АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Е. М. Полищук, Т. О. Шапошникова

Жак
АДАМАР
1865—1963

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
В. М. БАБИЧ

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1990

УДК 92

Е. М. Полищук, Т. О. Шапошникова. Жак Адамар. 1865—1963. Л.: Наука, 1990. 254 с.

Книга представляет собой первую на русском языке научную биографию выдающегося французского математика Жака Адамара, прославившегося работами во многих областях математики: теории функций комплексной переменной, теории чисел, математической физике, гидродинамике, аналитической механике, геометрии, вариационном исчислении, функциональном анализе. Она рассчитана на широкий круг читателей — математиков и механиков. Библиогр. 558 назв. Ил. 16.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук А. А. ГРИБ,
канд. физ.-мат. наук Е. П. ОЖИГОВА

Редактор издательства М. В. ХОТИМСКАЯ

П $\dfrac{1602010000\text{-}684}{054(02)\text{-}90}$ 56-89 НП

ISBN 5-02-024506-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

16 декабря 1987 г. на семьдесят четвертом году жизни оборвалась жизнь одного из авторов, Ефима Михайловича Полищука. Его кончина — утрата не только для близких и коллег-математиков, но и для многочисленных читателей его увлекательных повествований о великих ученых прошлого. В «Научно-биографической серии» были изданы книги Е. М. Полищука «Вито Вольтерра» (1977 г.), «Эмиль Борель» (1980 г.) и «Софус Ли» (1983 г.), вдохновленные возвышенной любовью к науке, написанные с литературным блеском, отражающие его незаурядную эрудицию.

Ефим Михайлович плодотворно работал в различных областях математики. Значительное место в его творчестве занимал анализ функций бесконечномерного аргумента, и в особенности теория уравнений в вариационных производных и континуальных средних. Ему принадлежат и разнообразные прикладные работы, в круг его интересов входили вопросы навигации и гидрографии, математическая обработка биологических экспериментов и статистическая динамика численности биоценозов. Он не дожил полгода до выхода своей книги «Континуальные средние и краевые задачи в функциональных пространствах» в ГДР.

Предлагаемая читателю научная биография Адамара написана по инициативе Е. М. Полищука. Смерть прервала его работу над своей частью книги. Он оставил в завершенном виде главу «Теория аналитических функций» и разделы, посвященные курсу элементарной геометрии и книге о психологии математического творчества. Главы «Адамар и русские математики», «Математическая физика» и раздел «Теория уравнений в частных производных» написаны мною. Ответственность за остальной материал разделяют оба автора.

Ю. Д. Бураго, А. М. Вершик, С. А. Зегжда, А. В. Малышев, Е. П. Ожигова и В. П. Хавин прочитали отдельные части рукописи Е. М. Полищука и высказали свои замечания. В. М. Бабич сделал гораздо больше для улучшения текста, чем диктовали его обязанности ответственного редактора книги. Всем им я хочу выразить сердечную благодарность. На разных этапах работы мне помогала доброжелательная критика и советы Н. С. Ермолаевой, за что мне приятно ее поблагодарить. Я глубоко признательна профессорам У. Экхардту (Гамбургский университет), Ж. Неделеку (Политехническая школа, Париж), внуку Адамара профессору Ф. Пикару (Институт ядерной физики, Париж), Н. Х. Ибрагимову и Т. А. Эбаноидзе за интересные материалы, использованные в книге, а также профессорам Д. Манжерону (Университет в Яссах, Румыния) и В. Энгелю (Ростокский университет, ГДР) за фотографии.

Последние по счету, но не по важности слова благодарности я хотела бы — и Е. М. Полищук также считал это необходимым — высказать моему мужу Владимиру Гилелевичу Мазья, который был нашим постоянным консультантом. Его советы во многом определили лицо книги.

Т. О. Шапошникова

Введение

Каждому, кто сколько-нибудь серьезно изучал математику, знакомо имя французского ученого Жака Адамара (1865—1963). Еще на студенческой скамье будущий математик узнает формулу Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. Среди классических результатов теории функций комплексной переменной — теоремы Адамара о трех кругах, о лакунах, об умножении особенностей. Одной из вершин теории чисел стало полученное Адамаром доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. Широко известно неравенство Адамара для определителей. Корректность по Адамару — важнейшая характеристика задач математической физики, а его контрпримеры вошли во все курсы лекций по этой дисциплине. Матрицы и многообразия Адамара, его вариационная формула для функции Грина и конструкция параметрикса задачи Коши, условие Лежандра—Адамара положительности акустического тензора тела и уравнение Адамара для волн на воде — вот далеко не полный перечень математических объектов, связанных с этим именем.

Творческий путь Адамара был долгим: юношеская работа «Об улитке Паскаля» вышла в 1884 г., а в 1957 г. появилась статья «О теореме Гарнака». Период наибольшего расцвета его творчества приходится на конец минувшего века и первые два десятилетия нынешнего. С одной стороны, Адамар внес немалую лепту в решение конкретных проблем, оставленных XIX веком, виртуозно используя классический математический аппарат, и с другой — он явился предтечей ряда направлений, характерных для современной математики.

Когда 17 июля 1912 г. мировая наука понесла невосполнимую потерю — неожиданно умер Анри Пуанкаре, — на его место в Академию наук Франции был избран Жак Адамар. «Он обладал одновременно чувством строгости, присущим Коши или Вейерштрассу, и интуитивным гением Римана, — писал в 1964 г.

ученик Адамара, известный французский математик Поль Леви. — Эти качества, соединенные с неутомимой любознательностью и огромной трудоспособностью, позволили ему оставить наследие, которое поражает как многообразием тематики, так и глубиной идей и трудностью некоторых решенных проблем» [II 11, с. 9].

Много энергии отдавал Адамар преподаванию математики: он читал разнообразные курсы лекций во французских и зарубежных университетах, которые легли в основу нескольких его книг. Он создал математический семинар, остававшийся в течение 20 лет центром притяжения для талантливой молодежи. Школу этого семинара, беспрецедентного по широте тематики, прошли многие впоследствии знаменитые математики Франции и других стран.

При всей своей преданности науке Адамар был далек от типа кабинетного ученого. Активный дрейфусар, один из основателей «Лиги прав человека», позднее антифашист, участник движения за мир, противник колониализма и расизма, нетерпимый к проявлениям беззакония и несправедливости, он всю свою жизнь боролся за честь и достоинство личности. «В вашем лице мы приветствуем человека, который никогда не оставался равнодушным к чужой беде», — писали в предисловии к сборнику избранных трудов Адамара его друзья и ученики [I 288, с. 5]. Цель нашей книги — рассказать об этом замечательном человеке и дать представление о его исследованиях.

Источники. Книг о жизни Адамара нет. Наиболее полные источники биографических сведений о нем — написанные блестяще, но сжато, статьи Мэри Картрайт [II 6] и Поля Леви [II 11]. Мы использовали также изданный в Париже сборник речей, произнесенных на праздновании 70-летия Адамара [II 9]. Полезной для нас была и статья С. и А. Росса-Миньо [II 22], посвященная жизнеописанию Адамара на фоне исторических событий, свидетелем и участником которых он был. По ходу изложения мы ссылаемся также на другие биографические источники (почти все довольно краткие). Мы не могли воспользоваться эпистолярным наследием Адамара. Исключение составляют несколько его писем к русским математикам, хранящихся в Ленинградском отделении Архива АН СССР.

Подробных обзоров всего математического творчества Адамара не существует. В нашем распоряжении были два отчета «Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard», написанные самим Адамаром в 1901 и 1909 гг. и хранящиеся в Архиве Политехнической школы. Из упомянутой статьи П. Леви нам известно о существовании третьего подобного отчета, от 1912 г. В [II 6] Картрайт дает конспективную характеристику исследований Адамара в целом. Ту же цель преследуют глубокие, но сравнительно короткие очерки различных направлений его работы, написанные П. Леви [II 12], С. Мандельбройтом [II 16], Б. Мальгранжем [II 13] и П. Маляверном [II 14]. Имеются еще посвященные Адамару статьи М. Фреше [II 7], С. Мандельбройта и Л. Шварца [II 19] и С. Мандельбройта [II 15, II 17]. В журнале Политехнической школы «La jaune et la rouge» были опубликованы речи, произнесенные на праздновании 100-летия со дня рождения Адамара [II 11, II 16, II 20, II 23, II 24].

«Успехи математических наук» дважды обращались к творчеству Адамара. В 1936 г. в связи с 70-летием ученого были напечатаны статьи И. Г. Петровского и С. Л. Соболева [II 3] и А. Г. Гельфонда и Л. Г. Шнирельмана [II 1]. После смерти Адамара в журнале был помещен перевод воспоминаний П. Леви [II 10], а также текст выступления Г. Е. Шилова на мемориальном заседании Московского математического общества [II 5]. В 1964 г. в журнале «Математика в школе» был опубликован некролог Адамара, написанный А. Я. Маргулисом и А. П. Юшкевичем [II 2], в котором много внимания уделено его психологическим исследованиям и взглядам на преподавание. Мы ссылаемся на перечисленные источники в ряде случаев, но в основном даем обзор математических результатов Адамара, непосредственно анализируя его работы.

Читателю, который захотел бы обратиться к работам Адамара в подлиннике, полезно иметь в виду, что в 1968 г. вышло четырехтомное собрание его сочинений [I 341]. В него вошла значительная часть статей ученого. К сожалению, в нем воспроизведены все опечатки оригинальных изданий, отсутствуют редакционные замечания.

В конце нашей книги приведена библиография, состоящая из трех разделов с автономной нумерацией: I — труды Адамара, II — литература о нем и III — список работ, связанных с излагаемым материалом.

Жизнь Адамара

Начало пути

Годы учения. Жак Саломон Адамар родился 8 декабря 1865 г. в Версале. Его отец, Амаде Адамар, был филологом, преподавателем латинского языка в лицее Людовика Великого, мать, Клер-Мари-Жанна Пикар, давала уроки игры на фортепиано. Среди ее учеников был Поль Дюка, впоследствии известный композитор, автор популярного симфонического скерцо «Ученик чародея» на сюжет баллады Гете. В доме часто звучала музыка, и маленький Жак преуспел в игре на скрипке. Ребенок, кроме того, хорошо рисовал. После окончания начальной школы Жак поступил в лицей, где преподавал его отец.

В младших классах мальчик не проявлял каких-либо математических способностей и неохотно решал арифметические задачи («. . .до пятого класса включительно я был последним по арифметике или близок к этому» *)) [II 9, с. 52]. Когда он однажды проходил с отцом мимо здания Нормальной школы, между ними произошел такой разговор: «Это здесь готовят математиков?» — «Да, именно здесь, на отделении наук». — «Ну, тогда я сюда не пойду» [II 9, с. 52].

Амаде Адамар мог гордиться успехами сына в классических языках: юноше присуждали награды на общих конкурсах лицеев Франции по латыни и греческому. Между прочим, одна серебряная медаль, полученная в те годы, вернулась к нему после второй мировой войны из рук генерала французской армии. Дело в том, что

---

*) Любопытно, что Э. Пикар, будущий учитель Адамара в Нормальной школе, в юности проявлял аналогичную нелюбовь к математике. «В лицее Генриха IV (в те времена — лицей Наполеона), где Пикар получал образование, он блистал в переводах с греческого, латинских стихах и истории, но решительно ненавидел геометрию, которую учил наизусть, чтобы избежать наказания!» [1341, т. IV, с. 2043].

квартира Адамаров была разграблена оккупантами, когда семья находилась в эмиграции, и медаль пропала вместе со всеми вещами. Генерал случайно наткнулся на нее в парижском антикварном магазине и передал владельцу, лекции которого он слушал когда-то в Политехнической школе. А бумаги не нашлись, и с ними, несомненно, исчез интересный материал о жизни Адамара. Впрочем, по словам его дочери Жаклин, переданным М. Картрайт, «он сохранял все о других и так мало о себе» [II 6, с. 75].

Первым, кто пробудил в Адамаре любовь к математике, был Лонэ, его учитель в старших классах лицея. Лонэ, по словам Адамара, вызвал у него первое, еще детское, ощущение красоты научных истин [II 9, с. 52]. Увлекшись, Жак, к разочарованию отца, решает стать математиком. И вот, вопреки своему детскому пророчеству, 19-летний Адамар сдает вступительные экзамены одновременно в Нормальную и в Политехническую школы. Столь необычная для нас практика не была редкой, в свое время так же действовали Гастон Дарбу, Эмиль Борель и Анри Пуанкаре. Подобно Дарбу в 1859 г. и Пикару в 1874 г., Адамар становится первым среди абитуриентов по сумме баллов и при этом побивает рекорды всех предшествующих лет (на экзамене в Политехнической школе он набрал 1875 баллов из 2000 возможных) [II 8, с. 937]. Сам этот факт является примечательным, но история науки знает и другие примеры. Так, результаты экзамена Анри Пуанкаре в Политехническую школу были скромными, а другой французский гений — Луи Пастер — был лишь семнадцатым.

Политехническая и Нормальная школы были основаны почти одновременно. Первая открылась в 1794 г. и предназначалась для подготовки гражданских и военных инженеров. Со временем она стала образцовым высшим учебным заведением благодаря блестящим преподавателям, строгой дисциплине, жестким экзаменам и отличным учебникам. Долгое время Политехническая школа была наиболее престижным учебным заведением Франции и имела репутацию одного из крупнейших математических центров мира. В ней подолгу преподавали Г. Монж, Ж. Б. Ж. Фурье, Ж. Понселе, О.-Л. Коши, С. Д. Пуассон, П.-С. Лаплас, А.-М. Ампер, Ж.-Л. Лагранж, А.-М. Лежандр.

Нормальная школа была основана в 1795 г. и вначале имела более гуманитарный уклон. Она считалась рассадником либерализма и была закрыта в 1822 г., через четыре года снова открыта, а в 1845 г. преобразована и стала называться Высшей нормальной школой. Из ее прославленных учеников достаточно упомянуть Эвариста Галуа, поступившего в 1829 г. и позднее исключенного за неукротимый нрав и попытки участия в июльских событиях 1830 г.

Будучи, как мы уже говорили, первым по результатам экзаменов в обе школы, Адамар, разумеется, мог поступить лишь в одну. Были ли у него колебания, неизвестно, но вот что он пишет об Эмиле Пикаре, оказавшемся в аналогичном положении за десять лет до него (этот отрывок взят из некролога, опубликованного в 1943 г., через два года после смерти Пикара): «Как всякий французский юноша нашего времени, наделенный способностями к науке, он должен был выбрать между Политехнической школой, которая в принципе готовила к карьере инженера, и Нормальной школой с ее чисто научной направленностью. Он принял решение в пользу последней и поступил первым. Рассказывают, что он сделал этот шаг после волнующего визита к Пастеру, во время которого отец бактериологии говорил о чистой и не заинтересованной в приложениях науке в столь благородных терминах, что его молодой собеседник был полностью убежден» *) [I 307, с. 114].

И вот в 1884 г. Адамар становится «нормалистом». Его сокурсник, будущий директор школы Эрнст Вессио, через много лет, на 70-летнем юбилее Адамара, вспоминал: «Твоему появлению в школе предшествовала слава об исключительно одаренном ученике, юной знаменитости, что с блеском подтвердил твой великолепный успех в Политехнической и Нормальной школах, куда ты был принят первым всего лишь после года подготовки. В твоем лице наш выпуск получил отличного товарища, которому никогда не изменяли ни простота, ни дружеская преданность.

Ты провел в школе спокойные годы, насыщенные работой, позволяя созреть своему таланту, не спеша найти свой путь. Но с твоей всегда активной любознательностью, от которой не ускользали никакая инфор-

*) Пикар был племянником Пастера.

мация или опыт, ты извлекал пользу из разговоров как с литераторами, так и с учеными, как с физиками-натуралистами, так и с математиками» [II 9, с. 25].

Близким другом Адамара в школе стал Пьер Дюэм, незаурядная личность и в будущем знаменитый физик. Он был почти на пять лет старше, и дружба с ним сыграла исключительную роль в становлении научных интересов Адамара.

В то время директором школы был математик Жюль Таннери, человек редкого обаяния, эрудированный ученый и прекрасный педагог.*) В январе 1936 г., в день, когда научная общественность Франции праздновала 70-летие Адамара, он, отвечая на приветствия, говорил о Таннери в самых патетических тонах, подчеркивая огромную роль «светоносной личности Жюля Таннери» для учеников Нормальной школы тех лет [II 9, с. 52]. Тогда же Адамар воздал должное и другим своим учителям. Упомянув, что значительная часть жизни учеников Нормальной школы проходила в Сорбонне, он называет прослушанные там лекции Ш. Эрмита «блестящими, полными энтузиазма» [II 9, с. 53]. Неизгладимое впечатление произвела на Адамара личность Г. Дарбу, которому он был особенно обязан своим геометрическим образованием: «Его мелодичный голос навсегда остался в моей памяти» [там же].

На лекциях Э. Пикара Адамар впервые познакомился с приложениями математики к естествознанию, и в частности к различным вопросам гидродинамики. В том же выступлении на своем юбилее Адамар вспоминал, обращаясь к Пикару: «Совершенно ясно, что Вы поставили перед собой задачу, — я бы сказал, взвалили на себя ярмо — увлечь нас той искусственной и прискорбно монотонной дисциплиной, какой представляется аудитории теоретическая механика. Вы смогли сделать ее почти интересной; впоследствии я всегда спрашивал себя, как Вам это удалось, поскольку я не достиг той же цели, когда настал мой черед». Отмечая исключительную продуманность лекций Пикара, Адамар добавляет, что именно «загадочной и волнующей

---

*) Русский перевод книги Ж. Таннери «Введение в теорию функций с одной переменною» [III64] был в предреволюционной России популярным университетским учебником. Второй том содержит дополнение Адамара «О некоторых применениях указателя Кронекера» [I142].

Эмиль Пикар.

теореме Пикара о целых функциях он обязан значительной частью вдохновения первых лет своей работы» [II 9, с. 54].

Добрым словом вспомнил он и своих учителей П. Аппеля и Э. Гурса. Любопытно, что А. Пуанкаре, по словам Адамара, не оказал на студентов того немедленного решающего влияния, которого можно было ожидать, его работы опережали современную науку на четверть века, ими восхищались, но «не осмеливались коснуться» [там же].

Первые успехи. Женитьба. Еще будучи слушателем Нормальной школы, Адамар публикует работы «Об улитке Паскаля» и «О гипоциклоиде с тремя точками возврата». Такая тематика была характерна для начинающих французских математиков того времени: геометрические задачи кинематического характера, иногда весьма трудные, часто предлагались на семинарах в Нормальной школе и в других высших учебных заведениях. Вскоре появляется еще одна работа [I 4], содержащая теорему о радиусе сходимости произвольного степенного ряда, — результат, вошедший во все учебники анализа.

Сдав в 1887 г. экзамен на право преподавания математики в лицее, Адамар до 1890 г. остается в Нормальной школе, а затем в течение трех лет преподает в лицее Бюффона. Здесь он обратил внимание на одаренного юношу Мориса Фреше, увлеченного математикой. Научная переписка продолжила связь учителя, переехавшего в Бордо, и ученика, поступившего в Нормальную школу. Через много лет Фреше, один из классиков функционального анализа, говорил, обращаясь к Адамару, что никогда не забудет его заботы: «Вы сыграли решающую роль в том, что я стал математиком» [II 9, с. 34].

«Несомненно, — пишет П. Леви, — именно в течение этих лет, когда он общался с лицеистами, у него зародился интерес к методам преподавания и учебным программам; возможно, в тот же период возник план его «Лекций по элементарной геометрии», которые он подготовил и опубликовал через десять лет и которые имели большое влияние на студентов моего поколения» [II 12, с. 2].

Несмотря на занятость в лицее, Адамар в 1892 г. заканчивает диссертацию «Исследование функций, заданных рядами Тейлора» [I 7]. В ней кроме упомянутой теоремы о радиусе сходимости степенного ряда был указан способ аналитического продолжения функции на любой круг, концентрический кругу сходимости, при условии, что множество особенностей функции исчерпывается полюсами. Диссертация содержала также глубокое исследование расположения особых точек функции, заданной степенным рядом, на границе его круга сходимости. Эта работа, о которой будет рассказано подробно, явилась началом серии блестящих публикаций молодого ученого по аналитическим функциям и сразу обратила на себя внимание. В новом большом мемуаре [I 9] Адамар исследует целые функции, в частности изучает понятие жанра, и при помощи результатов своей диссертации устанавливает тонкие свойства знаменитой дзета-функции Римана. За это сочинение в 1892 г. он удостаивается Большого приза Академии наук.

30 июня 1892 г. Адамар женится на Луизе Анне Тренель. По словам Фреше, она была «интеллигентна, имела щедрое сердце, поддерживала мужа и много помогала ему в течение всей его творческой жизни» [II 7, с. 4081]. Поль Монтель, друг семьи Адамар, говорил, что живой интеллект, привлекательная внешность, доброта и музыкальность далеко не исчерпывали перечня ее прекрасных качеств [там же]. Их брак, продолжавшийся 68 лет, являл собой пример гармонии двух благородных и одаренных натур. На их долю выпали и радости семейной жизни, и страшные несчастья.

Луиза (Лу, как называли ее члены семьи и друзья) сопровождала мужа в его поездках в самые удаленные места земного шара, самоотверженно делила с ним трудности путешествий. Адамар, постоянно поглощенный наукой или общественными проблемами, был довольно рассеян и не силен в практических вопросах. М. Картрайт передает слова французского математика Ж.-П. Кахана: «Переходя улицу, он думал о чем угодно, но не о машинах, и понятия не имел, как завязывать галстук» [II 6, с. 83]. Его опорой и защитой в повседневной жизни была жена, она «с неизменным великодушием охраняла его работу» [II 22, с. 308].

Одна из последних книг Адамара [I 339] вышла с посвящением: «Спутнице моей жизни и моих трудов». В 1944 г., на одной из улиц Лондона, в то время, когда немцы начали применять крылатые ракеты Фау-1, Адамар сказал своему ученику и преемнику в Коллеж де Франс С. Мандельбройту: «Если со мной что-нибудь случится, не забудьте рассказать обо всем, чем я обязан моей жене» [II 22, с. 309].

Встреча с Дюэмом. В 1893 г. супруги Адамар переехали в Бордо — оживленный портовый город на юго-западе Франции. В университете Бордо, основанном еще в XV в., Адамар начал свою деятельность в качестве лектора. Здесь он снова встретил Пьера Дюэма, который читал лекции по физике в том же университете. Этот человек — фигура настолько значительная, и его роль в творчестве Адамара столь велика, что о нем стоит рассказать подробнее. В большой статье Д. Миллера мы читаем: «Пьер Дюэм являл собой редкий, если не сказать уникальный, пример человека, соединившего в одном лице крупного мыслителя, историка науки и физика-теоретика» [III 143, с. 225].

Еще будучи студентом Нормальной школы, Дюэм представил диссертацию, в которой развивал концепцию термодинамического потенциала в химии и физике и критиковал исследования 20-летней давности, принадлежавшие знаменитому химику Марселину Бертло (1827—1907). Дюэм был прав, а Бертло влиятелен, и в результате диссертацию отвергли. Через четыре года, в 1888 г., Дюэм защищает другую диссертацию, по теории магнетизма, в которой было довольно много математики, а первую он опубликовал в виде книги «Термодинамический потенциал» (1886 г.). Столкновения с Бертло продолжались еще много лет, и в частности в 1886—1887 гг., когда последний был министром просвещения. Возможно, именно это обстоятельство помешало Дюэму найти работу в Париже, и он на всю жизнь остался в провинции. Впрочем, незадолго до смерти он отказался от должности профессора истории науки в Коллеж де Франс, ссылаясь на то, что он физик и не хочет входить в Париж через черный ход. В 1913 г. он становится иногородним членом Института Франции. Смерть настигла его в 1916 г., во время пешего похода на каникулах, когда ему было всего 55 лет.

Дюэм успел сделать в науке поразительно много. Им были опубликованы около 400 статей и 22 книги в 45 томах. Его работы относятся к термодинамике, электромагнитной теории, гидродинамике, теории упругости, философии и истории науки. Среди его книг — «Эволюция механики» (1903 г.), «Физическая теория, ее предмет и структура» (1906 г.), трехтомник «Этюды о Леонардо да Винчи» (1906—1913 гг.), десятитомная «Система мира», первый том которой появился в 1913 г., а последний — в 1959 г., посмертно. К этому можно добавить, что Дюэм был превосходным живописцем и знатоком теории искусства. Что касается политики и религии, то Дюэм был крайне правым, антиреспубликанцем и католиком-клерикалом.

Беседы с Дюэмом в Бордо о проблемах теории упругости и распространения волн, о вариационных принципах механики помогли Адамару определить тематику того направления, которое уже в XX в. стало в его творчестве доминирующим. Адамар испытывал к Дюэму дружеские чувства, хотя их взгляды почти во всем диаметрально расходились.

Дело Дрейфуса. В середине 1900-х годов Франция оказалась разделенной на два враждующих лагеря в связи с делом Дрейфуса. Сейчас, через 90 лет, после двух мировых войн, до основания потрясших Францию, трудно себе представить, какие страсти кипели вокруг злосчастной судьбы этого нисколько не выдающегося человека. Президент республики, парламент, офицерский корпус, политические партии, министры, знаменитые ученые и писатели, пресса, финансовые круги — все на несколько лет были втянуты в схватку, носившую как политический, так и нравственный характер. По делу Дрейфуса существует огромная литература начиная с множества брошюр и кончая такими трудами, как семитомная «История процесса Дрейфуса» Ж. Рэнака. Много места уделено этому делу в художественной литературе (назовем хотя бы роман Мартэн дю Гара «Жак Баруа», переведенный на русский язык). Драматическим эпизодам дела Дрейфуса посвящены пьесы и кинофильмы.

Началось с того, что в сентябре 1894 г. французская разведка, имевшая агентов в германском посольстве в Париже, обнаружила письмо, содержащее опись секретных документов Генерального штаба французской армии, переданных автором записки немцам. Подозрение пало на офицера Генерального штаба Альфреда Дрейфуса. Хотя Дрейфус решительно отрицал свою вину, он немедленно был арестован, предан суду и через два месяца, несмотря на шаткость предъявленного ему обвинения, приговорен к пожизненной каторге. Роковую роль в осуждении Дрейфуса сыграли тогдашний военный министр Мерсье и несколько высокопоставленных чинов французской армии.

То обстоятельство, что Дрейфус был еврей, стало решающим для армейской верхушки, зараженной шовинизмом и антисемитизмом. Несмотря на отчаянные усилия родных и близких Дрейфуса, располагавших обширными связями, попытки вызволить его были тщетны. Надежда появилась в 1896 г., когда полковник Генерального штаба Пикар *) обнаружил документ,

---

*) Эта фамилия пишется по-французски Picquart в отличие от Picard — фамилии французского математика.

убедительно свидетельствующий о невиновности Дрейфуса. Пикар был человеком честным, и документ получил широкую огласку. Выяснилось, что на процессе Дрейфуса обвинение использовало фальшивые документы. Для многих стало очевидным, что Дрейфус был безвинно осужден. Однако и тогда попытки добиться пересмотра дела оказались безрезультатными. Руководство армии, состоящее из монархистов и клерикалов, считало пересмотр унижением своего достоинства и достоинства Франции.

В январе 1898 г. Эмиль Золя публикует в газете «Aurore» письмо «Я обвиняю», в котором, называя поименно генералов и офицеров, уличает их в подтасовке фактов и фальсификации документов с целью осуждения Дрейфуса. Всемирно известный писатель добивался, чтобы против него было возбуждено дело по обвинению в оскорблении армии. На состоявшемся вскоре процессе защитником Золя выступил выдающийся деятель французской социалистической партии Жан Жорес, который тоже становится борцом за освобождение Дрейфуса. С этого времени накал борьбы вокруг находящегося в заключении офицера достигает кульминации. Вся Франция оказалась разделенной на дрейфусаров — сторонников Дрейфуса и антидрейфусаров — его противников.

Адамар приходился дальним родственником Дрейфусу.*) Но, конечно, не по этой причине он стал непоколебимым дрейфусаром. «У моего отца всегда были две страсти — математика и справедливость», — говорила дочь Адамара Жаклин [II 82, с. 307]. Он верно разобрался в существе дела Дрейфуса, понял его подоплеку. В математических кругах позиция Адамара была хорошо известна. Однажды, явившись к Эрмиту с новогодним визитом, он услышал: «Адамар, Вы предатель». Молодой человек побледнел, но Эрмит добавил: «Вы оставили анализ ради геометрии». Разговор происходил в 1897 г. после выхода мемуара Адамара о геодезических линиях [I 31].

Первоначально в виновность Дрейфуса верил и один из друзей Адамара еще по Нормальной школе,

---

*) Дрейфус был женат на дочери двоюродного брата отца Адамара.

депутат парламента, математик Поль Пенлеве. Но через некоторое время он изменил свое мнение и в 1899 г., на процессе в Ренне, был одним из защитников Дрейфуса. Определенную роль в этом сыграл разговор Пенлеве с Адамаром весной 1897 г. Последний выразил уверенность в невиновности Дрейфуса и обосновал ее объективными аргументами. Он сказал, что отнюдь не семейные связи повлияли на его позицию и что априори поручиться за Дрейфуса он не мог бы, так как виделся с ним лишь однажды, в день его свадьбы. Однако ему ясно, что Дрейфус был осужден бездоказательно и в нарушение закона. Пенлеве кому-то передал эти слова и через некоторое время с негодованием узнал, что они в искаженном виде попали в секретное досье вместе с другими «обвинительными документами». Адамару приписывалось утверждение, что Дрейфус не внушает ему никакого доверия и что он верит в его виновность. Эта фальсификация убедила Пенлеве в том, что возможны и другие. . .

Те же силы, что и в 1894 г., снова добились осуждения Дрейфуса на процессе в Ренне, но указом президента республики он в том же году был помилован. Борьба за его честь продолжалась, начатое в 1903 г. новое расследование обнаружило множество фальшивок в деле, и в 1906 г. суд отменил решения обоих трибуналов. Президент наградил Дрейфуса орденом Почетного легиона.

Борьба дрейфусаров за оправдание невиновного была также борьбой за честь и достоинство человека, против националистических предрассудков. Осознание необходимости защиты личности привело к созданию во Франции новой общественной организации — Лиги прав человека, учредительное собрание которой состоялось в феврале 1898 г., во время процесса Золя. Адамар активно участвовал в работе лиги с самого момента ее основания.

Плодотворные девяностые годы. Творческий взлет, предшествовавший переезду Адамара в Бордо, явился началом длительного, поразительно интенсивного периода его деятельности. В 1894 г. появляются пять публикаций, в 1895 — восемь, в 1896 и 1897 гг. — по 13. . . Но дело не только в количестве: история математики знает великих ученых, оставивших очень мало работ. Удивительна легкость, с которой Адамар переключается с одной области на другую, создавая в каждой из них подлинные шедевры.

В 1896 г. выходит в свет работа [I 36], в которой дано решение знаменитой проблемы распределения простых чисел. «Именно этот результат в области, которую, следуя Вессио, можно назвать трансцендентной арифметикой, — пишет М. Фреше, — сделал имя Адамара хорошо известным математикам всех стран» [II 7, с. 4083].

Открытия в теории функций и теории чисел, принесшие славу Адамару в молодости, никогда не занимали его полностью. В 1896 г. появляются большая статья «О некоторых свойствах траекторий в динамике», удостоенная премии Бордена,*) одинаково богатая результатами в области механики и геометрии, а также «Мемуар об исключении», напечатанный в шведском журнале «Acta Mathematica». Последняя работа была посвящена проблеме исключения величин из переопределенной системы алгебраических уравнений с несколькими неизвестными. В один год появляются: статья «Теоремы о рядах целых функций», знаменитая работа «О геодезических линиях поверхностей отрицательной кривизны», заметка об интегральных инвариантах в оптике и ряд других исследований. Но это еще не все, в том же 1898 г. выходят «Лекции по элементарной геометрии». Адамар написал этот курс по инициативе Дарбу, первый том был посвящен геометрии плоскости, а второй, напечатанный в 1901 г., — геометрии пространства.

В последующие десятилетия изредка появляются публикации Адамара по проблемам, связанным с аналитическими функциями и теорией чисел. Но это лишь отголоски его прежних идей. Он еще не теряет интереса к этой тематике, о чем свидетельствует его большая статья «О трансцендентных теоремах теории чисел» для французской математической энциклопедии [I 159], написанная совместно с Мэйе. Но уже с начала века

---

*) Ш. Л. Борден — французский нотариус, передавший Институту Франции в 1835 г. ренту для учреждения премии. Согласно его завещанию, каждая из пяти Академий Франции, составляющих ее Институт, ежегодно формулирует темы конкурса. Эти темы должны служить общественному благу, прогрессу науки и искусства.

внимание Адамара почти исключительно привлечено к совсем другим теориям.

Интересно сравнить устремления Адамара и его младших современников — выдающихся аналитиков XX в. Э. Ландау и Г. Харди. Последние были далеки от геометрии и не интересовались прикладной математикой. Адамар же геометрией в разных ее проявлениях занимался всю жизнь. Сопоставляя творчество Фихте и Шеллинга, Гейне писал, что Шеллингу было тесно на голых скалах фихтевской логики. Нам думается, что Адамару было тесно на голых скалах аналитических изысканий, которым всю жизнь оставались верны Ландау и Харди, его тянуло к задачам естествознания. Путь к их решению шел через аналитическую механику, вариационное исчисление и уравнения в частных производных — дисциплины, в которых творчество Адамара также оставило яркий след.

В 1897 г. в Цюрихе состоялся первый Международный математический конгресс; Адамар для доклада выбрал тему «О некоторых возможных приложениях теории множеств». Начиная с 1900 г. такие конгрессы стали проводить каждые четыре года (за исключением двух, пришедшихся на годы войн), и Адамар был участником почти всех.

Его исследования получают высокую оценку: в 1898 г. комиссия в составе Ш. Эрмита, Ж. Бертрана, А. Пуанкаре и П. Саро присуждает ему премию Понселе *) за работы последних десяти лет. Он безусловно признан своими старшими коллегами. Пуанкаре в трактате «Новые методы небесной механики» ссылается на теоремы Адамара об аналитических функциях и геодезических линиях. Результаты Адамара становятся неотъемлемой частью университетских курсов, Пикар и Гурса включают их в свои трактаты по анализу.

На 1897 г. приходится возвращение Адамара из Бордо в Париж. Начиная с октября он читает лекции на кафедре дифференциального и интегрального исчисления факультета наук в Сорбонне, а в ноябре следует назначение его помощником Мориса Леви на кафедре

---

*) Ежегодная премия, присуждаемая за работы по чистой и прикладной математике. Фонд премии учрежден в 1867 г. согласно завещанию известного геометра Ж. Понселе.

аналитической и небесной механики в Коллеж де Франс.*)

Об уникальной атмосфере, царившей в этом учебном заведении, Адамар вспоминал в день своего 70-летия: «Следовать научной фантазии во всей ее свободе — традиция и честь Коллеж де Франс». [II 9, с. 55]. Не только содержание, но и темы курсов по существу определялись самим лектором. Требовалось лишь формальное утверждение названия на общем собрании преподавателей, где лишь немногие понимали, о чем идет речь. В одном из своих первых курсов Адамар рассказывал о распределении простых чисел, в том числе о своей недавней работе [I 36], а в 1898—1900 гг. читал лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики, послужившие основой для его монографии [I 92]. Многоплановость интересов позволяла ему браться и за аналитическую и небесную механику, и за анализ ранних мемуаров Пуанкаре (курсы 1922 г.).

Девятисотые годы. Начало века застает Адамара в расцвете сил. В 1901 г. в Париже появляется его небольшая книга «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение», которую впоследствии С. Мандельбройт назвал библией для всех, интересующихся этой проблематикой [II 17, с. 3]. В то же время Адамар обращается к уравнениям математической физики, которые надолго приковывают его внимание. Его доклад на Международном математическом конгрессе в Париже (1900 г.) «Об уравнениях в частных производных с вещественными характеристиками» явился предвестником цикла работ по динамическим задачам механики сплошных сред. В 1902 г. он совершает свою первую поездку за океан и читает в Принстоне лекции по теории упругости, методам математической физики, геометрической оптике. В следующем году выходит одна из самых значительных книг — «Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики». Развитию той же темы был посвящен доклад Адамара «О фундаментальных решениях линейных уравнений в частных производных» в 1904 г. на Международном математическом конгрессе в Гейдельберге.

*) Одно из старейших высших учебных заведений Парижа, основанное в 1530 г. королем Франциском I. Вступительные экзамены в Коллеж де Франс не проводятся: как правило, поступающие уже имеют высшее образование.

В 1903 и в 1908 гг. Адамар получает премии Пти д'Ормуа и Эстрад Делькро за работы предшествующих лет, а в 1907 г. он становится одним из лауреатов премии Вайяна за большой мемуар «О задаче анализа, связанной с изгибом закрепленной пластины», в котором исследуются функции Грина, играющие важную роль при решении краевых задач механики и теории электромагнитного поля. Здесь, как и в ряде других работ Адамара, прослеживаются идейные связи с исчислением функций от линий и поверхностей, развитым итальянским математиком Вито Вольтеррой.

Адамара связывали с Вольтеррой теплые личные отношения. Они были близки по политическим взглядам, по складу научного мышления и характеру творчества. Адамар не раз гостил у Вольтерры в его доме на Виа дель Лучиана в Риме. Как и Адамар, Вольтерра, сумевший в ранней молодости обогатить математику решением ряда вопросов принципиального характера, всю жизнь черпал темы исследований из проблем естествознания. Вольтерра явился основоположником ряда новых направлений анализа, для которых сумел найти важные приложения. Адамар не только подчеркивал свои горячие симпатии к итальянскому коллеге, но и был продолжателем его теорий там, где непосредственно соприкасались пути обоих ученых. Это относится к уравнениям математической физики, особенно к теории волн и к вольтерровской теории функций линий; с последней, собственно, и началось развитие функционального анализа.

Еще до выхода книг Вольтерры на эту тему Адамар изложил основы теории функций линии в книге «Лекции по вариационному исчислению», вышедшей в 1910 г., включив в нее ряд своих результатов. Это фундаментальное сочинение было написано на основе курса, прочитанного им в Коллеж де Франс. Редактировал книгу его друг и ученик М. Фреше, который впоследствии говорил, что высказанное в «пророческой статье» Адамара предложение провести наиболее общее исследование числовых функций переменной произвольной природы, основанное на новой геометрии, побудило его к созданию теории абстрактных пространств [II 7, с. 4084]. В развитие идей функционального анализа, заложенных Вольтеррой и Адамаром, включились непосредственные ученики Адамара — Ф. Гато, погибший на фронте в сентябре 1914 г., и П. Леви (1886—1971), известный также своими исследованиями в области теории вероятностей, теории групп, геометрии, теории дифференциальных уравнений.

Было бы удивительно, если бы при своей поразительной активности Адамар остался в стороне от развернувшихся около 1900 г. споров о проблеме оснований математики. «Официальное признание теории множеств, — пишет Н. Бурбаки, — произошло уже на первом Международном конгрессе математиков (Цюрих, 1897), на котором Адамар и Гурвиц привели многочисленные случаи применения ее в анализе» [III 12, с. 44]. К этому времени был установлен параллелизм логических и теоретико-множественных операций и обнаружены антиномии (парадоксы) теории множеств.

Единодушия по этим вопросам не было и в среде французских математиков. В книге «О науке» Пуанкаре живо описывает спор между ним и Адамаром об антиномии в теории канторовских трансфинитных чисел, построенной в мемуаре итальянского математика Ч. Бурали-Форти: «Однажды меня посетил Адамар. Разговор коснулся этой антиномии. „Не кажется ли вам, — сказал я, — что рассуждение Бурали-Форти безупречно?" — „Нет, напротив, я не вижу в нем никаких возражений Кантору. Кроме того, Бурали-Форти не имел права говорить о совокупности всех порядковых чисел". Продолжение разговора требует специальных знаний, и мы его опустим. Но вот заключение: „Мои старания были тщетны, убедить Адамара я не мог (противоположное было бы, впрочем, очень прискорбно, так как он был прав)"» [III 53, с. 378].

Весьма характерна позиция Адамара в происходившей в 1905 г. эпистолярной дискуссии между ним, Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом [I 105]. Поводом послужила аксиома выбора (аксиома Цермело), согласно которой из любой системы множеств можно образовать множество M, состоящее из элементов, взятых по одному из множеств системы. Хотя данная аксиома используется в доказательствах разнообразных теорем, она уязвима для критики, так как не всегда можно указать, по какому правилу выбирается множество M. «Единственным стойким защитником Цермело был Адамар. Он утверждал, что аксиома выбора приемлема по тем же причинам, которые он приводил, отстаивая теорию множеств Кантора. По мнению Адамара, для того чтобы утверждать существование объектов, отнюдь не требуется их описывать. Если одного утверждения о том, что объект существует, достаточно для прогресса математики, то это утверждение приемлемо» [III 29, с. 2451].*⁾

Предвоенные годы. В 1909 г. Адамар назначается преемником Мориса Леви в Коллеж де Франс. Через три года он становится профессором Коллеж де Франс и покидает Сорбонну. 5 января 1912 г. он занимает место 75-летнего К. Жордана на кафедре анализа Политехнической школы. Незадолго до этого он дважды участвовал в приеме вступительных экзаменов в эту школу. Крупнейшие математики Франции — Пуанкаре, Пикар, Гурса и др., единодушно отмечая научные и педагогические заслуги Адамара, рекомендовали его на место Жордана. В отзыве Пуанкаре было сказано, что он рекомендует Адамара «как ученого, создавшего первоклассные работы по многочисленным разделам математики, в частности по теории упругих волн» [II 9, с. 19].

В октябре 1911 г. Адамар читает четыре лекции в Колумбийском университете в Нью-Йорке, в которых касается различных вопросов теории дифференциальных уравнений. В следующем году он выступает на Международном математическом конгрессе в Кембридже с сообщением «О ряде Стирлинга». Никто из участников не подозревал, что шестого конгресса им придется ждать восемь лет. . .

В июле 1912 г. французская и мировая наука понесла огромную потерю: в возрасте 58 лет неожиданно умер Анри Пуанкаре. Многочисленные высказывания Адамара о Пуанкаре преисполнены восхищения, преклонения перед его гением. Без промедления он спешит выразить это в своих публикациях. Еще до конца 1912 г. в журналах «Revue de métaphysique et moral» и «Revue de mois» появляются написанные им обзоры работ Пуанкаре, а в международном математическом журнале «Acta mathematica» тогда же выходит

---

*⁾ История споров об аксиоме Цермело и парадоксах теории множеств подробно изложена в книгах Ф. А. Медведева «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв.» (М.: Наука, 1976) и «Ранняя история аксиомы выбора» (М.: Наука, 1982).

его большая статья «Математическое творчество Анри Пуанкаре». Через два года в Париже издается сборник «Анри Пуанкаре. Научные работы. Философские работы», составленный из статей В. Вольтерры, Ж. Адамара, П. Ланжевена и П. Бутру.

Мы уже упоминали об учебнике Адамара по элементарной геометрии [I 60, I 72]. Он был лишь одним из проявлений его постоянного интереса к проблеме улучшения преподавания математики. С 1914 г. Адамар — активный участник, а позднее и руководитель французской группы Международной комиссии по математическому образованию, которая была создана в 1908 г. на Международном математическом конгрессе в Риме. В работе комиссии принимали участие представители 18 стран, а первым председателем стал Ф. Клейн. Адамар был одним из организаторов Международной конференции по математическому образованию, состоявшейся 1—4 апреля 1914 г. в Париже, и выступил на ней с докладом [I 167]. Участвуя в дискуссии, он предостерегал от формализма в обучении, рекомендовал обращаться при объяснении нового материала к здравому смыслу. Он говорил также об «обучении механике в средней школе . . . в ее связи с математикой, с одной стороны, и с физикой — с другой» [III 89, с. 176], о своей практике экзаменатора, обсуждал соотношение интуиции и строгого доказательства, высказывался по методическим вопросам (как изучать ряды Тейлора и др.) [III 89, с. 301]. Вслед за конференцией, 6—8 апреля 1914 г., в Париже проходил Конгресс по математической философии, и здесь Адамар выступает с тремя сообщениями на очень непохожие темы: «Внутренние свойства пространства», «Исчисление функционалов, анализ и синтез», «О математических принципах и математическом рассуждении».

На рубеже веков Адамар — ученый с мировым именем. Он становится почетным доктором Геттингенского университета (1899 г.), Йельского университета в Нью-Хейвене, США (1901 г.), почетным членом Харьковского математического общества (1903 г.). В 1912 г., в день своего рождения, Адамар был избран членом Академии наук Франции *) на место Пуанкаре. За 12 лет

*) Академия наук — отделение Института Франции, основанного в 1796 г. и включающего кроме нее еще четыре академии

до этого, в 1900 г., он отказался баллотироваться, не желая конкурировать с Пенлеве. «Но после смерти Эрмита (январь 1901 г.), — пишет П. Леви, — он, не колеблясь, выставил свою кандидатуру и подготовил обзор своих исследований. Ему было 35 лет, и можно было только восхищаться важностью и разнообразием работ, которые он опубликовал за десять лет. Несмотря на это, он был представлен секцией геометрии лишь третьим, после Жоржа Юмбера и Эдуарда Гурса, наравне с Эмилем Борелем. Избран был Юмбер; но в 1912 г. Адамар был предпочтен Гурса и Борелю» [II 12, с. 3].

Семейная жизнь Адамара также складывалась счастливо. Радовали дети — сыновья Пьер, Этьен, Матье, дочери Сесиль и Жаклин. Через много лет Адамар говорил, что красоту жизни он познал с 1892 по 1916 г., «после чего никакая радость не была для него поистине чистой» [II 9, с. 51]. Нижняя граница — это год его женитьбы, а установить верхнюю его заставила первая мировая война.

Между мировыми войнами

Война. Гибель сыновей. 28 июля 1914 г. Австро-Венгрия объявила войну Сербии, и в течение одной недели в трагический водоворот событий были втянуты Германия, Россия, Франция, Великобритания и Бельгия. По масштабам — количеству вовлеченных людей, протяженности фронтов, оснащенности техникой — и по последствиям ни одна из предыдущих войн, которые знало человечество, не шла ни в какое сравнение с разразившейся первой мировой войной. Это была война за передел уже разделенного мира, и ее пожар вышел далеко за границы Европы. На стороне Антанты — Анг-

---

с общим уставом: Французскую академию (ее цель — сохранение правильности и чистоты французского языка), Академию надписей и изящной словесности (история, археология и языкознание), Академию изящных искусств (живопись, скульптура, архитектура, музыка), Академию моральных и политических наук (философия, политэкономия, правоведение и т. п.). Академия наук разделена на 11 секций: геометрия, механика, физика, астрономия, география и навигация, химия, минералогия, ботаника, агрономия, анатомия и зоология, медицина и хирургия.

лия, Франция, Россия, к ним впоследствии присоединилась Италия, а в 1917 г. и США, — воевало 34 государства. Им противостояли четыре страны — Германия, Австро-Венгрия, Турция и Болгария.

К началу 1916 г. ключевую роль в планах немецкого командования на западном фронте играла крепость Верден, захват которой открывал немцам путь на Париж. Французские войска упорно оборонялись. Бои, развернувшиеся здесь в феврале, отличались таким кровопролитием, что и сейчас, после второй мировой войны, превзошедшей своими ужасами первую, поля вокруг Вердена с бесконечными лесами крестов воспринимаются как страшнейшие символы массовых человеческих трагедий.

«Юноши, наша надежда, наша гордость, были на фронте; сколько лучших не вернулось, увы, мой дорогой друг», — воскликнул Лебег в день, когда отмечалось 70-летие Адамара [II 9, с. 12]. К ноябрю 1916 г. погибло 1100 тыс. французских солдат. Среди павших в 1916 г. были и сыновья Адамара Пьер и Этьен. Они были убиты с интервалом в полтора месяца. До войны оба сына решили пойти по стопам отца. В 1914 г. Пьер успел закончить Политехническую школу, а Этьен собирался поступить в Центральную школу искусств и ремесел.*) Особенно большие надежды подавал Этьен. П. Леви приводит горестные слова Адамара: «Все, что я сделал в математике, не идет ни в какое сравнение с тем, что мог бы сделать он, если бы остался жив» [II 12, с. 3]. Похожую фразу Адамара приводит Ж. Николетис, военный инженер, слушавший в молодости лекции Адамара. Николетис воевал в одном полку с Пьером и был ему обязан жизнью. «Он втащил меня, полумертвого, в окоп под Артуа», — вспоминает он [II 21, с. 10]. Адамары были привязаны к Николетису: его присутствие молчаливо напоминало о близких, ушедших навсегда.

Послевоенный период. Огромное горе, увы, не последнее, выпавшее на его долю, не сломило Адамара. После войны его деятельность возобновляется с прежней интенсивностью. Снова ежегодно следуют серии публикаций. В 1920 г. он сменил П. Аппеля на ка-

---

*) Высшее учебное заведение, основанное в 1829 г. Готовит специалистов для промышленности.

федре математического анализа в Центральной школе. В том же году Адамар председательствовал на Международном математическом конгрессе в Страсбурге. «Почетное место на конгрессе, — писал Н. Винер, — занимал профессор Жак Адамар из Парижа. Ему было всего пятьдесят пять лет, но он начал играть видную роль в науке еще до начала нового века, и мы, желторотые птенцы, считали его исторической фигурой. Адамар был кумиром своих младших коллег; небольшого роста, с бородкой, он обладал специфической внешностью, в том стиле, который французы обозначают словом fin *)» [III 13, с. 62].

Показательны дальнейшие воспоминания Винера: «Я сам многим обязан адамаровской широте взглядов. У него не было никаких оснований обратить особое внимание на юного варвара из Нового Света, делавшего первые самостоятельные шаги. Никаких оснований, кроме доброжелательности и стремления открыть еще один талант, возникавшего у него каждый раз, когда он замечал хотя бы самые скромные способности.

Много лет спустя, встречаясь с Адамаром на различных математических конференциях, я бывал приятно поражен тем, что он помнит о нашей страсбургской встрече и внимательно следит за моими работами. Так случилось, что я пополнил собой многочисленный отряд математиков, питающих к Адамару чувство глубокой признательности и обязанных ему благополучием своей научной карьеры» [III 13, с. 53].

На конгрессе в Страсбурге Адамар выступил с сообщениями «Об элементарном решении уравнений в частных производных и свойствах геодезических линий» и «О смешанной задаче для линейных уравнений в частных производных». В первом из них речь шла об использовании римановой метрики в теории волновых уравнений с переменными коэффициентами.

Риманова геометрия была положена в основу эйнштейновской теории гравитации — общей теории относительности. Проведенные английским физиком и астрономом А. Эддингтоном с сотрудниками опыты по наблюдению красного смещения солнечного спектра, так же как и данные об аномалии перигелия Меркурия, находились в хорошем соответствии с прогнозами

---

*) Утонченный, изысканный (фр.).

Эйнштейна. Это обстоятельство рассматривалось как триумф знаменитого физика. В 1921 г. Эйнштейн выступил в Париже с несколькими докладами. О его пребывании в столице Франции Адамар рассказал в публикации «Эйнштейн в Париже» [I 191].

Бывая в Париже, Эйнштейн играл на скрипке в доме Адамаров, где вообще часто музицировали, и, по словам П. Леви, оба ученых больше говорили о музыке, чем о теории относительности [II 12, с. 23]. Адамар организовал любительский оркестр, в котором он был первой скрипкой, остальные партии исполняли: фортепьяно — Луиза, вторая скрипка — их дочь Жаклин, флейта — писатель Ж. Дюамель.*) Позднее вместе с А. Вилла **) Адамар участвовал в струнном квартете.

Поль Ланжевен и другой прославленный физик, Жан Перрен, были друзьями Адамара, который был близок со многими выдающимися представителями французской интеллигенции своего поколения. Так, еще с юношеских лет его связывала дружба с замечательным филологом Жозефом Бедье, всемирную известность которому принесло его переложение средневекового романа «Тристан и Изольда».

В 1922 г. в США выходит, быть может, самая известная монография Адамара «Лекции по задаче Коши для линейных уравнений в частных производных». В ее основу был положен материал курса лекций, прочитанных им в Йельском университете. К материалу этой книги примыкает относящийся также к 20-м годам цикл работ Адамара о свойстве волновых процессов — так называемом принципе Гюйгенса. В тот же период Адамар посвятил несколько работ совсем другой области — теории вероятностей, точнее, тому ее разделу, который принято называть теорией цепей Маркова. Интересно, что сам термин «марковские цепи» был предложен Адамаром (см.: [III 18, с. 10]).

Семинар и педагогическая деятельность. В жизнеописании Адамара особого внимания заслуживает его

*) Жорж Дюамель (1884—1966) — французский писатель и поэт, член Французской Академии с 1935 г., автор книги «Путешествие в Москву», написанной после поездки в СССР в 1927 г.

**) Анри Рене Пьер Вилла (1879—1972) — французский математик и механик, член Академии наук Франции, ее президент с 1948 г. Основные направления работы: теория конформных отображений и дифференциальные уравнения, аэродинамика, теория упругости, гидродинамика.

Жак Адамар.

любимое детище — семинар в Коллеж де Франс. Если в первые годы работы там Адамар по традиции ограничивался чтением лекций, то в 1913 г. он дополнительно начал практиковать доклады своих слушателей с анализом математических мемуаров. Эти заседания были прерваны войной, но с ее окончанием возобновились и в дальнейшем проводились регулярно, дважды в неделю. Их участниками стали не только начинающие, но и многие активно работающие ученые.

Конечно, сама идея семинара уже в то время была не новой. Еще в 1899 г. молодой Адамар увлеченно работал в физическом семинаре М. Бриллюэна. За границей существовали и более или менее специализированные математические семинары. Однако семинар Адамара стал явлением уникальным не только для математиков Франции, но и для всего математического сообщества. «Благодаря своей эрудиции и способности овладеть любой областью Адамар распространил работу семинара на все части математики», — писал М. Фреше [II 7, с. 4085].

Вот что рассказывает П. Леви о работе семинара: «В начале года Адамар составлял список книг и статей, которые считал желательным проанализировать, и эта программа охватывала все, что, по его же выражению, его забавляло: от геометрии до теории функций и от конкретных вопросов, касающихся дифференциальных уравнений в частных производных, до наиболее абстрактных проблем функционального анализа. Короче, его интересовали почти все области математики. Перед началом работы семинара он встречался с коллегами, и они распределяли обязанности. Иногда во время заседаний семинара я не мог уследить за слишком увлекающимся докладчиком, и меня восхищало, что Адамару ничто не казалось трудным. Всегда внимательный, он часто вмешивался, чтобы уточнить пункт, плохо разъясненный докладчиком, и если случайно какое-либо обстоятельство ускользало от него, то ложная гордость не препятствовала ему сказать об этом и потребовать дополнительных объяснений» [II 12, с. 4].

Семинар Адамара просуществовал более 20 лет. На нем выступали: математики Э. Борель, П. Монтель, Л. Лебег, П. Леви, М. Фреше, А. Данжуа, Ж. Валирон, Э. Картан, В. Вольтерра, Т. Леви-Чивита, Г. Харди, Э. Ландау, Дж. Биркгоф, С. Н. Бернштейн, Н. Н. Лузин, Д. Пойя, Р. Неванлинна, Л. Альфорс, физики М. Борн, Л. де Бройль и многие другие французские и зарубежные ученые. Основным языком семинара был французский, но случалось, что звучали и другие языки, например испанский или английский. В таких случаях Адамар часто брал на себя функции переводчика. Как отмечали А. Лебег, П. Леви, С. Мандельбройт и др., несмотря на то что в семинаре участвовало много сильных математиков, только Адамару с его фантастической эрудицией и поразительной гибкостью ума удавалось быть в курсе абсолютно всего, о чем шла речь. Своим успехом семинар был обязан не только исключительному математическому таланту Адамара, но и его общительности, гуманитарной культуре и чувству юмора. Все это привлекало к нему сердца талантливой молодежи.

В это время достигает наибольшего размаха педагогическая деятельность Адамара. Если в Центральной школе он читал сравнительно элементарный курс, то в Политехнической — значительно более сложный. Однако, по словам М. Леви (см.: [II 12, с. 4]), «трудные места были выделены и разъяснялись так, что это вызывало восхищение слушателей».

Н. Винер писал: «Французские математики строго соблюдали табель о рангах: после того как профессор удалился в свой кабинет и расписался в журнале, где регистрируются лекции, студенты и младшие товарищи по работе для него больше не существуют. Адамар — редкое исключение из этого правила. Он живо интересуется студентами, считает своим долгом заботиться об их будущем, и любой из них всегда может к нему обратиться. Если нынешнее поколение французских математиков начинает ломать традиционный барьер, разделяющий маститых и начинающих ученых, то это, безусловно, личная заслуга Адамара» [III 13, с. 62].

В 20-е годы Адамар дополняет и переиздает оба тома своей «Элементарной геометрии» (были и последующие многочисленные издания с различными дополнениями). Выходят два тома его «Курса анализа Политехнической школы». При составлении этого курса Адамар не ставил себе целью создать новый трактат, подобный тем, какие были написаны его учителями Жорданом, Пикаром и Гурса, в которых многие главы носили характер монографий. Курс Адамара имел сугубо учебную направленность и был рассчитан на будущих физиков, астрономов и инженеров. Текст содержит элементы теории функций комплексной переменной, математической физики, вариационного исчисления и теории вероятностей.

Все более интернациональными становятся научные связи Адамара. Так, в 1923 г. он печатается в Барселоне и Токио, в 1924 г. — в Неаполе и Рио-де-Жанейро, в 1925 г. — снова в Испании, в 1926 г. — в Казани, в 1929 г. — в Праге, в 1930 г. — в Харькове. Этот список можно продолжить. На Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 г. Адамар сделал два доклада: «Развитие и научная роль функционального анализа» и «О тасовке карт и ее связях со статистической механикой». Он возглавляет французскую делегацию на Международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 г. Тема его выступления — «Об уравнениях в частных производных высшего порядка». Во время конгресса в Осло (1936 г.) Адамара избирают президентом Международной комиссии по математическому образованию. Но сам он в это время находился в Китае.

Путешествия. Интересы вне математики. Адамар был неутомимым путешественником. Он любил длительные пешие прогулки, плавание, походы в горы. В возрасте за 60 лет он совершил восхождение на Монблан, собирал ботанические коллекции в горах Мексики, удивляя попутчиков выносливостью и смелостью. Французские и Швейцарские Альпы не имели от него секретов, и никакой подъем его не пугал. П. Монтель, который однажды шел с ним и Ф. Трикоми из долины Роны к леднику Алетша, вспоминает, что Адамар «отказался делать обычные часовые привалы, сказав, что не будет отдыхать, пока не дойдет до цели» [II 20, с. 19, 20]. «Все было великолепно, — пишет Ф. Трикоми, — но вечером возвращение несколько затянулось, поскольку Адамар через каждые десять шагов останавливался, чтобы оглянуться и еще раз полюбоваться на вершину Юнгфрау, позолоченую последними лучами заходящего солнца» [II 24, с. 22].

Воспроизведем рассказ Монтеля о путешествии Адамара в Южную Америку в 1924 г. «Приглашенный в Аргентину для лекционного турне, он высадился в Бразилии, чтобы увидеть орхидеи в полном цвету, углубился в тропический лес, попытался ударом камня убить гремучую змею, чтобы снять с нее кожу, и, отказавшись от морского путешествия, отправился в Буэнос-Айрес верхом в сопровождении жены, для которой такой способ передвижения был новым» [II 20, с. 19]. Несомненно, физическая активность помогала ему поддерживать исключительную работоспособность.

