть велико и, обозначив каждое из них особым символом, мы получим «алфавит человеческих мыслей»; всевозможные комбинации простых понятий дадут нам совокупность сложных, и хотя число первых невелико, однако, как показывают формулы *комбинаторики*, число их комбинаций может быть почти неисчерпаемым; отсюда комбинаторика является весьма существенной частью наукословия Лейбница, и он неоднократно возвращается к работам «De Arte combinatoria». Впрочем, для создания упомянутого общего метода одного алфавита мыслей еще не достаточно; необходимо также ввести особые символы для основных соотношений между понятиями и установить правила употребления и комбинации этих символов; все это, вместе взятое, составит особую логическую алгебру, которая будет выражать известными формулами комбинации понятий и соотношения между ними и процесс мышления сведет к особому роду механического счисления. Лейбниц не раз возвращался к осуществлению этих идей; на примере своего дифференциального исчисления он знал, как много значит

> столь же наглядными, как и у математиков, — такими, что их ошибочность можно было бы увидеть глазами, и если между людьми возникают разногласия, достаточно было бы только сказать «Вычислим!», чтобы без дальнейших околичностей стало ясно, кто прав» ([109], S. 16).

> для науки удачная символика. Намеченное выше логическое счисление он называл *всеобщей характеристикой*; мы узнаем в ней черты современной символической логики ([105], с. 7).

Шрёдер был одним из самых энергичных сторонников выдвинутой Лейбницем программы, вложил немало труда в ее обоснование и реализацию — в той мере, в какой она вообще осуществима [29]. Он указывает на значение идей Лейбница (и предшествовавших им мыслей Декарта) о создании «совершенного языка», главное внимание обращая на выявление конкретных путей их реализации. Этой проблеме много места уделяется в «Лекциях по алгебре логики», ей специально посвящены работы Шрёдера «О знаках» и «О пасиграфии» [73] — [75].

Во введении к «Лекциям по алгебре логики» Шрёдер (со ссылкой на А. Тренделенбурга) отмечает глубокие исторические корни идеи о сведе́нии рассуждений к вычислениям. Уже Р. Декарт дал достаточно развернутую характеристику предполагаемого искусственного языка науки и тех громадных выгод, которые, по его мнению, связаны с его построением. Декарт писал, что в наших мыслях имеется, по-видимому, некоторый природный порядок, напоминающий порядок в мире чисел. Числа имеют знаковые представления, и хотя чисел бесконечно много, каждому из них можно дать собственное имя, а операции над ними можно записывать на особом языке. И если для чисел разработан такой универсальный язык, то нет ничего невозможного в том, что со временем будет построен еще более универсальный язык, охватывающий не только числа, но и любые объекты, которые могут стать предметом исследования. Этот язык, легко поддающийся изучению, позволит строить обозначения для любых наших идей, выделять простые представления и фиксировать элементы, из которых состоит каждая мысль. Он тем самым исключит всякую возможность заблуждения и противопоставит нашим словам, имеющим неясные значения, четкие различия между искусственными элементами. Декарт полагал, что хотя такой совершенный язык и представляется нашему человеческому духу, привыкшему к путаным значениям обычного языка, чем-то нереальным, он вполне

---

[29] Вопрос о степени реализуемости программы Лейбница мы не будем здесь поднимать, отсылая читателя к имеющейся на этот счет литературе (см., в частности, книгу [108]); краткие замечания об этом будут сделаны ниже.

14 Заказ № 998

возможен, как возможна и опирающаяся на него наука.

Убежденный в принципиальной возможности совершенного языка, Р. Декарт не предпринял, однако, реальных усилий по его разработке. Заслуга Лейбница, подчеркивает Шрёдер, состояла в том, что он, зная о тщетности предыдущих попыток создания логического исчисления универсального назначения, отважился отстаивать идею «универсальной характеристики» на протяжении всей жизни.

Вслед за Лейбницем Э. Шрёдер выдвигает следующий идеал: множество понятий должно быть оформлено в четкую, строго расчлененную систему, в которой из возможно меньшего числа первоначальных или основных понятий с помощью небольшого числа достаточно простых исходных операций систематически строятся все остальные понятия. Введение в эту систему — вместо слов, имеющихся в обычном разговорном языке, — специальных знаков, каждый из которых представляет отдельный неразложимый далее признак, позволит установить непосредственный контакт между знаками и содержаниями понятий, избежать разногласия в понимании последних и заблуждений. Адекватное и универсальное обозначение всех понятий, основанное на выделении простейших элементов мысли и способов их соединения, сделает в свою очередь возможным сведе́ние действий с понятиями к вычислениям. Человеческое познание приобретет неколебимое основание, исключающее противоречия и столкновения взглядов, и осуществится мечта Лейбница о логическом аппарате обоснования и открытия истин (см. [1], Bd I, S. 95—96).

Реализация этого идеала всеобщей понятийной «каталогизации» и систематического обозначения всего, что только может вообще быть названо, требует в качестве своей предпосылки завершенного знания относительно характера операций, служащих для соединения элементов понятий, а также относительно законов связи понятий. Соответствующая предварительная работа должна быть проделана логикой, и пока она не произведена, попытки реального воплощения данного идеала не могут увенчаться успехом; если не располагать операциями соединения понятий, последние останутся всего лишь грудой камней — грудой, из которой в силу отсутствия плана и цементирующих средств нельзя построить то

чудесное сооружение, каким является система научных понятий (ibid., S. 95). Для решения этой задачи логика должна быть построена средствами специального языка знаков, ее фундаментальные законы должны приобрести вид *формул* — должно быть развито *логическое исчисление*. Отсутствие разработанной символики привело к длительному застою логики, но теперь, указывает Шрёдер, происходит быстрое развитие логических исследований, в которых логика разрабатывается как буквенное исчисление (Buchstabenrechnung), как алгебра логики, как «точная логика» (ср. подзаголовок «Лекций» [1]).

Благодаря своим преимуществам «исчисленческая трактовка логики в состоянии вскрыть многочисленные упущения в прежних чисто вербальных рассмотрениях и устранить их» (ibid., S. 119), исправить допущенные в логике ошибки, в том числе и весьма существенные.

При построении логического исчисления, считает Э. Шрёдер, целесообразно исходить из *логики объемов понятий*, а не из «логики содержания». Аргументируя такой подход, он указывает на то, что многие понятия по содержанию вообще не существуют, однако имеют четко очерченный объем; таково, в частности, большинство понятий, образованных путем отрицания (в качестве примера он приводит понятие «нечеловек», относительно которого Г. Лотце сказал, что для человеческого разума навсегда неразрешима задача абстрагирования признаков всех тех вещей, которые суть «нелюди»; однако в объемном смысле это понятие существует). В этой сознательной установке на логику объемов Шрёдер выразил характерную черту математической логики, черту, проявляющуюся и в современных математико-логических теориях предикатов; эти логические системы — если они основаны на классических принципах, во всяком случае, — объемны в том смысле, что предикаты (т. е. понятия в смысле Шрёдера) в них могут быть отождествляемы с их объемами, так что для подобных систем оказывается возможным их изоморфный перевод на теоретико-множественный язык.

Что касается состава «точной логики», необходимой для пасиграфического представления знания, то она, по мысли Э. Шрёдера, должна включать, как мы уже отмечали, три основные части: исчисление классов, исчисление высказываний и исчисление отношений. Только с построением третьей, наиболее сложной из ее частей, — теории отношений логика сможет претендовать на завершение упомянутой предварительной работы; логика отношений должна дать базу для создания совершенного научного языка и «будущей истинной философии» (ibid., S. 96).

Э. Шрёдер проводит ясное различие между проектируемым им универсальным логическим языком, который он называет также «*универсальным* (allgemeine. — *Б. Б., А. Т.*) языком вещей (*пасиграфией*)» (ibid., S. 93), и искусственными мировыми языками, подобными языку волапюк. Последние тоже противостоят обычному языку. Устраняя лингвистические неправильности, значительно упрощая грамматику, они содействуют взаимопониманию людей разных национальностей. Но, в отличие от пасиграфии, искусственные мировые языки некритически воспринимают в себя как нечто абсолютно данное все логические несовершенства фактически существующих языков (ibid., S. 94).

В августе 1897 г. на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе, на секции 1 «Арифметика и алгебра» Э. Шрёдер выступал с докладом [30] «О пасиграфии, ее современном состоянии и пасиграфическом движении в Италии» (издан в трудах конгресса в 1898 г. [74]; в том же году была опубликована английская версия доклада [75]). Он начал его словами о том, что вряд ли есть тема, в большей степени заслуживающая обсуждения на международном конгрессе математиков, чем вопрос о *пасиграфии* — новой дисциплине, цель которой состоит в разработке универсального языка науки, «полностью свободного от национальных особенностей и предназначенного для того, чтобы благодаря самой своей структуре составить базу для подлинной, а именно, строгой философии» ([74], S. 147). Докладчик отмечал, что такой язык не может быть изобретен сразу — проектируемая языковая система будет складываться постепенно; он констатировал, что наибольшее развитие достигнуто пока только в области основных понятий чистой логики и математики, в особенности же — в логике, арифметике и геометрии.

Дж. Пеано, основывавшийся на результатах Дж. Буля, Э. Шрёдера, Ч. Пирса, Х. Маккола и сам внесший большой вклад в разработку математической логики, ее символики и терминологии, склонен был считать, что поставленная Лейбницем проблема создания совершенного языка фактически уже решена. Возражая против такого взгляда, — говоря о нем, Шрёдер ссылался на работу Пеано [110] (р. 52), — немецкий математический логик указывал на то, что, хотя логика и математика развиваются очень быстро, они не дали пока средств, достаточных для точного выражения любых научных утверждений. Такие средства еще только разрабатываются. И Шрёдер в следующих словах характеризует путь их создания.

Задача, которая подлежит решению в любой специальной науке, сводится к следующему: вполне точно выразить все понятия, которые эта наука охватывает либо которыми она оперирует, — выразить адекватно и настолько сжато (компактно); насколько это возможно, используя минимальное множество основных или исходных понятий, так называемых «категорий»; опорой при этом должны служить «чисто логические» операции, обладающие всеобщей применимостью, а значит, такие, что они одинаковы для всех отраслей знания, так как подчиняются законам обычной логики — логики, которая, однако, отличается тем, что в своей наиболее совершенной форме принимает вид «calculus racionator». Для обозначения категорий и операций этой «lingua characteristica» или «scripta universalis» следует использовать удобные знаки и простые символы, такие, например, как буквы; однако обращаться с ними — в отличие от «слов» живого языка — надо с абсолютной последовательностью или математической строгостью ([74], S. 148).

Пасиграфический язык предназначается не для повседневного общения людей, а только для описания логической структуры науки и прежде всего самой логики и «строгой философии». Шрёдер детально останавливается на той части пасиграфии, которая выработана специально для «общей логики». Он заявляет, что математика является одним из разделов этой логики и в сравнении с другими ее разделами с точки зрения пасиграфии не имеет никаких особенностей:

[30] На заседании 10 августа, на котором выступал Шрёдер, председателем был Дж. Пеано. Последний делал доклад «Logica matematica» (ит.) на втором пленарном заседании конгресса; в материалах конгресса были помещены лишь краткие тезисы (половина печатной страницы) этого доклада.

я считаю чистую математику только ветвью общей (allgemeine. — *Б. Б.*, *А. Т.*) логики, ветвью, возникшей благодаря созданию числа; именно его практическим достоинствам обязана своим развитием эта особая ветвь логики — громадным развитием, если сравнивать и эту ветвь с другими ветвями логики, оставшимися до недавнего прошлого почти полностью без движения. Данный взгляд находит подтверждение в том факте, что в пасиграфическом аспекте арифметика может обойтись без каких-либо особых категорий, что ей не нужны никакие собственные исходные понятия, поскольку понятий общей логики уже достаточно для построения всех ее понятий — таких, как множественность (Vielheit. — *Б. Б.*, *А. Т.*), число, конечность, предел, функция, отображение, сумма и т. д. (ibid., S. 149—150).

Отмеченные идеи Э. Шрёдера примечательны в двух пунктах. Во-первых, в его взглядах на роль «пасиграфии» в науке естественно усмотреть предвосхищение того, что в середине нашего века стали называть метатеорией: пасиграфия, по мысли Шрёдера, должна служить строгому представлению содержания научных дисциплин (как, говоря современным языком, формализованных предметных теорий) в целях исследования их свойств и их развития. Во-вторых, утверждение автора «Лекций по алгебре логики» о том, что все понятия арифметики могут быть определены в терминах чисто логических понятий и что математика в целом является только ветвью «общей логики», позволяет отнести его к числу предшественников логицизма — направления в основаниях математики, сводящего математику к чистой логике. Именно предшественником — ибо Э. Шрёдер, в отличие от Г. Фреге и Б. Рассела, не разработал в деталях процедуру сведéния математики к логике. Он ограничился определением отдельных арифметических понятий в терминах логики отношений, а также доказательством, в рамках упомянутой логики, отдельных математических (теоретико-множественных) утверждений. Он не ставил — как это позже сделал Б. Рассел — вопроса о том, какие именно принципы окажутся необходимыми для получения всех арифметических истин и будут ли эти принципы носить чисто логический характер. Тем не менее у Шрёдера были вполне определенные воззрения относительно того, как можно себе представить сведéние математики к логике. Воззрения эти, как видно, заключались в следующем.

На основе понятийного и символического аппарата, развернутого в грандиозном труде [1], особенно в его третьем томе, Э. Шрёдер пришел к заключению, что развитие логики, и прежде всего логической теории отношений, дает возможность свести все понятия «наиболее чистой», как он выражался, математики и «общей» логики к некоторым исходным понятиям, или категориям в аристотелевском или кантовском смысле. В докладе на I Международном конгрессе математиков [74]—[75] Шрёдер формулирует следующие пять категорий «общей логики» (включающей, по Шрёдеру, как мы указали выше, и арифметику), которые охватывают не только классы и высказывания, но и сферу отношений (Relative): *равенство*, *пересечение*, *отрицание*, *конверсия* и *отношение* (Beziehung, relatio). Для этих категорий приводится следующая таблица их символических обозначений[31]:

$=$	$\cdot$	—	$\smile$	;
1’	П			

Эти обозначения (и другие знаки, через них определяемые) в полном составе фигурируют в томе III труда [1]. В докладе на конгрессе Шрёдер поясняет их следующим образом.

Первый знак является хорошо известным знаком равенства, но в общей логике он понимается в несколько ином смысле, чем в математике, а именно, он означает полную одинаковость, тождество; его эквивалент — знак 1’ — представляет ту же категорию в виде относительного термина, призванного представлять

[31] Для первых двух исходных понятий вводится по два символа. Э. Шрёдер замечает, что указанными пятью понятиями не исчерпывается множество основных знаков. Очень важным элементом системы обозначений являются, в частности, скобки, но они сами по себе не имеют какого-либо значения и не представляют собой никакое понятие. Кроме того, при построении искусственного языка должны использоваться «общие» символы, не имеющие фиксированного значения, т. е. переменные.

класс вещей, которые являются «равными». Второй знак — знак умножения — используется в логике в смысле, полностью отличном от его арифметического значения; он выражает «категорию пересечения» (des Schnittes, intersectio), т. е. выражает то, что является общим у того, что обозначается двумя соединяемыми им терминами; например, выражение $a \cdot b$ (или просто ab) обозначает то, что есть одновременно и a, и b. Третий знак представляет операцию отрицания; если a означает нечто, то $\bar{a}$ означает то, что является не-a.

Последние два знака выражают операции над (бинарными) отношениями. Четвертая категория, изображаемая полукругом, помещаемым над переменной, представляет собой конверсию бинарных отношений. Если, например, a означает причину чего-то, то $\breve{a}$ (конверсия a) означает следствие этого (если c — ребенок каких-то родителей, то $\breve{c}$ — родители данного ребенка и т. п.).

Очень важной в пасиграфии Э. Шрёдера является пятая категория. Об этой операции (представляемой точкой с запятой) автор доклада «О пасиграфии» говорит, что она соответствует отношению (Beziehung, relatio) вообще; в немецком языке она передается предлогом «von», в английском — «*of*». Операцию эту Шрёдер называет «произведением отношений» («относительным произведением», «реляционным произведением» — das *relative Produkt*), а также соединением (Zusammensetzung) или композицией (отношений). В третьем томе «Лекций» (см. [1], Bd III, S. 30) им приводится следующий пример применения этой операции в естественном языке. Результат композиции отношений (относительных терминов) «любимый (кем-либо)» (Liebender von -) и «благодетель (кого-либо)» (Wohltäter von -) представляет собой словесный оборот «любимый благодетелем (кого-либо)» [32]. В современном прочтении шрёдеровская операция «;» является тем, что ныне обычно называют *произведением* (или *композицией*) *бинарных отношений* [33].

[32] В современных логических терминах этот оборот «расшифровывается» так: $\exists z$ (x любим каким-то z & z есть благодетель кого-то y). В русском языке результат композиции отношений, если для него не существует особого выражения, обычно приходится передавать с помощью косвенных падежей.

[33] В принятых в настоящее время обозначениях смысл этой операции можно передать в следующем виде: $x(R_1; R_2)y =_{\mathrm{Df}} \exists z\, (xR_1z \,\&\, zR_2y)$, где x, y, z — предметные переменные, $\exists$ — квантор существования, & — знак конъюнкции, $=_{\mathrm{Df}}$ — знак равенства по определению; запись вида xRy читается: «x находится к y в отношении R», а R_1 и R_2 означают соответственно отношения «быть любимым» и «быть благодетелем».

«Указанных пяти категорий вместе с семью их знаками, — утверждает Шрёдер, — по существу достаточно для выражения всех понятий, существенных для логики и арифметики» ([74], S. 152) [34]. Эти категории и знаки достаточны теоретически, но из соображений практического удобства он вводит еще 11 символов, доводя общее число знаков до 18.

Вот список этих знаков, образующих, по Шрёдеру, полную систему обозначений «всеобщей (allgemeine) пасиграфии», т. е. пасиграфии, охватывающей логику и чистую математику:

$$0,\ 1,\ +,\ \cdot\ ,\ \Sigma,\ \Pi,\ 0',\ 1',\ ^{-}$$
$$\smile\ \dagger,\ ;\ ,\ ⋹,\ =,\ \subset,\ \not⋹,\ \neq,\ \not\subset.$$

Дополнительные знаки определяются через основные с помощью следующих равенств [35]:

(1) $0 = a \cdot \bar{a}$

(2) $1 = \bar{0}$

(3) $0' = \bar{1}'$

(4) $a + b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$

(5) $\Sigma a = \overline{\Pi \bar{a}}$

(6) $a \dagger b = \overline{\bar{a};\ \bar{b}}$

(7) $(a ⋹ b) = (a = a \cdot b)$

(8) $(a \quad b) = \overline{a ⋹ b}$

(9) $(a \subset b) = (a ⋹ b) \cdot (b \not⋹ a)$

(10) $(a \neq b) = \overline{a = b}$

(11) $(a \not\subset b) = \overline{a \subset b}$.

[34] Э. Шрёдер также замечает, что число исходных понятий (категорий) может быть уменьшено. Например, категория «конверсии», говорит он, редуцируема, по-видимому, к остающимся четырем основным категориям. Таким образом, «четыре элемента»

тот же самый identitas	и intersectio	не negatio	of relatio

, тесно связанные друг с другом, «составляют опору царству интеллекта» ([75], p. 62; см. также [74], S. 162).

[35] В связи с определением (3) следует заметить, что знаки 0' и 1' являются, подобно знакам 0 и 1, простыми, а не сложными, т. е. 0' и 1' не следует понимать как результаты применения к 0 и 1 какой-то особой операции «'». В соответствии с определением (3), отличие одного объекта от другого равносильно нетождественности этих объектов.

Первое из этих равенств определяет понятие «н и ч т о». «Ничто» характеризуется как то, что представляет собой одновременно и a, и не-a, независимо от того, что означает a. Вторым равенством «нечто» определяется как «не-ничто»; понятие «нечто» означает все, о чем вообще можно говорить или что можно сделать объектом размышления; знак 1 представляет, таким образом, в логике в с е — «универсум рассуждения» (universe of discource) Буля, или, как говорит Шрёдер, о б л а с т ь м ы с л и м о г о (Denkbereich). Третьим равенством определяется относительный термин «отлично от» (или «иной, чем», «не являющийся одинаковым с»). Четвертое и пятое равенства характеризуют «тождественную сумму», или «логический агрегат» — совокупность (чего-то); выражение $a+b$ означает то, что не есть одновременно не-a и не-b, т. е. то, что есть или a, или b, или то и другое вместе. Шестым равенством вводится знак $\dagger$ (плюс с хвостом скорпиона, повернутым влево, как поясняет Шрёдер). В соответствии с определением (6), категория, представляемая знаком $\dagger$, является дуальной категории произведения (бинарных) отношений «;». Она выражает операцию, называемую Шрёдером «сложением отношений» («относительным сложением», «реляционным сложением» — die *relative Addition*). Отношение между умножением и сложением отношений полностью аналогично отношению между операциями умножения (пересечения) и сложения (объединения) двух классов. Она введена Шрёдером, как он сам говорит, из соображений симметрии. «Реляционное сложение» чуждо обычному мышлению, для него затруднительно приведение примеров на естественном языке, а в «вербальной логике» для нее отсутствует какое-либо обозначение.

Равенством (7) вводится важное понятие *включения* (Einordnung, Enthalten in- als Teil; в английском варианте доклада на конгрессе [75] Шрёдер использует термины implication и inclusion). Выражение $a \subseteq b$ читается как «a содержится в b» или «a является частью b». В соответствии с определением (7) выражение «a включается в b» означает, что a совпадает с тем, что является одновременно и a, и b. В английском варианте доклада [75] Шрёдер говорит:

Мой знак импликации $\subseteq$ . . . в общем случае передает связку «есть», «est» категорического суждения, а также — когда он расположен между суждениями a и b — выступает как знак вывода; ибо хотя заключение в определенном смысле заключено в посылках или имплицируется ими, однако можно прибегнуть к *конверсии* и сказать: если b следует из a, то класс ситуаций, в которых имеет место a, содержится в классе ситуаций, в которых имеет место b. Поэтому субсумция a b может читаться так: всякий раз, когда истинно a, является истинным и b ([75], p. 154).

Равенство (8) вводит знак $\not\subseteq$ как сокращение, смысл которого разъясняется через знаки $\subseteq$ и $\bar{\ }$. Выражение $a \subset b$, вводимое девятым равенством, означает, что a является собственной частью b. Равенства (10) и (11) вводят знаки $\not\subseteq$ и $\not\subset$ как сокращения, определяемые соответственно через знаки $=$, $\bar{\ }$ и $\subset$, $\bar{\ }$.

Эту систему обозначений, возникшую в результате более чем полувековых работ в области математической логики, проводившихся многими учеными — и среди них А. де Морганом, Дж. Булем и в особенности Ч. Пирсом, — Э. Шрёдер называет пирсовской. Ей близка система обозначений, введенных Дж. Пеано. Знаки «пирсовской» системы обозначений

$$0,\ 1,\ +,\ \cdot\ ,\ \Sigma,\ \Pi,\ \bar{a},\ \subseteq$$

соответствуют следующим знакам системы обозначений Пеано:

$$\wedge,\ \vee,\ \cup,\ \cap,\ \cup',\ \cap',\ -a,\ \varepsilon,\ \supset.$$

Существенным является то, что в системе Пеано нет пятой из исходных шрёдеровских категорий — категории «отношения», являющейся, как отмечает Шрёдер, наиболее важной. В силу этого в системе обозначений Пеано отсутствуют «релятивные» операции «;» и «$\dagger$».

Законы, которым подчиняются указанные исходные элементы мысли, являются законами логики отношений, родственной алгебре логики и включающей в качестве своих составных частей как исчисление классов, так и исчисление высказываний.

Поскольку в обычном мышлении — так же, как и в научном — относительные понятия [36] значительно превалируют над абсолют-

[36] Напоминаем, что под относительными понятиями Шрёдер понимает понятия, передающие отношения.

ными, причем первые в конечном счете содержат в себе вторые, очевидно, что логика относительных понятий, отношений (Relative. — *Б. Б.*, *А. Т.*) должна являться необходимым основанием для любых начинаний в области пасиграфии, могущих претендовать на успех ([74], S. 156).

Одну из причин очень медленного развития традиционной логики и, соответственно, основывающейся на ней пасиграфии Шрёдер справедливо усматривал в том, что эта логика ограничивалась исследованием «абсолютных» (т. е. не выражающих отношения, безотносительных) понятий и таких связанных с ними бедных по своему содержанию категорий, как «все», «некоторые» и «ни один».

Иллюстрируя возможности логики отношений, лежащей в основе его «пасиграфии», Э. Шрёдер утверждает, что исходных понятий этой логики достаточно для построения всей системы основных понятий арифметики. В статьях [73], [74] им формулируются, в частности, следующие определения некоторых важнейших теоретико-множественных понятий, используемых обычно при развертывании арифметики (мы приводим их без пояснений):

1) a является классом, множеством $= (a; 1 = a) = 0 \underset{\smile}{+} \breve{a} \underset{\smile}{+} a + 0$,

2) a является индивидом, элементом, константой $= (0'; a; 1 = \bar{a}) = (0'; a = \bar{a}) = (a ⋹ 0'; a) = \breve{a}; (1' \underset{\smile}{+} \bar{a})$,

3) a равномощно $b = \sum_{z} (z; \check{z} + \check{z}; z ⋹ 1')(b = z; a)(a = \check{z}; b)$. Согласно этому определению, множества a и b являются равномощными, если, и только если, существует такое отношение z, которое позволяет отобразить одно множество на другое и наоборот — поставить в одно-однозначное соответствие элементы этих двух множеств,

4) множество a является конечным $= \prod_{z} \{(z; \check{z} + \check{z}; \check{z} ⋹ 1') \cdot (a ⋹ \check{z}; a) ⋹ (a ⋹ z; a)\}$.

Это определение характеризует конечное множество как множество, отличающееся тем, что, переходя последовательно от одного его элемента к другому, мы вынуждены будем в конце концов вернуться к уже пройденному элементу.

5) Множество a является актуально бесконечным $= \sum_{z} (z; \check{z} + \check{z}; z ⋹ 1')(z; a \subset a ⋹ z; z; a)$.

В соответствии с этим определением характерной чертой бесконечного множества является то, что оно может

быть отображено на свою собственную часть. Шрёдер определяет также понятия пары элементов, функции, порядка и ряд других, в том числе и «специфически арифметических», как можно было бы сказать (например, понятие наибольшего общего делителя.).

Приведенный понятийный аппарат, считает Шрёдер, пригоден не только для представления арифметических или вообще математических понятий, но и для выражения понятий других областей. Ссылаясь на А. Макфарлейна, также занимавшегося логикой отношений (см., например, его работы [111—113]), Шрёдер в качестве примера приводит определения понятий «брат», «сестра», «отец», «мать» и др. (в этих определениях используются, помимо ранее упоминавшихся средств, еще два неопределимых понятия: абсолютный термин m «обладать свойством мужчины» (m = männlich) и относительный термин c «быть ребенком (кого-то)»): отец$= m\breve{c}$, мать$= \bar{m}\breve{c}$, муж$= 0' \cdot m\breve{c}; c$, жена$= 0' \cdot \bar{m}\breve{c}; c$ и т. д.

Э. Шрёдер отмечает, что хотя «пасиграфическое движение» в Италии, возглавляемое Дж. Пеано, добилось значительных успехов, дальнейший его прогресс задерживается в силу того, что оно основывается главным образом на «исчислении эквивалентных утверждений», развившимся Дж. Булем и Х. Макколом, и не использует алгебру отношений. Обращению к последней, считал автор доклада «О пасиграфии», в определенной мере препятствует и система обозначений, принятая итальянской школой; в этой системе, по его мнению, отсутствовали наиболее общие исходные понятия, которые уже введены в реляционной алгебре и сравнительно хорошо изучены.

Взгляды Э. Шрёдера на «универсальный язык» интересны в нескольких отношениях. Прежде всего они показывают, что Шрёдер не был, как это иногда представляют, логиком с узким кругозором, поглощенным техническим усовершенствованием алгебры логики Буля. Он достаточно отчетливо видел ту более общую и более значительную цель, ради которой развивается логическая техника. Своим логическим результатам он стремится дать методологическое обоснование, включить их в качестве важного фрагмента в деятельность по разработке символического языка, адекватного задачам, стоящим перед научным знанием. Следует также иметь в виду, что защита программы Лейбница, центральной мыслью которой являлась идея сведе́ния всякого рассуждения к вычислению, была во времена Шрёдера, и особенно в Германии, нелегким делом. Установка на описание логически последовательного мышления в рамках «универсального», не допускающего субъективизма и двусмысленности, исчисления имела явно антипсихологический характер и не встречала понимания со стороны сторонников психологического направления в логике и теории познания.

Среди немецких «философских» логиков, а также психологов и философов конца прошлого века господствовало убеждение, что сведе́ние рассуждений к простейшим операциям, подобным вычислительным, является сухим, скучным, безрезультатным занятием. Эти ученые считали алгебру логики и всякое исчисление вообще «мертвым формализмом», «мышлением по схеме», требуя разработки некоей «содержательной логики», описывающей «мышление в понятиях» и охватывающей мыслимые объекты во всем многообразии их свойств и связей. Возражая им, Шрёдер указывал, что односторонность и абстрактность логических исчислений являются не их недостатком, а достоинством. Логическое «исчисление по схеме» строго аналогично всякому математическому вычислению, и отказ от исследования такого мышления равносилен отказу от арифметики, геометрии и математики вообще. Эти науки столь же абстрактны и односторонни, как и логическое исчисление, они не принимают во внимание интереснейших свойств объектов, представляемых числами, и отвлекаются от особенностей тел, заполняющих пространство. Но это вовсе не означает, что математика бесплодна и суха. Мощь арифметики — и математики в целом — как раз и заключается в ее высокой абстрактности, в расчленении рассматриваемых ею проблем на простейшие элементы. Возражая Г. Лотце, утверждающему, что немецкая философия постоянно стремится к тому, чтобы «*понимать* мировой процесс, а не просто его *вычислять*», Э. Шрёдер говорит: если бы только мы могли его *вычислять*! Вычисление не противоречит пониманию, а, напротив, является необходимой его предпосылкой; вычисление влечет за собой «понимание» — если понимание вообще возможно на земле ([1], Bd I, S. 105). Полемика Шрёдера с теми, кто противопоставлял «ограниченной и сухой» формальной логике крайне неясную концепцию «содержательной логики», избегающей будто бы

всякой односторонности и абстрактности, не потеряла своей актуальности и по сей день.

Учитывая дискуссии, происходившие в его время вокруг математизации логики, Э. Шрёдер заключает свое «Введение» обоснованием значения алгебры логики. Математическая разработка логики, говорит он, свидетельствует о том, что «и логика выступает отныне как наука, способная к неограниченному развитию» (ibid., S. 121). Раскрывая ценность и пользу логики, Шрёдер привлекает историко-логический материал; он приводит взгляды авторов «Логики Пор-Рояля», утверждавших, что занятия логикой развивают навыки правильного рассуждения; он присоединяется к взглядам Милля относительно значения логики для воспитания логического мышления. Однако ко всему этому Шрёдер присоединяет — в качестве основного — мотив, связывающий его мысль не с прошлым, а с будущим и делающий его созвучным эпохе кибернетики.

