АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Б. Н. Фрадлин

Юрий Дмитриевич
СОКОЛОВ

(1896—1971)

Ответственный редактор
профессор
Т. В. ПУТЯТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1984

Ф—00

Фрадлин Б. Н. **Юрий Дмитриевич Соколов** (1896—1971). — М.: Наука, 1984.

Юрий Дмитриевич Соколов — выдающийся советский математик и механик — был одним из фундаторов теории задачи *n* тел. Его научные труды оказали значительное влияние на развитие аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики, проблемы трех и многих тел, приближенного математического анализа, теории фильтрации грунтовых вод и ряда других областей динамики системы и гидромеханики.

Блестящий педагог, он воспитал не одно поколение математиков, механиков и инженеров.

Книга о жизни и деятельности крупного ученого Ю. Д. Соколова представляет большой интерес для специалистов, аспирантов, инженеров и студентов.

Рецензенты:

доктора физико-математических наук
Н. Я. ЦЫГАНОВА, В. А. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

Ф $\frac{1602000000\text{-}134}{042(02)\text{-}84}$ 115-84—I

От автора

В 1966 г. коллектив Института математики АН УССР широко отметил 70-летие Юрия Дмитриевича Соколова, одного из крупнейших математиков и механиков нашего времени, замечательного педагога, гражданина и патриота. В адрес старейшего профессора института было высказано много теплых слов и пожеланий. Его многочисленные ученики и сотрудники по достоинству оценили вклад ученого в развитие отечественной и мировой науки.

Но не прошло и пяти лет после этого юбилея, как Юрия Дмитриевича не стало. Он ушел из жизни, оставив после себя добрую память, научную школу и большие духовные ценности, которые вошли в золотой фонд отечественной и мировой науки. Светлый образ Ю. Д. Соколова навсегда сохранится в памяти всех тех, кому посчастливилось знать его и соприкасаться с ним.

Автор приносит благодарность к. ф.-м. н. А. Л. Склянскому за помощь при подготовке книги к изданию, а также к. ф.-м. н. Б. Ю. Соколову за разрешение ознакомиться с архивом его отца.

Страницы биографии

Юрий Дмитриевич Соколов родился 14 (26) мая 1896 г. в семье казака на Кубани в станице Лабинской (теперь г. Лабинск Краснодарского края). Его мать была учительницей женской гимназии. Окончив в 1915 г. с золотой медалью Лабинскую мужскую гимназию, Юрий поступил на математическое отделение физико-математического факультета Киевского университета, который успешно закончил в начале 1921 г. С 1917 по 1920 г. Ю. Д. Соколов работал учителем в станице Лабинской. Перерыв в учении был вызван обстоятельствами военно-революционного времени.

Блестящие лекции А. П. Котельникова, Д. А. Граве, Б. Я. Букреева и П. В. Воронца привили Юрию Соколову любовь к математике и механике и в значительной мере определили его будущее мировоззрение. Одновременно с учебой в университете Ю. Д. Соколов работал в Киевской астрономической обсерватории.

Академик Д. А. Граве, основоположник и руководитель киевской математической школы, привлек талантливого юношу к научной работе при кафедре прикладной математики Украинской академии наук. Вместе с Ю. Д. Соколовым активное участие в разносторонних исследованиях по математике и механике, проводимых под руководством Д. А. Граве в начале 20-х годов, также принимали Н. И. Ахиезер, В. Е. Дьяченко, М. Ф. Кравчук, М. Г. Чеботарев, И. Я. Штаерман. Большую роль в развитии математических способностей этих ученых и формировании их мировоззрения в духе научной школы П. Л. Чебышева сыграли семинары по чистой математике и прикладной математике и механике, которые организовал Д. А. Граве. На этих семинарах молодые ученые выступали с докладами и обменивались критическими замечаниями.

Первый доклад Ю. Д. Соколова, тогда еще студента последнего курса университета, на семинаре Д. А. Граве был посвящен обсуждению результатов его вычислений элементов и эфемерид некоторых комет. Д. А. Граве поздравил Юрия Соколова с успешным дебютом, обнял его и высказал уверенность в блестящем развитии его математического таланта в ближайшем будущем. С этого времени (май 1921 г.) начинается долгая плодотворная научная деятельность молодого ученого, которая была неразрывно связана с АН УССР. Являясь представителем научной школы Д. А. Граве, он вобрал в себя наиболее характерные ее черты — энциклопедизм, фундаментальную строгость математического исследования, высокий уровень логического мышления, стремление к возможно более тесной связи науки и инженерной практики и вместе с тем к обобщениям научных теорий. Его работы стали классическими и занимают видное место в сокровищнице отечественной и мировой науки.