За свою долгую жизнь Адамар побывал во многих странах. Он читал лекции в США, СССР, Италии, Швейцарии, Испании, Португалии, Германии, Англии, Бельгии, Чехословакии, Румынии, Канаде, Египте, Палестине, Китае, Индии, Бразилии, Аргентине. . .

Эти поездки были привлекательны для Адамара еще в одном отношении. Дело в том, что его страстью с молодости была ботаника. «В последние годы прошлого века, — вспоминал П. Леви, — Адамар, ученик моего отца, бывал иногда у нас дома, и однажды за столом я увидел, как он вытащил маленькую лупу из своего жилетного кармана и пояснил: „Я всегда ношу ее с собой, чтобы рассматривать незнакомые растения“. Тогда я подумал: „Этот господин — ботаник“, — а позднее узнал, что он математик, и, возможно, величайший в своем поколении» [II 11, с. 7]. Адамар особенно интересовался грибами и папоротниками. Его коллекции расширялись от путешествия к путешествию, а собрание папоротников считалось третьим во Франции [II 6, с. 83]. «Даже ботаники обращались к нему за консультациями по поводу папоротников и грибов», — отмечал М. Фреше [II 7, с. 4082]. Любопытны дальнейшие воспоминания Фреше: «Совсем недавно один известный химик признавался мне, что был поражен познаниями Адамара в химии. Кроме того, Адамар обладал необыкновенной памятью. Когда он готовил свой курс анализа, редактор книги рассказал мне, что Адамар, вернувшись в библиотеку, где правил корректуру, произнес: „Я только что осознал на улице, что забыл исправить ошибку в третьей строке на странице 169“» [там же].

Для французской интеллигенции всегда был характерен интерес к политике, в разное время многие французские ученые становились министрами. Среди математиков министерские посты занимали Монж, Лаплас, Борель, а Пенлеве был даже премьер-министром. Адамар никогда не занимал никаких государственных должностей, но он, без преувеличения, всегда был проникнут озабоченностью политическими событиями, которые происходили в течение его долгой жизни и главные из которых столь трагически сказались на судьбе его семьи.

Публицистика Адамара могла бы составить интересный том. В 20-х годах он печатается в «Cahiers des droits de l'homme». В одной из статей он дает определение агрессора, и эта формулировка почти без изменений прозвучала в 1932 г. от имени французского правительства в речи тогдашнего премьер-министра Э. Эррио на Женевской конференции по разоружению (см.: [II 22, с. 312]). В журнале «Oeuvre (Творчество)» появляются его статьи «Культура, которую не следует разрушать», «Физика и общая культура», в юридических изданиях — статьи на моральные и правовые темы: «Смертная казнь и уголовный кодекс», «Об ответственности за войну», «Ответ на анкету о ревизии договоров». . .

На протяжении всей жизни Адамар активно интересовался историей математики. Кроме упомянутых выше работ с анализом творчества А. Пуанкаре его перу принадлежат статьи о жизни и исследованиях М. Леви, П. Пенлеве, П. Дюэма, Э. Пикара, Дж. Биркгофа, заметка «О некоторых вопросах истории науки: Рождение исчисления бесконечно малых» [I 330], в которой он предостерегает от произвольной интерпретации фактов истории математики, доклад на праздновании 200-летия со дня рождения Лапласа [I 322].

Опыт собственного творчества побуждает Адамара к психологическим исследованиям. В 1924 г. он выступил на Международном философском конгрессе в Неаполе с докладом «Как я не открыл теорию относительности», в котором он пытался пояснить, почему исследователь часто проходит мимо фактов, находящихся буквально рядом. Он сообщил, что еще на заре занятий теорией волн пришел к преобразованиям уравнения светового конуса в себя, но счел их не имеющими физического смысла (Адамар имел в виду преобразования Лоренца, глубоко исследованные Пуанкаре и сыгравшие решающую роль в построении Эйнштейном специальной теории относительности). Через 20 лет, в книге о психологии математического творчества, Адамар вновь упомянул об этой и других своих упущенных возможностях. Уникальна сама постановка вопроса: ведь в науке принято оповещать о достижениях автора. Признания в неудачах чрезвычайно редко можно обнаружить в математической литературе как до, так и после упомянутой книги Адамара.

Семидесятилетие. Среди работ Адамара мы видим большой том, в издании которого он не принимал участия. Это — «Избранное» [I 288]. Книга, содержащая ряд статей и заметок Адамара, а также библиографию его 280 работ, была подготовлена его коллегами и учениками и приурочена к 70-летнему юбилею ученого.

По достижении этого возраста во Франции и других европейских странах принято выходить в отставку.

Чествование Адамара состоялось 7 января 1936 г. в актовом зале Коллеж де Франс. Выступали друзья, коллеги, официальные лица. Среди них А. Лебег, М. Фреше, Э. Пикар. В конце церемонии министр национального образования М. Рустан сообщил о присвоении Адамару звания командора ордена Почетного легиона.*) Заканчивая ответное слово, юбиляр процитировал известного микробиолога Э. Дюкло, директора Пастеровского института. Когда на одном диспуте ему была брошена презрительная реплика: «Через 20 лет Ваш трактат по микробиологии может стать всего лишь старой бумагой», — Дюкло ответил: «Я не только знаю, но и надеюсь на это». Да, самое большое желание истинного ученого — чтобы его работы были продолжены и превзойдены.

Отчет о юбилейной церемонии был опубликован в 1937 г. [II 9]. В книгу включены также многочисленные поздравления, подписанные известнейшими математиками и физиками мира. Примечательно, что из Германии 1936 года приветствий не было.

Поездка в Китай. Через несколько дней после юбилея супруги Адамар отбыли из Марселя на корабле, направлявшемся к берегам Китая. Путь предстоял долгий, но им уже приходилось совершать дальние морские путешествия. Инициатива приглашения в Китай для чтения лекций исходила от университета Циньхуа в Пекине и Китайской Академии наук. Адамары прибыли в Пекин в то время, когда университет, основанный в 1911 г., «переживал период реорганизации: из обычного учреждения, занимавшегося подготовкой вспомогательных научных сил для Соединенных Штатов. . . он превращался в самостоятельное учебное заведение» [III 13, с. 176]. Преподавание велось как на китайском, так и на английском языке, с последним у Адамара не было затруднений.

---

*) Французский орден, учрежденный Наполеоном в 1802 г. и присуждаемый за исключительные военные или гражданские заслуги, имеет пять степеней. Командор — третья степень, первые две (кавалер и офицер) были присуждены Адамару 6 декабря 1910 г. и 1 октября 1923 г. Уже после второй мировой войны, 7 февраля 1948 г., он получил Большой офицерский крест и к 90-летию — высшую награду, Большой крест Почетного легиона.

Воспоминаний о своем пребывании в Китае Адамар не оставил, но мы процитируем Н. Винера, читавшего лекции в университете Циньхуа в то же время. Вот что он пишет о Пекине (до 1949 г. называвшемся Бейпином): «Бейпин — город волшебного очарования и ужасающего убожества. Мы с интересом бродили по плохо замощенным улочкам; казалось, что они ведут от одной трущобы к другой, но иногда перед нами вдруг распахивались ярко-красные ворота в виде полумесяца, и глазам представало редкостное зрелище: дворик и сад, окруженные павильонами безупречного вкуса и изумительной красоты» [III 13, с. 187].

Чета Адамар сначала устроилась в университетском поселке, но потом переехала в город и обосновалась в дипломатическом квартале, где было комфортабельнее. «Встреча с ним, — рассказывает Винер, — доставила мне большое удовольствие. У него был неистощимый запас рассказов о добрых старых временах французской математики, а у его жены — столь же неистощимый запас анекдотов из жизни знаменитых французских ученых (ребенком она знала Пастера!)» [III 13, с. 190]. Адамар рассказал Винеру и «забавный случай из времен своей юности», о котором мы уже упоминали, когда он пришел к Эрмиту в дни процесса Дрейфуса. Впрочем, у Винера история передана не совсем точно. Дрейфуса он произвел в полковники, а Адамара, защитившего диссертацию за два года до обвинения Дрейфуса, называет юношей, готовившимся к экзаменам перед защитой.

Винер вспоминает, что он часто ходил в город с женой или со своим китайским коллегой Ли навещать Адамаров. «Во время этих прогулок мы нарочно проходили по запутанным грязным улочкам так называемого китайского города, чтобы порыться в антикварных лавках. Нам нередко попадались древние портреты с изображением преисполненных чувства собственного достоинства мужчин и женщин, сидевших в застывших позах с руками, сложенными на коленях. . . При всей помпезной напряженности поз лица на этих портретах обычно отличались замечательной утонченностью, глубоким психологизмом и выразительностью. Однажды мы нашли древний портрет, настолько напоминающий профессора Адамара с его редкой, висящей отдельными прядями бородкой, крючковатым носом и нервными точеными чертами лица, что он мог бы служить ему удостоверением личности; по этому портрету Адамара узнали бы среди множества людей. Правда, глаза были чуть-чуть раскосые и цвет лица немного желтоватый, но это не нарушало общего впечатления. Мы купили портрет и подарили его тому, кто был на нем столь удачно изображен. Адамар вполне оценил наш подарок, но боюсь, что его жена отнеслась к нему без энтузиазма» [III 13, с. 190—191].

Четыре месяца провели супруги Адамар в Китае и летом 1936 г. решили вернуться домой. Они воспользовались возможностью проехать с востока на запад по транссибирской магистрали. Более полувека назад путешествие из Владивостока в Москву по железной дороге занимало гораздо больше времени, чем в наши дни, главным образом из-за того, что поезда подолгу стояли на промежуточных станциях и разъездах. Адамар часто пользовался этим для пополнения своих ботанических коллекций, чем немало волновал жену, боявшуюся, как бы он не отстал от поезда.

Лекции Адамара в Китае послужили основой для его последней книги по уравнениям в частных производных. Она вышла в свет в 1964 г. в Пекине после смерти автора.

После семидесяти

Вторая мировая война. Обстановка в Европе накалялась. Глубокую тревогу вызывали зловещие шаги фашистской Германии: тотальная милитаризация страны, оккупация демилитаризованной зоны Эльзаса—Лотарингии, фашистский путч в Австрии и последующий ее аншлюс. Все более агрессивным становился режим Муссолини в Италии, захватившей Албанию и ряд африканских территорий. Фалангисты Франко развязали гражданскую войну в Испании. Во Франции тоже находились силы, поддерживавшие расистские настроения и выражавшие симпатии диктаторам. В противовес им в 1935 г. был создан Народный фронт. Он пользовался столь мощной поддержкой народа, что в следующем году победил на парламентских выборах. Лига прав человека, в которой автивно работали Адамар, Ланжевен, де Бройль, некоторые видные врачи и юристы, вошла в Народный фронт.

Адамар с отвращением относился к фашизму. Итальянский математик Ф. Трикоми вспоминал о его частых приездах в Италию «вплоть до тех лет, когда долгая политическая болезнь не покрыла лицо страны маской, выражение которой было не то трагическим, не то комическим — во всяком случае не было ее истинным обликом» [II 24, с. 21]. Крайне тяжелое впечатление произвел на Адамара позорный мюнхенский сговор Чемберлена и Даладье с Гитлером и Муссолини 29 сентября 1938 г., предававший Чехословакию — надежного союзника Франции. Сюзанна и Альфред Росса-Миньо, авторы статьи об Адамаре, приводят следующий текст письма, переданного им чешским ученым В. Коринеком, профессором Карлова университета в Праге [II 22, с. 356].

Дорогие друзья! В эти скорбные дни необходимо сказать, как Вы нам близки. По крайней мере не скорбите; вы можете гордиться тем, что не уронили своей чести. Позиция вашего президента, достоинство, которым он ни на минуту не поступился, вызвали всеобщее восхищение и войдут в историю. Нужно надеяться, что справедливость восторжествует. Через головы случайных правительств, предавших Вас, предавших нас, мы протягиваем вам руку. Ж. Адамар, Л. Адамар.

На конверте дата 7 октября 1938 г., а 15 марта 1939 г. Гитлер полностью захватил Чехословакию.

1 сентября 1939 г. армия Польши вступила в неравную борьбу с фашистской Германией. Через два дня французское правительство заявило, что считает себя обязанным выполнить союзнические обязательства перед Польшей. Сначала вступление Франции в войну было формальным, военных действий не было, и жизнь страны почти не изменилась. Адамары с внуками провели время «странной войны» (термин, введенный в обиход журналистом, услышавшим разговор солдат на фронте) в Рамбуйе близ Парижа. Тучи военной катастрофы все сгущались. Не прошло и двух недель после разгрома французских и английских войск в Дюнкерке, как в Париж 14 июня 1940 г. парадным маршем вошли немецкие войска. Поток беженцев устремился на юг страны. Так чета Адамар оказалась в Тулузе, находившейся на той трети территории Франции, которая не была оккупирована. В июне 1941 г. им вместе с дочерью Жаклин удалось уехать в Америку.

В США Адамар читает лекции в Колумбийском университете, публикует несколько работ по уравнениям математической физики. Его давно интересовала роль интуиции в математическом творчестве, и он попытался разобраться в ней с точки зрения психологии, апеллируя к понятию бессознательного. Этот материал входит в небольшую книгу о психологии математического творчества, которую Адамар пишет для издательства Принстонского университета. Узнав о кончине своего учителя и друга Э. Пикара, Адамар посвящает ему два некролога [I 304, I 307]. Он чувствует себя еще в силах заняться задачами военного характера и, поскольку оказалось, что для этого в Англии у него будут более благоприятные условия, решает направиться туда. Рапкин, молодой канадский ученый, который помог Адамарам перебраться в США, организует их переезд в Англию. 21 августа 1944 г. семья Адамар покинула берега Америки.

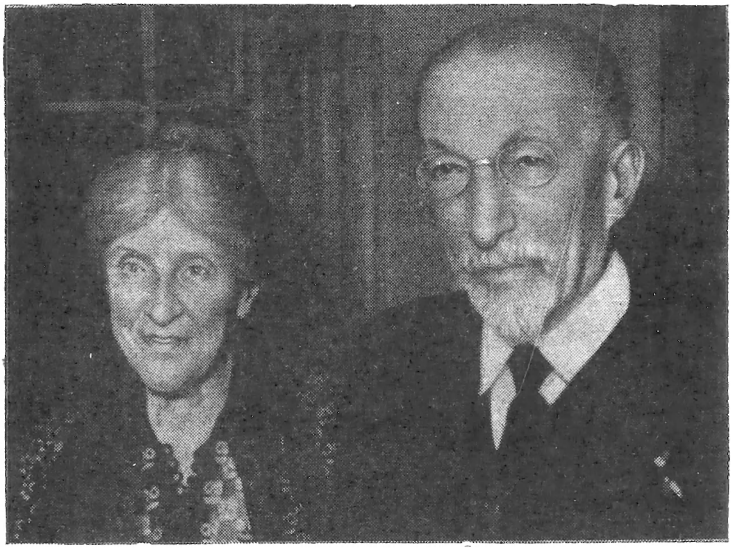
В Лондоне Адамар занимается военной тематикой, читает лекции в университетах, в январе 1945 г. выступает в Лондонском математическом обществе. Представляя его, Г. Харди назвал 80-летнего Адамара живой легендой математики. В одном из номеров журнала «Nature» за 1965 г. появилась заметка памяти Адамара, в которой упомянуто, что в 1945 г. он «прочел лекцию с личными воспоминаниями, о которой до сих пор с удовольствием рассказывают многие его британские коллеги» [II 8, с. 937]. «Мне запомнилась, — писала М. Картрайт, — его невысокая фигура в пальто на лекции в холодной аудитории и то, как он, оступившись, не упал, но легко сбежал вниз по ступенькам» [II 6, с. 84].

В 1944 г. чету Адамар постигло новое большое горе: младший сын Матье, сражавшийся в армии деголлевского движения «Свободная Франция», был убит в Тунисе. Гибель Матье оплакивала и его вдова Симона, оставшаяся с двумя детьми.

Активная старость. В 1945 г. Адамар возвращается в Париж. В день своего 80-летия он читает во дворце Открытия лекцию «Подсознательное, интуиция и логика». Еще в течение примерно 15 лет он продолжает работать. Систематически появляются его публикации. В 1945 г. на английском языке выходит его книга «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» [I 315], печатаются заметка «Проблемы, кажущиеся трудными» в советском журнале «Математический сборник» [I 311], а также статья памяти Биркгофа [I 313]. Статьи этих лет касались главным образом вопросов математической физики, психологии и истории науки. Но были также работы и на другие темы, среди них книга «Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций» [I 323], вышедшая в Москве в 1951 г. и содержащая в основном подробный обзор результатов Пуанкаре в этой области. В 1959 г. он дополняет и редактирует французский перевод своей английской книги о психологии математического творчества, сделанный его дочерью Жаклин [I 339]. До последних лет Адамар работает над книгой об уравнениях в частных производных, которая увидела свет в Китае уже после его смерти. В приведенном далее списке трудов Адамара эта его последняя работа имеет номер 340.

И в глубокой старости Адамар по-прежнему активен в своих контактах с коллегами во всем мире. В 1945 г. он в составе французской делегации приезжает в Советский Союз на празднование юбилея Академии наук СССР. В 1950 г. Адамар был приглашен на Международный математический конгресс в Гарварде (США). Однако его поездка едва не сорвалась из-за нежелания американских чиновников выдать визу. Мотивировка — поддержка Адамаром Французской коммунистической партии. По политическим мотивам в визе было отказано и Л. Шварцу. Ситуация изменилась только после того, как участие всей французской делегации оказалось под угрозой и поднялась волна протеста (см.: [III 137, с. 68]). Адамар еще раз пересекает Атлантический океан. В Гарварде его избирают одним из трех почетных президентов конгресса. А. Данжуа вспоминает, что при появлении на огромной сцене хрупкой фигуры Адамара все 2 тыс. человек, присутствовавшие в зале, встали и устроили ему овацию. В мае 1956 г. 90-летний Адамар принимает участие в работе Четвертого конгресса румынских математиков в Бухаресте.

Он не терял интереса к новостям математики, в особенности к теории уравнений в частных производных, посещал семинары, и глубина его восприятия совсем свежих результатов удивляла коллег. Об этом расска-



Луиза и Жак Адамар на конгрессе в Румынии. 1956 г.

зывает Л. Шварц: «. . .Жак Адамар слушал доклады и в возрасте за 90. И сколь отличным от его времени должен был ему казаться язык! Трудно понимать уже то, что делает математик моложе на пять-десять лет. Перед Адамаром проходил целый ряд понятий, не соответствовавших понятиям его молодости; благодаря знаниям ему удавалось устанавливать связи и приходить к пониманию существа доказываемых результатов и новых идей, что позволяло ему ставить больше вопросов, и притом весьма существенных, чем любому другому слушателю» [II 23, с. 17].

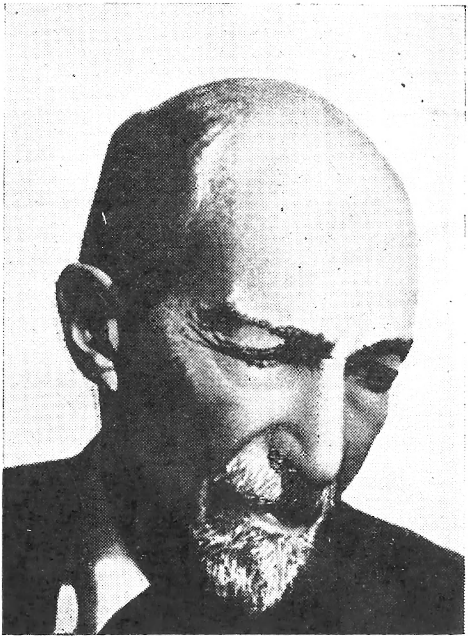
Гражданский пыл с годами не угасал в Адамаре. Его часто можно было видеть на трибуне или в залах заседаний, проводимых сторонниками движения за мир, против французского военного присутствия в Индокитае и Алжире. Вместе с голосами А. Эйнштейна, Б. Рассела, супругов Кюри, предостерегавших от опасности, которую несет человечеству атомное оружие, раздавался и голос Адамара. «Он отрицал различные проявления маккартизма, т. е. нетерпимости. . . а его симпатии к крайне левым были не просто результатом семейного единства,[*] но велением сердца» [II 22, с. 356—357].

В заключение доклада на конференции Рационалистического союза, почетным президентом которого он являлся, 87-летний ученый сказал: «Исторически научная и моральная истины идут рука об руку начиная с XVI в. Моральный прогресс, который мы должны защищать, вся наша моральная эволюция, пробужденная Ренаном и не разрушенная фашизмом, идут рука об руку с научным прогрессом и никогда не должны от него отделяться» (см.: [II 22, с. 355]). Для Адамара это были не просто слова. В его жизни моральные и научные ценности были действительно неразрывны. Даже в глубокой старости он не давал себе послаблений, когда речь шла о гражданском долге. В статье [II 19] рассказывается, что однажды в возрасте за 80 чета Адамар была сбита автомобилем, но ушибы и царапины не помешали Адамару появиться через два дня в президиуме многолюдного собрания.

За свою жизнь Адамар получил многочисленные знаки признания. Еще в 1936 г. на его юбилее А. Лебег сказал: «Я хотел бы в заключение дать вам представление о почетных званиях, но Адамар был не в состоянии помочь мне составить по-настоящему полный список. Это был единственный раз, когда я обнаружил недостаток его знаний» [II 9, с. 14]. Не ручаясь за полноту нашего перечня, мы можем сообщить читателю, что Адамар был иностранным членом старейшей в мире Академии деи Линчеи, Лондонского Королевского общества, Королевского общества Эдинбурга, Академии наук СССР, Национальной академии США, Королевской Бельгийской Академии наук, Индийской, Голландской, Румынской, Шведской Академий наук. Он был избран почетным доктором Геттингенского, Йельского, Брюссельского, Льежского университетов и университета в Осло, состоял почетным членом Королевского научного общества Упсалы, Лондонского математического общества, Физико-математического общества Эрлангена, Математического общества Копенгагена, Харьковского математического общества, членом совета правления математического кружка в Палермо,

---

[*] Жаклин Адамар была членом французской коммунистической партии.



Жак Адамар.

Швейцарского общества естественных наук, членом-корреспондентом Королевского научного общества Льежа.

Как известно, Нобелевской премии по математике не существует. Но для математиков имеются другие международные награды. Весьма престижной является учрежденная Академией деи Линчеи в 1955 г. премия Фельтринелли, первым лауреатом которой стал Адамар.

Выступая на праздновании 100-летия со дня рождения Адамара, М. Руа, президент Академии наук Франции, вспоминал, что Адамар и в последние годы жизни не переставал посещать собрания Академии. Он ставил стул поближе к выступающему и, усаживаясь, направлял ухо в его сторону, стараясь не пропустить ни слова. По окончании заседания он быстро вставал, оживленно включаясь в общую дискуссию. Этот неугасающий интерес ко всему окружающему отгонял мысли о бренности бытия и вселял уверенность, что так же будет на следующем собрании. О том же вспоминает и Н. Винер, посетивший Париж в 1951 г.: «Мы часто бывали у милого старого Адамара и его жены; нам казалось, что они оба окончательно лишились признаков возраста, хотя им перевалило уже за восемьдесят» [III 13, с. 321]. Но годы брали свое: слабел слух, трудно стало ходить. В 1960 г. умерла жена. Через год последовала внезапная смерть внука Этьена Пикара. Рядом с Адамаром осталась Жаклин. Другая дочь, Сесиль, и Симона, вдова погибшего сына Пьера, помогали ей.

Последняя награда была вручена Адамару в 1962 г., когда в связи с 50-летием его избрания в Академию была изготовлена специальная золотая медаль. Он принял ее дома из рук А. Данжуа, Г. Жулиа и Л. де Бройля. Это было перед самым окончанием жизненного пути ученого. 17 октября 1963 г. Адамар навсегда уснул, не испытав страданий. Через четыре дня родственники, многочисленные друзья и ученики Адамара проводили его к месту последнего успокоения на кладбище Пер Лашез.

Адамар и русские математики

Расскажем о контактах Адамара с математиками дореволюционной России и советскими математиками. А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, С. Н. Бернштейн, А. Н. Крылов, Н. Н. Лузин, Н. М. Крылов, Д. Е. Меньшов встречались с ним или вели переписку. «Многие советские математики, и в том числе авторы этой статьи, испытали на себе его сильнейшее влияние», — пишут И. Г. Петровский и С. Л. Соболев в статье «О работах академика Жака Адамара по уравнениям с частными производными» [II 3, с. 91]. В 1929 г. Адамар был избран иностранным членом Академии наук СССР.

В конце XIX в. одним из крупнейших математиков России был А. М. Ляпунов (1857—1918), ученик П. Л. Чебышева. Научные интересы Ляпунова относились ко многим областям математики и механики. Он известен работами в теории устойчивости механических систем, исследованиями равновесного движения жидкости. Ляпунов внес существенный вклад в интенсивно развивавшуюся в то время теорию потенциала, его имя носит одна из предельных теорем теории вероятностей. Труды его были по заслугам оценены как в России — он был действительным членом Петербургской Академии наук, — так и за рубежом — ему были присвоены звания члена-корреспондента Академии наук Франции и члена Академии деи Линчеи.

Приведем здесь переводы двух писем Ж. Адамара А. М. Ляпунову [III 186], хранящихся в Ленинградском отделении Архива АН СССР. Эти письма свидетельствуют о глубоком уважении Адамара к русскому коллеге и об интересе к его работам.

Бордо, 29 декабря 1896 г.

Месье, я занимался исследованием неустойчивости свободно опертой пластины в моем мемуаре, награжденном Академией наук в прошлом году, и затем узнал в Париже о существовании Вашего важного трактата*) (опубликованного в 1892 г.), в котором Вы решали ту же задачу и, несомненно, получили многочисленные другие результаты о траекториях в динамике. Могу ли я просить Вас сообщить точное название Вашей работы, чтобы мы могли ее взять на факультете?

Благодарю Вас заранее и прошу принять уверения в уважении.

Ж. Адамар

Университет Франции,
9 августа 1907 г.

Месье и глубокоуважаемый коллега!

Я буду очень рад увидеть переведенной на французский язык Вашу прекрасную работу 1892 года об устойчивости движения. У меня есть некоторая надежда организовать этот перевод. Но прежде всего я хотел бы знать, расположены ли Вы дать согласие на осуществление этого намерения. Не будете ли Вы добры дать мне ответ по этому поводу? Я буду Вам очень признателен и заверяю Вас в своих чувствах уважения и преданности.

Вы также доставите мне большое удовольствие, указав сведения о других, еще не переведенных Ваших мемуарах на восточноевропейских языках, перевод которых Вы сочтете желательным.

Жак Адамар

С Адамаром был знаком выдающийся ученик А. М. Ляпунова В. А. Стеклов (1864—1926). Он полу-

---

*) Имеется в виду докторская диссертация Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

чил важные результаты в теории потенциала, ввел понятие замкнутой ортогональной системы — одно из основных в теории функций. Широко известна предложенная Стекловым конструкция осреднения функций, впоследствии названная его именем. После Октябрьской революции В. А. Стеклов много сил отдал организации науки, был вице-президентом Российской Академии наук (1919—1926), основал и возглавил в 1921 г. Физико-математический институт, из которого в 1934 г. выделился Математический институт АН СССР, сейчас носящий его имя.

Вот как описывает В. А. Стеклов свою встречу с Адамаром в письме А. М. Ляпунову от 17 сентября 1903 г., вернувшись в Харьков из поездки во Францию: «Адамар каким-то образом. . . разыскал меня сам. Один раз не застал меня дома, а на другой день явился в половине девятого утра, когда мы едва просыпались. Приехал он на два дня в Париж (экзаменовал на baccalauréat) и в день обратного отъезда в провинцию, где он проводит лето, перед экзаменом зашел ко мне. Просидел с полчаса и наговорил столько, сколько за целый день успеть трудно. Парижанин типичнейший, подвижен и быстр неимоверно, ведет себя так, как будто мы с ним были давным давно знакомы и только случайно не видались несколько времени. Вообще это удивительное свойство французов при первом же свидании ставить себя так, что забываешь, что человека в первый раз видишь, а через два, три свидания непременно в „ami“ попадешь» [III 187].

Тематика исследований В. А. Стеклова была близка Адамару. В «Лекциях о распространении волн и уравнениях гидромеханики» Адамар излагает теорию потенциала, следуя работе В. А. Стеклова [III 168]. 25 ноября 1903 г. Адамар, благодаря за избрание членом Харьковского математического общества, пишет В. А. Стеклову: «Мне чрезвычайно лестно быть избранным членом математического центра, которым в течение последних лет были сделаны столь важные открытия» [III 188].

В. А. Стеклов очень высоко оценивал работы Адамара в целом и в теории функций и математической физике в частности. Несомненно, он сыграл существенную роль в избрании Адамара членом-корреспондентом Российской Академии наук в 1922 г. Написанное им совместно с Я. В. Успенским и А. Ф. Иоффе представление в Академию начинается словами: «J. Hadamard, член Парижской Академии наук, занимает одно из первых мест в ряду современных выдающихся геометров» [II 4, с. 33]. Авторы отзыва дают развернутую характеристику работ Адамара по теории функций, теории чисел, распространению волн, задаче Коши, вариационному исчислению, подчеркивая «размеры его выдающихся ученых заслуг».

Приведем письмо, отправленное Адамаром тогдашнему президенту Академии наук А. П. Карпинскому в связи со смертью В. А. Стеклова [III 189].

3 ноября 1926 г.

Господин президент!

Поскольку я имел честь быть коротко знакомым с таким великим ученым и человеком, выдающимся во всех отношениях, каким был Владимир Стеклов, я вдвойне скорблю об утрате, которую понесла русская и, как Вы справедливо отметили, мировая наука.

Соблаговолите принять и передать Академии мои глубокие соболезнования и поверить в мои самые преданные чувства.

Ж. Адамар

С Адамаром встречался и знаменитый советский математик академик С. Н. Бернштейн (1880—1968), известный глубокими исследованиями в теории краевых задач для эллиптических уравнений, конструктивной теории функций, теории вероятностей и ее приложениях. Начало его творческой активности связано с Парижем, куда он приехал 18-летним юношей на четыре года учиться и работать. Получив дипломы об окончании Парижского университета (1899 г.) и Высшей электротехнической школы (1901 г.), Бернштейн сосредоточивает свои усилия на исследовании 19-й проблемы Гильберта об аналитичности решений так называемых регулярных вариационных задач и уравнений эллиптического типа в случае двух независимых переменных. Эта проблема, с решением которой он блестяще справился, составила содержание его диссертации [III 78], представленной в 1904 г. экзаменационной комиссии Парижского университета в составе: Э. Пикар, А. Пуанкаре и Ж. Адамар. Результатом было присуждение ему ученой степени доктора наук. Глубокие методы, развитые в диссертации Бернштейна, на много лет опередили свое время и существенным образом повлияли на последующее развитие теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений и вариационного исчисления.

В 1928 г. Бернштейн избирается членом-корреспондентом Академии наук Франции на место скончавшегося Г. Миттаг-Леффлера, в 1945 г. ему было присвоено звание почетного доктора Парижского университета, а с 1955 г. он — иностранный член Академии наук Франции.

В Ленинградском отделении Архива АН СССР сохранились четыре письма Адамара А. Н. Крылову, знаменитому математику и кораблестроителю. Вот одно из них.

25 декабря 1926 г.

Дорогой месье!

Могу ли я просить Вас просмотреть прилагаемую статью месье Милна в «American Monthly» и сообщить Ваше мнение о ней? Содержит ли она развитие метода Адамса и заслуживает ли она изучения? Я прошу об этой маленькой услуге, полагая, что серьезно не побеспокою Вас, поскольку Вы владеете вопросом.

Заранее шлю Вам свою благодарность и заверяю в своих наилучших чувствах.

Ж. Адамар

Теперь остановимся на связях с Адамаром одного из наиболее ярких представителей советской математики — академика Н. Н. Лузина (1883—1950). Известный работами по метрической и дескриптивной теории функций, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии, Лузин был не менее прославлен как педагог.

С декабря 1905 г. 22-летний студент Московского университета Николай Лузин провел полгода в Париже. «Лекции Hadamard'а рекомендую Вашему вниманию, — писал своему ученику Д. Ф. Егоров в феврале 1906 г., — он читает *) великолепно и очень содержательно» [III 46, с. 338]. Весной 1913 г. Н. Н. Лузин, уже приват-доцент Московского университета, едет в Геттинген и Париж. Из скупых строк его отчета о камандировке [III 44], длившейся больше года, можно узнать, что он слушал лекции Э. Пикара,

*) Во втором полугодии 1905/1906 учебного года Адамар читал в Сорбонне курс высшего анализа два раза в неделю.

Э. Бореля, М. Бохнера, был участником математического семинара Адамара в Коллеж де Франс, посещал заседания двух конгрессов, математико-педагогического и математико-философского. Поскольку результаты Лузина уже привлекли внимание, во вторую парижскую поездку он смог установить личное знакомство с Пикаром, Борелем, Лебегом, Адамаром, Данжуа и другими французскими математиками.

По возвращении на родину Лузин много сил вкладывает в создание московской школы теории функций, вводя своих учеников в курс современной проблематики и способствуя скорейшей публикации их работ. В 1914—1916 гг. Н. Н. Лузин сформировал активный научный коллектив — «первое поколение Лузитании» (см.: [III 36]). В течение многих лет он руководил семинаром по дескриптивной теории функций.

Однако с годами талантливые ученые из его окружения выбирали свои пути в науке, уходили от традиционной тематики. Вот почему во время третьей поездки во Францию, зимой—весной 1926 г., Лузина не покидало беспокойство за судьбу московской математической школы, ощущение ее кризиса. Отсюда и его пристальный интерес к математической жизни Парижа. «Сейчас, когда я живу в соприкосновении сразу с несколькими математическими „школами“ (венгерской, польской, сербской, румынской, скандинавской), я, как в зеркале, читаю без всякого труда то, что происходит в недрах каждой из них», — пишет Н. Н. Лузин О. Ю. Шмидту из Парижа в феврале 1926 г. [III 47, с. 280]. Его восторгает «современная открытость, доступность для наблюдения французской школы». Мысленно оглядываясь на свои прежние поездки в Париж, он размышляет: «Невольно сравниваешь актуальный момент с прежним временем, когда пышный декорум жизни академического чертога и величавая недоступность были так красиво-стильны, что мгновенно отступала на задний план собственная духовная жажда.

Что же изменило прежний внешний характер? Размышление указывает на ряд внешних условий, — между прочим, на некоторый недостаток нормалистов,*) достаточно подготовленных для творческой деятель-

*) Выпускников Нормальной школы.

ности: война имела следствием убыль молодежи. Внутренний же фактор — огромная организующая сила Hadamard'a, сильно „демократизировавшего“ науку» [III 47, с. 283].

В другом месте того же письма Н. Н. Лузин вновь подчеркивает роль Адамара: «Семинарий Hadamard'a — это целое событие эпохи для французской школы. . . Сокращая факты, скажу только, что в таком Париже я нашел бесконечное поле для размышлений» [там же].

Ученик Н. Н. Лузина, впоследствии известный специалист по теории тригонометрических рядов, Д. Е. Меньшов вспоминает, что Н. Н. Лузин помог отредактировать французский текст его статьи и затем «послал со своей рекомендацией парижскому академику Ж. Адамару, который представил ее в „Comptes rendus“ *)» [III 42, с. 321]. Одновременно Адамару через Лузина была послана статья П. С. Александрова.

По воспоминаниям Д. Е. Меньшова создается впечатление благожелательного отношения Адамара и других французских ученых к молодым русским коллегам. «От Адамара проблематика теории функций действительного переменного была далека, но он вполне доверял Лузину. Помню, что в ответном письме Адамар выразил удовлетворение, что в Москве ведется серьезная научная работа, и было видно, что он высоко ценит роль Н. Н. Лузина в ее организации. Любопытно, что статьи в „Comptes rendus“ строго не должны были превосходить некоторого размера, а у меня получилось намного больше. Но в то время — это был разгар первой мировой войны — отношение к России и русским во Франции было особенно хорошим, и мою статью не сократили», — рассказывает Д. Е. Меньшов [III 42, с. 322]. Он продолжает: «Мне хотелось бы отметить еще один момент. К обобщению интеграла Данжуа, данному А. Я. Хинчиным, независимо пришел сам А. Данжуа. Разница во времени представления и появления их работ по этому вопросу была очень невелика. Адамар писал, что приоритет хронологически принадлежит Хинчину. Не знаю, быть может, это было сделано только из вежливости».

А вот что Д. Е. Меньшов рассказывает о своей стажировке во Франции: «В Париж я поехал в 1927 г.

*) Доклады Французской Академии наук.

на годичный срок в качестве стипендиата Рокфеллеровского фонда. Такие стипендии предоставлялись специальным научным комитетом ученым не старше 35 лет: мне было тогда 34 года. . . Жил я в Париже в небольшом отеле „Parisiana", близ Пантеона, в д. 4 по улице Турнафор. Там обычно останавливался Н. Н. Лузин, который мне рекомендовал эту гостиницу. Здесь устроились приехавший вскоре после меня, только на более короткий срок, М. А. Лаврентьев, а также приехавший весной того же года Н. Н. Лузин с женой.

. . .Тут же я стал регулярно посещать известный семинар Ж. Адамара в Collège de France. Здесь ставились и обсуждались доклады по самым разнообразным вопросам математики и ее приложений. Например, один французский ученый сделал на нем сообщение о работах Э. Шредингера по квантовой механике. Сам я выступил на семинаре с двумя докладами о своих работах — по теории конформных отображений и по теории ортогональных рядов. При этом я убедился, что Адамар действительно мало знаком с современной теорией функций: он попросил меня напомнить определение меры множества. Упрекать за это Адамара нельзя: ему было тогда 62 года, и он продолжал научную работу в избранных им ранее классических областях анализа» [III 42, с. 332].

Перечень математиков, приезжавших из России в Париж, можно продолжать. К их числу относится и Н. М. Крылов (1879—1955), проходивший стажировку во Франции в 1906—1910 гг. и слушавший лекции Ж. Адамара, Г. Дарбу, П. Пенлеве, Ж. Буссинеска, А. Лебега, А. Пуанкаре. В Архиве АН СССР (ф. 689) среди бумаг Н. М. Крылова хранится конспект лекций, прочитанных Адамаром в 1907—1908 гг. Позднее, в 1926—1927 гг., Н. М. Крылов читал доклады «по своим исследованиям в области приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. . . в Пражском математическом обществе, Парижской Академии наук. . . принимал участие в работе семинара известного ученого академика Адамара» [III 10, с. 8]. Впоследствии Н. М. Крылов стал действительным членом Академии наук СССР. Он известен исследованиями по теории аппроксимации и математической физике, вместе с Н. Н. Боголюбовым является основателем нового научного направления — нелинейной механики. В книге [III 11] воспроизведена сделанная в киевском музее Т. Г. Шевченко, по-видимому, в 1930 г. групповая фотография, на которой изображены сидящие рядом Ж. Адамар и Н. М. Крылов.

А. М. Размадзе (1889—1929), один из создателей грузинской математической школы, будучи в Париже в 1925 г., некоторое время работал в семинаре Адамара. Он сделал доклад, в котором предложил значительное упрощение доказательства теоремы Карлемана об изопериметрическом свойстве круга на минимальной поверхности,*) в том же году опубликованное [III 158]. Интересно, что при оформлении работы Размадзе учел соображения, высказанные во время доклада Полем Леви и Германом Вейлем.

Адамар трижды приезжал в нашу страну. Впервые это произошло в 1930 г., когда он был участником первого Всесоюзного съезда математиков в Харькове. 26 июня он председательствовал на торжественном заседании съезда, посвященном 50-летию Харьковского математического общества. Доклад Адамара «Уравнения в частных производных и теория функций действительного переменного» [I 254] состоялся на пленарном заседании 27 июня. На следующий день он вел утреннее пленарное заседание, а на вечернем читал доклад «Принцип Гюйгенса и теория Гюгонио» [I 254].

В Ленинграде, куда Адамар приехал после Харькова и Киева, состоялось его знакомство с ленинградскими математиками. Среди них был и молодой С. Л. Соболев (1908—1988). «Впервые я увидел Адамара и слушал его доклад на Харьковском съезде. Помню, что он присутствовал и на моем докладе о новом подходе к решению волнового уравнения с переменными коэффициентами, — вспоминал С. Л. Соболев. — Однако поговорить с ним мне удалось только в Ленинграде, в Сейсмологическом институте, где я числился старшим специалистом. Я, тогда еще совсем мальчишка,**) был очень доволен, что вижу знаме-

---

*) Теорема Карлемана (1921 г.) гласит: пусть A — площадь той части минимальной поверхности, которая ограничена кривой длины L; тогда справедливо неравенство $4\pi A < L^2$, причем равенство достигается только для круга.

**) С. Л. Соболеву было тогда 22 года. Спустя три года он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

С. Л. Соболев.

нитого человека. Адамар — среднего роста, с бородкой и короткими усами, живой и подвижный, показался мне веселым человеком. С ним было легко. Разговор шел на французском, о связи моего метода и метода его ученика М. Матиссона, также занимавшегося задачей Коши. Адамар воспринял мою идею еще на съезде и интересовался, не вытекает ли из моей работы результат, полученный Матиссоном. Помню, что он попросил прислать ему оттиск подробной работы на ту же тему, что я, конечно, сделал, когда она появилась в „Математическом сборнике". Успех дальнейших исследований гиперболических уравнений с переменными коэффициентами многим обязан Адамару. Применение им конечной части бесконечного интеграла —

это просто гениальное провидение. Я осознал его смысл немного позже, когда пытался понять, какая обобщенная функция дает решение задачи Коши».*)

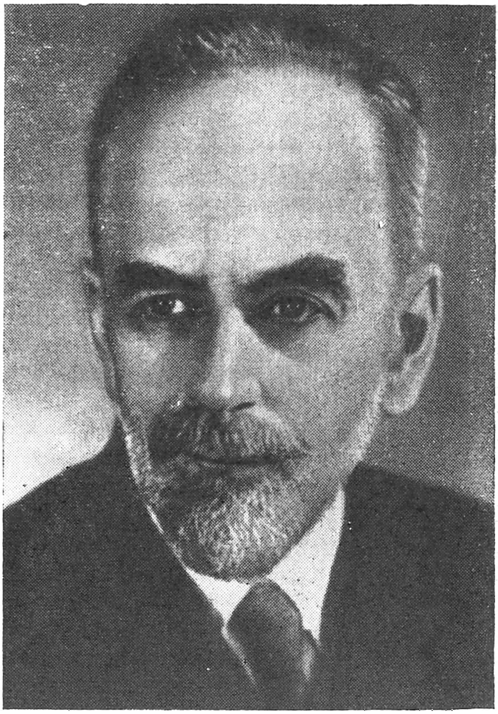
Напомним, что именно С. Л. Соболев дал строгое определение обобщенной функции, ввел функциональные пространства, впоследствии названные его именем, доказал теоремы вложения таких пространств, широко используемые в современной теории уравнений в частных производных. Он предложил новые методы исследования краевых задач математической физики, много занимался вычислительной математикой, в частности теорией кубатурных формул. Академик С. Л. Соболев — член многих иностранных академий и научных обществ, в том числе член-корреспондент Академии наук Франции.

Адамар еще два раза приезжал в СССР — в 1934 и в 1945 гг. Во время первого из этих визитов он посетил Ленинград и Москву с делегацией французских ученых. Принимали его с большим почетом: в то время, по единодушному мнению, он считался математиком номер один. Это не мешало ему проявлять чувство юмора. «Un peu trop de metro (многовато метро)», — острил он, гуляя по разрытым метростроевцами улицам Москвы (по воспоминаниям С. Г. Михлина).

В Ленинграде Адамара приветствовал академик А. Н. Крылов. Сохранившийся рукописный текст его выступления начинается словами: «Невелика заслуга оказаться старшим по возрасту среди моих коллег — математиков Ленинграда, которые возложили на меня честь приветствовать прославленного мэтра, давшего блестящие вспышки в ярком пламени французской науки. Нет необходимости упоминать о личном вкладе месье Адамара — он стал классическим. . .» [III 191].

Адамар встретился с учеными Ленинградского университета и посетил недавно организованный при университете Научно-исследовательский институт математики и механики, первым директором которого был известный математик и замечательный человек В. И. Смирнов (1887—1974).

*) Из рассказа С. Л. Соболева Т. О. Шапошниковой в июне 1985 г.



В. И. Смирнов.

На встрече присутствовал и 22-летний Л. В. Канторович (1912—1986), будущий академик и лауреат Нобелевской премии, прославившийся работами в различных областях математики и в математической экономике. Незадолго до этого он выполнил работу о построении конформного отображения круга на область, близкую к нему. Л. В. Канторович вспоминает: «Во время визита Жака Адамара в Ленинград, кажется, в 1933 г., на встрече с ним в кабинете ректора университета В. И. Смирнов сделал краткий доклад о нескольких достижениях ленинградских математиков, в том числе рассказал и о работе о приближенном конформном отображении. Работа заинтересовала Адамара, и он, шутя, высказал опасение, как бы Канторовича не постигла судьба Галуа. В ответ кто-то сказал, что у меня не такой агрессивный характер» *) [III 27, с. 192].

Еще один визит Адамара в СССР был связан с юбилейной сессией Академии наук СССР, проходившей с 25 мая по 7 июня 1945 г. в Москве и Ленинграде и посвященной ее 220-летию. Эта дата отмечалась с большим размахом. Только что отгремели победные залпы, и хотя время было трудное, но настроение — приподнятое. Из отчета, напечатанного в «Вестнике Академии наук»: «. . .двери академических институтов, лабораторий и музеев были открыты для гостей, съехавшихся из различных стран мира. . . Они знакомились с научной жизнью Москвы и Ленинграда. . . Многие иностранные ученые наблюдали выставку портретов академиков в Большом театре. Иностранные делегаты побывали на опере Глинки „Иван Сусанин“ в Большом театре. . . В только что отремонтированном здании бывшего Мариинского театра, которое было жестоко повреждено бомбардировкой во время осады Ленинграда, им был показан гениальный балет Чайковского „Лебединое озеро“. Для участников сессии были организованы массовые экскурсии в Кремль, Третьяковскую галерею, по каналу Волга—Москва, в Ясную Поляну, на выставку „Оборона Ленинграда“, в Пушкин, в Петродворец» [III 26, с. 149].

На сессии Академии наук Адамару был представлен 30-летний Ю. В. Линник, который подарил ему оттиски своих работ по асимптотике плотностей нулей рядов Дирихле. После этого, встречая Линника на заседаниях, Адамар приветствовал его дружеским восклицанием: «Densité des zeros! (Плотность нулей!)».**)

Адамар выступил в Москве 22 июня с докладом «Психология математического творчества» и повторил его 27 июня в Ленинграде. Мы знаем еще, что в Ленинграде Адамара пригласил к себе домой, на улицу Рентгена, В. И. Смирнов и угощал чаем с морошкой — ягодой, до той поры Адамару не известной.***)

---

*) Сравнение естественное, поскольку Л. В. Канторович поступил в университет 14 лет, а в 20-летнем возрасте уже был профессором.

**) По рассказу Ю. В. Линника Е. М. Полищуку.

***) Нам известно об этом от В. М. Бабича, а он когда-то слышал от В. И. Смирнова.

В юбилейном сборнике «Успехов математических наук» за 1961 г., посвященном 60-летию академика И. Г. Петровского (1901—1973), упоминается, что он называл Адамара в числе трех наиболее близких ему математиков. Основные работы Петровского относятся к общей теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии и теории вероятностей.

Любопытно, что рассмотрение задачи Коши для гиперболических систем, проведенное в 30-х годах Петровским, не было результатом прямого следования работам Адамара о гиперболических уравнениях второго порядка. Петровский сказал как-то, что если бы он поддался влиянию Адамара и пошел по его пути, то никогда бы не смог прийти к своим результатам. К этому можно добавить, что он сделал огромный шаг вперед в изучении задачи Коши.

По-видимому, последним советским математиком, беседовавшим с Адамаром, была заведующая кафедрой дифференциальных уравнений Московского университета профессор О. А. Олейник, исследования которой в различных направлениях математической физики получили международное признание. Вот что она вспоминает о своем визите к Адамару: *) «В 1961 г. в Коллеж де Франс проходила конференция по уравнениям в частных производных, в которой я принимала участие. Оргкомитет возглавляли известные французские математики Мальгранж и Лере, а с докладами выступили крупнейшие специалисты по теории уравнений с частными производными: Хермандер, Нэш, Гординг, Ниренберг, Морри, Шварц. . .

Когда конференция закончилась, решено было послать трех делегатов приветствовать Адамара. Мне посчастливилось попасть в тройку вместе с учениками Адамара Жаном Лере и Лораном Шварцем. Мы поднялись в квартиру Адамара и затем ожидали его в просторной гостиной. Он появился в сопровождении дочери Жаклин, которая помогла ему устроиться в кресле. Девяностошестилетний Адамар передвигался с трудом. Силы его стали быстро иссякать после смерти жены в 1960 г. Однако он держался приветливо и подтянуто, петлицу его темного костюма украшала алая розетка ордена Почетного легиона. Слух Адамара к этому вре-

---

*) По рассказу О. А. Олейник Т. О. Шапошниковой.

мени был сильно ослаблен, и Шварц склонился к нему, рассказывая о конференции и ее участниках. Когда меня представили Адамару, он упомянул о критерии регулярности граничной точки. Я поняла, что он вспомнил мою самую первую работу, в которой известный критерий Винера был распространен на общие эллиптические уравнения второго порядка. Через несколько лет я нашла ссылку на нее в последней книге Адамара, вышедшей в Пекине уже после его смерти.

Визит продолжался недолго. Мы попрощались. У дверей лифта Жаклин взволнованно сказала мне: „Какая Вы счастливая, ведь Вы живете в такой замечательной стране!“».

В СССР имя Адамара хорошо известно. Несколько его работ были опубликованы в советских изданиях. К 100-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского в 1926 г. он прислал статью в сборник, подготовленный Казанским математическим обществом [I 221]. Позднее Адамар написал небольшую книгу «Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций». История этого сочинения такова. В 30-х годах группа советских математиков во главе с В. Ф. Каганом приступила к подготовке издания собрания сочинений Н. И. Лобачевского. В качестве приложения к нему была задумана серия монографий «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей». Адамар откликнулся на это начинание и прислал рукопись, которая была переведена на русский язык и вышла в 1951 г. [I 323]. Три издания на русском языке выдержала книга «Элементарная геометрия» [I 60, I 72]. В трудах первого Всесоюзного съезда математиков были напечатаны доклады Адамара [I 254]. Он опубликовал также две статьи в «Математическом сборнике» [I 277, I 311] и одну работу в «Трудах Тбилисского математического института» [I 292]. В 1970 г. внимание советских математиков и психологов привлек русский перевод его книги «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» [I 339]. Наконец, в 1978 г. на русский язык была переведена классическая монография Адамара о задаче Коши [I 266].

Теория аналитических функций

Основные понятия

Наш рассказ о творчестве Адамара начинается с аналитических функций. В ряде работ, выполненных в 90-е годы минувшего века, быстро принесших ему мировую известность и нашедших многообразные применения в математическом анализе и прикладных дисциплинах, Адамар получил результаты, которые предопределили на многие десятилетия развитие основных направлений теории функций комплексного переменного.

Для дальнейшего нам понадобятся лишь самые элементарные сведения об этой дисциплине, и мы напомним, что функция $f(z)$, заданная в области D плоскости комплексного переменного z, называется регулярной, если она в каждой точке $z \in D$ имеет производную $f'(z)$. В любом круге $|z-a| < \rho$, лежащем в D, регулярная функция представима степенным рядом

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots, \tag{1}$$

коэффициенты которого выражаются равенством $c_n = f^{(n)}(a)/n!$

Отметим, что если функция регулярна в области D, включая ее границу ∂D, то она регулярна в некоторой области D_1, содержащей замыкание $\bar{D}$. Граничные точки множества регулярности функции $f(z)$ называются ее особыми точками.

Рассмотрим ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{2}$$

Коши показал, что если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = l$, то (2) сходится при $|z| < 1/l$ и расходится, когда $|z| > 1/l$. Вообще для любого ряда (2) существует круг сходимости $K = \{z : |z| < r\}$, внутри которого он сходится и вне которого расходится. Признак Коши, как и многие другие признаки, позволяет находить радиус сходимости ряда в конкретных случаях. В заметке 1888 г. «О радиусе сходимости степенных рядов, упорядоченных по степеням переменной» [14] Адамар уточнил результат Коши: если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n} = l$, то ряд (1) сходится при $|z| < 1/l$ и расходится, когда $|z| > 1/l$.

Эта теорема, которую можно найти в любом обстоятельном учебнике, позволяет найти радиус сходимости произвольного степенного ряда. В частности, если $l=0$, то ряд (2) сходится при всех z. В этом случае говорят, что он представляет целую функцию. Если $l=\infty$, ряд сходится в единственной точке $z=0$ (этот случай мы исключим из рассмотрения). Все сказанное немедленно переносится на ряд (1), ибо он сводится к (2) заменой $z-a$ на z. Внутри своего круга сходимости сумма ряда (2) является регулярной функцией, а на его границе ряд имеет хотя бы одну особую точку.

Рассмотрим теперь более общий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}, \tag{3}$$

члены которого содержат как положительные, так и отрицательные степени $z-a$. Он называется рядом Лорана. Если первый из рядов, входящих в (3), сходится в круге $|z-a|<r_1$, а второй — при $|z-a|>r_2$, причем $r_1>r_2$, то ряд (3) сходится в кольце $r_2<|z-a|<r_1$. Если в (3) имеется лишь конечное число слагаемых с отрицательными степенями

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{d_n}{(z-a)^n},$$

то говорят, что точка a — полюс m-го порядка функции $\varphi(z)$; в противном случае a называется существенно особой точкой $\varphi(z)$.

Пусть

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{d_{nk}}{(z-a_k)^n} + f(z),$$

где $f(z)$ — функция, регулярная в некоторой области D, и точки $a_1, \ldots, a_p$ лежат в D. Функция $\varphi(z)$ регулярна в D, за исключением $a_1, \ldots, a_p$ — особых точек, являющихся ее полюсами соответственно порядков $m_1, \ldots, m_p$. Очевидно, что, умножая φ на полином $(z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_p)^{m_p}$, мы получим функцию $u(z)$, регулярную в D (этот простой факт будет использован в дальнейшем). Пусть $f(z)$ регулярна в D. Говорят, что функция $F(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f(z)$, если $F(z)=f(z)$ на D и $F(z)$ регулярна в некоторой области $D_1 \supset \bar{D}$.

Степенные ряды позволяют весьма просто осуществить процесс аналитического продолжения. Пусть заданы степенной ряд (2) с кругом сходимости $K=\{z : |z-a| < r\}$ и точка a_1, лежащая вне D. Записав $z-a=z-a_1+a_1-a$ и подставив это выражение в ряд (2), мы можем, перегруппировав его члены, получить ряд по степеням $z-a_1$:

$$f_1(z)=d_0+d_1(z-a_1)+\ldots \quad (4)$$

Предположим, что круг K_1 сходимости ряда (4) пересекается с кругом K. Функция $\Phi(z)$, определенная условиями $\Phi(z)=f(z)$, $z \in K$; $\Phi(z)=f_1(z)$, $z \in K_1$, является аналитическим продолжением $f(z)$ на более широкую область $K \cup K_1$. Отправляясь теперь от ряда (4) и повторяя такие же рассуждения, мы получим аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$, и т. д.

Аналитической функцией в смысле Вейерштрасса называется однозначная или многозначная функция $u(z)$, возникающая из некоторого степенного ряда (2) путем всех возможных его продолжений. Помимо области, где она определена (множество точек регулярности), аналитическая функция характеризуется своими особыми точками. Последние могут быть изолированными (полюс, существенно особая точка, точки ветвления многозначных функций) или целиком заполнять некоторую кривую.

Аналитическая функция вполне определена заданием любого своего элемента (2) (т. е. степенного ряда, сходящегося в каком-либо круге). Тем самым определены и особенности этой функции. Каковы они, как они расположены? Несмотря на огромные успехи теории аналитических функций, к концу минувшего века этот вопрос до появления исследований Адамара оставался открытым. Отмечая трудности задачи, Гурса в своем курсе анализа говорил: «Только за последнее время (первое издание трактата Гурса вышло в начале XX в. — *Авт.*) эта задача явилась предметом ряда работ, которые привели к важным результатам. То обстоятельство, что эти исследования появились лишь недавно, следует приписать не только трудности вопроса, как бы велика она ни была. Функции, которые последовательно изучались математиками, не выбирались ими произвольно; изучение этих функций вызывалось характером возникавших задач» [III 19, т. 2, с. 205]. Функции задавались либо в виде тех или иных конкретных рядов (например, гипергеометрический ряд Гаусса, который можно встретить во многих учебниках), либо в виде тех или иных интегралов (гамма-функция Эйлера), либо как решения дифференциальных, прежде всего линейных, уравнений. Можно сказать, почти все огромное фактическое достояние теории функций, каким мы видим его в конце прошлого века, связано с конкретными их представлениями. Об общих свойствах аналитических функций было известно относительно немного.

Мероморфные функции

Некоторые ранние результаты Адамара относятся к свойствам всего класса мероморфных функций, т. е. однозначных аналитических функций, не имеющих других особенностей, кроме полюсов. Значительное место в его диссертации [I7], представленной в 1892 г. факультету наук в Сорбонне, занимает следующая проблема. Пусть ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \qquad (5)$$

имеет круг сходимости $K = \{z : |z| < r\}$. Каковы необходимые и достаточные условия того, что на границе $C = \{z : |z| = r\}$ круга K функция $f(z)$ имеет p полюсов и не имеет других особенностей?

Это свойство означает, что должен существовать полином $p(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p$, такой, что произведение

$$F(z) = f(z)\, p(z) \qquad (6)$$

представляет собой ряд, сходящийся при $|z| = r_1 > r$.

Обозначим:

$$\delta_n = \begin{vmatrix} c_n, & c_{n+1} \\ c_{n+1}, & c_{n+2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

В качестве первого шага Адамар показывает, что если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho^{-1}$$

и, кроме того,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|\delta_n|} < r^{-2},$$

то функция (5) имеет на C единственный полюс a первого порядка, причем $a = \lim B_n$. Таким образом, в данном случае в качестве $p(z)$ можно взять $z - a$.

Для рассмотрения общего случая p полюсов (каждый полюс считается столько раз, какова его кратность) вводится определитель

$$D_{n,\,p} = \begin{vmatrix} c_n, & c_{n+1}, & \ldots, & c_{n+p} \\ c_{n+1}, & c_{n+2}, & \ldots, & c_{n+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+p}, & c_{n+p+1}, & \ldots, & c_{n+2p} \end{vmatrix},$$

совпадающий с δ_n при $p = 1$. Обозначим

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|D_{n,\,p}|} = l_p.$$

Опираясь только на понятие верхнего предела и используя свойства определителей, в частности соотношение Кронекера

$$D_{n+1,\,p-1} D_{n-1,\,p-1} - D^2_{n,\,p-1} = D_{n-1,\,p} D_{n,\,p-2},$$

Адамар доказывает следующую теорему.

Если функция (5) имеет p полюсов на окружности C и не имеет других особенностей, то

$$l_p < r^{-p-1}. \tag{7}$$

Обратно, если выполняется условие (7) и, кроме того,

$$l_{p-1} = r^{-p},$$

то существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|D_{n,\,p}|}$ и $f(z)$ имеет p полюсов на C.