Не умаляя тезиса о полезности логики для развития навыков логического мышления, Шрёдер подчеркивает ценность (Wert) логических исследований с а м и х п о с е б е — исследований, направленных на раскрытие действующих в мышлении законов, определяющих верный ход умозаключений. «И какую же более *благородную* цель может поставить перед собой интеллект, как не цель: *познать самого себя*!», — восклицает он (ibid., S. 124).

Но Э. Шрёдер видел и практический аспект логических исследований. Он отмечал при этом, что с ним следует связывать не столько уровень непосредственной полезности, сколько практики в более высоком смысле (Hochpraxis). И тут, в последних абзацах своего «Введения», Шрёдер рисует перспективу того, что ныне называется «искусственным интеллектом». Подобно другим наукам, пишет он, логика тоже когда-нибудь придет к вещам, совершенно неожиданным, получит результаты, последствия которых ныне трудно себе вообразить. Стремясь дать представление о перспективах логики, Шрёдер указывает на «построенные недавно три «логические машины» (logical machines)» [37]. Он говорит о них:

[37] Э. Шрёдер не пишет, какие машины он имеет в виду. Как можно судить по библиографии, помещенной в томе I «Лекций», речь идет о логических машинах С. Джевонса [114], Дж. Венна [115] и А. Маркана [116], [117].

эти «логические машины»... впрочем, по-видимому, вряд ли заслуживают присвоенного им названия, поскольку возможности их находятся на самом низком уровне развития: их можно уподобить, скажем, котлу Папина, мощность которого ничтожно мала по сравнению с современной паровой машиной. В действительности, однако, никто не может предсказать, не будет ли уже вскоре сконструирована «думающая машина» — машина, похожая на вычислительную машину (Rechenmaschine. — *Б. Б.*, *А. Т.*) или более совершенную, чем она, — которая возьмет на себя весьма значительную часть утомительной умственной работы, аналогично тому как паровая машина успешно справляется с физической работой.

Разумеется, урожая нельзя собрать, пока происходит лишь посев, особенно когда вырасти должны деревья (ibid., S. 125).

Следует заметить, что, весьма оптимистически оценивая перспективы логики в теоретическом и практическом планах, энергично защищая и развивая идеи Лейбница об «универсальной характеристике», Э. Шрёдер проявлял разумную сдержанность. Ему было чуждо представление, что человеческое мышление может быть полностью заменено машинообразными вычислительными процессами. Такая замена, как показало последующее развитие науки, невыполнима принципиально. Логические результаты 30-х годов нашего века, о которых мы не будем здесь говорить, со всей очевидностью показали, что не существует полного и одновременно непротиворечивого исчисления не только всех возможных истин, но даже арифметических положений. Отсутствие общего метода, позволяющего заменить любое рассуждение вычислением, конечно, не случайно. Полностью отказаться от содержательных рассуждений, заменив их вычислениями, невозможно: такие рассуждения необходимы хотя бы тогда, когда происходит запись исходных данных задачи (посылок рассуждения, формализованного в исчислении) на языке (символическими средствами) исчисления. Да и при построении самих исчислений всегда в конце концов приходится прибегать к содержательному мышлению, к общечеловеческой логике.

Во время Шрёдера против логической программы Лейбница — в ее «максималистском» истолковании — могли быть выдвинуты только возражения общего характера. Конкретные ограничения метода формализованных языков были открыты несколько десятилетий спустя.

Но можно сказать, что Шрёдер, не сомневавшийся в теоретической ценности и практической полезности символического языка логики и математики, был одним из тех, кто подготовил почву для открытия тех ограничений, которым этот язык подвержен.

Об алгебро-логических исчислениях Э. Шрёдера

Продвижению вперед в реализации описанной в предшествующем параграфе общей задачи создания универсального по своим возможностям логического исчисления, могущего послужить базой «пасиграфического» представления (и анализа, и развития) человеческого знания, Э. Шрёдер посвятил фактически всю свою научную жизнь. Как отмечалось выше (см. с. 162 и далее), уже в первых его математических работах проявилось стремление к обобщению математических результатов и комбинаторике, позволяющей — коль скоро дело идет о конечных совокупностях объектов — обозреть все частные случаи некоторой общей математической структуры. Первая крупная работа Шрёдера — «Учебник арифметики и алгебры» (1873), бесспорно, идет в том направлении математико-логических разработок, программа которых позже четко оформлялась у ее автора в виде замысла «пасиграфии», основанной на алгебраизированной логике.

В работе Э. Шрёдера над алгебро-логическими исчислениями можно выделить несколько этапов (соответственно областей научных интересов). Первый из них открывается упомянутым «Учебником» [71], в котором были развиты идеи «формальной алгебры»; полученные в этой работе результаты получили развитие в статьях [118]—[122][38], а также в «Лекциях» [1], в частности в ряде приложений к ним. Следующий этап (и область научных разработок) связан с первой уже собственно логической работой Шрёдера — его брошюрой (объемом в 42 страницы) 1877 года «Сфера операций логического исчисления», в которой было дано краткое изложение алгебры логики как логики классов. Третий и основной этап научной

[38] Последняя из них, как мы имели случай отметить, существует в русском переводе: она была издана в 1888 г. В. В. Бобыниным [55], сделавшим много для распространения в России идей математической логики.

15 Заказ № 998

деятельности немецкого математика связан с созданием «Лекций по алгебре логики», первый том которых вышел в 1890 г.; это период не только детальной разработки алгебраической теории логики, но и этап осмысления места математизированной логической науки в человеческом знании вообще (что выразилось в упоминавшихся нами статьях о «пасиграфии»). Можно, пожалуй, говорить и о четвертом периоде творческой деятельности Шрёдера — периоде, когда он, во изменение первоначального плана «Лекций», занялся детальнейшей разработкой логики и алгебры отношений, посвятив этому третий, первоначально не планировавшийся, том своего труда; в это время Шрёдер все более применяет алгебру логики, включающую теорию отношений, к проблемам обоснования математики.

В задачу данной статьи не входит подробный анализ алгебро-логических построений Шрёдера. Мы ограничимся лишь краткой экспозицией каждого из отмеченных этапов, преследуя цель дать читателю общее представление о содержании алгебро-логических разработок немецкого математика.

Первый этап исследований Шрёдера характеризовался постановкой проблемы отыскания естественного обобщения арифметики натуральных чисел и обзора всех в принципе возможных «арифметик» [39]. Объясняя в работе «Об алгорифмах и исчислениях» исходный пункт этой проблемы, он указывает на то, что арифметика натуральных чисел, включающая такие операции, как сложение, вычитание, умножение и деление, является наиболее характерным и исторически наиболее древним примером «исчисления».

[39] Работы Э. Шрёдера, посвященные обобщению операций арифметики, в которых использовались термины «алгоритм» и «исчисление» в смысле, имеющем параллели в их современном употреблении — работы, осуществленные задолго до возникновения современной теории алгоритмов и исчислений, — в течение продолжительного времени не привлекали внимания ни историков математики, ни историков логики. Впервые к их анализу обратился по рекомендации С. А. Яновской советский историк математики С. Г. Ибрагимов, посвятивший им упоминавшуюся уже нами статью «О забытых работах Э. Шрёдера, пограничных между алгеброй и логикой» [32]. В дальнейшем мы используем выводы этой статьи (см. также работу упомянутого автора [66], помещенную в настоящем издании).

Воздвигнутое на фундаменте этого первого исчисления научное здание настолько превосходит в настоящее время всякое описание, что является вполне достойным труда вопрос, не возможны ли еще и другие исчисления подобной или даже еще большей мощи? Ясно, что по крайней мере в *формальном отношении* этот вопрос должен решаться утвердительно! ([55], с. 77).

В исходном для данного круга вопросов «Учебнике арифметики и алгебры» Э. Шрёдер с исключительной ясностью определяет задачу своих исследований в области обобщенной арифметики, называвшейся им также *формальной алгеброй*:

Как известно, в физических науках при изучении явлений исключительное значение имеет *разделение* причин, и этот метод, столь плодотворный в области индуктивных дисциплин, может быть с пользой перенесен в область дедукции. И в случае чисто дедуктивных умозаключений разумно стремиться к возможно более строгому выделению их допущений или посылок, с тем чтобы по отдельности подвергнуть их исследованию с точки зрения вытекающих из них следствий. Вся новая, так называемая *абсолютная* или «пан-геометрия» обязана своим возникновением прежде всего этой тенденции — и подобно этому же последняя лежит в основании собственно формальной или *абсолютной* алгебры ([71], с. 232).

Далее Э. Шрёдер говорит, что исходной задачей этой ветви «чистой математики» должно быть исследование различных допущений, которые могут использоваться для определения некоторой вычислительной операции, а значит, и для построения числовых систем; в ней должен также производиться анализ системы тех следствий, которые может повлечь за собой каждое из принятых допущений.

Формальная алгебра, таким образом, должна производить общую подготовительную работу, необходимую для рассмотрения самых разнообразных специальных числовых систем и вычислительных операций, которые могут быть придуманы для тех или иных целей.

Однако эти допущения, т. е. условия, которым могут быть подчинены любые общие знаки числа [40] a, b, c, . . ., не должны, конечно,

[40] Выражение «общие знаки», как мы имели случай отметить выше, Шрёдер употребляет в том смысле, в каком ныне в логике используется понятие «переменная».

браться с потолка. Напротив, к ним следует подходить так, чтобы сохранялась их тесная связь с уже имеющимся, данным, действительным; вместо того чтобы совершать сальто-мортале, нужно всегда просто двигаться с того места, где мы уже находимся (ibid., S. 233) [41].

Таким образом, Э. Шрёдер ставит применительно к арифметике ту же задачу, какая ранее была поставлена в геометрии и привела к возникновению неевклидовых геометрий (одну из них — а именно, теорию Лобачевского — Шрёдер и имеет в виду, когда говорит о «пангеометрии»). Существо этой задачи — в обобщении имеющейся арифметики натуральных чисел путем выделения системы ее аксиом, исследования их связей и обзора различных возможных «арифметик», получаемых в результате достаточно естественных и не ведущих к противоречию модификаций аксиоматического определения обычной арифметики (см. [32], с. 250 и далее) [42].

Логическая природа описанной задачи не подлежит сомнению; на ее связь с логикой указано в ([32], с. 248), где отмечается, что сам Шрёдер видел в ней «взаимопроникновение» областей логики и арифметики. Но, по-видимому, следует говорить и о ее существенном м е т а т е о р е т и ч е с к о м — а значит, и г н о с е о л о г и ч е с к о м — аспекте. Э. Шрёдер ставил проблему анализа дедуктивных возможностей различных утверждений (законов, принципов) строго построенной теории. В качестве таковой им избирается поначалу, в книге [71], арифметика рациональных чисел. Поскольку, однако, в применении к этой теории данная проблема оказывается очень сложной, он ограничивает задачу случаем бинарных операций, однозначных, всюду определенных на некоторой предметной области и замкнутых относительно нее, причем таких, что для них существуют обратные операции. Как показано в [32] и [66], в переводе на язык современной алгебры это означает, что Шрёдер исследует квазигруппы и отношения между ними [43].

Несмотря на кажущуюся узость такой постановки задачи, она имеет непосредственную идейную связь со столь развившимися в настоящее время метатеоретическими исследованиями, одним из важных направлений которых является разработка методов анализа дедуктивных (вычислительных) возможностей теорий, их фрагментов, входящих в теории отдельных утверждений и т. п. Ныне эти исследования неотделимы от теории алгоритмов и изучения исчислений как систем порождающих правил. Примечательно в этой связи, что и отмечаемые нами разработки Шрёдера привели его к понятиям «алгоритма» и «исчисления» (Kalkul), которым он, правда, придавал смысл, не совпадающий с современным. Шрёдер называл «алгоритмом» любую систему уравнений, которая задает некоторую операцию и операции, ей обратные, на какой-то предметной области и которая замкнута относительно своих следствий, т. е. берется вместе со всеми вытекающими из нее равенствами (определенного вида); если такая система уравнений определяет более чем одну такого рода операцию (вместе с обратными им), то Шрёдер говорит

---

[41] В основу русского текста приведенных отрывков из «Учебника» [71] положен их перевод, опубликованный С. Г. Ибрагимовым в [32].

[42] Как указывает Я. Люрот, при подготовке к печати в 1872 г. «Учебника арифметики и алгебры» Э. Шрёдер, интенсивно занимался исследованиями арифметических законов, справедливых для арифметических операций, понимаемых иначе, чем обычно. Шрёдер допускал, например, что умножение может не быть ни коммутативным, ни ассоциативным. В этом случае оказалось бы, что существуют две операции деления, являющиеся обратными относительно умножения. «В исследованиях, начатых в то время, он прежде всего преследовал цель отделения друг от друга следствий отдельных допущений, т. е. выяснения того, каковы формулы, вытекающие из одного закона коммутативности, каковы формулы, вытекающие из закона ассоциативности, каковы, наконец, формулы, справедливые только когда действуют оба закона. В дальнейшем ходе этих рассмотрений, которыми Шрёдер занимался на протяжении всей своей жизни, опубликовав, однако, только отдельные их результаты, он ставил перед собой очень обширную задачу. Умножение и две обратные ему операции могут пониматься как символические обозначения некоторой функции от двух аргументов и двух возможных обратных ей функций, и изучение уравнений, включающих такие функции, и было его целью» ([12], S. VIII).

[43] Квазигруппой в современной математике называется произвольное множество M с определенной на M бинарной операцией φ такой, что для нее существуют обе обратные ей операции. Если множество M конечно, то φ может быть в принципе задана с помощью латинского квадрата. Исследования Э. Шрёдера внесли значительный вклад в теорию латинских квадратов, которая ныне получила эффективные приложения, в частности, в математической теории планирования эксперимента (в связи с чем имя Шрёдера ныне упоминается при рассмотрении истории этого направления теоретической кибернетики (см. [123], с. 271).

об «исчислении» [44]. Как отмечается в [32], одно из нынешних определений понятия алгоритма (в его современном смысле), а именно, определение в терминах аппарата рекурсивных функций, также задается с помощью системы определенного рода равенств, почему и можно говорить о некотором сходстве шрёдеровских понятий с современными представлениями.

Перейдем к собственно алгебро-логическим исследованиям Э. Шрёдера. Первой его работой, посвященной алгебре логики, была брошюра «Сфере операций логического исчисления», вышедшая в Лейпциге в 1877 г.[45] В ней Шрёдер значительно изменяет алгебру логики Буля. Многие высказанные им здесь идеи легли позднее в основание его «Лекций по алгебре логики».

В «Сфере операций . . .» Шрёдер поставил перед собой две задачи: во-первых, устранить те недостатки, которые были свойственны, по его мнению, алгебраическому представлению логики, произведенному автором «Исследования законов мысли», и, во-вторых, осуществить в модернизированной форме изложение «всей в высшей степени замечательной и в формальном отношении высокоинтересной сферы операций дедуктивной логики» ([23], S. IV).

Во вводной части этой работы Э. Шрёдер, высоко оценивая вклад Дж. Буля в целом, бросает в его адрес «единственный упрек»: в своей системе Буль преувеличил аналогию, имеющуюся между правилами арифметики, с одной стороны, и правилами логики — с другой. Именно с этим связано введение Булем в логику «балласта *числовой алгебры*» (Ballast der algebraischen Zahlen). Балласт этот приводит к тому, что, следуя Булю, «приходится отказаться от возможности интерпретации отдельных шагов и вообще вести вычисление с помощью символов, совершенно не допускающих логического истолкования, таких, например, как 2, —1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{0}$» (ibid., S. III).

[44] Заметим, что в своих методологических рассмотрениях, анализировавшихся нами в предыдущих разделах статьи, термин «исчисление» («логическое исчисление» — ср. [1], Bd I, S. 120) употребляется в более общем — и менее определенном — смысле искусственного языка знаков, служащего формализации логической дедукции.

[45] Краткий абрис содержания этой работы дан Шрёдером в статье [124].

Шрёдер же строит логическое исчисление так, что из алгебры логики исключаются все фигурировавшие у Буля числовые коэффициенты, кроме 0 и 1 (об их смысле у Шрёдера мы скажем ниже).

Модернизация алгебры Буля состояла прежде всего в том, что вместо операции, представлявшей в Булевом исчислении исключающее «или» естественного языка — разделительную дизъюнкцию, — Шрёдер использовал операцию, являвшуюся аналогом соединительного «или» — нестрогую дизъюнкцию. Следуя традиции, восходящей к А. де Моргану, он в этом пункте фактически присоединился к точке зрения С. Джевонса, последовательно осуществившего в алгебре логики замену строгой дизъюнкции (в случае интерпретации на классах: операции объединения классов с исключением их общей части) дизъюнкцией слабой (операцией обычного теоретико-множественного объединения). Результатом этого явилось то, что алгебро-логические системы Шрёдера (и еще ранее — Джевонса) явились тем, что ныне носит название *булевой алгебры* (у самого же Буля булевой алгебры в собственном смысле этого термина не было) [46].

Что касается логического содержания построения, осуществленного в «Сфере операций . . .», то оно совпадает с тем содержанием, которое Шрёдер во «Введении» к первому тому «Лекций» связывает с элементарной частью «записи в понятиях» (см. выше предыдущий раздел данной статьи). А именно, переменные используются им для обозначения к л а с с о в объектов мышления, которым в обычном языке соответствуют о б щ и е и м е н а. Они, говорит Шрёдер, являются символами понятий, в которых мыслятся объединенными все существенные признаки, свойственные объектам, входящим в соответствующие классы. Однако его логическое исчисление оперирует понятиями, представленными их о б ъ е м а м и, и рассматриваемые в нем классы могут слагаться из совершенно случайно выбранных объектов, причем число объектов, входящих в класс, может быть как конечным, так и бесконечным. Если в классе содержится только один объект,

[46] В «Сфере операций логического исчисления» Джевонс не упоминается. Кроме Буля, из числа математических логиков, на результаты которых автор существенно опирался в этой работе, указан только Р. Грасман.

то в обычном языке символу класса соответствует собственное имя.

Возражая против тех аналогий между правилами арифметики и правилами логики, из которых исходил Буль, Э. Шрёдер сам, однако, систематически сопоставляет арифметику и логику. К этому — вполне правомерному, как это очевидно в свете современной математической логики, — подходу его толкает не только идущая от Буля традиция, но и собственные изыскания в области «формальной алгебры», в которых такое большое место занимали вопросы, связанные с прямыми и обратными операциями.

Подобно арифметике, в логическом исчислении, как оно поначалу излагается Шрёдером в [23], имеется четыре основных операции, о которых автор говорит, что они отличаются от арифметических операций не столько своим характером, сколько предметами, к которым применяются: в одном случае таковыми являются числа, в другом — понятия. Вследствие этого Шрёдер сохраняет за операциями логики те названия, которые они имеют в арифметике.

Четыре основные арифметические операции, утверждает Шрёдер, по степени сложности подразделяются на две группы: к первой относятся более простые операции сложения и вычитания, а ко второй — умножение и деление; это разделение не находит отражения в логике, так как в ней нет оснований для подобной группировки основных операций. Зато в ней вполне допустимо — по аналогии с арифметикой — противопоставление прямых и обратных операций, чему немецкий математик в своих исследованиях уделяет большое внимание.

Э. Шрёдер показывает, что операции деления и вычитания можно устранить, введя вместо них операцию противоположения или о т р и ц а н и я; она заключается в образовании «противоречащей противоположности» и находится в отношении двойственности к самой себе. Отрицание проще, чем вычитание и деление, принятие его (наряду с умножением и сложением) в качестве одного из основных действий логического исчисления позволяет довести это исчисление «до наибольшей возможной простоты». Учитывая аксиоматику исчисления Шрёдера, которая будет описана ниже, мы можем сказать, что это утверждение на современном языке имеет следующий смысл: множество всех классов (могущих быть выделенными в универсальном классе), включая универсальный класс (обозначается Шрёдером единицей) и пустой класс (обозначается нулем), с определенными на этом множестве операциями умножения (пересечения классов), сложения (объединения классов) и отрицания (дополнения класса до универсального), образует булеву алгебру.

Логическое исчисление Э. Шрёдер строит (с позиций нынешних критериев строгости в логике, может быть, лучше говорить: старается строить) аксиоматически, исходя из определений и аксиом. Определения (дефиниции) описывают, говоря современным языком, упомянутый выше содержательный смысл основных логических операций и символов 0 и 1. При этом дается разъяснение их познавательного содержания: *логическое умножение* служит, по Шрёдеру, для выделения из многообразия всех мыслимых вещей тех объектов, которые имеют общие признаки; оно есть в ы б и р а н и е или в ы д е л е н и е, и может быть названо также о п р е д е л е н и е м (Bestimmung), так как если из класса a выделить те объекты, которые принадлежат также и классу b, то объем понятия a станет в общем случае более узким, ограниченным, поскольку рассматриваемые предметы этого класса должны теперь иметь и признаки предметов класса b; напротив, *логическое сложение* служит образованию понятий, которым соответствуют классы вещей, состоящие из подклассов, характеризующихся р а з н о р о д н ы м и признаками, почему Шрёдер и называет его также с о е д и н е н и е м и о б р а з о в а н и е м к о л л е к ц и и; нуль, по Шрёдеру, является знаком, «представляющим ничто»; единица означает категорию всего мыслимого, совокупность всего, о чем может идти речь.

Э. Шрёдер не забывает отметить, что рассуждения, связанные с определениями умножения и сложения, нуля и единицы, являются всего лишь пояснениями, лишенными самостоятельного значения. В алгебру логики входят не эти рассуждения и не определения, а опирающиеся на них аксиомы. Он пишет:

Все теоремы нашей теории *интуитивно очевидны*; раз понятые, они представляются непосредственно ясными. Поэтому утверждения, принимаемые нами в качестве аксиом, мы могли бы с известным основанием рассматривать как следствия, непосредственно вытекающие из определений. Эти аксиомы. . ., не носящие какого-либо эмпирического характера, можно точнее назвать чисто *формальными*, так как к аксиомам я отношу только те утверждения, которые не выводятся мною путем формального вычисления с помощью заранее установленных. . . методов. . . При таком подходе формальное основание всей теории составляют не определения, а эвентуально связанные с ними постулаты или аксиомы (ibid., S. 7).

Аксиоматика исчисления начинается с аксиом для основного отношения рассматриваемого логического построения — для отношения *равенства*. С помощью знака этого отношения и знаков умножения (точка, которая может и опускаться, как это делается в обычной арифметике), сложения (плюс) и отрицания (нижний справа индекс 1 при выражении для класса) строятся формулы-равенства; некоторые из них оказываются аксиомами, а некоторые — теоремами, выводимыми из аксиом.

Отношение равенства характеризуется (I) аксиомой, выражающей рефлективность равенства ($a=a$), и (II) аксиомой «Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$», смысл которых Шрёдер передает словами: «Всякий символ класса равен самому себе» и «Если два символа класса равны третьему, то они равны между собой»; при этом два «символа класса» считаются равными тогда, и только тогда, когда представляемые ими классы содержат одни и те же объекты, т. е. когда оба символа являются названиями одного и того же класса[47]. Следующие две аксиомы (они обозначаются номерами 1^0 и $1'$) утверждают замкнутость операций умножения и сложения относительно множества всех классов—подклассов единицы.

При формулировке дальнейших аксиом учитывается *принцип двойственности* (дуальности), впервые появляющийся именно в рассматриваемой работе. Этот принцип, называемый Шрёдером «дуализмом», первоначально формулируется для случая, когда в исчислении имеется четыре операции — две прямые и две обратные; принцип гласит: из всякой общезначимой логической формулы получается общезначимая формула, если в первой формуле знаки сложения и вычитания везде заменить соответственно знаками умножения и деления, а символы 0 и 1 заместить соответственно друг на друга; этот принцип Шрёдер распространяет затем на исчисление без обратных операций. При дальнейшем развертывании аксиоматики производится попарная группировка дуальных формул, т. е. формул, получающихся одна из другой с помощью принципа двойственности; каждой паре дуальных формул присваивается один и тот же номер (начиная с 2), но одна из формул получает номер с нулем в качестве верхнего индекса, а другая — номер со штрихом. Аксиоматика включает аксиомы — выражающие[48]: монотонность умножения и сложения. «Если $a=b$, то $ac=bc$» и «Если $a=b$, то $a+c=b+c$»; свойства коммутативности и ассоциативности умножения и сложения; идемпотентность обеих операций. Аксиомами, в которых фигурируют нуль и единица, являются утверждения: для любого класса a существует по крайней мере один класс a_1 такой, что $aa_1=0$ и $a+a_1=1$ (эти аксиомы имеют номера (7^0) и ($7'$); через a_1 обозначается отрицание класса a, т. е. дополнение его до универсального класса 1), а также аксиома $a \cdot 1=a$. В аксиоматике Шрёдера фигурирует только один закон дистрибутивности — закон дистрибутивности умножения относительно сложения. В качестве теорем доказывается: закон дистрибутивности сложения относительно умножения, равенства $0 \cdot a=0$, $1+a=1$ и $a+0=a$, законы поглощения $a+ab=a$ и $a(a+b)=a$, закон снятия двойного отрицания и оба закона де Моргана. Важную роль в решении логических уравнений, лежащем в основе процедуры поиска логических следствий (определенного вида) из данных посылок, которой затем занимается Шрёдер, играют теоремы: (16^0) «Если $a+b=0$, то $a=0$ и $b=0$» и двойственная ей (16^1); (17^0) «Уравнение $a=b$ равносильно уравнению $ab_1+a_1b=0$» и двойственная ей ($17'$), но особенно (20^0) «Уравнение $xa+ya_1=0$ равносильно системе уравнений $xy=0$ и $a=ux_1+y$», где u есть некоторый произвольный класс. Последнюю теорему Шрёдер характеризует как «*главную теорему*, в которой достигает своего

[47] Стоит заметить, что подобное определение равенства символов объектов через равенство самих объектов было совершенно неприемлемо для Г. Фреге, проводившего четкое различие между обозначаемым и обозначающим и резко критиковавшего неаккуратности, подобные той, которую допускал Шрёдер. Впрочем, из контекста изложения автора «Сферы операций. . .» нетрудно усмотреть, что под равенством «символов классов» на деле имеется в виду равенство классов, обозначенных некими символами.

[48] Мы не придерживаемся того порядка, в котором Шрёдер перечисляет аксиомы; отметим также, что для некоторых из них мы применяем принятые современные наименования (например, «идемпотентность»).

завершения все Логическое исчисление» ([23], S. 22; перевод В. В. Бобынина [25], с. 28); эта характеристика основывается на том значении, которое данная теорема имеет для решения логических уравнений.

Обращает на себя внимание, что Шрёдер не доказывает свойств симметричности и транзитивности отношения равенства, хотя фактически пользуется ими (как известно, эти свойства вытекают из аксиом, обозначенных нами выше как (I) и (II)). Несформулированным остается и правило замены равным для отрицания (т. е. правило: «Если $a=b$, то $a_1=b_1$»), которое необходимо в его исчислении. Не показано, как из законов идемпотентности $aa=a$ и $a+a=a$ вытекает равенство классу a произведения (соответственно — суммы), построенного из повторения a сомножителем (слагаемым) в любом числе. Эти (и иные) дефекты в строгости излагаемого в [23] исчисления были замечены Г. Фреге. В статье «Вычислительная логика Буля и запись в понятиях», так и оставшейся не опубликованной при жизни ее автора [49], Фреге писал:

В своей «Сфере операций логического исчисления» Шрёдер вводит в качестве аксиом законы коммутативности и ассоциативности умножения и сложения, однако не показывает, что из того, что число множителей или слагаемых может быть больше трех, вытекает, что их последовательность и группировка может быть какой угодно. Но такие доказательства необходимы, если предложения (Sätze. — *Б. Б., А. Т*), которые у меня являются выводимыми, мы хотим доказать — в той мере, в какой это возможно, — на Булевом языке формул с помощью цепочки умозаключений, не содержащей никаких пропусков. Посредством «ментального перемножения» (mentales Ausmultiplizieren. — *Б. Б., А. Т.*) [50] сделать этого нельзя. Ведь необходимы законы (Sätze), согласно которым обе части равенства могут быть обменены местами, а равное всегда может быть заменено равным. Шрёдер не вводит их в число своих тринадцати аксиом, хотя, перечисляя их, он включает в их число и само собой разумеющиеся логические

[49] Эта обширная статья, относящаяся к 1880—1881 гг., была, как отмечают редакторы «Наследия» Г. Фреге, последовательно отклонена журналами «Zeitschrift für Mathematik», «Mathematische Annalen» и «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik».

[50] В примечании редакторов книги ([80], Bd 1) указывается, что Фреге имеет здесь в виду фигурирующие у Буля (в «Исследовании законов мысли») выражения «mental operations» и «process of logical multiplication».

принципы (Sätze). Таким образом он, собственно говоря, использует пятнадцать аксиом ([80], Bd 1, S. 43—44).

Однако эти недостатки логического построения Э. Шрёдера, осуществленного в работе [23], не препятствовали «практической работоспособности» исчисления. Во всяком случае, в логическом плане исчисление, развитое в «Сфере операций. . .», было более прозрачно, чем Булево. Для демонстрации преимуществ своей формулировки алгебры логики по сравнению с формулировкой Буля Шрёдер приводит со всеми промежуточными вычислениями решение известной задачи — примера применения логической техники, — предложенной английским математиком ([21], с. 146—149); эта задача рассматривалась впоследствии Дж. Венном [125], применившим для ее решения свой метод диаграмм (см. анализ, предпринятый А. С. Кузичевым в [46], с. 64—76); Шрёдер вернулся к ней в своих «Лекциях по алгебре логики» ([1], Bd I, S. 522—528), где ее решение проведено несколько по-иному (так как в [1] используется алгебро-логический аппарат с отношением $\neq\!\!\!\in$, отсутствовавшим в «Сфере операций . . .»).

Мы не будем здесь сопоставлять решения данной задачи, предложенные Булем, Шрёдером (в обоих вариантах) и Венном; проблемы, относящиеся к тому, как математические логики — и в частности Э. Шрёдер и П. С. Порецкий — решали логические уравнения, рассмотрены в книге А. С. Кузичева ([46], с. 47—57, 64—96, 224—237), к которой мы и отсылаем читателя. Из этих рассмотрений ясно видно, как алгебро-логическая «пасиграфия» Шрёдера применялась им для анализа конкретной информации.

Большое внимание, как мы уже говорили, Шрёдер уделял обратным логическим операциям — вычитанию и делению [51]; обоснование возможности их введения

[51] «В истории алгебры логики, — пишет об обратных операциях А. С. Кузичев, — интересно вообще, что, начавшись с попыток перенести в логику все операции и законы арифметики, она постепенно приводила к тому, что логики начинали сомневаться не только в правомерности, но и просто в целесообразности такого переноса, начинали пользоваться более удобными и более специфическими именно для логики операциями и законами. С этой точки зрения особенно интересна история обратных операций, которыми все логики XIX века, — в том числе такой крупный не только логик, но и алгебраист, как Шрёдер, — еще очень много занимались. Но эта история пока еще недостаточно изучена» ([45], с. 30).