С 1 мая 1921 г. Ю. Д. Соколов был назначен на постоянную должность научного сотрудника Комиссии прикладной математики Украинской академии наук (в декабре 1933 г. комиссия вошла в состав Института математики АН УССР).

Ю. Д. Соколову принадлежит множество фундаментальных исследований в области теории функциональных уравнений, динамики систем и гидромеханики. Развитые им новые направления и методы получили широкое применение в небесной механике, теории упругости, гидро- и аэродинамике, теории теплопроводности, теории фильтрации грунтовых вод, теории шахтных подъемных канатов, нелинейной механике, теории сингулярных траекторий динамики.

Особое место в научном творчестве Ю. Д. Соколова занимают исследования по аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики в применении к проблеме n тел. Эта классическая проблема является одной из наиболее сложных проблем механики. На протяжении последних 300 лет крупнейшие мировые ученые считали делом своей чести внести определенный вклад в развитие этой интересной задачи механики. Если задача двух тел решается в квадратурах, при $n \geqslant 3$ мы встречаемся с необходимостью интегрирования большого числа совокупных нелинейных дифференциальных уравнений, что в замкнутой форме невозможно выполнить классическими методами современного математического анализа. Классики математических наук XVII—XX вв., в том числе Ньютон, Клеро, Даламбер, Эйлер, Лагранж, Лаплас, К. Якоби, Раус, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре и многие другие, внесли большой вклад в исследование проблемы n тел, но в связи с величайшими трудностями, которые встречаются при ее решении, история этой проблемы остается еще далекой от завершения и в наше время. Вместе с тем трудно назвать другую проблему математики и механики, которая породила бы такую большую литературу, как эта.

В 1921 г. Юрий Соколов, по предложению Д. А. Граве, приступил к изучению небесной механики, в том числе обширного классического научного наследия в решении проблемы n тел. Молодой ученый решил посвятить себя исследованиям в этой области, в дальнейшем занявшей центральное место в его научном творчестве.

Уже в 1921 г. была опубликована первая научная статья Ю. Д. Соколова «К движению материальной точки, которая притягивается к неподвижному центру и находится под действием пертурбацийной силы», положившая начало его многочисленным публикациям в этой области. Обращает на себя внимание тот факт, что уже в своей первой работе Ю. Д. Соколов проявил необычный талант и научную зрелость, установив ошибочность метода, которым пользовался Лагранж при исследовании данного вопроса. Существенно изменив методику исследования, Ю. Д. Соколов получил полное правильное решение поставленной задачи.

К этому периоду относится начало систематической переписки Ю. Д. Соколова с наиболее выдающимися специалистами в области проблем n тел — Ж. Шази, П. Пэнлеве, К. Сундманом, Т. Леви-Чивита и др.

15 апреля 1929 г. на заседании Комиссии по присуждению ученых степеней Ю. Д. Соколов защитил докторскую диссертацию на тему «Условия общего соударения трех тел, которые взаимно притягиваются по закону Ньютона». В протоколе комиссии, в частности, отмечалось: «Постановили: взвесив все, именно защиту ученой степени Ю. Соколова и ответы на вопросы, поставленные ему в порядке диспута, также прежние работы диссертанта, комиссия постановляет единогласно считать защиту блестящей и присуждает ему, Ю. Соколову, ученую степень доктора математики» [1].

В 1930 г. докторская диссертация Ю. Д. Соколова была удостоена первой премии Комиссии премирования

---

[1] Протокол заседания комиссии от 15 апреля 1929 г. — Архив Ю. Д. Соколова. Протокол подписан председателем заседания академиком Д. А. Граве и секретарем П. М. Лозиевым.

Доктор математических наук Ю. Д. Соколов,
1929 г.

научных работ при Народном комиссариате просвещения Украинской ССР. Ученый был утвержден в степени доктора физико-математических наук и ему присвоили звание профессора.

Докторская диссертация, содержащая множество новых результатов большого значения и ряд широких обобщений некоторых известных теорем, принесла Соколову мировую известность. Она поставила его в один ряд с крупнейшими специалистами в области небесной механики того времени: Т. Леви-Чивита, Ф. Мультоном, Т. Д. Бирхгофом, К. Ф. Сундманом, Ж. Шази, А. Уиттнером, К. Л. Зигелем.