Прошло много лет, прежде чем приведенные результаты Адамара о мероморфных функциях были продолжены другими авторами. Из большого списка работ отметим лишь мемуар Д. Пойя [III155], в котором были упрощены сложные доказательства Адамара, а также статью Г. Пиреньяна [III154], где адамаровские методы распространяются на функции, имеющие кроме полюсов также и логарифмические особенности.*)

Весьма популярна имеющаяся во многих учебниках мультипликационная теорема Адамара. Она заключается в следующем.

Пусть заданы два ряда,

$$f(z)=\sum a_n z^n, \tag{8}$$

$$g(z)=\sum b_n z^n. \tag{9}$$

Составим по ним ряд

$$h(z)=\sum a_n b_n z^n. \tag{10}$$

Тогда особенности функции (10) могут содержаться только среди точек $\alpha\beta$, где α — особенность функции (8), а β — особенность функции (9) (см., например, [III66, с. 166]).

Возможно, что к этому результату Адамара привел следующий тривиальный пример. Заметим, что функции $(\alpha-z)^{-1}$ отвечает ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha^{-n-1}z^n$. Поэтому если мы положим $f(z)=(\alpha-z)^{-1}$, $g(z)=(\beta-z)^{-1}$, то функции $h(z)=(\alpha\beta-z)^{-1}$ будет отвечать ряд (10). Здесь f и g имеют особенности соответственно в точках α и β, а единственной особенностью функции h является точка $\alpha\beta$. Однако переход к произвольным функциям сложнее, чем может показаться на основании этого примера. Функция h в отличие от f и g может быть лишена особенностей на конечном расстоянии и даже совпадать с константой.

Адамар показал, что при соответствующем выборе замкнутого контура $\mathscr{L}$ выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} f(\zeta)\, g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta \tag{11}$$

осуществляет аналитическое продолжение функции h за пределы круга сходимости ряда (10). Заметим, что в условиях мультипликационной теоремы, если h имеет особые точки γ_k, $k=1, 2, \ldots$, радиус упомянутого круга определяется как наименьшая из величин $|\gamma_k|$, т. е. наименьшая из величин $|\alpha_i\beta_j|$.

*) Аналитическому продолжению степенных рядов посвящена монография Л. Бибербаха [III8].

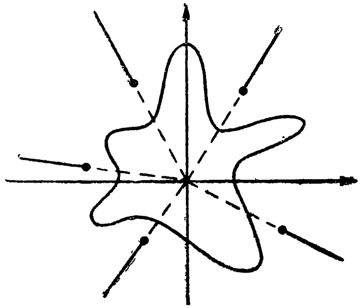


Рис. 1.

Легко видеть, что выражение (11) непосредственно приводит к ряду (10). Действительно, перемножая ряды для f и g,

$$fg = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \ldots,$$

подставляя результат в (11) и учитывая, что

$$J_n = \int\limits_{\mathscr{L}} z^n dz = 0, \quad n \neq -1; \quad J_{-1} = 2\pi i,$$

получаем (10).

Контур $\mathscr{L}$ выбирается следующим образом. Отметим на плоскости z точки γ_k и из каждой из них проведем лучи, уходящие в бесконечность, такие, что каждый луч лежит на одной прямой с точкой O. Разрежем плоскость вдоль этих лучей. Оставшаяся ее часть называется звездой Миттаг-Леффлера с вершинами в γ_k. В качестве $\mathscr{L}$ в равенстве (11) можно взять любую замкнутую кривую, окружающую точку O и лежащую внутри этой звезды. Все сказанное поясняет рис. 1.

Мультипликационная теорема Адамара появилась в 1898 г. [152], а уже в следующем году Дель Аньола публикует в Венеции работы, в которых по аналогии с адамаровской композицией (11) функций f и g рассматривается композиция вида

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{L}} f(t)\, g(z - t)\, dt, \tag{12}$$

где $\mathscr{L}$ — замкнутый контур в плоскости t. Если $\mathscr{L}$ ограничивает область, в которой $f(t)$ и $g(z-t)$ регулярны, то $\Psi(z)=0$. Поэтому композицию (12) имеет смысл определять для функций

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \quad g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n-1}, \tag{13}$$

заданных рядами, сходящимися соответственно при $|z|>r_1$, $|z|>r_2$. В этом случае при подходящем выборе контура $\mathscr{L}$ из (12) непосредственно получается, что

$$\Psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n-1}, \tag{14}$$

где

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Последний ряд называется композицией Гурвица рядов (13). Применительно к рядам f, g Гурвиц показал, что если f и g — однозначные функции, имеющие соответственно особенности в точках α_i, β_j, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, то особенности функции Ψ могут быть только среди точек $\alpha_i+\beta_j$.

Естественно возникает вопрос об условии, при котором не меняется звезда Миттаг-Леффлера данной функции. В связи с этим Адамар получил следующий результат. Пусть задана аналитическая функция $f(z)$, имеющая только изолированные особые точки. Положим

$$F(z)=\int_0^1 v(t) f(zt)\, dt. \tag{15}$$

Если существует интеграл $\int_0^1 |v(t)|\, dt$, то звезда функции F совпадает со звездой функции f. Преобразование (15), таким образом, может привести лишь к перестановке особых точек либо, при сохранении их расположения, — к изменению их природы (например, к изменению порядка полюсов). В частности, если взять

$$v(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(1-t)^{\alpha-1}, \quad \alpha>0,$$

получим преобразование Римана—Лиувилля

$$F(z)=R^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\frac{f(zt)}{(1-t)^{1-\alpha}}\,dt, \tag{16}$$

использованное Адамаром в его теоремах о порядке сингулярности аналитической функции, о которых пойдет речь в дальнейшем.

Работам Адамара об аналитическом продолжении, и в частности «восхитительной маленькой монографии „Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение“, написанной Адамаром в 1901 г., было суждено вдохновить многих очень известных математиков, и не будет преувеличением сказать, что почти все из 350 публикаций 150 авторов, процитированных в недавней монографии Бибербаха об аналитическом продолжении, возникли прямо или косвенно под влиянием работы Адамара. . .» [II19, с. 109].

Лакунарные ряды и теорема о трех кругах

На одной из своих лекций 1880 г. К. Вейерштрасс привел пример степенного ряда, не продолжаемого за пределы окружности его сходимости, которая в этом случае называется барьером, или купюрой, функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{b^{n}},$$

где a — положительное число, а b — целое число, большее единицы.

Рассмотрение этого, а также других подобных примеров показывает, что явление, замеченное Вейерштрассом, тесно связано со свойством «лакунарности» степенного ряда.

Ряд

$$P(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{n}z^{\lambda_{n}} \tag{17}$$

называется лакунарным, если подпоследовательность $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, последовательности натуральных чисел содержит уходящие в бесконечность пробелы (лакуны) неограниченной длины.

Первая общая теорема о лакунарных рядах принадлежит Адамару [I7]. В ней утверждается, что ряд (17) непродолжаем за линию C, если выполняется условие

$$\lambda_{n+1} > (1+\theta)\lambda_n, \tag{18}$$

где θ — положительная константа. При выполнении неравенства (18) говорят, что ряд имеет адамаровские лакуны. Существуют многочисленные обобщения и уточнения этой теоремы (см., например, [III8]).

Степенной ряд расходится вне своего круга сходимости K. Однако может существовать подпоследовательность $S_{n_k}(z)$ его частных сумм, сходящаяся в некоторых точках вне K. Это явление называется сверхсходимостью. Сверхсходимость ряда связана с его лакунарностью, как видно уже из следующей теоремы А. Островского [III148]. Пусть ряд (17) имеет подпоследовательность частных сумм, сходящуюся в окрестности некоторой точки $z_0 \in C$. Тогда его можно представить в виде $P_1(z)+P_2(z)$, где $P_1(z)$ — ряд с адамаровскими лакунами, а $P_2(z)$ — ряд $\Sigma\gamma_n z^n$, сходящийся в круге, большем чем K.

При доказательстве теорем о сверхсходимости часто используется следующая теорема Адамара, имеющая чисто геометрическую формулировку. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в кольце $R_1 < |z| < R_2$. Обозначим:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

При этом $M(r)$ — возрастающая положительная непрерывная функция на интервале $\delta=(R_1, R_2)$. Теорема утверждает, что $M(r)$ логарифмически выпукла на δ, иными словами, заданная параметрически кривая $\xi= =\log M(r)$, $\eta=\log r$, $r \in \delta$, всюду лежит ниже любой стягивающей ее хорды.

В таком виде этот результат впервые был сформулирован Адамаром в заметке 1896 г. [I30] как геометрическая интерпретация одного свойства целых функций (для целых функций сказанное верно при всех $r>0$). Адамар не опубликовал доказательства этой теоремы. После работ Э. Ландау, Г. Харди и Г. Бора она упоминается в литературе как теорема Адамара о трех кругах и часто формулируется иначе: для любых $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$ имеет место неравенство

$$\begin{vmatrix} 1, & \log M(r_1), & \log r_1 \\ 1, & \log M(r_2), & \log r_2 \\ 1, & \log M(r_3), & \log r_3 \end{vmatrix} \leqslant 0. \tag{19}$$

Последнее означает, что площадь треугольника $A_1A_2A_3$ с вершинами в точках A_i $(\log M(r_i),\ \log r_i)$, ориентированного в положительном направлении, всегда неотрицательна (знак равенства в (19) достигается лишь для функций вида $f=cz^n$).

Теорема о трех кругах имеет многочисленные применения. На ней, в частности, основаны некоторые тонкие результаты Д. Литлвуда в теории чисел. Она также имеет важные аналоги, среди которых особенно интересна теорема Харди (1915 г.). При тех же условиях, что и выше, среднее

$$M_\alpha(r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha \, d\varphi \right\}^{1/\alpha}$$

есть возрастающая функция от α, логарифмически выпуклая относительно r, т. е. в (19) можно $M(r)$ заменить на $M_\alpha(r)$. Известно, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} M_\alpha(r) = M(r)$. Поэтому теорема Адамара получается как предельный случай из теоремы Харди.

Другое обобщение теоремы Адамара о трех кругах связано с понятием субгармоничности, которое можно рассматривать как распространение понятия выпуклости на n-мерное пространство R^n. Пусть D — область в R^n. Непрерывная функция $f(P)$, заданная на D, называется субгармонической на D, если выполняются такие условия: для любой области $G \subset D$ с границей ∂G решение задачи Дирихле $\Delta u=0$, $u\,|_{\partial G}=f$ удовлетворяет неравенству $u \leqslant f$. В одномерном случае уравнение Лапласа $\Delta u=0$ принимает вид $d^2u/dx^2=0$ и его решение — линейная функция $u=kx+b$. Упомянутая задача Дирнхле сводится к проведению прямой через две точки, лежащие на кривой. Поэтому субгармоничность обобщает понятие выпуклости кривой. Пространственным аналогом теоремы Адамара является следующая теорема о трех сферах (П. Монтель, 1928 г.). Пусть $f(P)$ — субгармоническая функция в слое $S=$

$=\{P \in R^n : R_1 < |P| < R_2\}$. Тогда функция $\log \max\limits_{|P|=r} |f(P)|$ выпукла в S относительно $\log r$ при $n=2$ и выпукла относительно r^{2-n} при $n>2$.

Теоремы Адамара, Харди, Монтеля, а также близкие им по содержанию теорема о трех плоскостях, теорема о трех цилиндрах, теорема о трех конусах и дальнейшее обобщение этого круга вопросов изложены в монографии И. И. Привалова [III50], не потерявшей значения и поныне.

Порядок сингулярности

Аналитическая функция всегда имеет хотя бы одну особую точку на границе C своего круга сходимости. В целом же поведение ее на этой окружности может быть разнообразным. Особые точки могут всюду плотно лежать на некоторой дуге или на всей окружности, которая тогда является купюрой функции. Сами особые точки могут быть разных типов, функция может иметь в них конечное значение (например, когда она непрерывна в замкнутом круге, но непродолжаема за него), или ее значение может быть бесконечным, когда, например, особая точка — полюс. Возможны и другие ситуации. Тем самым возникает вопрос о характеристике поведения функции на границе круга сходимости, точнее, о построении числовой шкалы, описывающей возможные случаи сингулярностей.

Такова задача, которую поставил себе Адамар в третьей части своей диссертации [I7]. Полученные им тонкие результаты по широте и законченности таковы, что мы имеем основание говорить об адамаровской теории сингулярностей степенного ряда на границе его круга сходимости. В дальнейшем предполагаем, что функция f задана рядом (2) и что $C=\{z : |z|=1\}$ — граница круга сходимости.

Прежде всего заметим, что если $f(z)$ регулярна в точке z_0, то этим же свойством обладают $f'(z)$ и $\int f(z)\,dz$. Если же $f(z)$ имеет в z_0 полюс, то совершенно ясен тип особенности в точке z_0 функций f' и $\int f dz$. Легко охарактеризовать действие этих операций на изолированные особенности иных типов.

Интеграл можно рассматривать как производную порядка —1, а повторное применение операции интегрирования приводит к производной порядка —2, и т. д. Таким образом, возникает шкала производных порядков 1, 2, . . ., —1, —2, . . ., которая введением оператора Римана—Лиувилля (16) может быть дополнена до множества операторов R^α, зависящих от непрерывного параметра α, $-\infty < \alpha < \infty$. При этом выполняется групповое свойство $R^\alpha R^\beta = R^{\alpha+\beta}$. Первоначально Адамар использовал операцию R^α, но впоследствии он заменил ее другой операцией, H^α, обладающей теми же свойствами, но более удобной в применении к степенному ряду.

Операция H^α определяется равенством

$$H^\alpha f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\alpha} z^n.$$

Эта операция улучшает или ухудшает сходимость ряда (2) в зависимости от знака α, однако она не меняет радиус его круга сходимости. Для характеристики функции f на окружности C используется еще одно понятие. Скажем, что вещественная или комплексная функция $u(\varphi)$ имеет на дуге (a, b) конечный пролет, если

$$\left| n \int_{a_1}^{b_1} u(\varphi)\, e^{in\varphi}\, d\varphi \right| < M,$$

где M не зависит от n и от дуги $(a_1, b_1) \subset (a, b)$.

Пусть (a, b) — дуга на окружности C. Назовем $\omega = \omega(a, b)$ порядком функции f на (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ функция $H^{\omega+\varepsilon} f$ непрерывна и имеет конечный пролет на (a, b), но хотя бы одно из этих свойств не имеет места для $H^{\omega-\varepsilon} f$. Если не существует числа ω, обладающего указанным свойством, то порядок ω считается равным $-\infty$.

Адамар доказал, что для функции $f(z)$ существует лишь одно число ω, удовлетворяющее данному определению, и что порядок $\omega(C)$ на всей окружности C выражается равенством

$$\omega(C) = 1 + \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n}.$$

«Мне представляется, — пишет С. Мандельбройт, — что адамаровская идея порядка не была полностью использована математиками младших поколений. Существенно более глубокие результаты, конечно, должны были следовать из этого понятия, столь богатого по содержанию. . .» [II19, с. 108].

Целые функции

До сих пор мы в основном говорили о работах Адамара по аналитическим функциям, имеющим особенности на конечном расстоянии. Столь же важны результаты Адамара по целым функциям, т. е. таким, которые могут быть заданы рядами (2), сходящимися при всех значениях z. К целым функциям, разумеется, относится и любой многочлен $p(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$. Многочлен можно представить в виде

$$p(z)=p(0)\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — нули $p(z)$. По аналогии с этим равенством для целых функций прежде всего возникают проблемы факторизации: разложение функций на множители, восстановление $f(z)$ по ее нулям. Целая функция может не иметь нулей (например, e^z), может иметь конечное число нулей ($p(z)\,e^z$), может иметь бесконечное множество нулей. Именно последний случай представляет основной интерес. Еще Эйлер показал, что для функции $\sin x=x-x^3/3!+\ldots$ имеет место тождество

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots, \tag{20}$$

а Гауссом была получена формула

$$\Gamma^{-1}(x)=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}, \tag{21}$$

где C — эйлерова постоянная, а Γ — гамма-функция Эйлера. Обе эти формулы справедливы при всех значениях z.

Теория фактически начинается с классической теоремы Вейерштрасса (1869 г.), которая заключается в следующем. Пусть $f(z)$ — целая функция, имеющая нуль кратности m в точке O, и пусть остальные ее нули расположены в порядке возрастания модулей $|z_1| < |z_2| < \ldots$ (нули не могут сгущаться на конечном расстоянии, так как иначе функция тождественно равна нулю). Тогда при всех z

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z)}, \tag{22}$$

где

$$P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n,$$

а g — некоторая целая функция. Экспоненциальные множители $e^{P_n(z)}$ обеспечивают сходимость произведения.

Несмотря на большое значение, эта теорема нуждается в уточнениях, так как степени $P_n(z)$ неограниченно возрастают вместе с n и ничего дополнительно не говорится о функции g. Поэтому возникает вопрос о нахождении условий, при которых выражение (22) будет иметь более обозримый вид. Первые существенные результаты, связанные с уточнением формулы (22), принадлежат Э. Лагерру, который ввел понятие жанра (или рода) целой функции, определяемое им следующим образом. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность нулей функции $f(z)$ и ν — такое натуральное число, что ряд $\sum |z|^{-\nu}$ сходится при $\nu = N+1$ и расходится при $\nu = N$. Если, кроме того, в равенстве (22) P — многочлен степени m, то число $p = \max\{m, N\}$ называется жанром функции $f(z)$. Если $p = 0$, то жанр f — нуль и f можно представить в виде

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Так, согласно (20), $\sin x/x$ как функция аргумента x^2 имеет жанр нуль.

Как заметил Лагерр (1872 г.), понятие жанра позволяет, не усложняя доказательства, существенно уточнить результат Вейерштрасса. Если жанр f равен k, то имеет место представление (22), где g — полином степени k, а все P_n могут быть заданы в виде

$$P_n = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

(т. е. имеют одну и ту же степень k).

Обозначим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. С этой функцией мы уже встречались, когда цитировали теорему Адамара о трех кругах. Если f — целая функция, то функция $M(r)$ определена и непрерывна при всех $r > 0$ и, кроме того, монотонно возрастая, стремится к бесконечности при $r \to \infty$.

В мемуаре Адамара [19] были доказаны следующие две важные теоремы:

А) если

$$|c_n| < (n!)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

то при достаточно большом r

$$M(r) < e^{Hr^{1/\alpha}};$$

Б) если

$$|c_n| < K(n!)^{-\lambda}, \quad K = \text{const}, \quad \lambda > 0, \tag{23}$$

то жанр функции f равен целой части числа λ.

Эти результаты нашли впоследствии многочисленные применения. Одно из них мы находим в «Новых методах небесной механики» Пуанкаре [II52, т. 3]. Рассматривая задачу трех тел, он задает гамильтониан системы в виде целой функции некоторого параметра μ и в разделе, озаглавленном «Применение теоремы Адамара», определяет жанр согласно теореме Б).

Заключительная часть мемуара [19] посвящена приложениям общих теорем о рядах к знаменитой дзета-функции Римана $\zeta(z)$. Эта функция, играющая исключительную роль в теории чисел и вообще представляющая большой интерес, определена и регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=1$, где она имеет полюс первого порядка. В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ функция ζ задается рядом Σn^{-z}.

Историческая проблема распределения простых чисел связана с вопросом о нулях $\zeta(z)$, точнее, о тех из них, которые являются комплексными и расположены в «критической полосе» $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ (за ее пределами $\zeta(z)$ имеет лишь вещественные нули $-2, -4, \ldots$, но они не играют существенной роли в теории). Обо всем этом мы расскажем в главе «Теория чисел», а пока ограничимся замечаниями, показывающими значение приведенных выше результатов.

Основываясь на своих теоремах о целых функциях, Адамар подтвердил предположение Римана о комплексных нулях дзета-функции: ряд $\Sigma \mid \rho_n \mid^{-1}$ расходится (следовательно, нулей ρ_k бесконечное множество), ряд $\Sigma \mid \rho_n \mid^{-2}$ сходится. Этот результат был получен обходным путем. Вместо $\zeta(z)$ Адамар рассматривал другую функцию, $\xi(t)$, также введенную Риманом,

$$\xi(t) = \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)(z-1)\,\pi^{-z/2}\zeta(z), \qquad t = (2z-1)/2i. \tag{24}$$

Полюсы функции $\Gamma(z/2+1)$ в силу (21) расположены в точках $z=-2, -4, \ldots$, т. е. как раз в тех точках, где $\zeta(z)$ имеет вещественные нули; единственный полюс функции $\zeta(z)$ погашается множителем $z-1$, поэтому $\xi(t)$ — целая функция. Отправляясь от равенства (24), записанного в несколько иной форме, Адамар составил разложение $\zeta(t)$ в степенной ряд:

$$\zeta(t) = b_0 + b_2 t^2 + \ldots$$

(ξ к тому же — четная функция от t) и показал, что при любом $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого n имеет место неравенство

$$|b_m| < \frac{c}{(m!)^{1/2+\varepsilon}},$$

которое в сопоставлении с (23) дает $\lambda = 1/(2+\varepsilon)$, и, таким образом, для ξ как функции от t^2 жанр равен нулю. Поэтому

$$\xi(t) = \xi(0)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{a_k^2}\right),$$

где α_k — нули $\xi(t)$. Отсюда вытекает приведенное выше свойство комплексных нулей функции $\zeta(z)$.

Надо сказать, что вопрос о функциях нулевого жанра, т. е. условие представимости их в виде

$$f = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

обсуждался в литературе еще длительное время после того, как понятие жанра отошло на второй план. Как показал в 1881 г. Пуанкаре, необходимое условие того, что функция f имеет жанр нуль, выражается равенством

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\log M(r)=0, \tag{25}$$

если этот предел существует. Он же отметил, что этого условия, вообще говоря, недостаточно. В 1921 г. Адамар в письме, адресованном Ландау, предположил, что условие Пуанкаре становится достаточным, если дополнительно потребовать, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M(n)\, n^{-2}$ был сходящимся. В ответном письме Ландау доказал эту гипотезу. Он же установил, что условие (25) может быть заменено более слабым:

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{-1}\log M(r)=0.$$

(Переписка велась на итальянском языке. Упомянутые письма опубликованы, см.: [I341. Т. I. С. 167—173]*)).

К середине 90-х годов минувшего столетия обнаружилось, что понятие жанра, несмотря на его значение для приложений, вообще говоря, носит слишком общий характер и недостаточно для некоторых более тонких рассмотрений. Поэтому были введены также и другие числовые характеристики, прежде всего порядок целой функции.

Заметим сначала, что для функции $f=z^m$, очевидно, $M(r)=r^m$, а для любого полинома $p=c_0+c_1z+\ldots+$ $+c_mz^m$, поскольку его рост характеризуется членом наибольшей степени, $M(r)=|c_m|\,r^m$. Но так как любую целую функцию можно рассматривать как полином бесконечной степени, для нее $M(r)$ растет быстрее, чем r^m при любом m. Например, пусть $f=e^{z^2}$. При этом $M(r)=e^{r^2}$ и

$$\lim_{r\to\infty} \log M(r)/\log r=\infty.$$

Однако для той же функции e^{z^2} мы можем получить конечное значение предела этого отношения, если заменим $\log M(r)$ функцией, растущей медленнее:

$$\lim_{r\to\infty} \log\log M(r)/\log r=2.$$

Для многих функций, встречающихся в анализе, предел, стоящий в левой части этого равенства, существует,

*) Современное состояние вопроса см. в книге [II179, с. 34]

и его принимают за порядок ρ роста целой функции. В общем случае порядок роста, согласно Э. Борелю (1896 г.), определяется равенством

$$\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \log \log M(r)/\log r.$$

Если ρ имеет конечное значение, говорят, что f — функция конечного роста. Для полинома всегда $\rho=0$. Для функций e^z, $\sin z$, e^{e^z} порядок ρ соответственно равен 1, 1, ∞.

Другой характеристикой целых функций, также введенной Борелем, является показатель $\varkappa$, определяемый как нижняя грань тех ν, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-\nu-1},$$

где $z_1, z_2, \ldots$ — нули целой функции. Если порядок ρ характеризует максимально возможную быстроту роста модуля функции, то $\varkappa$, можно сказать, является показателем плотности распределения нулей данной функции. Для $f=\sin \pi z$, согласно этому определению, $\varkappa=1$, ибо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\nu-1} < \infty$ при $\nu > 0$.

Для величины $\varkappa$ Адамаром было получено выражение

$$\varkappa = \varlimsup_{n \to \infty} \log n/\log |z_n|,$$

кроме того, им было показано, что

$$\varkappa \leqslant \rho.$$

И наконец, как итог предыдущих совместных усилий Пуанкаре, Адамара и Бореля была получена следующая теорема.*)

Пусть $f(z)$ — функция конечного порядка ρ, имеющая при $z=0$ нуль кратности m. Пусть показатель сходимости нулей $z_1, z_2, \ldots$ этой функции равен $\varkappa$. Тогда

$$f = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z)}, \qquad (26)$$

*) Этот результат содержится во второй части мемуара Адамара [I9]. Приведенная его эквивалентная формулировка принадлежит Борелю (см.: [III40. Т. 1. С. 227—229], а также [III66, п. 8.24]).

где g — многочлен степени не выше ρ и

$$P_n = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k,$$

причем $[\varkappa] < k < [\varkappa]+1$.

Современная теория целых функций выглядит во многом иначе, чем в начале века, но формула (26) сохраняет значение и часто помогает там, где требуется факторизация.

В своем основном мемуаре о целых функциях [19] Адамар рассмотрел также следующий вопрос, который обошли другие авторы. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и $\{z_n\}$ — последовательность ее нулей. Обозначим

$$m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Функция $m(r)$ непрерывна и не возрастает. Что можно сказать о росте функции $M_1(r)=1/m(r)$? Так как $f(z)=0$ на окружностях $|z|=|z_n|$ и, значит, $m(z_n)=0$, исключим из плоскости кружки с центрами в точках z_n. Результат, грубо говоря, сводится к тому, что при подходящем выборе радиусов этих кружков порядок роста функции $M_1(r)$ в остающейся части плоскости равен ρ.

Известно, что для любого полинома $p(z)$ и всякого числа A найдется хотя бы одно значение z, такое, что $p(z)=A$. Распространением этого элементарного факта на целые функции $f(z)$ является глубокая теорема Пикара. Функция $f(z)$ принимает любое значение, за исключением, может быть, одного. Э. Пикар доказал эту теорему совершенно общего характера, опираясь на свойства так называемых модулярных функций. Естественно, возник вопрос о доказательстве теоремы Пикара без обращения к модулярным функциям. Такое доказательство было найдено Адамаром в работе [19] для класса функций $f(z)=c_0+c_1z+\ldots$, удовлетворяющих условию

$$|c_n| < K(n!)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Вскоре Борелю удалось снять это ограничение. Им же была доказана следующая любопытная теорема. Пусть заданы семейство целых функций $F_A=f(z)-A$ с параметром A и $\varkappa(A)$ — показатель сходимости нулей функции F_A. Тогда для любых A_1, A_2, за исключением, может быть, одного значения A, зависящего лишь от функции $f(z)$, справедливо равенство $\varkappa(A_1)=\varkappa(A_2)$.

Эти результаты Пикара и Бореля относятся к проблеме распределения значений целых функций. Теория распределения значений мероморфных функций начала складываться лишь в 20-х годах нашего века, однако ее исходным рубежом явилась теорема Иенсена, датируемая 1898 годом (о ней см., например: [III66, с. 147)]. Теорему Иенсена Адамар относил к числу упущенных им возможностей. В главе «Личные случаи» его книги [I339] говорится, что, размышляя над теоремой Пикара, он получил одну формулу, но не отдавал себе в ней отчета: «. . .пока через много лет Иенсен ее не опубликовал и не отметил как ее непосредственное следствие результаты, которые я, к счастью для моего самолюбия, уже получил. . .» [I339, с. 50].

Можно, однако, назвать немало примеров безразличия Адамара к вопросам приоритета, когда дело касалось его лично. Так, несколькими строками ниже приведенной цитаты, имея в виду теорему, носящую имя Прингсгейма,*) Адамар говорит, что она — настолько очевидное следствие результатов его диссертации, что коллеги приписывали эту теорему ему, но он был вынужден признаться, что ее не заметил.

Результаты Адамара по особенностям аналитических функций и по теории целых функций давно стали достоянием учебников, породили сотни работ других авторов. Сам Адамар еще в молодости покинул теорию аналитических функций, но прежде чем с ней расстаться, он выполнил при помощи ее методов работу о распределении простых чисел — шедевр, приумноживший его славу. О ней пойдет речь в следующей главе — «Теория чисел».

Сходимость числовых рядов

Время от времени Адамар обращается к различным вопросам теории рядов, специальных функций и т. п. — тем объектам классического математического анализа,

*) Если R — радиус сходимости степенного ряда $f(z)=c_0+c_1z+\ldots$ с вещественными положительными коэффициентами, то $z=R$ — особая точка функции $f(z)$ [III66, с. 247].

о которых мы узнаем из начального курса высшей математики. И даже в эту, казалось бы, завершенную к концу XIX в. область ему удалось внести нечто новое. В 1894 г. появилась работа Адамара [113], посвященная исследованию сходимости числовых рядов с положительными членами. Отправным пунктом послужило наблюдение Н. Абеля, согласно которому для любого расходящегося ряда $\sum u_n$ с положительными членами можно построить последовательность $(\varphi\, n)$, стремящуюся к нулю и такую, что ряд $\sum u_n \varphi\,(n)$ расходится. П. Дюбуа-Реймон дополнил это утверждение, доказав, что сколь бы медленно ни сходился ряд $\sum u_n$, его члены можно умножить на элементы стремящейся к бесконечности последовательности, не нарушив его сходимости.

Говоря не вполне точно, можно как вывод из обеих теорем сформулировать следующую закономерность. Каков бы ни был сходящийся (расходящийся) ряд с положительными членами, существует другой такой же ряд, сходящийся (расходящийся) медленнее. Адамар обобщает этот факт на последовательности рядов, доказывая, что всегда можно найти сходящийся (расходящийся) ряд, который сходится (расходится) медленнее каждого из сходящихся (расходящихся) рядов, образующих данную последовательность.

А вот еще один результат Адамара, установленный в работе [113]. Пусть дана последовательность $\{\varphi_p(n)\}_{p\geqslant 1}$ функций целочисленного аргумента n, возрастающих и стремящихся к бесконечности все медленнее с ростом p. Тогда можно найти положительные числа u_n, так, чтобы ряд $\sum u_n$ сходился, а все ряды $\sum u_p \varphi_p\,(n)$ расходились.

Через несколько лет Адамар вернулся к этой тематике в статье [178], в которой дал ответ на следующий вопрос: каким образом нужно выбрать последовательность $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, чтобы построенный по любому сходящемуся (абсолютно или нет) ряду $\sum u_n$ ряд $\sum u_n \xi_n$ также сходился? Оказалось, что необходимым и достаточным условием является сходимость ряда $\sum (\xi_{n+1} - \xi_n)$.

Неравенство для определителя

В работах Адамара по теории аналитических функций важную роль играют некоторые определители, составленные из коэффициентов ряда, задающего функцию. Естественно предположить, что, занимаясь диссертацией, он задался вопросом об оценке значения произвольного определителя n-го порядка. Действительно, сразу же после диссертации появляется его статья «О максимуме модуля определителя» [I10]. В ней было доказано, что для любого определителя n-го порядка $\Delta = \det(a_{ij})$ имеет место неравенство

$$|\Delta| \leqslant \prod_j \Big(\sum_i |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}, \qquad (27)$$

которое поистине стало классическим — «самое известное неравенство для определителей» (см.: [III5, с. 159]). В 1961 г. Э. Беккенбах и Р. Беллман писали: «Результат Адамара привлекает и продолжает привлекать к себе большое внимание. Имеется около ста опубликованных и неопубликованных его доказательств» [III5, с. 129]. Из (27) при $|a_{ij}| < M$ следует:

$$|\Delta| < M^n n^{1/2}.$$

Эта оценка значительно точнее неравенства $|\Delta| < M^n n!$, которое непосредственно получается, если Δ развернуть по элементам какого-либо его столбца.

Для вещественных a_{ij} неравенство (27) имеет простой геометрический смысл. Если заданы векторы $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, выходящие из точки O, то Δ с точностью до знака выражает объем V параллелепипеда, построенного на них. Неравенство (27) означает, что при произвольном вращении векторов $\mathbf{r}_i$ объем V имеет наибольшее значение, когда они ортогональны. При $n=3$ это вытекает из формулы $V=Sh$, где $S = |\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_2| \sin\varphi$, $h = |\mathbf{r}_3| \cos\theta$, причем смысл величин S, h, φ, θ ясен. В качестве примера определителя, для которого в (27) достигается равенство, Адамар приводит определитель Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_{n-1} \\ 1, & \varepsilon_1^2, & \ldots, & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \varepsilon_1^{n-1}, & \ldots, & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (28)$$

В настоящее время H-матрицами в честь Адамара (Hadamard) называют $(n \times n)$-матрицы с ортогональными столбцами, для которых $|a_{ij}|=1$ и, следовательно, как и в (28), $\Delta = n^{n/2}$. Как указывает Адамар, H-матрицы с элементами $a_{ij}=\pm 1$, $\pm i$ в связи с одной комбинаторной задачей рассматривал известный английский алгебраист Дж. Сильвестр еще в 1867 г.

Особенно важен случай вещественных H-матриц, $a_{ij}=\pm 1$. В отличие от матриц с комплексными элементами они могут существовать не для всех n. Ясно прежде всего, что для любого $n=2^m$ такие матрицы существуют. Действительно, будем считать элементы сверху вниз и возьмем в первом столбце все элементы равными 1. Во втором столбце положим первые $n/2$ элементов равными 1, а вторые равными —1. В третьем столбце последовательно положим $n/4$ элементов равными 1 и —1 и т. д. В последнем — поочередно 1 и —1. Ясно, что тут все столбцы ортогональны. Несколько сложнее доказывается установленный Адамаром факт: любая вещественная H-матрица может иметь лишь порядок, кратный четырем, $n=4m$. В конце работы «Решение одного вопроса о детерминантах» [I11] указана процедура построения вещественной H-матрицы порядков $n=12$ и $n=20$.

Адамар не мог подозревать, что такие матрицы впоследствии найдут применение в теории кодирования. Само понятие кода старо, как мир, но лишь с начала 60-х годов нашего века теория кодирования оформляется в самостоятельную дисциплину. Исходным пунктом ее математической формализации является слово, задаваемое как n-мерный вектор $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ с числовыми координатами. Код представляет собой некоторое преобразование F этого вектора в другой вектор, $\mathbf{y} : \mathbf{y}=F\mathbf{x}$. Важнейшими являются линейные коды, для которых $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$, где A — та или иная матрица (она называется матрицей, порождающей код). Вводится понятие расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ между словами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ как число тех k, для которых $x_k \neq x'_k$. Например, $d=2$ для слов$(1/2, 3, 0)$ и $(1, 3, 2)$. В настоящее время слова большей частью задаются в виде векторов, у которых $x_k=0$ или $x_k=1$, а кодовая матрица выбирается с элементами $a_{ij}=0$ или $a_{ij}=1$, так что $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ тоже выражается в двоичной системе, $y_i=0$ или $y_i=1$.

Кодом Адамара называется матрица, которая получается из H-матрицы заменой в ней -1 на 0. Этот код обладает рядом важных свойств, одно из которых — сохранение расстояния между словами: $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}')=d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Задача построения кодов Адамара сводится к нахождению матриц Адамара различных порядков n. Как мы говорили, порядок n должен быть кратным четырем, $n=4m$, но до сих пор не известно, существует ли для любого m матрица Адамара. Для достаточно больших m это установлено, но неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка 268 (это наименьший порядок, для которого матрица Адамара еще не построена).*)

Теория кодирования — одно из сравнительно недавних приложений неравенства (27). Но наш рассказ был бы неполным без упоминания о роли этого неравенства Адамара в созданной в начале XX в. теории интегральных уравнений. И. Фредгольм (1900 г.) весьма полно исследовал уравнения вида

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\,\psi(t)\,dt=f(x), \tag{29}$$

названные впоследствии его именем. Здесь ψ — неизвестная функция, ядро K и правая часть f заданы, а λ — комплексный параметр. Предполагается, что ядро непрерывно на квадрате $a \leqslant x, t \leqslant b$, а функция f кусочно-непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$. Заменяя интеграл конечной суммой, Фредгольм свел уравнение (29) к системе n линейных алгебраических уравнений, записал приближенное выражение для $\psi(x)$, а затем предельным переходом при $n \to \infty$ получил точное решение в виде

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, t;\lambda)\,f(t)\,dt,$$

где

$$\Gamma(x, t; \lambda)=\frac{\mathscr{D}(x, t; \lambda)}{\mathscr{D}(\lambda)}$$

---

*) О кодах Адамара и о кодировании вообще см. непростую, но увлекательную книгу [III3].

— выражение, называемое резольвентой уравнения (29). Здесь числитель и знаменатель задаются рядами

$$\mathcal{D}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n,\quad \mathcal{D}(x,\ t;\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x,\ t)\,\lambda^n,$$

коэффициенты которых α_n и β_n выражаются в виде некоторых определителей порядка n. Основываясь на неравенстве Адамара, Фредгольм установил, что оба эти ряда — целые функции и что, следовательно, их отношение Г — мероморфная функция от λ.

Рассказывая в своей книге о психологии математического творчества об упущенных им возможностях, Адамар писал: «Продолжая разговор о моих промахах, я отмечу еще один случай, о котором я особенно сожалею: речь идет о знаменитой задаче Дирихле, которую я в течение многих лет пытался решить тем же методом, который избрал Фредгольм. . . Но физическая интуиция — гид, вообще говоря, верный и часто мне помогавший, на этот раз сбила меня с пути. . .» [I339, с. 51]. Он мог, однако, утешить себя тем, что его результаты оказались для теории Фредгольма очень важными.

Теория чисел

Одним из триумфов теории аналитических функций XIX в. явилось доказательство Ж. Адамаром и Ш. Валле-Пуссеном в 1896 г. теоремы об асимптотическом распределении простых чисел. Этой теореме принадлежит особое место в аналитической теории чисел — дисциплине, исследующей теоретико-числовые задачи на основе методов математического анализа.

В XVIII в. какие-либо закономерности в чередовании простых чисел не были найдены. В 1747 г. Л. Эйлер писал: «Математики до сих пор тщетно пытались открыть какой-либо порядок в последовательности простых чисел и поэтому поверили, что это — тайна, в которую человеческий ум никогда не сможет проникнуть. Чтобы убедиться в этом, достаточно бросить взгляд на таблицы простых чисел, которые несколько человек дали себе труд продолжить за сто тысяч. Из таблиц увидим, что там нет никакого закона» [III100, с. 639].

Применение ЭВМ в наши дни позволило составить таблицы простых чисел, простирающиеся до совершенно фантастических величин, но это только подтвердило представление о хаотичности их чередования. Еще в XVIII в. возник вопрос об асимптотическом распределении простых чисел.

Пусть заданы x первых чисел натурального ряда, и пусть $\pi(x)$ — число тех из них, которые являются простыми. Что можно сказать об отношении $\pi(x)/x$, когда $x \to \infty$? Эта проблема, занимавшая умы крупнейших математиков, поистине стала исторической. После того как Адамар и Валле-Пуссен одновременно и независимо друг от друга решили ее, другими учеными были найдены решения с помощью иных методов. Последующие исследования показали, как широк спектр теорий, связанных с данной проблемой: тауберовы теоремы, гармонический анализ, ряды Дирихле. Окончательный результат формулируется просто:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{1}$$

где $u(x) \sim v(x)$ означает, что $\lim u(x)/v(x)=1$ при $x \to \infty$.

Проследим за развитием идей предшественников Адамара по пути доказательства асимптотики (1). Пусть $n=1, 2, \ldots$ и $p_1, p_2, \ldots$ — последовательности всех натуральных и простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. В необъятном научном наследии Эйлера имеется равенство исключительной важности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}, \quad s>1. \tag{2}$$

Оно непосредственно вытекает из того, что любое целое число n можно единственным образом представить в виде произведения $p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые числа, $k_1, \ldots, k_m$ — целые числа. При этом в обеих частях равенства (2) имеются все произведения такого вида и каждое из них входит лишь по одному разу. Для любого $s>1$ левая и правая части (2) имеют вполне определенное числовое значение, поскольку ряд Σn^{-s} при этом сходится (это немедленно влечет за собой сходимость ряда Σp_i^{-s}, а значит, и произведения в (2)). Тождество Эйлера (2) играет основную роль в теории простых чисел. Оно допускает целый каскад обобщений, некоторые из которых будут указаны ниже.

А. Лежандр первым доказал, что отношение $\pi(x)/x$ стремится к нулю при $x \to \infty$. В 1798 г. он предположил, что функция $\log x - x/\pi(x)$ имеет при $x \to \infty$ конечный предел, равный 1.083. . ., откуда, очевидно, вытекает соотношение (1). В 1808 г. в Париже вышел объемный трактат Лежандра «Опыты по теории чисел» [III 131], в котором были суммированы все известные к тому времени сведения по этой дисциплине.

Свою первую работу по распределению простых чисел П. Л. Чебышев выполнил в 1848 г. [III71], в возрасте 27 лет. В ней он показал, что если отношение $\pi(x)\log x / x$ при $x \to \infty$ стремится к некоторому пределу A, то $A=1$. В работе «О простых числах» [III174] Чебышев установил, что начиная с некоторого достаточно большого x справедливы неравенства

$$0.92129 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1.10555 \frac{x}{\log x}. \tag{3}$$

Введя функции

$$\theta(x) = \sum_{p<x} \log p, \qquad \psi(x) = \sum_{p^m<x} \log p$$

(во втором случае суммирование ведется по всем натуральным m и простым числам p, для которых $p^m < x$), он доказал, что при $x \to \infty$ отношения

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}, \quad \frac{\theta(x)}{x}, \quad \frac{\psi(x)}{x}$$

имеют одинаковые верхние и нижние пределы. Таким образом, если одно из отношений имеет предел, то же справедливо и для двух других, причем все три предела одинаковы. Этот результат сыграл существенную роль в последующих доказательствах асимптотического закона распределения простых чисел. Соответственно в литературе асимптотический закон записывается часто в виде соотношений

$$\psi(x) \sim x \quad \text{либо} \quad \theta(x) \sim x. \tag{4}$$

Неравенства (3) в 1881 г. уточнил английский алгебраист Сильвестр [III171]. Он доказал, что начиная с некоторого x функция $\pi(x)$ заключена в еще более узких пределах. Сильвестр заканчивает свою работу словами: «Чтобы с уверенностью провозгласить существование такой возможности (доказать (1). — *Авт.*), нам, вероятно, нужно подождать, пока не родится кто-то, превосходящий Чебышева по проницательности и глубине, подобно тому как Чебышев показал свое превосходство в этих качествах по сравнению с другими» [III171, с. 247]. По поводу этой цитаты Э. Ландау замечает: «Когда Сильвестр писал эти строки, Адамар уже родился. Адамару удалось достичь результата, причем на пути, которым задолго до этого, но с другой целью, шел Риман» [III126. Т. I. С. 44].

Гаусса асимптотический закон интересовал с юности на протяжении всей жизни. В старости он говорил, что любит ежедневно посвящать ему четверть часа. Хотя Гаусс результатов не опубликовал, в письме к Энке от 24 декабря 1849 г. [III106, с. 444—447] он сообщает, что, занимаясь таблицей логарифмов в 1792—1793 гг., пришел к формуле

$$\pi(x) \sim \operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}. \tag{5}$$

В 1859 г. в Берлине была опубликована работа Б. Римана «О количестве простых чисел, не превышающих данную величину» [III159] (см. также [III55]). Для аналитической теории чисел и теории функций это небольшое по объему исследование (публикация занимает всего восемь страниц) оказалось поистине пророческим. Принципиально новый шаг, сделанный Риманом, прежде всего состоял в том, что он предложил рассматривать ряд $\sum n^{-s}$ при комплексных значениях s, $s=\sigma+it$. Определенную таким образом аналитическую функцию Риман обозначил $\zeta(s)$. Тем самым на службу теории чисел был поставлен аппарат теории аналитических функций с такими мощными средствами, как контурное интегрирование, аналитическое продолжение, теория вычетов (а впоследствии, в работах Адамара и других, — теория целых функций). Идея Римана приводит к рассмотрению тождества Эйлера и при комплексных s,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{6}$$

причём, как и выше, сумма слева берется по всем натуральным n, а произведение справа — по всем простым p. Ряд (6) сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, и каждое его слагаемое — регулярная функция в этой полуплоскости. Следовательно (по теореме Вейерштрасса о сходимости ряда регулярных функций), его сумма, т. е. $\zeta(s)$, — регулярная функция при $\sigma > 1$. Из (6) логарифмическим дифференцированием получается равенство

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_m \sum_p \frac{\log p}{p^{ms}}, \tag{7}$$

встречавшееся ранее у Чебышева при вещественных s.

В работе [III159] Риман доказал следующие три утверждения.

I. Функция $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость $s=\sigma+it$, при этом она оказывается мероморфной, точнее, имеющей единственную особенность — простой полюс в точке $s=1$ с вычетом (коэффициентом при $(s-1)^{-1}$), равным единице.

Таким образом,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \ldots \tag{8}$$

(В дальнейшем под $\zeta(s)$ будем подразумевать функцию, определенную при $\sigma < 1$ рядом (6), аналитически продолженную на всю плоскость s).

II. Имеет место «функциональное уравнение»

$$\zeta(1-s) = s(s-1)\pi^{-s}\Gamma(s/2)\zeta(s), \tag{9}$$

связывающее ζ с гамма-функцией Эйлера, во многом более простой и хорошо изученной. Для некоторых вещественных значений s это равенство было найдено Эйлером. Поскольку при $\sigma > 1$ вещественная часть числа $1-s=1-\sigma-it$ отрицательна, то равенство (9) определяет значения функции ζ слева от мнимой оси. Полоса, разделяющая полуплоскости $\sigma > 1$ и $\sigma < 0$, называется критической.

Заметим, что равенство

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots,$$

полученное еще Эйлером для вещественных s, позволяет продолжить $\zeta(s)$ с полуплоскости $\sigma > 1$ на полосу

$0 < \sigma \leqslant 1$, поскольку ряд, стоящий справа, сходится при любом $\sigma > 0$.

Особую роль в распределении простых чисел играет вопрос о нулях дзета-функции. Это видно уже из того, что формула Эйлера (2) теряет смысл, если $\zeta(s)=0$, поскольку бесконечное произведение расходится, если его предел — нуль. При $\zeta(s)=0$ теряют смысл также равенство (7) и другие важные соотношения. О нулях дзета-функции можно сделать такое заключение: $\zeta(s)$ не обращается в нуль при $\sigma > 1$. Действительно, ни один из множителей в (7) не равен нулю, и поскольку это произведение сходится при $\sigma > 1$, его значение (т. е. $\zeta(s)$) отлично от нуля. Из равенства (8) и свойств гамма-функции следует, что $\zeta(s)$ имеет нули в вещественных точках -2, -4, . . . (см. об этом с. 77—78). Основную роль, как предвидел Риман, играют остальные, комплексные, нули, называемые нетривиальными нулями дзета-функции.

III. Все нетривиальные нули находятся в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Их бесконечное множество, они расположены симметрично относительно прямых $t=0$ и $\sigma=1/2$.

Риман высказал даже более точное предположение. Оно и составляет знаменитую, до сих пор не доказанную, гипотезу Римана: все нули дзета-функции, находящиеся в критической полосе, расположены симметрично относительно прямой $t=0$ и находятся на прямой $\sigma=1/2$.

Пусть $N(T)$ — число нулей функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$. Риман показал [III59], что $N(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.*) Более того, в бумагах Римана после его кончины было найдено следующее соотношение (см.: [III55, с. 501]):

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + o(\log T). \qquad (10)$$

Мы сказали выше, что единственной особенностью дзета-функции является полюс первого порядка в точке $s=1$. Следовательно, $(s-1)\zeta(s)$ — целая функция. Опираясь на свои результаты о целых функциях, Адамар установил [I36], что жанр $(s-1)\zeta(s)$ равен единице и,

*) Подробнее о работе Римана и развитии его идей см.: [III65, III25, III98].

следовательно, ее вейерштрассово произведение во всей плоскости s имеет вид

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}e^{As+B}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}, \tag{11}$$

где произведение $\prod_{\rho}$ берется по всем нулям дзета-функции, вещественным или комплексным. В дальнейшем Адамар использовал это соотношение, и, кроме того, ему удалось улучшить утверждение Римана III.

Наконец, в работе [I36] Адамаром было дано строгое доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. Основные моменты этого доказательства таковы.

1°. Можно ожидать, что прямая $\sigma=1$, являющаяся границей полуплоскости, в которой $\xi(s)$ может быть задана рядом Σn^{-s}, ирает особую роль во всей теории. В качестве первого шага Адамар устанавливает, что на этой прямой дзета-функция отлична от нуля: *)

$$\zeta(1+it)\neq 0. \tag{12}$$

Приведем принадлежащее в существенных чертах Адамару изящное доказательство этого неравенства, следуя книге [III25, с. 41]. Отправным пунктом является тождество (7), согласно которому

$$\log\zeta(s)=\sum_{m}\sum_{p}\frac{1}{mp^{ms}},$$

где p пробегает все простые, а m — все целые положительные числа. Отсюда получаем

$$\log|\zeta(\sigma+it)|=\operatorname{Re}\sum_{n=2}^{\infty}c_n n^{-\sigma-it}=\sum_{n=2}^{\infty}c_n n^{-\sigma}\cos(t\log n),$$

где $c_n=m^{-1}$, если n — m-я степень простого числа, и $c_n=0$ в противном случае. Следовательно,

$$\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}c_n n^{-\sigma}\{3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\}.$$

---

*) Впоследствии выяснилось, что это утверждение равносильно асимптотическому закону распределения простых чисел (см.: [III25], гл. 2).

Правая часть этого равенства неотрицательна, поскольку $c_n \geqslant 0$ и

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2.$$

Итак, при $\sigma > 1$

$$\{(\sigma - 1)\zeta(\sigma)\}^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geqslant \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Допустим, что $\zeta(1+it)=0$ при некотором t. Так как $s=1$ — простой полюс функции ζ с вычетом 1 и других полюсов у нее нет, то, переходя к пределу при $\sigma \to 1+0$ в левой части последнего неравенства, получаем конечное выражение

$$|\zeta'(1 + it)|^4 |\zeta(1 + 2it)|.$$

Правая часть того же неравенства, разумеется, стремится к бесконечности, и полученное противоречие доказывает неравенство (12).

2°. Далее Адамар устанавливает асимптотическое соотношение

$$\sum_{p \leqslant x} \log p \log \frac{x}{p} \sim x, \quad x \to \infty. \tag{13}$$

Он исходит из интеграла

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} s^{-2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^{-s} ds, \tag{14}$$

где a — произвольное число больше единицы. (Поскольку подынтегральная функция регулярна при $\sigma > 1$, здесь нет необходимости фиксировать значение a). Используя равенство (7) и доказываемую непосредственно формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} s^{-2} x^s ds = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \log x, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

Адамар приходит к тождеству

$$J(x) = \sum_k \sum_p \log p \log\left(\frac{x}{p^k}\right),$$

где $p^k < x$, p — простое, k — целое. Нетрудно проверить, что сумма членов, отвечающих $k > 1$, равна

$o(x)$ при $x \to \infty$. Действительно, $2^k < p^k < x$, и поэтому $k < \log x / \log 2$. Кроме того,

$$\sum_{p<x^{1/k}} \log p \log\left(\frac{x}{p^k}\right) \leqslant \log x \log \prod_{p<x^{1/k}} p \leqslant$$
$$\leqslant \log x \log \Gamma(1 + x^{1/k}) \leqslant \text{const}\, x^{1/k} (\log x)^2$$

и, окончательно,

$$J(x) = \sum_{p<x} \log p \log \frac{x}{p} + O(x^{1/2} (\log x)^3). \qquad (15)$$

3°. Теперь тот же интеграл (14) вычисляется иначе, с помощью теоремы о вычетах и равенства (7). Напомним, что если $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то вычетом A функции $f(z)$ относительно точки z_0 называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ этого ряда, т. е. $A = c_{-1}$. Пусть $f(z)$ — однозначная функция, регулярная на множестве $\bar{D}$, кроме, может быть, точек $z_k \in D$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i\, (A_1 + \ldots + A_m),$$

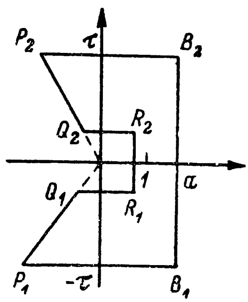


Рис. 2.

где A_k — вычет $f(z)$ относительно точки z_k (теорема о вычетах).

Пусть τ — достаточно большое положительное число. Адамар дополняет вертикальный отрезок B_1B_2, где $B_1 = a - i\tau$, $B_2 = a + i\tau$, до замкнутого контура ломаной $\mathscr{L} = B_1P_1Q_1R_1R_2Q_2P_2B_2$ (рис. 2), не содержащей нулей ζ-функции. Область, ограниченную этим контуром, обозначим через D. По теореме о вычетах,

$$\int_{a-i\tau}^{a+i\tau} = -\int_{\mathscr{L}} + 2\pi i \{\ldots\},$$

где $\{\ldots\}$ означает сумму вычетов подынтегральной функции в области D. Поэтому

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{\tau\to\infty} \left[-\int_{\mathscr{L}} + 2\pi i \{\ldots\} \right].$$

Из равенства (11) следует, что

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)+\sum_{\beta}\left(\frac{1}{s-\beta}+\frac{1}{\beta}\right)+A-\frac{1}{s-1},$$

где $A=\text{const}$, первая сумма распространяется на вещественные нули α функции ζ, а вторая — на ее комплексные нули β.

Полюс $s=1$ функции ζ'/ζ с вычетом -1, очевидно, привносит слагаемое x в фигурные скобки. Вещественные нули α лежат вне области D и не дают вклада в сумму вычетов. Далее Адамар показывает (используя по существу свой метод из работы о целых функциях [19] и сходимость ряда $\sum|\beta|^{-2}$), что части интеграла $J(x)$, относящиеся к отрезкам B_1P_1, B_2P_2, стремятся к нулю при удалении этих отрезков в бесконечность. Что же касается интеграла по ломаной $P_1Q_1R_1R_2Q_2P_2$ и вклада нулей β, расположенных в области D, то Адамар получает для них мажоранту εx, где ε — сколь угодно малое положительное число. (Здесь важно, что на прямой $\operatorname{Re}s=1$ нулей нет!) Тем самым

$$J(x)=x+o(x). \tag{16}$$

Теперь уже легко показать, что

$$\sum_{p<x}\log p\sim x. \tag{17}$$

В самом деле, в силу (15) и (16)

$$\sum_{p<x}\log p\log\frac{x}{p}=x+o(x)$$

и при любом фиксированном h

$$\sum_{p<x}\log p\log(1+h)+\sum_{x\leqslant p<x(1+h)}\log p\log\frac{x(1+h)}{p}=$$
$$=x(h+o(x)).$$

Так как в последней сумме величина $x(1+h)/p$ заключена между 1 и $1+h$, то справедливы оценки

$$\frac{1}{x}\sum_{p<x}\log p<\frac{h+o(x)}{\log(1+h)},$$
$$\frac{1}{(1+h)x}\sum_{p<x(1+h)}\log p>\frac{h+o(x)}{(1+h)\log(1+h)}.$$

Переходя к верхнему и нижнему пределам и используя произвольность h, получаем (17), что в силу (4) равносильно асимптотическому закону.

Такова в общих чертах схема доказательства Адамара. В конце работы [I36] он сообщает, что во время корректуры ему стало известно доказательство асимптотического закона, полученное Валле-Пуссеном (см.: [III77]). «Я думаю, — пишет Адамар, — читатель, сопоставивший оба доказательства, согласится с тем, что мое — проще» [I36, с. 220]. И действительно, как отмечалось в литературе (см., например: [II25, с. 42]), в ряде пунктов доказательство Адамара проще. Сложность доказательства асимптотического закона и большое число участвующих в нем «действующих лиц» предопределили возможность различных путей достижения цели, и даже в тех случаях, когда, как у Адамара и Валле-Пуссена, доказательство проводилось одними и теми же методами. В обоих доказательствах используется неравенство (12), но Валле-Пуссен устанавливает его, привлекая гораздо больше результатов из теории дзета-функции. Данное Адамаром доказательство переносится на ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \Xi(s)$, где a_n — вещественные положительные числа. Для них также имеет место свойство $\Xi(1+it) \neq 0$.

Зато в одном очень важном пункте Валле-Пуссен пошел дальше: в 1899 г. он показал [III78], что при $x \to \infty$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right), \tag{18}$$

где c — некоторая положительная постоянная. Этот результат явился исходным для целого ряда уточнений оценки разности $\pi(x) - \operatorname{li} x$, полученных другими авторами. Сравнительное изложение исследований Адамара и Валле-Пуссена по распределению простых чисел можно найти в книге [II98]. Любопытное высказывание, касающееся обоих ученых, мы находим в очень обстоятельной главе «Теория чисел» книги [III91]. Авторы этой главы Уильям и Ферн Эллисон, имея в виду редкое долголетие обоих ученых, пишут: «То обстоятельство, что потребовалось более 100 лет для появления доказательства теоремы о простых числах, породило легенду, что она сделала бессмертными тех, кто ее доказал. Долгое время легенда казалась достоверной, но, к несчастью, была опровергнута, когда в 1961 г. в возрасте 96 лет скончался Валле-Пуссен, и рухнула, когда в 1963 г. в возрасте 98 лет умер Адамар» [III91, с. 277—278].

После 1896 г. соперничество обоих ученых продолжалось еще некоторое время в связи с их параллельными исследованиями по рядам Дирихле (об этом мы скажем ниже). Валле-Пуссену принадлежат также многочисленные выдающиеся результаты в теории потенциала, теории приближения функций (включая гармонический анализ), дескриптивной и метрической теориях функций.

Все упомянутые выше ученые начиная с Эйлера, внесшие вклад в проблему распределения простых чисел, прославились и в других областях науки. Теперь мы должны назвать имя, известное лишь узкому кругу специалистов. Г. фон Мангольдт — немецкий математик, ученик К. Вейерштрасса и Г. Шварца, был старше Адамара и Валле-Пуссена (родился в 1858 г.). Он обратился к аналитической теории чисел, имея уже большой опыт исследований в теории функций комплексной переменной. В большой статье 1898 г. «О работе Римана „О количестве простых чисел. . .“» [III138], фон Мангольдт привел доказательство одного из важнейших свойств дзета-функции — теоремы о плотности распределения ее нулей (см. равенство (10)). Таким образом, к началу века из всех утверждений Римана осталась не доказанной лишь гипотеза о том, что все комплексные корни дзета-функции лежат на прямой $\sigma=1/2$.

В знаменитой речи Д. Гильберта на Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 г., во многом определившей пути развития математики XX в., были затронуты и проблемы распределения простых чисел. В восьмом разделе этой речи (всего их 23) говорилось: «В теории распределения простых чисел в последнее время сделаны существенные сдвиги Адамаром, Валле-Пуссеном, Мангольдтом и другими. Для полного решения проблемы. . . необходимо доказать, что все нули дзета-функции имеют вещественную часть, равную 1/2» [III51, с. 37].