и последующей элиминации является одним из тех результатов Шрёдера, которые позволили ему перестроить алгебру Буля в булеву алгебру. Однако этот вопрос заслуживает самостоятельного и подробного анализа, и мы его тоже не будем здесь затрагивать [52].

В «Сфере операций логического исчисления» Э. Шрёдер дал изложение алгебры логики (очень краткое) как булевой алгебры, строящейся на основе отношения равенства. Тринадцать лет спустя он опубликовал первый том своей основной работы [1], основывавшийся на тщательном исследовании идей Буля и результатов более поздних представителей математической логики; три тома этой работы охватили не только исчисление классов (как это было в «Сфере операций. . .»), но и исчисление высказываний и логику отношений. «Лекции по алгебре логики» явились не только детальным развитием тех представлений, которые были конспективно изложены Шрёдером в брошюре [23] (и содержали целый ряд существенных для систематизации алгебры логики результатов), — изменилось исходное отношение, с которого Шрёдер начинает все построение. Им оказывается уже не отношение равенства, а отношение типа «меньше или равно» — отношение *субсумции* или, на языке логики классов, отношение (нестрогого) включения класса в класс. Аргументация в пользу подобного подхода, которую развивает Шрёдер, такова.

В естественном языке связка «есть», с помощью которой образуются суждения, выражает два различных смысла: в одних случаях — отношение субординации, или подчинения, понятий, в других — отношение равенства. Первое из этих отношений представляется Шрёдером знаком $\subset$, второе — знаком $=$. Оба отношения можно охватить, если принять, что смысл связки «есть» состоит в выражении отношения подчинено или равно, имеющего место между объемами субъекта и предиката простого суждения. Для представления этого отношения — отношения субсумции — Шрёдер вводит знак $\subseteq$. Хотя этот знак является составным — получается путем совмещения знаков $\subset$ и $=$, он выражает тем не менее более простое

[52] Вклад Э. Шрёдера в исследование обратных операций алгебры логики является предметом рассмотрения, в частности, в работах [4], [7], [49].

отношение, чем знаки $\subset$ и $=$, из которых он строится. Субсумция $a \subseteq b$ («Все a суть b») говорит меньше, чем соответствующее суждение подчинения $a \subset b$ («Все a суть b, но не все b суть a») и равенство $a=b$ («Все a суть b и все b суть a»). В силу того что субсумция представляется более фундаментальным и простым отношением, чем отношения подчинения и равенства, Шрёдер и кладет теперь ее в основу своей алгебры логики. Выражение $a \subseteq b$ может читаться как «a включается в b»; оно передает смысл категорического суждения «S есть P» (точнее, «Все S суть P»). Главное достоинство знака $\subseteq$, предоставляющего выбор между подчинением и равенством, говорит Шрёдер, обнаруживается в науках, формулирующих общие суждения, не предрешая выбор между двумя возможными их истолкованиями [53].

Для понятия субсумции Шрёдер формулирует два принципа, которые, как говорит он, «не сводимы к более простым принципам и должны быть просто заданы» ([1], S. 168): принцип тождества «a есть a», или $a \subseteq a$, и принцип: «Если $a \subseteq b$ и одновременно $b \subseteq c$, то $a \subseteq c$», по существу совпадающий с силлогизмом Barbara. Через отношение субсумции затем определяется понятие равенства (если, и только если, $a \subseteq b$ и $b \subseteq a$, то $a=b$) и затем доказываются теоремы, касающиеся свойств отношения равенства и его связи с отношением субсумции.

Изложению развиваемой им алгебры как алгебры логики Шрёдер предпосылает, по его словам, вспомогательную дисциплину — *тождественное исчисление* областей некоторого многообразия, или просто тождественное исчисление. Логические исчисления появляются затем в результате осмысления (интерпретации) тождественного исчисления. Мы не будем рассматривать здесь это исчисление и его интерпретации (отчасти это сделано в работе [31], принадлежащей одному из авторов этих строк). Отметим только, что с современной точки зрения тождественное исчисление Шрёдера (и его интерпретации) есть множество элементов («областей») и операций над ними, называемое структурой (решеткой). В «Лекциях»

[53] Э. Шрёдера неоднократно обвиняли в многословии, и нужно признать, что этот упрек не лишен оснований. В частности, разъяснению содержания понятия субсумции и обоснованию предлагаемого ее символического обозначения Шрёдер посвящает тридцать (!) страниц первого тома своих «Лекций» (с. 127—157).

это множество (с операциями «тождественных» умножения и сложения) строилось на основе отношения частичного порядка и операций «тождественного умножения» и «тождественного сложения» областей. Отношением частичного порядка была субсумция, обладающая свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, «тождественное умножение» и «тождественное сложение» — операциями взятия, для любых двух областей многообразия, их точной нижней и точной верхней граней соответственно. В «Сфере операций. . .» же структура (решетка) строилась на базе отношения равенства. Поскольку в структурах, рассматривавшихся Шрёдером, действовал закон дистрибутивности (в форме аксиомы $a(b+c)=ab+ac$ — в работе [23]; в виде принципа: если $bc=0$, то $a(b+c)\in\!\!\!\!\in(ab+ac)$ и теорем, выражающих обычные законы дистрибутивности, записанные в форме равенств, — в работе [1], Bd I, пятая и шестая лекции), имелись константы 0 («пустая область») и 1 («универсум»), а для каждой области существовала дополнительная область — область, дополнявшая ее до 1, т. е. всего многообразия и получавшаяся из исходной с помощью операции «отрицания» (в [1], Bd I, в седьмой лекции, вводившейся определением $aa_1\in\!\!\!\!\in 0$ и $1\in\!\!\!\!\in a+a_1$, на основе которой доказывались теоремы: $aa_1=0$ и $a+a_1=1$), они представляли собой то, что ныне называется булевыми алгебрами.

Работы Э. Шрёдера явились, пожалуй, первым систематическим исследованием очень важного для логики класса алгебраических систем, ныне называемых структурами, или *решетками*, — исследованием, приведшим его, как теперь хорошо известно [54], к установлению того факта, что дистрибутивность — закон $a(b+c)=ab+ac$ и закон, ему двойственный, — не вытекает из постулатов, задающих решетку (в формулировке шрёдеровой работы [23] — из аксиом, выражающих коммутативность, ассоциативность и идемпотентность операций «·» и «+», к которым присоединены законы поглощения).

Завершающим этапом алгебро-логических исследований Э. Шрёдера явилось систематическое развертывание им теории отношений (том III «Лекций»), которому — во втором томе — предшествовало изучение силлогистики, в том числе и обобщенной, средствами «комбинированного» исчисления — классов и высказываний, включая предложенный Лэд Франклин метод, основанный на понятии, которое ныне называют **антилогизмом**. На этом этапе своего развертывания логическая теория Шрёдера становится существенно сильнее логики классов (соответственно классической логики высказываний), в неявной форме включая предикаты и кванторы; как отмечает А. Чёрч ([9], с. 281), в построении Шрёдера «в некотором смысле подразумевается» исчисление предикатов первого порядка (т. е. без кванторов по предикатам) с равенством; к этому можно дабавить, что Шрёдером была предложена (в рамках «тождественного исчисления областей некоторого многообразия», том I «Лекций») исторически первая форма **теории типов** объектов, вводящихся в рассмотрение в логике (на что было также указано А. Чёрчем в [28], [29] и проанализировано одним из авторов этих строк [31] в связи с фрегевской критикой некоторых аспектов построения Шрёдера).

Теорию отношений Шрёдера — теорию в основном **бинарных** отношений — мы не будем здесь освещать. Она заслуживает специального, отнюдь не беглого, рассмотрения. Заметим только, что свою «реляционную алгебру» Шрёдер применяет к задаче обоснования теоретико-множественной математики. В частности, он показывает, каким образом теорию, изложенную Р. Дедекиндом в его известной работе «Что такое числа и чем они должны быть?» [126], можно представить на языке теории отношений. Продолжением этой линии приложения исчисления отношений к сфере оснований математики являются статьи Э. Шрёдера [127]—[129]; в частности, как обратил внимание еще Я. Люрот [12], в первой из них Э. Шрёдер сравнивает определение конечного множества, данное Ч. Пирсом, с определением бесконечного множества, данным Р. Дедекиндом, и показывает, что одно из них является отрицанием другого.

Таким образом, как математический логик Э. Шрёдер занимает определенное место не только в истории **алгебры и логики**, но и в истории **оснований математики**, включая, конечно, и теорию множеств. Первый — алгебро-логический — аспект его творчества получил ближайшее продолжение в работах А. Н. Уайтхеда [130], Э. Хантингтона (см. [131] и последующие работы этого автора) и ряда других математиков;

[54] См., например, [8], с. 191.

начиная с 20-х годов нашего века результаты автора «Лекций по алгебре логики» были «впитаны» такими разделами математической логики, как теории структур (решеток), булевых функций и бинарных отношений. Второй — относящийся к основаниям математики — аспект исследований Шрёдера не получил такого широкого продолжения. Пожалуй, лишь один из выдающихся математических логиков нашего столетия — Л. Лёвенгейм развивал и применял концептуально-символический аппарат шрёдеровской теории отношений. При этом он горячо отстаивал преимущества подхода Шрёдера перед «традиционными» средствами логики предикатов и известных аксиоматических теорий множеств. Мы ограничимся тем, что приведем без всяких комментариев начало статьи этого «логика школы Шрёдера» (как он охарактеризован в статье [18]), носящей название «Выражение математики в исчислении отношений Шрёдера» [132]:

В стремлении к логизации математики наибольшим препятствием выступают парадоксы, открытые Расселом и др. Для преодоления парадоксов Рассел предложил теорию типов, но эта теория, даже в ее наиболее слабой форме, не удовлетворяет математиков. Я никогда не сталкивался с подобными трудностями — не сталкивался потому, что логизация для меня всегда означала: облечение в форму шрёдеровского исчисления отношений.

Я очень сожалею — и для этого у меня много оснований, — что произошел отказ от использования элегантного исчисления Пирса—Шрёдера и распространение получила символика Пеано—Рассела, приведшая к тому, что, исходя из определенных (и, по моему мнению, не убедительных) оснований, поступились естественной гармонией и красотой математики, в результате чего рамки исследования сузились и оно приобрело довольно односторонний характер, в то время как исчисление Пирса—Шрёдера плодотворно и в нем заключена *особая красота*. Я убежден, что в науке и технике целесообразное всегда вместе с тем является и прекрасным. Если бы я пользовался символикой Рассела, я бы не открыл многое из того, что мне удалось обнаружить [55], и, во всяком случае, не испытывал бы той огромной радости, которую доставляет мне работа с исчислением. Неудачная символика подавляет продуктивность. Нынешнее логическое исчисление лишено всякой элегантности и гибкости, что нисколько не соответствует сути дела. Мои усилия сделать определенные части исчисления более гибкими и эластичными [56] остались незамеченными.

Приверженность к расселовскому исчислению привела к тому, что проглядели лежащий на поверхности факт: парадоксы, которые вызвали такое волнение, не доставляют каких-либо трудностей для логического исчисления, если следовать исчислению Шрёдера. Распространенным является взгляд, будто шрёдеровское исчисление не содержит всех знаков, необходимых для логизации математики. А именно, полагают, что в исчислении отношений Шрёдера нельзя выразить понятие «множества множеств»; что в этом исчислении имеются только множества элементов, но не множества множеств; что именно поэтому в нем невозможно получить те парадоксы, которые известны, — оно не затрагивается ими потому, что они *предполагают понятие «множества множеств»*. Несмотря на этот взгляд, я придерживаюсь мнения, что вся математика может быть, как я буду говорить, «шрёдеризована», т. е. выражена в шрёдеровском исчислении отношений. Это означает, что: 1) каждому математическому утверждению (Satz.—*Б. Б., А. Т.*) эквивалентно некоторое высказывание исчисления отношений Шрёдера — причем это относится и к утверждениям о множествах множеств! (Из осторожности я говорю «эквивалентно», а не «тождественно», дабы избежать возражения, что соответствующее шрёдеровское высказывание представляет собой нечто отличное от исходного математического утверждения); 2) каждое наличное математическое доказательство такого утверждения может быть преобразовано в чисто логико-вычислительное доказательство упомянутого высказывания.

Теория множеств Кантора тоже может быть шрёдеризована. Нет необходимости допускать, чтобы интуиционизм, употребляя выражение Гильберта, изгнал нас из рая канторовской теории множеств. *Как общий подход* (durchgängige Forderung. — *Б. Б., А. Т.*) интуиционизм является ненужным ограничением. Вместе с тем понятие «интуиционистской доказуемости» находит свое законное место в исчислении Шрёдера. Незачем допускать, чтобы нас изгнали и из рая интуиционизма ([132], с. 1—2).

* * *

Итак, мы очертили логико-методологическую сторону исследований создателя «Лекций по алгебре логики», попытались показать их теоретическую значимость. «Паси-

[55] Только часть из этого опубликована (примечание Л. Лёвенгейма. — *Б. Б., А. Т.*).

[56] В примечании к этому месту своего текста Лёвенгейм ссылается на свои работы 1910, 1913 и 1919 гг.

графия» Шрёдера получила высокую оценку как современников, так и специалистов последующего периода развития логической формализации. Автор известного логического и историко-логического трактата — Й. Йоргенсен писал в 1931 г. об основном шрёдеровском сочинении:

> Ценою огромного труда Шрёдер придал в этой работе двум главным ветвям алгебры логики их систематическую и завершенную форму, сохранившую свое значение до настоящего времени; и его «Лекции» могут поэтому рассматриваться как тот базис, от которого отправляются все последующие специальные исследования рассматривающихся в них проблем ([5], Bd I, S. 136).

К этой оценке следует добавить, конечно, указание на вклад других логиков и математиков конца прошлого века, работавших в алгебро-логическом направлении, близком шрёдеровскому, прежде всего таких, как П. С. Порецкий, с одной стороны, и Ч. Пирс — с другой.

Нужно, однако, учитывать и то, что шрёдеровская алгебраическая формализация логики обладала некоторыми изъянами и прежде всего — недостатком в строгости и четкости при введении некоторых понятий и формулировке некоторых утверждений. В этом отношении горячий проповедник «пасиграфии», подчеркивавший ее выразительные и дедуктивные возможности, вряд ли был вполне на уровне собственной программы. Например, исходные положения шрёдеровского логического исчисления с отношением $\neq\!\!\in$ в качестве основного были разбросаны по всему первому тому «Лекций» и именовались по-разному: «постулатами», «принципами», «определениями», «дополнительными определениями», причем не просто усмотреть, какими соображениями руководствовался автор, проводя подобные различия. Конечно, построение Шрёдера *можно было* представить вполне строго; и можно было, имея в виду эту потенциальную возможность, развивать его дальше и применять для анализа фундаментальных понятий математики. Именно этим и занимался Л. Лёвенгейм, с таким энтузиазмом пропагандировавший шрёдеровские методы. Сказанное, однако, не отменяет того факта, что с точки зрения критериев *логической строгости в самой логике* работы Шрёдера были не безупречны. Э. Шрёдер принадлежал к иной эпохе логико-математической мысли, нежели его младший современник Г. Фреге: первый *завершал* период трактовки логики в духе «обычной» алгебры XIX в., не обладавшей строгим формализмом (с точки зрения современных критериев строгости), второй же *начинал* новый период — период логических исследований математики, связанный с разработкой искусственного языка, удовлетворяющего критериям точности, принятым и в наши дни. Различение языка-объекта и метаязыка, четкое противопоставление констант и переменных, имен и логических функций, разграничение логических законов (как формул определенного формализма) и правил (как сформулированных на метаязыке разрешений преобразования формул), четкое понимание существа дедуктивно-аксиоматического метода — все эти фрегевские достижения остались не понятыми и не учтенными Шрёдером [57].

Была, однако, сфера, где Шрёдер был сильнее кого-либо из своих современников-логиков и где его результаты явились вехой в развитии математико-логического знания. Это — сфера логики (и алгебры), поддающаяся комбинаторной обработке — «комбинаторной» не в смысле «комбинаторной логики» наших дней, а в обычном математическом смысле перебора множества конечных возможностей какой-либо задачи — сфера, которой долгое время «пренебрегали» логики, но которая ныне приобретает все больший вес, будучи стимулируема и алгебраическими исследованиями, и метаматематическими постановками проблем, и конечной математикой, столь тесно связанной с теоретической кибернетикой. В возрастании роли этих

[57] Ф. А. Медведев, сопоставляя «абстрактную» теорию множеств и математическую логику, говорит о них: «развитие каждой из этих дисциплин происходило столь своеобразно и, по-видимому, независимо друг от друга, по крайней мере до появления «Алгебры логики» Шрёдера в 90-х годах, что *никто до Шрёдера*, кажется, не заметил связей между их тематикой» ([45], с. 78); в «Лекциях» Шрёдера «*впервые* теория множеств и математическая логика во многом слились в нечто единое» (там же, с. 163; в обоих случаях подчеркнуто нами. — *Б. Б., А. Т.*). Такой взгляд вряд ли справедлив, ибо Фреге *ранее Шрёдера и более органично*, чем последний, осуществил синтез математики и логики: в работе 1879 г. [57] Фреге изложил свой логический аппарат «записи в понятиях», в монографии 1884 г. [52] показал, как на основе логики могут определяться теоретико-множественные и арифметические понятия и доказываться соответствующие утверждения; первый том «Основных законов арифметики» Фреге [54] вышел в 1893 г., а третий том «Лекций» Шрёдера, где появился аппарат, пригодный для представления фундаментальных понятий теории множеств, был издан в 1895 г.

направлений исследований — залог «вечной молодости» труда, осуществленного автором «Лекций по алгебре логики».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Bd I. Leipzig, 1890; Bd II, Abt. 1, Leipzig, 1891; Bd III, Abt. 1, Leipzig, 1895; Bd II, Abt. 2, 1905 (hrsg. von E. Müller). Переиздание: New York, 1966 (в том III этого издания включена также работа [83], подготовленная Е. Мюллером по материалам Э. Шрёдера).
2. *Church A.* Schröder Ernst. — The Dictionary of Philosophy, Ed. by D. D. Runes, 2nd ed. New York, 1942.
3. *Кузнецов А., Ибрагимов С.* Шрёдер. — Философская энциклопедия, т. 5. М., 1970.
4. *Lewis C. I.* Survey of Symbolic Logic. University of California Press. Berkely, 1918.
5. *Jørgensen J.* A Treatise of Formal Logic, its Evolution and main Branches with its Relations to Mathematics and Philosophy, vol. 1—3. Copenhagen and London, 1931.
6. *Kneele W., Kneele M.* The Development of Logic. Oxford, 1962.
7. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М., 1967.
8. *Биркгоф Г.* Теория структур. М., 1952.
9. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.
10. *Карри Х.* Основания математической логики. М., 1969.
11. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957.
12. *Luroth J.* Ernst Schröder. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd 12, 1903, S. 249—265. Перепечатано в кн.: *E. Schröder*. Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd II, Abt. 2. Leipzig, 1905.
13. *Adamson R.* Рецензия: E. Schröder. Der Operationskreis des Logikkalkuls. — Mind, 1878, vol. III, N 10, p. 252—253.
14. *Luroth J.* Рецензия: E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Bd I. — Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd 36, Hist.-lit. Abteilung, S. 161—169.
15. *Husserl E. G.* Рецензия: E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Bd I. — Göttingische gelehrte Anzeigen, N 7, 1. April 1891, S. 243—278.
16. *Korselt A.* Рецензия: E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Bd I. — Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Bd 28, 1897, S. 578—599; Bd 29, 1898, S. 30—43.
17. *Б[обыни]н В. В.* Шрёдер. — Энциклопедический словарь. Изд. Ф. А. Брокгауз и А. А. Ефрон, т. XXIX^{А} (78). СПб., 1903.
18. Logic, History of. — The Encyclopedia of Philosophy, vol. 5. New York — London, 1967.
19. *Порецкий П. С.* О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Опыт построения полной и общедоступной математической теории умозаключений над качественными формами. Казань, 1884.

20. *Волков М.* Логическое исчисление. СПб., 1888.
21. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. London—Cambridge, 1854.
22. *Grassmann R.* Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Die Formenlehre oder Mathematik. 1. Buch: Die Grössenlehre; 2. Buch: Die Begriffslehre oder Logik; 3. Buch: Die Bindelehre oder Kombinationslehre. 4. Buch: Die Zahlenlehre oder Arithmetik; 5. Buch: Die Aussenlehre oder Ausdehnungslehre, Stettin, 1872.
23. *Schröder E.* Der Operationskreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877.
24. *Лейкфельд П.* Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков, 1890.
25. *Бобынин В. В.* Опыты математического изложения логики, вып. II. Сочинения Эрнста Шрёдера. М., 1894.
26. *Кутюра Л.* Алгебра логики. Пер. с прибавлениями И. Слешинского. Одесса, 1909. Французский оригинал: *L. Couturat.* L'Algèbre de la logique. Paris, 1905 («Scientia», № 24, Mars 1905).
27. *Behrens G.* Die Principien der mathematischen Logik bei Schröder, Russell und Konig (diss.). Hamburg, 1918.
28. Fifth Meetings of the Association for Symbolic Logic. — Journal of the Symbolic Logic, vol. IV, N 4, 1939 (см. с. 76, резюме сообщения: Church A. Schröder's anticipation of the simple theory of types).
29. *Church A.* Schröder's anticipation of the simple theory of types. — Journal of Unified Science (Erkenntnis), vol. 9, 1939, p. 149—152.
30. *Поваров Г. Н.* Дополнение к статье Г. Н. Поварова «О групповой инвариантности булевых функций». а) О вкладе Э. Шрёдера. — В кн.: Применение логики в науке и технике. [М.], 1960, с. 556—557.
31. *Бирюков Б. В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., 1963.
32. *Ибрагимов С. Г.* О забытых работах Эрнста Шредера, пограничных между алгеброй и логикой. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. XVII. М., 1966.
33. *Шенберг В. А.* Гносеологическая характеристика теории отношений Эрнста Шредера. — В кн.: Некоторые вопросы повышения технического и экономического уровня промышленных предприятий. Труды Ленинградского инженерно-экономического ин-та им. Пальмиро Тольятти, вып. 67. Л., 1966.
34. *Туровцева А. Ю.* Шредер и логическая программа Лейбница. — В кн.: Актуальные проблемы марксистско-ленинской философии. [М.], 1973.
35. *Туровцева А. Ю.* Шредер о предмете логики. — Философские науки, 1974, № 3.
36. *Туровцева А. Ю.* Место Э. Шрёдера в эволюции взглядов на логическую формализацию. — В кн.: Теория логического вывода (Тезисы докладов всесоюзного симпозиума), ч. II. М., 1974.
37. *Кузичева З. А.* Некоторые проблемы алгебры логики. — В кн.: История и методология естественных наук, вып. 16. М., 1974.
38. *Houscholder A. S.* Schröder and Trudi: a historical excursion. — SIAM Rev., 1974, vol. 18, N 3, 344—348.
39. *Bocheński I. M.* Formale Logik. Freiburg—München, 1956.

40. *Стяжкин Н. И.* К вопросу о вкладе П. С. Порецкого в развитие математической логики. — Вестник Московского ун-та, серия экономики, философии и права, 1956, № 1.
41. *Стяжкин Н. И.* Упрощение П. С. Порецким некоторых алгоритмов классического исчисления высказываний. — В кн.: Логические исследования. М., 1959.
42. *Kotarbiński T.* Wykłady z dziejów logiki, 1957 (серия «Łódzkie towarzystwo naukowe», Wydział I, N 28); русск. перевод: Т. Котарбиньский. Лекции по истории логики. — В кн.: *Т. Котарбиньский.* Избранные произведения. М., 1963.
43. *Scholz H.* Abriss der Geschichte der Logik. Freiburg—München, 1959.
44. *Кузнецов А. В.* Алгебра логики. — Философская энциклопедия, т. 1. М., 1960.
45. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М., 1965.
46. *Кузичев А. С.* Диаграммы Венна. История и применения. М., 1968.
47. *Шенберг В. А.* Возникновение и развитие логики отношений. Автореф. канд. дисс. М., 1968.
48. *Бирюков Б. В., Новик И. Б.* Несостоятельность метафизических трактовок некоторых логико-гносеологических вопросов науки. — В кн.: Современная идеалистическая гносеология. М., 1968.
49. *Гетманова А. Д.* Об операциях вычитания и отрицания в формальной логике. — Вестник Московского ун-та, серия «Философия». 1971, № 1.
50. *Гетманова А. Д.* Отрицания в системах формальной логики. М., 1972.
51. *Berka K., Kreiser L.* Logik-Texte. Berlin, 1974.
52. *Frege G.* Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884.
53. *Frege G.* Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik. — Archiv für systematische Philosophie, Bd I, 1895, S. 433—456.
54. *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, Bd I. Jena, 1893.
55. *Шрёдер Э.* Об алгорифмах и исчислениях. — Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. Журнал чистой и прикладной математики, астрономии и физики, издаваемый В. В. Бобыниным. М., 1888, т. 7, № 1—4.
56. *Бобынин В. В.* (состав.). Биографии знаменитых математиков XIX столетия. Вып. I: Р. Штурм, Е. Шрёдер, Л. Зонке. Германн Грассман. М., 1886.
57. *Frege G.* Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879.
58. *Бирюков Б. В.* О работах Г. Фреге по философским вопросам математики. — В кн.: Философские вопросы естествознания. II. Некоторые философско-теоретические вопросы физики, математики и химии. [М.], 1959.
59. *Whitehead A., Russell B.* Principia mathematica. Cambridge [Engl.], vol. 1, 1910; vol. 2, 1912; vol. 3, 1913.
60. *Гильберт Д.* Об основаниях логики и арифметики. — В кн.: *Д. Гильберт.* Основания геометрии. М.—Л., 1948.

61. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М., 1970.
62. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М., 1967.
63. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М., 1972.
64. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. М., 1971.
65. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений. — В кн.: Теория полугрупп и ее приложения, вып. 1. Саратов, 1965.
66. *Ибрагимов С. Г.* О логико-алгебраических работах Эрнста Шрёдера, предвосхитивших теорию квазигрупп. — В настоящей книге.
67. *Lüroth J.* Aus der Algebra der Relative. — Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1904, Bd 13, S. 73—111.
68. J. C. Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, Bd III (1858—1883). Leipzig, 1898.
69. J. C. Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete, Bd V (1904—1922), II. Abteilung (L—Z). Leipzig—Berlin, 1926.
70. *Schröder E.* Über die Vielecke von gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Sternpolygone in der Geometrie. — Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd 7, 1862.
71. *Schröder E.* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende, Bd 1: Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig, 1873.
72. *Peirce Ch. S.* Note B. The logic of relatives. — In: Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University. Boston, 1883.
73. *Schröder E.* Über das Zeichen. Festrede bei dem Direktoratswechsel an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 22. November 1890. Karlsruhe, 1890.
74. *Schröder E.* Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. — Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zurich vom 9. bis 11. August 1897. Hrsg. von F. Rudio. Leipzig, 1898.
75. *Schröder E.* On pasigraphy, its present state and the pasigraphic movement in Italy. — The Monist, vol. 1, 1898—1899.
76. *Schröder E.* Рецензия: G. Frege. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. — Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd 25, 1880, Hist.-lit. Abteilung.
77. *Frege G.* Anwendungen der Begriffsschrift. — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd XIII, 1879, Supplement II.
78. *Frege G.* Ueber den Zweck der Begriffsschrift. — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd XVI, 1883. Supplement.
79. *Frege G.* Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene. — In: Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, Bd XLVIII, 1897.
80. *Frege G.* Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hrsg. von H. Hermes, F. Kambartel und F. Kaulbach, Bd 1, Nachgelassene Schriften. Hamburg, 1969; Bd 2, Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hamburg, 1976.

81. *Hermes H., Kambartel F., Kaulbach F.* Geschichte des Frege-Nachlasses und Grundsätze für seine Edition. — In: *G. Frege.* Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd 1. Hamburg, 1969.
82. *Бирюков Б., Нуцубидзе Н.* Рецензия на книгу: Фреге Г. Работы по логике. Из наследства. — Новые книги за рубежом по общественным наукам, 1974, № 6.
83. *Schröder E.* Abriss der Algebra der Logik. Bearbeitet von E. Müller. 1. Teil: Elementharlehre. Leipzig und Berlin, 1909; 2. Teil: Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen. Leipzig und Berlin, 1910 (переиздано в составе тома III «Лекций» Шрёдера [1] в 1966 г.).
84. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч., т. 18.
85. *Ланге Ф. А.* История материализма и критика его значения в настоящем. Перевод с 5-го нем. изд. под ред. Владимира Соловьева. Киев—Харьков, 1900.
86. *Helmholtz H. von.* Vorträge und Reden, Bd 2. Braunschweig, 1884.
87. *Попов П. С., Стяжкин Н. И.* Развитие логических идей от античности до эпохи Возрождения. [М.], 1974.
88. *Новоселов М. М.* Психологизм (в логике). — Философская энциклопедия, т. 4. М., 1967.
89. *Husserl E. G.* Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung, Bd 1. Halle, 1891.
90. *Frege G.* Рецензия: E. G. Husserl. Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung. — Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd 103, 1894.
91. *Husserl E.* Logische Untersuchungen. Teil 1: Prolegomena zur reinen Logik. Halle, 1900; Teil 2: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis. Halle, 1901 (русск. перев.: *Э. Гуссерль.* Логические исследования, т. I. СПб., 1909).
92. *Siegwart Ch.* Logik. Bd 1, 1873; Bd 2, 1878 (русск. перев.: *X. Зигварт.* Логика, т. I. Учение о суждении, понятии и выводе. СПб., 1908; т. II, вып. 1. Учение о методе. СПб., 1908; т. II, вып. 2. Учение о методе. СПб., 1909).
93. *Бирюков Б. В.* Проблема абстракции безошибочности в логике (Об одном аспекте влияния научно-технической революции на исследование логического мышления). — Вопросы философии, 1973, № 11.
94. *Hermes H., Kambartel F., Kaulbach F.* Einleitung. — In: *G. Frege.* Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd 1, Hamburg, 1969.
95. *Trendelenburg A.* Historische Beiträge zur Philosophie, Bd 3. Berlin, 1867.
96. *Тренделенбург А.* Логические исследования, ч. 1, 2. М., 1968.
97. *Trendelenburg A.* Logische Untersuchungen. Bd 1, 2; 3. Aufl., Leipzig, 1870.
98. *Frege G.* Über Sinn und Bedeutung. — Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd 100, 1892.
99. *Frege G.* Über Begriff und Gegenstand. — Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie, Bd XVI, 1892.