В декабре 1933 г. на базе физико-математического отдела был учрежден Институт математики АН УССР. Его первым директором стал академик Д. А. Граве. Ю. Д. Соколов явился одним из основателей нового института. Ученый последовательно занимал в нем должности старшего научного сотрудника, заведующего отделами механики, гидромеханики, дифференциальных уравнений. В феврале 1939 г. Ю. Д. Соколов был избран членом-корреспондентом АН УССР. Проводя большую общественную и научно-организационную работу, он неоднократно избирался в состав Бюро Отделения физико-математических наук АН УССР.

Во время временной оккупации Украины (в 1941-1943 гг.) Ю. Д. Соколов в связи с тяжелой болезнью матери (инфаркт миокарда) и по состоянию своего здоровья был вынужден остаться в Киеве. В этот период ученый проявил себя как советский гражданин и патриот. Поддерживая активную связь с местными партизанами, Соколов оказывал им посильную помощь. Так, по заданию 4-го Украинского партизанского батальона он укрывал на территории обсерватории приговоренных к расстрелу патриотов, прятал подпольную радиоустановку. Ему принадлежит большая заслуга сохранения от уничтожения и ограбления Киевской астрономической обсерватории, директором которой он являлся. В условиях смертельной опасности Ю. Д. Соколов распорядился упаковать для отправки в Германию вместо ценных книг... обыкновенные кирпичи. Только освобождение Киева советскими войсками помешало немцам раскрыть этот смелый подлог. За проявленный героизм, патриотизм и мужество в борьбе с оккупантами Ю. Д. Соколов был награжден медалью «За оборону Киева».

В ноябре 1943 г. Ю. Д. Соколов продолжил научную работу в Институте математики АН УССР. В 1951 г. из печати вышла его монография «Особые траектории системы свободных материальных точек». Ю. Д. Соколов обобщил и систематически изложил в ней свои исследования по аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений в применении к решению проблемы n тел. Эти исследования ученый проводил в течение 30 лет начиная с 1921 г.

1951 г. ознаменовал собой начало нового периода в научном творчестве Ю. Д. Соколова. Он обращается к исследованиям в области фильтрации грунтовых вод. С 1951 по 1967 г. ученый занимается развитием предложенного им эффективного приближенного метода решения широкого класса функциональных уравнений. Результаты этих исследований были обобщены и систематизированы в монографии «Метод осреднения функциональных поправок» (1967 г.). Правда, в последние годы своей жизни Ю. Д. Соколов вновь возвращается к своей излюбленной тематике и заканчивает исследования особых траекторий неограниченного расстояния в обобщенной задаче трех тел в случаях прямолинейного и плоского движений.

Ю. Д. Соколов — заведующий отделом механики Института математики АН УССР, 1949 г.

Ю. Д. Соколову принадлежит 99 публикаций, в том числе 95 статей, две монографии и два учебных пособия. Из 95 статей 64 посвящены аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики и решению проблемы n тел, 11 — построению новых эффективных методов решения дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений, 16 — развитию теории фильтрации грунтовых вод, 2 — динамике шахтных подъемных канатов, 6 — истории математики и механики.

Работы Ю. Д. Соколова вызвали огромный поток исследований отечественных и зарубежных ученых в соответствующих областях математики и механики, насчитывающий более 150 названий. В них ученики и последователи Ю. Д. Соколова развили и обобщили результаты и методы, установленные им в своих работах.

Ю. Д. Соколов был не только крупным ученым-исследователем, он проводил большую научно-организационную, педагогическую и общественную работу. С 1929 по 1934 г. Ю. Д. Соколов заведовал кафедрой математики и механики Киевского рабочего машиностроительного института, с 1930 по 1938 г. — кафедрой математики Киевского политехнического института и Института кожевенной промышленности, с 1930 г. до конца своей жизни — кафедрой математики Киевского инженерно-строительного института, с 1937 до 1941 г. — кафедрой математики Киевского индустриального института, с 1943 по 1949 г. — кафедрой теоретической механики Киевского государственного университета.

И где бы ни работал ученый, он всегда уделял большое внимание рецензированию научных и учебно-методических работ — статей, дипломных работ, монографий, учебников, учебных пособий, докторских и кандидатских диссертаций. Ю. Д. Соколов неоднократно выступал как руководитель и официальный оппонент при защитах диссертаций.