Заключительные слова приведенного высказывания становятся понятными в свете результата, опубликованного в 1901 г. шведским математиком Г. фон Кохом [III124]. Пусть τ — верхняя граница значений σ для всех комплексных нулей дзета-функции. Ясно, что $\tau \leqslant 1$, так как при $\sigma > 1$ эта функция нулей не имеет. Ясно также, что $\tau \geqslant 1/2$, ибо если ζ имеет нуль $1/2-\alpha+it$, то имеется и нуль $1/2+\alpha+it$, поскольку все нули расположены симметрично относительно прямой $\sigma=1/2$. Таким образом, $1/2 \leqslant \tau \leqslant 1$. Опираясь на результаты Валле-Пуссена и фон Мангольдта, фон Кох показал, что

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x^{\tau} \log x).$$

В случае справедливости гипотезы Римана, и только в этом случае, $\tau=1/2$. При этом предыдущее равенство принимает вид:

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(\sqrt{x} \log x).$$

Эта оценка приближения $\pi(x)-\mathrm{li}\, x$ существенно лучше оценки Валле-Пуссена и всех других оценок, известных по сей день.

С начала XX в. появляются многочисленные работы Э. Ландау по теории аналитических функций и теории чисел, а в 1909 г. выходит его фундаментальный трактат [III126].*) Это классическое сочинение, содержащее также ряд исторических сведений, является энциклопедией работ до 1909 г. по проблеме распределения простых чисел. Приведя два новых доказательства асимптотического закона, Ландау проанализировал также известные к тому времени доказательства других авторов и показал, что они могут быть упрощены.

Почти одновременно с Ландау на математической сцене появляется другой замечательный исследователь теории функций и теории чисел — англичанин Г. Харди, к которому впоследствии присоединился его талантливый младший соотечественник Д. Литлвуд. Огромный критический анализ, проделанный Ландау, казалось, исключал появление каких-либо сенсационных исследований асимптотического закона или новых результатов в теории дзета-функций, но оказалось, что они возможны. Так, в 1914 г. появилась работа Харди [III110], в которой доказано, что $\zeta(s)$ имеет на прямой

*) В лекциях [III128. Т. 2, ч. 1] излагаются более поздние исследования.

Годфри Харольд Харди.

$\sigma=1/2$ бесконечно много нулей. Казалось, цель — доказательство гипотезы Римана — близка.

В появившейся недавно книге Д. Пойя приводит забавные воспоминания о Харди: «Харди часто уезжал из Англии, так как любил солнце. Одним из его друзей, которых он навещал, был Харальд Бор*) в Копенгагене. Обычно они работали в кабинете Бора, а потом отправлялись пройтись. Харди всегда настаивал, чтобы перед прогулкой была составлена ее программа. Первым пунктом всегда было: „Доказать гипотезу Римана“. Разу-

*) Х. Бор (1887—1951) известен работами по теории функций (ряды Дирихле, дзета-функция и др.). Он создал теорию так называемых почти периодических функций. Брат знаменитого физика Нильса Бора.

меется, им это не удавалось, но всегда было первым пунктом программы. Вам следует также знать, что Харди вел постоянную войну с богом. По его мнению, для бога не было ничего более важного, чем нарушение планов Харди. Это однажды привело Харди к мысли застраховать свою жизнь, когда он собирался вернуться в Кембридж после визита к Бору в Данию. Погода испортилась, и можно было отплыть лишь на одном маленьком судне. Харди подумал, что оно вполне может затонуть. Тогда он отправил Бору открытку со словами: „Я доказал гипотезу Римана. Г. Х. Харди“. Таким образом, если бы корабль затонул, все стали бы думать, что Харди доказал гипотезу Римана. Бог никогда бы не допустил такой славы Харди и поэтому не мог позволить судну затонуть» [III175, с. 80].

Но шутки шутками, а усилиями Харди, Литлвуда, а также их соотечественника Э. Титчмарша и других ученых теория дзета-функции была существенно продвинута. Появлялись и новые доказательства асимптотического закона. Поскольку сама постановка задачи не была продиктована методами теории аналитических функций, постепенно сбрасывался балласт этой дисциплины, и только неравенство Адамара (12) всюду фигурировало как необходимый элемент доказательства.

Мы видели, как разнообразна география исследований, связанных с законом распределения простых чисел: Германия, Франция, Россия, Бельгия, Англия, Швеция. Свое слово сказал в этой области и американский математик Н. Винер. Первоначально его вывод асимптотического закона основывался на доказанной им глубокой тауберовой теореме для рядов Ламберта [III184]. Однако вскоре были найдены другие доказательства асимптотического закона, опирающиеся на теорию Винера, но не использующие рядов Ламберта. Они появились в работах японского математика С. Икеары [III120] и самого Винера [III185].

Перелистнем еще несколько страниц истории асимптотического закона. Так, Харди и Литлвуд первыми начали использовать оценки тригонометрических сумм в теории дзета-функции. Применяя оценки Г. Вейля, Литлвуд [III135] вывел некоторую модификацию асимптотической формулы Валле-Пуссена (18):

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c(\log x \log\log x)^{1/2}}\right). \qquad (19)$$

Существенные уточнения этой формулы были получены, когда к оценкам тригонометрических сумм стали применять метод И. М. Виноградова. Наилучшая оценка была найдена в 1958 г. И. М. Виноградовым и Н. М. Коробовым:

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(xe^{-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}\right) \qquad (20)$$

(детальное описание этих исследований можно найти в монографиях [III182, III28]).

Вариационное исчисление и функциональный анализ

Вклад Адамара в вариационное исчисление

Термин «вариационное исчисление» обычно связывают с классами задач на экстремум, хотя в названии это никак не отражено. В настоящее время вариационное исчисление представляет собой совокупность нескольких разделов, хотя и связанных между собой, но простирающихся в разных направлениях. Наиболее старый из них, о котором главным образом пойдет речь, — классическое вариационное исчисление, возникшее в результате работ Л. Эйлера, Ж.-Л. Лагранжа и А.-М. Лежандра, развитое К. Г. Я. Якоби, К. Вейерштрассом и их многочисленными последователями. Теория концентрируется вокруг задач на отыскание экстремальных значений различных интегралов при наличии, быть может, некоторых дополнительных условий.

С проблемами классического вариационного исчисления Адамар впервые столкнулся в конце XIX в. в работах по теории волн, теории упругости, в задачах геометрии, связанных с исследованиями геодезических линий. Второй том собрания сочинений Адамара открывается циклом его работ по вариационному исчислению, опубликованных с перерывом в 1902—1913 гг. Он задумал также трактат на эту тему, который не был завершен — в 1910 г. вышел лишь его первый том объемом 520 страниц [I138].

Основные понятия. Прежде чем дать представление о вкладе Адамара в вариационное исчисление, приведем несколько определений. Пусть C^l — множество функций $y(x)$, заданных на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ и непрерывных на нем вместе со своими производными l-го порядка. Окрестностью порядка l функции $y(x)$ называется множество функций $y(x)+\omega(x)$, таких, что $|\omega(x)| < \varepsilon$, $|\omega^{(k)}(x)| < \varepsilon$, $k=1, \ldots, l$.

Сформулируем простейшую задачу вариационного исчисления. Пусть

$$U[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx. \tag{1}$$

Требуется найти функцию $\bar{y}(x)$, для которой этот интеграл принимает наибольшее или наименьшее значение. Здесь имеется в виду относительный максимум или минимум; например, в первом случае это означает, что неравенство $U[\bar{y}] \geqslant U[y]$ имеет место для всех $y(x)$ из некоторой окрестности $\bar{y}(x)$ первого порядка, т. е. при $|\omega(x)| < \varepsilon$, $|\omega'(x)| < \varepsilon$. Кроме того, накладывается дополнительное условие: для рассматриваемых $y(x)$ и заданных чисел A, B

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2}$$

Интеграл $U[y]$ является функцией линии на плоскости, изображающей функцию $y=y(x)$ (функционалом), и требуется среди таких линий, проходящих через точки (a, A), (b, B), найти такую, которая доставляет экстремум $U[y]$ (в дальнейшем для определенности всегда будем подразумевать минимум).

Частные случаи этой задачи рассматривались еще И. Ньютоном, Г. В. Лейбницем и И. Бернулли в конце XVII в. В общей постановке ее впервые изучал Л. Эйлер (1741 г.). В 1755 г. в Берлине он получил письмо из Турина от неизвестного ему 19-летнего Лагранжа, в котором излагался следующий подход к сформулированной задаче. Пусть $\omega=\alpha\eta$, где α — числовой параметр, а $\eta(x)$ — функция класса C^1, для которой $\eta(a)=\eta(b)=0$. Имеем:

$$U[y+\alpha\eta] = U(\alpha) = \int_a^b f(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\, dx.$$

Из равенства

$$U(\alpha) = U(0) + \alpha U'(0) + \frac{\alpha^2}{2} U''(0) + \ldots$$

(мы предполагаем существование появляющихся здесь и далее производных) следует:

$$U'(0)=\int_a^b (f_\eta \eta + f_{\eta'}\eta')\,dx, \tag{3}$$

$$U''(0)=\int_a^b [f_{\eta\eta}\eta^2 + 2f_{\eta\eta'}\eta\eta' + f_{\eta'\eta'}(\eta')^2]\,dx. \tag{4}$$

Выражения $U'(0)$ и $U''(0)$ называются соответственно первой и второй вариациями функционала $U[y]$. Если $U(0)$ — экстремальное значение этого функционала, то необходимо, чтобы $U'(0)=0$. Интегрируя по частям второе слагаемое в (3) и учитывая, что $\eta(a)=\eta(b)=0$, получим

$$U'(0)=\int_a^b (f_y - (f_{y'})')\,\eta dx = 0.$$

Ввиду произвольности функции η множитель при η равен нулю, т. е. справедливо уравнение

$$f_y - (f_{y'})' = 0, \tag{5}$$

полученное ранее Эйлером и носящее его имя.

Приведенный изящный вывод Лагранжа произвел на Эйлера сильное впечатление. Он ответил юноше восторженным письмом, в котором указал, что ничего не обнародует по данному вопросу, пока тот не опубликует этот свой результат. Термин «вариационное исчисление» принадлежит Эйлеру; функция $f(x, y, y')$ в (1) называется лагранжианом. Решение уравнения (5) при условиях (2) будем обозначать $\bar{y}$. Кроме того, если $\varphi=\varphi(x, y, y')$, то положим $\bar{\varphi}=\varphi(x, \bar{y}, \bar{y}')$.

Аналогично формулируется задача вариационного исчисления для функционала, зависящего от векторфункций,

$$U[\mathbf{y}]=\int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')\,dx, \quad \mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{y}'=(y_1', \ldots, y_m').$$

Необходимое условие экстремума здесь также состоит в том, что координаты вектора $\mathbf{y}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$f_{y_i} - \left(f_{y_i'}\right)' = 0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{6}$$

с граничными условиями $y_i(a)=A_i$, $y_i(b)=B_i$. Такую вектор-функцию обозначаем $\bar{\mathbf{y}}$, причем, как и выше, $\bar{\varphi}$ означает подстановку в $\varphi(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ вместо $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ соответственно $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{y}}'$.

Обратимся снова к простейшему случаю (1). Преобразуя определенным образом вторую вариацию $U''(0)$, Лежандр (1789 г.) пришел к выводу, что неравенство $\bar{f}_{y'y'}>0$ является достаточным условием того, что (1) при $y=\bar{y}$ имеет минимум. Как показал Лагранж (1791 г.), это утверждение, вообще говоря, ошибочно (оно справедливо лишь, если интервал (a, b) достаточно мал). В свою очередь ошибался и Лагранж, полагавший, что по аналогии с дифференциальным исчислением условия $U'(0)=0$, $U''(0)\neq 0$ в совокупности достаточны для экстремума. Вообще едва ли найдется другая область анализа, история которой знает столько ошибок, как вариационное исчисление. Говоря об упомянутой ошибке Лагранжа, известный современный специалист по вариационному исчислению Л. Янг писал: «Подробный анализ ошибочности рассуждений Лагранжа вместе с примером, показывающим, что ответ отрицательный, приведен в книге Адамара [I138, §§ 38—43]. Мы приглашаем читателя обратиться прямо к первоисточнику, в котором все это необычайно ясно изложено одним из великих мыслителей минувших дней» [III73, с. 113].

Для функционалов от двух и более независимых переменных задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Пусть D — область в пространстве R^m, ограниченная поверхностью Γ. Требуется среди всех функций $z(x)$, дифференцируемых в D, непрерывных в $\bar{D}=D\cup\Gamma$ и удовлетворяющих граничному условию $z|_\Gamma=\varphi$, найти ту, которая доставляет экстремум интегралу

$$U[z]=\int_D F(x, z(x), \operatorname{grad} z(x))\,dx.$$

Экстремум предполагается локальным: если $\bar{z}$ — искомая функция, то все z, сравниваемые с ней, подчинены в $\bar{D}$ неравенствам $|z-\bar{z}|<\varepsilon$, $|\operatorname{grad} z-\operatorname{grad}\bar{z}|<\varepsilon$.

Аналогично одномерному случаю положим $z=\bar{z}+\alpha\eta$, где $\eta=\eta(x)$ и $U[z]=U(\alpha)$. Используя необходимое условие экстремума $U'(0)=0$ и рассуждая так же, как в случае одной независимой переменной, получаем, что функция $\bar{z}$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial z_{x_j}} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Последнее представляет собой уравнение в частных производных второго порядка.

Здесь уместно остановиться на одном принципиальном вопросе. Для того чтобы левая часть уравнения (7) имела классический смысл, требуется существование вторых производных решения. В 1879 г. П. Дюбуа-Реймон обратил внимание на то, что это требование при $m=1$ излишне: всякая функция $y(x)$, для которой $U'(0)=0$, обязательно имеет вторую производную в интервале (a, b), если $f_{y'y'} \neq 0$. Для кратных интегралов, согласно замечанию Адамара [1124], аналогичный факт места не имеет. Вот приведенный им пример.

Пусть $m=2$ и

$$U[z] = \iint_D (p^2 - q^2)\, dxdy, \tag{8}$$

где $(x, y) \in D$, $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$. Выпишем первую вариацию этого интеграла:

$$U'(0) = \iint_D (z_x \eta_x - z_y \eta_y)\, dxdy.$$

Положим $z=\psi(x+y)$, где ψ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $z_x=z_y$ и

$$U'(0) = \iint_D [(z\eta_x)_y - (z\eta_y)_x]\, dxdy = \int_\Gamma z d\eta.$$

Последний интеграл равен нулю, так как $\eta=0$ на Γ. Итак, здесь равенство $U'(0)=0$ не гарантирует существования $\psi''(x+y)$.

Поучительно сравнить функционал (8) с интегралом Дирихле

$$\iint_D (p^2 + q^2)\, dxdy,$$

для которого уравнение Эйлера имеет вид $z_{xx}+z_{yy}=0$. В случае интеграла Дирихле решение вариационной задачи не только имеет вторые производные, но и аналитично. Итак, подынтегральные функции $F(p, q) = p^2 + q^2$ и $F(p, q) = p^2 - q^2$ существенно различны с точки зрения гладкости решений вариационной задачи, а формально их можно различить по знаку функции $K = F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2$. В первом случае вариационная задача относится к классу регулярных, т. е. подчиненных условию $K > 0$. Для таких задач с аналитическим лагранжианом F доказательство аналитичности решений составляет содержание 20-й проблемы Гильберта. Оно было найдено в 1904 г. в парижской диссертации молодого математика из России С. Н. Бернштейна.

Некоторые результаты Адамара. В статье [I82], вышедшей в 1902 г., Адамар формулирует многомерный аналог условия Лежандра, т. е. необходимое условие абсолютного экстремума функционала, зависящего от m неизвестных функций n независимых переменных. Его занимают тонкости применения этого условия, возникающие при переходе к многомерному случаю.

В заметке 1906 г. «Об одном методе вариационного исчисления» [I116] Адамар формулирует новый подход к задаче об абсолютном экстремуме функционала (1) при заданных значениях неизвестной функции y в точках a и b. Подробное обоснование этого подхода составило содержание ч. 4 его мемуара о пластине [I125], получившего в 1907 г. премию Вайяна. Любопытно, что это было первое применение метода, названного впоследствии динамическим программированием. Адамар рассматривает функцонал (1) при условиях $y(a) = 0$, $y(b) = B$ на семействе функций $y(x, \alpha)$, зависящих от неотрицательного параметра α, т. е. на семействе траекторий в функциональном пространстве. Первая вариация функционала U, записанная в форме Дюбуа-Реймона, имеет вид

$$\int_a^b Q \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx,$$

где

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} dx - h.$$

Через h здесь обозначена произвольная постоянная, значение которой выбирается в дальнейшем из условия ортогональности $\int\limits_a^b Q dx = 0$. Адамар предлагает искать $y(x, \alpha)$ из уравнения

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = -Q \qquad (9)$$

(скорость изменения y' противоположна градиенту функционала). Это обеспечивает отрицательность первой вариации, т. е. убывание $U[y]$ как функции от α.

Адамар замечает, что при выполнении условия Липшица для первых производных функции f по второму и третьему аргументам уравнение (9) можно решить методом последовательных приближений, отправляясь от любой начальной функции $y(x, 0)$. При этом решение $y=y(x, \alpha)$ единственно и последовательные приближения сходятся к решению равномерно по x при α из некоторого промежутка $[0, \alpha_0]$. Полученную траекторию можно продолжить на всю полуось $\alpha > 0$, если доказана априорная ограниченность функций y и y'. Это удается при некоторых предположениях о функции f, простейшим из которых является требование

$$|f(x, y, y')| = O(|y'|^q), \quad q > 1.$$

Отыскивая мажоранту для функции $|y'|$, Адамар между прочим доказывает некоторое интересное мультипликативное неравенство для дифференцируемых функций, о котором будет подробно рассказано далее. В заключение он показывает, что найденная траектория стремится при $\alpha \to \infty$ к решению исходной вариационной задачи — результат, подсказываемый представлением о камне, непременно попадающем в нижнюю точку ямы, скатываясь по ее склону из любого начального положения.

При выводе найденных им условий экстремума Вейерштрасс использовал понятие поля экстремалей. Так называется однопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера, такое, что через каждую точку (x, y) рассматриваемой области D проходит одна и только одна кривая семейства. В соответствии с этим в каждой точке $(x, y) \in D$ определена однозначная функция $p=p(x, y)$, выражающая угловой коэффициент y'

касательной к кривой поля, проходящей через (x, y). Она называется наклоном поля. Если поле задано равенством

$$y = \varphi(x, C), \tag{10}$$

то, присоединяя к нему соотношение

$$y' = \varphi_x(x, C)$$

и исключая из этих двух равенств C, получим $y' = p(x, y)$. В равенстве (10) C является неявной функцией от x и y, и вопрос сводится к обращению этой зависимости.

При этом C и соответственно $p(x, y)$ в элементарном анализе находятся в окрестности некоторой точки (x_0, y_0). Однако для построения поля в области D требуется знание p для всех $(x, y) \in D$. С этой целью применяют лемму Гейне—Бореля о покрытиях или какое-либо аналогичное утверждение. В тех задачах вариационного исчисления, в которых экстремалями являются вектор-функции $(y_1, \ldots, y_m)$, также вводится понятие поля, причем для нахождения его наклона приходится рассматривать неявные функции, заданные системами равенств, и обращать их не локально, а в некоторой области $D \subset R^m$. Поэтому различные курсы вариационного исчисления, ранние и современные, содержат сведения о неявных функциях. Такое приложение имеется и в курсе Адамара [I138]. Для целей книги его достаточно, однако Адамар ничего не говорит в нем о своей более ранней работе «О точечных преобразованиях» [I113], в которой был развит весьма интересный новый подход к задаче о глобальном обращении отображений. Эта работа была опубликована в 1906 г., именно тогда, когда Адамар занимался вариационным исчислением. В ней он рассмотрел систему уравнений

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ X_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= f_m(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned} \tag{11}$$

где набор функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ осуществляет отображение m-мерного евклидова пространства R^m в себя. Речь шла об условиях однозначной разрешимости системы (11). На первый взгляд ответ хорошо известен уже студенту: определитель Якоби

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$$

должен быть знакопостоянным. Однако думающий так ошибается, ибо забывает об условии локальности, фигурирующем в формулировке соответствующей теоремы. Неразрешимость системы (11) с положительным якобианом может возникать уже в случае $m=1$. В самом деле, уравнение $X=f(x)$, где $f'(x)>0$, на прямой $-\infty<x<+\infty$ не всегда имеет решение, если по крайней мере один из двух интегралов,

$$\int_{-\infty}^{a} f'(x)\,dx, \qquad \int_{a}^{\infty} f'(x)\,dx,$$

конечен. В многомерном случае положительность якобиана не гарантирует не только глобальной разрешимости, но и единственности решения.

Адамар предлагает рассматривать вместо якобиана длину наименьшей из осей эллипсоида деформации

$$\lambda(x)=\min\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} dX_i^2}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} dx_i^2}\right)^{1/2},$$

т. е. квадратный корень из наименьшего собственного числа матрицы

$$\left\|\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right\|_{j,\,k=1}^{m}.$$

Полученные им достаточные условия однозначной разрешимости системы (11) имеют вид

$$\mu(\rho)>0 \text{ и } \int_{0}^{\infty}\mu(\rho)\,d\rho=\infty,$$

где $\mu(\rho)$ — минимум функции λ на сфере $x_a^2+\ldots+x_m^2=\rho^2$. Существенность обоих условий видна уже в случае одной переменной. В дальнейшем, в полуторастраничной статье [I176], Адамар отметил необходимость этих условий.

Курс вариационного исчисления. Основным вкладом Адамара в вариационное исчисление был его трактат [I138], который вобрал в себя материал лекций, прочитанных им в Коллеж де Франс. Не исключено, что одним из стимулов к написанию книги явилось отсутствие в то время учебника по этой дисциплине на французском языке. Начиная с середины прошлого века вариационное исчисление развивалось преимущественно под влиянием идей немецких ученых К. Г. Я. Якоби, К. Вейерштрасса, Р. Клебша, В. Майера, Д. Гильберта. В 1900 г. появилась монография А. Кнезера [III123], а в 1909 г. — учебник по вариационному исчислению О. Больца [III82]; обе монографии — на немецком языке. Хотя во французских трактатах по анализу (К. Жордана и др.) содержались отдельные главы, посвященные вариационному исчислению, единственной книгой во французской литературе с таким названием был курс Э. Линделефа и Р. Муанье, вышедший в 1861 г.

Книга Адамара должна была заполнить существующий пробел, и уже первый ее том охватил настолько обширный материал, что в значительной мере выполнил эту задачу. Собственно вариационное исчисление начинается в книге с простейшей задачи на экстремум функционала (1). Далее изучаются изопериметрические задачи, в которых экстремум $U[y]$ отыскивается при дополнительных условиях $U_j[y]=A_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, где U_j — заданные функционалы и A_j — известные числа. Затем Адамар переходит к задаче Майера, которая ставится следующим образом. Рассматривается неизвестная вектор-функция $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_m)$ на отрезке $[0, a]$, удовлетворяющая уравнениям

$$g_j(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')=0, \quad j=1, \ldots, N.$$

Вектор $\mathbf{y}$ задан в точке 0, а на правом конце a считаются известными компоненты $y_2, \ldots, y_m$. Требуется найти экстремум функционала $y_1(a)$. В ч. 1, 2 сосредоточено исследование необходимых условий экстремума для этой и некоторых других вариационных задач. В заключении книги изучается вторая вариация функционала. Исследуются необходимые или достаточные признаки экстремума, в частности теория Вейерштрасса. Рассматриваются вариационные задачи с разрывными решениями, односторонние вариации, функционалы, зависящие от производных любого порядка и др. Изложение теории сопровождается примерами из геометрии и механики.

Казалось бы, Адамар не выходит из традиционного в то время круга задач вариационного исчисления.

Но не следует полагаться на это поверхностное впечатление. Хотя автор нигде не выделяет свои теоремы или доказательства, он вносит в изложение почти каждого достаточно трудного вопроса нечто новое, анализирует специальные случаи, заполняет пробелы в рассуждениях предшественников. «. . .Чтобы решить тонкую проблему, он, не колеблясь, менял формулировку, — пишет П. Леви. — Задача казалась неразрешимой, так как была плохо поставлена; будучи сформулирована лучше, она становилась разрешимой, и Адамар умело изобретал необходимые методы. Без сомнения, в вариационном исчислении нет такой выдающейся теоремы, которую было бы легко выделить, как в других разделах его творчества. . . Скорее, можно сказать, что вариационное исчисление было зданием, фундамент которого заложили Эйлер, Лагранж, Якоби и Вейерштрасс. Но ему не хватало прочности. Несмотря на усилия Вейерштрасса, истинные условия экстремума были известны плохо. . . Адамар пришел, исследовал с редкой проницательностью существовавшие трудности и оставил законченную работу там, где до него были лишь наброски» [II12, с. 16].

Особое место в книге занимает глава, посвященная исчислению функционалов. В ней исследуются их общие свойства, найдены представления линейных функционалов, выводятся формулы для вариации функций Грина при вариации области. Включение этого материала отражало общую концепцию Адамара, высказанную им в предисловии к тому: «Вариационное исчисление есть не что иное, как первая глава дисциплины, называемой сегодня исчислением функционалов, развитие которой, безусловно, станет одной из первейших задач анализа будущего. Именно эта идея вдохновляла меня прежде всего как при чтении курса в Коллеж де Франс, так и при подготовке настоящей работы» [I138, с. VII]. Такая точка зрения позволила Адамару рассматривать первую вариацию функционала как прямое обобщение дифференциала функции.

Мы закончим рассказ о работе Адамара в области вариационного исчисления упоминанием о его знаменитом примере, связанном с вариационным принципом решения задачи Дирихле, подробно обсуждаемым далее на с. 186—190.

Мультипликативные неравенства

Читателю, возможно, приходилось испытывать радостное удивление, наткнувшись на кусочек янтаря в прибрежной гальке. Похожее чувство возникает, когда, перелистывая старый математический фолиант, неожиданно встречаешься с теоремой или идеей, истинное значение которой выявилось лишь недавно. Избитый афоризм «новое — это хорошо забытое старое» оказывается весьма кстати в связи с одной леммой Адамара. В ч. 4 мемуара 1907 г. [I125], посвященного закрепленным пластинам, Адамар устанавливает неравенство

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a} |u(x)|^{2+q} \leqslant 2^{2+q} \int_0^a |u'(t)|^2\,dt \int_0^a |u(t)|^q\,dt, \tag{12}$$

где u — непрерывно дифференцируемая функция на $[0, a]$, обращающаяся в нуль по крайней мере в одной из точек этого отрезка,*) а q — произвольное положительное число. Именно это неравенство мы имели в виду, рассказывая о предложенном Адамаром новом методе построения решения вариационной задачи. Оно было получено как частный случай следующей леммы.

Пусть f — неотрицательная возрастающая функция на положительной полуоси и

$$A = \int_0^a f(|u(t)|)\,dt, \qquad B = \int_0^a |u'(t)|^2\,dt.$$

Тогда $|u(x)| \leqslant 2C$ для всех $x \in [0, a]$, где C — неотрицательное решение уравнения $C^2 f(C) = AB$.

Проведенное Адамаром доказательство этого факта занимает всего несколько строк. Пусть $|u(x)| > C$ для некоторой точки x и $M(C)$ — множество $\{t \in [0, a]: |u(t)| > C\}$. Из определения интеграла A следует, что $f(C)\,\mathrm{mes}\,M(C) \leqslant A$. По формуле Ньютона—Лейбница,

$$|u(x)| - C \leqslant \int_{M(C)} |u'(t)|\,dt.$$

---

*) Последнее условие в работе Адамара опущено, но оно существенно применяется в доказательстве.

(Здесь используется обращение в нуль функции $|u|$ в одной из точек отрезка $[0, a]$). В силу неравенства Коши последний интеграл не превосходит $(B \operatorname{mes} M(C))^{1/2}$, и мы получаем оценку

$$|u(x)| \leqslant C + \left(\frac{AB}{f(C)}\right)^{1/2}.$$

Остается вспомнить определение числа C.

И неравенство (12), и только что доказанное его обобщение, по-видимому, остались незамеченными. В 1941 г. Б. Секефальви-Надь [III173], без сомнения, незнакомый с этими утверждениями, получает вместе с несколькими другими неравенствами той же природы оценку (12) с точной константой $(1+q/2)^2$.

Многомерные варианты неравенства (12) были найдены в 1951 г. В. П. Ильиным [III24] и в 1954 г. Г. Эрлингом [III99]; первый из этих математиков применил их к обоснованию сходимости вариационных методов решения задач математической физики, а второй — к спектральной теории эллиптических операторов. В очень общей форме мультипликативные, или интерполяционные, неравенства, как теперь называют оценки типа (12), были установлены независимо Э. Гальярдо и Л. Ниренбергом [III103, III146] в 1959 г. Они указали допустимые области изменения показателей m, l, p, q, r и θ в неравенстве

$$\left(\int\limits_{R^n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant c \left(\int\limits_{R^n} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\theta/p} \left(\int\limits_{R^n} |u(x)|^r \, dx\right)^{(1-\theta)/r},$$

где $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$; α — мультииндекс $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Потребность в таких оценках, позволяющих извлекать дополнительную информацию о промежуточных производных из свойств самой функции и ее производных до некоторого порядка, не раз возникала в теории краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому специалисту по теории функций или математической физике может показаться небезынтересным тот факт, что первое мультипликативное неравенство для дифференцируемых функций было получено Адамаром еще в 1907 г.

К тому же кругу вопросов можно отнести следующую, более раннюю лемму Адамара из удостоенного премии Бордэна мемуара «О некоторых свойствах траекторий в динамике» 1897 г.: «Если при бесконечном возрастании переменной t функция V этой переменной стремится к определенному пределу и если все производные до порядка $n+1$ существуют и конечны, то n первых производных стремятся к нулю» [I131, с. 1752].

Вот доказательство этого утверждения, данное Адамаром: «Для простоты ограничимся случаем $n=1$. Требуется показать, что при достаточно больших t первая производная по абсолютной величине меньше сколь угодно малого ε. Пусть l — произвольно выбранное число. Не существует бесконечного количества интервалов длиной больше l, на которых $|dV/dt| > \varepsilon/2$, так как на таком интервале V изменяется не более чем на $l\varepsilon/2$, приближаясь к определенному пределу. Начиная с того момента, когда эти интервалы перестают пересекаться, модуль dV/dt будет меньше ε, если в качестве l мы возьмем число, которое, будучи умноженным на верхний предел $|d^2V/dt^2|$, дает величину, не большую $\varepsilon/2$. Поскольку это рассуждение распространяется и на другие производные, наша лемма доказана» [там же].

В точности то же свойство дифференцируемых функций независимо обнаружил и использовал А. Кнезер в мемуаре [III122] 1897 г., посвященном исследованию движения в окрестности положения неустойчивого равновесия. Еще раз лемма Адамара—Кнезера была доказана Литлвудом, применившим ее к выводу тауберовой теоремы о степенных рядах.*) Дважды

*) Если $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n \to s$ при $x\to 1$ и $a_n = O(n^{-1})$, то $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ сходится к s. Это — результат Литлвуда 1910 г.; более слабая теорема такого типа, в которой $a_n = o(n^{-1})$, впервые была доказана в 1897 г. А. Таубером. Сформулированное утверждение представляет собой обращение теоремы Абеля: из сходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ следует равенство

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n.$$

на страницах написанной спустя много лет остроумной книжечки Литлвуда «Математическая смесь» появляется это утверждение. «Увы, не Д. И. Литлвуда, — пишет он, — хотя я его переоткрыл, и это было важным моментом в моей карьере» [III35, с. 39]. Доказательство Литлвуда, по форме графическое, а по существу идентичное адамаровскому, можно найти на с. 39 упомянутой книги, а в другом месте автор подробно вспоминает, как в 1911 г. пришел к сформулированной выше лемме, «без которой никогда не доказал бы основной теоремы» [III35, с. 86—87]. Литлвуд отмечает: «Теорема о производных была вообще уже известна, но похоронена в недрах одной работы Адамара о волнах».*) Как много внимания маленькой лемме! Ностальгия по дням юности? Не исключено. . . Но главное здесь — ощущение красоты результата.

Через два года Харди и Литлвуд в большой статье [III112] о степенных рядах и рядах Дирихле существенно опирались на леммы следующего типа: если $|f|$ и $|f''|$ имеют положительные возрастающие мажоранты φ и ψ, то $|f'|=O(\sqrt{\varphi\psi})$. Дальнейшее развитие наблюдения Адамара—Кнезера, о котором сейчас идет речь, связано со статьей Э. Ландау 1913 г. [III127], в которой показано, в частности, что из неравенств $|f(x)| \leqslant M$, $|f''(x)| \leqslant N$, выполненных на интервале I длины $|I| \geqslant 2\sqrt{M/N}$, следует оценка $\sup |f'| \leqslant \leqslant 2\sqrt{MN}$ с точной константой. Если же f — I функция на вещественной оси R^1, то для всех $x \in R^1$

$$[f'(x)]^2 \leqslant 2 \sup |f| \sup |f''| \tag{13}$$

и снова константа 2 в правой части — наименьшая.

В 1914 г. Адамар откликнулся на упомянутую работу Ландау заметкой [I169], в которой, имея в виду возможные приложения к динамике, рассмотрел случай $|I| < 2\sqrt{M/N}$. Там же он доказал, что для функций на произвольном интервале I справедлива следующая альтернатива: либо

$$\sup_I |f'| < c_1 \left(\int_I f(x)^2\,dx\right)^{(l-1)/(2l+1)} \sup_I |f^{(l)}|^{1/(2l+1)},$$

*) Это неточность. Следовало сказать: «. . .о динамических траекториях».

либо

$$\sup_I |f'| \leqslant c_2 \left(\frac{1}{|I|} \int_I f(x)^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где c_1, c_2 — указанные явно абсолютные константы.

В 1939 г. А. Н. Колмогоров [III31] получил неулучшаемую оценку

$$\sup |f^{(m)}| \leqslant \frac{t_{l-m}}{t_l^{1-m/l}} \sup |f|^{1-m/l} \sup |f^{(l)}|^{m/l}, \tag{14}$$

где f — функция на R^1, $m < l$ и

$$t_l = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(l+1)}}{(2p+1)^{l+1}}.$$

Для функций на полуоси И. Шенберг [III165] в 1971 г. описал процесс построения экстремальной функции в неравенстве (14). Обсуждение неравенств типа (13) и их обобщений приведено в известных книгах Г. Харди, Г. Полиа, Д. Литлвуда [III70] и Э. Беккенбаха, Р. Беллмана [III5] с одинаковым названием «Неравенства». Если не интересоваться точными константами, то большинство подобных результатов можно считать частными случаями упомянутых выше теорем Гальярдо и Ниренберга.

При дополнительном требовании неотрицательности функции справедливо следующее полезное усиление неравенства (13):

$$[f'(x)]^2 \leqslant 2f(x) \sup |f''| \quad \text{для всех } x \in R^1. \tag{15}$$

Действительно, для любого $t \in R^1$ имеем

$$0 \leqslant f(x+t) = f(x) + \int_0^t f'(x+\tau) \, d\tau,$$

что может быть переписано в виде

$$0 \leqslant f(x) + tf'(x) + \int_0^t \frac{f'(x+\tau) - f'(x)}{\tau} \, d\tau.$$

Поэтому трехчлен $f(x) + tf'(x) + t^2 \sup |f''|/2$ неотрицателен и неположительность его дискриминанта равносильна оценке (15).

Неравенства типа (15) использовались при изучении условий разрешимости уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (Л. Ниренберг, Ф. Трев, 1963 г. [III147]), в теории псевдодифференциальных операторов (Р. Лакс, Л. Ниренберг, 1966 г. [III130]) и для обоснования общих асимптотических методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных (В. П. Маслов, 1973 г. [III41]), при исследовании корректных постановок вырождающейся задачи с косой производной (В. Г. Мазья, 1972 г. [III37]) и т. д.

Различные свойства дифференцируемых функций, имеющие ту же природу, что и (15), обсуждаются в работе В. Г. Мазья и А. Куфнера [III142]. В ней отмечено, например, что тривиальное изменение данного выше вывода неравенства (15) приводит к следующей более общей оценке с точной константой:

$$|f'(x)|^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha} [f(x)]^{\alpha} \sup_{\xi,\,\eta} \frac{|f'(\xi)-f'(\eta)|}{|\xi-\eta|^{\alpha}},$$

где $f(x) \geqslant 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$.

Мы далеко не исчерпали историю эволюции идей, впервые возникших у Адамара, но сказанного достаточно, чтобы оценить богатство их потенциала, проявившееся за истекшие годы.

Функционалы

В конце 80-х годов минувшего века Вито Вольтерра в ряде работ заложил основы теории функций линий, которые он рассматривал как отображения тех или иных множеств функций на числовые множества. Вольтерра распространил на функции линий ряд основных понятий алгебры и анализа, в том числе понятие частной производной. Он рассмотрел различные типы уравнений с такими «функциональными» (иначе «вариационными») производными, показал, что дифференциальные, интегральные и интегродифференциальные уравнения, к которым приводят задачи вариационного исчисления, суть различные типы уравнений в функциональных производных. Тем самым был найден единый подход к дисциплинам, которые ранее не были связаны друг с другом.

Адамар с самого начала заявил себя горячим сторонником вольтерровской теории функций линий. Он обогатил ее рядом результатов, важных для математической физики, а его «Лекции по вариационному исчислению» [I138] явились первой книгой, в которой было уделено место идеям функционального анализа того времени. Большую роль в развитии раннего функционального анализа сыграли также работы непосредственных учеников Адамара — М. Фреше, Р. Гато, П. Леви. Многие результаты этих ученых были изложены в книге П. Леви «Лекции по функциональному анализу», вышедшей в 1922 г. [III133], в которой в отличие от работ В. Вольтерры [III181] и Ж. Адамара [I138] уже использованы интегралы Лебега и Стилтьеса.

Выступая на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928 г.) с докладом «Развитие функционального исчисления и его роль в науке» [I241], Адамар нарисовал картину достижений этой дисциплины за первые десятилетия ее существования. Следует иметь в виду, однако, что он говорил о направлении, весьма далеком от функционального анализа в современном понимании. Сегодня функциональный анализ — это комплекс таких дисциплин, как теории гильбертовых и банаховых пространств, нормированных колец, аналитических полугрупп, обобщенных функций. . . Все они, несмотря на индивидуальные различия, объединены тем, что имеют дело с пространствами бесконечной размерности, наделенными той или иной алгебраической структурой и топологией.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество функций. Если любому $x \in \mathfrak{A}$ отвечает число $U[x]$, то говорят, что U — функционал, заданный на $\mathfrak{A}$. Этот термин, введенный Адамаром (см.: [I138])*) вместо более раннего вольтерровского наименования «функция линии», считается общепринятым. Объектом теории Вольтерры с самого начала были нелинейные функционалы, но уже понятие линейного функционала как первого приближения нелинейного нуждалось в уточнении. Любая линейная функция конечного числа переменных

*) В более ранней заметке 1903 г. [I89] Адамар использует близкое название «функциональная операция (opération fonctionnelle)».

$(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид $\sum_i k_i x_i$. А каков общий вид линейного функционала? Его определение помимо аддитивности $U[c_1x+c_2y] = c_1U[x]+c_2U[y]$ включает также требование непрерывности, которое может иметь различный характер в зависимости от того, как понимается сходимость в пространстве функций, на котором он задан.

В заметке 1903 г. «О функциональных операциях» [I89] Адамар указал общий вид линейного функционала $U[x]$ в пространстве $C[a, b]$ функций x, непрерывных на сегменте $[a, b]$:

$$U[x] = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b F(t, \lambda)\, x(t)\, dt,$$

где F — не зависящая от x функция, определяемая по функционалу U (вообще говоря, не единственным образом), непрерывная на полуполосе $\{t, \lambda\colon a \leqslant t \leqslant b, \lambda > 0\}$. Этот результат предшествовал общеизвестному теперь представлению Ф. Рисса (1911 г.) для того же функционала

$$U[x] = \int_a^b x(t)\, d\psi(t),$$

где ψ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, однозначно определяемая функционалом.

Значительный интерес представляет вопрос описания линейного функционала $U[w]$ на множестве аналитических функций $w(z)$ комплексной переменной z. Принято считать, что он был решен в 20-х годах итальянским математиком Л. Фантаппье, который создал обширную теорию аналитических функционалов одной и многих комплексных переменных.*) В действительности первое представление $U[w]$ в виде криволинейного интеграла было получено Адамаром не позднее 1910 г. [I138, с. 293—294]. При этом важную роль

*) Математик и теолог Луиджи Фантаппье был профессором Римского университета и членом Академии деи Линчеи. Его публикации посвящены аналитическим функциям, дифференциальным уравнениям и их приложениям к математической физике. Но главным делом жизни Фантаппье была его теория аналитических функционалов.

сыграло понятие индикатрисы функционала — так называется функция

$$\varphi(\zeta) = U\left(\frac{1}{\zeta - z}\right). \tag{16}$$

Вот рассуждение Адамара. Пусть $w(z)$ — функция, регулярная в области и на ее границе γ. Умножая обе части равенства (16) на $w(\zeta)$ и интегрируя по контуру γ, получим

$$U\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\varphi(\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta,$$

откуда в силу равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = w(z)$$

следует требуемое представление функционала

$$U[w] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} w(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{17}$$

Здесь за γ можно принять любую «сепаратрису» — замкнутую линию, разделяющую области, в которых лежат особые точки функций w и φ.

Отметим, что позднее Фантаппье использовал для той же цели другую индикатрису,

$$\psi(\zeta) = U\left(\frac{1}{1 - z\zeta}\right),$$

которую он называл симметричной.

Линейный функционал может быть также рассмотрен как главная часть малого изменения (вариации) нелинейного функционала. Эта идея сыграла большую роль в исследованиях Адамара, связанных с вариацией функций Грина (см. с. 156). Под влиянием Адамара сложилось целое направление нелинейного анализа, с которым можно познакомиться в уже упоминавшейся книге П. Леви [III133]. В ней также изложены основы теории потенциала в бесконечномерных пространствах. Обзор современного состояния «бесконечномерной теории потенциала» и библиография содержатся в статье М. Н. Феллера [III68].

Аналитическая механика и геометрия

Исследования по аналитической механике

Великие французские математики XVIII—начала XIX в. — Ж.-Л. Лагранж, Ж. Даламбер, П.-С. Лаплас, О. Коши, С.-Д. Пуассон — были также и творцами аналитической механики. Благодаря более поздним трудам Ж. Лиувилля, Л. Пуансо, Ж. Бертрана и других французская школа теоретической механики к середине XIX в. сохранила ведущее положение. Начиная с 80-х годов ярким светом горит на научном небосклоне звезда А. Пуанкаре, однако в целом к концу XIX в. уже трудно было говорить о доминировании французской механики. Основанная Э. Бетти и Э. Бельтрами итальянская школа теории упругости (В. Вольтерра, Т. Леви-Чивита, Дж. Лауричелла. . .) во многом опережает французскую. Крупными достижениями в математических методах механики ознаменованы труды К. Вейерштрасса, а также Г. Брунса, Л. Больцмана, Г. Герца. Новые страницы в теории колебаний открыли исследования англичанина Рэлея, и столь же знаменательны в небесной механике идеи американца Дж. Хилла и шведа К. Ф. Сундмана. Создание А. М. Ляпуновым теории устойчивости движения, достижения Н. Е. Жуковского в аэродинамике и теории гироскопов, С. А. Чаплыгина и П. В. Воронца в неголономной механике показали, что Россия может успешно соревноваться с Западом.

Среди тех, кто на рубеже веков поддержал традиции своих великих соотечественников, должны быть наряду с Пуанкаре названы в первую очередь П. Аппель, П. Пенлеве и Ж. Адамар. Работы Аппеля относятся к общим принципам механики, многочисленным ее конкретным проблемам, применениям в механике эллиптических и других специальных функций. Пенлеве принадлежат важные исследования по теории орбит, теории трения, задаче трех тел. Работы Адамара по аналитической механике характерны широким применением геометрических методов и разнообразны по тематике. Среди них выделяется мемуар 1896 г. «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [131], в котором рассмотрен ряд проблем, граничащих с исследованиями Ляпунова и Пуанкаре по теории устойчивости движения.

Мы сможем дать здесь лишь весьма эскизное описание этого важного направления в творчестве Адамара. Начнем с появившейся в 1895 г. работы «О движении качения»*) [I24], которая содержала одно из первых исследований по неголономной механике. Пусть состояние динамической системы (твердое тело, система точек) определяется функциями $q_1, \ldots, q_n$ времени t, связанными соотношениями

$$f_k(q_1, \ldots, q_n) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad n > m.$$

Исключая из этих (голономных) связей $n-m$ переменных, скажем, $q_{m+1}, \ldots, q_n$, можно записать уравнение движения в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-m, \tag{1}$$

где $\mathscr{L}$ — функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергии системы.

Предположим теперь, что связи содержат также производные $\dot{q}_i$:

$$f_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n). \tag{2}$$

Если эти равенства неэквивалентны соотношениям вида

$$\frac{d}{dt}\Phi_k(\mathbf{q}) = 0,$$

то связи называются неголономными, соответственно различают голономные и неголономные системы. Эта терминология, как и первое серьезное исследование неголономных задач, принадлежит Герцу (см. его классическую книгу «Механика» [III113]).

Простейшим и наиболее важным для неголономных связей является случай линейной зависимости функций f_k в (2) от $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\sum_\alpha c_{\alpha k}(\mathbf{q})\dot{q}_\alpha = 0. \tag{3}$$

Основной пример системы с неголономными связями — движение качения (например, движение мяча без скольжения по плоскости). Адамар понимал, что ка-

*) Была и предварительная публикация на эту тему [I15].

чение без «верчения» также порождает системы с неголономными связями. Следует заметить, что в теории неголономных систем было много ошибочных работ. Адамар одним из первых (вслед за работой Герца, на которую он, видимо по незнанию, не ссылается) обращает внимание на то, что уравнения движения неголономной механической системы не выводятся из вариационного принципа (принципа наименьшего действия).

Еще Д. Гиббс и Э. Раус установили, что при наличии связей вида (3) уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}=\mathscr{K}_i, \tag{4}$$

где $\mathscr{K}_i$ — некоторые функции от $\mathbf{q}$ (корректирующие члены). Если для некоторого i уравнение (4) лагранжево, т. е. $\mathscr{K}_i=0$, то говорят, что q_i — голономная координата.

Адамар подробно рассматривает задачи о качении и исследует общие вопросы теории неголономных систем. Центральный из них: при каких условиях r координат являются голономными? Эти условия выражаются в виде системы уравнений относительно функций $c_{\alpha k}$.

Работа Адамара по теории качения [124] была через 5 лет переиздана в качестве приложения к книге его учителя Аппеля. В этой книге, в частности, содержится вывод уравнений движения системы, в которых вместо кинетической энергии фигурирует энергия ускорений. Другие важные модификации уравнений движения неголономных систем были в конце XIX в. получены Чаплыгиным и Вольтеррой. Неголономная механика наших дней представляет собой очень обширную дисциплину, нашедшую применение в электромеханике, робототехнике и других областях.

В 1895 г. Адамар рассмотрел задачу об устойчивости вращений тяжелого тела относительно координатных осей [123]. Устойчивость понимается им в том смысле, что бесконечно малым изменениям начальных условий отвечают бесконечно малые изменения параметров движения. Достаточные условия устойчивости получаются при решении задачи на условный экстремум некоторой функции, которая в свою очередь сводится к исследованию корней алгебраического уравнения.

Среди работ Адамара по механике имеется и сугубо прикладная, посвященная одной задаче морской кинематики [I143]. Ее можно интерпретировать как задачу об охране некоторого морского объекта (барража) от вражеских судов. Барраж моделируется отрезком прямой, а сторожевое судно и судно противника — двумя точками; все это располагается в одной плоскости. Вопрос ставится следующим образом: как должен двигаться при вертикальном волнении сторожевой корабль с радиусом обзора R и постоянной скоростью V, чтобы заметить барраж до того, как к нему подошло судно противника, имеющее скорость v, $v \leqslant V$? В этом случае говорят, что барраж защищен. До работы Адамара предполагали, что вражеское судно движется прямолинейно и равномерно, он же отказывается от этого требования и находит необходимые и достаточные условия для того, чтобы «охрана была совершенной» [I143, с. 338].

Работы о геодезических линиях

Мемуар 1896 г. «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [I31] относится к числу наиболее замечательных работ Адамара одновременно в двух областях — аналитической механике и геометрии. По его словам, это исследование было навеяно работами Пуанкаре о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, в которых дана топологическая классификация всех возможных траекторий в случае уравнения первого порядка. «Этот результат оставался уникальным, — отмечает Адамар. — Применение к другим типам дифференциальных уравнений методов Пуанкаре привело его к ряду следствий большой важности, однако не дало полного решения. Впоследствии ни одному другому геометру не сопутствовала удача в этом направлении. . . Проблема, сформулированная Академией на 1896 г. (конкурс на приз Бордена), дала мне случай представить первые применения общего и крайне простого метода, основанного на исследовании максимума или минимума некоторой функции V от рассматриваемых переменных и их производных» [III192, с. 11].

«Начнем с тождества», — такими словами Эрмит часто начинал свои лекции. Можно сказать, что роль такого «тождества» в данном случае играют слова Адамара из заметки [128], в которой анонсированы некоторые результаты обсуждаемого мемуара [131]: «Элементарное рассуждение показывает, что все возможные траектории материальной точки, скользящей по сфере под действием силы тяжести, перейдут из верхней половины сферы на нижнюю» (см.: [1341. Т. IV. С. 1747]). Адамар задается вопросом, не является ли это обстоятельство проявлением более общего принципа движения материальной точки по произвольной поверхности. Содержание мемуара, однако, далеко выходит за пределы такой постановки задачи.

Мемуар начинается с изучения системы первого порядка в n-мерном евклидовом пространстве R^n

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — вектор-функция переменной $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть V — гладкая скалярная функция от $\mathbf{x}$, то же обозначение сохраним для ее сужения на траекторию $\mathbf{x}(t)$, $t \geqslant t_0$. На любой траектории возможны два случая:

а) точка $t=+\infty$ является предельной для последовательности максимумов и минимумов функции V;

б) начиная с некоторого t эта функция монотонна.

В случае а) в точке экстремума выполнены условия:

$$\dot{V}(t) = 0 \text{ и либо } \ddot{V}(t) \leqslant 0, \text{ либо } \ddot{V}(t) \geqslant 0. \tag{6}$$

Если ввести оператор D равенством

$$D(\psi) = \sum_i f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

(дифференцирование в направлении траектории), то, используя (5), при помощи несложных преобразований можно записать условия (6) в виде

$$D(V) = 0 \tag{7}$$

и

$$\text{либо } D[D(V)] \leqslant 0, \quad \text{либо } D[D(V)] \geqslant 0. \tag{8}$$

Уравнение (7) определяет $(n-1)$-мерную поверхность. Неравенству $D[D(V)] < 0$ соответствуют на этой поверхности точки перехода траектории из зоны $D(V) > 0$ в зону $D(V) < 0$. Противоположному строгому неравенству отвечают точки обратного перехода. Общая граница множеств (8) состоит из точек, в которых траектория касается поверхности (7). Таким образом, в случае а) траектория, вообще говоря, бесчисленное число раз пересекает поверхность (7), проходя последовательно через каждое из множеств, определяемых неравенствами (8).

Случай б) требует более тонкого исследования, и оно проводится при дополнительном предположении ограниченности функций $V(x)$ и $f_i(x)$ вместе с их частными производными до третьего и второго порядков соответственно. Это требование обеспечивает ограниченность производных dV/dt, d^2V/dt^2 и d^3V/dt^3 на любой траектории. Теперь на помощь приходит тот вспомогательный результат о дифференцируемых функциях, о котором мы говорили на с. 115. Согласно этой лемме, производные dV/dt и d^2V/dt^2 стремятся к нулю, иначе говоря, в предельных при $t \to \infty$ точках траектории выполнены равенства

$$D(V) = D[D(V)] = 0. \tag{9}$$

Тем самым в случае б) траектории асимптотически приближаются к $(n-2)$-мерному многообразию (9). (Мы оставляем в стороне вырожденные случаи, когда множества (7) и (9) имеют другую природу).

При рассмотрении движения материальной точки по поверхности возникают существенные осложнения даже в двумерном случае. Дело в том, что уравнения Лагранжа для движущейся точки имеют второй порядок, который может быть понижен введением скоростей в качестве новых неизвестных. Тем не менее Адамару удалось получить результаты, аналогичные только что описанным, по крайней мере для случая двух степеней свободы.

Рассматривается материальная точка единичной массы, движущаяся без трения по поверхности под действием силы, имеющей потенциал U. На поверхности определена также гладкая функция V, в терминах которой, как и в случае системы (5), формулируются все результаты. Однако вычисления упрощаются для $V = U$. Адамар показывает, что при $\dot{U} = 0$ справедливо равенство

$$\ddot{U} = -(\nabla U)^2 + \frac{2T}{(\nabla U)^2}\left[(\nabla U)^2 \Delta U - \frac{1}{2} \nabla U \cdot (\nabla U)^2\right],$$

где T — кинетическая энергия точки, ∇ — градиент и Δ — оператор Лапласа на поверхности. Далее следуют рассуждения, близкие к проведенным для системы (5), причем снова рассматриваются случаи а) и б), а роль $D(V)$ переходит к функции

$$I_U = (\nabla U)^2 \Delta U - \frac{1}{2} \nabla U \cdot \nabla (\nabla U)^2.$$

Поверхность разбивается на две части, $I_U > 0$ и $I_U < 0$. Первая из них содержит все точки траекторий, доставляющие минимум U, т. е. точки, в которых возможно устойчивое равновесие. Тем самым в случае а) в эту часть попадает бесконечно много отрезков траекторий, Адамар называет эту область притягивающей. Соответственно вторая область, в которой точка не может оставаться после некоторого момента, названа отталкивающей. Все точки, в которых U имеет максимум, лежат в отталкивающей области, в них эквипотенциальная поверхность обращена выпуклостью в сторону действия силы (последнее объясняется тем, что числитель в формуле для геодезической кривизны совпадает с I_U). В частности, в упомянутом выше примере движения тяжелой точки по сфере нижняя полусфера как раз и является притягивающим множеством.

В случае б), когда на поверхности имеется лишь конечное число положений равновесия, Адамар (при дополнительном требовании регулярности поверхности и потенциала) устанавливает альтернативу: траектория либо проходит бесконечное число раз через притягивающую область, либо асимптотически приближается к положению равновесия.

Аналогичные, но менее полные результаты получены для траекторий в R^n при $n > 2$. Показано, например, что если эквипотенциальные поверхности выпуклы в направлении силы, то траектория либо удаляется в бесконечность, либо асимптотически стремится к положению неустойчивого равновесия. К этому кругу вопросов примыкает доказательство обратной теоремы Лагранжа: положение равновесия, в котором потенциальная функция не достигает максимума, является неустойчивым. Адамар указывает, что это утверждение содержится в мемуаре Ляпунова, «к сожалению, написанном на русском языке», но говорит, «что все-таки приведет свое доказательство, так как оно несколько отличается от предложенного Ляпуновым» [I341, с. 1783].

Большое место в мемуаре занимает вопрос о геодезических линиях. Так называются линии, достаточно малые участки которых являются кратчайшими путями на поверхности. Геодезические на плоскости — прямые, на сфере — дуги большого круга. Если q_1, q_2 — координаты на поверхности S и на ней задана метрика $dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i dq_j$, то длина линии $\mathbf{q}(t)$, $\alpha < t < \beta$, на S выражается интегралом:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\sum_{i,\,j} g_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_j\Big)^{1/2} dt.$$

Геодезические линии на поверхности могут быть заданы нелинейными дифференциальными уравнениями, выражающими необходимое условие экстремума последнего интеграла. Эти уравнения имеют второй порядок относительно q_i, откуда следует, что через любую точку на S можно провести геодезическую в произвольном направлении и что любые две точки S, по крайней мере достаточно близкие, можно соединить одной кратчайшей геодезической. Важность понятия геодезической линии для динамики определяется тем, что ее уравнения в существенном совпадают с уравнениями движения материальной точки под действием сил, имеющих потенциальную функцию.

Таким образом, теоремы о геодезических линиях дают ответы на вопросы о поведении траекторий динамической системы, и одновременно указанная аналогия позволяет открыть новые свойства геодезических линий. Это было ясно немецкому математику К. Г. Я. Якоби, который в «Лекциях по динамике» [III72] провел подробное исследование геодезических линий на эллипсоиде. Результаты Адамара существенно дополнили теорию геодезических, которая к концу XIX в. уже представляла собой весьма развитую область.

Вот одна из геометрических теорем рассматриваемого мемуара. На замкнутой поверхности положительной гауссовой кривизны любая замкнутая геодезическая бесконечное число раз пересекается любой геодезической (последнюю мы считаем параметризованной всей осью $-\infty < t < +\infty$). Отсюда, в частности, вытекает, что любые две замкнутые геодезические пересекаются. Адамар замечает, что утверждение о двух замкнутых геодезических является также тривиальным следствием формулы Гаусса—Бонне, связывающей интегральную гауссову кривизну области и интеграл от геодезической кривизны по границе. Но чтобы применить эту формулу, требуется выяснить топологический тип поверхности.

Здесь следует иметь в виду, что Адамар в соответствии с традицией своего времени мыслил поверхность лежащей в евклидовом пространстве. Это накладывает сильное ограничение на топологию замкнутой поверхности положительной кривизны: Адамар доказывает, что она гомеоморфна сфере и устанавливает взаимную однозначность сферического отображения поверхности. (Так называется отображение поверхности Σ в единичную сферу S^2 с центром в начале координат, при котором точке $x \in \Sigma$ соответствует точка на S^2 с радиусом-вектором $\nu(x)$ единичной нормали к Σ в точке x).

Доказательство Адамара просто и красиво. В современных терминах оно сводится к следующему. Устанавливается, что сферическое отображение является локальным диффеоморфизмом и, значит, накрытием сферы. Поэтому ввиду односвязности сферы оно представляет собой диффеоморфизм. В отличие от существенно двумерного следствия о пересечении замкнутых геодезических теорема Адамара о гомеоморфности сфере послужила стимулом для далеко идущих многомерных обобщений. Она даже включена в некоторые учебники по дифференциальной геометрии (см., например: [III62]).

В той же работе [I31] Адамар показывает, что к замкнутой геодезической на поверхности положительной кривизны никакая другая геодезическая не может приближаться асимптотически, оставаясь по одну сторону от нее. Если одна геодезическая пересекает другую, замкнутую, бесконечное число раз, то она может пробегать всюду плотное подмножество некоторой области. Не исключено, что такие геодезические имеют сколь угодно большие участки, произвольно близкие к замкнутым геодезическим.

Для иллюстрации обратимся к задаче о геодезических на трехосном эллипсоиде. Она была полностью

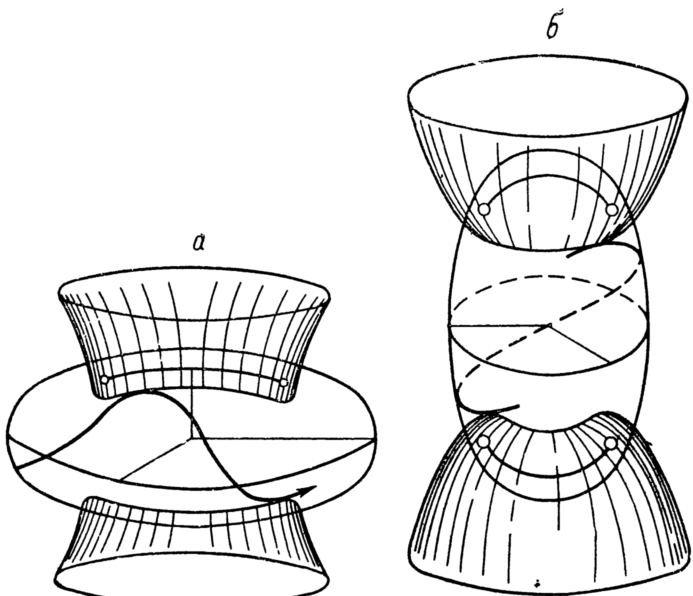


Рис. 3.