100. *Карнап Р.* Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. М., 1959.
101. *Ajdukiewicz K.* Die syntaktische Konnexität. — Studia Philosophica. Commentarii Societatis Philosophicae Polonorum, vol. I. Leopoli (Lwow), 1935.
102. *Милль Дж. Ст.* Система логики силлогистической и индуктивной. Изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования. М., 1914.
103. *Borkowski L.* Logika Formalna. Systemy logiczne. Wstęp do metalogiki. Warszawa, 1968 (нем. перев.: *L. Borkowski.* Formale Logik. Logische Systeme. Einführung in die Metalogik. Berlin, 1976).
104. *Jevons W. S.* Elementary Lessons of Logic: Deductive and Inductive. With copious questions and examples and a vocabulary of logical terms. 7th ed. London, 1878.
105. *Богомолов С.* Вопросы обоснования геометрии, ч. 1. Интуиция, математическая логика, идея порядка в геометрии. СПб. — М., 1913.
106. *Гетманова А. Д.* О взглядах Лейбница на соотношение математики и логики. — В кн.: Философские вопросы естествознания. II. Некоторые философско-теоретические вопросы физики, математики и химии. [М.], 1959.
107. *Танхилевич О. М.* Лейбницевская концепция символической науки. — Философские науки, 1961, № 2.
108. *Бирюков Б. В., Тростников В. Н.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. М., 1977.
109. *Leibniz G. W.* Fragmente zur Logik. Berlin, 1960.
110. *Peano G.* Introduction an formulaire de mathematique. Turin, 1894.
111. *Macfarlane A.* On a calculus of relationship, Pt I. — Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh, vol. 10. May, 1879.
112. *Macfarlane A.* Algebra of relationship, Pt II. — Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh, vol. 11. Dec. 1880; Pt III, vol. 11, March 1881.
113. *Macfarlane A.* An analysis of relationship. — Philosophical Magazine, June 1881.
114. *Jevons W. S.* On the mechanical performance of logical inference. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1870, vol. 160.
115. *Venn J.* On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasoning. — Philosophical Magazine (and Journal of Science), vol. 10, 5th series, 1880.
116. *Marquand A.* A machine for produsing syllogistic variations, with Note on an eight-term logical machine. — In: Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University. Boston, 1883.
117. *Marquand A.* A new logical machine. — Proceed. American Acad., vol. 21.
118. *Schröder E.* Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra. Zugleich als Beilage zum Programm des Pro- und Realgymnasiums zu Baden-Baden für 1873/74. Stuttgart, 1874.

119. *Schröder E.* Über von Staudts Rechnung mit Würfen und verwandte Prozesse. — Mathematische Annalen, Bd XX, Heft 3. Leipzig, 1876.
120. *Schröder E.* Über eine eigentümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen. — Journal fur reine und angewandte Mathematik, Bd 90. Berlin, 1881.
121. *Schröder E.* Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variablen auf den einfachsten Zahlgebieten. — Mathematische Annalen, Bd XXIX, 1887.
122. *Schröder E.* Über Algorithmen und Kalkuln. — Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reie, Teil 5, 1887.
123. *Адлер Ю. П.*, *Маркова Е. В.*, *Грановский Ю. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., 1976.
124. *Schröder E.* Note über den Operationskreis des Logikkalkuls. — Mathematische Annalen, Bd XII, 1877.
125. *Venn J.* Symbolic Logic. London, 1881; 2nd ed., rev. London, 1894.
126. *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1888 (русск. перев.: *Р. Дедекинд.* Что такое числа и для чего они служат? Казань, 1905).
127. *Schröder E.* Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze. — Nova acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum (Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher), t. LXXI, 1898. Halle, 1898.
128. *Schröder E.* Das selbstständige Definition der Machtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explicite Gleichzahligkeitsbildung. — Nova acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum, t. LXXI, 1898.
129. *Schröder E.* Über G. Cantorsche Sätze. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd 5, 1898.
130. *Whitehead A. N.* A Treatise on universal Algebra, vol. I. Cambridge (Engl.), 1898.
131. *Huntington E.* Sets of independent postulates for the algebra of logic. — Transactions of the Amer. Math. Society, 1904, vol. V, N 3.
132. *Löwenheim L.* Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul. — The Journal of Symbolic Logic, 1940, vol. 5, N 1.

О ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАБОТАХ ЭРНСТА ШРЁДЕРА, ПРЕДВОСХИТИВШИХ ТЕОРИЮ КВАЗИГРУПП

С. Г. Ибрагимов

1. Хорошо известно, что первые точные определения понятия алгоритма появились только во второй половине 30-х годов нашего века — в трудах А. Чёрча, А. Тьюринга и Э. Поста, а позднее — в работах С. Клини, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова, В. А. Успенского и др. Однако мало кому известно, что еще до конца XIX в., задолго до появления упомянутых точных определений, была не только сделана попытка определения понятия алгоритма и исчисления, но даже опубликовано несколько значительных работ Э. Шрёдера, посвященных именно алгоритмам и исчислениям, хотя и в смысле, далеком от современного и лишь кое в чем отдаленно похожем на понятие рекурсивной функции.

Следует отметить, что эти работы Э. Шрёдера даже не включены в известную обширную библиографию А. Чёрча по символической логике [1]. Так как во время составления этой библиографии еще не было теории алгоритмов и рекурсивных функций, Чёрч, по-видимому, не относил эти работы к логике. Как мы увидим ниже, действительно трудно решить вопрос о том, в какой мере эти работы заслуживают наименования «логических». По существу они лежат где-то на границе между логикой и алгеброй. К логике представляется естественным отнести их постольку, поскольку в них уже делаются некоторые попытки ввести общие понятия алгоритма и исчисления. Однако еще более естественно относить эти работы к алгебре, особенно из-за того, что понятия эти у Шрёдера столь сильно отличаются от современных понятий алгоритма и исчисления, что по своей сути гораздо ближе к таким современным алгебраическим понятиям, как понятия квазигруппы и лупы.

2. В современной алгебре, как известно, начиная с 1935 г., с работ Р. Муфанг ([2] и др.) стала быстро развиваться теория квазигрупп и луп. Этой теории посвящена уже в настоящее время обширная литература (см., например, книги Р. Брака [3], А. Г. Куроша ([4], гл. 2, § 6), А. И. Мальцева ([5], гл. 2, § 3) и особенно книгу В. Д. Белоусова [6]).

Квазигруппой называют любое множество E, рассматриваемое вместе с некоторой такой бинарной (т. е. двуместной) операцией $A(x, y)$, всюду определенной на E, что для всяких элементов a, $b \in E$ уравнения

$$A(a, x) = b, \qquad A(y, a) = b \tag{1}$$

разрешимы, причем однозначно. Иначе говоря, операция эта такая, что однозначно определены две так называемые обратные операции B и C, дающие по элементам a и b решения уравнений (1):

$$x = B(a, b), \qquad y = C(b, a). \tag{2}$$

Часто при этом операцию A записывают мультипликативно, как умножение, а обратные операции называют соответственно левым делением и правым делением; вместо (1) и (2) при этом пишут:

$$ax = b, \qquad ya = b,$$

$$x = a\diagdown b, \qquad y = b/a.$$

Лупой называют квазигруппу, обладающую единицей, т. е. таким элементом $e \in E$, что для всякого элемента $a \in E$ имеет место (в мультипликативной записи) $ea = ae = a$. Если область определения, т. е. E, конечна и задана списком ее элементов, то операция может быть эффективно определена таблицей с двумя входами, имеющей вид квадрата. Такую таблицу, задающую квазигруппу, часто называют таблицей Кэли, а ее внутреннюю часть — латинским квадратом. В этом квадрате в каждом его столбце (а также в каждой его строке) помещены без повторений все элементы из E. Пример таблицы Кэли и соответствующего ей латинского квадрата приведен на с. 255. Заметим, что в этом примере таблица определяет лупу, так как элемент 1 является единицей этой квазигруппы.

Историю теории квазигрупп и луп естественно было бы начинать с середины 30-х годов нашего столетия, как это

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	4	1	5	2
4	5	2	1	3
5	3	4	2	1

и делают. Однако это является не совсем правильным. Следует сказать, что первая, при этом тщательно разработанная, теория бинарных операций с обеими обратными, т. е. по существу теория квазигрупп, принадлежит Эрнсту Шрёдеру. Речь здесь идет о работах Э. Шрёдера [7]—[13], первая из которых относится к 1873 г., а последняя — к 1890 г. Как нам кажется, до сих пор нигде в современной алгебраической литературе [1] не упоминается о том, что в работах Шрёдера фактически впервые были даны основы теории квазигрупп и луп (наши статьи [15] и [16] мы не относим к алгебраической литературе).

3. К сожалению, мы не располагаем подробной биографией замечательного немецкого математика и логика Эрнста Шрёдера. Сведения о его жизни и деятельности содержатся, например, в [16]—[20]. Они кратко резюмированы в помещенной в данной книге статье [21].

Э. Шрёдер известен тем, что, продолжая работы Дж. Буля и Р. Грасмана, впервые дал систематическое изложение математической логики (точнее, алгебры логики, которую он называл логическим исчислением — Logikkalkul), свободное от допущенного Булем неосторожного использования операций вычитания и деления, приводившего к результатам, не имеющим логического истолкования. Он же впервые ввел термин «исчисление высказываний» (Aussagenkalkul) и позднее подробно разработал (исходя из идей Пирса) алгебру отношений. Известен он также как автор принципа двойственности и ряда других законов математической логики, а также решения проблемы разрешения для логики классов. Самым известным трудом ученого являются его трехтомные «Лекции по алгебре логики» [22] (однако и в этом его труде

[1] За исключением нашего краткого резюме [14].

некоторые значительные фрагменты, вроде [13], остались вне поля зрения исследователей).

Познакомиться с работами Шрёдера автору настоящих строк впервые довелось зимой 1964—1965 гг. — под руководством Софьи Александровны Яновской (1896—1966), внимание которой на статью Шрёдера «Об алгоритмах и исчислениях» [12] обратил В. Н. Молодший (примерно тогда же, слушая доклад автора об этой работе на семинаре С. А. Яновской в Московском университете, А. В. Кузнецов указал на связь ее содержания с теорией квазигрупп). Эта статья Шрёдера, опубликованная им в журнале «Mathematische Annalen» в 1887 г., была уже в следующем году в переводе на русский язык напечатана в издававшемся В. В. Бобыниным журнале «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем», но оставалась до недавнего времени забытой.

Напомним (см., например, [23, 24]), что Виктор Викторович Бобынин (1849—1919) — известный историк математики. С 1883 г. он был приват-доцентом Московского университета, а с 1917 г. — профессором. В 1885 г. он основал и издавал журнал «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем» — журнал чистой и прикладной математики, астрономии и физики, выходивший в Москве по 1898 г. (подробнее о журнале см., например, в [24] и [25]). В этом журнале он поместил ряд своих исследований по истории математики, написал также ряд отдельно изданных трудов (всего — более 550 работ). Интересовался Бобынин не только историей математики, но и вопросами логики и методологии. О его внимании к работам Шрёдера свидетельствует как очень своевременно изданный им русский перевод упомянутой статьи Шрёдера [12] (перевод этот, несомненно, выполнил сам Бобынин), так и специально написанные им статьи (в частности, [26]) о некоторых других работах Шрёдера.

4. Изучение работ Шрёдера [7]—[13] проливает свет на то прежде всего, как он пришел к проблематике, связанной с его попыткой построения общей теории исчислений, и в каком смысле его определения алгоритма и исчисления могут рассматриваться как предшественники современных, а в каком — не могут, не являются таковыми.

Шрёдер определяет исчисление как некоторую совокупность алгоритмов, определенным образом связанных между собой. Поэтому, чтобы понять его определение исчисления, приходится начинать с определения алгоритма. А для определения алгоритма нужно прежде сказать несколько слов о том, как понимает он операцию.

Операция, по Шрёдеру, есть функция, значения которой принадлежат предметной области, которой принадлежат значения ее аргументов. Таким образом, Шрёдер определяет операцию по существу так же, как это делается в современной алгебре, например, в [5].

Поскольку предметная область у Шрёдера любая, операция задается им с помощью системы функциональных уравнений, которым она должна удовлетворять. Эти уравнения понимаются как истинные (для данной, определяемой функции) при всяких значениях его аргументов. Решить такую систему функциональных уравнений, по Шрёдеру, — значит найти такую предметную область и такую определенную на ней операцию (функцию), которая всем этим уравнениям удовлетворяет (при всяких значениях аргументов).

Система функциональных уравнений, описывающая одну операцию и две ей обратные операции и замкнутая относительно перехода от одних уравнений к другим уравнениям, их следствиям, называется у Шрёдера *алгоритмом* [2]. Алгоритм задается по возможности системой исходных уравнений, из которых все остальные уравнения, входящие в этот алгоритм, могут быть получены как их следствия.

Заметим, что в некотором смысле аналогично определяются, согласно Эрбрану и Гёделю, рекурсивные функции (например, в книге С. К. Клини [27] при построении им в параграфе 54 формализма рекурсивных функций) — системой функциональных уравнений. Последняя, правда, задает функции только на области натуральных чисел, может задавать сразу много функций и необязательно имеющих обратные. Некоторая аналогия есть и в том, что Шрёдер тоже (как и в формализме рекурсивных функций) рассматривает вывод из системы уравнений ее следствий, хотя и без явной формулировки правил вывода,

[2] См. [12]. В более ранней своей работе [9] Шрёдер писал: «Алгоритмом мы будем называть здесь всякую систему равенств, выражающих формальные законы операций, и, следовательно, могущих быть использованными при изучении последних в качестве правил вычисления».

а пользуясь известной идеей тождественных преобразований, описываемой им с помощью «принципов замены» (т. е. по существу правил подстановки и замены равным). Аналогия усилится, когда мы учтем, что *исчислением* он называет систему функциональных уравнений, охватывающую несколько алгоритмов и содержащую также уравнения, связывающие между собой описываемые этими алгоритмами операции и также замкнутую относительно вывода следствий.

Так как алгоритмы проще, чем исчисления, то построение своей общей теории алгоритмов и исчислений Шрёдер начинает с теории алгоритмов. Эту теорию он успел построить лишь для алгоритмов некоторого определенного рода, да и то задаваемых только такими уравнениями, которые содержат не более шести вхождений переменных.

5. Что могло побудить Шрёдера заняться построением общей теории алгоритмов и исчислений? Нам представляется, что ответ на этот вопрос следует искать в том изменении взглядов на сущность математических теорий, которое было связано прежде всего с возникновением и развитием различных неевклидовых геометрий и теории групп. Неевклидовы геометрии привели, как известно, к возникновению аксиоматического метода в математике, а теория групп — к общему в конце концов понятию алгебраической операции, обладающей определенными свойствами, выражаемыми с помощью системы равенств (уравнений), верных (на данной предметной области) при всяких значениях входящих в них переменных.

Как известно, в связи с этим начал распространяться взгляд на математическую теорию как на строящуюся на системе произвольно выбранных аксиом или тождеств. Мы знаем теперь, что Н. И. Лобачевский пришел к своей неевклидовой геометрии отнюдь не этим путем; наоборот, его целью было устранение из геометрии произвольных допущений посредством построения такой — более общей — геометрии, в которой подлежали бы исследованию оба противоположных допущения, если каждое из них является возможным. Замечательно. что Шрёдер исходил из аналогичной установки, но только теперь уже в применении не к геометрии, а к арифметике. Вопрос, который он поставил, состоял в выяснении того, возможны ли какие-нибудь другие «арифметики», отличные от обычной, всем известной арифметики натуральных чисел и также

способные к обобщениям на более широкие области объектов, как и эта обычная арифметика. И если возможны, то как обозреть их все, хотя бы такую их часть, которую можно считать естественным обобщением обычной арифметики. Эту задачу своих исследований в области обобщенной арифметики («формальной алгебры») Шрёдер сформулировал с достаточной ясностью уже в работе [7], т. е. в 1873 г. В ней он пишет:

Как известно, в физических науках при изучении событий (der Wirkungen. — *С. И.*) исключительное значение имеет сепарирование причин, и этот столь продуктивный в области индуктивных наук метод может быть с пользой перенесен и на область дедукции; и в случае чисто дедуктивных выводов разумно производить по возможности строгое выделение их допущений или посылок с тем, чтобы исследовать последние, в том числе и каждое из них в отдельности, с точки зрения вытекающих из них следствий. И как главным образом этой тенденции обязана, например, своим возникновением вся новая, так называемая абсолютная геометрия или «пан-геометрия» [3], так она же лежит в основании собственно формальной или абсолютной алгебры. . .

Задачей этой области чистой математики является прежде всего исследование различных допущений, которые могут быть применены для определения вычислительной операции, а вместе с тем для построения числовых систем; затем также обзор системы следствий, которые может влечь за собой каждое из допустимых (непротиворечивых. — *С. И.*) допущений.

Формальная алгебра должна, таким образом, выполнить общую подготовительную работу, нужную для рассмотрения самых различных специальных числовых систем и вычислительных операций, которые могут быть придуманы для различных целей. Но эти допущения, т. е. условия, которым могут быть подчинены любые общие знаки a, b, c,. . ., конечно, не должны быть взяты с потолка. Наоборот, их нужно выбирать так, чтобы они находились в тесном контакте с уже имеющимся, данным, действительным, и вместо того, чтобы совершать наобум рискованный прыжок, нужно двигаться всегда просто с того места, где мы уже находимся ([7], с. 232—233).

---

[3] Здесь Шрёдер имеет в виду, очевидно, «абсолютную» геометрию не в современном смысле этого слова, а в смысле «пан-геометрии» (т. е. «всеобщей» геометрии) Н. И. Лобачевского.

Иными словами, Шрёдер считал необходимым выделить аксиоматику, которой должны удовлетворять вычислительные операции, с тем чтобы получить возможность исследовать затем роль каждой из этих аксиом в системе оперативных знаков арифметики, связи между ними (вопрос о независимости аксиом также исследуется им) и осуществить обзор различных возможных «арифметик», получающихся в результате какого-нибудь изменения аксиоматики, представляющегося достаточно естественным (и являющегося допустимым, т. е. непротиворечивым).

С такого выделения допущений, лежащих в основе арифметики рациональных чисел, — с аксиоматики поля, как мы сказали бы теперь, — Шрёдер и начинает изучение обобщенных арифметик в своей книге [7]. Здесь он намечает также план исследования всевозможных видоизменений каждого из этих допущений или какой-нибудь их системы. В дальнейшем он, однако, отказывается от столь обширной программы (предвосхитившей кое в чем современную теорию универсальных алгебр) и ограничивается для начала случаем, когда все рассматриваемые им операции являются **бинарными** (т. е. двуместными), однозначно и всюду определенными на какой-нибудь области и однозначно на ней обратимыми, т. е. допускающими пару тоже однозначно и всюду определенных обратных операций на той же области. Говоря на современном языке, он ограничивается исследованием квазигрупп и их систем [4], а также их многообразий — в виде изучения соответствующих систем тождественных соотношений, — но тоже с некоторыми ограничениями (главным образом на «длину» соотношения).

6. Основным предметом изучения у Шрёдера являются алгоритмы, т. е. по существу квазигруппы. В связи с этим одновременно вводятся три операции: прямая и две ее обратные. Если прямую операцию обозначить точкой (которую можно и не писать), а обратные — левую и правую — соответственно двоеточием (знак левого деления) и дробной чертой (знак правого деления), как чаще всего делает Шрёдер, то следующие законы левого и правого сокращения оказываются, конечно, верными:

[4] О системах квазигрупп см., например, в статье В. Д. Белоусова [28].

$$a(b:a)=b, \qquad (ab):a=b, \qquad a:\frac{a}{b}=b,$$
$$\frac{ba}{a}=b, \qquad \frac{a}{a:b}=b, \qquad \frac{b}{a}\cdot a=b.$$

Эти шесть законов (уравнений) Шрёдер называет «основными соотношениями» и оформляет их (см., например, [12], с. 84) в виде шестиугольника, представленного на рис. 1 [5]:

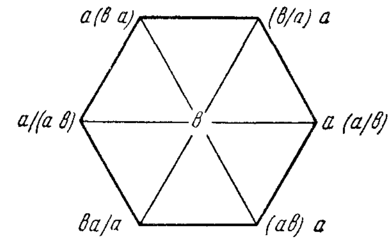

Рис. 1

Стороны и диагонали в этом шестиугольнике как бы заменяют знаки равенства.

Заметим, что хотя здесь использована мультипликативная запись операций, но когда — при рассмотрении исчислений — имеется также другая операция и обратные к ней, то Шрёдер вводит другие знаки операций — знаки $\dot{-}$ и —. Часто он использует также общую функциональную запись операций: $f(a, b)$, $\varphi(a, b)$ и т. п. Например, закон дистрибутивности в общем виде он записывает так ([12], с. 79) [6]: $\varphi\{a, f(b, c)\}=f\{\varphi(a, b), \varphi(a, c)\}$. Вообще Шрёдер обращает большое внимание на то, какие именно знаки целесообразно вводить. Например, закон ассоциативности, записанный с помощью знака f, будет громоздким: $f[a, f(b, c)]=f[f(a, b), c]$; поэтому Шрёдер использует для него обычную мультипликативную запись: $a(bc)=(ab)c$.

7. Работа Шрёдера [11] посвящена обзору таблиц, содержащих 2, 3 или 4 различных элемента и не имеющих повторений элементов ни в строках, ни в столбцах, т. е. по существу таблиц квазигрупп из не более 4 элементов. Но при общем рассмотрении этих таблиц ограниченное

[5] На этом рисунке (так же как на рис. 2, с. 284) горизонтальная черта как знак операции деления заменена косой чертой; сам Шрёдер иногда вместо $\frac{b}{a}$ писал $a \mid b$.

[6] Ср. с записью еще более общего тождества дистрибутивности в [28].

число элементов необязательно. Таблицы эти он называет функциональными таблицами. Каждую операцию задаваемую такой таблицей, он рассматривает вместе с ее двумя обратными, записывая их соответственно как $a \cdot b$ или ab, $a:b, \frac{b}{a}$, т. е. как множество элементов с тремя операциями. Заметим, что В. Д. Белоусов в своей *книге [6] на с. 8 эти три операции обозначает как* $(\cdot)$, $(\cdot)^{-1}$, ${}^{-1}(\cdot)$.

Э. Шрёдер отмечает, что «из каждой написанной функциональной таблицы можно получить пять других производных таблиц, которые вместе с ней составляют систему из шести подчиненных друг другу таблиц. Каждую производную таблицу можно превратить в таблицу, задающую основную операцию» ([11], с. 300) [7]. При этом операция ab заменяется на ba, $a:b$, $b:a$, $\frac{b}{a}$ или $\frac{a}{b}$. Заметим, что Белоусов тоже ([6], с. 17—21; см. также [28], с. 83—84) с каждой квазигрупповой операцией A связывает пять «обратных» операций: A^{-1}, ${}^{-1}A$, ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$ и $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1}$; следуя А. Саду [29], он называет их парастрофическими (или парастрофными).

Элементы в функциональных таблицах Шрёдер обозначает цифрами: 1, 2, 3, 4, . . ., k (k — число элементов). Таблицы эти он классифицирует по «родам», «сортам» и «видам» (или «формам»). У Шрёдера нет аккуратных определений этих понятий (особенно — понятия рода), но можно понять, что две таблицы он относит к одному виду, если они совпадают по написанию; две таблицы — *к одному сорту, если они, как теперь говорят, изоморфны* (в смысле изоморфизма квазигрупп). Классификацию по родам Шрёдер начинает фактически с распределения таблиц по еще более крупным четырем классам. А именно, он различает, к какому роду относится таблица: к «шестичленному», «трехчленному», «двучленному» или «одночленному». При этом таблица, задающая операцию ab, относится им к «шестичленному» роду, если все шесть подчиненных таблиц относятся к разным сортам, т. е. если все шесть операций: ab, ba, $a:b$, $b:a$, $\frac{b}{a}$ и $\frac{a}{b}$ — попарно неизоморфны. Таблицу он относит к «трехчленному» роду, если из этих шести таблиц лишь три различны по сорту, и к «двучленному» роду, если из них только две разных сортов. Наконец, таблица относится к «одночленному» роду, если все шесть подчиненных таблиц — одного сорта, т. е. если данная операция изоморфна всем парастрофным ей операциям.

[7] Эти его «производные» не надо путать с совершенно иным понятием производной операции в книге [6].

Хотя явного определения рода Шрёдер не дает, но можно из примеров догадаться, что он две таблицы относит к одному роду тогда, когда операции, задаваемые этими таблицами, можно, говоря современным языком, получить одну из другой посредством последовательного применения изоморфизма и парастрофии; т. е. взяв первую из этих двух операций, перейти к некоторой изоморфной ей операции, а затем, быть может, от последней — к парастрофной ей операции. Тогда, в частности, таблицы изоморфных операций оказываются таблицами одного рода (и даже одного сорта), таблицы парастрофных операций — тоже одного рода (но могут быть разных сортов, если род не «одночленный»).

Обзор таблиц Шрёдер начинает в [11] со случая области из двух элементов. Он замечает, что на этой области существует один единственный род таблиц (квазигрупп), т. е. эти таблицы одного сорта, хотя и двух возможных видов:

	1	2
1	1	2
2	2	1

	1	2
1	2	1
2	1	2

Точнее говоря, Шрёдер записывает эти таблицы иначе, не в форме квадратов [8], а следующим образом, соответственно:

$$1 = 11 = 22 \qquad 2 = 22 = 11$$
$$2 = 12 = 21 \qquad 1 = 21 = 12$$

(знак умножения между цифрами он не пишет). Эти две операции, конечно, изоморфны — от одной к другой

[8] Вообще неясно, был ли Шрёдер знаком с таблицами Кэли или с латинскими квадратами.

можно перейти посредством «переименования» цифр 1 и 2 друг в друга. Заметим, что после «переименования» их в 0 и 1 (или в «ложь» и «истину») эти операции превращаются в две хорошо известные булевы операции — сумму по модулю 2 и эквиваленцию (из булевых операций только эти две являются квазигрупповыми). Для каждой из этих двух таблиц все подчиненные ей таблицы — одного с ней вида (совпадают с ней), т. е., как теперь говорят, эта квазигруппа является тотально симметрической (или TS-квазигруппой; см [6], с. 108) [9]. Заметим, что она является также лупой и даже циклической группой.

Перейдя к случаю области из трех элементов, Шрёдер показывает, что на ней имеется уже три рода таблиц — два «одночленных» и один «трехчленный». Сортов таблиц на ней, следовательно, пять ($2\cdot1+1\cdot3=5$). А всего видов таблиц на ней двенадцать.

Первый из этих двух «одночленных» родов представлен следующей таблицей:

	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

$$\begin{pmatrix} 1=11=23=32 \\ 2=22=31=13 \\ 3=33=12=21 \end{pmatrix}$$

Этот род содержит лишь один сорт таблиц и лишь один их вид — так что данная квазигруппа является TS-квазигруппой (но лупой не является).

Второй из упомянутых «одночленных» родов задается таблицей

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3
3	1	3	2

$$\begin{pmatrix} 1=22=13=31 \\ 2=33=21=12 \\ 3=11=32=23 \end{pmatrix}$$

[9] TS-квазигруппу определяют [6] еще и иначе — как квазигруппу, удовлетворяющую тождествам $ab=ba$ и $a(ab)=b$.

Род этот тоже содержит лишь один сорт, и квазигруппа эта тоже является TS-квазигруппой. Но этот род (сорт) имеет уже два вида таблиц — таблица другого вида получается из этой с помощью транспозиции каких-нибудь двух элементов, например посредством «переименования» цифр 2 и 3 друг в друга.

На области из трех элементов имеется еще один «трехчленный» род. Он представлен следующими тремя таблицами:

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

	1	2	3
1	1	3	2
2	2	1	3
3	3	2	1

Заметим сразу, что первая из этих таблиц задает лупу и даже циклическую группу. Таблицы эти — одного рода. В самом деле, если принять, что первая из них задает операцию ab, то вторая будет задавать операцию $b:a$ (т. е. a/b), а третья — операцию $a:b$ (т. е. $b\backslash a$). Операция же, например, $\frac{a}{b}$ (т. е. a/b) тоже будет задаваться одной из этих таблиц, а именно третьей, т. е. будет иметь место соотношение $a:b=\frac{a}{b}$ $\left(\text{кроме того, } ab=ba \text{ и } \frac{b}{a}=b:a\right)$. Все эти три таблицы — разных сортов, так что род этот — «трехчленный». Из этих трех таблиц можно с помощью подстановок («переименований») получить еще шесть таблиц иных видов того же рода.

Переходя к случаю области из четырех элементов, Шрёдер начинает с изучения группы подстановок четвертой степени (эта группа, как известно, состоит из 24 подстановок — взаимно однозначных отображений области $\{1, 2, 3, 4\}$ на себя). После этого он постепенно показывает, что на этой области имеется 15 родов таблиц — шесть «одночленных», один «двучленный», семь «трехчленных» и один «шестичленный». Сортов таблиц на ней имеется, следовательно, 35 ($6\cdot1+1\cdot2+7\cdot3+1\cdot6=35$). А видов таблиц на ней будет уже 576.

Первый из этих шести «одночленных» родов задается следующей таблицей:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$$\begin{pmatrix} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 34 = 43 = 12 = 21 \\ 3 = 42 = 31 = 24 = 13 \\ 4 = 23 = 14 = 41 = 32 \end{pmatrix}$$

Заметим сразу, что эта квазигруппа является TS-квазигруппой и лупой, даже группой [10]. Хотя этот род содержит лишь один сорт таблиц, но четыре их вида; из данной таблицы с помощью транспозиции получаются следующие три таблицы:

	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	3	4	1	2

	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	3	2	1
3	1	2	3	4
4	2	1	4	3

	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	1	2	3	4

Другой «одночленный» род может быть представлен следующей таблицей:

	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	4	3	2	1
3	3	2	1	4
4	2	1	4	3

$$\begin{pmatrix} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 23 = 32 = 14 = 41 \\ 3 = 31 = 13 = 22 = 44 \\ 4 = 43 = 34 = 12 = 21 \end{pmatrix}$$

Квазигруппа эта также является TS-квазигруппой, но лупой уже не является. Род этот, имея тоже лишь один сорт таблиц, содержит уже 12 видов; таблицы иных видов получаются из данной с помощью подстановок.

Третий «одночленный» род представлен следующими двумя таблицами:

[10] Так что для нее имеют место тождества $ab = ba$, $a(ab) = b$, $1a = a1 = a$ и $a(bc) = (ab)c$.

	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	3	2	4	1
3	4	1	3	2
4	2	3	1	4

Обе эти таблицы одного сорта (одна из другой получается с помощью транспозиции), хотя и разного вида. Можно заметить, что таблицы эти парастрофны (подчинены друг другу), а именно, если первая из этих таблиц задает операцию ab, то вторая из них задает операцию ba. Таким образом, мы здесь имеем пример двух парастрофных таблиц разного вида, но одного сорта. Род этот не содержит других сортов, кроме этого одного; не содержит он и других видов, кроме этих двух.

Еще три «одночленных» рода задаются соответственно следующими таблицами:

	1	2	3	4
1	2	4	3	1
2	3	1	2	4
3	1	3	4	2
4	4	2	1	3

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	4	2	1	3
3	1	4	3	2
4	3	1	2	4

	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	3	1	2	4
3	2	3	4	1
4	4	2	1	3

Интересно, что предпоследний из этих родов имеет 24 вида, т. е. столько, сколько всего возможно подстановок.

Единственный на области из четырех элементов «двучленный» род может быть задан следующими двумя таблицами:

	1	2	3	4
1	2	4	3	1
2	3	1	4	2
3	1	3	2	4
4	4	2	1	3

	1	2	3	4
1	2	3	1	4
2	4	1	3	2
3	3	4	2	1
4	1	2	4	3

Можно заметить, что эти таблицы парастрофны (и, следовательно, одного рода), но разного сорта.