Огромную роль в формировании молодых научных кадров Киева сыграл республиканский семинар, организованный Ю. Д. Соколовым в 1928 г. Основные направления работы этого семинара были связаны с аналитической и качественной теорией дифференциальных уравнений с применением к проблеме n тел, теорией дифференциальных уравнений с частными производными, приближенными методами решения функциональных уравнений, теорией теплопроводности, теорией фильтрации грунтовых вод, динамикой шахтных подъемных канатов и со многими другими разделами прикладной математики и механики. В результате этого семинара было подготовлено и успешно защищено большое число диссертаций, опубликованы многочисленные научные статьи и монографии, воспитано много молодых ученых и преподавателей в разных областях математики и механики. Ближайшими учениками Ю. Д. Соколова являются С. Ф. Фещенко, Б. Н. Фрадлин, А. Л. Склянский, П. Ф. Фильчиков, А. Ю. Лучка, М. С. Курпель, В. И. Тивончук, В. М. Шевело и др. Многие из них, в свою очередь, стали известными учеными.

Авторитет Ю. Д. Соколова среди встречавшихся с ним людей был очень велик. Учеников и сотрудников ученого поражала и привлекала необыкновенно яркая, неповторимая индивидуальность его личности, его простое, вдумчивое отношение к человеку. Отсюда и глубокое влияние, которое оказывал Ю. Д. Соколов на свое окружение. Он был строгим и требовательным, но вместе с тем принципиальным и справедливым наставником. Ю. Д. Соколов многим казался величественным носителем таинств науки. Но ученый никогда не подавлял собеседников этой «величественностью». Наоборот, он всегда держался со всеми доброжелательно и приветливо.

За выдающуюся научную, педагогическую и общественную деятельность Ю. Д. Соколов получил свыше 25 премий, знак «Отличник Наркомстроя СССР» (1940 г.), во многих институтских газетах Киева ему выносились благодарности за плодотворную работу по воспитанию высококвалифицированных инженерных и научных кадров.

Советское правительство высоко оценило научную, научно-организационную и педагогическую деятельность Юрия Дмитриевича Соколова, наградив его в связи с 70-летием орденом Трудового Красного Знамени.

Ю. Д. Соколов был женат (1923 г.) на Марии Александровне Курик-Пиншечиской, умершей в 1963 г. Смерть жены тяжело сказалась на состоянии здоровья ученого. Болезнь не оставляла его уже до конца жизни.

Незадолго перед смертью Ю. Д. Соколов задумал написать монографию, в которой были бы систематически изложены его исследования, относящиеся к нерегулярному движению системы свободных материальных точек в случае их бесконечного отклонения одна от другой. К сожалению, он успел закончить только два фрагмента этой книги.

2 февраля 1971 г. Юрия Дмитриевича Соколова не стало.

Педагог

Ю. Д. Соколов был выдающимся педагогом. Более 40 лет отдал он различным вузам Киева, где с успехом читал лекции по высшей математике и теоретической механике, вел различные спецкурсы этих дисциплин и руководил соответствующими кафедрами. Огромная эрудиция и культура ученого, умение излагать материал отличным литературным языком и находить полный контакт с аудиторией превращали каждую его лекцию в праздник для студентов. Много аспирантов и преподавателей приходили слушать блестящие лекции своего учителя не только из желания углубить свое математическое образование, но и из стремления научиться у него педагогическому мастерству.

Все, кто слушал лекции Ю. Д. Соколова, вспоминают о них с большим удовлетворением и благодарностью. Лаконичность, предельная математическая строгость и пунктуальность сочетались в них с доступной формой изложения, с наглядностью и доходчивостью. Соколов одинаково хорошо чувствовал студенческую аудиторию технического вуза и механико-математического факультета университета: высокий уровень культуры его лекций никогда не вступал в конфликт с инженерной направленностью слушателей в первом случае и всегда соответствовал большим «математическим требованиям» — во втором. В значительной мере это достигалось благодаря использованию примеров и иллюстраций из различных областей техники и естествознания, математики, физики и механики. Он имел редкую способность различать, какие места в лекции сложны для восприятия студентов, а какие, наоборот, просты. Вот почему на лекциях Соколова всегда существовала обратная связь. Ученый хорошо чувствовал лекционное время и никогда не знал, что такое «цейтнот».

Ю. Д. Соколов утверждал, что курсы высшей математики и теоретической механики подобны тропинке, ведущей через трясину: сойдешь с тропки — завязнешь в болоте. Однако сам он находил и прокладывал все новые дорожки, по которым неуклонно вел своих слушателей к вершинам знания.