решена чисто аналитическим путем Якоби [III72], который при помощи искусных преобразований показал, что уравнения геодезических на эллипсоиде могут быть проинтегрированы в явном виде, причем интегралы выражаются в эллиптических функциях.

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b>c.$$

Каждый из расположенных на нем эллипсов $x=0$, $y=0$, $z=0$ является замкнутой геодезической. Как ведет себя геодезическая, пересекающая, скажем, эллипс $z=0$? Оказывается, что если она имеет малый наклон к этому эллипсу в точке пересечения, то либо замкнута, либо образует всюду плотное подмножество «кольца» между линиями пересечения эллипсоида с некоторым однополостным гиперболоидом (см. рис. 3, *а*). В случае «крутого» пересечения геодезической с эллипсом $z=0$ геодезическая, вообще говоря, всюду плотна в «кольце» между двумя линиями пересечения эллип-

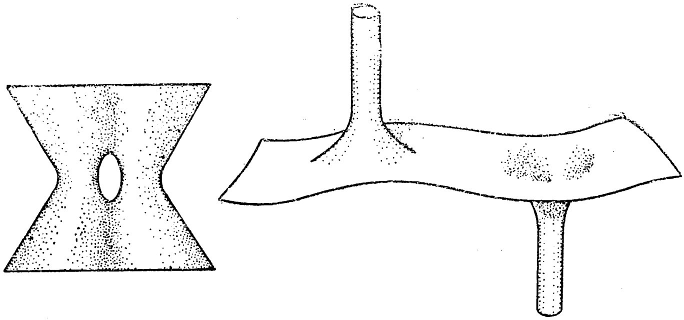


Рис. 4.

соида с двуполостным гиперболоидом (рис. 3, *б*). Более полную информацию о поведении геодезических можно получить в книге [112], откуда мы заимствовали рис. 3.

Через год, в 1897 г., в том же журнале появляется новая работа Адамара, посвященная геодезическим. На этот раз он обращается к поверхностям отрицательной гауссовой кривизны. «В этом новом случае, — пишет Адамар, — можно прийти к более полным результатам, чем в первом, и без труда провести общее обсуждение геодезических» [1341. Т. II. С. 729]. Впрочем, мемуар не исчерпывается исследованием геодезических; в нем, например, показано, что в R^3 существует большое разнообразие поверхностей строго отрицательной кривизны и построены примеры таких поверхностей различных топологических типов (см. рис. 4).

Представление о характере результатов, относящихся к геодезическим, дают следующие два утверждения из первой части работы, в которых речь идет о (внутренне полных) поверхностях отрицательной кривизны. (Формулируя теоремы Адамара, мы будем вынуждены использовать простейшие топологические термины, принятые в наши дни. Однако в оригинале соответствующие понятия определяются непосредственно и называются иначе).

Теорема 1. *В любом гомотопическом классе путей, соединяющих две точки поверхности, содержится одна и только одна дуга геодезической.*

Т е о р е м а 2. *Каждый свободный гомотопический класс содержит единственную замкнутую геодезическую.*

Имеется исключение, соответствующее случаю поверхности с бесконечными нерасширяющимися трубками, но мы предпочитаем не обсуждать его.

Далее Адамар разбивает все геодезические лучи (геодезические, продолженные на одну из полуосей изменения t) на три класса. К первому относятся замкнутые геодезические лучи и асимптотически приближающиеся к ним. Во второй класс входят геодезические, уходящие на бесконечность. Их, впрочем, можно охарактеризовать иначе: они и только они пересекают некоторую замкнутую геодезическую. В третий класс входят геодезические, не вошедшие в первый и второй. Каждая из них расположена в ограниченной части поверхности и последовательно приближается то к одной, то к другой замкнутой геодезической. Само существование геодезических третьего класса нуждается в доказательстве, и Адамар проводит его. При этом он использует следующий факт, имеющий и самостоятельное значение.

Множество начальных направлений геодезических, исходящих из произвольной точки поверхности и не удаляющихся на бесконечность, совершенно и вполне несвязно. (Иначе говоря, оно замкнуто и не имеет ни изолированных, ни внутренних точек, т. е. очень напоминает знаменитое канторово множество). Таким образом, «асимптотические свойства геодезических на поверхности, которая может быть сколь угодно гладкой, потребовали введения понятий из теории множеств, применения которой, как тогда казалось, ограничивались разрывными функциями. Это было, без сомнения, одним из первых примеров приложения идей Кантора к математике, в то время считавшейся классической» [II14, с. 50].

Адамар доказывает, что сколь угодно малое изменение первоначального направления геодезической, которая остается на конечном расстоянии, достаточно, чтобы произвести любое изменение в конечном положении этой кривой; возмущенная геодезическая может попасть в любой из трех упомянутых классов. С. Мандельбройт предполагает [II18, с. 5], что именно в связи с эффектом такого рода могла возникнуть у Адамара идея корректности задачи математической физики, хотя в работе нет упоминания этого термина.

Проведенное Адамаром исследование поверхностей отрицательной кривизны означало возникновение теории римановых многообразий неотрицательной кривизны. Не случайно за такими многообразиями, подчиненными требованию односвязности, утвердилось название многообразий Адамара. Следующий после Адамара вклад в эту теорию внес Эли Картан. В основе теории многообразий неотрицательной кривизны лежит теорема Адамара—Картана о том, что каждое n-мерное многообразие Адамара диффеоморфно R^n. В настоящее время эта теория является одним из наиболее обширных, развитых и красивых направлений римановой геометрии.

Теоремы Адамара об асимптотическом поведении геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны нашли продолжение в изящном разделе теории динамических систем — теории потоков Д. В. Аносова [III1], а неустойчивость геодезических на таких поверхностях до сих пор служит одним из основных примеров хаотического поведения траекторий динамических систем.

Курс элементарной геометрии

Разумеется, никакая книга, даже самая лучшая, не может заменить радость непосредственного общения с выдающимся лектором. Эту радость в течение многих десятилетий Адамар щедро дарил тем, кто присутствовал на его занятиях. Он оставил также ряд публикаций по методике преподавания, статьи, заметки, высказывания по вопросам учебных программ. Мы уже говорили о двухтомном «Курсе анализа» Адамара, отмечали его особенности. В помощь тем, кто преподавал анализ, направлены научно-методические работы «К теории целых рядов» [I222], «О некоторых вопросах интегрального исчисления» [I299], «О функциональном исчислении» [I153], лекции по различным вопросам алгебры, топологии, механики [I276, I136, I137, I300]. Адамар интересовался также преподаванием гуманитарных дисциплин, о чем свидетельствует его большая статья «О среднем образовании» [I187], назначение которой — обоснование взаимосвязи обучения иностранным языкам, литературе и истории.

Но главным и наиболее известным педагогическим трудом Адамара являются его «Лекции по элементарной геометрии» (т. 1 — «Планиметрия» [160], т. 2 — «Стереометрия» [172]). Это сочинение, объемом около 1 тыс. страниц, выдержало во Франции 14 изданий и в основной своей части строго соответствовало официальной школьной программе того времени. Иначе говоря, это был расширенный школьный учебник. Отмечая в предисловии, что «геометрия способна оказывать бесспорное влияние на развитие активного мышления», Адамар добавляет: «Я в первую очередь стремился усилить это влияние, пробуждая инициативу учащихся и всячески ей содействуя» [160, с. 5]. Этому способствуют более 1300 задач по всем разделам курса. Многие из них, взятые из оригинальных научных публикаций, в том числе и самого Адамара, весьма трудны и могут явиться серьезным испытанием для желающих посвятить себя математике.

Весь материал, выходящий за пределы элементарных школьных программ, подан в виде независимых приложений, объем которых намного превышает основной текст. Без применения тригонометрии, метода координат, при скромном использовании алгебры Адамар раскрывает перед учащимися богатство синтетической геометрии: метрические и проективные свойства фигур (включая конические сечения), построения с помощью циркуля и линейки. В методической разработке «О методах, применяемых в геометрии» («Добавление А» к т. 1) собраны указания, «полезные для решения задач и понимания математики вообще». В приложениях затронуты также вопросы аксиоматики и содержатся элементы неевклидовой геометрии.

Особенно богат содержанием т. 2. В нем — подробное учение о многогранниках, включая теорему Эйлера, связывающую число граней, ребер и вершин, теория правильных многогранников и их групп (этот материал использован Адамаром в книге по автоморфным функциям) и, наконец, знаменитая теорема Коши: два выпуклых многогранника с соответственно равными и одинаково направленными гранями конгруэнтны или симметричны. Наиболее нетрадиционным разделом курса является «Прибавление М» к т. 2. Оно посвящено конформной геометрии в R^3, т. е. теории инверсий и движений. В этом отразились собственные интересы Адамара. Сам автор использовал термин «аналлагматическая геометрия», не прижившийся впоследствии.

Дополнением к материалу «Прибавление М» являются написанные Адамаром в разные годы работы, посвященные конформной геометрии. Наиболее значительная из них — «Новый прогресс в аналлагматической геометрии» [I227] — первоначально вышла в Буэнос-Айресе.

«Лекции по элементарной геометрии» неоднократно переводились на иностранные языки, в том числе имеется несколько русских изданий. Под влиянием именно этой книги у многих будущих математиков в юности возникла любовь к геометрии. До сих пор курс Адамара остается одним из лучших учебников для школьников, желающих углубленно изучить этот предмет.

Математическая физика

Математическая физика до Адамара

«Еще в Нормальной школе, общаясь с товарищами-физиками, — отмечает Л. Шварц, — Адамар был увлечен прямыми связями математики с физикой. Он поддерживал прекрасные отношения с Дюэмом, Ланжевеном и другими физиками и постоянно подчеркивал, сколь сильно эти контакты его вдохновляли» [II23, с. 15]. Но заниматься математической физикой, или, что в то время считалось более или менее тождественным, теорией уравнений в частных производных, Адамар начал в самые последние годы прошлого века. Позднее он перенес в эту область центр тяжести своих исследований и продолжал разрабатывать ее до конца жизни. С начала XX в. теория уравнений в частных производных неузнаваемо изменилась, превратившись в самостоятельную дисциплину, насыщенную глубокими идеями и мощными методами, имеющую самые разные приложения и связанную с другими областями математики. И этим она в значительной степени обязана Адамару. Вспоминая о нем в некрологе, появившемся в 1964 г., Поль Леви пишет: «Один почитатель Адамара сказал мне как-то, что именно в теории дифференциальных уравнений с частными производными Адамар дал самые блестящие доказательства своего гения. Он посвятил этому предмету многочисленные статьи и две большие книги, одну — о распространении волн и уравнениях гидродинамики (1903), другую — о задаче Коши. По поводу этих работ я хотел бы заметить, что Адамар не интересовался задачами, решение которых с самого начала кажется легким; я уверен, что он никогда не занимался исследованием случая, когда возможно элементарное интегрирование. Напротив, он атаковал проблемы, которые возникают естественно, и особенно те, которые ставит физика, в этих задачах даже небольшой прогресс казался ему важным» [II10, с. 167, 168].

К тому времени, когда Адамар заинтересовался теорией уравнений в частных производных, она уже имела определенные успехи и интересную 150-летнюю историю. Об этом мы и собираемся коротко рассказать, попутно напоминая читателю некоторые понятия, играющие существенную роль в дальнейшем. В середине XVIII в. потребности интенсивно развивающейся небесной механики, гидромеханики, электромагнетизма и других разделов естествознания привели к появлению первых дифференциальных уравнений в частных производных. Задача интегрирования таких уравнений стала первой в ряду многочисленных исследований в обширной области математики, получившей название «математическая физика». Исторически первым уравнением с частными производными было уравнение колебаний струны. Оно появилось независимо в работах Даламбера (1747 г.) и Эйлера (1748 г.). К этому уравнению можно прийти с помощью следующего рассуждения.

Пусть струна, т. е. гибкая упругая нить, совершает малые поперечные колебания в плоскости страницы. Пусть $(x,\ u(x,\ t))$ — декартовы координаты ее произвольной точки в момент времени t и T — натяжение струны (см. рис. 5). Вычислим силу, действующую на участке $[x,\ x+\delta x]$ струны в направлении, перпендикулярном оси абсцисс:

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 \cong T\,(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = \\ = T\,[u_x(x+\delta x,\ t) - u_x(x,\ t)].$$

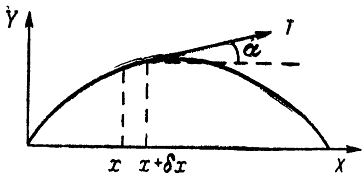


Рис. 5.

По второму закону Ньютона (сила равна произведению массы на ускорение)

$$\rho u_{tt}\delta_x \cong T\,[u_x(x+\delta x,\ t)-u_x(x,\ t)].$$

Разделив обе части полученного равенства на δx и переходя к пределу при $\delta x\to 0$, получим уравнение колебаний струны

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{1}$$

Другое классическое уравнение математической физики, появившееся впервые в 1755 г. в работе Эйлера о движении однородной несжимаемой жидкости, имеет вид

$$u_{xx}+u_{yy}=0. \tag{2}$$

Это уравнение и его трехмерное обобщение

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{3}$$

получили впоследствии прочно укоренившееся название уравнения Лапласа. Дифференциальное выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

принято называть оператором Лапласа и обозначать Δ. В оправдание этого наименования можно заметить, что Лаплас, развивая теорию тяготения, сделал очень много для понимания свойств решений уравнений (2), (3). И как это ни печально, допущенную историческую несправедливость вряд ли стоит исправлять, называя уравнение $\Delta u=0$ уравнением Эйлера, так как уже существуют два уравнения в частных производных с таким названием — одно в гидродинамике идеальной жидкости, а другое в вариационном исчислении.

Решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями. Важность этого класса функций в случае двух независимых переменных обусловлена в первую очередь его связью с понятием аналитичности. Вещественная и мнимая части любой аналитической функции — гармонические.

Уравнение Лапласа описывает, например, стационарное распределение температуры в теле. Неустановившемуся процессу распространения тепла соответствует уравнение теплопроводности

$$u_t - c^2 \Delta u = 0, \tag{4}$$

а колебательным процессам — волновое уравнение

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем, на протяжении XIX в., самым разнообразным физическим явлениям были поставлены в соответствие уравнения в частных производных. С одной стороны, оказалось, что одно и то же уравнение может описывать широкий круг процессов. Так, уравнению струны удовлетворяют сила тока и напряжение в электрических проводах, оно описывает продольные и крутильные колебания стержней, а также волновые процессы в жидкостях или газах. Уравнение Лапласа возникает при исследовании установившихся процессов в теории электромагнетизма и теплопередачи, теории упругости и гидромеханике. С другой стороны, увеличивалось число, как говорят теперь, математических моделей явлений природы. Возникали все новые и новые уравнения и системы уравнений в частных производных. Например, задачи о прогибе тонких пластин привели к бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

(или, короче, $\Delta^2 u = 0$), содержащему производные четвертого порядка. Движение вязкой несжимаемой жидкости было охарактеризовано системой нелинейных уравнений Навье—Стокса, напряженно-деформированное состояние упругих тел — так называемой системой Ламе, а распространение электромагнитных волн — системой уравнений Максвелла.

Каждое из упомянутых дифференциальных уравнений изучалось в рамках той или иной физической дисциплины. Впрочем, некоторые общие принципы были установлены с самого начала, например, решения уравнений в частных производных зависят от произвольных функций меньшего числа переменных. Поэтому, чтобы выделить единственное решение, следовало добавить к уравнению начальные или граничные условия. Такие условия диктовались физическим смыслом. Например, уравнение колебаний бесконечной струны естественно рассматривать вместе с условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad \partial u/\partial t\,(x, 0) = g(x), \tag{6}$$

т. е. считать известными при $t=0$ положение струны и скорость каждой ее точки. Подобные задачи отыскания решения уравнения в частных производных, удовлетворяющие начальным условиям, носят имя Коши.

Если струна — полубесконечная и для определенности координата x изменяется на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, то наряду с начальными условиями (6) при $x > 0$ разумно задать какую-нибудь информацию о движении ее конца. Так, условие $u(0, t)=0$ означает, что конец струны закреплен, а равенство $(\partial u/\partial x)(0, t)=0$ — что он свободен. Точно так же дело обстоит и с конечной струной (проектирующейся на отрезок оси абсцисс). Задачи такого рода раньше назывались смешанными. В настоящее время стал привычным также термин «начально-краевая задача».

В XIX в. появились первые постановки краевых задач для уравнения Лапласа в двумерной или трехмерной области Ω, ограниченной кривой или поверхностью $\partial\Omega$. Так, в 1828 г. Дж. Грин, изучая проблемы электростатики, поставил первую краевую задачу (названную впоследствии задачей Дирихле):

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega. \tag{7}$$

Вторая краевая задача для уравнения Лапласа возникает при задании на границе области производной искомой функции по нормали. По существу эта задача была сформулирована Г. Кирхгофом в 1845—1848 гг. при изучении некоторых вопросов электродинамики. Термин «граничное условие Неймана», используемый для обозначения равенства

$$\partial u/\partial \nu = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где ν — нормаль к $\partial\Omega$, дан в честь Ф. Неймана, который занимался той же задачей в 1887 г.

В XVIII и в первой половине XIX в. математики интересовались почти исключительно поисками явных решений задач математической физики. Общее решение уравнения струны (1) было представлено независимо Даламбером (1747 г.) и Эйлером (1748 г.) в виде $u(x, t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$, где φ и ψ — произвольные функции одной переменной. Произвол в выборе функций φ и ψ можно устранить, если задать начальные условия (6). Тогда решение выразится формулой Даламбера

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[f(x+at)-f(x-at)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\tau)\,d\tau.$$

Приблизительно в то же время (не позднее 1754 г.) Даниил Бернулли решил уравнение (1) при помощи тригонометрических рядов. В переписке между Эйлером и Даламбером завязался знаменитый спор о струне, к которому подключились Бернулли, Лагранж и другие математики. Даламбер считал, что начальная форма струны может быть только аналитической кривой, а Эйлер — что любой непрерывной линией, которую можно начертить «свободным влечением руки». Бернулли утверждал, что тригонометрический ряд представляет общее решение. Относительную ясность в дискуссию внес Ж. Фурье, который в 1807 г. показал, что функции, заданные на разных частях отрезка различными аналитическими формулами, представляются на всем отрезке одним тригонометрическим рядом. Спор о струне сыграл важную роль в последующем прояснении понятия функциональной зависимости в XIX в. и предвосхитил четко поставленную уже в нашем столетии проблему определения функционального пространства, в котором нужно искать решение.

Представления решений задачи Коши для уравнений теплопроводности (4) и распространения волн (5) были найдены С. Пуассоном. Он же получил явные решения задачи Дирихле (7) для круга и шара. Формулы Пуассона послужили прототипом для решения ряда других задач математической физики.

Грин ввел специальную функцию пары точек $g(P, Q)$ (названную впоследствии его именем), которая позволила ему записать в виде суммы двух интегралов решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = f \ \text{ в } \Omega, \qquad u = \varphi \ \text{ на } \partial\Omega. \tag{8}$$

Функция Грина для оператора Лапласа в области $\Omega \subset R^n$, $n=2$, 3, определяется равенствами

$$g(P, Q) = (2\pi)^{-1} \log|P - Q| + h(P, Q) \quad \text{при } n = 2,$$
$$g(P, Q) = -(4\pi|P - Q|)^{-1} + h(P, Q) \quad \text{при } n = 3,$$

где h — функция, гармоническая по координатам каждой из точек P и Q, равная нулю при $P \in \partial\Omega$ или $Q \in \partial\Omega$. При помощи формулы Грипа

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dQ = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_Q} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_Q} \right) ds_Q, \tag{9}$$

где ν_Q — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке Q, а ds_Q — элемент длины контура или площади поверхности $\partial\Omega$ в точке Q, можно показать, что решение задачи (8) представимо в виде

$$u(P) = \int_\Omega g(P, Q) f(Q)\, dQ + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_Q} g(P, Q)\, \varphi(Q)\, ds_Q.$$

Для круга, шара и некоторых других специальных областей функцию Грина можно выписать явно.

В XIX в. был широко развит так называемый метод Фурье, позволивший выражать решения в виде рядов по собственным функциям дифференциальных операторов. Применения этого метода вызвали расцвет теории так называемых специальных функций. Последние заняли центральное положение в математическом анализе, и в их преобразованиях математики достигли виртуозного мастерства.

Несмотря на эти успехи, довольно рано выяснилась ограниченность попыток решать задачи математической физики явно. Например, тщетны были усилия представить в замкнутой форме решения краевых задач в более или менее произвольных областях даже для уравнения Лапласа. С целью установления самого факта разрешимости к концу века получили развитие методы теории потенциала, позволившие сводить краевую задачу к интегральному уравнению на границе, а также был обоснован вариационный подход. (Об этих и смежных направлениях см. с. 186—189).

Решение краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами, естественно возникающих при описании физических процессов в неоднородных средах, также вызывало большие трудности. Здесь иногда удавалось добиться успеха при помощи замен переменных, позволявших сводить исходное уравнение к разрешимому в квадратурах. Это привело к идее классификации уравнений в частных производных второго порядка, которая была реализована П. Дюбуа-Реймоном в 1864 г. Так, были выделены три классических типа уравнений: эллиптический, параболический и гиперболический, — простейшими представителями которых являются уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое.

Уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (10)$$

где a, b, c — функции переменных x, y, относится к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу в зависимости от выполнения условий

$$b^2-ac<0,\qquad b^2-ac>0,\qquad b^2-ac=0.$$

При помощи невырожденной замены независимых переменных $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ уравнение (10) каждого из указанных типов можно привести соответственно к одной из трех канонических форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+f\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+f\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+f\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

Обобщение трех типов уравнений на случай m независимых переменных проводится следующим образом. Уравнение

$$\sum_{i,\ j=1}^{m} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\ldots=0,$$

где многоточие — дифференциальный оператор первого порядка, имеет эллиптический тип в точке x, если все собственные числа квадратичной формы

$$\sum_{i,\, j=1}^{m} A_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j$$

имеют одинаковые знаки. Если знак одного из собственных чисел противоположен знаку остальных, то говорят о гиперболическом типе. Если же все собственные числа, кроме одного, имеют один знак, а оставшееся равно нулю, то уравнение принадлежит к параболическому типу.

В XIX в. теория краевых задач для уравнений указанных трех типов с переменными коэффициентами была относительно слабо развита, хотя неформальная аналогия с уравнениями (3)—(5) не вызывала сомнений. Общие представления о свойствах решений уравнений в частных производных второго порядка во многом опирались на понятие характеристики (характеристической поверхности при $m \geqslant 3$ и характеристической линии при $m=2$). Так называется $(m-1)$-мерная поверхность S, заданная уравнением $\mathcal{F}(x)=\mathrm{const}$, причем $\operatorname{grad}\mathcal{F}\neq 0$ на S, а функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\sum_{i,\, j=1}^{m} A_{ij}(x)\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_j}=0.$$

Эллиптический оператор не имеет (действительных) характеристик, в то время как гиперболический оператор второго порядка от двух переменных имеет два семейства характеристик, а параболический — одно. Характеристические поверхности отличаются тем, что на них данные Коши нельзя задавать произвольно. Понятие характеристики существенно использовалось Б. Риманом [III 160], получившим в 1860 г. представление решения задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Сам термин «характеристика» возник впервые в работах Г. Монжа (1807 г.), заложившего основы геометрической теории уравнений в частных производных. В XIX в. теория характеристик интенсивно развивалась в работах А. Бэклунда, С. Ли, Э. Гурса.

В заключение этого беглого обзора упомянем еще об одном обнаруженном в XIX в. фундаментальном свойстве весьма общих линейных и нелинейных уравнений в частных производных любого порядка, образованных аналитическими функциями. Мы имеем в виду знаменитую теорему Коши—Ковалевской о существовании аналитического решения задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. О том, как уже в начале нашего столетия Адамар рассеял некоторые иллюзии, связанные с этим универсальным результатом, пойдет речь на с. 173.

«Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики»

Книга [I 92] вышла в Париже в 1903 г. Она содержит расширенное изложение курса, прочитанного Адамаром в течение 1898/1899 и 1899/1900 учебных лет в Коллеж де Франс (краткая сводка результатов появилась в его работе «О распространении волн» [I 69], 1901 г.). «В основном я предполагал исследовать, как влияют граничные условия на движение жидкости», — пишет Адамар в предисловии. Книга довольно велика — около 400 с.

Глава 1 посвящена доказательству разрешимости основной краевой задачи гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости — задачи Неймана для гармонических функций, когда на границе области задана производная решения по нормали. Искомая гармоническая функция представляет собой потенциал скоростей безвихревого стационарного течения, а краевое условие означает задание нормальной компоненты скорости потока. По-видимому, этот материал был включен в книгу в связи со злободневностью темы: только что появились важные работы Пуанкаре, Ляпунова и Стеклова, посвященные обоснованию методов теории потенциала. Изложение Адамара во многом следует мемуару Стеклова «Общие методы решения фундаментальных проблем математической физики» [III 168]. Хотя появление задачи Неймана для уравнения Лапласа на страницах книги об уравнениях гидродинамики представляется естественным, все же содержание гл. 1 стоит в стороне от основной тематики книги, связанной с неустановившимися процессами.

В гл. 2 Адамар рассматривает с «кинетической точки зрения» некоторые общие вопросы распространения волн в деформируемой среде. История этой проблемы в XIX в. чрезвычайно запутанна, поскольку многие результаты неоднократно переоткрывались. Динамика разрывов физических характеристик газа, распространяющегося прямолинейно в цилиндре с подвижными основаниями, впервые изучалась Б. Риманом в мемуаре [III 160]. Работа Римана, как и посвященные явлениям той же природы статьи Н. Рэнкина [III 157] и Э. Кристоффеля [III 88], некоторое время не привлекала внимания. Эти исследования не были известны и репетитору Политехнической школы А. Гюгонио, который в 1885 г. построил общую теорию одномерных движений деформируемых сред, и в частности передоказал значительную часть результатов Римана. Две части мемуара Гюгонио вышли из печати в 1887 и 1889 гг. [III 118], уже после его смерти.

Внимание Адамара к статьям Гюгонио было привлечено лекциями по гидродинамике, теории упругости и акустике, прочитанными его другом физиком П. Дюэмом в Лилле и опубликованными в 1891 г. [III 96]. Важную роль сыграли и беседы с Дюэмом в Бордо. Вспоминая об этом времени, Адамар писал: «Наше общение на факультете наук в Бордо предоставило мне редкую возможность дополнить чтение ценным и непрерывным обменом взглядов. Этому чтению, этому обмену взглядов я обязан большинством своих дальнейших работ — почти всеми из посвященных вариационному исчислению, теории Гюгонио, гиперболическим уравнениям в частных производных, принципу Гюйгенса» [II 9, с. 79].

Говоря о волнах, Адамар, как и Гюгонио до него, имел в виду распространяющиеся в среде возмущения с резким передним фронтом. Основное внимание в гл. 2 обсуждаемой книги Адамара обращено на понятие совместности двух движений, появившееся еще у Римана и играющее важную роль в работе Гюгонио. Речь идет о движении возмущенной среды за фронтом волны и невозмущенной — перед фронтом. «Я должен был принять во внимание факты чисто кинематического характера, — указывает Адамар, — отделив их от тех, которые зависят от динамических свойств движения. Это разделение, как и следовало ожидать, прояснило многие вопросы. В частности, благодаря ему появилось геометрическое представление процесса. Оно в свою очередь позволило сделать более понятной аналогию, существующую между волнами в понимании Гюгонио и теми волнами, которые рассматриваются в теории колебаний» *) [I 192, с. VIII].

Для того чтобы дать представление о результатах, комментируемых в этом отрывке, остановимся на некоторых начальных сведениях из гидродинамики. Движение деформируемой среды (например, жидкости или газа) можно считать известным, если определено положение каждой ее частицы в интересующие нас моменты времени t. Пусть координаты x_1, x_2, x_3 частицы заданы как функции так называемых лагранжевых переменных a_1, a_2, a_3 и времени t, где a_1, a_2, a_3 — координаты той же частицы в начальный момент.

Допустим, что в среде распространяется волна, фронт которой $F(t)$ является гладкой поверхностью, определенной уравнением

$$f(a_1, a_2, a_3, t) = 0.$$

Здесь f — гладкая функция лагранжевых координат и времени, такая, что

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 > 0 \quad \text{на } F(t).$$

Тогда среда, прилегающая к $F(t)$, делится этой поверхностью на две части, $\Omega_+(t)$ и $\Omega_-(t)$ (возмущенную и невозмущенную), где $f(a_1, a_2, a_3, t) > 0$ и $f(a_1, a_2, a_3, t) < 0$ соответственно.

Сужения некоторой функции $\varphi(a_1, a_2, a_3, t)$ на $\Omega_\pm(t)$ обозначим через $\varphi_\pm(a_1, a_2, a_3, t)$, и те же обозначения сохраним для предельных значений φ на $F(t)$. Для разности $\varphi_+ - \varphi_-$ этих предельных значений, т. е.

---

*) В связи с последней фразой Адамара отметим, что изучаемое им понятие волны не включает многие волновые процессы. Существуют и более общие определения. Так, например, согласно [III67, с. 7], волна — это любой различимый сигнал, передающийся с некоторой скоростью от одной частицы среды к другой.

для скачка функции φ на фронте волны, будем использовать обозначение $[\varphi]$.

В газовой динамике роль функции φ играют компоненты скорости $\mathbf{v}$, давление p, плотность ρ, температура T, а также их производные. Величины $\mathbf{v}$, p, ρ, T удовлетворяют некоторым интегральным соотношениям, вытекающим из основных физических законов движения газа. Если в окрестности некоторой точки упомянутые физические характеристики непрерывно дифференцируемы, то интегральные соотношения могут быть переписаны в форме дифференциальных уравнений. В случае разрывов $\mathbf{v}$, p, ρ, T из интегральных соотношений вытекают некоторые связи между скачками в точках поверхности $F(t)$. Эти связи называются условиями динамической совместности. В соответствии со сказанным ранее об общем понятии совместности двух движений здесь имеются в виду движения, характеризуемые величинами $\mathbf{v}_+$, p_+, ρ_+, T_+ и $\mathbf{v}_-$, p_-, ρ_-, T_-.

Поверхности $F(t)$, на которых по крайней мере одна из основных гидродинамических характеристик терпит разрыв, называются поверхностями сильного разрыва. При условии непрерывности всех упомянутых характеристик и наличии скачкообразного разрыва хотя бы одной из их частных производных первого порядка поверхность называют поверхностью слабого разрыва. Если фронт волны — поверхность слабого разрыва, то на нем появляются другие условия совместности — геометрические и кинематические. Они не зависят от уравнений движения среды и выводятся из чисто геометрических или кинематических рассмотрений. Тем самым эти условия совместности применимы к волнам в самых различных средах и следуют только из факта существования волны.

Понять, как возникают кинематические и динамические условия, нетрудно. Допустим, что функция $\varphi(a_1, a_2, a_3, t)$, о которой уже шла речь, непрерывна, но ее первые производные $\partial\varphi/\partial a_i$, $i=1, 2, 3$, имеют скачки на поверхности $F(t)$. Будем считать функцию φ_+ продолженной на $\Omega_-(t)$ с сохранением ее непрерывности и непрерывности упомянутых производных. Аналогично продолжим φ_- на область $\Omega_+(t)$. Тогда в точках поверхности $F(t)$ выполняются три равенства:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}(\varphi_+ - \varphi_-) = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}\right], \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку на $F(t)$ справедливы тождества $f(a_1, a_2, a_3, t) = 0$ и $(\varphi_+ - \varphi_-)(a_1, a_2, a_3, t) \equiv 0$, то градиенты функций f и $\varphi_+ - \varphi_-$ (по лагранжевым переменным) параллельны. Иначе говоря,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\right] = \lambda \frac{\partial f}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где λ — некоторая функция. Эти равенства и представляют собой упомянутые геометрические (в терминах Адамара — тождественные) условия совместности на поверхности слабого разрыва.

Близкие рассуждения приводят к кинематическому условию совместности

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = \lambda \frac{\partial f}{\partial t},$$

где λ — та же функция, что и выше.

Адамар первым проводит четкую классификацию условий совместности в зависимости от их геометрической, кинематической или динамической природы. Если у Гюгонио встречаются лишь условия совместности первого порядка, т. е. условия для скачков первых производных, то Адамар в гл. 2 книги намечает контуры общей теории геометрических и кинематических условий произвольного порядка, и в частности указывает выражения для скачков вторых и третьих производных, содержащие частные производные функции $f(a_1, a_2, a_3, t)$.

Развитая в гл. 2 теория служит основой для более конкретных исследований, проводимых далее в гл. 4, 5 применительно к движению газа и в гл. 6 — к волнам в упругих телах. При этом условия совместности позволяют, не решая дифференциальных уравнений движения среды, получить значения некоторых ее параметров на поверхности фронта, например вычислить скорость распространения волны.

Короткая третья глава носит вспомогательный характер, в ней собраны общие сведения об уравнениях газовой динамики и соответствующих краевых условиях. Глава 4 «Прямолинейное движение газа» в основном посвящена изложению теории Римана—Гюгонио, относящейся к одномерному случаю, когда уравнения газодинамики могут быть проинтегрированы.

Трехмерные движения газа рассмотрены в гл. 5, причем сначала изучаются направление и скорость распространения разрывов второго порядка (волны ускорения). Адамар показывает, что такие волны не мешают сохранению циркуляции скорости, т. е. интеграла

$$\int_C v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$$

по замкнутому контуру C, во время движения. Тем самым волны ускорения не влияют на вихреобразование в газе. Для ударных волн (волн скорости) — разрывов первого порядка — ситуация, согласно Адамару, совсем иная: в одном из приложений к книге он доказывает, что ударные волны могут инициировать вихри там, где их не было до прохождения фронта.

В гл. 6 Адамар изучает распространение волн в упругих телах при конечных деформациях. Дифференциальные уравнения динамики таких сред, записанные в перемещениях, образуют нелинейную гиперболическую систему второго порядка. Внутри среды распространяется волна, на фронте которой перемещения и их первые производные непрерывны, а вторые производные изменяются скачкообразно. Подставляя полученные в гл. 2 кинематические условия совместности второго порядка в упомянутую гиперболическую систему, Адамар приходит к задаче на собственные числа

$$A(\nu)\,\lambda = c^2\lambda.$$

Квадрат скорости распространения c играет роль собственного числа, а нормаль λ к фронту волны — роль собственного вектора. Матрица $A(\nu)$ называется акустическим тензором тела в направлении распространения ν и определяется в каждой точке тела и для каждого фиксированного вектора ν упругими характеристиками материала и напряженным состоянием. Компоненты тензора $A(\nu)$ имеют вид $a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\,\nu_\alpha\nu_\beta$, где x — произвольная точка тела Ω, ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты вектора ν, а $a_{ij}^{\alpha\beta}$ — непрерывные функции в замыкании $\overline{\Omega}$. В соответствии с классической теорией упругости предполагается выполненным условие $a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$, которое обеспечивает симметрию матрицы $A(\nu)$. Неотрицательность этой матрицы равносильна существованию волны.

Теорема, приведенная в гл. 6 книги Адамара, утверждает возможность распространения волны в теле Ω для любого направления ν, если выполнено так называемое условие инфинитезимальной устойчивости

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha,\, \beta,\, i,\, j=1}^{3} a_{ij}^{\alpha 3}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\, dx \geqslant 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные гладкие функции в области Ω, принадлежащие некоторому классу.

Тремя годами позже, в 1906 г., Дюэм в книге «Исследования по теории упругости» [III 97, с. 142—146] отметил недостаточность рассуждений, предложенных Адамаром для доказательства этого факта. По-видимому, первый строгий вывод был найден только в 1946 г. К. Каттанео [III 86]. Почти через 20 лет после этого Г. Фикера нашел простое доказательство, используя технику, применяемую в общей теории эллиптических систем уравнений в частных производных [III 69]. Он же показал на примере, что неотрицательность матрицы $A(\nu)$, будучи достаточной для инфинитезимальной устойчивости в случае однородного тела, $a_{ij}^{\alpha\beta} = \text{const}$, не является таковой в общем случае [III 102]

Было бы преждевременно закончить разговор о гл. 6 «Лекций о распространении волн», не упомянув об активной работе, проведенной в той же области и в том же круге идей уже во второй половине нашего века. Вот что пишет в этой связи американский механик К. Трусделл в статье, посвященной Адамару в связи с «шестидесятилетием его великого трактата „Лекции о распространении волн“»: «После классических работ Кристоффеля, Гюгонио, Адамара и Дюэма о волнах в упругих материалах могло показаться, что сделать остается совсем немного. Но это неверно. Как и для большинства разделов механики, в последнее десятилетие была осознана необходимость вернуться к теме еще раз, не только с целью освободить систему понятий от затянувшейся линеаризации и поместить ее более прочно в основание современной механики, но также для того, чтобы вывести из нее специфические предсказания, удовлетворяющие современной потребности в контакте теории и правильно понятого эксперимента» [III 176, с. 263].

Отметим еще, что условие строгой положительности тензора $A(\nu)$, часто называемое условием Лежандра—Адамара, оказалось полезным и в математике, а именно в современной теории квазилинейных систем, уравнений в частных производных. Будучи менее ограничительным, чем обычное условие эллиптичности, для ряда вопросов оно является более естественным (см., например: [III 107, III 144] и др.).

Последняя, седьмая глава книги посвящена теории характеристик гиперболических уравнений и систем частных производных второго порядка. Материал, включенный в нее, был в дальнейшем коренным образом переработан Адамаром, послужив отправным пунктом для его прославленных исследований задачи Коши.*) Об этом мы будем подробно говорить далее. Отметим лишь, что в гл. 7 Адамар первым вводит термин «бихарактеристика» для обозначения понятия, играющего важную роль в современной теории дифференциальных уравнений, и показывает, что для уравнений оптики бихарактеристические кривые суть не что иное, как лучи.

Мемуар о равновесии пластин

В 1907 г. Адамар представил в Академию наук на соискание премии Вайяна работу о равновесии тонких упругих пластин, зажатых по краю [I 125]. Математическая постановка задачи заключается в следующем. Пусть Ω — область, вырезанная в пластине ее серединной плоскостью, и $\partial\Omega$ — гладкий контур, ограничивающий Ω. Требуется найти нормальное смещение $w(x, y)$ точки $(x, y) \in \Omega$ под действием нагрузки $q(x, y)$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w(x, y) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \qquad (11)$$

---

*) В предисловии к книге 1922 г. [I189] Адамар пишет: «. . .настоящую монографию можно рассматривать как продолжение моих „Лекций о распространении волн и уравнениях гидродинамики“, заменяющее бо́льшую часть последней главы, которая, впрочем, была лишь попыткой показать трудности задачи, решение которой я теперь в состоянии дать».

впервые полученному Софи Жермен в 1811 г. (мы опускаем постоянный множитель перед $q(x, y)$, зависящий от толщины пластины и ее материала). Если боковая поверхность пластины жестко закреплена, то на $\partial\Omega$ выполняются краевые условия

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, y) = 0, \tag{12}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Академия наук Франции выдвинула на конкурс проблему: усовершенствовать существенным образом анализ краевой задачи (11), (12) и специально изучить случай прямоугольного контура. Следует иметь в виду, что краевые задачи, описывающие равновесие пластин, допускают явное решение в редчайших случаях. Таким исключением является круглая пластина, которая была рассмотрена Э. Матье [III 139] и М. Леви [III 132], получившими представления решений в виде рядов.

В 1896 г. Е. Альманзи [III 76] и Г. Лауричелла [III 129] одновременно получили решение в виде определенного интеграла, но лишь для круговой пластины с защемленным краем. Они заметили, что решение уравнения $\Delta^2 w = 0$ в круге $x^2 + y^2 < R^2$ допускает представление $w(x, y) = U(x, y)(x^2 + y^2 - R^2) + V(x, y)$, где U и V — гармонические функции, и тем самым свели задачу о круглой защемленной пластине к двум задачам Дирихле для уравнения Лапласа. Две другие классические задачи о равновесии круглой пластины соответствуют свободному и свободно опертому краю. Обе они были решены Адамаром в первой работе по теории пластин, опубликованной в 1901 г. в «Annales École normale supérieure» [I 73]. Он показал, что при помощи квадратур обе задачи также сводятся к задаче Дирихле для гармонических функций, несмотря на то что здесь условия на контуре выглядят значительно сложнее по сравнению с пластиной, зажатой по краю. Результат был новым, и его вывод технически интересен, но все же работа 1901 г. была лишь дебютом в новой для Адамара области. Свою настоящую силу он продемонстрировал через шесть лет, обратясь к задаче (11), (12) для пластины произвольной формы.

Комиссия, в состав которой входили К. Жордан, П. Аппель, Ж. Умбер, М. Леви, Г. Дарбу и Ж. Буссинеск, рассмотрела 12 мемуаров. А. Пуанкаре, Э. Пикар и П. Пенлеве характеризовали работы. Вердикт жюри гласил: Адамару присуждается три четверти приза, оставшуюся часть разделили Г. Лауричелла, А. Корн и Т. Боджо. В заключение о мемуаре Адамара было сказано, что сколь бы ни был богат результатами этот мемуар, еще более он замечателен следствиями, которые можно надеяться из него вывести. Сделаем попытку спустя 83 года разобраться, в чем заключаются эти результаты, и выяснить, оправдались ли надежды членов конкурсной комиссии.

Основным объектом обстоятельного исследования Адамара в обсуждаемом мемуаре (он занимает 128 страниц) является так называемая функция Грина краевой задачи (11), (12), иначе говоря, решение той же задачи, соответствующее нормальной нагрузке, сосредоточенной в произвольной точке области Ω. На современном языке функция Грина $G(P, Q)$, где P и Q — точки с координатами (x, y) и (ξ, η), есть обращающееся в нуль вместе с $(\partial G/\partial\nu)(P, Q)$ при $P \in \partial\Omega$, $Q \in \Omega$ решение уравнения

$$\Delta_P^2 G(P, Q) = \delta(P-Q).$$

Здесь в правой части фигурирует δ-функция Дирака, а понятие решения трактуется в обобщенном смысле. Адамар, конечно, пользовался другим определением (ведь до создания теории обобщенных функций оставалось еще около 30 лет), но оно было ничуть не хуже только что приведенного (см. определение функции Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа, приведенное на с. 142). Однозначная разрешимость задачи (11), (12) может быть установлена различными методами; некоторые из них были известны уже в начале века (например, метод граничных интегральных уравнений Фредгольма, которым Адамар и пользовался).

При помощи функции Грина мы можем представить прогиб пластины в виде

$$w(P) = \int_\Omega G(P, Q)\, q(Q)\, dQ,$$

редуцируя тем самым решение краевой задачи к вычислению интеграла по области. Это обстоятельство и определяет полезность функции Грина, помимо того что она сама имеет механическую интерпретацию. Однако найти явное выражение этой функции можно лишь для специальных областей. Например, в случае круга радиуса ρ справедливо представление

$$G(P, Q) = \frac{1}{8\pi} |P - Q|^2 \log \left| \frac{\rho (P - Q)}{\rho^2 - \bar{Q}P} \right| - \\ - \frac{1}{16\pi\rho^2} (|\rho (P - Q)|^2 - |\rho^2 - \bar{Q}P|^2),$$

где P и Q понимаются как комплексные числа, а черта означает комплексное сопряжение. В случае области сколь-нибудь общей формы выписать функцию Грина нельзя, и даже сейчас нахождение хороших численных приближений $G(P, Q)$ при помощи ЭВМ — очень сложная, хотя и разрешимая задача.

Изучению зависимости функции Грина от контура, ограничивающего область, и посвящен мемуар Адамара. Правильнее было бы сказать «трех функций», потому что наряду с $G(P, Q)$ Адамар рассмотрел функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения $-\Delta u(x, y) = q(x, y)$. Статья начинается с вывода «вариационных формул», которые впоследствии были названы именем автора. Эти формулы выражают главную часть изменения функции Грина, возникающего при малой деформации области. Доказательство несложно и с точностью до несущественных технических подробностей может быть воспроизведено здесь. Ограничимся случаем функции Грина $g(P, Q)$ задачи Дирихле для оператора Лапласа (см. с. 142), который был рассмотрен Адамаром еще в заметке 1903 г. [I 93].

Адамар предполагает, что в области Ω содержится другая область, Ω^*, ограниченная гладким контуром $\partial\Omega^*$. Последний зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ и аппроксимирует $\partial\Omega$ так, что направления нормалей в близких точках обоих контуров оказываются близкими. Обозначим через $g(P, Q)$ и $g^*(P, Q)$ функции Грина для Ω и Ω^*, где P и Q — фиксированные точки области Ω^*. Поскольку оператор $-\Delta$, примененный к функции Грина, дает дельта-функцию в силу формулы Грина (9), справедливо тождество

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) = \\ = \int_{\Omega^*} (g^*(P, R) \Delta_R g(Q, R) - g(P, R) \Delta_R g^*(Q, R))\, dR.$$

Интегрируя по частям справа и принимая во внимание нулевое краевое условие для функции g^* на $\partial\Omega^*$, заключаем, что

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) = \int\limits_{\partial\Omega^*} g(P, T) \frac{\partial g^*}{\partial \nu_T^*}(Q, T)\, ds_T^*,$$

где ds_T^* — элемент длины контура $\partial\Omega^*$ в точке T, ν_T^* — внутренняя нормаль к $\partial\Omega^*$ в той же точке, интеграл приближенно равен интегралу

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(P, R^*) \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(Q, R)\, ds_R,$$

в котором обозначения ds_R и ν_R имеют тот же смысл, что и на с. 142, а R^* — ближайшая к R точка контура $\partial\Omega^*$. Остается заметить, что $g(P, R)=0$ при $R \in \partial\Omega$ и что поэтому

$$g(P, R^*) \cong \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P, R)\, \delta\nu_R,$$

где $\delta\nu_R$ — расстояние от R до $\partial\Omega^*$, которое можно считать зависящим от ε линейно. Мы получили приближенное равенство

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) \cong \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P, R) \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(Q, R)\, \delta\nu_R ds_R.$$

Переходя к главной части разности $g-g^*$, окончательно получаем вариационную формулу Адамара

$$\delta g(P, Q) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P, R) \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(Q, R)\, \delta\nu_R ds_R. \qquad (13)$$

Напомним, что здесь g — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Аналогичная вариационная формула для функции Грина задачи о пластине, доказываемая немногим сложнее, имеет вид

$$\delta G(P, Q) = \int\limits_{\partial\Omega} \Delta_R G(P, R)\, \Delta_R G(Q, R)\, \delta\nu_R ds_R. \qquad (14)$$

Отсюда немедленно следует некоторое нелинейное уравнение в «функциональных производных» для функции $\psi(P, Q) = \Delta_P \Delta_Q G(P, Q)$, «интегрирование» которого в принципе позволяет построить эту функцию методом последовательных приближений для кривой $\partial\Omega$ при условии, что она задана заранее для некоторого начального контура.

Из вариационной формулы (14) Адамар выводит несколько количественных закономерностей. Например, исходя из (14), он заключает, что для любой области Ω справедливо неравенство

$$[G(P, Q)]^2 \leqslant G(P, P)\, G(Q, Q),$$

а из очевидного следствия формулы (14)

$$\delta G(P, P) = \int\limits_{\partial\Omega} [\Delta G(P, R)]^2\, \delta\nu_R\, ds_R$$

находит, что величина $G(P, P)$ увеличивается при расширении области. Отсюда, сравнивая $G(P, P)$ для области и для вписанного в Ω круга, Адамар приходит к неравенству $G(P, P) > 0$.

И здесь нужно перейти к рассказу о двух гипотезах, связанных с функцией Грина жестко закрепленной пластины. Дело в том, что еще в 1901 г. итальянский механик Боджо*) предположил, что внутри области функция $G(P, Q)$ всегда положительна [III 80].**) В мемуаре 1907 г. [I 125] Адамар добавляет к этому еще одно физически очевидное предположение — о возрастании $G(P, Q)$ при расширении области. Через год в докладе «О некоторых интересных случаях бигармонической задачи» на Международном математическом конгрессе в Риме [I 131] Адамар останавливается и на гипотезе Боджо. «Несмотря на отсутствие строгого доказательства, справедливость этого предположения не вызывает сомнений для выпуклых областей», — говорит он (см.: [I 341. Т. III. С. 1299]) и утверждает, уже как математик, что функция $G(P, Q)$ положительна для невыпуклой области, ограниченной улиткой Паскаля. Отметим, что положительность функции Грина круговой

---

*) Томмазо Боджо родился в 1877, умер в 1963 г. Некоторые из его результатов впоследствии подверглись критике: он считал, например, что метод Фредгольма непосредственно применим к интегральным уравнениям основной краевой задачи изотропной теории упругости с заданными напряжениями на границе [III81]. В действительности упомянутые уравнения являются сингулярными и требуют специального подхода (Ф. Трикоми, Ж. Жиро, С. Г. Михлин, В. Д. Купрадзе и др.).

**) В дальнейшем все известные нам авторы, обсуждающие это предположение (кроме самого Адамара, который справедливо ссылается на Боджо), называют его гипотезой Адамара (см. [III49] и др.).

пластины, вытекающая из приведенной выше формулы, была известна. В том же докладе Адамар указывает на необходимость введения дополнительных предположений об области, поскольку функция $G(P, Q)$ знакопеременна в случае кругового кольца с большим отношением радиусов внешней и внутренней окружностей.

Читателю, возможно, будет небезынтересно узнать, что гипотеза Боджо была опровергнута также и для выпуклых областей. Это произошло уже в 1948 г., когда американец Р. Даффин продемонстрировал знакопеременность функции Грина в случае закрепленной пластинки, близкой к очень длинному прямоугольнику [III 95]. Его контрпример основан на том известном факте, что, вообще говоря, бигармоническая функция в полуполосе $x > 0$, $|y| < 1$, удовлетворяющая при $y = \pm 1$ и больших x однородным краевым условиям Дирихле, асимптотически при $x \to +\infty$ ведет себя на вещественной оси, как $C \exp(-\sigma x) \cos(\tau x - c)$, где $\sigma \cong 2.1$, $\tau \cong 1.12$, C, c — const, и, следовательно, имеет бесконечно много перемен знака. Во введении к работе Даффин в свою очередь высказывает две гипотезы. Ему представляется вероятным, что знакопеременность функции Грина возникает для прямоугольника с отношением сторон приблизительно больше четырех и что, «с другой стороны, для квадратной пластины ответ на вопрос Адамара положителен. В пользу этого предположения говорит тот факт, что ответ положителен для круговой пластины».

В 1953 г. Ч. Лойнер [III 136] и Г. Сеге [III 173] привели несколько примеров областей, ограниченных аналитическими кривыми, для которых функция Грина меняет знак. В том же году П. Гарабедян показал, что даже для эллипса эта функция знакопеременна, если он достаточно вытянутый. Пусть Ω — такой эллипс и $G(P, Q) < 0$ для некоторых точек P и Q. Впишем в Ω область Ω^* таким образом, что $P \in \Omega^*$ и $Q \in \partial\Omega^*$. Тогда $0 = G^*(P, Q) > G(P, Q)$, что противоречит предположению Адамара о монотонности G. С этой старой историей, может быть, полезно познакомиться тем существующим и поныне поборникам механической интуиции, которым и без математики все ясно.

Но продолжим описание мемуара 1907 г. Покончив с выводом вариационных формул для функций Грина и непосредственными следствиями этих формул, Адамар переходит к исследованию вариационных свойств функции Грина задачи о жесткой закрепленной пластине. «Обобщая теорию максимумов и минимумов на случай неизвестных функций, — пишет он во введении в гл. 3 мемуара, — вариационное исчисление до сих пор ограничивалось изучением экстремумов определенных интегралов, тем, что Кнезер в своей недавней работе назвал „наиболее общей задачей вариационного исчисления в случае одной независимой переменной“, — решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако изучение физического мира требует рассмотрения таких характеристик, которые зависят от произвольной линии или поверхности и экстремумы которых необходимо исследовать; поэтому нет никакой причины рассматривать специальный класс задач, изученных до сих пор, как единственно важный».

Наиболее известным и обнаруженным еще в глубокой древности математическим фактом из ряда многих других, подразумеваемых Адамаром в этом отрывке, является изопериметрическое свойство круга: из всех плоских фигур с фиксированным периметром круг имеет наибольшую площадь. Аналогично шар является решением задачи о максимуме объема среди всех тел с заданной площадью поверхности. Такого рода красивые закономерности не являются привилегией геометрических характеристик фигур и тел. В 1856 г. А. Сен-Венан в мемуаре о кручении упругих призм [III 164] предположил, что из всех упругих цилиндров с одной и той же площадью поперечного сечения круглый имеет наибольшую жесткость кручения. Эта теорема была подкреплена физическими аргументами и убедительным численным материалом, но математическое доказательство отсутствовало; оно было дано Г. Полиа в 1948 г.

Другой пример, по-видимому, наиболее стимулировавший Адамара, — следующая гипотеза, высказанная Рэлеем в «Теории звука» [III 63]: из всех зажатых пластин с одинаковой площадью круг имеет наименьшую основную частоту. Речь идет о первом собственном числе краевой задачи

$$\Delta^2 u = \lambda u \ \text{ в } \Omega, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \partial\Omega. \tag{15}$$

Гипотеза Рэлея полностью не доказана до сих пор. Она обоснована в известной книге Г. Полиа и Г. Сеге «Изопериметрические неравенства в математической физике» [III 49] при дополнительном требовании положительности первой собственной функции задачи (15). Верно ли последнее предположение для всех областей, по-видимому, неизвестно.*)

Количество аналогичных задач (как решенных, так и нерешенных) весьма велико. Традиционных средств вариационного исчисления недостаточно для их решения; на это обстоятельство и указал Адамар, приступая к обсуждению своей изопериметрической гипотезы: круг с центром P реализует максимум функционала $G(P, P)$ на множестве всех областей Ω заданного периметра, содержащих P. (Под G здесь подразумевается функция Грина закрепленной пластины). Использованный метод основан на применении вариационной формулы (14), которая в принципе может дать лишь признаки относительного экстремума. Именно этой цели и достигает Адамар, вычисляя $G(P, P)$ для контура, являющегося «почти окружностью». Он устанавливает отрицательность вариации рассматриваемого функционала.

На этом мы заканчиваем описание работы Адамара, хотя она и не исчерпывается упомянутыми результатами. Мы надеемся, что нам удалось убедить читателя в глубине и содержательности мемуара. Впрочем, и здесь, как вообще свойственно идеям Адамара, их значение и сила в полной мере были подтверждены будущим. Основные приложения вариационной формулы Адамара относятся к теории функций комплексной переменной и к плоским задачам со свободными границами, возникающими в гидродинамике и в физике плазмы. Ее важное значение для решения экстремальных задач в комплексной области и для различных вопросов, связанных с конформными отображениями, проявилось в работах Г. Жюлиа, М. Шиффера, М. А. Лаврентьева, П. Гарабедяна, С. Бергмана и др.

*) Недавно В. А. Козлов, В. А. Кондратьев и В. Г. Мазья показали [III30], что первая собственная функция задачи (15) для плоской выпуклой области с гладкой границей может быть знакопеременной, и установили, что функция $G(P, Q)$ знакопеременна в любой окрестности вершины произвольного прямоугольника, и тем самым опровергли одну из гипотез Даффина.

Недавно были получены обобщения этой формулы на фундаментальные решения общих эллиптических краевых задач в произвольных n-мерных областях с гладкими границами. Отметим наконец, что правую часть формулы Адамара можно рассматривать как главный член асимптотического разложения функции Грина по степеням малого параметра ε, характеризующего вариацию контура. При такой трактовке исследование Адамара становится первым в ряду многочисленных работ, посвященных асимптотике решений эллиптических краевых задач в «регулярно» или «сингулярно» возмущенных областях. Это направление, важное как с прикладной, так и с чисто математической точки зрения, интенсивно развивается в последние годы в СССР.

Гидродинамические исследования

Адамар не раз обращался к проблемам гидродинамики. Мы уже упоминали, что в «Лекциях о распространении волн. . .» он систематически изложил теорию краевой задачи Неймана, описывающей, в частности, установившееся безвихревое движение идеальной жидкости, находящейся в замкнутом сосуде или обтекающей препятствие. Далее речь пойдет о вкладе Адамара в теорию поверхностных волн и его решении задачи о стационарном медленном движении капли в вязкой несжимаемой жидкости.

Уравнение Адамара для волн на поверхности жидкости. Еще в мемуаре о равновесии пластин 1907 г., указывая, что нелинейное интегродифференциальное уравнение для вариации функции Грина «ни в коем случае не изолировано в математической физике», Адамар упоминает о некотором аналогичном линейном уравнении, возникающем в теории волн малой амплитуды на водной поверхности. А в записке о своих научных работах, составленной в 1909 г., он отмечает, что «те же смешанные интегральные уравнения управляют одной из интереснейших и пока наименее изученных проблем гидродинамики — о распространении волн на поверхности жидкости» [III 193, с. 31]. Такие уравнения стали предметом трех коротких статей Адамара с одинаковым названием «О волнах жидкости» [I 139, I 140, I 173].

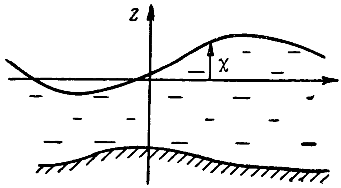


Рис. 6.

Проблема относится к классической гидродинамике идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости, и речь идет только о безвихревых течениях. Последнее требование, как известно, приводит к существованию потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$. Иначе говоря, вектор скорости частицы жидкости $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ совпадает с градиентом функции Φ по пространственным переменным. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа. На дне водоема нормальная компонента скорости равна нулю (условие непротекания), что в терминах потенциала означает обращение в нуль нормальной производной $\partial\Phi/\partial n$ при любом $t>0$. Трудность проблемы вызвана наличием априори неизвестной взволнованной поверхности и нелинейностью заданных на ней краевых условий. В исходной «точной» постановке требуется найти не только потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, но и заполненную жидкостью зависящую от времени область, в которой он задан. Такая задача чрезвычайно сложна и мало изучена до сих пор. Чтобы выйти из положения, вводят дополнительные физические предположения. Наиболее распространенным из них является условие малости высоты волн и скоростей жидкости, позволяющее линеаризовать задачу. Приняв эту гипотезу, мы можем искать потенциал в фиксированной области Ω, снизу ограниченной дном, а сверху — плоскостью $z=0$ (рис. 6). Отклонение $\chi(x, y, t)$ поверхности жидкости от плоскости $z=0$ связано с производными потенциала следующими двумя условиями:

$$\chi=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{z=0},$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0},$$

где g — ускорение свободного падения. Первое (динамическое) следует из равенства нулю давления на свободной поверхности, а второе (кинематическое) означает, что частица жидкости, находящаяся на поверхности, не уходит внутрь жидкости во время движения. Следует помнить еще, что Φ — гармоническая функция, удовлетворяющая однородному условию Неймана на дне, и что в начальный момент заданы и потенциал Φ, и функция χ.

Эту краевую задачу называют задачей Коши—Пуассона. Вообще изучение волн на воде имеет богатую историю, но, стремясь скорее перейти собственно к уравнению Адамара, мы ограничимся тем, что к двум упомянутым французским математикам присоединим имена Лагранжа, Стокса, Кельвина, Рэлея, Лэмба, Буссинеска. Трудами этих ученых был заложен фундамент теории поверхностных волн.