Пример «трехчленного» рода может быть задан следующей таблицей:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

$$\begin{pmatrix} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 21 = 12 = 34 = 43 \\ 3 = 31 = 13 = 22 = 44 \\ 4 = 41 = 14 = 23 = 32 \end{pmatrix}$$

Заметим, что эта группа является лупой и даже циклической группой. Если считать, что эта таблица задает операцию ab, то имеет место $ab = ba$, но таблицы, задающие операции ab, $a : b$ и $b : a$, относятся к разным сортам.

Шесть других «трехчленных» родов задаются соответственно следующими таблицами:

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	4	1	3	2
3	2	3	1	4
4	3	2	4	1

	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	4	1	2	3
3	3	2	1	4
4	2	3	4	1

	1	2	3	4
1	1	3	2	4
2	3	1	4	2
3	2	4	3	1
4	4	2	1	3

	1	2	3	4
1	3	1	2	4
2	1	3	4	2
3	2	4	1	3
4	4	2	3	1

	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	3	4	2	1
3	2	1	3	4
4	4	3	1	2

	1	2	3	4
1	4	2	3	1
2	3	1	4	2
3	1	3	2	4
4	2	4	1	3

На области из четырех элементов имеется еще — также единственный — «шестичленный» род. Он может быть задан любой из следующих шести таблиц:

	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	3	1	2	4
3	4	3	1	2
4	2	4	3	1

	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	2	1	3	4
3	4	2	1	3
4	3	4	2	1

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	4	1	2	3
4	3	4	1	2

	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	2	3	1	4
3	3	4	2	1
4	4	1	3	2

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	2	1	3	4
3	3	2	4	1
4	4	3	1	2

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	1	2	3
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

Эти шесть таблиц попарно парастрофны между собой (и, следовательно, одного рода), но разных сортов.

В конце работы [11] Шрёдер доказывает полноту своего обзора, т. е. что других родов таблиц на области, содержащей не более четырех элементов, не имеется.

8. В работе [12], начинающейся со ссылки на статью [11], Шрёдер переходит к изучению функциональных таблиц с точки зрения выполняемых ими «групп функциональных уравнений», считая, что только при этом таблицы «приобретают индивидуально им свойственный интерес» ([12], с. 76). Эти «группы» уравнений он называет алгоритмами или, в более общем случае, исчислениями, о чем уже говорилось выше.

Чтобы разобраться в этих алгоритмах, Шрёдер обозревает и классифицирует ([12], разделы 3 и 4) всевозможные функциональные уравнения, число вхождений переменных в которые не больше шести. Уравнения эти он записывает мультипликативно — пока речь идет только об алгоритмах, а не об исчислениях. Классифицирует он также уравнения (вернее, тождества) по «классам» и «сортам». При этом уравнение он относит к классу (m, n), если в одной из его частей (в левой) имеется m вхождений переменных, а в другой его части налицо n вхождений (вхождения переменных он называет «членами операций»). Например, равенство

$$a(ba) = b \tag{3}$$

принадлежит классу (3,1), а равенства $a(bc) = (ab)c$, $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ принадлежат соответственно классу (3,3) и классу (4,2).

Э. Шрёдер систематически пользуется переходом от одних уравнений к другим, их следствиям, а также к уравнениям, равносильным данным, — с помощью обычных тождественных преобразований («принцип замены») и общих соотношений между прямыми и обратными операциями («основные соотношения» шестиугольника, см. выше). Это ему позволяет, в частности, при обозрении различных классов уравнений ограничиться рассмотрением случая таких классов $(m,\ n)$, где

$$m \geqslant n \geqslant \frac{m}{2}. \tag{4}$$

Например, уравнение (3) легко приводится (делим слева обе части на a) к виду $ba=b:a$, т. е. к уравнению класса (2,2).

Обозревая уравнения, Шрёдер исключает из рассмотрения такие уравнения, в которых левая часть совпадает с правой («чистые тождества», как он их называет), а также вообще следствия «основных соотношений», например, $a=a\quad b(a:b)=\frac{ac}{c}$; все такие уравнения он называет «аналитическими». Из остальных уравнений (их он именует «синтетическими») он исключает также «недопустимые» уравнения — такие, следствием которых является уравнение $a=b$ (т. е. совпадение всех элементов квазигруппы). Тем самым, в частности, полностью исключается класс (1,1), а также все такие уравнения, куда некоторая переменная имеет ровно одно вхождение. Остающиеся уравнения Шрёдер называет «допустимыми» (или «действующими») формулами. Уравнения эти он классифицирует не только по классам, но и по «сортам» (или «видам»).

Из его объяснений и приводимых им примеров видно, что два уравнения он относит к одному сорту тогда, когда одно уравнение можно получить из другого посредством переименования переменных и замен вхождений операций теми или иными парастрофными им операциями. Например, уравнения:

$$(ab)\,c=a\,(bc), \tag{5}$$

$$c\,(ab)=(ac)\,b \tag{6}$$

принадлежат одному сорту — второе из первого можно получить следующим способом: сначала, переименовывая переменные a и b друг в друга, получаем уравнение

$$(ba)\,c=b\,(ac), \tag{7}$$

а затем в левой его части оба вхождения операции, а в правой его части одно вхождение — «перевертываем» (т. е. заменяем эти три вхождения операции ab на парастрофную ей операцию ba)[11]. Сорт, которому принадлежат эти три уравнения, Шрёдер записывает следующим образом: $(a,\ b),\ c=(a,\ c),\ b$ (запятая заменяет здесь «неизвестные» знаки операций, быть может и разных, но парастрофных между собой). Сорт же, например, уравнения $a:a=\frac{b}{b}$ записывается так: $a,\ a=b,\ b$. Два такие уравнения, что одно из другого можно получить посредством переименования переменных и переноса членов из одной части равенства в другую (на основании «основных соотношений» и симметричности равенства), Шрёдер рассматривает как «одинаковые». Например, уравнения $a:(bb)=ba,\quad b:(aa)=ab,\quad \frac{b}{ab}=aa$. При «тесном» подсчете числа уравнений (в отличие от иного подсчета — «широкого»)[12] такие уравнения считаются как одно уравнение. Это позволяет Шрёдеру, в частности, исключить из рассмотрения некоторые «несимметричные» сорта уравнений. Например, исключается (подобно классу (3,1) выше) тот сорт, которому принадлежит уравнение $(a(cb))c=ab$, поскольку оно с помощью переноса членов превращается в уравнение $a\,(cb)=\frac{ab}{c}$.

Самые короткие из допустимых уравнений имеют три вхождения переменной и принадлежат классу (2,1). Все уравнения этого класса относятся к сорту

$$a,\ a=a \tag{8}$$

и, как замечает Шрёдер, являются одинаковыми. В самом деле, уравнения $aa=a,\quad a:a=a,\quad \frac{a}{a}=a$ получаются друг из друга посредством переноса членов. В этом смысле в классе (2,1) имеется лишь одно уравнение.

Уравнения, имеющие четыре вхождения переменных, принадлежат классу (2,2) (в силу неравенств (4) или со-

[11] Заметим, что уравнение (6) не является следствием уравнения (5), хотя (7) является таковым.

[12] При «широком подсчете» не различаются лишь уравнения, получающиеся друг из друга посредством переименования переменных, например $ab=ba$ и $cd=dc$.

глашения о переносе членов). Класс этот содержит следующие три сорта уравнений:

$$a,\ b=a,\ b, \tag{9}$$
$$a,\ a=b,\ b, \tag{10}$$
$$a,\ a=a,\ a. \tag{11}$$

Сорт (9) содержит следующие 9 (допустимых) уравнений:

$$ab=ba,\qquad ab=a:b,\qquad ab=b:a,$$
$$a:b=b:a,\qquad a:b=\frac{a}{b},\qquad a:b=\frac{b}{a},$$
$$\frac{b}{a}=ab,\qquad \frac{b}{a}=ba,\qquad \frac{b}{a}=\frac{a}{b}.$$

Как отметил Шрёдер еще в работе [9], эти уравнения следующим образом разбиваются на четыре «группы» уравнений, «взаимно обусловливающих друг друга», т. е. являющихся (в пределах «группы») следствиями друг друга[13]:

$$a:b=ab=\frac{b}{a}; \tag{C_0}$$
$$ab=ba,\qquad a:b=\frac{a}{b}; \tag{C_1}$$
$$a:b=b:a,\qquad \frac{b}{a}=ba; \tag{C_2}$$
$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b},\qquad ab=b:a. \tag{C_3}$$

В самом деле, например, из уравнения $a:b=ab$ (как тождества) вытекает[14] $(a:b)\,a=(a:b)\,(b\,(a:b))=(a:b)\cdot$ $\cdot(b:(a:b))=b$, откуда следует $a:b=\frac{b}{a}$. А из уравнения, например, $a:b=\frac{a}{b}$ (из «группы» C_1) вытекает $ab=$ $=\frac{ab}{a}a=(ab:a)\,a=ba$.

[13] Обозначения C_0—C_3 взяты из работы [9].

[14] В начале и в конце преобразования используются «основные соотношения», а в середине — следующий результат подстановки в наше уравнение: $b:(a:b)=b\,(a:b)$.

Сорт (10) содержит 6 уравнений, а сорт (11)—3 уравнения. Таким образом, класс (2,2) всего содержит 18 уравнений.

Уравнения, имеющие 5 вхождений переменных, принадлежат классу (3,2), содержащему следующие четыре сорта:

$$a,\ (a,\ b)=a,\ b, \tag{12}$$
$$(a,\ a),\ b=a,\ b, \tag{13}$$
$$a,\ (b,\ b)=a,\ a, \tag{14}$$
$$a,\ (a,\ a)=a,\ a \tag{15}$$

(после исключения других сортов за счет соглашения о переносе членов). Сорт (12) содержит 63 уравнения, сорт (13) — 108 уравнений, сорт (14) — 18 уравнений, а сорт (15) — 27 уравнений. Всего, следовательно, класс (3,2) содержит 216 уравнений.

Уравнения, имеющие 6 вхождений переменных, принадлежат классу (3,3) или классу (4,2). Класс (3,3) содержит следующие 14 сортов:

$$a,\ (b,\ c)=a,\ (b,\ c), \tag{16}$$
$$(a,\ b),\ c=(a,\ c),\ b, \tag{17}$$
$$a,\ (a,\ b)=(b,\ c),\ c, \tag{18}$$
$$(a,\ a),\ b=(b,\ c),\ c, \tag{19}$$
$$(a,\ a),\ b=b,\ (c,\ c), \tag{20}$$
$$a,\ (a,\ b)=a,\ (a,\ b), \tag{21}$$
$$a,\ (a,\ b)=(a,\ a),\ b, \tag{22}$$
$$(a,\ a),\ b=(a,\ a),\ b, \tag{23}$$
$$a,\ (a,\ b)=(a,\ b),\ b, \tag{24}$$
$$a,\ (a,\ b)=a,\ (b,\ b). \tag{25}$$
$$(a,\ a),\ b=a,\ (b,\ b), \tag{26}$$
$$(a,\ b),\ b=a,\ (a,\ a), \tag{27}$$
$$a,\ (b,\ b)=a,\ (a,\ a), \tag{28}$$
$$a,\ (a,\ a)=a,\ (a,\ a). \tag{29}$$

Сорт (16) содержит 324 уравнения, сорт (17) — 666 уравнений, сорт (18) — 645 уравнений, сорт (19) — 648 уравнений, сорт (20) — 171 уравнение, сорт (21) — 615 уравнений, сорт (22) — 648 уравнений, сорт (23) — 153 уравнения, сорт (24) — 453 уравнения, сорт (25) — 432 уравнения, сорт (26) — 171 уравнение, сорт (27) — 612 уравнений, сорт (28) — 324 уравнения, а сорт (29) — 138 уравнений.

Всего класс (3,3) содержит 6000 уравнений.

Класс (4,2) содержит следующие 8 сортов:

$$(a,\ c),\ (b,\ c)=a,\ b, \tag{30}$$

$$(b,\ c),\ (b,\ c)=a,\ a, \tag{31}$$

$$(a,\ a),\ (b,\ b)=c,\ c, \tag{32}$$

$$(a,\ b),\ (a,\ b)=a,\ b, \tag{33}$$

$$(a,\ a),\ (b,\ b)=a,\ b, \tag{34}$$

$$(a,\ b),\ (a,\ b)=a,\ a, \tag{35}$$

$$(a,\ a),\ (a,\ a)=b,\ b, \tag{36}$$

$$(a,\ a),\ (a,\ a)=a,\ a. \tag{37}$$

Сорт (30) содержит 216 уравнений, сорт (31) — 162 уравнения, сорт (32) — 27 уравнений, сорт (33) — 108 уравнений, сорт (34) — 162 уравнения, сорт (35) — 324 уравнения, сорт (36) — 81 уравнение, а сорт (37) — 27 уравнений.

Всего класс (4,2) содержит 1107 уравнений.

Итого, согласно этим подсчетам Шрёдера, допустимых уравнений, попарно неодинаковых и имеющих не более шести вхождений переменных, существует 7342 (=1+18+216+6000+1107).

9. В дальнейшей части работы [12] Шрёдер, переходя к рассмотрению алгоритмов, отбрасывает некоторые из перечисленных выше сортов уравнений, чтобы уменьшить для начала объем исследований. Он оставляет уравнения лишь следующих сортов, представляющихся ему наиболее интересными: (8)—(10), (12)—(14), (16)—(20), (30)—(32) [15]. Всего этих уравнений (допустимых и попарно неодинаковых) 3064. Множество этих уравнений он берет в качестве области дальнейшего исследования, называя ее часто кратко «областью». Рассматривая в дальнейшем алгоритмы, он ограничивает их рамками этой «области», т. е. понимает их чаще всего как ее подмножества, замкнутые относительно перехода к следствиям.

[15] Этот отбор все же не кажется нам бесспорным. Так, в числе отброшенных им уравнений оказалось, в частности, уравнение $a(ab)=(aa)b$ сорта (22), т. е. известный (теперь) закон левой альтернативности (см. [6], глава VI, и [28], с. 82).

Э. Шрёдер называет алгоритм «первичным» (или «первоначальным»), если его можно задать некоторым одним уравнением — как множество всех его следствий (из «области»). Остальные алгоритмы он называет «вторичными», «третичными», «четвертичными» и т. д. — соответственно минимальному числу задающих их уравнений. Он ставит вопрос о том, сколько всего существует алгоритмов (в пределах его «области»), а также о том, сколько среди них первичных алгоритмов. После этого Шрёдер говорит: «Чтобы показать, что поставленная задача не есть какая-нибудь неизмеримая, заметим здесь же, что 3064 формулы нашей области из 167 первоначальных алгоритмов доставляют только 54 рода, а именно 12 одночленных, 1 двучленный, 31 трехчленный и 10 шестичленных, причем действительно: $12\cdot1+1\cdot2+31\cdot3+10\cdot6=167$» ([12], с. 234) [16]; он обещает «дать при другом случае» также аналогичный обзор исчислений. Больше об этой задаче, однако, им ничего нигде не написано.

10. Далее в работе [12], как и раньше в работах [9] и [10], Шрёдер рассматривает ряд примеров алгоритмов. Начинает он ([12], раздел 5) с алгоритма O_1, определяемого «как совокупность формул, имеющих силу для настоящего умножения вместе с делениями», т. е. по существу как множество уравнений (тождеств), верных на обычной мультипликативной группе рациональных чисел, отличных от нуля. Шрёдер отмечает, что алгоритм O_1 является первичным — задается уравнением

$$(ab)\,c=b\,(ca), \tag{38}$$

но «по богатству формулами» занимает «только пятое место между первичными алгоритмами нашей области формул» — из 3064 уравнений содержит лишь 494 уравне-

[16] Как видно из другой работы [10], Шрёдер по аналогии с его классификацией таблиц (квазигрупп) имел в виду классифицировать также и алгоритмы, а именно, относя к одному роду те алгоритмы (Шрёдер в [10] называл их «взаимно сопряженными»), которые получаются один из другого посредством замены в уравнениях прямой операции на одну из парастрофных ей операций и согласованной с этим замены обратных операций. Ср. понятие сопряженных тождеств, см. [28].

ния. Из них 80 уравнений — каждое в отдельности — задает этот же алгоритм. Задается этот алгоритм также, очевидно, и парой обычных законов коммутативности (C_1) и ассоциативности (A_1).

Покажем, хотя Шрёдер этого не делает, что C_1 и A_1 действительно являются следствиями уравнения (38) (обратное очевидно). В самом деле, пользуясь (38), получаем $(ab)(bb)=b((bb)a)=b(b(ab))=((ab)b)b=(b(ba))b=$ $=(ba)(bb)$, откуда, как результат деления справа на bb, следует $ab=ba$, т. е. C_1. Затем, используя C_1 и (38), легко получаем A_1: $(ab)c=c(ab)=(bc)a=a(bc)$.

Шрёдер показывает, что для всякого целого положительного числа можно на области чисел 0, 1, 2 . . ., $n-1$ так задать операцию умножения, чтобы она удовлетворяла всем уравнениям алгоритма O_1. В качестве примера он строит по существу группу порядка n. При этом он замечает, что в случае $n=3$ (т. е. для циклической группы порядка 3) из уравнений его «области» верны не только уравнения алгоритма O_1, но также, кроме них, и некоторые уравнения класса (3,2) [17]. Все вместе они составляют алгоритм O_{01}, содержащий 508 уравнений «области».

11. Вслед за алгоритмом O_1 Шрёдер рассматривает ([12], раздел 6) алгоритм Q_0, обозначавшийся им ранее в работе [9] как C_{0123} и определявшийся там как результат объединения «групп» C_0, C_1, C_2 и C_3 (см. выше; замыкание относительно перехода к следствиям подразумевается). Заметим сразу (на основе рассмотрения этих «групп»), что алгоритм Q_0 можно определить и как множество уравнений («области»), верных на тотально симметрических квазигруппах.

Э. Шрёдер отмечает, что алгоритм Q_0 «обнимает 978 формул нашей области и в силу этого числа занимает между ее первичными алгоритмами второе место» ([12], с. 237); задается этот алгоритм, например, уравнением

$$a(ab)=(bc)c. \qquad (39)$$

Действительно, пользуясь уравнениями «групп» C_2 и C_3 (и «основными соотношениями»), можем уравнение (39) получить следующим образом: $a(ab)=a(b:a)=b=\frac{b}{c}c=$ $=(bc)c$. А чтобы доказать обратное, т. е. что уравнения «групп» C_0—C_3 являются следствиями уравнения (39), отметим следующее. Во-первых, как нетрудно заметить, уравнения «групп» C_2 и C_3 являются следствиями уравнений «групп» C_0 и C_1 (вернее, объединения этих «групп») [18]. Во-вторых, в силу сказанного выше (когда «группы» C_0—C_3 определялись как результаты разбиения сорта (9) на «группы» равносильных между собой уравнений) из уравнений «групп» C_0 и C_1 достаточно получить следующие:

$$a:b=ab \qquad (40)$$

$$a:b=\frac{a}{b}. \qquad (41)$$

Покажем, что уравнения (40) и (41) являются следствиями уравнения (39). В самом деле, пользуясь (39), получаем $a(a:b)=(b(a:b))(a:b)=a(ab)$, а отсюда, деля слева на a, получаем уравнение (40). Используя же уравнения (39) и (40), получаем $(a:b)b=(ab)b=a(aa)=$ $=a(a:a)=a$, откуда следует уравнение (41).

Таким образом, TS-квазигруппы можно определять как квазигруппы, удовлетворяющие тождеству (39) [19].

Как показывает Э. Шрёдер, для всякого целого положительного числа n на области чисел 0, 1, 2, . . ., $n-1$ можно так задать операцию умножения ab, чтобы она удовлетворяла всем уравнениям алгоритма Q_0 (была бы, как он говорит, «решением алгоритма Q_0»). Примером является операция, записываемая Шредером как $a_{n-1}(+)b_{n-1}$, которую мы бы записали как $(n-1)a+(n-1)b$ в смысле сложения и умножения в кольце вычетов по модулю n. В качестве «предельного» примера при n, стремящемся к ∞, Шрёдер рассматривает операцию $-a-b$ на области всех целых чисел. Как пример таблицы, удовлетворяющей всем уравнениям алгоритма Q_0 и только им (в пределах «области»), Шрёдер упоминает ту таблицу, которая выше была использована для задания второй из двух «одночленных» родов таблиц на области {1, 2, 3} [20].

[17] Например, уравнение $\frac{b:b}{a}=aa$ сорта (14).

[18] Уравнение, например, $a:b=b:a$ выводится так: $a:b=ab=$ $=ba=b:a$.

[19] Известные же для них тождества $ab=ba$ и $a(ab)=b$ ([6], с. 108) равносильны соответственно уравнениям «групп» C_1 и C_3.

[20] Хотя на этой таблице верно также уравнение $aa=a:a$ отброшенного сорта (11).

Иным примером является таблица, которая выше представляла первый из этих двух родов таблиц, — на ней верны уже 1087 уравнений «области». Эти 1087 уравнений составляют алгоритм λ_0+Q_0 (в записи Шредера), где алгоритм λ_0 задается уравнением сорта (8), т. е. законом идемпотентности, а знак $+$ означает, как можно понять, операцию объединения алгоритмов (подразумевается, что объединение это не обычное, а замкнутое относительно перехода к следствиям) [21]. О последней из этих таблиц Шрёдер упоминает также то, что на ней верен закон дистрибутивности $(bc)a=(ba)(ca)$, но это уравнение лежит за пределами его «области».

12. Особенный интерес проявляет Э. Шрёдер ([12], § 7—11) к следующему примеру — алгоритму $U_0=O_1+Q_0$, т. е. (замкнутому) объединению алгоритмов O_1 и Q_0. Он называет этот алгоритм «самым многообъемлющим», поскольку он «обладает самым обширным (в формальном отношении) объемом, какой только существует», — «обнимает 2874 формулы нашей области» ([12], с. 240), а из вышеупомянутых 7342 уравнений «для алгоритма U_0 имеют силу 5799, следовательно, почти 79% всех мыслимых (допустимых) формул» ([12], с. 242). Шрёдер пишет (там же): «Как на предмет, заслуживающий удивления, можно указать на факт совместимости друг с другом столь многих свойств». Кроме того, как он отмечает, алгоритм U_0 является «в формальном отношении насыщенным», т. е. «не совместимым ни с каким другим» алгоритмом, в котором есть уравнение, не принадлежащее U_0 (в том смысле, что из этого уравнения и уравнений U_0 можно вывести $a=b$) [22].

В самом деле, среди уравнений, принадлежащих U_0, имеются законы коммутативности и ассоциативности (из O_1), уравнения «групп» $C_0—C_3$ (из Q_0), уравнение $a(ab)=b$ (равносильное уравнению из C_3), уравнение

$$(aa)\,b=b \tag{42}$$

(следствие предыдущего уравнения и ассоциативности), уравнение $(aa)\,b=(cc)\,b$ (следствие предыдущего уравнения), а также уравнение

$$aa=bb \tag{43}$$

(вытекает из предыдущего уравнения). Пользуясь же уравнениями «группы» C_0, законами ассоциативности и коммутативности и уравнением (42), можно любое произвольно данное уравнение (необязательно из U_0) упростить, привести к такому виду, когда, во-первых, знаки обратных операций в уравнении уже не встречаются и, во-вторых, каждая из частей уравнения (левая или правая) есть либо произведение нескольких попарно различных переменных, либо переменная a, либо aa, либо b, либо bb. А именно, сначала с помощью C_0 истребляем знаки обратных операций, затем на основании законов коммутативности и ассоциативности расставляем переменные в левой и правой части уравнения в алфавитном порядке и подходящим образом их группируем, после чего производим сокращения по (42) и, наконец, быть может, переименовываем переменные. Если при этом данное уравнение приведется к виду (43) или к «чистому тождеству», то данное уравнение, очевидно, принадлежит U_0.

Если же данное уравнение при этом приведется к иному виду, то из него и перечисленных выше уравнений, принадлежащих U_0, нетрудно будет вывести уравнение $a=b$. Например, уравнение $(bb):\frac{c}{c}=\left(\frac{ab}{c}:\frac{d}{ba}\right)((bd):(da))$ указанным способом приведется сначала к виду $(bb)\,(cc)=((c\,(ab))\,((ba)\,d))\,((bd)(da))$, после группировки переменных — к виду $(bb)(cc)=((((aa)\,a)((bb)\,b))\,c)((dd)\,d)$, после сокращения — к виду $cc=((ab)\,c)\,d$ и, наконец, к виду $aa=((cb)\,a)\,d$, отличному и от (43), и от «чистого тождества»; но отсюда, подставив aa вместо переменных b, c и d, а затем, воспользовавшись законом коммутативности и уравнением (42), получаем уравнение $aa=a$, из которого с помощью уравнения (43) вытекает $a=aa=bb=b$.

Таким образом, алгоритм U_0 действительно является насыщенным. Одновременно получается следующий критерий принадлежности U_0: уравнение принадлежит U_0 тогда и только тогда, когда каждая встречающаяся в нем переменная «входит во все уравнения четное число раз» ([12], с. 241).

[21] В смысле этого объединения имеет место, например, согласно сказанному выше, также $Q_0=C_0+C_1+C_2+C_3=C_0+C_1=C_1+C_3=C_2+C_3$.

[22] Ср. эту «насыщенность» с современными понятиями эквационально полного класса равенств (см. [28]) и минимального многообразия (см., например, [29], с. 470), называемого иногда также эквационально полным многообразием (см. [30]).

Как простейший пример таблицы, являющейся «решением» алгоритма U_0, Шрёдер упоминает таблицу на области из двух элементов (см. выше), т. е. по существу циклическую группу порядка 2. Иначе говоря, имеется в виду любая из двух квазигрупповых булевых операций — сумма по модулю 2 и эквиваленция. Заметим, пользуясь «насыщенностью» U_0, что никакие другие уравнения (не из U_0) не могут быть верны на этой таблице (в противном случае — из верных на ней уравнений вытекало бы $a=b$). Таким образом, алгоритм U_0 можно определить как множество всех уравнений, верных на циклической группе порядка 2.

Э. Шрёдер отмечает, что алгоритм U_0 может задаваться уравнением

$$(ba)\,(ac)=bc \tag{44}$$

(и существует всего 208 таких уравнений в «области», каждое из которых задает тот же алгоритм). В самом деле, уравнение (44) является следствием закона ассоциативности и уравнения (42), вытекая из них так: $(ba)\,(ac)=b(a(ac))=b((aa)c)=bc$; следовательно, оно принадлежит U_0. Чтобы доказать, что $U_0=O_1+Q_0$ задается уравнением (44), остается показать, что законы коммутативности и ассоциативности и уравнение (39), задающее Q_0, являются следствиями уравнения (44).

Действительно, пользуясь уравнением (44), получаем $((aa)\,(ab))\,((ab)\,(aa))=(aa)\,(aa)=aa=(ab)\,(ba)=((aa)\,(ab))\,((ba)\,(aa))$, а отсюда, деля слева на $(aa)\,(ab)$ и затем деля справа на aa, получаем $ab=ba$, т. е. закон коммутативности. Из этого закона и уравнения (44) вытекает $((ab)\,c)\,(c\,(bc))=(ab)\,(bc)=ac=(a\,(bc))\,((bc)c)=(a(bc))\,(c\,(bc))$, откуда, деля справа на $c\,(bc)$, получаем $(ab)\,c=a\,(bc)$, т. е. закон ассоциативности. А из этого закона и уравнения (44) выводим $a\,((aa)\,b)=a\,(a\,(ab))=(aa)\,(ab)=ab$, из чего, деля слева на a, получаем уравнение (42). Наконец, из законов ассоциативности и коммутативности и уравнения (42) следующим образом выводим уравнение (39): $a\,(ab)=(aa)b=b=(cc)\,b=b\,(cc)=(bc)\,c$.

Э. Шрёдер подробно показывает, что для всякого целого положительного числа n на области чисел $0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n-1$ можно так задать операцию, чтобы она удовлетворяла всем уравнениям алгоритма U_0, т. е. строит

по существу пример тотально симметрической группы порядка 2^n. Рассмотрение этого примера позволяет нам заключить, что группа эта измоморфна прямому произведению n циклических групп второго порядка [23].

После этого Шрёдер строит пример «решения» алгоритма U_0 на области всех положительных действительных чисел, затем на области всех действительных чисел и, наконец, на области всех комплексных чисел. При этом в случае области положительных действительных чисел операция ab (записывает он ее как $a\circ b$) определяется следующим образом: значения переменных a и b рассматриваем в двоичной записи, т. е. в виде двух бесконечных двоичных дробей; эти дроби поразрядно складываем по модулю 2 (т. е. в каждом разряде берем сумму цифр по модулю 2) и результат считаем значением ab. Подробно рассматривая так определенную функцию, Шрёдер показывает, что множество ее точек разрыва всюду плотно, но ее можно интегрировать.

13. На основе проведенного рассмотрения алгоритма U_0 Э. Шрёдер строит затем ([12], раздел 11) исчисление $K=U_0^{+}+U_0^{\cdot}+\Delta_0$, описывающее две операции $a+b$ и ab (и обратные для каждой из них операции). Символом U_0^{+} при этом обозначается алгоритм U_0 в аддитивной записи его уравнений, т. е. в применении к операции $a+b$, символом $U_0^{\cdot}$ — тот же алгоритм U_0 в его обычной мультипликативной записи, т. е. для операции ab, а Δ_0 задается следующими уравнениями:

$$a\,(b+c)=b\,(c+a)=c\,(a+b)=c+ab=b+ca= \\ =a+bc. \tag{45}$$

Исчисление K фактически содержит все уравнения, верные для операций $a+b$ и ab, определяемых следующими таблицами соответственно [24]:

---

[23] Заметим, что порядок (мощность) любой конечной группы, удовлетворяющей уравнению (43), обязательно является степенью числа 2. Это является следствием известной теоремы Коши: если порядок конечной группы делится на простое число p, то она обладает элементами порядка p (см. [31], с. 342). Ведь в группе, удовлетворяющей (43), порядок каждого элемента, отличного от единицы, равен 2. Попутно заметим, что такая группа удовлетворяет и уравнению (44), т. е. алгоритм U_0 можно задать законом ассоциативности и уравнением (43).

[24] Э. Шрёдер, конечно, эти таблицы дает не в виде квадратов, а в виде (восьми) равенств. При этом вместо знака $+$ он пользуется

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	0	1

Ясно, что первая из этих операций — сложение по модулю 2, а вторая — эквиваленция.

Это исчисление Шрёдер именует «самым многообъемлющим и самым удобным исчислением» (название § 11 работы [12]); он пишет, что оно «из всех мыслимых (по моим исследованиям) оказывается наиболее богатым формулами и допускающим наибольшее число и притом самых легких преобразований» ([12], с. 366). Среди других интересных свойств этого исчисления он отмечает следующие. Во-первых, «скобки в нем всегда могут быть опущены, а также совершенно по произволу поставлены» — на основании принадлежащих K законов ассоциативности и следующего «правила умножения многочленов»: $(a+b)\,(c+d)=a+bc+d$. Во-вторых, порядок членов (слагаемых или множителей) можно произвольно менять, члены можно переносить из одной части равенства в другую без перемены знаков и без замены операции на обратную, а любое вхождение умножения можно поменять местами со вхождением сложения. В-третьих, алгебраические уравнения легко приводятся по законам этого исчисления к виду линейных уравнений и затем легко решаются.