В каком бы вузе ни возглавлял Ю. Д. Соколов кафедру высшей математики, он всегда искал пути к повышению ее роли в общем педагогическом процессе. В этой связи он придавал большое значение научно-методической работе. На заседаниях кафедры систематически обсуждались методические доклады по наиболее сложным в педагогическом отношении разделов учебной программы. Замечания и советы Соколова, высказанные на этих обсуждениях, сыграли существенную роль в повышении педагогического мастерства преподавателей.

Ученый и сам неоднократно выступал с методическими докладами по важным вопросам курса высшей математики: непрерывность функции в точке, производная и ее геометрический и физический смысл, определенный интеграл, обыкновенные дифференциальные уравнения и их интегрирование, бесконечные ряды, кратные и криволинейные интегралы и т. п. Это были образцовые сообщения с отличными комментариями и экскурсами в историю предмета, воспитавшие не одно поколение преподавателей, многие из которых со временем стали известными профессорами математики. Большое внимание Ю. Д. Соколов уделял консультациям преподавателям, научным работникам, аспирантам, инженерам и студентам.

С исключительной самоотдачей относился ученый к воспитанию молодых педагогических, научных и инженерных кадров. На протяжении многих лет Ю. Д. Соколов читал для аспирантов Инженерно-строительного института и механико-математического факультета специальные курсы по избранным разделам высшей математики и теоретической механики: Линейные разностные уравнения и их применение; Элементы теории функций комплексной переменной; Элементы номографии; Основные дифференциальные уравнения математической физики; Некоторые задачи качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений динамики (КГУ).

Ю. Д. Соколов хорошо понимал, что быстрое развитие науки и техники требует от будущего инженера и научного работника умения успешно решать все более сложные задачи, выдвигаемые временем. Поэтому, студент, будущий командир производства, по мнению ученого, должен обладать большим математическим образованием, но один лишь общий курс высшей математики не в состоянии дать его. По инициативе Ю. Д. Соколова на некоторых факультетах инженерно-строительного института еще в 1964/65 г. была расширена программа курса высшей математики путем введения спецкурсов по теории вероятностей и математической статистике, математическим основам сеточного графика и его приложениям в строительстве. С этой целью Ю. Д. Соколов опубликовал учебные пособия «Линейные разностные уравнения (с примерами простейших применений)» (1935) и «Элементы теории функций комплексной переменной» (1954).

На протяжении всей своей жизни Ю. Д. Соколов считал, что ученые должны параллельно разрабатывать большие общетеоретические научные проблемы и проблемы, которые непосредственно направлены на повышение технического прогресса человечества. Эту точку зрения подтверждает вся научно-педагогическая деятельность ученого.

Переходя к общей характеристике педагогических идей профессора Ю. Д. Соколова, рассмотрим некоторые особенности его курсов по высшей математике и теоретической механике, и прежде всего общего курса высшей математики. Этот курс Ю. Д. Соколов читал много лет в разных технических вузах Киева. Еще в первые годы своей педагогической деятельности ученый не был удовлетворен учебным курсом аналитической геометрии, считая, что последний читается не на достаточно высоком уровне. Для того чтобы решить эту проблему, он предлагал перенести некоторые разделы этого курса в программу средней школы, а в институте предварительно знакомить студентов с основными вопросами функциональной зависимости. Центральными теоремами дифференциального исчисления, по мнению Ю. Д. Соколова, являлись теоремы Роля и Лагранжа, с которыми ученый связывал ряд вопросов курса. Большое внимание он уделял усвоению студентами таблицы простейших интегралов. При этом он всегда подчеркивал роль теоремы Ньютона—Лейбница, связывающей понятия определенных и неопределенных интегралов. Соколов постоянно предупреждал о том, что метод подстановки при вычислении определенных интегралов требует вычисления новых пределов. Это обстоятельство ученый образно называл «незабудка». Перед изложением критериев сходимости рядов Даламбера и Коши он считал необходимым ознакомить студентов с соответствующими теоремами Даламбера и Коши. Соколов подробно останавливался на ряде Тейлора (Маклорена), получая его с помощью формулы Лагранжа.