Адамар преследует цель найти для функции $\chi\ (x, y, t)$ уравнение, не содержащее потенциала скоростей. Он вводит вспомогательную гармоническую функцию $\psi = \partial\Phi/\partial t$, которая, очевидно, удовлетворяет краевым условиям:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на дне}, \qquad \psi = -g\chi \quad \text{при } z = 0.$$

Функция χ не задана, но для рассуждений Адамара это несущественно. Задачу определения гармонической функции по этим условиям он называет смешанной и говорит, что ее можно считать решенной, если известна соответствующая функция Грина $G\ (M,\ P)$.

Итак, при помощи $G\ (M,\ P)$ через χ выражается функция ψ, а вместе с ней — и ее производная $\partial\psi/\partial z$ на плоскости $z=0$. Дифференцируя по времени динамическое краевое условие, заключаем, что $\partial\psi/\partial z$ при $z=0$ совпадает с $\partial^2\chi/\partial t^2$ и, следовательно, требуемое соотношение получено. Вот окончательный вид уравнения Адамара:

$$\frac{4\pi}{g}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\int \chi\frac{d\xi d\eta}{r} + \int\int \chi\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial\zeta}\,d\xi d\eta. \qquad (16)$$

Здесь r — расстояние между точками $(x,\ y,\ z)$ и $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, а интегрирование распространено на всю плоскость $\zeta=0$. Функция H связана с функцией Грина равенством

$$G(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + H(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta),$$

где r' — расстояние от (x, y, z) до точки $(\xi, \eta, -\zeta)$.

Но Адамар не ограничивается выводом интегродифференциального, или, как теперь говорят, псевдодифференциального, уравнения для χ. В заметке 1916 г. [I 173] он выводит из (16) (правда, не совсем строго) так называемое уравнение мелкой воды в акустическом приближении. Речь идет об уравнении

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = gh\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right), \tag{17}$$

где h — постоянная глубина жидкости в положении равновесия. Разумеется, волновое уравнение (17) по сравнению с (16) много проще; оно было впервые получено Лагранжем из чисто физических рассуждений в предположении, что глубина h мала.

Сначала Адамар преобразует уравнение (16) к виду

$$\frac{2\pi}{g}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \iint K(x, y, \xi, \eta)\,\Delta\chi(\xi, \eta)\,d\xi d\eta,$$

где

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{r^2 + 4m^2h^2}}. \tag{18}$$

Равенство (18) непосредственно следует из явного представления функции Грина для слоя $0 > z > -h$. Из него выводится другая, более удобная формула

$$K = 2\int_{r/2h}^{\infty} \frac{ds}{\operatorname{sh}(\pi s)\sqrt{4h^2s^2 - r^2}},$$

и наконец, «более нет никаких трудностей. Из-за присутствия гиперболического синуса существенна лишь часть интеграла, где r имеет тот же порядок, что и h. В силу малости h величину $\Delta\chi(\xi, \eta)$ можно отождествить с $\Delta\chi(x, y)$, если только $\Delta\chi$ не слишком быстро меняется, и мы приходим к (17)».*)

*) Хотя гипотеза о медленном изменении $\Delta\chi$ — слабое место в рассуждении Адамара, в принципе она правильна, в чем можно убедиться, используя преобразование Фурье по переменным ξ, η.

Если жидкость заполняет полупространство $z < 0$, то из уравнения (16) в результате несложных преобразований Адамар получает уравнение в частных производных четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) = 0, \tag{19}$$

которое, как он сам отмечал, неэквивалентно исходному.

Последнее равенство представляет собой уравнение Коши для определения формы поверхности жидкости бесконечной глубины, неограниченно простирающейся по горизонтальным направлениям. В случае бассейна конечных размеров Адамар также вывел уравнение типа (16) и показал, что оно может быть преобразовано к следующему обобщению уравнения Коши:

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) = \int\limits_{\omega} \chi(\xi, \eta) K(x, y; \xi, \eta) \, d\xi d\eta, \tag{20}$$

где ω — поверхность жидкости, а ядро K определенным образом выражается через функцию Грина соответствующей смешанной задачи.

При построении упомянутой функции Грина Адамар столкнулся с трудностью, удовлетворительное преодоление которой относится уже к достижениям математической физики нашего времени. Речь идет об особенностях решений смешанной задачи, возникающих вблизи линии C контакта стенок сосуда и поверхности жидкости. Адамар выходит из положения, предположив дополнительно ортогональность стенок и свободной поверхности [I 140], отмечая, что он в состоянии вывести уравнение (20), лишь допустив априори регулярность функции $\partial^2\chi/\partial t^2$ на контуре C. Это было вызвано тем обнаруженным им обстоятельством, что в случае жидкости, заполняющей полусферическую чашу, производная $\partial^2\chi/\partial t^2$ имеет на окружности C логарифмическую особенность даже когда χ и $\partial\chi/\partial t$ конечны. Обращая внимание на это парадоксальное явление — бесконечность ускорения при малости смещений и скорости, — Адамар ставит задачу изучения особенности решения уравнения (20) на линии C.

Ученик Адамара Ж. Булиган в своей докторской диссертации показал, в частности, что правая часть уравнения (20) тождественно равна нулю в том случае, когда поверхность сосуда является цилиндрической с вертикальными образующими. Тем самым интегродифференциальное уравнение (20) превращается в дифференциальное уравнение Коши (19) в области ω. Исследования Булигана были подытожены в его книге «О различных проблемах гидродинамики» [III 83], вышедшей в Париже в 1930 г. и начинающейся словами: «Предметом настоящей работы является развитие трудов Жака Адамара по теоретической гидродинамике (идеальной жидкости)». Там же Булиган пишет: «Адамар возродил в своих трудах теорию поверхностных волн, указал на возможность связать ее со смешанной задачей, позволяющей изложить эту теорию заново и более систематично по сравнению с результатами Лагранжа и Коши. Так в науке маленький закоулок часто порождает новую область исследований, столь же плодородную в сравнении с закоулком, как группа объединенных земельных участков по сравнению с одним из них» [III 83, с. I].

В заключение несколько общих слов об уравнении (16). Некоторые его важные свойства, например однозначная разрешимость задачи Коши, не связаны с конкретным видом оператора в правой части. Существенна лишь его структура:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + A\chi = 0,$$

где A — не зависящий от t положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Уравнения такого вида исследуются довольно просто в рамках абстрактной теории операторов. Если форма дна водоема изменяется с течением времени или в жидкость погружены движущиеся тела, то вывод уравнения (16) сохраняется, но оператор A становится функцией переменной t. Однако и в таком, более сложном случае соответствующая теорема существования и единственности была доказана Р. М. Гариповым в 1967 г. [III 105].

До недавнего времени уравнение Адамара, по-видимому, не применялось к эффективному решению гидродинамических задач. Оно представляется очень трудным: достаточно упомянуть, что явное описание правой части требует знания функции Грина. Тем не менее, учитывая важность этого уравнения для практической гидромеханики, перспективы его использования не следует оценивать пессимистически. В той же заметке 1916 г. Адамар отмечает возможность синтеза уравнения (16) и своей вариационной формулы для функции Грина. Это позволило бы выписывать приближенные уравнения типа (16) и в некоторых случаях не слишком простого рельефа дна. Вообще введение тех или иных малых параметров может сильно упростить уравнение (16). Интересно, что в последние годы появились работы, посвященные приложениям этого уравнения к задаче о возбуждении волн цунами кратковременными подвижками дна. Наконец, можно рассчитывать на растущие возможности ЭВМ и вычислительных методов в надежде на численное решение уравнения Адамара.

Стационарное движение капли в вязкой жидкости. В 1911 г. появились выполненные независимо работы В. Рыбчинского [III 161] и Ж. Адамара [I 147], в которых была решена задача об установившемся осесимметрическом движении вязкой капли в другой вязкой жидкости под действием силы тяжести. «Эта проблема, — пишет Адамар, — возникла в исследованиях, которые были нацелены на определение размеров атомов и привели к серии важных экспериментальных работ. . .» [I 341. Т. IV. С. 1735]. Упомянутые исследования опирались на опубликованное еще в 1851 г. Стоксом аналитическое решение задачи о падении твердой сферы в вязкой жидкости. Однако, как отмечали физики, ничто не доказывало законности такого приема, основанного на представлении об атоме как о твердом шаре. В связи с этим Адамар и предпринял попытку найти аналог решения Стокса в предположении, что падающая сфера сама является жидкой.

Вообще говоря, стационарное движение жидкости описывается системой уравнений Навье—Стокса, три из которых являются нелинейными. При условии малости числа Рейнольдса нелинейными членами можно пренебречь, что и было сделано Стоксом. Взяв за основу линеаризацию Стокса, Адамар нашел явное решение задачи о капле, учитывающее как внешнее, так и внутреннее движение. Мы не будем приводить его рассуждения, отсылая читателя к трактатам по гидродинамике [III 34]. Окончательная формула для скорости паде-

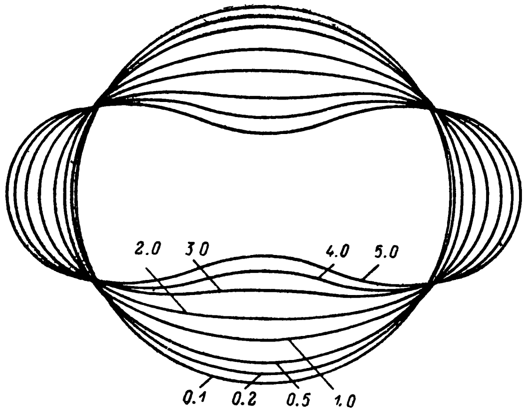


Рис. 7.

ния капли радиуса R с коэффициентом вязкости η' и плотностью ρ' имеет вид

$$u = \frac{2R^2 g (\rho' - \rho)(\eta + \eta')}{3\eta (2\eta + 3\eta')}, \tag{21}$$

где η и ρ — коэффициент вязкости и плотность окружающей жидкости, а g — ускорение свободного падения. При $\eta' \to \infty$ эта формула переходит в полученную Стоксом для твердого шарика, а в предельном случае $\eta'=0$ она дает скорость подъема газового пузырька. Изменением формы капли в линейной модели Рыбчинского—Адамара пренебрегают, что реально соответствует очень большому поверхностному натяжению на границе капли. Адамар понимал, что его решение имеет узкую область практического применения. В заключение своей заметки он пишет, что формула (21) «дает в сравнении с полученными к настоящему времени (и еще не опубликованными) экспериментальными результатами значительные расхождения. Таким образом, пока представляется, что в изученных случаях классические гипотезы, из которых мы исходили, должны быть модифицированы».

Более близкое к реальности решение задачи о движении капли, учитывающее нелинейность системы Навье—Стокса и изменение очертаний капли, вызывает большие трудности. Здесь речь идет о краевой задаче в области с заранее неизвестными (или, как принято говорить, со свободными) границами. Уравнение поверхности капли должно быть найдено вместе с вектором скорости вне и внутри нее. На границе капли кроме условий «непротекания» и неразрывности касательных напряжений и касательных составляющих скоростей возникает требование совпадения скачка нормальных напряжений с капиллярным давлением. Последнее краевое условие содержит дополнительную информацию для определения формы капли. Однако извлечь эту информацию в начале XX в. было немыслимо. Задача была решена лишь совсем недавно при помощи быстродействующих ЭВМ. На рис. 7 показана найденная численно в 1979 г. [III 54] форма капли при различных значениях числа Вебера We, характеризующего поверхностное натяжение на ее границе, и при значении числа Рейнольдса Re, равном 30. Интересно, что в качестве нулевого приближения в итерационном процессе было взято решение Рыбчинского—Адамара. Результаты, полученные на ЭВМ, дают довольно хорошее совпадение с результатами физических экспериментов для чистых жидкостей, так что прогресс в обсуждаемой проблеме по сравнению с 1911 г. налицо.

Корректность по Адамару

Краевая задача математической физики называется корректной (по Адамару), если она удовлетворяет следующим трем требованиям:

1) решение существует;
2) решение единственно;
3) решение непрерывно зависит от данных.

Каждое из этих условий диктуется механическим или физическим происхождением задачи. Первое означает непротиворечивость математической модели, второе отражает детерминированность реальной ситуации, а третье соответствует интуитивному убеждению практика в том, что малые ошибки в исходных данных вносят малые искажения в окончательный ответ.

Сформулированные требования, конечно, представляют собой лишь самые общие принципы математической постановки физически осмысленных задач и при конкретизации допускают гибкую трактовку. Так, разрешимость может иметь место при выполнении некоторых ограничений на правые части. Определенный произвол возможен иногда и при выборе решений, например в задачах о собственных значениях. Понятие устойчивости решения при вариации данных, с одной стороны, требует уточнения, а с другой — допускает исключения: в конце концов существуют ведь и разрывные, резко изменяющиеся процессы. Но все это уже во втором приближении, а в главном условия 1), 2), 3) отражают закономерности общего положения, имеющие глубокий математический смысл.

Понятие корректности краевой задачи появилось в ранних работах Адамара, посвященных уравнениям в частных производных. В начале работы [I 76] Адамар пишет о том, что разнообразным задачам математической физики соответствуют два общих типа краевых условий для уравнений в частных производных: условие Дирихле и его аналоги, с одной стороны, и условие Коши — с другой. Каждая из этих задач может оказаться хорошо поставленной (parfaitement bien posè), иначе говоря, возможной и определенной (possible et determinè). Последние два свойства, т. е. разрешимость и единственность решения, Адамар связывает с физическим происхождением задачи.

В качестве иллюстрации своей концепции он приводит уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

в полупространстве $x \geqslant 0$, для которого однозначно разрешима задача Дирихле, имеющая ясный физический смысл. Далее Адамар присоединяет к уравнению Лапласа «лишенные физического содержания» данные Коши на плоскости $x=0$:

$$u=u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=u_0' \tag{22}$$

— и показывает, что эта задача разрешима не всегда. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция u_0' допускала представление

$$u_0'=(2\pi)^{-1}\frac{\partial w}{\partial x}+\Phi,$$

где w — потенциал двойного слоя, распределенного на плоскости $x=0$ с плотностью $u_0(y, z)$, а Φ — аналитическая функция y и z.

Другой пример — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{23}$$

для которого однозначно разрешима естественно возникающая в теории колебаний задача Коши с данными при $t=0$

$$u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=U'. \tag{24}$$

Однако «следует остерегаться, — пишет Адамар, — формулировать это заключение в виде: „Задача Коши для уравнения (23) возможна и определенна“». Дело в том, что, присоединив к этому уравнению начальные условия (22) вместо (24), мы получаем плохо поставленную задачу. Действительно, пусть u_0 и u_0' не зависят от t. Можно показать, что тогда решение (если оно единственно) также не зависит от t. В результате уравнение (23) превращается в уравнение Лапласа, для которого, как уже отмечалось, задача Коши неразрешима.

Впоследствии Адамар часто возвращался к концепции корректности. «Он повторял эту идею постоянно, — вспоминают С. Мандельбройт и Л. Шварц в 1965 г., — так что даже сейчас задача называется „хорошо поставленной в смысле Адамара“, если ее решения непрерывно зависят от данных. Идея оказалась даже более плодотворной, чем он представлял сам, поскольку аналитики были вынуждены исследовать, как он говорил, „различные типы окрестностей и непрерывности“, что неизбежно вело к функциональным пространствам, общей топологии и функциональному анализу. Она, несомненно, является одним из источников функционального анализа и все еще представляет собой одну из лучших областей его приложения. Современные методы решения уравнений в частных производных используют „априорные оценки“; это означает, что в действительности доказываются существование и единственность решения, после того как установлена его непрерывность относительно данных; функциональный анализ (в существенном теоремы Банаха и Ф. Рисса) приводит затем к результату» [II 19, с. 114].

Понятие корректности краевой задачи, столь привычное сейчас, представлялось далеко не таким естественным в начале XX столетия. В частности, многим авторам казалось, что вопрос о решении задачи Коши исчерпывается теоремой Коши—Ковалевской. В этой теореме (мы ограничиваемся случаем одного уравнения, хотя аналогичный результат справедлив и для систем) рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f\left(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial y_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^k u}{\partial y_n^k}\right),$$

где f — аналитическая функция своих аргументов, изменяющихся в некоторой окрестности начала координат. Другими словами, функция f может быть разложена в степенной ряд по переменным t, y_1, . . ., $\partial^k u/\partial y_n^k$. Вблизи точки $(y_1, \ldots, y_n, t)=0$ на плоскости $t=0$ заданы аналитические функции $\varphi_j (y_1, \ldots, y_n)$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Задача Коши заключается в том, чтобы найти решения только что выписанного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) = \varphi_0(y_1,\ \ldots,\ y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) = \varphi_{k-1}(y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Теорема Коши—Ковалевской утверждает, что задача имеет единственное решение, аналитическое вблизи начала координат.

Адамар пришел к определению корректности, осознав ограниченный характер сформулированного результата. Вот что он пишет об этом в «Лекциях о задаче Коши для линейных уравнений в частных производных», прочитанных в Йельском университете в 1930 г. и опубликованных на английском языке спустя два года: «Читатель, вероятно, удивится тому, что мы постоянно используем сослагательное наклонение и, по-видимому, считаем сомнительным одно из самых классических и наиболее известных доказательств анализа. Дело заключается в том, что не все так просто, как может показаться на основании предыдущих рассуждений. В действительности обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения, и предусмотреть их можно только из физических соображений. Нет другого вопроса, который давал бы такую же поразительную иллюстрацию мыслям, развитым Пуанкаре на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1897 г. (см. также La valeur de la science,*) p. 137—155): „Именно физические приложения указывают нам важные задачи, которые мы должны поставить перед собой, и опять-таки физика позволяет нам предугадать решения“.

Рассуждения Коши, Софьи Ковалевской и Дарбу, аналог которых дан выше, совершенно строгие. Однако заключение, полученное ими, нельзя считать наиболее общим. Причина состоит в предположении, сделанном ранее, о том, что начальные данные, так же как и коэффициенты уравнений, выражаются при помощи аналитических функций, и теорема часто неприменима, когда не выполнена эта гипотеза» [1265, рус. пер., с. 29].

Здесь Адамар по существу имеет в виду то обстоятельство, что хорошо поставлены не все, а именно те краевые задачи, которые соответствуют математическим моделям физических явлений, и возражает против существовавшей в то время тенденции считать теорему Коши—Ковалевской справедливой как для аналитических, так и для гладких функций. Восходящая к К. Вейерштрассу заманчивая идея аппроксимации непрерывных функций полиномами, казалось, исчерпывала проблему разрешимости, тем более что уже был известен результат Э. Хольмгрена [III114] 1901 г., согласно которому для линейного дифференциального уравнения в условиях теоремы Коши—Ковалевской имеет место единственность решения в классе достаточно гладких функций.

Процитируем аргументы Адамара, опровергающие подобные представления и акцентирующие внимание на различии свойств задач с аналитическими и неаналитическими (даже бесконечно дифференцируемыми) данными. Этот отрывок из «Лекций о задаче Коши. . .» содержит, в частности, доложенный Адамаром в Цюрихе в 1917 г. Швейцарскому математическому обществу знаменитый пример, который демонстрирует некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.

---

*) Ц нность науки (фр.).

«Мы будем часто подчеркивать (в противоположность некоторым геометрам) важность этого различия. Часть из них исходит из того факта, что любые функции можно рассматривать как аналитические, поскольку в противоположном случае их можно с любой желаемой точностью аппроксимировать аналитическими функциями. Но с нашей точки зрения эта аргументация несостоятельна. Важно не то, насколько такая аппроксимация изменяет начальные данные, а то, насколько она изменяет решения. Легко видеть, что в том случае, который нас интересует, эти два вопроса никоим образом не эквивалентны. Возьмем классическое двумерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

со следующими данными Коши:

$$u(0,\ y)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y)=u_1(y)=A_n \sin(ny),$$

где n — очень большое число, а A_n — функция от n, которая мала, когда n становится большим (например, $A_n=1/n^p$). Эти данные сколь угодно близко подходят к нулю. Однако такая задача Коши имеет решение

$$u_n=\frac{A_n}{n}\sin(ny)\operatorname{sh}(nx),$$

которое, если $A_n=1/n$, или $1/n^p$, или $e^{-\sqrt{n}}$, очень велико для любого значения x, отличного от нуля (вследствие степени роста e^{nx} и, следовательно, $\operatorname{sh}(nx)$).

В этом случае из-за присутствия множителя $\sin(ny)$ поверхность становится волнистой, и видно, что эта волнистость, незаметная в непосредственной близости от оси y, делается громадной на фиксированном расстоянии от этой оси, как бы мало оно ни было, при условии, что n достаточно велико» [1265, рус. пер., с. 39].

Пример Адамара объясняет, что (говоря на современном языке) решение задачи Коши для уравнения Лапласа не обязано непрерывно зависеть от данных Коши, даже когда они рассматриваются в топологии C^∞, а само решение — в очень слабой топологии. А вот задача Коши для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x > 0,$$
$$u(0, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \tag{25}$$

где φ — ограниченная непрерывная функция на вещественной оси, поставлена корректно в классе ограниченных непрерывных в замкнутой полуплоскости $x \geqslant 0$ решений. Это — непосредственное следствие формулы для единственного решения $u(x, y) = [\varphi(x+y) + \varphi(y-x)]/2$. Здесь проявляется, по выражению Адамара, «поистине один из наиболее любопытных фактов теории», который «заключается в том, что уравнения, по виду очень близкие, ведут себя совершенно противоположным образом» [там же].

Работу 1926 г. [I221] Адамар посвятил вопросу о неразрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа с неаналитическими данными $u(0, y) = f(y)$ и $\partial u(0, y)/\partial x = g(y)$. Он рассматривает две постановки задачи, когда решение требуется найти с обеих сторон оси абсцисс или лишь с одной стороны этой оси. Адамар выводит невозможность решения задачи в первой постановке при помощи результатов работы Пенлеве «О линиях особенностей аналитических функций» [III150] и показывает, что вторая постановка может оказаться допустимой и в случае неаналитических начальных данных.

Первоначально Адамар определял корректность задачи лишь условиями разрешимости и единственности, энергично настаивая на непрерывной зависимости решения от начальных данных только при обсуждении задачи Коши. Вот что он написал в книге «Теория уравнений в частных производных», вышедшей в Пекине через год после его смерти: «Это третье условие, которое мы ввели в „Лекциях о задаче Коши. . .“, но не рассматривали как часть определения хорошо поставленных задач, было присоединено, и совершенно справедливо, Гильбертом и Курантом („Методы математической физики“, т. II). Мы принимаем здесь их точку зрения» [I340, с. 20].

Приведенные слова прежде всего отражают скромность Адамара и высочайший уровень его научной этики, к сожалению, не часто встречающийся в наше время. А с математической точки зрения вопрос о необходимости включения требования непрерывности решения относительно данных представляется довольно деликатным. Дело в том, что, согласно известной теореме Банаха о замкнутом графике, однозначная разрешимость линейной задачи влечет ограниченность обратного оператора, а тем самым — и непрерывную зависимость решения от правых частей. Таким образом, прежнее определение корректности кажется на первый взгляд достаточным для широкого класса задач. Впрочем, на это можно возразить, что в число данных задачи входят наряду с правыми частями коэффициенты дифференциальных операторов и область задания функций. Задача может иметь единственное решение при любой правой части, но не исключено, что оно будет сильно меняться, например при ничтожной вариации контура. Такая ситуация возникла уже у Адамара при рассмотрении задачи Дирихле для гиперболического уравнения. Прежде чем перейти к этому вопросу, отметим, что, поскольку упомянутое возражение вполне справедливо, окончательный вариант определения хорошо поставленной задачи, включающий все три пункта, предпочтительней.

Стремясь осознать закономерности корректной постановки краевых задач, Адамар в 1921 г. обратился [I186] к задаче Дирихле для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega. \tag{26}$$

(Уравнения (25) и (26) равносильны: одно из них переходит в другое после поворота координатных осей на угол $\pi/4$).

То, что с этой задачей дело обстоит не так благополучно, как с задачей Дирихле для уравнения Лапласа, показывает пример прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Легко проверить, исходя из общего решения

$$u(x, y) = f(x) + g(y) \tag{27}$$

уравнения (26), что задание решения на любых двух примыкающих сторонах однозначно определяет его внутри прямоугольника и, следовательно, нельзя произвольно ставить условия Дирихле на всей границе.

В этой связи любопытны слова А. Зоммерфельда в обзорной статье 1904 г. «О краевых задачах для уравнений в частных производных», написанной для многотомной энциклопедии математических наук [III167]. Упоминая предложенное П. Дю Буа-Реймоном [III94, § 83] разбиение краевых условий на однонаправленные (задание решения и его нормальной производной на одной дуге) и двояконаправленные (на каждой из двух дуг предписаны значения решения, причем возможен случай замкнутой кривой), Зоммерфельд оптимистически высказывается о возможности и «для гиперболических уравнений ставить краевые задачи, вполне аналогичные задачам для эллиптических уравнений». «Доказательства этого предположения пока нет», — отмечает он далее [III167, с. 512, 513].

В упомянутой работе 1921 г. Адамар рассматривает поучительный пример эллипса $\partial\Omega=\{(x, y) : x=a\cos t, y=b\cos(t-h)\}$. Проследим за его рассуждениями. Пусть

$$\varphi=\sum(a_n\cos nt+\beta_n\sin nt)$$

— разложение данных Дирихле в ряд Фурье. Представим функции f и g из (27) в виде рядов

$$f(x)=\sum\lambda_n\cos nt,\qquad g(y)=\sum\mu_n\cos(t-h)n$$

с неизвестными коэффициентами λ_n и μ_n. Для определения коэффициентов из краевого условия получаются соотношения

$$\lambda_n+\mu_n\cos nh=a_n,\qquad \mu_n\sin nh=\beta_n.$$

Отсюда прежде всего следует, что в случае соизмеримости чисел h и π задача (26) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений. Если же h и π несоизмеримы, то теорема единственности имеет место, но возникают трудности с разрешимостью, так как ряды (27) при найденных значениях λ_n и μ_n могут расходиться. Действительно, пусть число h/π может быть разложено в цепную дробь

$$\frac{h}{\pi}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

с ограниченными элементами a_j. Известно, что при этом условии дробные части величин nh/π, а следовательно, и $\sin nh$ убывают не быстрее n^{-2}. Поэтому достаточно считать функцию φ трижды непрерывно дифференцируемой для того, чтобы ряды, задающие функции f и g, сходились (при этом условии $\beta_n = O(n^{-4})$). Вообще класс допустимых граничных значений сужается при ускорении аппроксимации числа h/π рациональными. Тем самым рассматриваемая задача для некоторых h оказывается некорректной по Адамару.

Наряду с этим примером в той же статье [I186] Адамар исследовал задачу (26) для области, образованной двумя дугами с общими концами A и B, на каждой из которых обе координаты x, y монотонны.

Дальнейший прогресс был достигнут в работе А. Губера 1932 г. [III117], для которого выводы Адамара явились отправным пунктом. Губер предполагает, что область выпукла относительно координатных направлений, т. е. что контур пересекается со всеми прямыми, параллельными осям абсцисс или ординат, не более чем в двух точках. Тогда и x и y имеют на контуре лишь по одному максимуму и одному минимуму. Следуя Губеру, назовем точки, в которых достигаются эти экстремальные значения, вершинами. Ясно, что возможны лишь две, три или четыре вершины, причем последний случай является общим. Без труда проверяется, что задача Дирихле, вообще говоря, неразрешима в двух первых случаях, а в третьем, как показывает пример эллипса, ситуация не столь проста. Губер, а затем и вернувшийся к той же проблеме в 1936 г. Адамар получили частичные результаты, относящиеся к четырем вершинам. Важную роль в этих исследованиях играют некоторые топологические отображения контура в себя, связанные с движением по характеристикам уравнения струны.

Статья Адамара 1921 г. была первой в большой серии работ разных авторов, посвященных некорректным краевым задачам для гиперболических уравнений. В 1939 г. Д. Буржин и Р. Даффин [III 84] исследовали задачу Дирихле для уравнения $\partial^2u/\partial y^2 - \partial^2u/\partial x^2 = 0$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Они доказали, что в случае иррациональности отношения b/a справедлива теорема единственности в классе непрерывно дифференцируемых функций. Другой результат статьи [III84] — достаточные условия разрешимости задачи в терминах скорости аппроксимации числа b/a рациональными.

Особо отметим глубокую работу Ф. Джона 1941 г.

[III 121], который применял упомянутые выше специальные отображения границы. Опираясь на результаты общей теории топологических отображений замкнутых кривых в себя, созданной Пуанкаре в связи с исследованием дифференциальных уравнений первого порядка на торе, Джон установил для произвольного контура $\partial\Omega$, выпуклого относительно координатных осей, следующую альтернативу. Либо $\partial\Omega$ делится на две части так, что функция φ на одной части однозначно определяется данными Дирихле на другой части, либо существует отображение вида $\xi=\alpha(x)$, $\eta=\beta(y)$, где α и β — возрастающие непрерывные функции, сохраняющие тип уравнения (25) и переводящие $\partial\Omega$ в прямоугольник с наклоном сторон ± 1 и иррациональным отношением длин сторон. Очевидно, что в первом случае говорить о разрешимости задачи (26) не приходится, а во втором можно применить результаты Буржина и Даффина.

Ю. М. Березанский [III 7, гл. 4, § 2], изучая обобщенные решения задачи Дирихле для уравнения $\partial^2 u/\partial x \partial y=f(x, y)$, описал некоторый класс областей, для которых разрешимость устойчива при малых (в некотором смысле) вариациях контура.

Рассматриваемая краевая задача интересовала Адамара в течение многих лет. Вернувшись к той же проблеме в Америке во время второй мировой войны, он показал, что по сравнению с уравнением струны для общего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x, y)\,u=0$$

возникают новые, неожиданные эффекты [I 306].

Разнообразные вариации темы корректности звучат снова и снова в творчестве Адамара на протяжении его долгой жизни. Еще в 1906 г. он обратил внимание на то, что даже классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа с непрерывными граничными данными, однозначно разрешимая в пространстве непрерывных функций в $\bar{\Omega}$, становится некорректной, если ее решение искать в классе функций с градиентом из $L_2(\Omega)$. Об этом наблюдении Адамара, которое имеет принципиальный характер, еще будет идти речь на с. 186—191.

Адамар доказал корректность задачи Коши для общих линейных гиперболических уравнений второго порядка с данными на плоскости $t=0$. Мы еще много будем говорить о его вкладе в теорию этой задачи. Его интересовало, будет ли хорошо поставлена задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

с предписанными значениями решения и его нормальной производной на плоскости $x=0$. Адамар анализирует этот вопрос и дает на него отрицательный ответ: данные Коши нельзя задавать произвольно.

Ряд работ Адамара был посвящен исследованию разрешимости и свойств решений так называемых смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка (см. французское издание книги [I 266]). Этот термин, введенный Адамаром и ставший общепринятым, означает, что уравнение рассматривается в области типа цилиндра (возможно, криволинейного); основание цилиндра «пространственно ориентировано», а боковые стороны ориентированы «времяобразно»; на основании задаются данные Коши, а на боковых сторонах — одно из «эллиптических» краевых условий (например, условие Дирихле или Неймана).

Каким образом следует формулировать корректные краевые задачи для уравнений, не принадлежащих к трем классическим типам? Этот вопрос настоятельно интересует Адамара. Он отмечает, например, отсутствие хорошо поставленных краевых задач для ультрагиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t},$$

по-видимому, впервые рассмотренного в геттингенской диссертации Г. Гамеля [III 109] в связи с некоторыми геометрическими вопросами.*) В своих обзорных ста-

*) Проблема построения корректных задач для такого уравнения и для более общих ультрагиперболических уравнений

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=\sum_{j=p+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

привлекала внимание таких крупных математиков, как Ф. Джон и И. Г. Петровский. В 1964 г. А. С. Благовещенский тьях Адамар неоднократно упоминает о результатах Ф. Трикоми, который, по предложению В. Вольтерры, первым исследовал однозначно разрешимые краевые задачи для уравнений «смешанного типа», т. е. уравнений с переменными коэффициентами, эллиптических в одной части области, гиперболических в другой и параболических на линии, разделяющей обе зоны. Типичным примером является уравнение

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В 1933 г. Адамар обращается к уравнениям «составного типа», к которым относятся, в частности,

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta u = 0,$$

и находит для этих уравнений корректные задачи [I 267].

В широкой постановке проблема описания «хороших» краевых условий для дифференциальных уравнений «без типа» далека от решения и в наши дни. Принципиальным шагом в направлении, указанном Адамаром, явилась известная теорема Л. Хермандера [III 116], утверждающая существование хотя бы одной корректной краевой задачи для любого дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами. Для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, не принадлежащих ни к одному из трех классических типов, ситуация оказалась существенно сложнее. Достаточно вспомнить построенное Гансом Леви [III 134] уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2i (x_1 + i x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = f (x_3)$$

с бесконечно дифференцируемой правой частью, не имеющее в окрестности начала координат ни одного решения в классе обобщенных (и, тем более, гладких) функций. Усилиями многих математиков к настоящему

[III9] показал, что задача нахождения u с данными Дирихле на характеристической поверхности $\sum_{j=1}^{p} x_j^2 = \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2$ корректна в некотором классе функций, и нашел явный вид решения.

времени построена разветвленная теория хорошо поставленных краевых задач для уравнений и систем эллиптического, параболического и гиперболического типов.

Понятие корректности неоднократно демонстрировало универсальность и гибкость. Так, при изучении произвольных эллиптических краевых задач не говорят об однозначной разрешимости: ее явные признаки можно получить лишь в сравнительно немногих случаях. Корректность отождествляется с так называемой нетеровостью задачи. Это означает, что соответствующий оператор имеет замкнутую область значений, однородная задача имеет конечное число нетривиальных решений, а неоднородная разрешима при выполнении конечного числа условий ортогональности для правых частей.

Адамар уже не принимал участия в создании упомянутой общей теории, потребовавшей привлечения и новых теоретико-операторных средств, и новой, «локальной» аналитической техники. Он сыграл роль предтечи, когда на заре XX в. первым осознал и в дальнейшем активно развивал и пропагандировал важнейшую концепцию современной теории краевых задач — идею корректности. Сказанное Адамаром о важности для практики только корректно поставленных краевых задач с течением времени стали понимать не столь абсолютно. Приложения (задачи гравиметрии, спектроскопии, радиоастрономии, зондирования атмосферы, проектирования оптимальных систем и конструкций, а также ряд других) привели к постановке математических задач, решения которых неустойчивы относительно малых изменений начальных данных.*) Методы приближенного решения таких задач были созданы в последние десятилетия (А. Н. Тихонов и его ученики, Ф. Джон, Ж.-Л. Лионс, М. М. Лаврентьев и др.).

«Наше время внесло коррективы в установки Адамара, — сказал Г. Е. Шилов в своем выступлении на мемориальном заседании Московского математического общества 10 марта 1964 г., посвященном памяти

*) Среди таких задач, между прочим, оказалась некорректная по Адамару задача Коши для уравнения Лапласа: к ней приводит задача о продолжении потенциала силы тяжести, измеряемой на поверхности Земли, в направлении гравитирующих масс.

Ж. Адамара, — поскольку выяснилось, что некорректные по Адамару задачи могут быть содержательными (как, например, задача о восстановлении потенциала поля по данным рассеяния); но, конечно, изучение корректных задач, провозглашенное Адамаром как единственно возможное, явилось цементирующим средством для формирования всей теории» [II 5, с. 185].

От задачи Коши к проблеме квазианалитичности

Отправляясь от своих размышлений о роли аналитичности начальных данных при постановке задачи Коши и одного замечания Хольмгрена, Адамар сформулировал так называемую проблему квазианалитичности, которая вызвала к жизни обширную область теории функций. Проследим за ходом мысли Адамара, ведущим его к постановке упомянутой проблемы. Пусть $u(x, y)$ — нечетная по x функция, заданная в некоторой окрестности Ω начала координат. Если u — гармоническая функция при $x > 0$, то в силу уравнения Лапласа все ее производные непрерывны и, следовательно, она — гармоническая в Ω. Поэтому производная $\partial u/\partial x$ в точках прямой $x=0$ должна быть аналитической функцией. Это простое рассуждение, проведенное Адамаром в работе [I 76], показывает, в частности, неразрешимость задачи Коши для уравнения Лапласа с бесконечно дифференцируемыми неаналитическими начальными данными

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u_1(y) \tag{28}$$

(ср. с. 174). Здесь для нас будет важно, что аналитичность функции u_1 эквивалентна последовательности неравенств

$$\left|\frac{d^n u_1}{dy^n}\right| < \frac{n!\,M}{\rho^n}; \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

где M и ρ — фиксированные положительные числа.

К чему приведет замена уравнения Лапласа уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0? \tag{30}$$

На этот вопрос ответил Хольмгрен в примечании на с. 324 большой работы [III 114]. Обозначим через $u(x, y)$, как и ранее, нечетную по x функцию вблизи точки (0, 0), удовлетворяющую (30) при $x \geqslant 0$. Аналогично случаю оператора Лапласа получается, что u является решением уравнения теплопроводности в некоторой окрестности начала координат. Более того, можно показать, что по переменной x эта функция аналитична. Представим u в виде степенного ряда по нечетным степеням x:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{2n+1}(y)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{31}$$

где $u_{2n+1} = \partial^{2n+1} u / \partial x^{2n+1} |_{x=0}$. Используя уравнение (30), находим

$$\frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

и поэтому $u_{2n+1} = d^n u_1 / dy^n$. Вследствие сходимости ряда (31)

$$\left| \frac{\partial^n u_1}{\partial y^n} \right| < \frac{(2n+1)!\, M}{\rho^{2n+1}}; \text{*)} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{32}$$

Очевидно, последовательность неравенств (32) — менее жесткое требование к функции u_1, чем (29); условию (32) удовлетворяют и неаналитические функции (простейший пример: $\exp(-1/y)$ на интервале (0, 1)).

Между условиями (29) и (32) имеется принципиальное различие. Аналитическая функция, т. е. подчиненная условию (29), вполне определена своими значениями и значениями всех своих производных в фиксированной точке. Класс функций, удовлетворяющих последовательности неравенств (32), этим свойством не обладает. Действительно, функцию, тождественно равную нулю на отрезке [—1, 0], можно продолжить на (0, 1] как нулем, так и функцией $\exp(-1/y)$.

---

*) Хольмгрен записал правую часть неравенства (32) в виде

$$\frac{\underline{|2n+1}\; M}{\rho^{2n+1}},$$

так что опознать обыкновенный факториал нелегко.

В короткой (немногим более страницы) заметке [I 157] Адамар ставит задачу «исследовать условия роста последовательных производных функции действительной переменной, обеспечивающие единственность продолжения этой функции. . .». Приведем точную формулировку задачи. Пусть $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность положительных чисел. Множество бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ называется классом $C\{M_n\}$, если каждая функция этого множества ограничена и для нее существует постоянная K, такая, что при всех $x\in[a, b]$ справедливы неравенства

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant K^n M_n.$$

Ясно, что $C\{n!\}$ — класс аналитических функций. Класс $C\{M_n\}$ называется квазианалитическим, если любая его функция, равная нулю вместе со всеми производными в некоторой точке $x_0\in[a, b]$, тождественно равна нулю на $[a, b]$. Теперь проблема Адамара формулируется следующим образом: для каких последовательностей $\{M_n\}$ классы $C\{M_n\}$ являются квазианалитическими?

В 1921 г. А. Данжуа [III 90] доказал квазианалитичность классов $C\{M_n\}$ для последовательностей

$$M_n=n!\,(\log n)^n,\quad M_n=n!\,(\log n)^n(\log\log n)^n,\ \ldots$$

Т. Карлеман [III 85] в 1926 г. нашел необходимое и достаточное условие квазианалитичности:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{m_n}=\infty, \tag{33}$$

где $m_n=\inf\limits_{k\geqslant n}\sqrt[k]{M_k}$.

Так как, по формуле Стирлинга, $n!=\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\times\times(1+o(1))$ при $n\to\infty$, то для класса $C(n!)$ справедливо соотношение $m_n=n/e$ и условие (33) выполнено. Аналогично $m_n\approx(n\log n)/e$ для последовательности $M_n==n!\,(\log n)^{n(1+\varepsilon)}$, и поэтому класс Данжуа $C\{n!\,(\log n)^n\}$ удовлетворяет тому же условию. С другой стороны, при $M_n=n!\,(\log n)^{n(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, имеем $m_n\approx n(\log n)^{1+\varepsilon}/e$ и ряд $\sum m_n^{-1}$ сходится. Поэтому класс $C\{n!\,(\log n)^{n/(1+\varepsilon)}\}$ не является квазианалитическим.

Эквивалентное (33), но по форме совсем другое условие было дано в 1929 г. А. Островским [III 149]:

$$\int^{\infty} \log T(r)\, \frac{dr}{r^2} = \infty,$$

где $T(r) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}$.

Хотя сама задача Адамара и была полностью решена к 1926 г., развитие идей, вызванных ею к жизни, на этом не остановилось. Были поставлены и исследованы различные модификации проблемы квазианалитичности (С. Н. Бернштейн, С. Мандельбройт и др.), найдены важные приложения к теории рядов Фурье, проблеме моментов, теоремам единственности аналитических функций и другим вопросам математического анализа. С этим направлением читатель может познакомиться по вышедшим на русском языке книгам Мандельбройта [III 38, III 39].

Принцип Дирихле

В одном из номеров «Bulletin de la Société mathématique de France» в 1906 г. появилась четырехстраничная заметка Адамара «О принципе Дирихле» [I 120]. Эта работа содержит остроумную ремарку по поводу вариационного метода решения классической краевой задачи теории гармонических функций. Адамар не знал, что такое же наблюдение по тому же поводу было сделано еще в 1871 г. немецким математиком Ф. Примом в статье «Об интегрировании дифференциального уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$» [III 156]. Работа Прима не была замечена современниками, и его приоритет был установлен совсем недавно (см.: [III 91]). Судьба заметки Адамара, напротив, оказалась счастливой: контрпример, построенный в ней, стал хрестоматийным и под названием контрпримера Адамара вошел во многие учебники и монографии по вариационному исчислению.

Для того чтобы понять смысл примеров Прима и Адамара, полезно вспомнить, с одной стороны, некоторые драматические события в математике, происшедшие в середине прошлого века, с другой — некоторые понятия, заложенные в фундамент общей теории краевых задач в середине нынешнего. Попытки установить разрешимость основных задач математической физики для тел произвольной формы были предприняты классиками математического анализа еще в первой половине XIX в. Однако в то время отсутствовали строгие доказательства и аргументация была основана либо на физических соображениях (метод функций Грина), либо на принимаемом без доказательства вариационном принципе. Последний был предложен еще в 40-х годах К. Ф. Гауссом и Кельвином, которые заметили, что гармоническая функция в плоской области Ω с предписанными значениями на границе сообщает наименьшее значение интегралу

$$D(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \qquad (34)$$

Поскольку существование минимума казалось очевидным, вариационный принцип служил обоснованием разрешимости упомянутой краевой задачи для уравнения Лапласа. Та же аргументация была положена Б. Риманом в основание его геометрической теории функций комплексного переменного. Между прочим, Риман, ознакомившись с этими идеями на лекциях Дирихле, назвал и вариационный принцип, и краевую задачу именем своего учителя. Термины «принцип Дирихле» и, особенно, «задача Дирихле» употребляются и в наши дни.

Авторитет принципа Дирихле был поколеблен в 1869 г. Вейерштрассом, который на примере показал, что точная нижняя грань неотрицательного интеграла типа (34) для функции одной переменной может не достигаться. Критика Вейерштрасса произвела сильное впечатление на математический мир: доверие к вариационному принципу было подорвано почти на 30 лет. Однако полученные с помощью этого принципа фундаментальные результаты требовали обоснования, и математики занялись разработкой новых подходов к проблеме разрешимости краевых задач.

Первым сравнительно строгим методом решения задачи Дирихле был метод арифметических средних К. Неймана (60-е годы XIX в.), который дал возможность решить эту задачу для выпуклых областей. К тому же времени относится создание «альтернирующего» метода Г. Шварца, позволившего путем последовательного решения задачи Дирихле для каждой из двух областей решить эту задачу для их суммы. В 1877 г. Пуанкаре предложил основанный на новой идее метод «выметания», с помощью которого ему удалось получить решение задачи Дирихле для довольно широкого класса областей. Работы К. Неймана, Г. Робэна и А. Пуанкаре подготовили почву для создания метода граничных интегральных уравнений применительно к решению краевых задач для оператора Лапласа. Появление теории Фредгольма (1900 г.) привело к быстрому развитию этого метода (О. Гельдер, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, И. Радон, Т. Карлеман), оказавшегося, как выяснилось уже в эпоху ЭВМ, весьма эффективным, а иногда и единственно возможным методом численного решения задач математической физики для тел сложной формы.

Итак, на рубеже веков теория краевых задач имела значительные успехи.*) Она уже была в состоянии охватить линейные уравнения с переменными аналитическими коэффициентами и даже общие нелинейные эллиптические уравнения в случае двух независимых переменных. Достаточно вспомнить знаменитую работу Бернштейна [III 78] 1904 г., в которой, в частности, была создана изощренная техника априорных оценок, не исчерпавшая свои возможности и в наши дни.

А как же обстояло дело с принципом Дирихле? Эта некогда столь привлекательная идея в течение долгих лет ждала своего часа. Наконец Ч. Арцела в 1896 г. и Д. Гильберт в 1897 г., в докладе на первом Международном математическом конгрессе, независимо дали строгое обоснование вариационного принципа решения задачи Дирихле.**)

Заметка Адамара [I 120] была откликом на работы Гильберта, отправным пунктом рассуждений которого явилась возможность продолжить граничную функцию

*) Анализу развития теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях посвящена монография [III60].

**) Интересный исторический комментарий по этому поводу содержится в рукописи А. Лебега «За пределами вариационного исчисления», найденной после его смерти и опубликованной в 1963 г. В заключение Лебег пишет, что обсуждаемая заметка Адамара дает повод «посвятить ему этот небольшой критический этюд».

на всю область так, чтобы интеграл (34) для продолжения сходился. Очевидно, что это свойство необходимо для применимости вариационного принципа.*) Можно ли его использовать для любых непрерывных граничных данных Дирихле? Прим и впоследствии Адамар отвечают на этот вопрос отрицательно. Их контрпримеры совершенно различны, и каждый поучителен по-своему.

Прим предлагает рассмотреть функцию

$$u(r,\ \theta)=[(\log r)^2+\theta^2]^{1/4}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\theta}{\log r}\right]$$

в круге $|z-R|<R$, $z=re^{i\theta}$. Она — гармоническая, так как равна $-\operatorname{Im}(\log z)^{1/2}$. Единственной «плохой» точкой для u является начало координат. На окружности $r=2R\cos\theta$, $|\theta|<\pi/2$, ограничивающей область, имеет место соотношение $u=O(|\log r|^{-1/2})$, и, следовательно, граничные значения функции u непрерывны. Оценим интеграл Дирихле

$$D(u)=\sum_{|re^{i\theta}-R|<R}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\right]rdrd\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2R}\frac{dr}{r}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{(\log r)^2+\theta^2}}.$$

При малых r внутренний интеграл не меньше, чем $c|\log r|^{-1}$, где c — положительная постоянная. Следовательно, $D(u)=\infty$ и к граничным значениям функции u принцип Дирихле неприменим.

Адамар рассмотрел непрерывную функцию g на границе единичного круга $\Omega=\{z:|z|<1\}$, которой соответствует (не обязательно всюду сходящийся) ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geqslant1}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

Гармоническая функция в Ω, принимающая на окружности значения $g(\theta)$, выражается интегралом Пуассона

*) С появлением понятия обобщенного решения краевой задачи стало ясно, что сформулированное требование не только необходимо, но и достаточно.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{(1-r^2)\, d\varphi}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

При $r < 1$ отсюда следует разложение в сходящийся ряд Фурье

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

допускающий почленное дифференцирование. Записывая интеграл (34) в полярных координатах,

$$D(u) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta,$$

Адамар получает тождество

$$D(u) = \pi \sum_{n \geqslant 1} n\, (a_n^2 + b_n^2) \tag{35}$$

и заключает, что при расходимости ряда в правой части принцип Дирихле к функции $g(\theta)$ неприменим. Примером «недопустимой» функции $g(\theta)$ может служить равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \cos (2^{2n} \theta).$$

Тем самым и пример Прима, и пример Адамара доказывают неразрешимость вариационной задачи в случае, когда соответствующая краевая задача имеет решение.

Конечность правой части в формуле (35) — характеристика граничных значений (в терминах их коэффициентов Фурье), к которым применим принцип Дирихле. В 1931 г. в работе, посвященной проблеме Плато о минимальных поверхностях, Дж. Дуглас, просуммировав ряд (35), доказал формулу

$$D(u) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(\theta) - g(\varphi)|^2}{(\sin [(\theta - \varphi)/2])^2} d\theta d\varphi. \tag{36}$$

Тождество (36) применялось также в большой статье А. Берлинга *) при исследовании так называемых исключительных подмножеств окружности.

---

*) *Beurling A.* Ensembles exceptionnels // Acta math. 1939. Vol. 72. P. 1—13.

Двойные интегралы типа (36) содержат локальную характеристику граничных значений функций с конечным интегралом $D(u)$ для любой области с не слишком плохой границей. Это обстоятельство было осознано только в 50-х годах, когда представление (36) было переоткрыто и вместе с тождеством (35) легло в основу обширной теории пространств функций с «дробной гладкостью» (С. М. Никольский, Н. Ароншайн, В. М. Бабич, Л. Н. Слободецкий, Э. Гальярдо, О. В. Бесов и др.).*) Современная теория краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных немыслима без этих пространств.

Фундаментальные (элементарные) решения

В 1904 г. в «Annales École normale supérieure» появилась работа Адамара [I 95], посвященная фундаментальным решениям и интегрированию линейного уравнения в частных производных. В этом мемуаре была развита процедура построения некоторых специальных решений уравнения общего вида

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)\, u = 0 \qquad (37)$$

с аналитическими коэффициентами.

Сейчас, следуя Лорану Шварцу, фундаментальными решениями называют функции (или обобщенные функции), удовлетворяющие уравнению с δ-функцией в правой части. Знание таких решений важно, так как они представляют собой ядра интегральных операторов, обратных к дифференциальным. Поэтому при их помощи можно выразить решение дифференциального уравнения, в правой части которого находится произвольная функция. Во времена Адамара математики пользовались другим (эквивалентным в эллиптическом случае) определением, выделяя фундаментальное решение заданием его асимптотики вблизи особой точки или

---

*) Формула (36) означает в современных терминах, что $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ есть пространство следов для $W_2^1(\Omega)$, а примеры Прима и Адамара утверждают, что пространство $C(\partial\Omega)$ не вложено в $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$.

поверхности. Об одном из исследованных Адамаром фундаментальных решений — функции Грина задачи о прогибе пластины — мы уже рассказывали на с. 154.

Оператору Лапласа в R^m соответствует фундаментальное решение:

$$v(x) = \begin{cases} (2-m)^{-1} s_m |x|^{2-m} & \text{при } m > 2, \\ (2\pi)^{-1} \log |x| & \text{при } m = 2, \end{cases}$$

где s_m — $(m-1)$-мерная площадь границы единичного m-мерного шара. Для уравнений с переменными коэффициентами найти фундаментальное решение явно удается лишь в редких случаях. В 1891 г. Пикар предложил способ построения фундаментального, т. е. имеющего логарифмическую особенность, решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x, y) u = 0.$$

Алгоритм Пикара приводит к представлению решения в виде сходящегося ряда. В дальнейшем Зоммерфельд, Гильберт и сам Адамар решили ту же задачу для общего уравнения с аналитическими коэффициентами при $m=2$. В многомерном случае частные результаты были получены Фредгольмом и Хольмгреном. Одним из результатов упомянутой выше статьи Адамара 1904 г. была теорема существования в окрестности точки фундаментального решения эллиптического уравнения (37) с аналитическими коэффициентами, зависящими от m переменных. (Впоследствии требование аналитичности было снято Э. Леви и Гильбертом).

Воспользуемся следующим ясным описанием результата Адамара, сделанным И. Г. Петровским и С. Л. Соболевым: «Отправляясь от данного уравнения, он строит особую „метрику“, определяя длину линии как интеграл

$$l = \int \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} H_{ij} dx_i dx_j}$$

(где H_{ij} — матрица, обратная A_{ij}), взятый вдоль этой линии.*) Минимум интеграла определяет „расстояние“

*) Для единообразия обозначений мы заменили в этой цитате n на m.

между двумя точками, а линии, вдоль которых этот интеграл принимает минимальное значение, будут „геодезическими линиями“ или обобщенными прямыми. Для эллиптических уравнений „расстояние“ всегда положительно. Однако для гиперболических и параболических уравнений оно может оказаться мнимым или равным нулю. Соответственно этому само „расстояние“ между двумя точками, строго говоря, нужно определять не как минимум, а как стационарное значение интеграла.

После этого Адамар приступает к построению решений уравнения, имеющих особенность в виде отрицательных степеней Г, где Г — квадрат обобщенного расстояния от начальной точки — „полюса решения“ — до переменной точки пространства. Решения эти имеют вид

$$U = \Gamma^{-p} + a_{-p+1}(x)\,\Gamma^{-p+1} + \ldots + a_0(x) + \ldots + V\log\Gamma,\quad p = \frac{m-2}{2}, \tag{38}$$

если m — четное число, и

$$U = \Gamma^{-p} + a_{-p+1}(x)\,\Gamma^{-p+1} + \ldots + a_{-1/2}\Gamma^{-1/2} + a_{1/2}\Gamma^{1/2} + \ldots, \tag{39}$$

если m — нечетное» [II 3, с. 86].

Добавим к сказанному, что при вычислении коэффициентов этих разложений Адамар считает переменные $x_1, \ldots, x_m$ комплексными. Функции a_k определяются как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль геодезических, исходящих из полюса, и требование регулярности a_k в полюсе позволяет найти фундаментальное решение с точностью до постоянного множителя. Сходимость полученных рядов обосновывается построением мажорант.

Выход в комплексную область позволил Адамару единообразно рассмотреть как эллиптические, так и гиперболические уравнения (37). Во втором случае решения (38) и (39) имеют особенность не только в полюсе, но и на действительной поверхности $\{x \in R^m\colon\ \Gamma(x)=0\}$, называемой характеристическим коноидом. Этот коноид совпадает с характеристическим конусом при условии постоянства коэффициентов A_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Строго говоря, построенные Адамаром решения (38) и (39) не являются фундаментальными в терминологии, принятой в современной математической физике. В соответствии с тем что мы говорили ранее, фундаментальным решением задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt}-\omega^2\Delta u=0$, где Δ — оператор Лапласа по переменной $x \in R^n$, сейчас называют обобщенную функцию V, удовлетворяющую задаче

$$V_{tt}-\omega^2\Delta V=\delta(x-x_0)\,\delta(t-t_0),$$
$$V|_{t<t_0}=0.$$

Например, в случае нечетного n справедлива формула

$$V(x,\ t)=\left(2\pi^{(n-1)/2}\omega\right)^{-1}\delta^{(n-3)/2}\left(\omega^2(t-t_0)^2-|x-x_0|^2\right),$$

где $t>t_0$ и $\delta^{(k)}$ — производная δ-функции порядка k. Адамар, естественно, не мог воспользоваться этим понятием, его «фундаментальное решение» волнового уравнения (при нечетном n) имеет вид

$$U(x,\ t)=\left(\omega^2(t-t_0)^2-|x-x_0|^2\right)^{(1-n)/2}.$$

В дальнейшем, чтобы избежать терминологической путаницы, мы будем, следуя более поздним работам Адамара, и в частности его книге [I266], называть построенные им решения элементарными.

Между прочим, метод Адамара оказался пригодным и для построения «настоящих» фундаментальных решений уравнения (37) (см.: [III32, с. 734—737]). Позднее он был модифицирован благодаря предварительному использованию разложения δ-функции на плоские волны (Л. Асгейрссон, Ф. Джон), в связи с чем любопытно высказывание Адамара в книге [I339]. Анализируя неудачи в своей математической работе и упущенные возможности, он пишет: «Я должен закончить перечисление этих промахов случаем, который совершенно не могу объяснить: каким образом, найдя метод для построения условий разрешимости задачи из теории уравнений в частных производных, который очень сложным и запутанным образом приводил к искомому результату, я не увидел в моих собственных вычислениях деталь, которая освещала всю задачу, и оставил это открытие более счастливым и вдумчивым исследователям. Это мне трудно постичь» [I339, с. 52].

Возможно, Адамар слишком строг к себе. В книге по уравнениям в частных производных Р. Курант отмечает: «Достижение Адамара состояло, во-первых, в том, что было построено фундаментальное решение; это построение можно осуществить прямо, не пользуясь теми упрощениями, которые были получены благодаря предварительному разложению δ-функции на плоские волны» [II32, с. 734]. Таким образом, Курант не говорит, лучше или хуже метод Адамара по сравнению с методом разложения δ-функции на плоские волны, он называет метод Адамара прямым, и только. В. М. Бабич в письме к одному из авторов высказывает следующее мнение: «Считаю со всей определенностью, что в случае линейного гиперболического уравнения второго порядка метод разложения δ-функции на плоские волны хуже метода Адамара: решение получается в сложном, ничем не оправданно сложном виде».

Отметим в заключение, что использованная Адамаром конструкция элементарного решения была первым математическим применением так называемого пространственно-временного лучевого метода асимптотического описания волновых явлений, получившего широкое развитие в последние десятилетия (см.: [II14]).

Задача Коши для гиперболических уравнений

Высшим достижением Адамара в теории уравнений в частных производных было полное решение задачи Коши для общих линейных гиперболических уравнений второго порядка. В 1905 г. в продолжении мемуара о фундаментальных решениях, о котором мы рассказывали ранее, он получает результат для трех пространственных переменных [I101]. Случай произвольной размерности был изучен им в 1908 г. [I128]. Итог этим исследованиям был подведен в лекциях, прочитанных Адамаром в Йельском университете в 1920 г. и изданных отдельной книгой в 1922 г. [I189] на английском языке. Французское издание появилось в 1932 г. в Париже. «Эта книга — настоящий шедевр, и своим содержанием, ясностью и обилием идей она вдохновляла всех исследователей в области уравнений в частных производных следующего поколения», — пишут Мандельбройт и Шварц в обзоре жизни и научных трудов Адамара [II19, с. 115].

Непосредственными предшественниками Адамара были Кирхгоф, Бельтрами и Вольтерра. В их работах, выполненных в конце прошлого века, была развита математическая теория световых (или акустических) волн, описываемых задачей Коши для волнового уравнения.

Чтобы сделать последующее изложение результатов Адамара более ясным, напомним некоторые классические факты из теории упомянутой задачи. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta u = 0, \tag{40}$$

где ω — постоянная скорость света или звука, а Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Подчиним сначала функцию u условиям Коши на плоскости $t=0$:

$$u\,|_{t=0} = f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g. \tag{41}$$

В случае $n=3$ решение задачи (40), (41) представляется формулой Пуассона

$$u(x,\ t) = tM_{x,\ \omega t}(g) + \frac{\partial}{\partial t}\,(tM_{x,\ \omega t}(f)), \tag{42}$$

где $M_{x\ ,r}(f)$ — среднее значение функции f на сфере с центром x и радиусом r. Решение задачи (40), (41) для цилиндрической волновой функции, т. е. при $n=2$, можно получить отсюда при помощи следующего приема. Предположив, что в (41) функции f и g не зависят от третьей пространственной переменной, после несложных преобразований правой части формулы Пуассона приходим к представлению для цилиндрической волновой функции:

$$u(x,\ t) = (2\pi\omega)^{-1}\left[\mu_{x,\ \omega t}(g) + \frac{\partial}{\partial t}\,\mu_{x,\ \omega t}(f)\right], \tag{43}$$

где

$$\mu_{x,\ r}(f) = \iint\limits_{|x-y|<r} \frac{f(y)\,dy}{(r^2 - |x-y|^2)^{1/2}}.$$

«Итак, перед нами первый пример того, что мы назовем „методом спуска“, — пишет Адамар по поводу использованного приема на с. 59 книги [1266].*⁾ — Может

*⁾ Здесь и далее страницы указываются по русскому изданию.