Заметим (в отличие от Шрёдера), что уравнения (45) в определении исчисления K можно заменить любым из следующих двух уравнений:

$$a\,(b+c)=c+ab, \tag{46}$$

$$ab=(a+b)+aa. \tag{47}$$

В самом деле, уравнение (46) содержится в (45). Далее, пользуясь аддитивными вариантами уравнения (42) и закона ассоциативности, а также уравнением (46), можно уравнение (47) получить следующим образом: $ab=a\,((a+a)+b)=a\,(a+(a+b))=(a+b)+aa$. А используя уравнение (47) вместе с уравнением (43) и аддитивными

знаком (+), чтобы, по-видимому, избежать путаницы с обычным сложением чисел.

законами ассоциативности и коммутативности, можно каждую часть уравнений (45): $a\,(b+c)$, $b\,(c+a)$, $c\,(a+b)$, $c+ab$, $b+ca$ и $a+bc$ привести к одному и тому же виду $((a+b)+c)+aa$; например, $b\,(c+a)=(b+(c+a))+bb=(b+(c+a))+aa=((b+c)+a)+aa=(a+(b+c))+aa=((a+b)+c)+aa$, $c+ab=c+((a+b)+aa)=(c+(a+b))+aa=((a+b)+c)+aa$.

14. В работе [10], опубликованной за шесть лет до статьи [12], Шрёдер рассмотрел несколько других примеров алгоритмов; особое внимание при этом его привлек алгоритм, задаваемый парой следующих уравнений:

$$aa=a \tag{48}$$

(т. е. закон идемпотентности) и

$$(cb)\,(b\,(ac))=a. \tag{49}$$

Этот алгоритм Шрёдер обозначает как λ_0+S_{45}, где λ_0 — алгоритм, задаваемый законом идемпотентности (48), а S_{45} — алгоритм, задаваемый уравнением (49). Мы будем ниже алгоритм λ_0+S_{45} обозначать короче буквой S (первая латинская буква фамилии Шрёдера), а квазигруппы, удовлетворяющие уравнениям (48) и (49), будем называть S-квазигруппами.

Определяет алгоритм S_{45} Шрёдер сначала несколько иначе, беря вместо уравнения (49) другие уравнения, равносильные ему, но более похожие на закон ассоциативности — одного сорта с последним, т. е. сорта (17). Примером такого уравнения является уравнение

$$a:(bc)=c\,(ab), \tag{50}$$

получающееся из (49) посредством переноса членов и переименования переменных. Вообще, Шрёдер исходит из аналогии с обычным законом ассоциативности $a\,(bc)=(ab)c$ и равносильными ему уравнениями $c(b:a)=\frac{c}{a}\,b$, $\frac{a:c}{b}=\frac{a}{b}:c$, $c:(b:a)=(ac):b$, подробно рассмотренными еще в его учебнике [7]. Неоднократно упоминает он и совокупность всех уравнений, похожих на эти — сортов (16) и (17) (всего 990 уравнений).

Кроме уравнения (50), Шрёдер здесь тоже рассматривает равносильные ему уравнения того же сорта — всего 12 уравнений. Для большей ясности имеющихся симметрий между уравнениями он изображает эти уравнения в виде приведенной здесь единой «таблицы формул», состоящей из четырех треугольников, «стороны которых нужно интерпретировать как знаки равенств между находящимися в вершинах выражениями» (рис. 2).

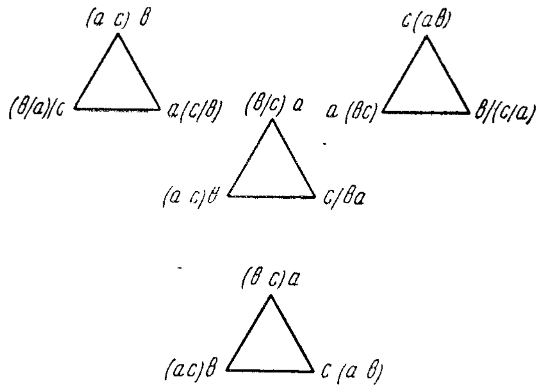

Рис. 2

Говоря точнее, Шрёдер рисует более обширную «таблицу формул», в которой, в частности, имеются еще четыре других треугольника, расположенных правее этих четырех — за отделяющей их от этих треугольников вертикальной чертой, симметрично этим относительно нее. Те четыре треугольника содержат еще 12 уравнений, каждое из которых задает алгоритм S_{54}, «взаимно сопряженный» с алгоритмом S_{45} и принадлежащий одному с ним «двучленному роду» (переставляя здесь цифры 4 и 5 в индексе при букве S, Шрёдер и в обозначениях старается отразить «симметричность» этих алгоритмов)[25]. Задать этот алгоритм S_{54} можно также уравнением $((ca)b)\,(bc)=a$, получающимся из (49) в результате замены операции ab на парастрофную ей операцию ba. То обстоятельство, что замена этой операции на другие парастрофные ей операции (при согласованной с этим замене обратных операций) не превращает алгоритм S_{45} ни в какой другой, кроме него самого и S_{54}, Шрёдером усматривается из упомянутых восьми треугольников и тех «вращений» всей

[25] По-видимому, это и есть тот единственный пример пары первичных алгоритмов «двучленного рода», о котором Шрёдер упоминает в цитированном выше месте из работы [12].

его «таблицы формул», которые при такой замене происходят. В связи с этими «вращениями» он называет алгоритм S_{45} «правовращательным», а алгоритм S_{54} — «левовращательным».

Равносильность уравнения (49) каждому из 12 уравнений четырех треугольников, приведенных здесь, усматривается следующим образом. Во-первых, каждое из этих 12 уравнений в результате «освобождения от заключенных в них делителей» — посредством умножения на них или подстановки, подходящей для последующего сокращения (по одному из «основных соотношений») и допускающей «обратную» подстановку[26], — можно легко привести, допуская также переименования переменных, к уравнению (49) или одному из следующих двух уравнений:

$$b\,(((cb)\,a)\,c)=a, \tag{51}$$

$$((cb)\,(ba))\,c=a. \tag{52}$$

Например, уравнение

$$\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{c}=(a:c):b \tag{53}$$

(из левого треугольника) с помощью подстановки $c(ba)$ вместо a («обратная» подстановка такова: $(a:c):b$ вместо a) превращается (после умножений, сокращений и переименования) в уравнение (49); уравнение

$$(a:c):b=a\,\frac{c}{b} \tag{54}$$

(из того же треугольника) с помощью подстановки cb вместо c тоже превращается в уравнение (49); уравнение $\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{c}=a\,\frac{c}{b}$ (из того же треугольника) с помощью той же подстановки превращается в уравнение (52); уравнение

$$\frac{b}{c}:a=\frac{c}{ba}\ . \tag{55}$$

[26] То есть подстановку, позволяющую вернуться к прежнему уравнению.

(из среднего треугольника) с помощью подстановки $c(ba)$ вместо c превращается в уравнение (49); а уравнение

$$(ac)\,b=\frac{b:c}{a} \tag{56}$$

(из нижнего треугольника) превращается в уравнение (51). Во-вторых, уравнения (49), (51) и (52) равносильны между собой. В самом деле, из уравнения (49) посредством подстановки $(cb)\,a$ вместо a и последующего деления слева на cb получаем уравнение (51), из уравнения (51) с помощью подстановки ba вместо a и деления слева на b получаем уравнение (52), а из уравнения (52) посредством подстановки ac вместо a и деления справа на c — уравнение (49).

Попутно Шрёдер рассматривает еще один пример алгоритма — алгоритм S_0, включенный в оба алгоритма S_{45} и S_{54}[27]; задается этот алгоритм каждой из следующих равносильных между собой формул:

$$(ca):b=(ba):c, \tag{57}$$

$$\frac{ab}{c}=\frac{ac}{b}, \tag{58}$$

$$\frac{b}{c:a}=\frac{c}{b:a}, \tag{59}$$

$$c\,(a:b)=b\,(a:c), \tag{60}$$

$$\frac{a}{c}\,b=\frac{a}{b}\,c, \tag{61}$$

$$c:\frac{b}{a}=b:\frac{c}{a}. \tag{62}$$

Доказательство того, что уравнения (57) — (62) принадлежат S_{45} и S_{54} одновременно, Шрёдер предоставляет читателю, хотя, как пишет он, «здесь выводы сложнее», чем выше. Но мы все же покажем, в частности, что уравнение (57) принадлежит S_{45}. Действительно, пользуясь уравнениями (53)—(56), получаем $((ca):b):d=(ca)\,\frac{b}{d}=$

[27] Э. Шрёдер говорит о нем как о «логическом произведении $S_{45}\cdot S_{54}$», по-видимому, имея в виду пересечение (в пределах рассматриваемой области уравнений).

$=\dfrac{\frac{b}{d}:a}{c}=\dfrac{\left(\frac{d}{ba}\right)}{c}=((ba):c):d$, откуда с помощью умножения справа на d вытекает уравнение (57).

Равносильность уравнений (57)—(62) между собой можно обнаружить следующим образом. Из уравнения (57) (и «основных соотношений») находим $(ab):\frac{ac}{b}=\left(\frac{ac}{b}\,b\right):a=c$, а отсюда, умножая слева на $\frac{ac}{b}$ и деля справа на c, получаем уравнение (58). Обратно, из уравнения (58) следует $\frac{ca}{(ba):c}=\frac{c\,((ba):c)}{a}=b$, откуда вытекает уравнение (57). Аналогично можно показать, что уравнение (59) равносильно уравнению (60), а уравнение (61) равносильно (62). Кроме того, из уравнения (57) вытекает $c:a=\left(\frac{c}{b:a}\,(b:a)\right):a=(a\,(b:a)):\frac{c}{b:a}=b:\frac{c}{b:a}$, а отсюда следует уравнение (59). Аналогично из уравнения (59) можно получить уравнение (61), а из последнего — уравнение (57).

Полезно заметить, что алгоритм S_{45} и S_{54} и тем более алгоритм S_0 — все три — включены в алгоритм U_0, о котором говорилось выше. В самом деле, все уравнения из треугольников и уравнения (57)—(62) легко выводятся из уравнений «групп» C_0—C_3 и законов коммутативности и ассоциативности[28], так что простейшим «решением» этих трех алгоритмов — S_0, S_{45} и S_{54} — является группа порядка 2.

Э. Шрёдер отмечает, что в алгоритме S_{45} имеются уравнения:

$$a:b=((cb)\,a)\,c, \tag{63}$$

$$\frac{a}{b}=(bc)\,(ca), \tag{64}$$

позволяющие исключать в выражениях (термах) знаки обратных операций (причем делать это можно по-разному благодаря присутствию в правых частях уравнений (63) и (64) переменной c). В самом деле, уравнение (63) вытекает из уравнения (51), а уравнение (64) — из уравнения (52).

[28] Более того, можно доказать, что $S_{45}+S_{54}=U_0$.

Мы заметим, что алгоритму S_{45} принадлежит также уравнение [29]

$$(ab)(cd)=(ac)(bd). \tag{65}$$

Действительно, с помощью уравнений (63) и (57) находим $((ab)\ (cd))\ a=(cd) : b=(bd) : c=((ac)\ (bd))\ a$, а отсюда, деля справа на a, получаем уравнение (65). Квазигруппу, удовлетворяющую тождеству (65), называют часто медиальной (см. [6], с. 33—35, [28], с. 79, 82, 84 и 98), так что все «решения» алгоритма S_{45} являются медиальными квазигруппами.

15. На основе рассмотрения алгоритма S_{45} Э. Шрёдер более внимательно анализирует в [10] алгоритм λ_0+S_{45}, задаваемый уравнениями (48) и (49), т. е. алгоритм S, стремясь продемонстрировать его специфические особенности. Прежде всего его интересует та особенность алгоритма S, что «решение» его может иметь самое меньшее 8 элементов, причем «решение» из 8 элементов любой парой своих элементов в некотором смысле однозначно определяется (Шрёдер даже в названии работы [10] говорит о «своеобразном определении одной функции посредством формальных условий», имея в виду определение операции на области из восьми элементов с помощью уравнений алгоритма). Мы бы теперь сказали так: всякая S-квазигруппа с двумя (различными) образующими [30] изоморфна одной фиксированной квазигруппе из восьми элементов, причем любые два элемента последней составляют систему ее свободных образующих (см. [4], с. 158), т. е. связаны между собой только теми соотношениями (однозначно определенными), которые вытекают из уравнений алгоритма S.

Отметим сразу, что никакая группа, кроме единичной (т. е. имеющей лишь один элемент), не может быть S-квазигруппой; иначе говоря, закон ассоциативности несовместим с алгоритмом S в том смысле, что из этого закона и уравнений алгоритма S можно вывести недопустимое уравнение $a=b$. Сначала покажем, что с S несовместим закон коммутативности. В самом деле, подставив в уравнение (49) переменную a вместо c и упростив его с помощью (48), получаем уравнение

$$(ab)(ba)=a. \tag{66}$$

А из закона коммутативности и уравнения (66) вытекает $a=(ab)\ (ba)=(ba)\ (ab)=b$. Итак, закон коммутативности несовместим с уравнением (66). Но из закона ассоциативности и уравнений алгоритма S закон коммутативности можно вывести. Действительно, пользуясь уравнениями (49) и (51) и законом ассоциативности, находим $(cb)\ \ (b(ac))=a=b(((cb)a)c)=b((cb)\ \ (ac))=b(c(b(ac)))=(bc)(b(ac))$, откуда, деля справа на $b(ac)$, получаем закон коммутативности.

Таким образом, никакая S-квазигруппа, кроме единичной, не может быть группой; не может она также быть коммутативной. Более того, в силу уравнения (66) всякая S-квазигруппа является антикоммутативной — в том смысле, что (см. [6], с. 143) для всяких двух различных ее элементов a и b имеет место $ab\neq ba$.

Заметим также, что подставляя в уравнение (65) переменные и упрощая его по (48), получаем оба закона дистрибутивности — левый и правый:

$$a(bc)=(ab)(ac), \tag{67}$$

$$(ab)c=(ac)(bc). \tag{68}$$

Следовательно, всякая S-квазигруппа является дистрибутивной [31]. А подставляя в уравнение (67) (или в уравнение (68)) a вместо c и еще раз упрощая по (48), получаем следующий закон эластичности (см. [6], с. 89): $a\ (ba)=(ab)\ a$.

Прежде чем построить обещанное «решение» алгоритма S, Шрёдер получает из уравнений, содержащихся в приведенных выше четырех треугольниках, посредством подстановок переменных и упрощения по (48)

---

[29] Э. Шрёдер таких уравнений, содержащих больше переменных, чем содержится в законе ассоциативности, обычно не рассматривал. Но мы позволим себе не ограничиваться рамками его «области».

[30] Образующими квазигруппы называются такие ее элементы, из которых (вместе взятых, т. е. в виде «системы образующих») можно посредством неоднократного применения операций этой квазигруппы получить все остальные ее элементы (см. [4], с. 50, 51 и 110; ср. [29]).

[31] О дистрибутивных квазигруппах см. [6], глава VIII.

следующие следствия:

$$ab = b:(ba) = \frac{a}{ba} = a:(a:b) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{b} = \frac{b}{\left(\frac{a}{b}\right)} =$$

$$= (a:b):b = \frac{b}{a}:a = \frac{b:a}{a}, \qquad (69)$$

$$a:b = \frac{b:a}{b} = (b:a)\,a = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{a} = b(ab) = (ba)\,b = \frac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)} =$$

$$= \frac{a}{ab} = a\frac{a}{b}, \qquad (70)$$

$$\frac{b}{a} = b\frac{a}{b} = \frac{a}{b}:a = a(ab) = b:(a:b) = (b:a):b =$$

$$= (ab)\,b = (a:b)\,a = a:(ba). \qquad (71)$$

Каждую из трех «групп» (69), (70) и (71) следует рассматривать как шестерку уравнений, имеющих одну и ту же левую часть (она написана слева) и различные правые части. Например, первое уравнение «группы» (69) есть $ab = b:(ba)$, получается оно из левой стороны правого треугольника, а второе уравнение этой «группы» есть $ab = \frac{a}{ba}$ и получается оно из нижней стороны среднего треугольника. Аналогичным образом из уравнений (57)—(62) алгоритма S_0 получаются следующие уравнения:

$$ab = b(b:a) = \frac{a}{b}a, \qquad (72)$$

$$a:b = b:\frac{a}{b} = (ba):a, \qquad (73)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{ba}{b} = \frac{a}{b:a}. \qquad (74)$$

Расположение частей уравнений в «группах» (69)—(71) объясняется целями дальнейшей группировки, разбиения этих «групп» на четыре «подгруппы». Уравнения одной и той же «подгруппы» равносильны и задают один и тот же алгоритм. Получаемая четверка алгоритмов для каждой «группы» одна и та же — алгоритмы ρ_0, σ_{23}, σ_{31} и σ_{12}. В частности, алгоритм ρ_0 задается, например, первым уравнением «группы» (69) или равносильным ему уравнением (66), а алгоритм σ_{23} задается, например, третьим уравнением «группы» (69) или равносильным ему уравнением $a((ba)\,b) = ba$. А все шесть уравнений «групп» (72)—(74) равносильны между собой и задают один и тот же алгоритм σ_0, который задается также уравнением $a(ab) = (ab)\,b$. Алгоритмы ρ_0, σ_{23}, σ_{31}, σ_{12} и σ_0 представляют, как утверждает Шрёдер, три «рода» алгоритмов: каждый из алгоритмов ρ_0 и σ_0 составляет отдельный «одночленный род», а алгоритмы σ_{23}, σ_{31} и σ_{12} вместе с тремя другими алгоритмами — σ_{32}, σ_{21} и σ_{13} — составляют «шестичленный род». Подробнее эти алгоритмы и некоторые их «решения» Шрёдер рассматривает позже в конце работы [10].

Приступая к построению «решения» алгоритма S на области из восьми элементов, Шрёдер пользуется в дальнейшем из уравнений S только уравнениями «групп» (69)—(74) и их следствиями [32]. Среди этих следствий отмечается прежде всего закон идемпотентности (48). Он получается как результат подстановки в первое уравнение «группы» (72) и упрощения (по одному из «основных соотношений»): $aa = a\ (a:a) = a$.

После ряда предварительных рассуждений Э. Шрёдер начинает построение обещанного «решения». Потребовав существование (в этом «решении») по крайней мере двух различных элементов, он обозначает их цифрами 1 и 2. Показав затем, что их произведения 12 и 21 (знак умножения не пишется) должны быть отличны от них и не равны друг другу, Шрёдер обозначает: $3=12$ и $4=21$. Попутно он вычисляет (на основании используемых уравнений) некоторые другие произведения. При этом он показывает, что 13 и 31 должны быть отличны от 1, 2, 3 и 4 и различны между собой. И определяет: $5=13$ и $6=31$. Производя дальнейшие выкладки, он постепенно находит, что 41 и 42 должны отличаться от 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и различаться между собой. Он определяет: $7=41$ и $8=42$. После дальнейших выкладок Шрёдер получает таблицу искомого «решения». И наконец, после ряда рассуждений он объясняет, как упростить проверку того, что эта таблица действительно удовлетворяет уравнениям алгоритма S.

[32] То есть по существу алгоритмом $\rho_0 + \sigma_{23} + \sigma_{31} + \sigma_{12}$, который задается четырьмя уравнениями «групп» (69) — первым, третьим, четвертым и шестым (σ_0 в него включен). На области уравнений, содержащих лишь две переменные, этот алгоритм совпадает с S.

Мы, чтобы сократить выкладки и быстрее усмотреть соответствующие закономерности, проведем построение несколько иначе. Будем рассматривать выражения

$$a,\ b,\ ab,\ ba,\ a:b,\ b:a,\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b} \qquad (75)$$

и произведения любых двух из этих восьми выражений. Покажем, что для каждого из этих произведений имеется среди следствий уравнений «групп» (69)—(74) такое уравнение, левая часть которого совпадает с этим произведением, а правая часть — с одним из выражений (75). Оформим все это в виде таблицы с двумя входами, показывающей, произведение каких двух из выражений (75) равно (согласно получаемым уравнениям) какому из этих восьми выражений равно.

В этой таблице (см. табл. А) сначала заполняем диагональ — на основании закона идемпотентности (48). Затем согласно первому уравнению «группы» (69), из которого

Таблица А

	a	b	ab	ba	$a:b$	$b:a$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$
a	a	ab	$\frac{b}{a}$	$b:a$	ba	b	$\frac{a}{b}$	$a:b$
b	ba	b	$a:b$	$\frac{a}{b}$	a	ab	$b:a$	$\frac{b}{a}$
ab	$b:a$	$\frac{b}{a}$	ab	a	$\frac{a}{b}$	$a:b$	ba	b
ba	$\frac{a}{b}$	$a:b$	b	ba	$b:a$	$\frac{b}{a}$	a	ab
$a:b$	$\frac{b}{a}$	$b:a$	a	ab	$a:b$	$\frac{a}{b}$	b	ba
$b:a$	$a:b$	$\frac{a}{b}$	ba	b	$\frac{b}{a}$	$b:a$	ab	a
$\frac{b}{a}$	b	ba	$\frac{a}{b}$	$a:b$	ab	a	$\frac{b}{a}$	$b:a$
$\frac{a}{b}$	ab	a	$b:a$	$\frac{b}{a}$	b	ba	$a:b$	$\frac{a}{b}$

переносом члена получаем уравнение $(ba)\,(ab)=b$, в клетке таблицы, соответствующей произведению ba на ab, т. е. в третьей клетке четвертой строки, пишем b. Аналогично используем каждое из уравнений «групп» (69)—(74) для заполнения клеток таблицы. После этого еще некоторые клетки заполняем на основании переименования переменных; например, пользуясь тем, что в клетке для произведения a на ab стоит $\frac{b}{a}$, в клетке для произведения b на ba ставим $\frac{a}{b}$. Две клетки заполняем на основании «чистых тождеств».

Таблица Б

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	7	6	4	2	8	5
2	4	2	5	8	1	3	6	7
3	6	7	3	1	8	5	4	2
4	8	5	2	4	6	7	1	3
5	7	6	1	3	5	8	2	4
6	5	8	4	2	7	6	3	1
7	2	4	8	5	3	1	7	6
8	3	1	6	7	2	4	5	8

Таблица В

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	5	6	7	2	8	4
2	4	2	8	7	6	3	5	1
3	6	5	3	1	4	8	2	7
4	7	8	2	4	1	5	3	6
5	2	4	7	8	5	1	6	3
6	8	7	4	2	3	6	1	5
7	3	1	6	5	8	4	7	2
8	5	6	1	3	2	7	4	8

Например, произведение a на b есть ab. Еще четыре клетки заполняем в силу «основных соотношений».

Остается заполнить 20 клеток таблицы. При этом, если заполнены 10 клеток, то остальные клетки можно заполнить с помощью переименования переменных, а именно, на основании следующих выкладок, опирающихся лишь на уравнения, «содержащиеся» в уже заполненных клетках:

$$(ab)(a:b)=(ab)(b(ab))=b:(ab)=\frac{a}{b},$$

$$(ab)(b:a)=(ab)((ab)a)=\frac{a}{ab}=a:b,$$

$$(ab)\frac{b}{a}=(ab)(a(ab))=a:(ab)=ba,$$

$$(a:b)(ba)=((ba)b)(ba)=b:(ba)=ab,$$

$$(a:b)(b:a)=(a:b)((a:b)b)=\frac{b}{a:b}=\frac{a}{b},$$

$$(a:b)\frac{a}{b}=\left(a\,\frac{a}{b}\right)\frac{a}{b}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{a}=ba,$$

$$\frac{b}{a}(ab)=(a\,(ab))\,(ab)=\frac{ab}{a}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{b}{a}(ba)=\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\,b\right)=\frac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)}=a:b,$$

$$\frac{b}{a}(a:b)=((a:b)\,a)\,(a:b)=a:(a:b)=ab,$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\left(b\,\frac{a}{b}\right)\frac{a}{b}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{b}=b:a.$$

После заполнения таблицы А мы можем сразу получить таблицу искомого «решения» алгоритма S, т. е. таблицу S-квазигруппы из элементов 1, 2, . . . , 8. Для этого достаточно в уравнения таблицы А вместо a подставить 1, а вместо b подставить 2, после чего, определив

$$3=12,\ \ 4=21,\ \ 5=1:2,\ \ 6=2:1,\ \ 7=\frac{2}{1},\ \ 8=\frac{2}{1}, \tag{76}$$

заменить всюду в таблице правые части этих равенств на левые. Так получается таблица Б.

Заметим, что у Шрёдера получилась другая таблица — таблица В. Но операция, задаваемая его таблицей, изоморфна нашей. Из нашей она получается в результате «переименования» цифр 5, 7 и 8 соответственно в 8, 5 и 7.

Правда, в отличие от Шрёдера мы обозначали элементы цифрами 1, 2, 3, . . . , 8, не выясняя, должны ли эти элементы быть различными. Сделаем это теперь. Исходим, как и он, из того, что $1\neq2$, т. е. что в данной S-квазигруппе взяты два различных элемента и обозначены цифрами 1 и 2. Если бы оказалось, что $1=3$, то отсюда следовало бы $11=1=3=12$, откуда, деля слева на 1, мы получили бы $1=2$, что противоречит нашему исходному условию. Таким образом, из $1\neq2$ вытекает $1\neq3$. Рассуждая аналогично, получаем, что из $1\neq2$ вытекает $2\neq4$ (если $2=4$, то см. табл. Б: $22=2=4=21$ и, следовательно, $1=2$), $6\neq7$, $5\neq8$, $1\neq4$ (если $1=4$, то $11=1=4=21$, а отсюда $1=2$), $2\neq3$, $5\neq7$ и $6\neq8$. Все это видно из табл. Б. Далее, из $1\neq3$ вытекает $1\neq7$, $4\neq5$, $3\neq6$, $2\neq8$, $1\neq6$, $3\neq7$, $4\neq8$ и $2\neq5$. Из $1\neq6$ следует $3\neq4$, $5\neq6$, $7\neq8$, $1\neq5$,

$3\neq8$, $4\neq7$ и $2\neq6$. Наконец, из $1\neq7$ вытекает $1\neq8$, $4\neq6$, $2\neq7$ и $3\neq5$.

Таким образом, все элементы 1, 2, 3, . . . , 8, определенные согласно (76), обязательно попарно различны. Попутно из этого можно заключить, что и таблицу А невозможно заполнить иначе, чем она нами заполнена, — если произведение тех или иных двух выражений (75) приравнять не тому из этих восьми выражений, которому оно равно согласно таблице А, то из такого уравнения будет следовать $a=b$ [33], если, конечно, доказать, что из уравнений алгоритма S уравнение $a=b$ вывести нельзя, т. е. совместимость его уравнений друг с другом.

Остается для этого проверить, что полученная нами таблица Б действительно удовлетворяет уравнениям алгоритма S, т. е. является таблицей S-квазигруппы. Достаточно проверить, что она удовлетворяет уравнениям (48) и (49). Проверка уравнения (48) тривиальна — достаточно посмотреть на диагональ таблицы. Почти столь же ясно видно, что таблица Б действительно является таблицей квазигруппы — ни в какой строке, ни в каком столбце нет повторения элементов. Значительно труднее проверить, что эта таблица удовлетворяет уравнению (49), так как наборов значений входящих в него переменных a, b и c мы имеем $8^3=512$.

Облегчить проверку уравнения (49) на построенной нами квазигруппе (табл. Б) можно, если заметить следующее: подстановка

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&3&6&5&8&7\end{pmatrix},$$

понимаемая как такая функция, что $\alpha(1)=2$, $\alpha(2)=1$, $\alpha(3)=4$, $\alpha(4)=3$, $\alpha(5)=6$, $\alpha(6)=5$, $\alpha(7)=8$ и $\alpha(8)=7$,

[33] Шрёдер говорит о «насыщенности» алгоритма S, имея, по-видимому, в виду «насыщенность» в пределах области уравнений, содержащих лишь две переменные. Такая «насыщенность» проще всего вытекает из однозначности заполнения таблицы А и возможности проверять по ней такие уравнения. Вопрос же о том, является ли алгоритм S насыщенным в том смысле, как выше (для алгоритма U_0), т. е. без ограничения на число переменных в уравнениях, как нам кажется, остается открытым; тем более открытым является аналогичный вопрос об алгоритме $\rho_0+\sigma_{23}+\sigma_{31}+\sigma_{12}$, т. е. об алгоритме, задаваемом нашей таблицей А. Неясно, в частности, являются ли следствиями уравнений этой таблицы, например, уравнения (65), (67) и (68).

является автоморфизмом этой квазигруппы (т. е. изоморфным отображением ее на себя), т. е. «переименование» элементов, произведенное согласно этой подстановке, не изменяет операции (дает таблицу того же вида). Нетрудно проверить, что автоморфизмом ее является также подстановка [34]

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&7&6&4&2&8&5\end{pmatrix}.$$

Так как подстановка β переводит элементы 2, 3, 7, 8, 5, 4 и 6 циклически друг в друга (является, как говорят, *циклом*), то [35] *для всякого целого числа i, такого, что* $1\leqslant i\leqslant 8$, найдется такая степень β^j этой подстановки, что $\beta^j(2)=i$; при этом $\beta^j(1)=1$. Следовательно, автоморфизмы нашей квазигруппы, имеющие вид β^j, могут переводить элемент 2 в любой наперед заданный ее элемент, отличный от 1, оставляя элемент 1 на месте. Автоморфизмами ее являются также подстановки вида $\beta^k\alpha\beta^j$. Нетрудно сообразить, что, пользуясь автоморфизмами этих двух видов, можно элементы 1 и 2 переводить в любую наперед заданную пару различных элементов нашей квазигруппы. Например, чтобы перевести элементы 1 и 2 соответственно в элементы 4 и 7, достаточно воспользоваться автоморфизмом $\beta^5\alpha\beta^6$ (если $\varphi=\beta^5\alpha\beta^6$, то имеем: $\beta^6(1)=1$, $\alpha(1)=2$, $\varphi(1)=\beta^5(2)=4$, $\beta^6(2)=6$, $\alpha(6)=5$, и, наконец, $\varphi(2)=\beta^5(5)=7$).

Пользуясь такими автоморфизмами, можно проверку уравнения (49), т. е. уравнения $(cb)\,(b(ac))=a$, свести к проверке того, что $(11)(1(11))=(21)(1(12))=(12)(2(11))=$ $=(22)(2(12))=(32)(2(13))=(42)(2(14))=(52)(2(15))=(62)(2(16))=$ $=(72)(2(17))=(82)(2(18))=1$. Истинность же уравнения (49) при иных наборах значений переменных вытекает из этих равенств и существования рассмотренных выше автоморфизмов. Например, равенство $(87)(7(48))=4$ получается с помощью вышеупомянутого автоморфизма $\beta^5\alpha\beta^6$ из равенства $(72)(2(17))=1$.