Мы привели точки зрения профессора Ю. Д. Соколова на некоторые конкретные вопросы общего курса высшей математики в технических вузах для того, чтобы подчеркнуть оригинальность составления этого курса ученым, его продуманность общей и частных методик, стремление к рациональной строгости и вместе с тем к ясности, наглядности изложения. Соколов в зависимости от аудитории и специфики вопросов курса успешно пользовался как индуктивным, так и дедуктивным методом. Его всегда волновало несовершенство изложения отдельных разделов и проблем высшей математики в официальных учебниках. Он делал все возможное, чтобы в его курсе и курсах сотрудников его кафедры методические недочеты учебников и учебных пособий были устранены.

Общий курс теоретической механики, который профессор Ю. Д. Соколов прочитал на механико-математическом факультете Киевского университета, позволяет судить о взглядах ученого на изложение этого предмета, на основные понятия, аксиомы, принципы, теоремы, методы исследования теоретической механики. Лекции Ю. Д. Соколова по теоретической механике характеризуются стройностью композиции и высоким уровнем теоретического и методического построения. Он был горячим противником формализма при изложении естественных наук, к которым относится и теоретическая механика. Пользуясь современным математическим языком и символикой, Соколов всегда подчеркивал физический смысл той или другой теоремы. В каждой формуле, в каждой формулировке, в каждом рассуждении он видел прежде всего теорему механики и поэтому стремился строить соответствующие фразы так, чтобы математическая символика не заслоняла собой механической сути вопроса.

Известно, что трудности вызывает построение аксиоматики теоретической механики, особенно в свете современного учения об аксиоматике в соответствии с исследованиями Курта Гёделя. Достаточно отметить, что до настоящего времени в этой области после классических работ Г. Гамеля 1909—1927 гг. мы имеем очень мало фундаментальных исследований. Ю. Д. Соколов с некоторым чувством собственной вины сообщал об этом студентам на вступительной лекции. При этом он замечал, что ему кажется вообще невозможным построить достаточно совершенную систему аксиом теоретической механики, которая удовлетворяла бы всем известным формальным требованиям к такой системе, даже оставляя в стороне такие ее разделы, как теории трения и удара.

Законы Ньютона он излагал не в традиционном стиле классических учебников по теоретической механике (П. Аппеля, Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Г. К. Суслова), а в соответствии с физическими основами теоретической механики. Большое внимание в своем курсе Ю. Д. Соколов уделял общим принципам — дифференциальным и интегральным, границам их применимости и взаимосвязи. Он подчеркивал, что распространенная в учебниках теоретической механики постановка вопроса о доказательстве того или иного принципа не имеет смысла: можно говорить только об эквивалентности между принципами и динамическими (статическими) уравнениями механики. Рассматривая основные теоремы динамики, ученый обращал внимание на их ограниченность по сравнению с динамическими уравнениями движения системы. Ю. Д. Соколов, насколько нам известно, первым обратил внимание на косвенную зависимость движения центра масс системы материальных точек от внутренних сил этой системы.

Большой удельный вес в курсе Ю. Д. Соколова занимало учение о первоосновных понятиях динамики несвободной материальной системы — связей, возможных перемещений, изохронных и неизохронных вариаций, истинных и квазикоординат. В отличие от распространенной традиции наряду с системами, ограниченными удерживающими связями, Соколов рассматривал и динамику систем с неудерживающими связями, обращая внимание на известную в этом изложении ошибку М. В. Остроградского, которая сохранилась в учебнике Г. К. Суслова. Ю. Д. Соколов рассматривал в своем курсе также системы с неидеальными связями, в частности системы с трением и сервосвязями.

Наряду с традиционными разделами курса теоретической механики — теории систем Гамильтона, динамики твердого тела, теории малых колебаний — Ю. Д. Соколов включил в него элементы теории устойчивости, динамики неголономных систем, механику систем переменного состава. Отметим, что в 40-е годы, когда он читал этот курс, включение указанных новых разделов было весьма прогрессивным. Оно явилось предвидением того, что в наше время является нормой образования на механико-математических факультетах университетов.