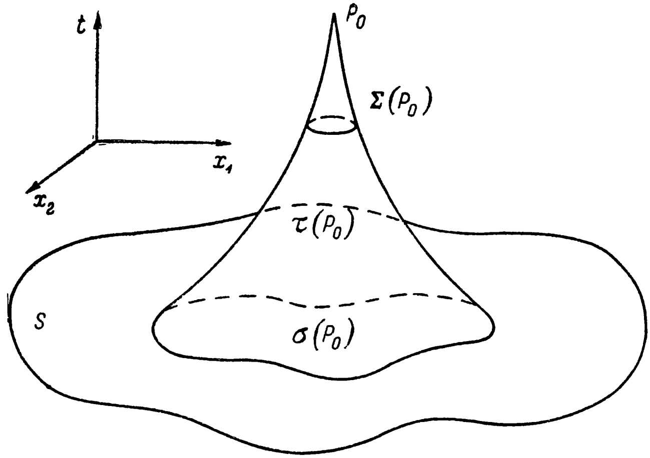


Рис. 8.

показаться излишним придумывание специальных слов для обстоятельства в общем-то незначительного, использовавшегося уже на первых стадиях теории. Но так как мы будем часто обращаться к нему, то нам будет удобно располагать специальным термином для его обозначения. Метод состоит в том, что отмечается следующий факт: если можно сделать многое, то можно сделать и меньшее; если можно проинтегрировать уравнение с m независимыми переменными, то можно сделать это и для уравнений, в которые входят лишь $m-1$ независимых переменных». Мы увидим далее, как метод спуска, примененный Адамаром в весьма нетривиальной ситуации, позволил ему добиться принципиального упрощения доказательства.

Но вернемся к уравнению (40). Для него можно найти представление решения более общей задачи Коши

$$u|_S = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = g, \tag{44}$$

где f и g — достаточно гладкие функции, заданные на поверхности S, а ν — направление нормали к S. Поверхность должна быть пространственного типа, т. е. во всех ее точках должно выполняться неравенство $|\cos(\nu, t)| > \omega\,(1+\omega^2)^{-1/2}$. При нарушении этого требования задача Коши, вообще говоря, неразрешима.

Пусть $P_0=(x_0, t_0)$ — точка, в которой мы собираемся найти решение, и пусть характеристический конус $|\cos(\nu, t)| = \omega(1+\omega^2)^{-1/2}$ с вершиной P_0 вырезает на поверхности S ограниченный участок $\sigma(P_0)$. Область в R^{n+1}, заключенную между характеристическим конусом и $\sigma(P_0)$, обозначим через $\tau(P_0)$ (рис. 8).

Для того чтобы выразить $u(P_0)$ в квадратурах, можно воспользоваться следующей легкопроверяемой интегрированием по частям формулой Грина:

$$\int\limits_{\tau(P_0)} uLv\,d\tau = \int\limits_{\sigma(P_0)} (uNv - vNu)\,d\sigma + \int\limits_{\tau(P_0)} vLu\,d\tau, \tag{45}$$

где $L=\partial^2/\partial t^2-\omega^2\Delta$, а N — оператор дифференцирования по конормали,

$$N = \cos(\nu, t)\frac{\partial}{\partial t} - \omega^2\sum_{i=1}^{n}\cos(\nu, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Функции u и v в формуле Грина произвольны, и если под u понимать решение задачи (40), (44), а в качестве v взять фундаментальное решение задачи Коши, о котором шла речь на с. 194, то в левой части мы получим искомое значение решения, а в правой — некоторое выражение, не содержащее неизвестных функций. Требуется, конечно, еще проверить, что найденная формула для $u(P_0)$ дает решение задачи.

Описанный способ решения, кажущийся сейчас идейно и технически простым, во времена Адамара, и тем более до него, был неосуществим из-за отсутствия теории и самого понятия обобщенной функции. Тем не менее задача Коши для волнового уравнения и некоторых его обобщений была решена в трудах Римана, Кирхгофа и Вольтерры, а также в последующих исследованиях О. Тедоне, Ш. Кулона и Р. Д'Адемара. Все названные авторы использовали модификации формулы Грина. Появление расходящихся интегралов преодолевалось заменой решения $u(x, t)$, $x \in R^n$, $t>0$, интегралом $\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-2} u(x, \tau)\,d\tau$, после чего решение определялось дифференцированием. Этот прием, вполне оправданный в случаях, к которым он был применен, не распространяется на общие линейные гиперболические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Еще одна характерная черта методики предшественников Адамара видна уже на примере вспомогательного решения

$$v(x, t; x_0, t_0) = \log \frac{\omega(t_0 - t) + \sqrt{\omega^2(t_0 - t)^2 - |x_0 - x|^2}}{|x_0 - x|},$$

использованного Вольтеррой при выводе его знаменитого представления для цилиндрических волн. Дело в том, что функция v обращается в бесконечность не только на границе характеристического конуса, но и на его оси. Вольтерровы решения физически соответствуют непрерывно действующим источникам колебаний.*) В общем случае такие решения весьма непросто строить. Как исходный пункт теории сколько-нибудь общих гиперболических уравнений вольтерровы решения, по-видимому, непригодны.

Адамар ставит перед собой цель найти представление решения задачи Коши для произвольного уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{i, j=1}^{n+1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0 \qquad (46)$$

с переменными коэффициентами, имеющего гиперболический тип. «Исходным пунктом этих исследований, — пишет он в предисловии к йельским лекциям, — послужили работы Кирхгофа и, особенно, фундаментальные труды Вольтерры о сферических и цилиндрических волнах. Я стремился продолжить работу итальянского геометра, видоизменив и расширив ее так, чтобы можно было применить ко всем нормальным гиперболическим уравнениям, а не к единственному из них» [1266, с. 7].

Напомним одно из основных понятий теории гиперболических уравнений вида (46). Рассмотрим коническую поверхность $C(P_0) = \left\{P = (x_1, \ldots, x_{n+1}): \sum_{i, j=1}^{n+1} h_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = 0\right\}$ с вершиной $P_0 = (x_1^0, \ldots,$

*) Элементарное решение Адамара при четном числе пространственных переменных соответствует источнику колебаний импульсного мгновенного характера.

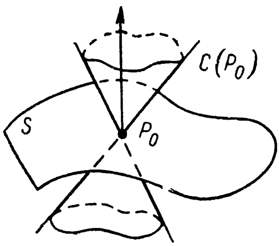


Рис. 9.

x_{n+1}^0), где $\|h_{ij}\|_{i,j=1}^{n+1}$ — матрица, обратная к $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n+1}$. В силу гиперболического характера уравнения эта поверхность имеет две полы и делит $(n+1)$-мерное пространство на три непересекающиеся зоны — две «внутренние» и одну «внешнюю». Говорят, что произвольная поверхность S ориентирована пространственным образом (или является поверхностью пространственного типа) в том и только в том случае, когда нормаль к S в любой точке $P_0 \in S$ направлена строго в сторону одной из внутренних зон, ограниченных поверхностью $C(P_0)$ (рис. 9). Нетрудно проверить, что это определение вполне согласуется с определением поверхности пространственного типа, данным ранее для волнового уравнения.

Как и в случае волнового уравнения, условия Коши для уравнения (46) задаются на поверхности S, ориентированной пространственным образом. Именно таким образом поставленную задачу Коши (46), (44) и решает Адамар. Остановимся на его результатах, следуя книге [I 266]. О первом этапе — построении элементарного решения сопряженного уравнения

$$L^*(v) \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv = 0 \qquad (47)$$

мы рассказали на с. 191—195. В итоге в распоряжении Адамара оказывается функция v пары точек, P и P_0, имеющая вид:

$$v = \begin{cases} V\Gamma^{-(n-1)/2} & \text{при четном } n, \\ V\Gamma^{-(n-1)/2} + W\log\Gamma & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

где V и W — голоморфные функции $2n+2$ координат, а Γ — квадрат геодезического расстояния между точками P и P_0.

Если бы Адамар мог подставить в формулу Грина для операторов L и L^* фундаментальное решение задачи Коши (в нашем понимании этого термина), то вопрос был бы исчерпан так же, как в случае волнового уравнения. Однако он должен был оперировать лишь с элементарным решением $v(P, P_0)$, прямая подстановка которого в формулу Грина приводит к расходящимся интегралам. Для того чтобы преодолеть указанную трудность, Адамар вводит некоторое новое понятие, связанное с расходящимися несобственными интегралами от функций одной или нескольких переменных. Речь идет о так называемой конечной части расходящегося интеграла. Пусть, например, рассматривается интеграл

$$I(\varepsilon)=\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{f(x)}{(b-x)^\alpha}\,dx,$$

где α — нецелое число, $\alpha>1$. Если функция f имеет достаточное число производных в точке b, то можно найти такие коэффициенты c_k $(0<k<\alpha$, k — целое число), что разность

$$I(\varepsilon)-\sum_{k=0}^{[\alpha]}c_k\varepsilon^{k-\alpha}$$

имеет конечный предел при $\varepsilon\to+0$. Именно этот предел Адамар называет конечной частью интеграла $I(0)$ и обозначает символом

$$\overline{\left|\int\limits_a^b\frac{f(x)}{(b-x)^\alpha}\,dx\right.}.$$

Он распространяет на этот новый объект классические правила замены переменной, интегрирования по частям и дифференцирования по верхнему пределу. Далее Адамар переходит к кратным интегралам и, сводя их обычным образом к однократным, определяет и изучает выражение

$$\overline{\left|\int\limits_\Omega\frac{f(x)}{G(x)^\gamma}\,dx\right.},$$

где Ω — n-мерная область, часть границы которой образована гладкой поверхностью $G(x)=0$.

Через много лет, анализируя связи между интуитивным и логическим путями математического открытия, Адамар написал: «. . .меня спросили, как я мог догадаться использовать для интегрирования уравнений в частных производных прием „конечной части расходящегося интеграла“; разумеется, если этот прием рассматривать сам по себе, то он может показаться типичным примером „мышления около“. Но в действительности мой рассудок долгое время противился такой идее, до тех пор, пока я не был вынужден это сделать; я пришел к ней шаг за шагом, и читатель-математик легко проверит это, если возьмет на себя труд посмотреть мои исследования по этому вопросу, особенно мои „Исследования о фундаментальных решениях и интегрировании линейных уравнений в частных производных“, 2-й мемуар, в частности начиная со с. 121 (Annales scientifiques de l'École normale supérieure, tome XXVII, 1905); я не мог избежать этого метода, как заключенный в новелле Эдгара По „Маятник и колодец“ не мог избежать колодца в центре своей камеры» [I 339, с. 104].

Малоизвестно, что термин «конечная часть бесконечного интеграла» был введен Д'Адемаром в диссертации, представленной в Сорбонну в декабре 1903 г. и защищенной в апреле 1904 г. Ссылаясь на заметку Адамара [I93] от 7 декабря 1903 г., Д'Адемар пишет: «Независимо друг от друга мы осознали роль этих конечных частей» [III75, с. 371]. В диссертации Д'Адемара это понятие было применено к построению решения уравнения цилиндрических волн, а Адамар использовал конечные части при решении задачи Коши для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и любым числом независимых переменных.

Мы уже приводили на с. 56 слова С. Л. Соболева о понятии конечной части, а вот что пишет по тому же поводу Л. Шварц: «Он (Адамар. — *Авт.*) указал мне на важность этих конечных частей, когда я был студентом. Позднее я их использовал, и это оказалось для меня встречей со старым знакомым моей юности» [II23, с. 17].

Вычисление конечной части расходящегося интеграла — это, говоря современным языком, один из способов регуляризации обобщенной функции. В настоящее время регуляризация расходящихся интегралов, состоящая в замене их на конечную часть «по Адамару», по-видимому, имеет лишь историческое значение: регуляризация с помощью аналитического продолжения интегралов по параметру удобнее и лучше разработана.

Поразительно, что регуляризация расходящегося интеграла

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx, \quad r>0, \quad \{r\}>0,$$

была проведена еще Коши [III 87] в 1826 г. Он называл это выражение «экстраординарным интегралом» и понимал под ним то же, что и мы, т. е.

$$\int_0^h \frac{f(x)-F(x)}{x^{r+1}}\,dx,$$

где $F(x)$ — отрезок ряда Тейлора,

$$F(x)=\sum_{k=0}^{[r]} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}.$$

Коши показал также, что правила дифференцирования и интегрирования по параметру пригодны и для экстраординарных интегралов.

Но вернемся к решению задачи Коши (46), (44), которое сначала получено Адамаром для четных значений n. Последнее ограничение, которое и мы в течение некоторого времени будем считать выполненным, было вызвано различием в асимптотических представлениях элементарных решений уравнения (47) при четных и нечетных n.

Адамар записывает формулу Грина для операторов L и L^* в терминах конечных значений интегралов. Эта новая формула Грина, в которой u — искомое решение задачи Коши, а v — элементарное решение уравнения (46), имеет вид

$$\left|\overline{\int_{\Sigma(P_0)} (uN(v)-vN(u)+Muv)\,d\Sigma}\right. = \left|\overline{\int_{\sigma(P_0)} (uN(v)-vN(u)+Muv)\,d\sigma}\right. . \qquad (48)$$

Здесь N — оператор дифференцирования по конормали,

$$N(v)=\sum_{i,\,j=1}^{n+1} a_{ij}\cos(\nu,\ x_j)\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

M — гладкая функция на S, множество $\sigma(P_0)$ определяется так же, как в случае волнового оператора (см. с. 198), но роль характеристического конуса переходит к характеристическому коноиду $\{P : \Gamma(P, P_0) = 0\}$ с вершиной в точке P_0. (Этот коноид представляет собой характеристическую поверхность уравнения (46), имеющую в P_0 коническую особенность, или, другими словами, касающуюся в P_0 конуса $C(P_0)$). Через $\Sigma(P_0)$ обозначена расположенная внутри того же коноида часть поверхности $(n+1)$-мерного шара малого радиуса δ (см. рис. 8). Подчеркнем, что без знака конечной части равенство (48) не имеет никакого смысла, поскольку при приближении точки P к краям поверхностей $\Sigma(P_0)$ и $\sigma(P_0)$, расположенным на коноиде $\Gamma=0$, функция v стремится к бесконечности как $\Gamma^{(1-n)/2}$. Важно также, что правая часть равенства выражается через данные Коши и, следовательно, известна. Что касается левой части, то, устремляя радиус δ к нулю, Адамар показывает, что она стремится к $u(P_0)$ с точностью до постоянного множителя. Итак, при четном n формула для $u(P_0)$ получена. Затем Адамар проверяет, что правая часть действительно является решением задачи Коши.

Случай нечетного n потребовал специального подхода, в первую очередь потому, что невозможно ввести конечную часть появляющихся интегралов. Напомним, что в определении конечной части показатель α был дробным. Здесь же показатель $(n-1)/2$, с которым Γ входит в знаменатель подынтегрального выражения, есть целое число. Поэтому Адамар приходит к цели, виртуозно используя «спуск» от четного n к нечетному. Об этом приеме уже шла речь на с. 196. Позднее, в 1924 г., Адамар провел и прямое построение решения при нечетном n, но для этого ему пришлось использовать вместо конечной части интегралов так называемую логарифмическую часть. Полученные Адамаром представления решений задачи Коши при нечетных и четных n привели его к интересным выводам относительно так называемого принципа Гюйгенса, обсуждению которого будет посвящен следующий параграф.

Трудности, возникшие у Адамара в случае нечетного n, были связаны с тем, что он использовал элементарное решение вида $V\Gamma^{(1-n)/2}+W\log\Gamma$, неудобное для работы. В наши дни, пользуясь методикой Адамара, можно построить решение вида $V_1\delta^{(n-3)/2}(\Gamma)+W_1\,\theta(\Gamma)$, где θ — функция Хевисайда, а $\delta^{(l)}$ — производная δ-функции порядка l (см.: [III32]). Подставляя последнее решение в формулу Грина, можно найти решение задачи Коши приблизительно таким же образом, каким ее решил Адамар для четных n. Разумеется, Адамар не мог в начале века использовать производные δ-функции.

Другие идеи, порожденные обсуждаемыми представлениями решений и кратко намеченные Адамаром, связаны с теорией потенциала для гиперболических уравнений. Для волнового уравнения с двумя пространственными переменными интегральные операторы типа потенциалов простого и двойного слоя впервые были определены Вольтеррой [III180]. Адамар вводит потенциалы в многомерном случае и подчеркивает их аналогию с обычными гармоническими потенциалами. Сравнительно недавно (см.: [III43]) теория гиперболических потенциалов была развита и применена к построению решений смешанной задачи для волнового уравнения.

Книгу «Задача Коши» [I128] Адамар заканчивает исследованием гиперболических уравнений с достаточно гладкими неаналитическими коэффициентами. Он отправляется от работ Гильберта и погибшего в первой мировой войне молодого итальянского математика Э. Леви. Оба они, занимаясь эллиптическими уравнениями, исходили из явного первого приближения к фундаментальному решению. Это приближение (параметрикс — в терминологии Гильберта), будучи подставлено в уравнение, дает в правой части особенность не слишком высокого порядка. В частности, Леви при помощи этого параметрикса смог построить фундаментальное решение. Однако в гиперболическом случае метод Леви и Гильберта встречает большие трудности в связи с появлением особенности на поверхности характеристического коноида. Тем не менее Адамару удается при помощи приближенного элементарного решения гиперболического уравнения с достаточно гладкими коэффициентами свести задачу Коши к некоторому интегральному уравнению типа Вольтерры. Последнее, как известно, может быть решено методом последовательных приближений.

Исследование разрешимости задачи Коши, проведенное в начале века Адамаром, послужило отправным пунктом для дальнейшего прогресса теории гиперболических уравнений. Инспирированные непосредственно книгой Адамара, в начале 30-х годов появились работы М. Матиссона [III140] и С. Л. Соболева [III57—59], посвященные другим подходам к решению задачи Коши для гиперболического уравнения (46).

Общепризнанно, что именно С. Л. Соболев сделал следующий после Адамара принципиальный шаг в теории задачи для гиперболических уравнений второго порядка, последствия которого в полной мере проявились позднее. В 1935 г. была опубликована историческая работа «Задача Коши в пространстве функционалов» [III58], в которой впервые введены обобщенные функции как непрерывные функционалы на пространстве s раз дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторого характеристического коноида. Аппарат обобщенных функций, через несколько лет получивший мощный импульс в исследованиях Л. Шварца, впоследствии в буквальном смысле революционизировал теорию дифференциальных уравнений. Отметим, что и к своим знаменитым теоремам вложения (первая публикация — в «Докладах Академии наук СССР» [III59]) С. Л. Соболев пришел в связи с проблематикой задачи Коши.*)

Построив теорию задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка, Адамар, естественно, интересовался возможностью обобщения своей методики на более общие уравнения и системы уравнений. Об этом он писал в книге [I266]. Попытки прямого перенесения его методики на общий случай не приводили к успеху. Построение фундаментального решения задачи Коши для общих гиперболических систем удалось лишь с помощью формул Радона и Фурье, предста-

*) Вот что пишет С. Л. Соболев в заметке [III59]: «В некоторых частных случаях, как, например, в теории квазилинейных гиперболических уравнений, рассмотренных Шаудером, пользование этими уточненными оценками позволяет точно установить нужное число непрерывных производных у начальных условий для того же уравнения». В упомянутом на с. 55—57 разговоре с одним из авторов С. Л. Соболев вспоминает, что поводом к написанию заметки [III59] послужил его спор с Ф. И. Франклем о наименьшем числе производных данных Коши, обеспечивающем совпадение обобщенного решения с классическим. Теоремы вложения явились фундаментом обширной области функционального анализа.

вляющих δ-функцию в виде наложения плоских волн. Фундаментальные решения для эллиптических уравнений на этом пути построил Ф. Джон, а для гиперболических — Л. Асгейрссон, Ф. Джон, Р. Курант и П. Лакс, В. М. Бабич (на базе формулы Радона), П. Лакс (с помощью интеграла Фурье).*)

Отметим, что И. Г. Петровский в работах [III51, III52] ввел понятие гиперболической системы и создал глубокие методы исследования разрешимости задачи Коши. В 50-х годах конструкция И. Г. Петровского была упрощена и модернизирована в работах Ж. Лере и Л. Гординга. Параметрикс задачи Коши для гиперболических и более общих уравнений был построен благодаря созданию нового аппарата — так называемых интегральных операторов Фурье (В. П. Маслов, Л. Хермандер и др.). Обзор современного состояния этих теорий можно найти в комментариях к «Избранным трудам» Петровского [III45], вышедшим в 1986 г.

Принцип Гюйгенса

Около 1900 г. внимание Адамара было привлечено к «одному замечательному обстоятельству, возникающему при интегрировании некоторых уравнений в частных производных второго порядка» [III92, с. 19]. Речь идет о свойстве решений гиперболических уравнений, характеризующем процесс распространения световых или акустических волн — о так называемом принципе Гюйгенса. В опубликованном в 1690 г. в Гааге «Трактате о свете» знаменитый голландский ученый Христиан Гюйгенс, рассматривая свет как возмущение эфира, заполняющего пространство, предложил некоторый геометрический закон распространения этого возмущения, названный впоследствии его именем. В исходной форме принцип Гюйгенса заключался в следующем. Возмущение, вызванное источником света, сосредоточенным в начальный момент времени $t=0$ в точке O, распространяется как сферическая волна

*) Теория задачи Коши продолжает интенсивно развиваться по сей день. Далеко не полная библиография на эту тему в книге Г. Фатторини «Задача Коши», вышедшей в 1983 г. в серии «Энциклопедия математики и ее приложений» [III101], занимает более ста страниц.

с постоянной скоростью. Каждая точка, в которую пришел свет, в свою очередь становится его источником и также испускает сферическую волну. Суммарный световой эффект при $t=t_0$ представляет собой огибающую вторичных сферических волн, возникающих при $t=t'$. Таким образом, первоначально принцип Гюйгенса заключал в себе некоторый способ построения фронта волны.

В лекциях о задаче Коши, прочитанных в Йельском университете, Адамар проводит логический анализ сформулированного утверждения, представляя его в виде следующего силлогизма.

«(A) (в широком смысле). Действие явлений, существующих в момент $t=0$, на состояние материи в последующий момент $t=t_0$ совершается через посредство каждого промежуточного момента $t=t'$, т. е. (предполагая, что $0 < t' < t_0$) для нахождения состояния в момент $t=t_0$ мы можем, исходя из состояния при $t=0$, найти состояние при $t=t'$, а из этого последнего — искомое состояние в конечный момент $t=t_0$.

(B) (в узком смысле). Если в момент $t=0$ или, более точно, в течение короткого промежутка $\varepsilon \geqslant t \geqslant 0$ возникает световое возмущение, локализованное в непосредственной близости от точки O, то его воздействие будет сосредоточено при $t=t'$ в непосредственной окрестности поверхности сферы с центром в O и радиусом ω, т. е. в очень тонком сферическом слое с центром в O, заключающем в себе предыдущую сферу.

(C) (Заключение). Для того чтобы вычислить воздействие начального светового возмущения, возникшего в точке O в момент $t=0$, можно заменить его соответствующей системой возмущений, возникших при $t=t'$ и распределенных на поверхности сферы с центром в точке O и радиусом $\omega t'$» [1266, с. 64].

«Случилось так, — пишет далее Адамар, — что разные авторы называли принципом Гюйгенса какое-то одно из этих трех положений. Как будет видно, наше суждение по поводу каждого из них должно быть совершенно различным». Положение (A) — это философский принцип детерминизма, «универсальный закон, отражающий существование для всех типов эволюционных уравнений группы преобразований, которые представляет переход от момента времени t к моменту t'' как композицию перехода от t к t' и перехода от t'

к t''» [там же]. Положение (С) — физический закон, имеющий широкую область применения, его математическое описание эквивалентно общему свойству гиперболических уравнений.

Иной характер имеет положение (В). Оно, говоря словами Адамара, «представляет собой совершенно особое свойство некоторых уравнений частного вида». Именно свойство (В) Адамар и называет «принципом Гюйгенса в узком смысле слова». В соответствии с этой терминологией позднее под принципом Гюйгенса стали понимать утверждение о том, что волна, вызванная возмущением, локализованным во времени и пространстве, имеет задний фронт, т. е. возмущение исчезает полностью. Такое понимание принципа Гюйгенса и будет принято в дальнейшем.

Проиллюстрируем математическое содержание принципа Гюйгенса на примере задачи Коши для волнового уравнения. Пусть начальные данные f и g в формуле (41) обращаются в нуль при $x^2+y^2+z^2>R^2$, где R — некоторое положительное число. Из формулы Пуассона немедленно следует, что возмущение u в точке P, удаленной на расстояние $|P|>R$ от начала координат, равно нулю до момента $t=(|P|-R)/\omega$ и снова тождественно исчезает при $t>(|P|+R)/\omega$. Точка P колеблется только в течение промежутка времени $2(|P|+R)/\omega$, и волна имеет как передний, так и задний фронт. Тем самым принцип Гюйгенса оказывается справедливым.

Интересно сравнить этот результат со случаем цилиндрических волн. Обратимся к формуле (43). Допустим, как и в трехмерном случае, что функции f и g обращаются в нуль при $|P|>R$, т. е. что начальное возмущение сосредоточено в цилиндре $|P|\leqslant R$. Тогда в силу (43), как и в случае трех пространственных переменных, $u(P,t)=0$ при $t\leqslant(|P|-R)/\omega$. Однако после этого момента возмущение никогда не исчезает: волна имеет четко очерченный передний фронт, но не имеет заднего. Свойство двумерных волновых движений иметь бесконечный хвост называют диффузией волн. Наличие диффузии, очевидно, равносильно отсутствию принципа Гюйгенса.

Из явной формулы для решения задачи Коши для волнового уравнения с n пространственными переменными, полученного О. Тедоне (1898 г.), следует, что при $n=3, 5, 7, \ldots$ диффузии нет, т. е. для указанных размерностей справедлив принцип Гюйгенса; в то же время при $n=1, 2, 4, \ldots$ диффузия имеет место. Вот что образно пишет об этом эффекте Л. Шварц: «Тогда как сферическая волна, исходящая из одной точки, распространяясь в нашем трехмерном пространстве, распределяется по сферам возрастающего радиуса, в случае четного числа измерений такая волна заполняет весь шар, а не только сферу. Так, если бы мы слушали концерт в четномерном пространстве, после прохождения фронта волны сохранялся бы остаточный звук. Я полагаю, что при той точности, какую мы требуем от музыки, разница была бы довольно существенной» [1123, с. 16].

Адамаром впервые был рассмотрен принцип Гюйгенса для общего линейного гиперболического уравнения (46) второго порядка с переменными коэффициентами [1266]. Из представлений для решения задачи Коши он вывел, что при всех четных n этот принцип не выполняется. Позднее в заметке [1277], опубликованной в «Математическом сборнике», Адамар специально остановился на случае $n \geqslant 1$, показав наличие диффузии. Для остальных размерностей задача оказалась сложнее. Адамар установил, что необходимым и достаточным условием отсутствия диффузии при нечетных $n \geqslant 3$ является тождественное обращение в нуль некоторой функции $2n+2$ переменных, входящей в разложение элементарного решения формально сопряженного уравнения (47) (разложение (38) не должно содержать логарифмического члена). Относительно такого ответа на вопрос об условиях справедливости принципа Гюйгенса Адамар высказывает пожелание, «чтобы он был „намного более полным"».*) Было сформулировано необходимое и достаточное условие, но мы не знаем, как найти уравнения, которые ему удовлетворяют, и даже существуют ли такие уравнения, кроме (e_{2m_1-1}) **) (и, конечно, кроме тех, которые выводятся из

*) Кавычки внутри этой цитаты относятся к словам Пуанкаре на Международном математическом конгрессе в Риме в 1908 г.: «Нет задач решенных и задач нерешенных. Есть только задачи более или менее решенные».

**) Т. е. волнового уравнения с нечетным числом независимых переменных.

(e_{2m_1-1}) с помощью очевидных преобразований)» [I266, с. 255].

Очевидные преобразования, о которых здесь идет речь, — это замена независимых переменных, а также умножение решения и всего уравнения на заданные функции. Уравнения, сводящиеся друг к другу при помощи таких преобразований, называют эквивалентными.

Полностью поставленная Адамаром проблема описания всего класса уравнений вида (46), для которых принцип Гюйгенса имеет место, не решена до сих пор. Усилиями ряда математиков был удовлетворительно исследован вопрос о существовании уравнений без диффузии, неэквивалентных волновому. В конце 30-х годов ученик Адамара Мирон Матиссон анонсировал отрицательный ответ на этот вопрос в случае четырех независимых переменных. Доказательство было опубликовано в 1939 г. [III141], но относилось только к случаю постоянных коэффициентов главной части оператора. Продолжения работы не появилось, и, как выяснилось впоследствии, само утверждение для переменных коэффициентов a_{ij} было неверным. Независимо и при помощи другого метода Асгейрссон получил в случае $n=3$ отрицательный ответ на вопрос Адамара, также предположив дополнительно, что коэффициенты a_{ij} — постоянные.*) В работе [I305], посвященной памяти Матиссона, Адамар дал еще одно доказательство той же теоремы.

Первый пример уравнения без диффузии, неэквивалентного волновому, был построен К. Штельмахером для $n=5$ [III169]. Он показал, что уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-c\,(t,\ x)\,u=0,$$

удовлетворяющие принципу Гюйгенса, исчерпываются (с точностью до эквивалентности) тремя случаями: $c=0$, $c=-2t^{-2}$, $c=2x_1^{-2}$. Позднее Штельмахер распро-

*) Работа Асгейрссона [III77] была опубликована только в 1956 г., но он получил результат независимо и приблизительно в то же время, что и Матиссон (А. Дуглис [III93] упоминает о неопубликованной рукописи Асгейрссона 1936 г.; см. по тому же поводу: [II132]).

странил свой пример на любые нечетные значения $n > 5$ [III170]. Для единственной оставшейся размерности $n=3$ класс уравнений (46) без диффузии, неэквивалентных волновому, был построен П. Гюнтером [III108] и (независимо и другим методом) Н. Х. Ибрагимовым и Е. В. Мамонтовым [III119]. В частности, уравнением без диффузии является следующее:

$$u_{tt} - u_{xx} - f(x-t)\, u_{yy} - u_{zz} = 0, \tag{49}$$

где f — произвольная положительная функция. Доказательство справедливости принципа Гюйгенса для уравнения (49), данное Гюнтером, состояло в проверке выполнения упомянутого выше необходимого и достаточного условия Адамара, а в работе Ибрагимова и Мамонтова это было сделано при помощи явного решения задачи Коши для уравнения (49) с начальными данными

$$u\,|_{t=0} = 0, \qquad u_t\,|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Решение этой задачи дается формулой, обобщающей формулу Пуассона (42):

$$u(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{0}^{2\pi} \varphi\left(\xi,\ y + \sqrt{(x+t-\xi)[F(\xi) - F(x-t)]}\cos\theta,\right.$$

$$\left. z + \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}\sin\theta\right) d\theta$$

где $F(\xi) = \int f(\xi)\, d\xi$.

Вскоре Ибрагимов [III20] (см. также [III21, III22]) обнаружил, что принцип Гюйгенса имеет глубокий геометрический смысл, частным выражением которого являются результат Матиссона—Асгейрссона и пример (49). Оказалось, что этот принцип тесно связан с существованием так называемой нетривиальной группы конформных преобразований в постоянно применяемом Адамаром $(n+1)$-мерном римановом пространстве V_{n+1} с метрикой $dl^2 = \sum\limits_{i,j} h_{ij}(x)\, dx_i dx_j$, где h_{ij} определяются старшими коэффициентами уравнения (46) ($\|h_{ij}\| = \|a_{ij}\|^{-1}$). Примерами пространств с нетривиальной конформной группой являются плоскость, пространство постоянной кривизны, вообще любое пространство, конформное плоскости, а также пространство V_4, порожденное уравнением (49).

Допустив наличие нетривиальной конформной группы, Ибрагимов полностью решил проблему Адамара для уравнения (46) в случае $n=3$. Именно, справедливо следующее утверждение. Пусть $n=3$, и пусть риманово пространство V_4 имеет нетривиальную конформную группу. Тогда уравнение (46) в V_4 удовлетворяет принципу Гюйгенса в том и только в том случае, когда оно инвариантно относительно полной группы конформных преобразований в V_4, причем такое конформно-инвариантное уравнение единственно с точностью до преобразований эквивалентности.

До сих пор нет ни одного примера пространства с тривиальной конформной группой, в котором выполнялся бы принцип Гюйгенса. Напротив, имеющиеся предварительные результаты говорят в пользу гипотезы о возможности принципа Гюйгенса лишь при наличии нетривиальной конформной группы. Именно к выяснению этого вопроса и сводится теперь окончательное решение проблемы Адамара для уравнений (46) при $n=3$.

В случае $n>3$ в работе Ибрагимова и Мамонтова [III23] показано, что гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sum_{i,\ j=1}^{n-1} a_{ij}(x-t)\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}=0$$

с гладкими коэффициентами a_{ij} удовлетворяет принципу Гюйгенса и неэквивалентно ни волновому уравнению, ни примерам Штельмахера. Читателю, заинтересованному в изучении современного состояния проблемы Адамара, можно рекомендовать монографию Ибрагимова [III22], в которой развит теоретико-групповой подход к этой проблеме.

Отметим в заключение, что с принципом Гюйгенса тесно связана теория лакун фундаментальных решений гиперболических уравнений. Лакуной, грубо говоря, называется (связная) область, в которой фундаментальное решение тождественно равно нулю. Основополагающим в теории лакун явился полученный И. Г. Петровским [III153] критерий наличия лакуны для однородного строго гиперболического уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Этот результат впоследствии вызвал к жизни ряд фундаментальных исследований, обзор которых дан в комментарии А. М. Габриэлова и В. П. Паламодова [III15] к работам И. Г. Петровского [III45].

Последние книги

Психология математического творчества

Мы уже говорили, что в 1945 г. в США появилась написанная там годом ранее книга Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики». Она довольно быстро получила известность, и по сей день ее продолжают цитировать в книгах различного содержания, написанных математиками или психологами. Как математик догадывается о новых закономерностях, как находит доказательства теорем? Подобные вопросы интересовали Адамара на протяжении всей его творческой жизни, но только в возрасте около 80 лет он решил подвести итог своим размышлениям. «Этот труд, как и все, что можно было бы написать об изобретении в математике, — пишет Адамар в предисловии к французскому изданию, — вдохновлялся прежде всего знаменитым докладом Анри Пуанкаре в психологическом обществе в Париже (1908 г.). Впервые я обратился к этой теме во время одного из заседаний в „Центре синтеза" в Париже в 1937 г. Но более основательно я рассмотрел эту тему в курсе лекций, прочитанном в 1943 г. в „Свободной школе высших исследований" в Нью-Йорке» [I339, с. 3].

Перед отъездом в Европу из США Адамар передал текст лекций на английском языке в Принстонский университет. Перевод на французский язык, выполненный Жаклин Адамар, появился только в 1959 г. В рецензии на книгу Г. Харди писал: «Это — первая, если не считать известной лекции Пуанкаре, попытка математика самого высокого ранга показать характер его собственного мышления и мышления других математиков. . . Мы должны быть благодарны Адамару за эту стимулирующую небольшую книжечку, написанную со всей основательностью одним из величайших математиков последнего пятидесятилетия, повествующим с чарующей откровенностью о своих достижениях, триумфах и промахах. И именно этот личный элемент представляется мне самым привлекательным» [III111, с. 60].

Книга Адамара написана очень доступно. В ней почти нет специальных философских и математических терминов. Производит сильное впечатление диапазон автора. Он комментирует взгляды философов, психологов, художников, поэтов. Здесь Абеляр и блаженный Августин, А. Бергсон и Г. Спенсер, З. Фрейд и А. Шопенгауэр, О. Родэн и П. Валери. . . О высочайшей интеллигентности автора свидетельствует и его манера вести полемику, когда уважение к оппоненту является условием sine qua non.

Много внимания уделяет Адамар феномену бессознательного и его роли в научном открытии. Подчеркивая, что бессознательное еще находится в начальной стадии изучения (это верно и в наши дни), он считает, что оно играет главную роль в творческом процессе, что озарения — неосознанные взлеты вдохновения — являются результатом скрытой от индивидуума длительной работы мозга. Рассказ Пуанкаре об одном открытии, сделанном им в теории автоморфных функций [I339, с. 37], является хорошей тому иллюстрацией, что, по словам Харди из цитированной выше его статьи, может на собственном опыте подтвердить и любой другой исследователь, напряженно работавший над той или иной темой. Известный французский поэт Поль Валери, который был оригинальным мыслителем и интересовался точными науками, говорил нечто подобное об озарении в поэтическом творчестве. Конечно, высказывались и другие точки зрения. Так, Гаусс, глубоко религиозный человек, объяснял озарение, которое явилось ему в момент одного открытия в теории чисел, вдохновением, ниспосланным свыше, французский биолог Ш. Николь считал озарение случайным фактором, подобным мутациям в генетике. Не отрицая роли случайности, Адамар, возражая ему, замечает, что объяснить акт открытия «чистым случаем — это значит ничего не объяснять, а утверждать, что существуют явления без причины» [I339, с. 23].

В качестве особенности бессознательного Адамар подчеркивает его множественность. Во-первых, оно эшелонировано в глубину, начиная от абсолютно бессознательного и кончая процессом, близким к сознательному мышлению. Во-вторых, множественность проявляется также в наличии различных вариантов, с возможностями которых приходится иметь дело в процессе решения задачи. «Творить, — говорит Пуанкаре, — это уметь распознавать, уметь выбирать» [1339, с. 138]. Этот афоризм перекликается со словами, приписываемыми Микельанджело: «Для того чтобы высечь статую из куска мрамора, мне нужно только убрать из него лишнее». Адамар цитирует П. Валери: «Для того чтобы изобретать, надо быть в двух лицах. Один образует сочетания, другой выбирает то, что соответствует его желанию и что он считает важным из того, что произвел первый» [1339, с. 32].

Важным критерием выбора служит эстетический фактор — красота. В математике она может проявляться по-разному: кратчайший логический путь, ведущий к цели, различного рода ассоциации и аналогии, обобщения, желание восстановить пробел в архитектонике той или иной дисциплины. В качестве одного из примеров последнего Адамар называет идею, которая привела Вольтерру к открытию функционального анализа: «Почему этот крупный итальянский геометр стал оперировать с функциями так, как в исчислении бесконечно малых оперируют с числами, т. е. рассматривая функцию как непрерывно меняющийся элемент? Только потому, что он отдавал себе отчет в том, что этот метод должен был гармонично дополнить структуру математического знания, точно так же как архитектор видит, что здание будет лучше уравновешено, если прибавить к нему одно крыло» [1339, с. 120—121].

Адамар в разных местах книги настойчиво акцентирует роль эстетического фактора. Он утверждает, что приводимые им примеры отметают сомнение, выраженное Г. Уолласом (английский психолог первой половины XIX в., неоднократно цитируемый Адамаром) по поводу значения чувства красоты в качестве двигателя научного открытия. «Наоборот, создается впечатление, что это чувство у нас в математике является чуть ли не единственно полезным» [1339, с. 121]. При всем том понятие красоты в математике субъективно. Так, Л. Эйлер и К. Ф. Гаусс, питавшие приверженность к крайне длинным вычислениям, несомненно, находили в них красоту, в то время как Пуанкаре заявлял, что он не любит больших вычислений. Опираясь на свой опыт и опыт других математиков, Адамар отмечает, что, когда прямые пути поиска не приводят к решению задачи, часто имеет смысл пойти обходным путем, обратиться к той или иной смежной области. Следуя психологу П. Сурье, он называет это «думать около».

Очень интересный вопрос ставится в параграфе «Попытки управлять бессознательным». Можно ли лучше познать бессознательное, можно ли на него воздействовать? Известно, что в состоянии гипноза человек способен на действия, которые для него невозможны в нормальном состоянии: пройти по натянутому канату, проявить артистические способности и т. п. «Стоило бы поставить опыт, — говорит Адамар, — предложив математику в состоянии гипноза проблему, решение которой неизвестно. Если бы он нашел решение, то одновременно доказал бы теорему и подтвердил бы стимулирующее действие гипноза» [I339, с. 54].

В целом, по Адамару, творческий процесс слагается из четырех этапов:

1) выбор проблемы и сознательная предварительная работа;

2) «инкубация» — период бессознательного мышления;

3) озарение — момент открытия;

4) анализ полученного результата, его проверка и оформление.

Катализатором творческого поиска является та или иная интуиция — геометрическая, физическая. . . Значение интуиции часто подчеркивал и Гильберт, который вместе с тем в своих работах по математической логике и реализации аксиоматического метода в конкретных дисциплинах говорил о возможности дедуктивных построений без обращения к интуиции. Точку зрения Адамара на роль интуиции разделяет и Д. Пойя: «Я полагаю, что каждый человек, в том числе и математик-профессионал, предпочтет интуитивное понимание предмета формально-логическим построениям. Жак Адамар — выдающийся математик нашего времени — выразил эту мысль в таких словах: „Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции, — и никакой другой цели у нее никогда не было“» [III48, с. 319].

Еще один вопрос, обсуждаемый в книге, — необходимы ли слова для мышления. Адамар не согласен с психологом М. Миллером, утверждавшим, что всякое мышление, будь то научное или ненаучное, так или иначе связано со словами. В качестве примеров неязыкового мышления Адамар называет игру в шахматы, общение глухонемых. Поскольку его прежде всего интересовало математическое творчество, он во время работы над книгой обратился к А. Эйнштейну, Н. Винеру, Д. Пойя и другим крупнейшим ученым, проживавшим тогда в США, с просьбой ответить, какую роль играет слово в их творчестве. Ответы большинства опрошенных, приведенные в книге, подтвердили мнение Адамара.

Возможность разделения математиков на интуитивистов и логиков занимает основное место в гл. 7 «Различные типы математических умов». Адамар приводит слова Ф. Клейна из лекции 1893 г., прочитанной в США: «Кажется, что сильная пространственная интуиция присуща тевтонской науке, в то время как чисто логический критический дух более развит в латинской и еврейской расах» [1339, с. 101]. Адамар ясно выражает отрицательное отношение к высказываниям такого рода, проводя параллель с расистскими взглядами нацистов. Он пишет: «Клейн недвусмысленно рассматривает интуицию с ее таинственным характером как нечто высшее по отношению к прозаическому пути логики, и он, очевидно, счастлив провозгласить такое превосходство своих соотечественников». Приводя ряд примеров, опровергающих высказывания Клейна, Адамар, подчеркивая неуместность всяких критериев, исходящих из национальных признаков, критикует и своего соотечественника П. Дюэма, «который в 1915 г. был также сбит с толку, но в противоположном смысле. В достаточно подробной статье *) он изображает немецких ученых, особенно математиков, как людей, лишенных интуиции или даже как сознательно ее отметающих» [там же]. Если бы Клейн или Дюэм были правы, то «читатель сделал бы вывод, что либо французы, либо немцы никогда не делали важных открытий» [там же].

Отмечая, что Пуанкаре был чужд националистических высказываний, Адамар добавляет, что если до сих пор во всем был согласен с Пуанкаре, то теперь вынужден разойтись с ним в оценке характера твор-

*) «Revue des deux mondes», 1915. Janvier—février. P. 657.

чества некоторых конкретных ученых, в частности их общего учителя Эрмита. «Считать Эрмита логиком (как это делал Пуанкаре. — *Авт.*)! Ничто не может казаться мне менее правдоподобным. Казалось, что методы всегда рождались в его уме каким-то таинственным образом!» [1339, с. 103].

В параграфе «Выбор темы» гл. 9 Адамар, приводя слова философа Э. Ренана «научный вкус существует так же, как существует вкус художественный и литературный» [1339, с. 118], говорит, что в выборе предмета исследования не обязательно руководствоваться возможностью немедленных приложений, они большей частью приходят позднее. Имея в виду свою теорему об умножении особенностей аналитических функций, Адамар вспоминает, что, когда он сообщил ее своему другу Дюэму, тот задал ему вопрос о применениях. «Когда я ответил, что до сих пор не думал над этим, Дюэм, который был не только выдающимся физиком, но и замечательным художником, сравнил меня с живописцем, который начал рисовать пейзаж, не выходя из мастерской, и который затем идет на прогулку, чтобы открыть в природе пейзаж, соответствующий его картине. Это сравнение показалось мне верным, но в действительности я был прав, не заботясь о приложениях: они пришли позднее» [1339, с. 119].

Далее Адамар иллюстрирует ту же мысль примером своего неравенства для определителей, доказывая которое, он не думал о полезности, но «удовлетворился лишь чувством, что оно заслуживает интереса, а в 1900 г. появилась теория Фредгольма, для которой, как оказалось, результат, полученный в 1893 г., был существен» [1339, с. 120]. В той же связи в книге упоминаются открытые Э. Картаном спиноры, «для специального рассмотрения которых в ту эпоху не было никакого основания, кроме их эстетических свойств» [там же], и развитая Вольтеррой теория функционалов, казавшихся «математическим понятием, существенно и полностью абстрактным» [1339, с. 121]. Через некоторое время спиноры и функционалы нашли важнейшие применения в теоретической физике.

Итак, по Адамару, отнюдь не полезность результата, понимаемая в том или ином смысле, но красота проблемы и ощущение ее внутренней ценности должны руководить исследователем в выборе темы. Это мнение не теряет злободневности и в наши дни, когда время от времени делаются попытки доказать ненужность фундаментальных исследований. Сказанное ни в коей мере не исчерпывает содержания книги, и было бы жаль, если бы читатель, удовлетворившись нашим рассказом, не обратился к источнику.*)

«Теория уравнений в частных производных»

В 1964 г. в Пекине вышла в свет прекрасно изданная монография Адамара «Теория уравнений в частных производных» [1340]. Увидеть ее напечатанной он не успел. . . Вспоминая о подготовке этой книги, Лоран Шварц пишет: «До конца жизни он чувствовал себя „ответственным“ за уравнения в частных производных, и это чувство вызывало в нем тревогу и беспокойство. После войны он редактировал книгу, которая должна была появиться в Китае на французском и которая резюмировала его понимание этих уравнений. Адамар ездил в Китай перед 1930 г., и китайские университеты попросили его издать лекции на французском.**) Он начал готовить публикацию лишь после окончания войны, и редактирование оказалось очень непростым, так как он считал своим долгом сказать все-все, что он мог сказать сам и даже прочитать во всех новых работах! Очевидно, это уже не имело смысла, принимая во внимание огромное число статей, появившихся к тому времени, и я убежден, что эта ситуация его беспокоила.

Он начал готовить публикацию после войны и к возрасту 92 или 93 лет закончил только восемь глав из 22. Тем не менее он хотел опубликовать все! Это поразительное обстоятельство отражает степень смелости и дух задуманного им исключительного предприятия. Потратив более десяти лет на восемь глав, не отказаться

---

*) Русский перевод книги [1339] дополнен двумя приложениями. Одно из них — анкета о методах работы математиков, опубликованная журналом «L'enseignement mathématique» (1902. T. 4. P. 208—211; 1904. T. 6. P. 376), часто цитируемая Адамаром. Недавно в статье [III145] была приведена современная версия подобной анкеты. Второе приложение — русский перевод доклада А. Пуанкаре «Математическое творчество», послужившего отправным пунктом для размышлений Адамара.

**) Поездка Адамара в Китай состоялась в 1936 г.

от публикации следующих! В этот момент родственникам и мне удалось убедить его прекратить работу. Несомненно, задача была невыполнимой, но я считаю, что этот аспект его поведения показывает, в какой степени он до самого конца чувствовал себя связанным с математикой» [II23, с. 17].

Последняя книга Адамара напоминает курс лекций по классической теории уравнений в частных производных, охватывающий множество вопросов: теорию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных и общих уравнений в частных производных, задачу Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка, «элементарные» решения эллиптических и гиперболических уравнений, задачу Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка, смешанную задачу для тех же уравнений, «сингулярные» уравнения, т. е. уравнения с оператором $\partial^2/\partial t^2+kt^{-1}\partial/\partial t$ (k=const), уравнения, меняющие тип в области, и параболические уравнения второго порядка.

Значительная часть содержания отражает собственные исследования Адамара, посвященные элементарным решениям задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических уравнений и др. В книгу вошли такие редко включаемые в общие курсы вопросы, как винеровская теория регулярности граничной точки для задачи Дирихле, обобщенные потенциалы Марселя Рисса и их приложения к гиперболическим уравнениям, осесимметрическая теория гармонических потенциалов, уравнения второго порядка смешанного типа. Текст насыщен интересными замечаниями, мотивировками, материалом обзорного характера, ссылками на первоисточники.

Изложение — абсолютно оригинальное, несущее на себе печать личности Адамара. Литературный стиль резко отличает эту книгу от современных ему руководств по тому же предмету: в ней больше «философии», а плотность формул существенно меньше. Отличительной чертой книги является обилие ссылок на литературу конца прошлого—начала нынешнего века. Предпочтение почти везде отдано конструктивным аналитическим методам исследования уравнений. Нигде читатель не встретится ни с пространством L_2, ни с пространством Соболева, хотя по существу соответствующие концепции иногда используются.

Представляла ли интерес монография Адамара в 60-е годы, и если да, то сохранился ли он сейчас? Это — непростые вопросы, и ответы на них неоднозначны. К моменту появления книги Адамара теория уравнений в частных производных представляла собой значительно более разветвленную область, обогащенную тесными контактами с набравшим полную силу функциональным анализом. Крепли ее связи с алгеброй и топологией. Уже была развита теория общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, и в ближайшие годы должен был появиться мощный аппарат псевдодифференциальных операторов. Поэтому даже в начале 60-х годов вряд ли можно было рассматривать адамаровскую «Теорию уравнений в частных производных» как пособие для изучения математической физики того времени. Нельзя не признать, что известный отпечаток архаичности уже тогда лежал на этой работе.

Вместе с тем автором книги был один из немногих великих математиков нашего столетия, в течение 60 лет исследовавший уравнения в частных производных. Это уникальное обстоятельство и определило ее непреходящую ценность. По отбору рассматриваемых вопросов и глубине проникновения в них читатель чувствует руку большого мастера. Несмотря на разнообразие тематики, Адамару удалось добиться поразительной цельности изложения, что объясняется, несомненно, цементирующей ролью идеи корректности, красной нитью проходящей через весь текст. Знакомясь с книгой Адамара, испытываешь яркое ощущение живой связи математики наших дней с исследованиями классиков — ощущение, редко возникающее при чтении современных монографий.

Основные даты жизни и деятельности Адамара

1865, 8 декабря. Рождение Жака Саломона Адамара.

1884—1890. Обучение в Нормальной школе.

1890. Назначение преподавателем в лицее Бюффона.

1892. Защита диссертации «Исследование функций, заданных рядами Тейлора» и присвоение степени доктора наук. Награждение Большим призом Академии наук за работу «Этюд о свойствах целых функций, и в частности функции, рассмотренной Риманом». Женитьба на Луизе Анне Тренель.

1893—1897. Преподавание в университете Бордо.

1896. Решение проблемы асимптотического распределения простых чисел. Присуждение премии Бордена за мемуар «О некоторых свойствах траекторий в динамике».

1897. Назначение лектором на кафедре дифференциального и интегрального исчисления факультета наук в Сорбонне. Назначение помощником профессора на кафедре аналитической и небесной механики в Коллеж де Франс. Выступление на Международном математическом конгрессе в Цюрихе с докладом «О некоторых возможных приложениях теории множеств».

1898. Присуждение премии Понселе за совокупность работ. Публикация «Лекций по элементарной геометрии. Геометрия на плоскости».

1901. Выход из печати второго тома «Лекций по элементарной геометрии», посвященного геометрии в пространстве. Издание книги «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение».

1903. Награждение премией Пти д'Ормуа за работы предшествующих лет. Выход книги «Лекция о распространении волн и уравнениях гидродинамики».

1907. Присуждение премии Вайяна за мемуар «Об одной задаче анализа, связанной с изгибом закрепленной пластины».

1908. Премия Эстрад Делькро за работы предшествующих лет.

1909. Избрание заведующим кафедрой аналитической и небесной механики в Коллеж де Франс.

1910. Издание «Лекций по вариационному исчислению».

1912. Уход из Сорбонны. Избрание заведующим кафедрой анализа Политехнической школы. Избрание членом Академии наук Франции.
1913. Создание семинара в Коллеж де Франс.
1916. Гибель на фронте сыновей Пьера и Этьена.
1920. Назначение профессором в Центральной школе искусств и ремесел.
1922. Выход в свет «Лекций о задаче Коши для линейных уравнений в частных производных».
1926. Издание первого тома «Курса анализа в Политехнической школе».
1930. Издание второго тома «Курса анализа в Политехнической школе».
1936. Уход в отставку в связи с 70-летием.
1941—1944. Пребывание в США.
1944. Гибель на фронте сына Матье.
Выход в Принстоне книги «Исследование психологии процесса изобретения в области математики».
1944—1945. Пребывание в Англии.
1955. Присуждение премии Фельтринелли.
1960. Смерть жены.
1962. Награждение золотой медалью в связи с 50-летием избрания в Академию наук.
1963, 17 октября. Смерть Жака Адамара.

I. Работы Жака Адамара

1884

1. Sur le limaçon de Pascal // J. math. spéc. Sér. 2. Vol. 3. P. 80—83.
2. Sur l'hypocycloide à trois rebroussements // J. math. spéc. Sér. 2. Vol. 3. P. 226—232.

1885

3. Sur l'hypocycloide à trois rebroussements // J. math. spéc. Sér. 2. Vol. 4. P. 41—42.

1888

4. Sur le rayon de convergence des sèries ordonnées suivant les puissances d'une variable // Compt. rend. Vol. 106. P. 259—262.
5. Recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 12. P. 118—121.

1889

6. Sur la recherche des discontinuités polaires // Compt. rend. Vol. 108. P. 722—724.

1892

7. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor: Thèse de doctorat de la Faculté des sciences // J. math. Sér. 4. Vol. 8. P. 101—186.
8. Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$ // Compt. rend. Vol. 114. P. 1053—1055.
9. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann: Memoire couronné par l'Académie: Grand prix des sciences mathématique // J. math. Sér. 4. Vol. 9. P. 171—215.

1893

10. Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant // Compt. rend. Vol. 116. P. 1500, 1501.

11. Résolution d'une question relative aux déterminants // Bull. sci. mat. Sér. 2. Vol. 17. P. 240—246.
12. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs // Compt. rend. Vol. 117. P. 844, 845.

1894

13. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes (avec note complémentaire) // Acta. math. Vol. 18. P. 319—336, 421.
14. Remarque sur les rayons de courbure des roulettes // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 19 avril.
15. Sur les mouvements de roulement // Compt. rend. Vol. 118. P. 911, 912.
16. Sur le théorème de Jacobi relatif au mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 19 juillet.
17. Sur l'élimination // Compt. rend. Vol. 119. P. 995—997.

1895

18. Sur le tautochronisme // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 7 février.
19. Sur l'expression du produit 1·2·3. . . (n—1) par une fonction entière // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 19. P. 69—71.
20. Sur une congruence remarquable et sur problème fonctionnel qui s'y rattache // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 14 février.
21. Sur les éléments infintésimaux du second ordre dans les transformations ponctuelles // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 19 décembre.
22. Sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 19. P. 228—230.
23. Sur la stabilité des rotations d'un corps solide pesant // Congr. Assoc. franç. Bordeaux.
24. Sur les mouvements de roulement // Mém. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. Sér. 4. Vol. 15. P. 397—417; см. также: *P. Appel.* Les roulements en dynamique // Coll. sci. Paris: Carré et Naud. 1899. P. 47—68.
25. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux; см. также: *P. Appel.* Les roulements en dynamique // Coll. sci. Paris: Carré et Naud. 1899. P. 69, 70.

1896

26. Mémoire sur l'élimination // Acta math. Vol. 20. P. 201—238.
27. Une propriété des mouvements sur une surface // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 30 avril.
28. Une propriété des mouvements sur une surface // Compt. rend. Vol. 122. P. 983.

29. Sur l'instabilité de l'équilibre // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 21 mai.
30. Sur les fonctions entières // Compt. rend. Vol. 122. P. 1257, 1258.
31. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique: Mémoire couronné par l'Académie: Prix Bordin // J. math. Sér. 5. Vol. 3. P. 331—387.
32. Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 4 juin.
33. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. rend. Vol. 122. P. 1470—1473.
34. Sur la fonction $\zeta(s)$ // Compt. rend. Vol. 123. P. 93.
35. Sur les fonctions entières // Bull. Soc. math. France. Vol. 24. P. 186, 187.
36. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques // Bull. Soc. math. France. Vol. 14. P. 199—200.
37. Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 20. P. 263—266.
38. Sur la décomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 24 décembre.

1897

39. Sur les notions d'aire et de volume // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 21 janvier.
40. Sur les séries de Dirichlet // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 18 février.
41. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 4 mars.
42. Théorème sur les séries entières // Compt. rend. Vol. 124. P. 135.
43. Sur les principes fondamentaux de la mécanique // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 18 mars.
44. Sur la démonstration d'un théorème d'algèbre // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 1 avril.
45. Sur les conditions de décomposition d'une forme ternaire // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 13 mai.
46. Sur les séries entières // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 3 juin.
47. Sur les lignes géodésiques // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 17 juin.
48. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées // Compt. rend. Vol. 124. P. 149.
49. Sur les lignes géodésiques // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 1 juillet.
50. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles // I Congr. Intern. math. Zurich.
51. Sur une surface à courbures opposées // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 22 juillet.

1898

52. Théorèmes sur les séries entières // Acta math. Vol. 22. P. 55—64.
53. Sur la généralisation du théorème de Guldin // Bull. Soc. math. France. Vol. 26. P. 264, 265.
54. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. math. Sér. Vol. 4. P. 27—73.
55. Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 3 février.
56. Sur la forme de l'espace // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 3 février.
57. Les invariants intégraux et l'optique // Compt. rend. Vol. 126. P. 82.
58. Sur la forme des géodésiques a l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre // Bull. Soc. math. France. Vol. 26. P. 195—216.
59. Sur le billard non euclidien // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 5 mai.
60. Leçons de géométrie élémentaire: Géométrie plane. Paris: Armand Colin. Рус. пер.: Элементарная геометрия. Ч. I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1936; 1938; 1948; 1957.

1899

61. Sur les conditions de décomposition des formes // Bull. Soc. math. France. Vol. 27. P. 34—47.

1900

62. Sur les points doubles des contours fermés // Proc.-verb. Soc. sci. phys. et natur. Bordeaux. 12 janvier.
63. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiale // Bull. Soc. math. France. Vol. 28. P. 64—66.
64. Sur l'intégrale résiduelle // Bull. Soc. math. France. Vol. 28. P. 69—90.
65. Sur les équations aux dérivées partielles a caractéristiques réelles // II Congr. Intern. math. Paris.
66. Note sur l'induction et la généralisation en mathématiques // Congr. Intern. philos. Paris.
67. Sur les singularités de certaines séries // Intermédiaire des mathématiciens.