Так завершается построение и проверка «решения» алгоритма S, т. е. S-квазигруппы из восьми элементов.

[34] То есть умножение слева на 1 согласно таблице Б.

[35] Напомним, что подстановки составляют группу, в которой роль умножения подстановок играет их суперпозиция: $\varphi\psi=\chi$ означает, что $\chi(a)=\psi(\varphi(a))$ для всех значений переменной a.

Попутно обнаруживается, что эта квазигруппа такова, что, какие бы два ее различных элемента ни обозначить цифрами 1 и 2, таблица получится одна и та же — таблица Б. Это вытекает как из существования упомянутых автоморфизмов, так и из однозначности заполнения таблицы А, подставлять вместо a и b в которую для получения таблицы Б можно не только цифры 1 и 2, как это сделано выше, но и любые другие из восьми цифр (различные, конечно) [36].

Э. Шрёдер отмечает, что полученная им таблица — «решение» алгоритма S — тоже, как и этот алгоритм, задает «двучленный» род; то же можно сказать и о нашей таблице Б — эти таблицы одного сорта (квазигруппы изоморфны), хотя и различного вида. А именно, если операция ab задана таблицей Б, то таблица операции $a:b$ получается из нее с помощью подстановки

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&5&6&7&8&3&4\end{pmatrix},$$

т. е. «переименования» цифр 3, 4, 5, 6, 7 и 8 соответственно в 5, 6, 7, 8 3 и 4, а чтобы получить таблицу операции $\frac{b}{a}$, нужно ту же подстановку повторить. Следовательно, эти операции ab, $a:b$ и $\frac{b}{a}$ изоморфны между собой. Операции же ba, $b:a$ и $\frac{a}{b}$ им неизоморфны, хотя и тоже изоморфны между собой; они представляют собой «решения» другого алгоритма — алгоритма Λ_0+S_{54} того же рода, что и алгоритм S.

16. Несмотря на своеобразие S-квазигрупп, можно обнаружить их тесную связь с группами, причем с тотально симметрическими группами [37], т. е. «решениями» алгоритма U_0. Для этого в произвольной S-квазигруппе зафиксируем некоторый ее элемент, обозначим его цифрой 0 и определим новую операцию $a+b$ следующим образом:

$$a+b=\frac{a}{0}(b:0). \tag{77}$$

[36] При этом «определять» остальные цифры через эти подставляемые нужно, конечно, в согласии с таблицей Б. Иначе получится другая таблица того же сорта, например таблица В.

[37] На эту связь внимание автора обратил А. В. Кузнецов.

Покажем, что данная S-квазигруппа относительно так определенной операции является тотально симметрической группой.

В самом деле, пользуясь определением (77), левым законом дистрибутивности (67) и уравнениями таблицы А, находим $0(a+b)=0\left(\frac{a}{0}(b:0)\right)=\left(0\,\frac{a}{0}\right)(0\,(b:0))=\frac{0}{a}\,b$, т. е.

$$0(a+b)=\frac{0}{a}\,b. \tag{78}$$

Из уравнений таблицы А, уравнения (78) и правого закона дистрибутивности (68) получаем $(a+b):0=(0(a+b))0=\left(\frac{0}{a}\,b\right)0=\left(\frac{0}{a}\,0\right)(b0)=(0a)(b0)$, т. е.

$$(a+b):0=(0a)(b0). \tag{79}$$

Из уравнения (79) и уравнения (65) вытекает $(a+b):0=(0a)(b0)=(0b)(a0)=(b+a):0$, а отсюда, умножая слева на 0, получаем аддитивный закон коммутативности

$$a+b=b+a. \tag{80}$$

По определению (77), таблице А и уравнениям (65) и (79) получаем $a+(b+c)=\frac{a}{0}((b+c):0)=(0(0a))((0b)(c0))=(0(0b))((0a)(c0))=\frac{b}{0}((a+c):0)=b+(a+c)$, т. е. уравнение $a+(b+c)=b+(a+c)$. Пользуясь этим уравнением и законом коммутативности (80), получаем $a+(b+c)=a+(c+b)=c+(a+b)=(a+b)+c$, т. е. аддитивный закон ассоциативности

$$a+(b+c)=(a+b)+c. \tag{81}$$

Затем по определению (77), уравнению сорта (8), равносильному закону идемпотентности (48), и таблице А находим

$a+0=\frac{a}{0}(0:0)=\frac{a}{0}\,0=a$, т. е.

$$a+0=a. \tag{82}$$

Из уравнения (82) и закона коммутативности (80) вытекает

$$0+a=a. \tag{83}$$

По определению (77) и таблице A получаем $a+a=\frac{a}{0}\cdot(a:0)=0$, т. е. уравнение

$$a+a=0. \tag{84}$$

Наконец, с помощью закона ассоциативности (81) и уравнений (82)—(84) получаем следующим образом аддитивный вариант уравнения (39): $a+(a+b)=(a+a)+b=0+b=b=b+0=b+(c+c)=(b+c)+c$.

Вспомнив, что уравнением (39) задается алгоритм Q_0, а законами коммутативности и ассоциативности — алгоритм O_1, заключаем, что наша операция $a+b$ удовлетворяет всем уравнениям аддитивного варианта алгоритма $U_0=O_1+Q_0$. Таким образом, всякая S-квазигруппа относительно операции, введенной определением (77), действительно является тотально симметрической группой.

Заметим, что согласно «основным соотношениям» и определению (77) имеет место $ab=\frac{a0}{0}(0b:0)=a0+0b$, т. е. уравнение

$$ab=a0+0b. \tag{85}$$

Таким образом [38], операцию ab можно выразить уравнением (85) через групповую операцию $a+b$ и одноместные операции $a0$ и $0a$. При этом данные две одноместные операции являются автоморфизмами полученной нами группы, т. е. взаимно однозначными отображениями этой группы на себя (это вытекает из свойств квазигруппы), сохраняющими ее операцию $a+b$. Последнее означает, что имеют место следующие уравнения: $(a+b)0=a0+b0$; $0\cdot(a+b)=0a+0b$. Действительно, эти два уравнения вытекают следующим образом из определения (77), уравнений (68) и (78) и таблицы А:

$$(a+b)\,0=\left(\frac{a}{0}(b:0)\right)0=\left(\frac{a}{0}\,0\right)((b:0)\,0)=a\,(0:b)=$$
$$=\frac{a0}{0}((b0):0)=a0+b0,$$
$$0(a+b)=\frac{0}{a}\,b=\frac{0a}{0}((0b):0)=0a+0b.$$

[38] Ср. с известной теоремой Тойоды [33] о том, что всякая медиальная квазигруппа «линейна над некоторой абелевой группой» ([28], с. 98; см. также [6], с. 33—35).

17. В работе [13] Э. Шрёдер возвращается к рассмотрению некоторых вопросов, уже исследовавшихся им ранее, но частично подходит к ним с несколько иной точки зрения. В частности, как простейший пример пары таких допустимых уравнений, которые несовместимы друг с другом, он приводит уравнение (66) и уравнение

$$(ab)(ba) = b. \tag{86}$$

Несовместимость этих двух уравнений ясна, так как из них вытекает $a = (ab)\,(ba) = b$.

Чтобы показать, что уравнения (66) и (86) допустимы, Шрёдер приводит пару таблиц — «решение» уравнения (66) и «решение» уравнения (86). Здесь у нас эти его «решения» записаны в виде соответственно таблицы Г и таблицы Д. Но он использовал иную форму записи функциональных таблиц — сокращение прежней их записи. В его записи, данной в [13], эти два «решения» выглядят соответственно как таблица Е и таблица Ж. При этом, например, первую строку таблицы Ж следует понимать как сокращенную запись следующих равенств [39]: $1 = 11 = 23 = 34 = 45 = 52 = 67 = 78 = 89 = 96$.

Любопытно отметить следующее обстоятельство, хотя Шрёдер о нем ни слова не говорит: если в таблице Е или в таблице Ж стереть знаки равенства и цифры левее них, а также запятые, то так записанная таблица приобретет вид латинского квадрата [40].

Заметим, что таблица Г изоморфна (в смысле изоморфизма операций) таблицам Б и В. Из таблицы Б, в частности, она получается с помощью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Еще заметим, что и для уравнения (66), и для уравнения (86) можно было бы найти более простое «решение» — с меньшим числом элементов. Например, уравнению (66) удовлетворяют те таблицы на области из четырех

[39] Так что в его записи этой строки запятые делят последовательность цифр на циклы, которые составляют такую подстановку α, что $a\alpha(a) = 1$.

[40] Но этот латинский квадрат, если его обычным образом превращать в таблицу Кэли, выражает собой совсем иную квазигруппу, уже не удовлетворяющую ни уравнению (66), ни уравнению (86) (между прочим, группу).

Таблица Г

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	5	6	7	8	2	3
2	5	2	1	3	8	7	4	6
3	6	7	3	1	4	2	8	5
4	7	6	8	4	1	5	3	2
5	8	3	7	2	5	1	6	4
6	2	5	4	8	3	6	1	7
7	3	8	6	5	2	4	7	1
8	4	1	2	7	6	3	5	8

Таблица Д

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	6	9	8	7	4	3	2	5
2	9	2	1	3	8	7	5	6	4
3	8	7	3	1	4	2	9	5	6
4	7	5	6	4	1	8	2	9	3
5	6	1	2	9	5	3	8	4	7
6	3	4	8	5	9	6	1	7	2
7	2	9	4	6	3	5	7	1	8
8	5	3	7	2	6	9	4	8	1
9	4	8	5	7	2	1	6	3	9

Таблица Е

1 = 1,2 3 4 5 6 7 8
2 = 2,1 7 5 4 8 3 6
3 = 3,7 1 8 6 5 2 4
4 = 4,5 8 1 2 7 6 3
5 = 5,4 6 2 1 3 8 7
6 = 6,8 5 7 3 1 4 2
7 = 7,3 2 6 8 4 1 5
8 = 8,6 4 3 7 2 5 1

Таблица Ж

1 = 1,2 3 4 5,6 7 8 9
2 = 2,4 7 1 8,3 6 9 5
3 = 3,7 5 6 1,9 8 2 4
4 = 4,1 6 2 9,7 3 5 8
5 = 5,8 1 9 3,4 2 7 6
6 = 6,3 9 7 4,8 5 1 2
7 = 7,6 8 3 2,5 9 4 1
8 = 8,9 2 5 7,1 4 6 3
9 = 9,5 4 8 6,2 1 3 7

Таблица З

1 = 2,5 8,1 9 7 3 4 6
2 = 3,6 9,2 7 8 1 5 4
3 = 1,4 7,3 8 9 2 6 5
4 = 5,8 2,4 3 1 6 7 9
5 = 6,9 3,5 1 2 4 8 7
6 = 4,7 1,6 2 3 5 9 8
7 = 8,2 5,7 6 4 9 1 3
8 = 9,3 6,8 4 5 7 2 1
9 = 7,1 4,9 5 6 8 3 2

Таблица И

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	5	7	9	2	4	6	8	1
2	8	1	6	5	7	3	2	4	9
3	4	9	2	1	6	8	7	3	5
4	9	2	4	6	8	1	3	5	7
5	5	7	3	2	4	9	8	1	6
6	1	6	8	7	3	5	4	9	2
7	6	8	1	3	5	7	9	2	4
8	2	4	9	8	1	6	5	7	3
9	7	3	5	4	9	2	1	6	8

элементов, которые фигурировали выше как третий пример «одночленного» рода таблиц на этой области; уравнению же (86) удовлетворяет та таблица, которая выше задавала предпоследний пример «трехчленного» рода таблиц на этой же области [41].

Рассматривая в работе [13] алгоритмы, Шрёдер чаще всего ограничивает их рамками еще более узкой области, чем в работе [12], — областью U, состоящей из 990 уравнений сортов (16) и (17). Он пишет, что «полностью исследовал логическую зависимость между 990 формулами этой области» ([13], с. 633), но не в этом конечная цель его сообщения. И переходит к примерам алгоритмов.

Э. Шрёдер отмечает, что все уравнения области U принадлежат рассматривавшемуся ранее алгоритму U_0. Он также утверждает, что все уравнения области U можно вывести из следующего принадлежащего ей уравнения:

$$\frac{b}{a:c}=\frac{c}{ab}. \tag{87}$$

Докажем, что, более того, все уравнения алгоритма U_0 являются следствиями уравнения (87) В самом деле, из уравнения (87) (с помощью «основных соотношений») вытекает $\frac{a}{b}:b=b:\frac{b}{\frac{a}{b}:b}=b:\frac{b}{\frac{a}{b}\,b}=b:\frac{b}{a}=a$, откуда следует

$$\frac{a}{b}=ba. \tag{88}$$

Из уравнения (88) получаем $a=\frac{ab}{b}=b(ab)$, т. е.

$$a=b(ab). \tag{89}$$

Следовательно,

$$a:b=ab. \tag{90}$$

Пользуясь уравнениями (87) и (90), находим $aa=b:\frac{b}{aa}=$ $=b:\frac{a}{a:b}=b:b=bb$, т. е. получаем уравнение (43) $aa=bb$.

[41] Если потребовать, чтобы таблица, подобно таблице Д, удовлетворяла бы не только уравнению (86), но также и закону идемпотентности (48), то такую таблицу можно построить на области из пяти элементов.

С помощью этого уравнения и уравнения (88) получаем $(aa)b=(bb)b=\frac{b}{b}b=b$, т. е. уравнение (42): $(aa)b=b$. Из уравнений (87), (88) и (90) вытекает $(ab)c=\frac{c}{ab}=\frac{b}{a:c}=$ $=\frac{b}{ac}=(ac)b$, т. е. уравнение

$$(ab)c=(ac)b. \tag{91}$$

Пользуясь этим уравнением и полученным нами уравнением (42), выводим $bc=((aa)b)c=((aa)c)b=cb$, т. е. закон коммутативности: $bc=cb$. Наконец, с помощью этого закона и уравнений (91) и (89) следующим образом получаем уравнение (44): $(ba)(ac)=(ab)(ca)=(a(ca))b=cb=bc$. А из уравнения (44), как мы знаем, можно вывести всякое уравнение алгоритма U_0.

После алгоритма U_0 Шрёдер рассматривает алгоритм A_1, задаваемый законом ассоциативности, т. е. уравнением $b(ac)=(ba)c$ сорта (17), и, следовательно, принадлежащим области U.

Шрёдер перечисляет все 16 уравнений области U, принадлежащих алгоритму A_1, ссылаясь опять на свой учебник арифметики и алгебры [7]. Затем он приводит пример такой таблицы на области из шести элементов, которая является «решением» алгоритма A_1 и притом никакому другому уравнению области U, кроме этих 16 уравнений, не удовлетворяет. Заметим, что это — известный пример неабелевой группы порядка 6. Шрёдер говорит о том, что это — самая простая группа, которая некоммутативна; он замечает, что ее можно представить как группу подстановок.

Далее упоминаются три «подалгоритма» алгоритма A_1; прежде всего — алгоритм K_1, задаваемый каждым из следующих двух уравнений:

$$c:(b:a)=(a:b)c, \tag{92}$$

$$\frac{c}{\left(\frac{b}{a}\right)}=c\,\frac{a}{b}. \tag{93}$$

Из 16 уравнений области U, принадлежащих A_1, алгоритму K_1 принадлежат только 4 уравнения — уравнения

(92) и (93) и следующие два уравнения:

$$c(b:a)=\frac{c}{a:b}, \tag{94}$$

$$b:\frac{a}{c}=\frac{c}{a}b\,. \tag{95}$$

Заметим, что примером такого «решения» алгоритма K_1, которое не удовлетворяет закону ассоциативности, может служить любая тотально симметрическая квазигруппа, не являющаяся группой: например, любая квазигруппа из трех элементов, таблица которой принадлежит «одночленному» роду (см. выше). В алгоритме K_1 имеются два отличных от него подалгоритма — алгоритмы J_2 и J_3; один из них задается уравнением (94), другой — уравнением (95). Каждый из этих двух алгоритмов содержит лишь одно из уравнений области U — и то, которым задается.

Последним свойством, как отмечает Шрёдер, обладает еще один алгоритм — алгоритм J_1, задаваемый уравнением

$$(cb):a=\frac{bc}{a}, \tag{96}$$

не принадлежащим A_1. Заметим, что примером такого «решения» алгоритма A_1, которое не удовлетворяет уравнению (96), может служить любая некоммутативная группа [42].

Вслед за этим Шрёдер рассматривает алгоритм C_1, задаваемый законом коммутативности (ср. выше «группу» C_1). Хотя этот закон, т. е. уравнение $ab=ba$, не принадлежит области U, но в ней имеется 30 уравнений, являющихся следствиями этого закона, т. е. принадлежащих алгоритму C_1. Например, уравнение (96) принадлежит ему. Таким образом, алгоритм J_1 является подалгоритмом алгоритма C_1. Шрёдер отмечает, что каждое из этих 30 уравнений, отличное от уравнения (96), задает уже весь алгоритм C_1. Как примеры «решений» алгоритма C_1, удовлетворяющих из уравнений области U только этим 30 уравнениям, он приводит те две таблицы, которыми выше задавались четвертый и пятый примеры «трехчленных» родов таблиц на области из четырех элементов.

Затем Шрёдер переходит к рассматривавшемуся ранее алгоритму O_1, определяя его так: $O_1=A_1+C_1$. Из уравнений области U алгоритму O_1 принадлежит 150 уравнений, например уравнение (38). В качестве примеров «решения» алгоритма O_1, удовлетворяющих из U только этим 150 уравнениям, он приводит по существу циклические группы порядка 3 и 4.

После этого Шрёдер говорит о рассматривавшемся ранее алгоритме C_0, который задается уравнением $ab=$ $=a:b$ (ср. выше «группу» C_0). Подробнее он рассматривает подалгоритм этого алгоритма — алгоритм C_{00}. Этот алгоритм C_{00} из уравнений области U содержит следующие 18 уравнений (учитывается транзитивность отношения равенства):

$$a(bc)=a:(b:c)=\frac{\left(\frac{c}{b}\right)}{a}, \tag{97}$$

$$(c:b):a=\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=(cb)a, \tag{98}$$

$$\frac{b:c}{a}=a\,\frac{c}{b}=a:(bc), \tag{99}$$

$$\frac{a}{cb}=(c:b)a=\frac{b}{c}:a, \tag{100}$$

$$a(b:c)=a:\frac{c}{b}=\frac{bc}{a}, \tag{101}$$

$$\frac{a}{c:b}=\frac{b}{c}a=(cb):a. \tag{102}$$

При этом уравнения «группы» (97) равносильны соответствующим им уравнениям «группы» (98), уравнения «группы» (99) равносильны соответствующим уравнениям «группы» (100), а уравнения «группы» (101) равносильны соответствующим уравнениям «группы» (102). В самом деле, например, из уравнения $a(bc)=a:(b:c)$ «группы» (97) с помощью «основных соотношений» находим $c=b\cdot$ $\cdot(c:b)=b(a((c:b):a))=b:(a:((c:b):a))$, откуда посредством переноса членов получаем сначала $\frac{b}{c}=a:((c:b):a)$,

[42] Подставляя в (96) вместо a единицу группы (ее можно выразить как $a:a$) и произведя упрощение по законам теории групп (т. е. по алгоритму A_1), получаем закон коммутативности.

а потом $(c:b):a=\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$, т. е. соответствующее уравнение «группы» (98).

Чтобы доказать, что никакие другие уравнения области U, отличные от 18 уравнений «группы» (97)—(102), не могут быть следствиями этих уравнений, Шрёдер дает пример такой таблицы на области из девяти элементов, которая из всех уравнений области U удовлетворяет этим 18 уравнениям, и только им. Таблица эта приведена здесь в записи Шрёдера как таблица З, а в виде таблицы Кэли — как таблица И.

Заметим, что проверку уравнений на квазигруппе, задаваемой таблицей И (или таблицей З), может облегчить использование следующих ее свойств. Подстановки

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&1&5&6&4&8&9&7\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\end{pmatrix}$$

являются автоморфизмами этой квазигруппы. Следовательно, имеет место

$$\alpha(ab)=\alpha(a)\alpha(b),$$
$$\beta(ab)=\beta(a)\beta(b).$$

Кроме того, как нетрудно проверить, верно следующее:

$$a:b=\beta^2(ab),$$
$$\frac{b}{a}=\beta(ab),$$
$$a\beta(b)=\beta(a)b,$$
$$\beta^3(a)=a.$$

Пользуясь перечисленными свойствами рассматриваемой квазигруппы, можно доказать для нее, например, уравнения «группы» (97) следующим образом:

$$\frac{\left(\frac{c}{b}\right)}{a}=\beta(a\beta(bc))=\beta(a)\beta^2(bc)=\beta^3(a)(bc)=a(bc),$$
$$a:(b:c)=\beta^2(a\beta^2(bc))=\beta^2(a)\beta^4(bc)=\beta^6(a)(bc)=a(bc).$$

Э. Шрёдер обращает внимание еще на один алгоритм, являющийся подалгоритмом алгоритма C_{00}, — алгоритм E_1, задаваемый уравнением

$$a(b:c)=a:\frac{c}{b} \tag{103}$$

«группы» (101). Из уравнений области U алгоритм E_1 принадлежит, кроме уравнения (103), еще только одно уравнение $\frac{a}{c:b}=\frac{b}{c}a$ «группы» (102). Из всех 18 уравнений алгоритма C_{00} только эти два уравнения принадлежат алгоритму O_1 (т. е. верны на мультипликативной группе рациональных чисел, отличных от нуля).

После беглого рассмотрения еще нескольких примеров, Шрёдер приближается к главной цели данной работы (имеется в виду приложение 5 к первому тому его труда [22]). Он рассматривает следующие операции над алгоритмами: уже знакомую нам операцию сложения (объединения) алгоритмов, обозначаемую знаком $+$, и операцию «умножения» алгоритмов, обозначаемую точкой и понимаемую как их пересечение в пределах области U (при рассмотрении этих операций уравнения, не принадлежащие U, игнорируются, как бы выбрасываются из алгоритмов). Например, $O_1\cdot C_{00}=E_1$. Шрёдер показывает на следующем примере, что операция умножения алгоритмов не дистрибутивна относительно операции сложения алгоритмов: $(A_1+C_1)\cdot C_{00}\neq A_1\cdot C_{00}+C_1\cdot C_{00}$. В самом деле, $(A_1+C_1)\cdot C_{00}=O_1\cdot C_{00}=E_1$. Что же касается стоящих в правой части произведений $A_1\cdot C_{00}$ и $C_1\cdot C_{00}$, то Шрёдер замечает, что они пусты.

Этот результат Шрёдера является одним из вариантов доказательства впервые открытого им того факта, что, говоря на современном языке, не во всякой структуре (решетке) выполнен дистрибутивный закон.

18. В заключение остается сказать следующее. Шрёдер хорошо известен как один из создателей алгебры логики и таких логических исчислений, как исчисление высказываний, хотя в наше время эти исчисления гораздо более формализованы, чем в его работах. Известен он и как автор первых недистрибутивных структур. Например, Г. Биркгоф в своей книге [34], определяя понятие дистрибутивной структуры через пару двойственных между собой законов дистрибутивности и обозначая последние

через $L6'$ и $L6''$, замечает: «Любопытно, что Пирс [35] полагал, что каждая структура дистрибутивна. Он говорил даже, что $L6'$ и $L6''$ «легко доказать, но приводить доказательство слишком неинтересно»! Его ошибка была выявлена Шрёдером» ([34], с. 191). Однако остались на долгое время забытыми и тот метод, с помощью которого Шрёдер обнаружил эту ошибку Пирса, и понятие алгоритма по Шрёдеру, и те его исчисления, о которых он писал в работе [12].

Особенно сильно изменилось с тех пор понятие алгоритма. Теперь даже при интуитивном определении этого понятия «под алгоритмом понимают точное предписание, задающее вычислительный процесс, ведущий от начальных данных, которые могут варьировать, к искомому результату», причем этот «процесс является детерминированным: каждая стадия процесса однозначно определяет следующую стадию»; это «свойство детерминированности делает возможным передачу выполнения алгоритма машине» ([36], с. 38, 39; см. также [37]). Да и это интуитивное понятие алгоритма обычно уточняется с помощью или понятия машины Тьюринга, или понятия рекурсивной функции, или понятия нормального алгорифма, или иным похожим образом. Лишь через родство современных алгоритмов как формализованным исчислениям, так и любым вычислительным процессам можно проследить их некоторую связь с алгоритмами в смысле Шрёдера; да и то если последние ограничивать той или иной конечной областью уравнений (например, областью U) и понимать не как множества уравнений, а как перечни (списки) этих уравнений, истолковываемых как правила для вычислений. Но и так понимаемые алгоритмы Шрёдера все еще лишены свойства детерминированности и направленности на искомый результат. Правда, несколько больше сходства имеют они с рекурсивными функциями, теория которых начала создаваться Гильбертом и его учениками еще до возникновения современной теории алгоритмов, особенно если рекурсивные функции определяются по Эрбрану и Гёделю. Но от рекурсивных функций не требуется обратимости.

Требование обратимости операции (существования обратных операций) тесно связывает алгоритмы Шрёдера с современной теорией квазигрупп, хотя последняя зародилась гораздо позже и независимо от работ Шрёдера — примерно тогда же, когда и современная теория алгоритмов, т. е. в середине 30-х годов нашего века. До этого, правда, сравнительно успешно развивалась теория групп, появлялись статьи и книги, ее излагающие, доводя до глубоких и тонких теорем. Но специалисты по теории групп весьма мало интересовались теми бинарными операциями, которые групповыми не являются. Иногда даже аналогично Пирсу, думавшему, «что каждая структура дистрибутивна» (см. выше), они полагали, что «при проверке того, представляют ли данные равенства группу, нет надобности в проверке сочетательного закона, если только все элементы в каждом ряду квадрата Кэли различны, ибо тогда каждому элементу соответствует некоторая подстановка, а для последних сочетательный закон удовлетворяется» ([38]; см. [39], с. 71). Даже в конце 40-х годов квазигруппы и особенно лупы были столь мало известны, что А. П. Диман, задумавший прочитать на механико-математическом факультете Московского университета спецкурс по теории луп, не решился объявить его иначе, как спецкурс по теории «неассоциативных групп».

Росту интереса к квазигруппам и лупам в нашей стране в 50-е годы весьма способствовали такие работы А. И. Мальцева, как [40] и [41]. Вскоре стали появляться работы В. Д. Белоусова. Он и его ученики в настоящее время систематически разрабатывают теорию квазигрупп и луп. В мае 1968 г. в Сухуми состоялся Первый Всесоюзный симпозиум по теории квазигрупп и ее приложениям.

Как бы следуя инстинктивно программе Шрёдера, мечтавшего перейти при подходящем случае от обзора своих алгоритмов к обзору исчислений, а потом когда-нибудь отказаться от ограничительного требования бинарности операций, современная теория квазигрупп тоже развивается не только вглубь, но и вширь — по пути обобщений. Так, кроме квазигрупп исследуются системы квазигрупп (см., например, [28]). Кроме обычных (бинарных) квазигрупп изучаются также «n-арные квазигруппы» (или «n-квазигруппы» [43]), излагаемые, например, в книге В. Д. Белоусова [42].

[43] В случаях, когда нет опасности путаницы, их называют просто квазигруппами, различая при этом квазигруппы разной «арности»: бинарные, тернарные и т. п.

При этом n-арной квазигруппой называют любое множество E, рассматриваемое вместе с такой n-арной (т. е. n-местной) операцией $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, всюду определенной на E, что для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ и всяких элементов $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ в множестве E уравнение $A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)=b$ разрешимо (относительно неизвестного x), причем однозначно. Иначе говоря, операция A такова, что однозначно определены n обратных для нее операций $B_1, B_2, \ldots, B_n$, дающих решения этого уравнения: $x=B_i(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)$.

Одной из особенностей современной теории квазигрупп является то, что квазигруппы часто изучают, как говорят, с точностью до изотопии, т. е., грубо говоря, не различая между собой такие квазигруппы, операции которых изотопны между собой. При этом две операции — обозначим их хотя бы как ab и $a+b$ — называются изотопными, если существуют такие подстановки α, β и γ, что $\alpha(ab)=\beta(a)+\gamma(b)$ (см. [6], с. 13). Аналогично определяется изотопия n-арных квазигрупп (см. [42], с. 10). Оказывается, в частности, что всякая квазигруппа изотопна некоторой лупе (см. [6], с. 15); всякая квазигруппа, имеющая не более четырех элементов, изотопна некоторой группе [44]; всякая медиальная квазигруппа тоже изотопна некоторой группе [45]. Поэтому специалисты по теории квазигрупп часто стремятся изучать классы более специфичных квазигрупп, менее похожих на группы. Те, кто занимается n-арными квазигруппами, тоже обращают особенное внимание на их специфику, отличающую их от обычных квазигрупп. Так, например, Белоусов в предисловии к книге [42] пишет, что «в данной работе рассматриваются в основном специфические вопросы n-арных квазигрупп» ([42], с. 3).

Естественно, что Э. Шрёдер в те времена, когда теория групп была еще весьма слабо развита, вовсе не думал постоянно стремиться к такого рода специфике (не до этого было тогда, да и все равно его работы остались не понятыми). К тому же у него не было никакого понятия, похожего на изотопию. Но это, как нам кажется, вовсе

[44] Поскольку лупа, не являющаяся группой, имеет самое меньшее 5 элементов.

[45] И даже «линейна над некоторой абелевой группой» (см. [28], с. 98).

не означает, что его работы уже мало интересны для современной алгебры. Не говоря уже о том, что некоторые рассмотренные им примеры весьма своеобразны, следует заметить, по-видимому, следующее: большинство его результатов интересно скорее не с точки зрения специфики собственно теории квазигрупп, а с точки зрения специфики, так сказать, пограничной зоны — на границе теории групп и теории квазигрупп. Между прочим, без учета специфики этой пограничной зоны едва ли можно построить теорию многообразий квазигрупп (т. е. всех таких классов квазигрупп, каждый из которых определяется некоторой системой тождеств — уравнений в смысле Шрёдера — и состоит из всех тех квазигрупп, которые этим тождествам удовлетворяют) [46]. Ведь многообразие может задаваться как многообразие некоторых квазигрупп [47], а оказаться многообразием групп, да и то лишь некоторых, сравнительно простых. Все это имеет прямое отношение к работам Э. Шрёдера, так как его алгоритмы (если их в отличие от Шрёдера не ограничивать сравнительно узкой областью уравнений) взаимно однозначно соответствуют многообразиям квазигрупп.

Еще более интересны, на наш взгляд, работы Шрёдера — и для алгебристов, и для логиков, и для кибернетиков, и для вычислителей, и для специалистов по истории математики — в следующем отношении. Стоит, познакомившись с этими работами, мысленно представить себе, что было бы, если бы все работы Шрёдера были хорошо поняты его современниками и не оказались бы надолго забытыми; представить, каким было бы в этом случае теперь понятие алгоритма, какой была бы современная алгебра. Не для того, конечно, чтобы попусту пофантазировать, а для того, чтобы еще яснее понять глубокие связи между алгеброй и логикой.