Ю. Д. Соколов не просто читал студентам лекции, он как бы беседовал с ними, критически обсуждая соответствующие вопросы. Для того чтобы дать представление о критическом подходе ученого к своему курсу теоретической механики, приведем извлечение из одной его лекции по теории устойчивости. После сообщения студентам о том, что за последние десятилетия теория устойчивости обогатилась новыми исследованиями, которые обобщают и дополняют результаты А. М. Ляпунова, он сказал: «Встречается, однако, что некоторые авторы (к тому же очень выдающиеся), упуская из внимания общность теорем, которые доказаны Болем и Коттоном, получают обобщения, так сказать, иллюзорного характера. Так, Н. Г. Четаев, рассматривая в одной из своих статей систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$P_{ik}(t) = a_{ik} + \omega_{ik}(t);$$

a_{ik} — постоянные; $\omega_{ik}(t)$ — непрерывные при $t \geqslant T$ и стремятся к нулю при $t \to +\infty$, доказывает теорему: если корни характеристического уравнения $|a_{ik} - \lambda\delta_i^k| = 0$ имеют отрицательные действительные части, то решение $x_i = 0$ является устойчивым при $t \geqslant T$. Однако если переписать систему уравнений в данном случае в виде

$$\dot{x}_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(t)\, x_k,$$

то легко замечаем, что утверждение Н. Г. Четаева непосредственно вытекает из теоремы Боля—Коттона».

Весьма ценной чертой лекций Ю. Д. Соколова было комментирование всех классических результатов, с одной стороны, в плане ретроспекции, а с другой — с точки зрения современного состояния науки. Таким образом, в его изложении студент видел каждую теорему теоретической механики в процессе ее развития. Такой научно-исторический подход к педагогическому процессу, безусловно, является прогрессивным и имеет очень большое значение для наиболее полного формирования научного мировоззрения человека.

Профессор Ю. Д. Соколов считал, что теоретическая механика вместе с математикой и физикой представляет основу воспитания у студентов правильного диалектико-материалистического мировоззрения. Весь курс Юрия Дмитриевича был выдержан в духе марксистско-ленинской методологии. Ю. Д. Соколов с возмущением отмечал, что зарубежные авторы в своих исследованиях часто игнорируют исследования русских и советских ученых, даже таких корифеев, как М. В. Остроградский, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский и др., неправильно приписывая их результаты ученым других стран. Систематически подчеркивая необходимость объективного изложения истории развития науки, он устанавливал приоритет отечественных ученых в постановке и решении ряда соответствующих проблем механики.

В 1935—1941 и 1943—1949 гг. Ю. Д. Соколов читал для аспирантов и студентов старших курсов механико-математического факультета Киевского университета лекции по избранным вопросам аналитической теории дифференциальных уравнений динамики. Этот специальный курс является естественным дополнением к общему курсу теоретической механики. Он состоял из вступительной части и трех тем: 1) Особые точки интегралов динамики; 2) Особенности движения системы точек, которые взаимно притягиваются (отталкиваются) по произвольному закону; 3) Теория соударений в классической задаче трех тел. В этом курсе излагались основные результаты, полученные А. Пуанкаре, П. Пэнлеве и самим Ю. Д. Соколовым в области качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений динамики, и слушатели, можно сказать, подводились к переднему краю науки и приобщались к таинствам научно-исследовательской лаборатории.

В жизни Ю. Д. Соколова педагогическая и научная стороны его деятельности органически объединялись и дополняли друг друга, и трудно сказать, какой из них он отдавал предпочтение. Скорее всего, их можно рассматривать как «сиамских близнецов», которые не могут существовать раздельно, одна без другой. За несколько лет до своей кончины Ю. Д. Соколов в разговоре с академиком Г. Н. Савиным и профессорами Т. В. Путята и Б. Н. Фрадлиным сказал: «Теперь я могу спокойно умереть, так как оставляю после себя своих учеников, которые будут продолжать мою работу».

Трудно переоценить вклад Юрия Дмитриевича в развитии математических наук и дело подготовки научно-инженерных кадров. Этой благородной деятельности он отдал всю свою жизнь.

Ученый

Проблема *n* тел в трудах Ю. Д. Соколова

Развитие аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики

Еще И. Ньютон в своем знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» рассмотрел задачу о центральном движении и пришел к замечательным результатам. Они приводятся в курсах теоретической механики в современных обозначениях.

Известно, что задача о движении двух материальных точек под действием сил взаимного притяжения или отталкивания сводится к задаче о движении одной материальной точки, притягивающейся или отталкивающейся от некоторого неподвижного центра, если сила зависит только от разности координат точек системы. Дифференциальные уравнения этого движения в полярных координатах r, θ можно представить в виде

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \tag{1}$$

где $f=f(r, \theta)$ представляет собой проекцию на направление радиуса-вектора действующей на движущуюся точку центральной ускорительной силы и за полюс принят неподвижный силовой центр. Из (1) немедленно получаем интеграл площадей

$$r^2\dot{\theta} = c = \mathrm{const} \tag{2}$$

и дифференциальное уравнение движения точки

$$\ddot{r} = f + c^2 r^{-3}. \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать центральную силу $f=f(r)$, которая является аналитической функцией при всяком действительном положительном значении r в интервале $0 < r < \infty$, принимающей при этих значениях аргумента действительные значения, и может иметь особенности при $r=0$ и $r=\infty$. В этом случае задача разрешима в квадратурах.