1901

68. La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris: Gauthier-Villars.
69. Sur la propagation des ondes // Bull. Soc. math. France. Vol. 29. P. 50—60.
70. Sur les réseaux de coniques // Bull. sci. math. Vol. 25. P. 27—30.

71. Sur les éléments linéaires à plus de deux dimensions // Bull. sci. math. Vol. 25. P. 37—60.
72. Leçons de géométrie élémentaire: Géométrie dans l'espace. Paris: Armand Colin. Рус. пер.: Элементарная геометрия. Ч. II. Стереометрия. М.: Учпедгиз, 1938; 1951; 1958.
73. Sur l'équilibre des plaques circulaires libres ou appuyées et sur celui de la sphère isotrope // Ann. Éc. norm. sup. Sér.3. Vol. 18. P. 313—342.
74. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles // Bull. Soc. math. France. Vol. 29. P. 224—228.
75. La bosse des mathématiques // Rev. gén. sci. Vol. 11.

1902

76. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. Vol. 13. P. 49—52.
77. La théorie des plaques élastiques planes // Trans. Amer. math. soc. Vol. 3. P. 401—422.
78. Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries // Acta math. Vol. 26. P. 177—183.
79. Sur certaines surfaces minima // Bull. Sci. math. Sér. 2. Vol. 26. P. 357—361.
80. Sur les dérivées des fonctions de lignes // Bull. Soc. math. France. Vol. 30. P. 40—43.
81. Sur une classe d'équations différentielles // Bull. Soc. math. France. Vol. 30. P. 208—220.
82. Sur une question de calcul des variations // Bull. Soc. math. France. Vol. 30. P. 253—256.
83. Sur une condition qu'on peut imposer à une surface // Bull. Soc. math. France. Vol. 30. P. 111.
84. Рец. на кн.: M. A. Larmor. Aether and Matter. Cambridge: Univ. Press, 1900 // Bull. Sci. math. Sér. 2. Vol. 26. P. 319—328.
85. Рец. на кн.: Em. Bouvier. La méthode mathématique en économie politique. Paris: Larose, 1902 // Rev. gén. sci. Vol. 13. P. 890, 891.
86. Sur les fonctions entières // Compt. rend. Vol. 135. P. 1309—1311.

1903

87. Sur les glissements dans les fluides // Compt. rend. Vol. 136. P. 299—301.
88. Sur les glissements dans les fluides: Note complémentaire // Compt. rend. Vol. 136. P. 545.
89. Sur les opérations fonctionnelles // Compt. rend. Vol. 136. P. 351—354.
90. Sur un probléme mixte aux dérivées partielles // Bull.Soc. math. France. Vol. 31. P. 208—244.
91. Sur les surfaces à courbure positive // Bull. Soc. math. France. Vol. 31. P. 300, 301.
92. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris: Hermann.

93. Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre // Compt. rend. Vol. 137. P. 1028—1030.
94. Les sciences dans l'enseignement secondaire // Conf. faite a l'Éc. hautes études sociales. Paris: Alcan.

1904

95. Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique // Bull. Soc. math. France. Vol. 32. P. 242—268.
96. Recherches sur les solutions fondaméntales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles // Ann. Éc. norm. sup. Sér. 3. Vol. 21. P. 535—556.
97. Sur un point de la théorie des percussions // Nouv. Ann. math. Sér. 4. Vol. 4. P. 533—535.
98. Sur les séries de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ // Nouv. Ann. math. Sér. 4. Vol. 4. P. 529—533.
99. Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles // III Congr. Intern. math. Heidelberg.
100. Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique // III Cong. Intern. math. Heidelberg.

1905

101. Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (mémoire 2) // Ann. Éc. norm. sup. Sér. 3. Vol. 22. P. 101—141.
102. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles (note 2) // Compt. rend. Vol. 140. P. 425—427.
103. Sur quelques questions de calcul des variations // Bull. Soc. math. France. Vol. 33. P. 73—80.
104. Sur la théorie des coniques // Nouv. Ann. math. Sér. 4. Vol. 3. P. 145—152.
105. Lettres sur la théorie des ensembles (переписка с Борелем, Бэром и Лебегом) // Bull. Soc. math. France. Vol. 33. P. 261—273.
106. Remarque au sujet d'une note de m. Gyözö-Zemplen // Compt. rend. Vol. 141. P. 713.
107. À propos d'enseignement // Rev. gén. sci. Vol. 16.
108. Рец. на кн.: E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung: Statistik und Lebensversicherung. Leipzig: Teubner, 1905 // Rev. gén. Sci. Vol. 16. P. 784, 785.
109. Réflexions sur la méthode heuristique // Rev. gén. sci. Vol. 16. P. 499—504.

1906

110. Sur un théorème de M. Osgood, relatif au calcul des variations // Bull. Soc. math. France. Vol. 34. P. 61.

111. Sur la mise en équation des problèmes de mécanique // Nouv. Ann. math. Sér. 4. Vol. 6. P. 97—100.
112. Sur les transformations planes // Compt. rend. Vol. 142. P. 74—77.
113. Sur les transformations ponctuelles // Bull. Soc. math. France. Vol. 34. P. 71—84.
114. Compte rendu de elementary principles in statistical mechanics de Gibbs // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 12. P. 194—210; см. также: Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 30. P. 161—179.
115. Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles: Conférences faites à la Société mathématique de France et à la Société française de physique // Bull. Soc. franç. phys.; J. phys.
116. Sur une méthode de calcul des variations // Compt. rend. Vol. 143. P. 1127.
117. La logistique et l'induction complète // Rev. gén. sci. Vol. 17.
118. Les principes de la théorie des ensembles // Rev. gén. sci. Vol. 17.
119. Sur les caractéristiques des systèmes aux derivées partielles // Bull. Soc. math. France. Vol. 24. P. 48—52.
120. Sur le principe de Dirichlet // Bull. Soc. math. France. Vol. 24. P. 135—138.
121. La logistique et la notion de nombre entier // Rev. gén. sci. Vol. 17.

1907

122. Sur quelques questions de calcul des variations // Ann. Éc. norm. sup. Sér. 3. Vol. 24. P. 203—231.
123. Sur l'interprétation théorique des raies spectrales // Bull. Soc. franç. phys.
124. Sur la variation des intégrales doubles // Compt. rend. Vol. 144. P. 1092, 1093.
125. Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques èlastiques encastrées: Mémoire couronné par l'Académie: Prix Vaillant // Mém. présentés par divers savants Acad. sci. Vol. 33, N 4.

1908

126. Sur les séries de Dirichlet // Rend. Circolo mat. Vol. 25. P. 326—330.
127. Restification à la note «Sur les séries de Dirichlet» // Rend. Circolo mat. Vol. 25. P. 395, 396.
128. Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy // Acta math. Vol. 31. P. 333—380.
129. Sur l'expression asymptotiques de la fonction de Bessel // Bull. Soc. math. France. Vol. 36. P. 77—85.
130. Sur certaines particularités du calcul des variations // IV Congr. Intern. math. Rome.
131. Sur certaines cas intéressants du problème biharmonique // IV Congr. Intern. math. Rome.

132. Les paradoxes de la théorie des ensembles // Rev. gén. sci. Vol. 19. P. 681.

1909

133. Sur les lignes géodésiques (à propos de la récente note de M. Drach) // Compt. rend. Vol. 148. P. 272—274.
134. Sur une propriété fonctionelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Bull. Soc. math. France. Vol. 37. P. 59, 60.
135. Détermination d'un champ électrique // Ann. chim. et phys. Sér. 8. Vol. 16.
136. Notions élémentaires sur la géométris de situation // Nouv. ann. math. Sér. 4. Vol. 9. P. 193—235.
137. La géométrie de situation et son rôle en mathématiques: Leçon d'ouverture professée au Collège de France // Rev. mois. Vol. 8.

1910

138. Leçons sur le calcul des variations. Paris: Hermann.
139. Sur les ondes liquides // Compt. rend. Vol. 150. P. 609—611.
140. Sur les ondes liquides // Compt. rend. Vol. 150. P. 772—774.
141. Quelques propriétés des fonctions de Green // Compt. rend. Vol. 150. P. 1664—1666.
142. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Доп. ко 2-му изд. кн. Ж. Таннери // J. Tannery. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris: Hermann. Рус. пер.: Заметка Ж. Гадамара «О некоторых применениях указателя Кронеккера» // Ж. Таннери. Введение в теорию функций с одной переменною. М.: Типолитогр. т-во И. Н. Кушнерев и К°, 1912. Т. 2. С. 468—511.
143. Sur un problème de cinèmatique navale // Nouv. ann. math. Sér. 4. Vol. 10. P. 337—361; см. также: Rev. mar. 1911. Avril.

1911

144. Sur les trajectoires de Liouville // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 35. P. 106—113.
145. Relation entre les solutions des équations aux dérivées partielles des types parabolique et hyperbolique // Bull. Soc. math. France. Vol. 39.
146. Sur la solution fondamentale des équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique // Compt. rend. Vol. 152. P. 1148, 1149.
147. Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux // Compt. rend. Vol. 152. P. 1735—1738.
148. Sur l'inégalité

$$\left[\delta g_A^A \delta g_B^B - \left(\delta g_B^A\right)^2\right]\left[\delta g_C^C \delta g_D^D - \left(\delta g_D^C\right)^2\right] > \left(\delta g_C^A \delta g_D^B - \delta g_D^A \delta g_C^B\right)^2,$$

à laquelle satisfont les variations de la fonction de Green quand on passe d'un contour à un contour voisin // Bull. Soc. math. France. Vol. 39.
149. Sur les propriétés des fonctions de Green dans le plan // Bull. Sos. math. France. Vol. 39.
150. Propriétéé générales des corps et domaines algébriques // Encycl. sci. math. / Ed. fr. Vol. 1, N 2. P. 233—385. (*Avec M. Küschak*).
151. Maurice Lévy // Rev. gén. sci. Vol. 22.
152. Four lectures on mathematics, données à Columbia University (New York) en octobre 1911. New York: Columbia University Press, 1915.

1912

153. Le calcul fonctionnel // Enseign. math. Vol. 14. P. 1—18.
154. Sur une question relative aux liquides visqueux: Note rectificative // Compt. rend. Vol. 154. P. 109.
155. Sur les variations unilatérales et les principes du calcul des variations // Bull. Soc. math. France. Vol. 20.
156. Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles // Bull. Soc. math. France. Vol. 20.
157. Sur la généralisation de la notion de fonction analytique // Bull. Soc. math. France. Vol. 20.
158. Sur la loi d'inertie des formes quadratiques // Bull. Soc. math. France. Vol. 29.
159. Propositions trancendantes de la théorie des nombres // Encycl. sci. math. / Éd. fr. Vol. 1, N 3. P. 215—387. (*Avec M. Maillet*).
160. Itération des noyaux infinis dans le cas des intégrales doubles. Доп. к кн. М. Фреше, Хейвуда // M. Fréchet, H. B. Heywood. L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Paris: Hermann.
161. Observation à propos de la communication de M. Borel «Remarque sur la théorie des résonateurs» // Bull. Soc. franç. phys.
162. Sur la série de Stirling // V Congr. Intern. math. Cambridge.
163. Henri Poincaré // Rev. métaphys. et morale. Vol. 21. P. 617—658; Rev. mois. Vol. 16. P. 385—418.
164. L'oeuvre mathématique de H. Poincaré // Acta math. Vol. 38. P. 203—287.

1913

165. La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique // Ann. mat. Sér. 3. Vol. 21 (volume du centenaire de Lagrange). P. 251—287.
166. Observations à propos d'une note de M. Bouligand // Compt. rend. Vol. 156. P. 1364.

1914

167. Points pinces, arêtés de rebroussement et représentation paramétrique des surfaces // Enseign. math. Vol. 16. P. 356—359.
168. L'infini mathématique et la réalité // Rev. mois.
169. Sur la limitation du module des dérivées // Bull. Soc. math. France. Vol. 42. P. 68—72.
170. À propos d'une note de M. Paul Lévy sur la fonction de Green // Compt. rend. Vol. 158. P. 1010, 1011.
171. Henri Poincaré: L'ouevre scientifique: L'ouvre phylosophique. Paris: Alcan. (*Avec V. Volterra, P. Langevin, P. Boutroux*).

1915

172. Sur un mémoire de M. Sundman // Bull. sci. math. Sér. 2 Vol. 39. P. 249—264.

1916

173. Sur les ondes liquides // Rend. Acad. Lincei. Sér. 5. Vol. 25. P. 716—719.
174. Sur l'élimination entre équations différentielles // Nouv. ann. math. Sér. 4. Vol. 17. P. 81—84.

1919

175. Remarques sur l'intégrale résiduelle // Compt. rend. Vol. 168. P. 533, 534.
176. Sur les correspondances ponctuelles // Bull. Soc. math. France. Vol. 47. P. 28, 29.
177. Sur les singularités des séries entieres // Bull. Soc. math. France. Vol. 47. P. 40.
178. Sur un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables // Bull. Soc. math. France. Vol. 47. P. 44—46.
179. Démonstration directe d'un théorème de Poincaré sur les périodes des intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique qui satisfait à une équation différentielle linéaire // Bull. Soc. math. France. Vol. 47. P. 46.
180. Recherche du balourd dynamique des obus // Travaux Labor. d'essais des arts et métiers.

1920

181. Sur certaines solutions d'une équation aux dérivées fonctionnelles linéaires huperboliques non analytiques // Compt. rend. Vol. 170. P. 355—359.
182. La solution elémentaire des équations aux dérivées partielles // Compt. rend. Vol. 170. P. 149—154.

183. Rapport sur les travaux examinés et retenus par la Commission de ballistique de l'Académie des sciences // Compt. rend. Vol. 170. P. 436—445.
184. Sur la solution élémentaire des équations aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques // Congr. Intern. math. Strasbourg. P. 179—184.
185. Sur le problème mixte pour les équations linéaires aux dérivées partielles // Congr. Intern. math. Strasbourg. P. 499—503.

1921

186. On some topics connected with linear partial differential equations // Proc. Bénarès math. soc. Vol. 3. P. 39—48.
187. À propos d'enseignement secondaire // Rev. Intern. enseign.; Bull. Union natur.
188. Sur la comparaison des problèmes aux limites pour les deux principaux types d'équations aux dérivées partielles // Bull. Soc. math. France. Vol. 49. P. 28.

1922

189. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale Univ. Press.
190. L'enseignement secondaire et l'esprit scientifique // Rev. France.
191. Einstein en France // Rev. Intern. enseign.
192. Les principes du calcul des probabilités // Rev. métaphys. et morale. Vol. 39.
193. À propos des notions d'homogénéité et de dimension // Soc. franç. phys.; J. phys.
194. Sur un théorème de géométrie élémentaire // Bull. Offic. rech. et invent. Décembre.
195. Sur la fonction harmonique la plus voisine d'une fonction donnée // Assoc. franç. avanct. sci.
196. Sur une question de calcul des probabilités // Assoc. franç. avanct. sci.
197. Les responsabilités des guerres: Comment déterminer l'agresseur? // Cahier des droits de l'homme. Avril.
198. The early scientific work of H. Poincaré // Rice Inst. Pamphlet. Vol. 9. P. 111—183.
199. Preface à «Leçons d'analyse fonctionelle» par P. Levy. Paris: Gauthier-Villars.

1923

200. La notion de différentielle dans l'enseignement // Scr. Univ. Jérusalem. Vol. 1, N 4.
201. Poincaré i la teoria de les ecuacions différentials // Conf. prononcées à l'Institut d'études catalanes à Barcelone.
202. La réforme de l'enseignement secondaire: Conf. à l'Assemblée générale des étudiants // Bull. sci. étud. Paris.

203. Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions // Nouv. ann. math. Sér. 5. Vol. 1. P. 364—379.
204. La pensée française dans l'evolution des sciences exactes // France et monde.
205. Sur une formule déduite de la théorie des fonctions elliptiques // Bull. Soc. math. France. Vol. 51. P. 295, 296.
206. Sur les tourbillons et les surfaces de glissement dans les fluides // Compt. rend. Vol. 177. P. 505, 506.

1924

207. Principe de Huygens et prolongement analytique // Bull. Soc. math. France. Vol. 52. P. 241—278.
208. Quelques conséquences analytiques du principe de Huygens: 13 Réunion de la Société italienne pour l'avancement des sciences à Naples // Atti della Soc. ital. per il progresso della sci. Vol. 16. P. 164—168.
209. Sobre la representación grafica de l'espacio de quatro dimensiones // Rev. mat. hisp.-amer.
210. Comment je n'ai pas découvert la relativité? // Atti Congr. Intern. philos. Naples.
211. Le développement de la notion de fonction (на португальском): Conférences à l'École polytechnique de Rio de Janeiro, rédigées par J. Nicoletis // Rev. Acad. brasileira ci.
212. Le principe de Huygens: Conférence pour le cinquantenaire de la Société mathématique de France // Bull. Soc. math. France. Vol. 52. P. 610—640.

1925

213. On quasi analytic functions // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Vol. 11. P. 447, 448.
214. Sur le calcul approché des intégrales définies // Proc. Nat. Acad. Sci. of USA. Vol. 11. P. 448—450; Bull. Soc. math. France. Vol. 21, 22.
215. Itération et fonctions quasi analytiques // Rev. gén. sci.
216. Sobre un tipo de ecuaciones integrales singulares // Rev. Acad. Madrid. Vol. 22. P. 187—191.

1926

217. Sur une série entière en relation avec le dernier théorème de Fermat // Bull. Soc. math. France. P. 21, 22.
218. Sur les équations intégrables par la méthode de Laplace // Bull. Soc. math. France. P. 33—35.
219. Sur la géométrie anallagmatique // Bull. Soc. math. France. P. 35—39.
220. Préface de Gonseth «Les fondements des mathématiques» // Bull. sci. math. Sér. 2. 1927. Vol. 51. P. 66—73.
221. Quelques cas d'impossibilité du problème de Cauchy // In memoriam N. I. Lobatchewsky. Казань: Главнаука. Т. 2. С. 163—176.

222. Sur la théorie des séries entières // Nouv. ann. math. Sér. 6. Vol. 1. P. 161—164.
223. À propos du nouveau programme de mathématiques spéciales // Nouv. ann. math. Sér. 6. Vol. 1. P. 257—276, 391—393.
224. Cours d'analyse de l'École polytechnique. Paris: Hermann. T. 1.
225. Le principe de Huyghens dans le cas de quatre variables indépendantes // Acta math. Vol. 49. P. 203—344.
226. La série de Taylor et son prolongement analytique. Ed. 2, revisée et complétée. Paris: Gauthier-Villars. (*Avec S. Mandelbrojt*).

1927

227. Récents progrès de la géométrie anallagmatiqus // Rev. mat. hisp.-amer. Vol. 2; Nouv. ann. math. Sér. 6. Vol. 2. P. 257—273, 289—320.
228. Sur la théorie des fonctions entières // Bull. Soc. math. France. Vol. 55. P. 135—137.
229. Sur les éléments riemanniens et le déplacement parallèle // Bull. Soc. math. France. Vol. 55. P. 30, 31.
230. Sulle funzioni intere di genere finito: Lettre à m. Landau // Rend. Acad. Lincei. Vol. 6. P. 3—9.
231. L'oeuvre de Duhem sous aspect mathématique // Mém. Soc. phys. et natur. Bordeaux. Vol. 1. P. 637—665.
232. Sur le battage des cartes // Compt. rend. Vol. 185. P. 5—

1928

233. Observation sur une note de M. Hostinsky // Compt. rend. Vol. 186. P. 62.
234. Sur les opérations itérées en calcul des probabilités // Compt. rend. Vol. 186. P. 189—192.
235. Sur le principe ergodique // Compt. rend. Vol. 186. P. 275—276.
236. Deux exercices de mécanique // Enseign. sci. Vol. 1.
237. À propos de géométrie anallagmatique // Enseign. sci. Vol. 1.
238. Les méthodes d'enseignement des sciences expérimentales // Rev. intern. enseign. 47 année.
239. Une propriété de la fonction $\zeta(s)$ et des séries de Dirichlet // Bull. Soc. math. France. P. 43, 44; Congr. Assoc. franç. avancement sci. La Rochelle.
240. Sur l'enseignement de la mécanique // Congr. Assoc. franç. avancement sci. La Rochelle.
241. Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel // Congr. Intern. math. Bologne.
242. Sur le battage des cartes et ses relations avec le mécanique statistique // Congr. Intern. math. Bologne.
243. Les responsabilités de la guerra // Cahiers des droits de l'homme; см. также: Libre propos. 1929. Septembre.
244. La peine de mort et le Code pénal // Cahiers des droits de l'homme.

1929

245. Huyghensuv princip: Conférence faite à l'Université Charle à Prague et à l'Université Mazaryk à Brno // Casopis pro pestovani mathematicy a pysiky.
246. Le principe de Huygens pour les équations à trois variables indépendantes // J. math. pure et appl. Sér. 9. Vol. 8, volume en hommage à M. Appell et Picard. P. 197—228.
247. On ordinary restricted extrema in connection with point transformations // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 35. P. 823—828.
248. Analyse du livre de E. Landau «Vorlesungen über Zahlentheorie» (Leipzig: Hirzel, 1927) // Bull. sci. math. Vol. 53. P. 164—182. (*Avec S. Mandelbrojt*).

1930

249. Sur les arêtes de rebroussement de certaines enveloppes // Compt. rend. du I Congr. math. pays Slaves en 1929.
250. Remarques géométriques sur les enveloppes et la propagation des ondes // Acta math. Vol. 54. P. 247—261.
251. La physique et la culture générale // Oeuvre. 30 janvier.
252. La question de la physique // Oeuvre. 16 février.
253. Un nouveau pas à faire dans la voie de la paix: conventions scolaires // La paix par le droit.
254. Équations aux dérivées partielles et fonctions de variables réeles // Congr. math. slaves á Kharkov. Укр. пер.: Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 4. 1932. Т. 5. С. 11—20; рус. пер.: Тр. первого Всесоюзного съезда математиков. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 280—283.
255. Cours d'analyse de l'École polytechniques. Paris: Hermann. Vol. 2.

1931

256. Parlons culture générale // Oeuvre. 13 janvier.
257. Formation ou déformation intellectuelle // Oeuvre. 19 janvier.
258. Une culture qu'il ne faudrait pas détruire // Oeuvre. 24 janvier.
259. La question de la physique // Oeuvre. 16 février.
260. Multiplication et division // Enseign. sci.

1932

261. La propagation des ondes et les caustique // Comment. math. Helvetici. Vol. 5. P. 137—173.
262. Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur //Congr. Intern. math. Zurich.
263. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre // Enseign. sci.
264. Réponse à une enquête sur l'histoire des sciences dans l'enseignement // Enseign. sci.

265. Coordination d'enseignements // Enseign. sci.
266. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (перевод лекций, прочитанных в Йельском университете). Paris: Hermann; Рус. пер.: Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
267. Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre // Tôhoku Math. J. Vol. 37, dédié à T. Hayashi. P. 133—150.
268. Painlevé, le savant // Vu.
269. Réponse à une enquête sur la revision des traités: Paix mondiale.
270. Sur les probabilités discontinues des événements en chaîne // Ztschr. angew. Math. Mech. Bd 13. S. 92—97. (*Avec M. Fréchet*).

1934

271. Sur un résultat relatif aux équations algébriques // Bull. Soc. math. France. Vol. 62. P. 25.
272. Sur une question relative aux congruences de sphères // Bull. Soc. math. France. Vol. 62. P. 25.
273. L'oeuvre scientifique de Paul Painlevé // Rev. métaphys. et morale.
274. Un terme à effacer de l'enseignement mathématique «Effectuer» // Enseign. sci.
275. Réponse à l'enquête sur les bases de l'enseignement mathématique // Enseign. sci.
276. La non-résolubulité de l'équation du cinquième degré // Enseign. sci.
277. Un cas simple de diffusion des ondes // Мат. сб. Т. 41. С. 402—407.
278. Préface au livre de H. Hasse «Über Gewisse ideale in einer einfachen Algebra». Paris: Hermann, 1934. См. также: Actualités sci. industr. 1934. N 109. P. 5, 6.
279. Observations au sujet de la note de M. Mursi // Compt. rend. Vol. 199. P. 179, 180.

1935

280. Polynomes linéaires adjoints // Enseign. sci.
281. Réponse à l'enquête sur l'enseignement de la mécanique // Enseign. sci.
282. Les développables circonscrites à la sphère // Enseign. sci.
283. La théorie des équations du premier degré // Enseign. sci.
284. Extrait d'une lettre à M. T. Kubota // Tôhoku Math. J. Vol. 40. P. 198.
285. Les conditions définies dans les problèmes aux dérivées partielles: Généralités des cas hyperboliques // Conf. d'introd. à la réunion math. tenue à l'Univ. de Génève. 17 à 29 juin.
286. Les caustiques des enveloppes à deux paramètres // J. math. Volume publié en hommage à M. Goursat.

287. Un problème topologique sur les équations différéntielles // Prace mat. fiz. Vol. 44, volume en hommage à la mémoire de Lichtenstein.
288. Selecta: Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard. Paris: Gauthier-Villars.
289. La notion de différentiele dans l'enseignement // Math. gaz. Vol. 19. P. 341, 342.

1936

290. Équations aux dérivées partielles: Les conditions définies en général: Le cas hyperbolique // Conf. intern. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17—20 VI 1935; Enseign. math. Vol. 35. P. 5—42.
291. La caustique des enveloppes à deux paramètres // J. math. pure et appl. Vol. 9, N 15. P. 333—337.

1937

292. Calcul des variations et différentiation des intégrales // Тр. Тбил. мат. ин-та. Т. 1. С. 55—63.
293. Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques // J. Chin. math. soc. Vol. 2. P. 6—20.
294. Observations sur la note de M. Mandelbrojt // Compt. rend. Vol. 204. P. 1458, 1459.
295. Observations sur la note précédente // Compt. rend. Vol. 204. P. 399. Замеч. к ст. см.: M. Krasner, B. Ranulac. Sur une propriété des polynômes de la division du cercle // Compt. rend. Vol. 204. P. 397—399.
296. Problème topologique sur les équations différentielles // Prace mat. fiz. S. 1—7.
297. Observation sur le note précédentes de mm. Destouches et Appert // Compt. rend. Vol. 204. P. 458.

1938

298. Remarque sur l'intégration approchée des équations différentielles: Extrait d'une lettre // Ann. Soc. polon. math. Vol. 16. P. 126.
299. Sur certaines questions de la calcul intégral // Ann. Soc. ci. Argentina. Vol. 125. P. 1—18.
300. L'homogéénité en mécanique // Bull. Sci. math. Vol. 62. P. 6—10.
301. La science mathématique // Enseign. sci.

1940

302. Les mathématiques dans l'encyclopédie française // Mathematica, Cluj. Vol. 16. P. 1—5.
303. Les diverses formes et les diverses étapes de l'esprit scientifique // Thalès. Vol. 4. P. 23—27.

1942

304. Obituary: Émile Picard, 1856—1941 // Obit. Not. Roy. Soc. London. Vol. 4. P. 129—150.
305. The problem of diffusion of waves // Ann. Math. Vol. 43. P. 510—522.
306. On the Dirichlet problem for the hyperbolic case // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Vol. 28. P. 258—263.

1943

307. Obituary: Émile Picard // J. London Math. Soc. Vol. 18. P. 114—128.
308. La science et le monde moderne // Renaissance. 1, fasc. 4. P. 523.

1944

309. A known problem of geometry and its cases of indetermination // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 50. P. 520—528.
310. Two works on iteration and related questions // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 50. P. 67—75.

1945

311. Problèmes à apparence difficile // Мат. сб. Т. 17. С. 3—8. Рус. резюме.
312. Remarques sur le cas parabolique des équations aux dérivées partielles // Publ. Inst. math. Univ. nac. Littoral. Vol. 5. P. 3—11.
313. Obituary: George David Birkhoff // Compt. rend. Vol. 220. P. 719—721.
314. On the three-cusped hypocycloid // Math. Gaz. Vol. 29. P. 66, 67.
315. The psychology of invention in the mathematical field. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press.
316. A known problem of geometry and its cases of indetermination // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 51. P. 1001.

1947

317. Observation sur la note précédente // Compt. rend. Vol. 225. P. 854. О заметке: F. Bureau. Les solutions, élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalment hyperboliques d'ordre plus grand que deux et à un nombre impaire de variables indépendantes // Compt. rend. Vol. 225. P. 852—854.
318. Newton and the infinitesimal calculus // Roy. Soc. Newton Tercentenary Celebrations. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

1948

319. Sur le cas anormal du problème de Cauchy pour l'équations des ondes // Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, January 8. New York: Intersci. Publ. P. 161—165.

1949

320. An essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press.

1950

321. Les fonctions de classe supérieure dans l'équation de Volterra // J. analyse math. Vol. 1. P. 1—10. Резюме на иврите.
322. Célébration du deuxième centenaire de la naissance de P. S. Laplace // Arch. intern. hist. sci. Vol. 3. P. 287—290.

1951

323. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. М.; Л.: Гостехтеоретиздат.
324. Partial differential equations and functions of real variable // Gaz. math. Lisboa. Vol. 12, N 50. P. 3—6.

1953

325. Non-Euclidian geometry and axiomatic definitions // Magy. Tud. Acad. Mat. Fiz. Oszt. Közleményi. Vol. 3. P. 199—208.
326. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications. См. № 189.
327. Histoire des sciences et psychologie de l'invention // Actes du 7e Congr. Intern. d'hist. des sci. Jérusalem. P. 350—357.

1954

328. History of science and psychology of invention // Mathematika Vol. 1. P. 1—3.
329. La géométrie non-euclidienne et les définitions axiomatiques // Acta math. Acad. sci. Hung. Vol. 5, suppl. P. 95—104. См. № 325.
330. Sur les questions d'histoire des sciences: La naissance du calcul infinitéstimal // Anais Acad. Brasil. Ci. Vol. 26. P. 19—23.
331. An essay on the psychology of invention in the mathematical field. New York: Dover Publ. Inc. См. № 320.
332. Le centenaire de Henry Poincaré // Rev. hist. sci. appl. Vol. 7. P. 101—108.
333. Equations du type parabolique dépourvues de solutions // J. rational mech., anal. Vol. 3. P. 3—12.

1955

334. Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack // Rend. Circ. mat. Palermo. Vol. 3. P. 337—346.

1957

335. Sur le théorème de A. Harnack // Bull. Inst. politehn. Iasi. Vol. 3. P. 1—6.
336. Sur le théorème de A. Harnack // Publ. Inst. statist. Univ. Paris. Vol. 6. P. 177—181.

1958

337. History of science and psychology of invention // Mat. Lapok. Vol. 9. P. 64—66. См. № 328.
338. De la Renaissance à l'époque actuelle: deux conceptions opposées // The Golden Jubilee Commemoration volume: Calcutta math. soc. P. 11—14.

1959

339. Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Paris: Libr. sci. Albert Blanchard. Рус. пер.: Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970.

1964

340. La théorie des équations aux dérivée partielles. Pékin: Éd. sci.

1968

341. Oeuvres de Jacques Hadamard. Paris: CNRS. T. I—IV.

II. Литература об Адамаре

1. *Гельфонд А. О., Шнирельман Л. Г.* О работах академика Жака Адамара по теории функций комплексного переменного и теории чисел // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 92—117.
2. *Маргулис А. Я., Юшкевич А. П.* Жак Адамар // Математика в шк. 1964. № 2. С. 77—80.
3. *Петровский И. Г., Соболев С. Л.* О работах Жака Адамара по уравнениям с частными производными // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 82—91.
4. *Стеклов В. А., Успенский Я. В., Иоффе А. Ф.* Записка об ученых трудах Жака Адамара // Изв. Российск. Акад. наук. Сер. 6. 1922. Т. 16. С. 33—37.

5. *Шилов Г. Е.* Жак Адамар и формирование функционального анализа: Выступление на мемориальном заседании Московского математического общества 10 марта 1964 г. // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 3. С. 183—185.
6. *Cartwright M.* Jacques Hadamard // Biogr. memoirs of fellows of the Roy. Soc. 1965. Vol. 11. P. 75—98.
7. *Frechet M.* Notice nécrologique sur Jacques Hadamard, membre de la Section de géométrie // Compt. rend. 1963. Vol. 257. P. 4081—4086.
8. *Heilbrown H.*, *Howarth L.* Jacques Hadamard // Nature. 1963. N 200. P. 937, 938.
9. *Jubilé* scientifique de M. Jacques Hadamard. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
10. *Lévy P.* Jacques Hadamard // La jaune et la rouge. 1964. Janvier. P. 3—9. Рус. пер.: П. Леви. Жак Адамар // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 3. С. 163—169.
11. *Lévy P.* L'oevre scientifique de Jacques Hadamard // La jaune et la rouge. 1966. Mai. P. 7—13.
12. *Lévy P.* Jacques Hadamard, sa vie et son oeuvre: Calcul fonctionnel et questions divers // Enseign. math. 1967. Vol. 13, fasc. 1. P. 1—24.
13. *Malgrange B.* Les équations aux dérivées partielles dans l'oeuvre de Jacques Hadamard // Enseign. math. 1967. Vol. 13, fasc. 1. P. 35—48.
14. *Malliavin P.* Quelques aspects de l'oeuvre de Jacques Hadamard en géométrie // Enseign. math. 1967. T. 13, fasc. 1. P. 49—52.
15. *Mandelbrojt S.* The mathematical work of Jacques Hadamard // Amer. Math. Month. 1953. Vol. 60. P. 599—603.
16. *Mandelbrojt S.* Jacques Hadamard au Collège de France // La jaune et la rouge. 1966. Mai. P. 23—25.
17. *Mandelbrojt S.* Théorie des fonctions et théorie des nombres dans l'oeuvre de Jacques Hadamard // Enseign. math. 1967. T. 13, fasc. 1. P. 25—34.
18. *Mandelbrojt S.* Jacques Hadamard // Dictionary of scientific biography / Ed. in chief C. C. Gillispie. New York: Scribner a. Son, 1972. Vol. 6. P. 3—5.
19. *Mandelbrojt S.*, *Schwartz L.* Jacques Hadamard // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 71. P. 107—129.
20. *Montel P.* Jacques Hadamard. L'homme et le savant // La jaune et la rouge. 1966. Mai. P. 19, 20.
21. *Nicoletis J.* Souvenirs sur Jacques Hadamard // La jaune et la rouge. 1964. Janvier. P. 10—12.
22. *Rossat-Mignod S.*, *Rossat-Mignod A.* Jacques Hadamard // Les cahiers rationalistes. 1969. N 269. P. 306—358.
23. *Schwartz L.* L'oeuvre scientifique de Jacques Hadamard // La jaune et la rouge. 1966. Mai. P. 15—18.
24. *Tricomi F.* Allocution au nom des Sociétés savantes etrangères // La jaune et la rouge. 1966. Mai. P. 21, 22.

III. Использованная литература

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1967. Т. 90. С. 3—290.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974.
3. *Аршинов М. Н., Садовский Л. Е.* Коды и математика. М.: Наука, 1983.
4. *Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А.* Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
5. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
8. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
9. *Благовещенский А. С.* О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 1. С. 137—168.
10. *Боголюбов А. Н., Урбанский В. М.* Николай Митрофанович Крылов. Киев: Наук. думка, 1987.
11. *Боголюбов Н. Н.* Николай Митрофанович Крылов: Краткий очерк жизни и научной деятельности // *Н. М. Крылов.* Избранные труды. Киев: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1.
12. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
13. *Винер Н.* Я — математик. М.: Наука, 1964.
14. *Владимиров В. С., Маркуш И. И.* Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. М.: Наука, 1981.
15. *Габриэлов А. М., Паламодов В. П.* Принцип Гюйгенса и его обобщения // *И. Г. Петровский.* Избранные труды: Системы уравнений с частными производными: Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. С. 449—456.
16. *Гельфонд А. О., Шнирельман Л. Г.* О работах Жака Адамара по теории функций комплексного переменного и теории чисел // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 92—117.
17. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Мир. 1981.
18. *Гнеденко Б.* Предисловие к книге А. Реньи «Письма о вероятности». М.: Мир, 1970.
19. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Т. 1, 2.
20. *Ибрагимов Н. Х.* Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 1. С. 24—27.
21. *Ибрагимов Н. Х.* Принцип Гюйгенса // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 159—170.
22. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
23. *Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В.* О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x-t)\, u_{y_i y_j} = 0$ // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 3. С. 331—361.

24. *Ильин В. П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов: Автореф. ... канд. мат. наук. Л., 1951.
25. *Ингам А. Е.* Распределение простых чисел. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
26. *Иностранные* ученые о своих впечатлениях // Вестн. АН СССР. 1945. № 7. С. 149—152.
27. *Канторович Л. В.* Мой путь в науке: Предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, вып. 2. С. 183—214.
28. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
29. *Клайн М.* Математика: Утрата определенности. М.: Мир, 1984.
30. *Козлов В. А., Кондратьев В. А., Мазья В. Г.* О знакопеременности и отсутствии «сильных» нулей решений эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. № 2. С. 31—56.
31. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. зап. МГУ: Математика. 1939. Т. 30. С. 3—16.
32. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
33. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. Т. 2.
34. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
35. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1973.
36. *Люстерник Л. А.* Молодость Московской математической школы // Успехи мат. наук. Ч. 1. 1967. Т. 22, вып. 1. С. 137—161; Ч. 3. 1967. Т. 22, вып. 4. С. 147—185.
37. *Мазья В. Г.* О вырождающейся задаче с косой производной // Мат. сб. 1972. Т. 87, № 3. С. 417—454.
38. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. Л.; М.: ОНТИ, 1937.
39. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды: Регуляризация последовательностей: Применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
40. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967—1968. Т. 1, 2.
41. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
42. *Меньшов Д. Е.* Воспоминания о молодых годах и о возникновении московской школы теории функций // Историко-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 312—333.
43. *Михлин С. Г., Сапожникова В. Д.* Потенциалы волнового уравнения // Известия вузов. Математика. 1977. № 9. С. 48—64; № 10. С. 100—108.
44. *Отчет* о заграничной командировке для научных занятий приват-доцента Московского университета Николая Лузина / Подготовка к публикации Л. Е. Майстрова // Историко-мат. исслед. 1955. Вып. 8. С. 57—70.
45. *Петровский И. Г.* Избранные труды: Системы уравнений с частными производными: Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
46. *Письма* Д. Ф. Егорова к Н. Н. Лузину / Предисл. П. С. Александрова. Публ. и примеч. Ф. А. Медведева при участии

А. П. Юшкевича // Историко-мат. исслед. 1980. Вып. 25. С. 335—361.
47. *Письмо* Н. Н. Лузина к О. Ю. Шмидту / Публ., введ. и примеч. С. С. Демидова // Историко-мат. исслед. 1985. Вып. 28. С. 278—285.
48. *Пойя Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
49. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Изопериметрические нервенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
50. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
51. *Проблемы* Гильберта: Сб. статей. М.: Наука, 1969.
52. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1971—1974. Т. 1—3.
53. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.
54. *Ривкинд В. Я.* Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1979. Т. 84. С. 220—242.
55. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
56. *Смирнов В. И.* Из переписки П. Аппеля, Ж. Адамара, Г. Буркхарда, В. Вольтерра, П. Дюэма, К. Жордана, А. Пуанкаре и Р. Радо с академиком А. М. Ляпуновым // Тр. Ин-та истории естествознания и техники. М.: Изд-во АН СССР, 1957. Т. 19. С. 690—719.
57. *Соболев С. Л.* Об одном обобщении формулы Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1933. № 1. С. 256—262.
58. *Соболев С. Л.* Задача Коши в пространстве функционалов // Докл. АН СССР. 1935. № 3. С. 291—294.
59. *Соболев С. Л.* О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // Докл. АН СССР. 1936. № 1. С. 267—280.
60. *Сологуб В. С.* Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. Киев: Наук. думка, 1975.
61. *Стеклов В. А.* Математика и ее значение для человечества. М.; Л.; Берлин: Госиздат, 1923.
62. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
63. *Стретт Дж. В.* (*лорд Рэлей*). Теория звука. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1, 2.
64. *Таннери Ж.* Введение в теорию функций с одной переменною. М.: Изд-во типолитогр. т-ва И. Н. Кушнарева и К°, 1912. Т. 1, 2.
65. *Титчмарш Е.* Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
66. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
67. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
68. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы П. Леви // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, вып. 4. С. 97—140.
69. *Фикера Г.* О распространении волны в упругой среде // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 567—574.
70. *Харди Г. Г.*, *Литтльвуд Дж. Е.*, *Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

71. *Чебышев П. Л.* Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины // Теория сравнений. СПб., 1849. С. 209—229.
72. *Якоби К. Г. Я.* Лекции по динамике. Л.; М.: ОНТИ, 1936.
73. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
74. *Adhemar R. d'.* Sur une classe d'équations aux dérivées partielles de second ordre, du type hyperbolique // J. math. pure et appl. Sér. 5. 1904. Vol. 10. P. 131—207.
75. *Adhemar R. d'.* Sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique // J. math. pure et appl. Sér. 6. 1906. Vol. 2. P. 357—379.
76. *Almansi E.* Sull'integrazione dell' equazione differenziale // Atti Accad. Sci. Torino. 1896. Vol. 31. P. 527—534.
77. *Asgeirsson L.* Some hints in Huygens' principle and Hadamard's conjecture // Commun. Pure a. Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 3. P. 307—327.
78. *Bernstein S. N.* Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre // Thèse fac. sci. Paris. Leipzig: Teubner, 1904.
79. *Boas R. Ph.* Entire functions. New York: Acad. Press, 1954.
80. *Boggio T.* Sull' equilibrio delle piastre elastiche incastrate // Rend. Accad. Lincei. 1901. T. 10. P. 201—203.
81. *Boggio T.* Determinazione della deformazione di un corpo elastico per data tensioni superficiali // Atti Accad. Lincei. 1907. Vol. 7. P. 441—449.
82. *Bolza O.* Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig; Berlin: Teubner, 1909.
83. *Bouligand G.* Sur divers problèmes de la dinamique des liquides. Paris: Gauthier-Villars, 1930.
84. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol. 45. P. 851—859.
85. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris: Hermann, 1926.
86. *Cattaneo C.* Su un teorema fondamentale nella teoria della onda di discontinuità // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur. 1946. T. 1, N 1. P. 66—72; N 6. P. 728—734.
87. *Cauchy A. L.* Sur un nouveau genre d'intégrales: Anciens exercices de mathématiques: 1826. Oeuvres complètes. Sér. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1887. Vol. 6. P. 78—88.
88. *Christoffel E. B.* Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten // Ann. math. 1877. T. 8, fasc. 2. P. 81—112.
89. *Compte* rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique, Paris, 1—4 avril, 1914 // Enseign. math. 1914. Vol. 16. P. 174—177, 298—302.
90. *Denjoy A.* Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle // Compt. rend. 1921. Vol. 173. P. 1329—1331.
91. *Dieudonné J.* Abrégé d'histoire des mathématiques: 1700—1900. Paris: Herman, 1978. T. I, II.
92. *Dirichlet P. G. L.* Bewis des Satzes, das jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz

ganze Zahlen ohne gemeinschatlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält // Abh. Akad. Berlin. Math. Abh. 1837—1839. S. 45—71.
93. *Douglis A*. A criterion for the validity of Huygens' principle// Commun. Pure a. Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 3. P. 391—402.
94. *Du Bois-Reymond P*. Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen. Leipzig, 1864.
95. *Duffin R. J*. On a question of Hadamard concerning superbiharmonic functions // J. Math. a. Phys. 1948. Vol. 27, N 1. P. 253—258.
96. *Duhem P*. Hydrodynamique, élasticité, acoustique. Paris: Hermann, 1891.
97. *Duhem P*. Recherches sur l'élasticité. Paris: Hermann, 1906.
98. *Edwards H. M*. Riemann's zeta function. New York; London: Acad. Press, 1974.
99. *Ehrling G*. On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators // Math. Scand. 1954. Vol. 2. P. 267—285.
100. *Euler L*. Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs: Представлено Берлинской Академией наук 22 июня 1747 г. // Comment. arithm. collect. Petropoli. 1849. T. 2. P. 639—647.
101. *Fattorini H. O*. The Cauchy problem. London; Amsterdam: Addison—Wesley Publ. Co, 1983. (Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 18).
102. *Fichera G*. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Berlin: Springer-Verlag, 1965.
103. *Gagliardo E*. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ric. mat. 1959. Vol. 8, N 1. P. 24—51.
104. *Garabedian P. R*. A partial differential equation arising in conformal mapping // ONR Techn. Rep. 1953. N 8.
105. *Garipov R. M*. On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniquenness // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 24, N 5. P. 352—362.
106. *Gauss K. F*. Werke. Göttingen, 1863. Bd 2.
107. *Giaquinta M*., *Soucek J*. Caccioppoli's inequality and Legendre—Hadamard condition // Math. Ann. 1985. Bd 270. S. 105—107.
108. *Günther P*. Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus // Ber. über die Verh. der Sächsischen Akad. der Wiss. zu Leipzig. Math.-Naturwiss. Kl. 1952. Bd 100, H. 2.
109. *Hamel G*. Über die Geometrieen in denen die Geraden die Kürzesten sind. Göttingen, 1901.
110. *Hardy G. H*. Sur les zèros de la fonction ζ (*s*) de Riemann // Compt. rend. 1914. Vol. 158. P. 1012—1014.
111. *Hardy G. H*. A review: The psychology of invention in the mathematical field by J. Hadamard // Math. gaz. 1946. N 30. P. 111—115; Math. intelligencer. 1983. Vol. 5, N 2. P. 60—63.
112. *Hardy G. H*., *Littlewood J. E*. Contributions to the arithmetic theory of series // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1912/1913. Vol. 11. P. 411—478.

113. *Herz H.* Die prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhange dargestellt. Ges. Werke. Leipzig, 1894—1895. Bd 3.
114. *Holmgren E.* Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen: Öfversigt af Kongl. Vetenskaps // Akad. Förh. 1901. Bd 58. S. 91—105.
115. *Holmgren E.* Sur l'extension de la méthode d'integration de Riemann // Ark. mat., astron., fys. 1904. Vol. 1, N 22. P. 317—326.
116. *Hörmander L.* On the theory of general partial differential operators // Acta math. 1955. Vol. 54. P. 161—248. Рус. пер.: Л. Хермандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
117. *Huber A.* Die erste Randwetaufrabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y)$ // Monatshefte Math. u. Phys. 1932. Bd 39. S. 79—100.
118. *Hugoniot H.* Memoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits // J. Éc. Polytechn. 1887. Vol. 57. P. 1—97; 1889. Vol. 58. P. 1—125.
119. *Ibragimov N. H., Mamontov E. V.* Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes // Compt. rend. 1970. Vol. 270. P. 456—458.
120. *Ikehara S.* An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers // J. Math. a. Phys. Massachusets Inst. Technol. 1931. Vol. 10. P. 1—12.
121. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. Vol. 63, N 1. P. 141—154.
122. *Kneser A.* Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichungewichtslagen // J. reine u. angew. Math. 1897. Bd 118. S. 186—223.
123. *Kneser A.* Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, 1900.
124. *Koch H. von.* Sur la distribution des nombres premiers // Acta math. 1901. Vol. 24. P. 159—182.
125. *Landau E.* Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen // Rend. Circolo Mat. Palermo. 1907. T. 24. P. 81—160.
126. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: Teubner, 1909. Bd I, II.
127. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 13. P. 43—49.
128. *Landau E.* Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1927. Bd 1, 2.
129. *Lauricella G.* Integrazione dell' equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare // Atti Acad. Sci. Torino. 1896. Vol. 31. P. 610—618.
130. *Lax P. D., Nirenberg L.* On stability of difference schemes: a sharp form of Garding's inequality // Commun. Pure a. Appl. Math. 1966. Vol. 19, N 4. P. 473—492. Рус. пер.: П. Д. Лакс, Л. Ниренберг. Об устойчивости разностных схем: точная форма неравенства Гординга // Математика: Сб. переводов. 1967. Т. 11, № 6. С. 3—20.
131. *Legendre A. M.* Essai sur la theorie des nombres. Ed. 2. Paris: Courcier, 1808.

132. *Lévy M.* Mémoire sur la thèorie des plaques élastiques planes // J. Liouville. Sér. 3. 1877. T. 3. P. 219—307.
133. *Lévy P.* Leçons d'analyse fonctionnelle. Paris: Gauthier-Villars, 1922.
134. *Lewy H.* An example of a smooth linear partial differential equation without solution // Ann. mat. 1957. Vol. 66. P. 155—158.
135. *Littlewood J. E.* Sur la distribution des nombres premiers // Compt. rend. 1914. Vol. 158. P. 1869—1872.
136. *Loewner Ch.* On generation of solution of biharmonic equations in the plane by conformal mapping // Pacif. J. 1953. Vol. 3. P. 417—436.
137. *Lorch L.* Review of the book by Albers D. J., Alxanderson G. L., Reid C. «International Mathematical Congresses. An illustrated history, 1893—1986» // Math. intelligencer. 1988. Vol. 10, N 1. P. 65—69.
138. *Mangoldt H. von.* Zu Riemann's Abhandlung «Uber die Anzahl. . .» // J. reine u. angew. Math. 1895. Bd 114. S. 255—305.
139. *Mathieu E. L.* Sur le mouvement vibratoire des plaques // J. Liouville. Sér. 2. 1869. T. 14. P. 241—259.
140. *Mathisson M.* Eine neue Lösung methode für Differentialgleichungen von normalen hyperbolischem Typus // Math. Ann. 1932. Bd 107. S. 400—419.
141. *Mathisson M.* Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes // Acta math. 1939. Vol. 70. P. 249—282.
142. *Maz'ja V. G.*, *Kufner A.* Variations on the theme of the inequality $(f')^2 \leqslant 2f \sup |f''|$ // Manuscripts math. 1986. Vol. 56. P. 89—104.
143. *Miller D. G.*, *Duhem P.* // Dictionary of scientific biography / Ed. in chief C. C. Gillispie. New York: Scribner's son, 1971. Vol. 4. P. 225—233.
144. *Morrey C. B. Jr.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1966.
145. *Muir A.* The psychology of mathematical creativity // Math. intelligencer. 1988. Vol. 10, N 1. P. 33—37.
146. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equation: Lecture II // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Ser. 3. 1959. Vol. 13. P. 115—162.
147. *Nirenberg L.*, *Trèves F.* Solvability of a first order linear partial differential equation // Commun. Pure. a. Appl. Math. 1963. Vol. 14. P. 331—351.
148. *Ostrowski A.* On Hadamard's test for singular points // J. London Math. Soc. 1926. Vol. 1. P. 236—239.
149. *Ostrowski A.* Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen // Acta math. 1929. Vol. 53. P. 181—266.
150. *Painlevé P.* Sur les lignes singulières des fonctions analytiques: Thése. 1887.
151. *Petrowsky I. G.* Sur le problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine reel // Compt. rend. 1936. Vol. 202. P. 1010—1012.
152. *Petrowsky I. G.* Über das Cauchy'sche Problem für Systeme von partielle Differenzialgleichungen // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 815—870.

153. *Petrowsky I. G.* On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations // Мат. сб. 1945. Т. 17, № 3. С. 289—370.
154. *Pirenian G.* Algebraic-logariphmic singularities and Hadamard's determinants // Duke Math. J. 1944. Vol. 2. P. 147—153.
155. *Polya D.* Über gewisse Determinantenkriterien für einer Potenzreiche // Math. Ann. 1928. Bd 99. S. 687—706.
156. *Frym F.* Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ // J. reine u. angew. Math. 1871. Bd 73. S. 340—364.
157. *Rankin N. J.* On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Trans. Roy. Soc. London. 1870. Vol. 160. P. 277—288.
158. *Razmadze A. M.* Sur une théorème de la théorie des surfaces minima // Bull. sci. math. 1925. Vol. 49.
159. *Riemann B.* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegenbenen Gröβe // Monatsber. Berlin. Akad. 1859. S. 671—680.
160. *Riemann B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlichen Schweinungsweite // Göttinger Abh. 1860. Bd 8.
161. *Rybczynski W.* Über die fortsehrutende Bewegung einer Hussigen Kugel in einem Zahen Medium // Bull. Inst. Acad. Cracovia. Cl. sci. math. et natur. Ser. A. 1911. P. 40—44.
162. *Saalschütz L.* Bemerkungen über die Gammafunktionen mit negativen Argumenten // Ztschr. Math. u. Phys. 1887. Bd 32. S. 246—250.
163. *Saalschütz L.* Weitere Bemerkungen über die Gammafunktionen mit negativen Argumenten // Ztschr. Math. u. Phys. 1888. Bd 33. S. 362—374.
164. *Saint-Venant B. de.* Mémoire sur la torsion des prismes // Mém. présentés par divers savants à l'Acad. sci. 1856. Vol. 14. P. 233—560.
165. *Schoenberg I. J.* Norm inequalities for a certain class of C^∞ functions // Israel J. Math. 1971. Vol. 10, N 3. P. 364—372.
166. *Soboleff S.* Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 1. С. 39—72.
167. *Sommerfeld A.* Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen // Encykl. math. Wiss. Leipzig. 1904. Bd 2, H. 4. S. 504—560; H. 5. S. 561—570.
168. *Stekloff V. A.* Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Sec. 2. 1900. Vol. 2. P. 207—272.
169. *Stellmacher K. L.* Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 11a. 1953. N 10. S. 133—138.
170. *Stellmacher K. L.* Eine Klasse Huygensscher Differentialgleichungen und ihre Integration // Math. Ann. 1955. Bd 130. S. 219—233.
171. *Sylvester J. J.* On Tchebycheff's theorem of the totality of prime numbers comprised within given limits // Amer. J. Math. 1881. Vol. 4. P. 230—247.

172. *Szegö G.* Remark on the preceeding paper of Charles Loewner // Pacif. J. 1953. Vol. 3. P. 437—446.
173. *Sz.-Nagy B.* Über Carlsonsche und verwandte Ungleichungen // Mat. Fiz. Lapok. 1941. Vol. 48. P. 162—175.
174. *Tchebycheff P. L.* Sur les nombres premiers // J. math. 1852. Vol. 17. P. 366—390.
175. *The Pólya* picture album / Ed. G. L. Alexanerson. Basel; Boston: Birkhäuser Verlag, 1988.
176. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Rational Mech. a. Analysis. 1961. Vol. 8, N 4. P. 263—296.
177. *Vallée Poussin Ch.* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers // Ann. Soc. sci. Bruxelles. 1896. Vol. 20. P. 183—256, 281—297.
178. *Vallée Poussin Ch.* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée // Mém. Acad. roy. sci. Belgique. 1899—1900. Vol. 59, N 1. P. 74.
179. *Volterra V.* Sur les vibrations des corps élastiques isotropes // Acta math. 1894. Vol. 18. P. 161—232.
180. *Volterra V.* Sull' applicazione del metodo della imaginiale equazioni di typo iperbolico // Atti IV Congr. intern. mat. 1908. Vol. 2. P. 90—93.
181. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions des lignes. Paris: Gauthier-Villars, 1913.
182. *Walfisz A.* Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie. Berlin: Deutscher Verl. der Wiss., 1963.
183. *Weierstrass K.* Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale // Math. Werke. Berlin: Mayer a. Müller, 1894. Bd 1. S. 111—131.
184. *Wiener N.* A new method in Tauberian theorems // J. Math. a. Phys. Massachusetts Inst. Technol. 1927—1928. Vol. 7. P. 161—184.
185. *Wiener N.* Tauberian theorems // Annals Math. 1932. Vol. 33. P. 1—100.

АРХИВЫ

186. Ленинградское отделение архива Академии наук СССР (ЛОА АН СССР), ф. 257, оп. 1, ед. хр. 1, л. 1, 2.
187. ЛОА АН СССР, ф. 257, оп. 1, ед. хр. 56, л. 45, 45 об.
188. ЛОА АН СССР, ф. 162, оп. 2, ед. хр. 4, л. 1.
189. ЛОА АН СССР, ф. 265, оп. 6, ед. хр. 6, л. 1.
190. ЛОА АН СССР, ф. 759, оп. 3, ед. хр. 3, л. 1.
191. ЛОА АН СССР, ф. 759, оп. 2, ед. хр. 115, л. 7.
192. Archives École Polytechnique. Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard. 1901. Art. VI, § 1, sect. b2.
193. Archives École Polytechnique. Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard. 1909. Art. VI, § 1, sect. b2.

Оглавление

Научно-популярное издание

Ефим Михайлович Полищук,
Татьяна Олеговна Шапошникова

ЖАК АДАМАР
1865—1963

Утверждено к печати
Редколлегией серии
«Научно-биографическая литература»

Художник *И. П. Кремлев*
Технический редактор *Е. М. Чернонжукова*
Корректоры *О. М. Бобылева* и *М. К. Одинокова*

ИБ № 44194

Сдано в набор 03.08.89. Подписано к печати 11.10.90. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 13.44. Усл. кр.-от. 13.59. Уч.-изд. л. 13.80. Тираж 1100. Тип. зак. № 1835. Цена 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука». Ленинградское отделение.
199034, Ленинград, В-34, Менделеевская лин., 1.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука».
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12.

**КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»
МОЖНО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАКАЗАТЬ
В МАГАЗИНАХ КОНТОРЫ «АКАДЕМКНИГА»,
В МЕСТНЫХ МАГАЗИНАХ КНИГОТОРГОВ
ИЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ.**

*Для получения книг почтой
заказы просим направлять по адресу:*

117393 **Москва**, ул. Академика Пилюгина, 14, корп. 2, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»;
252208 **Киев**, ул. Правды, 80а, магазин «Книга — почтой»;
197345 **Ленинград**, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига»

*или в ближайший магазин «Академкнига»,
имеющий отдел «Книга — почтой»:*

480091 **Алма-Ата**, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370001 **Баку**, Коммунистическая ул., 51 («Книга — почтой»);
232600 **Вильнюс**, ул. Университето, 4 («Книга — почтой»);
690088 **Владивосток**, Океанский пр., 140 («Книга — почтой»);
320093 **Днепропетровск**, пр. Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 **Душанбе**, пр. Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 **Ереван**, ул. Туманяна, 31;
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»);
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»);
420043 **Казань**, ул. Достоевского, 53 («Книга — почтой»);
252030 **Киев**, ул. Ленина, 42;
252142 **Киев**, пр. Вернадского, 79;
252025 **Киев**, ул. Осипенко 17;
277012 **Кишинев**, пр. Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 **Краматорск** Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»);
660049 **Красноярск**, пр. Мира, 84;
443002 **Куйбышев**, пр. Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 **Ленинград**, Литейный пр., 57;
199034 **Ленинград**, Таможенный пер., 2;
194064 **Ленинград**, Тихорецкий пр., 4;
220012 **Минск**, Ленинский пр., 72 («Книга — почтой»);
103009 **Москва**, ул. Горького, 19а;
117312 **Москва**, ул. Вавилова, 55/7;
630090 **Новосибирск**, Красный пр., 51;
630090 **Новосибирск**, Морской пр., 22 («Книга — почтой»);
142284 **Протвино** Московской обл., ул. Победы, 8;
142292 **Пущино** Московской обл., МР «В», 1 («Книга — почтой»);
620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой);
700000 **Ташкент**, ул. Ю. Фучика, 1;
700019 **Ташкент**, ул. Ленина, 73;
700070 **Ташкент**, ул. Шота Руставели, 43;
700185 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»);
634050 **Томск**, наб. реки Ушайки, 18;
450059 **Уфа**, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»);
450025 **Уфа**, Коммунистическая ул., 49;
720001 **Фрунзе**, бульв. Дзержинского, 42 («Книга — почтой»);
310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).

Е.М.Полищук
Т.О.Шапошникова

Жак АДАМАР

Е.М.Полищук, Т.О.Шапошникова • Жак АДАМАР

60 коп.

«НАУКА»
Ленинградское
отделение