Закончить следует словами о том, что всестороннее изучение работ Шрёдера с современной точки зрения имеет смысл продолжить. Автор пользуется случаем выразить благодарность А. В. Кузнецову за ряд ценных консультаций и советов, которые он получил от него при выполнении настоящей работы.

[46] Ср. с теорией многообразий групп, излагаемой, например, в книге X. Нейман [43].

[47] Например, тождеством (44).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Church A.* A bibliography of symbolic logic. — J. Symbolic logic, 1936, vol. 1, p. 121—218; Additions and corrections to a bibliography of symbolic logic, ibidem, 1938, vol. 3.
2. *Maufang R.* Zur Struktur von Alternativ-Körpern. — Math. Ann., 1935, Bd 110.
3. *Bruck R.* A survey of binary systems. Berlinn—Heidelberg—Göttingen, 1958.
4. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1952.
5. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М., 1970.
6. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М., 1967.
7. *Schröder E.* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende, Bd I. Leipzig, 1873.
8. *Schöder E.* Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra. Stuttgart, 1874.
9. *Schröder E.* Ueber von Staudts Rechnung mit Würfen und verwandte Prozesse. — Math. Ann., 1876, Bd 10, Heft 3.
10. *Schröder E.* Über eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formate Anforderungen. — J. reine und angew. Math., 1881, Bd 90.
11. *Schröder E.* Tafeln der eindeutung umkehrbaren Functionen zweier Veriabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. — Math. Annalen, 1887, Bd 29.
12. *Schröder E.* Über Algorithmen und Kalkuln. — Arch. Math. und Phys., 2. Reihe, 1887, т. 5 (ссылки с указанием страниц даются на русский перевод: *Шрёдер Э.* Об алгорифмах и исчислениях. — Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. М., 1888, с. 76—85, 163—168, 229—242, 345—374).
13. *Schröder E.* Приложения 4, 5, 6 в кн.: Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd I. Leipzig, 1890.
14. *Ибрагимов С. Г.* Из предыстории теории квазигрупп (О забытых работах Эрнста Шрёдера в XIX в.). — В кн.: Всесоюзный симпозиум по теории квазигрупп и ее приложениям (Сухуми, 17—20 мая 1968 г.). Резюме сообщений и докладов. Тбилиси, 1968.
15. *Ибрагимов С. Г.* О забытых работах Эрнста Шрёдера, пограничных между алгеброй и логикой. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. XVII. М., 1966.
16. *Кузнецов А., Ибрагимов С.* Шрёдер. — Философская энциклопедия, т. 5. М., 1970.
17. *Бобынин В. В.* Шрёдер. — Энциклопедический словарь. Изд. Ф. А. Брокгауз и И. А. Ефрон, т. XXIX^А (78). СПб., 1903.
18. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М., 1967.
19. *Poggendorf's* Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, Bd III (1858—1883), Leipzig, 1898.
20. *Poggendorf's* Biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete, Bd V (1904—1922), II. Abteilung (L—Z). Leipzig/Berlin, 1926.
21. *Бирюков Б. В., Туровцева А. Ю.* О логико-гносеологических взглядах Эрнста Шрёдера. — В настоящей книге.

22. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Leipzig, Bd I, 1890; Bd II, Abt. 1, 1891; Bd III, Abt. 1, 1895; Bd II, Abt. 1, 1905.
23. *Чистяков Н.* Бобынин. — БСЭ, изд. 1, т. 6.
24. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М., 1968.
25. Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. — Энциклопедический словарь. Изд. Ф. А. Брокгауз и И. А. Ефрон, т. XXXV^А (70). СПб., 1902, с. 672.
26. *Бобынин В. В.* Опыты математического изложения логики. Сочинения Эрнста Шрёдера. — В кн.: Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем, вып. II. М., 1894.
27. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957.
28. *Белоусов В. Д.* Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. — Успехи математических наук, 1965, т. 20, вып. 1.
29. *Sade A.* Quasigroupes obeissant à certains lois. — Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul, 1957, vol. 22.
30. *Калицкий Я.* и *Скотт Д.* Эквациональная полнота абстрактных алгебр. — В кн.: Кибернетический сборник, вып. 2. М., 1961.
31. *Курош А. Г.* Теория групп. М., 1967.
32. *Больбот А. Д.* Об эквационально полных многообразиях тотально симметрических квазигрупп. — В кн.: Алгебра и логика, т. 6, вып. 2. Новосибирск, 1967.
33. *Toyoda K.* On axioms of linear functions. — *Proc. Imper. Acad.* Tokyo, 1941, vol. 17.
34. *Биркгоф Г.* Теория структур. М., 1952.
35. *Peirce C. S.* On the algebra of logic. — Amer. J. Math., 1880, vol. 3.
36. *Успенский В. А.* Алгоритм. — Философская энциклопедия, т. 1. М., 1960.
37. *Марков А. А.* Теория алгорифмов. — В кн.: Труды Матем. ин-та АН СССР, т. XLII. М., 1954.
38. *Шмидт О. Ю.* Абстрактная теория групп. М.—Л., 1933.
39. *Шмидт О. Ю.* Избранные труды. Математика. М., 1959.
40. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем. — В кн. Математический сборник, т. 35, вып. 1. М., 1954.
41. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы. — В кн.: Математический сборник, т. 36, вып. 3. М., 1955.
42. *Белоусов В. Д.* n-арные квазигруппы. Кишинев, 1972.
43. *Нейман Х.* Многообразия групп. М., 1969.

О ДИНАМИКЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ РАЗЛИЧНЫХ АСПЕКТОВ ИДЕИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Н. Н. Нуцубидзе

Идея бесконечности выступает в человеческом познании в различных аспектах. Некоторые из этих аспектов — пожалуй, самые интересные и важные — связаны с различением (или даже противопоставлением) понятий *дискретного* (прерывного) и *непрерывного*, относящихся к явлениям и процессам материального мира и к их абстрактным образам. Дискретная и непрерывная бесконечности — едва ли не самые древние аспекты математической бесконечности, еще с античности привлекающие внимание философов, математиков, естествоиспытателей. Концепция атомизма (Левкипп — Демокрит), проблемы, связанные с апориями Зенона, аксиома непрерывности Евдокса—Архимеда — таковы далеко не единственные примеры того, что антитеза прерывного и непрерывного начала обсуждаться на самых ранних этапах научной и философской мысли.

Согласно распространенной трактовке дискретность и непрерывность — категории, характеризующие строение материи, а также процессы развития (см., например, [1], с. 363). Математика, отвлекаясь от «реального», «вещного» содержания прерывности и непрерывности, изучает их в «чистом» виде, оставляя только «форму» дискретного и непрерывного.

Явления или предметы объективной действительности как объекты *счета* всегда выступают как дискретные и не разлагаемые далее индивидуальные «единицы». С другой стороны, вещи, выступающие в качестве объектов *измерения*, всегда предполагаются «непрерывными», делимыми (во всяком случае, в принципе) «сколь угодно далеко» однородными протяженностями. В отчетливой форме это противопоставление непрерывного и дискретного («раздельного») было выражено уже Аристотелем: «Между

количествами одни разделены, другие — непрерывны, и одни состоят из находящихся в них частей, имеющих определенное положение друг к другу, а другие из частей, не имеющих такого положения. Раздельными являются, например, число и речь, непрерывными — линия, поверхность, тело; а, кроме того, еще время и пространство» ([2], VI 4*b*; см. также [3], с. 241).

Именно отсюда идут распространенные ассоциации, связывающие дискретную бесконечность с процессом счета, с возможностью неограниченного продолжения ряда натуральных чисел, а непрерывную бесконечность — с процессом измерения, с допущением возможности неограниченного деления (например, отрезка прямой линии или промежутка времени). Идея дискретности в некотором смысле проще «дается» интеллекту, чем идея непрерывности. Дискретным может быть как конечное, так и бесконечное множество, тогда как непрерывность неотъемлемым образом связана с тем, что в нашей философской литературе иногда называют «интенсивно-бесконечным» (см. [4], с. 22).

Взаимосвязь «интенсивной» бесконечности и непрерывности, безусловно, делает анализ идеи непрерывного непростой задачей. «Трудно назвать другое понятие, которое играло бы столь же большую роль в современной математике, ее философских приложениях и во всей нашей физической картине мира, как непрерывность. Однако это понятие не относится к числу интуитивно ясных, поскольку оно теснейшим образом связано с интенсивной бесконечностью» ([4], с. 22).

С другой стороны, относительная простота дискретных представлений на самом деле весьма относительна: коль скоро понятие непрерывности уже сформировано, образ континуума (непрерывной прямой или кривой) представляется нам в силу своей привычности настолько «естественным», что известного «интеллектуального насилия» требуют теперь, наоборот, концепции, в основе которых лежат те или иные дискретные совокупности объектов (см., например, ниже о конструктивном направлении в математике и логике).

Существует ли какое-либо естественное соотношение между дискретным и непрерывным? Полностью ли они исключают друг друга или между ними существует единство, основанное на возможности представления непрерывного через дискретное? Этот вопрос, столь древний, как и представление о процессах счета и изменения, можно, очевидно, и обернуть: нельзя ли в каком-либо смысле говорить также о представлении дискретного через непрерывное? (Положительный, хотя и далеко не полный ответ на этот последний вопрос давал, например, Демокрит.)

До обнаружения несоизмеримых отрезков, когда думали, что целые числа и дроби достаточны для измерения любой величины, непрерывность мыслили именно через дискретное. Плотность множества рациональных чисел отождествляли с непрерывностью прямой линии, представление о которой было основано на «голой интуиции». Отсюда — убеждение пифагорейцев в полной «арифметизуемости» геометрии, о чем свидетельствует известное изречение, приписываемое Пифагору: «Все есть число, вещи суть числа». Как говорит Г. Цейтен, сами по себе «слова эти означают просто, что все доступно числовому определению, и так как речь здесь могла идти лишь о величине вещей, то они означают, что величины эти могут быть выражены числами» ([5], с. 39).

Наверное, изречение пифагорейцев не вспоминали бы потом так часто, если бы они не открыли несоизмеримые величины. Это было открытие, «прервавшее отношения» между арифметикой и геометрией. И о восстановлении этих отношений, об «унификации» математической науки мечтали математики от эпохи пифагорейцев до XIX в.

После открытия несоизмеримых величин утвердилось представление о «несовместимости» целых чисел и непрерывных величин. Установление того, что $\sqrt{2}$ выражает длину реального отрезка, но не может быть выражен ни целым, ни дробным числом, заставило античных математиков отступить от мысли об арифметизации геометрии и обратиться к идее «геометризации математики». «Открытие несоизмеримости привело к изменению соотношения между геометрией и арифметикой. Если до этого геометрические задачи сводились к арифметике рациональных чисел, то теперь, наоборот, геометрия легла в основу всей математики, и операции алгебры начали определять с ее помощью так, чтобы они годились и для рациональных чисел, и для несоизмеримых между собой величин» ([6], с. 261). Этот процесс геометризации продолжался

почти до создания аналитической геометрии в первой половине XVII в.

Древнегреческие математики, пришедшие к понятию несоизмеримых отрезков, не поднялись тем не менее до понятия иррационального числа; в силу этого они были не в состоянии освободиться от чисто интуитивного представления о непрерывном. Картина изменилась лишь после создания строгой теории иррациональных чисел и установления того обстоятельства, что каждой точке на прямой линии соответствует единственное действительное число и, обратно, каждому действительному числу соответствует единственная точка на прямой.

Обоснование теории иррациональных чисел и связанная с ним арифметизация математики начинается с О. Коши (см., например, [7], с. 382). Однако идея арифметизации была изложена вполне определенно еще раньше Б. Больцано. В 1817 г. он в [8] писал: «Нетерпимым нарушением *хорошего метода* является, когда истины *чистой* (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат *прикладной* (или частной) ее части, а именно — геометрии». Именно Больцано впервые построил теорию действительных чисел, близкую к канторовской (см. [9]).

Еще дальше пошел Л. Дирихле, который, по свидетельству Дедекинда, неоднократно утверждал, что всякая, хотя бы и очень отдаленная, теорема алгебры или высшего анализа может быть сформулирована как теорема о натуральных числах. Но до фактического свéдения всего содержания математического анализа к учению о натуральных числах лежал еще трудный путь, который предстояло пройти.

Упорное стремление к арифметизации математического анализа в XIX в. было связано с необходимостью отказа от опоры на геометрические и механические соображения в тех областях математики, которые выходили за рамки геометрических и механических представлений. Арифметизация математического анализа также была нацелена на преодоление кризиса, который был вызван трудностями истолкования понятия «бесконечно малых», фигурировавшего в пионерских работах по математическому анализу.

На отношения между дискретным и непрерывным арифметизация математического анализа — т. е. свéдение (или хотя бы стремление к свéдению) основных понятий анализа к понятию числа, в конечном счете натурального числа — проливала новый свет. Именно с помощью натуральных чисел был уточнен смысл понятия действительного числа и общей идеи непрерывности.

Уже множество рациональных чисел обладают так называемым свойством плотности: каковы бы ни были два различных рациональных числа, всегда существует хотя бы одно рациональное число, заключенное между ними. Отсюда вытекает, что между двумя рациональными числами существует бесконечное множество рациональных чисел, но это бесконечное множество еще не заполняет «сплошь» промежуток между двумя точками прямой: из плотности еще не следует непрерывность. Некоторые последовательности рациональных чисел, координаты которых на геометрической прямой стремятся к некоторому предельному положению (и которые вследствие этого удовлетворяют установленному О. Коши критерию сходимости), не имеют тем не менее предела в системе рациональных чисел. Создатель теории пределов, Коши, не смог заполнить эти пробелы чисто арифметическими средствами — теорию действительных чисел ему построить не удалось. Эта работа была произведена К. Вейерштрассом, Р. Дедекиндом, Г. Кантором и Ш. Мере в 1860—1870 гг. прошлого века.

Остановимся на подходе Р. Дедекинда, изложенном в работе «Непрерывность и иррациональные числа» (опубликована в 1872 г.). В предисловии к этой работе он писал: «Дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства не основывают на непрерывности» ([10], с. 6—7). Дедекинд сообщил, что ему удалось средствами арифметики дать строгое определение существа непрерывности. Для этого ему пришлось заново определить иррациональные числа без привлечения геометрической интерпретации. Такие определения были основаны на идее «сечения» множества действительных чисел на два непустых класса. Мы не будем задерживаться на дедекиндовой теории сечений, поскольку она хорошо известна. Заметим лишь следующее. Констатируя неполноту (разрывность) области рациональных чисел, Дедекинд пришел к определению: «Теперь всякий раз, когда нам дано сечение (A_1, A_2), которое не

может быть произведено никаким рациональным числом, мы создаем новое иррациональное число α, которое рассматривается нами как вполне определенное этим сечением (A_1, A_2). Мы скажем, что число α соответствует этому сечению, или что оно производит это сечение» ([10], с. 17).

После этого Дедекинд доказывает непрерывность области вещественных (действительных) чисел: если система D всех вещественных чисел так распадается на два класса A_1 и A_2, что каждое число α_1 класса A_1 меньше каждого числа α_2 класса A_2, то существует одно и только одно число α, посредством которого производится это разбиение (там же, с. 20—21). С доказательством этой теоремы понятие непрерывности оказалось выраженным чисто арифметическими средствами.

Другие варианты теории действительных чисел, исходящие из понятия фундаментальной (сходящейся) последовательности рациональных чисел (Кантор — Мерэ) или бесконечной десятичной дроби (Вейерштрасс), позволяют получить по существу те же результаты (хотя и выраженные на несколько ином «языке»).

С арифметизацией анализа математика окончательно освободилась от геометрических представлений при уточнении понятия иррационального числа. Иррациональные числа были определены в терминах рациональных чисел, а рациональные числа определялись на базе натуральных чисел. Таким образом, иррациональные числа были определены через натуральные числа.

Арифметизация анализа позволила также Дедекинду и Кантору придать силу доказанной теоремы тезису о взаимно-однозначном соответствии между множеством действительных чисел и точками прямой линии. «Тем самым арифметизировалась геометрическая непрерывность, лежащая в основе столь большого числа математических фактов» ([11], с. 62). Арифметизация (дискретизация) математики показала относительный характер дискретного и непрерывного. Это был существенный шаг в проникновении в диалектическую природу идеи бесконечности.

Говоря об арифметизации математики, известный немецкий математик Л. Кронекер на съезде математиков в Берлине в 1886 г. заявил: «Бог создал целые числа, все остальное — творение человека». В этом заявлении была выражена уверенность в возможности арифметизации всей математики, а с другой стороны — убеждение в несводимости арифметики натуральных чисел к какой-либо более простой математической теории ([12], с. 98). Один из крупнейших математиков конца XIX—начала XX в., А. Пуанкаре, выступая в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков, посвященном роли интуиции и логики в математической науке, гордо заявил: «Теперь в математике остаются только целые числа и конечные или бесконечные системы целых чисел. . . Математика . . . полностью арифметизирована. . . Мы можем сказать сегодня, что достигнута абсолютная строгость» (цит. по книге А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [3], с. 27).

«Но по иронии судьбы, — пишут Френкель и Бар-Хиллел, — в то самое время, к которому относится гордое заявление Пуанкаре, уже выяснилось, что теория «бесконечных систем целых чисел» — т. е. попросту часть теории множеств — весьма далека от абсолютной надежности своих основ» ([3], с. 28). Речь идет об открытии антиномий (парадоксов, противоречий) теории множеств и логики — открытии, сыгравшем решающую роль не только во всей проблеме обоснования математики и логики, но и, в частности, в интересующем нас вопросе о взаимосвязи между понятиями прерывности и непрерывности.

На рубеже XIX и XX столетий проходит водораздел между старым подходом к логико-математическому понятию бесконечности, идеалом которого было по возможности полное сведе́ние понятия континуума (действительных чисел или точек прямой) к счетной, дискретной совокупности (чисел или точек), и новым подходом, основанным на совершенно других, в известном смысле даже противоположных, идеях. Чтобы в должной мере понять и оценить неизбежность, логичность и естественность этого «скачкообразного перехода» точек зрения, попытаемся резюмировать сущность первого из названных подходов.

До сих пор мы характеризовали его именно как стремление к редукции (сведе́нию) непрерывности к дискретности, a priori полагая первое из этих понятий более сложным, нежели второе. Мы, однако, уже говорили, что такая трактовка относительной «сложности» и «простоты» этих понятий сама по себе относительна. Дело в том, что «платой» за искомую редукцию (безотносительно к тому, какой из вариантов теории действительных чисел и арифметизации анализа выбран — дедекиндовский, канторовский или вейерштрассовский) всякий раз служит другая редукция, также считавшаяся (что весьма характерно для логических воззрений того времени) желательной. Это не что иное, как редукция «внематематического» [1] представления о «бесконечном процессе», так или иначе лежащего в основе интуитивного понятия действительного числа, к «чисто математическому» понятию бесконечного множества (сечения, фундаментальной последовательности или последовательности десятичных знаков). Но если ту же самую редукцию охарактеризовать в других терминах, то она будет выглядеть куда менее «добропорядочно», а именно, как редукция абстракции потенциальной осуществимости, которой спокойно обходились классики математического анализа в своих (достаточно нечетких, если применять нынешние представления о строгости) рассуждениях, к абстракции актуальной бесконечности, являющейся краеугольным камнем теоретико-множественного обоснования анализа.

Таким образом, «арифметизация» оказывается процедурой куда менее «невинной», чем могло показаться, апеллирующей наряду с «изначальной интуицией натурального числа» ([3], гл. IV, раздел 5) к абстрактным идеям, на порядок более трудным и сложным (во всяком случае, менее очевидным для непосредственного восприятия и усмотрения), чем подлежащие уточнению с их помощью интуитивные представления.

В многообразии реакций на возникшие таким образом логические затруднения воплотился тот перелом в умонастроениях логиков и математиков, о котором бегло уже упоминалось выше. Если совсем еще недавно теоретико-множественные конструкции казались значительному большинству математиков (независимо от профиля — сказанное в равной мере относится к аналитикам и алгебраистам, геометрам и топологам, специалистам по теории вероятностей и даже теории чисел) своего рода идеалом строгости и надежности (не всегда достижимым, но тем более желанным и привлекательным), то теперь, напротив,

[1] См. по этому поводу любой серьезный курс математического анализа или теории функций действительного переменного (например, Н. Н. Лузина, Г. М. Фихтенгольца или И. П. Натансона).

21 Заказ № 998

призрак парадоксов чудился даже там, где опасаться их не было никаких разумных оснований. И хотя подавляющее большинство математиков, не занятых непосредственно проблемами обоснования, по-прежнему повторяли привычные тезисы о теоретико-множественном характере математики, их заинтересованность в теоретико-множественном построении своей науки чаще всего этим и ограничивалась; рассуждали примерно так: теория множеств — это фундамент, но в этом фундаменте обнаружены какие-то трещины, поэтому лучше подальше держаться от вопроса об основаниях — заниматься надо своим непосредственным делом.

Конечно, сколь бы ни были распространены такие нигилистические и «прагматические» настроения, они никак не затрагивали математиков и логиков, считавших проблемы оснований своим непосредственным делом. Но здесь обнаружились далеко идущие расхождения в выводах, определившие в скором времени различие основных направлений в исследованиях оснований математики, зависевшие от отношения к проблеме теоретико-множественных антиномий. Между прочим, уже в цитированных выше высказываниях Кронекера и Пуанкаре при всем их внешнем сходстве явственно проглядываются эти будущие расхождения: пафос Кронекера, предтечи интуиционизма и конструктивизма, сосредоточен именно на ц е л ы х ч и с л а х («творении божием»), все же остальные изобретения человеческие он готов, если понадобится, отдать лукавому. В позиции Пуанкаре, говорящего о «системах целых чисел», явственно предугадывается будущая гильбертовская программа «спасения» канторовской — т. е. теоретико-множественной — математики.

Не наша задача углубляться в анализ названных направлений. Но важно подчеркнуть, что при всем их различии в них есть и нечто общее, причем это общее имеет непосредственное отношение к интересующей нас теме взаимоотношения прерывного и непрерывного, дискретного и континуального. Мы знаем, что в античной математике больший «вес» имела идея дискретности. Идея непрерывности стала играть центральную роль в связи с развитием математического анализа, теории функций и топологии. Развитие математической логики, интуиционизма и конструктивизма в математике, с одной стороны, и кибернетики и машинной математики — с другой, привело к новой постановке древней проблемы «прерывного и непрерывного» (см. статью [1], а также введение в монографии [13] и раздел 14 главы 1 книги [14]). Математический интуиционизм, восходящий к идеям, провозглашенным Э. Л. Я. Брауэром в 1907 г., и особенно конструктивное направление, представленное в нашей стране школой А. А. Маркова и Н. А. Шанина, усиливают крен в сторону «дискретизации» математики. Этому способствует разработка интуиционистских и конструктивных аналогов серии понятий «классической» (теоретико-множественной) математики, имеющих непосредственное отношение к представлениям о континуальности, непрерывности. К числу этих аналогов принадлежат интуиционистский «континуум» Вейля—Брауэра, а затем аналоги теоретико-множественного континуума в построениях конструктивистов, разрабатывающих конструктивный математический анализ (с использованием средств теории рекурсивных функций или теории нормальных алгорифмов Маркова).

Мы видим, таким образом, как релятивизируются фундаментальные идеи о дискретном и непрерывном. Они становятся зависимыми от «вида» математики, а этот последний — от тех фундаментальных абстракций (отвлечений, идеализаций), которые принимаются (или не принимаются) соответствующим «типом» математического мышления. Для «классика», принимающего абстракцию актуальной бесконечности и не признающего воздействия «бесконечностной» проблематики на законы логики, конструктивный континуум не соответствует идее непрерывности, поскольку он счетен. На это, однако, конструктивист может возразить, что э ф ф е к т и в н ы й пересчет его невозможен. Вообще, при разных «типах» математического мышления разную окраску приобретает сама идея непрерывности, а значит, и идея дискретности, что проявляется прежде всего в различии понятий континуума.

Так получается картина «множественности» континуумов, связанных между собой интересными отношениями: непрерывность в смысле теоретико-множественной математики отображаема («моделируема») в математике конструктивистов, причем конструктивные аналоги классического континуума являются счетными. Но возможным оказывается и погружение конструктивной непрерывности в классическую теоретико-множественную, и в этом случае образ конструктивного континуума в классическом обладает свойством быть всюду плотным. Все эти отношения свидетельствуют о чрезвычайной сложности того аспекта идеи бесконечности, который заключен в противопоставлении непрерывного и дискретного.

Аналогичные процессы мы наблюдаем и в кибернетической сфере проблемы. В теоретической (математической) кибернетике — главной технической базой которой является электронная цифровая техника — ведущую роль играет не идея непрерывного, а идея дискретного. «Это накладывает свой отпечаток на все ситуации в кибернетике, отражается на всей проблематике соотношения дискретных и непрерывных методов в современной математике. В связи с этим одновременно с возникновением и развитием кибернетики стала интенсивно развиваться и дискретная математика» ([15], с. 69).

Однако идея непрерывности продолжает свою жизнь в науке, несмотря на арифметизацию анализа и бурное развитие дискретной по своему существу машинной математики и цифровой кибернетической техники. В отношении кибернетики, например, это очевидно, ибо, как отмечается в литературе, в реальных системах управления мы всегда фактически сталкиваемся со сложным переплетением свойств дискретности и непрерывности.

Единство дискретного и непрерывного в кибернетике было решительно подчеркнуто А. Н. Колмогоровым.

> Иногда делают вывод, что кибернетика должна заниматься лишь дискретными устройствами. Против такого подхода имеются два возражения. Во-первых, реальные сложные системы, как многие машины, так и все живые существа, действительно имеют определенные устройства, основанные на принципе непрерывного действия. Что касается машин, то таким примером может служить, скажем, руль автомобиля и т. п. ... Действительное возражение против дискретного подхода заключается в следующем: заведомо человеческий мозг и даже, к сожалению, часто вычислительные машины отнюдь не всегда действуют детерминированно полностью закономерным образом ([16], с. 18).

В этих словах А. Н. Колмогорова явственно сквозит мысль, фундаментальная для философской трактовки рассматриваемого аспекта бесконечности. Она состоит в том, что реальность и «непрерывна» и «дискретна»; понятия непрерывного и дискретного — это абстракции (отвлечения, упрощения, идеализации), применяемые человеком на разных уровнях познания и во многом зависящие от принятых способов (языка) описания действительности. В свете всего сказанного выше положение об идеализированном характере представлений о дискретном и непрерывном и об относительности их противопоставления оказывается естественным методологическим заключением из новейших результатов математики, логики и кибернетики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прерывность и непрерывность. — Философская энциклопедия, т. 4. М., 1967.
2. *Аристотель.* Категории. М., 1939.
3. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1968.
4. *Наан Г. И.* Понятие бесконечности в математике и космологии. — В кн.: Бесконечность и Вселенная. М., 1969.
5. *Цейтен Г. Г.* История математики в древности и в средние века. М.—Л., 1938.
6. *Башмакова И. Г.* Лекции по истории математики в древней Греции. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. XI. М., 1958.
7. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., 1960.
8. *Bolzano B.* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege. — Abhand. d. Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 3. Folge, 1817, Bd 5, 1. Abt.
9. *Рыхлик К.* Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. XI. М., 1958.
10. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1914.
11. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М., 1968.
12. *Коноплянин А.* Кронекер. — Философская энциклопедия, т. 3. М., 1964.
13. *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973.
14. *Бирюков Б. В.* Кибернетика и методология науки. М., 1973.
15. *Яблонский С. В., Ляпунов А. А.* О теоретических проблемах кибернетики. — В кн.: Кибернетика, мышление, жизнь. М., 1964.
16. *Колмогоров А.* Автоматы и жизнь. — В кн.: Возможное и невозможное в кибернетике. М., 1964.

SUMMARY

Cybernetics and logic. The becoming of cybernetical ideas and the development of computing machinery in their mathematico-logical aspects. Ed. by B. V. Biriukov and A. G. Spirkin. Moscow, Nauka Publishers, 1978.

Nowadays cybernetics is on the very edge of scientific and technical progress. There is no such branch of science, engineering or national economy where its methods and tools were not used. The authors of the present book survey the development of cybernetical ideas in connection with their logical formalization from the earliest times up to the beginning of the XX century. The reader will acquaint himself with methodological problems involved in the history of computing and logical machinery and the mathematical apparatus of cybernetics and he will study some philosophical issues of the development of logical calculi. The paper on the building of logical machines in Russia will also interest him.

ANNOTATION

Kybernetik und Logik. Mathematisch-logische Aspekte der Herausbildung kybernetischer Ideen und der Entwicklung der Rechentechnik. Herausgegeben von B. W. Birjukow und A. G. Spirkin. Moskau, Verlag «Nauka», 1978.

In der Gegenwart befindet sich die Kybernetik an der vordersten Front des wissenschaftlich-technischen Fortschritts. Es gibt keinen Zweig der Wissenschaft, der Technik und der Volkswirtschaft, wo ihre Methoden und Mittel nicht angewendet werden. Die Autoren des vorliegenden Buches schildern die Entwicklung kybernetischer Ideen in ihrem Zusammenhang mit der logischen Formalisierung von ihren historischen Ursprüngen bis zum Beginn des XX. Jahrhunderts. Der Leser wird mit methodologischen Problemen der Geschichte der Rechentechnik und der logischen Maschinen, des mathematischen Apparates der Kybernetik sowie mit einigen philosophischen Fragen der Entwicklung logischer Kalküle bekanntgemacht. Von Interesse dürfte nicht zuletzt der Abschnitt über die Schaffung logischer Maschinen in Rußland sein.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

КИБЕРНЕТИКА И ЛОГИКА

Утверждено к печати Научным советом по комплексной проблеме «Кибернетика» и Институтом истории естествознания и техники АН СССР

Редактор *Н. И. Кондаков*
Художественный редактор С. А. Литвак
Художник Г. А. Астафьева
Технические редакторы О. Г. Ульянова, Ф. М. Хенох
Корректор М. К. Запрудская

ИБ № 5068

Сдано в набор 05.12.77. Подписано к печати 28.06.78.
Т-08549. Тип. зак. 998
Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская № 3
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 17,6. Уч.-изд. л. 18,5. Тираж 9300
Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

Заказы просим направлять
по одному из перечисленных адресов
магазина «Книга — почтой» «Академкнига»:

480091 АЛМА-АТА, 91, ул. Фурманова, 91/97;
370005 БАКУ, 5, ул. Джапаридзе, 13;
734001 ДУШАНБЕ, проспект Ленина, 95;
252030 КИЕВ, ул. Пирогова, 4;
443002 КУЙБЫШЕВ, проспект Ленина, 2;
197110 ЛЕНИНГРАД, П-110, Петрозаводская ул., 7;
117192 МОСКВА, В-192, Мичуринский проспект, 12;
630090 НОВОСИБИРСК, 90, Морской проспект, 22;
620151 СВЕРДЛОВСК, ул. Мамина-Сибиряка, 137;
700029 ТАШКЕНТ, 29, ул. К. Маркса, 28;
450059 УФА, 59, ул. Р. Зорге, 10;
720001 ФРУНЗЕ, бульвар Дзержинского, 42;
310003 ХАРЬКОВ, Уфимский пер., 4/6.