Особый интерес представляет центральная сила

$$|f(r)| = \mu r^n, \tag{4}$$

где n — целое положительное или отрицательное число. Ньютон рассматривает случаи $n=1$, -2, -3, которые решаются в круговых функциях, и показывает, что в случае обращения тела по эллипсу под действием центральной силы, направленной к его центру, $n=1$. Если же тело обращается по коническому сечению под действием силы, направленной к его центру, то $n=-2$. В соответствии с этим результатом Ньютон строит третью книгу своего сочинения и формулирует закон всемирного тяготения.

Ж. Бертран (1877) показал, что если материальная точка под действием силы, зависящей только от ее положения, описывает коническое сечение при любых начальных условиях, то направление силы проходит через неподвижную точку. Он же обращает внимание на одну задачу, которая формулируется следующим образом: зная, что планеты описывают конические сечения, найти выражение центральной силы, движущей эти планеты. При этом Бертран заявляет, что имеет два решения этой задачи ($n=1$, $n=-2$), и спрашивает, какие еще существуют решения? Задачу Бертрана решили В. Г. Имшенецкий (1879), Г. Дарбу (1877) и Г. Альфен (1877). Они доказали, что указанные Бертраном два закона сил являются единственными, при которых траекториями будут конические сечения при любых начальных условиях.

В другой работе (1875) Бертран приходит к выводу, что указанные им законы единственные, при которых орбиты являются замкнутыми. Г. Кёниг (1889) доказал, что эти же законы единственные, при которых материальная точка описывает алгебраические траектории при всех начальных условиях. В одной из своих работ (1908) Ф. Гриффин показал, что единственный закон, который дает эллиптическую орбиту, когда сила является функцией только расстояния, принимающей действительные значения во всей плоскости и не обращающейся в нуль в начале координат, есть закон Ньютона.

А. Лежандр (1825) положил начало изучению случаев, когда квадратуры приводят к эллиптическим функциям. Задача о центральном движении может быть решена в эллиптических функциях, если выражение

$$\psi(r) = 2h - 2\Pi - c^2 r^{-2}$$

является полиномом третьей или четвертой степени. Для центральной силы (4) это может быть при $n=0$, 3, 5, -4, -5, -7. Этот вопрос подробно исследовал И. Штадер (1855). Рассматривая центральную силу вида (4) при $n=$ $=-3$, -4, -5, -6, -7, он после интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения нашел характер искомых траекторий. В заключение Штадер исследовал случай, когда n — произвольное целое отрицательное число.

Специальную задачу изменения силы обратно пропорционально пятой степени расстояния с исчерпывающей полнотой решил В. Макмиллан (1908). При этом он пользуется эллиптическими функциями Вейерштрасса. Рассматривая апсидальные, нулевые и бесконечные точки, Макмиллан дает полную классификацию действительных орбит, которые получаются как функции некоторого определенного параметра γ. Когда $\gamma = -\infty$, траектория представляет собой прямую, проходящую через начальную точку и силовой центр. При $-\infty < \gamma < 0$ могут быть две орбиты, одна из которых заключена внутри окружности, а другая расположена вне ее. При замене радиуса-вектора r на r^{-1} внешняя орбита переходит во внутреннюю. Внутренняя орбита состоит из периодически повторяющегося ряда петель, проходящих через центр и касающихся окружности. Если $\gamma \to 0$, то петли внутренней траектории расширяются снаружи и приближаются к окружности, диаметром которой является отрезок прямой, соединяющей начальную точку с началом координат. Внешняя орбита очень быстро выпрямляется и приближается к прямой линии, касающейся окружности в начальной точке. Когда γ переходит через нуль, отталкивающая сила, под влиянием которой описывалась внешняя орбита, становится притягивающей, радиус кривизны меняет знак и орбита изменяет свое направление на противоположное. При изменении γ от 0 до 1 кривизна траектории изменяется. Когда $\gamma=1$, внешняя орбита превращается в гиперболическую спираль, асимптотически навертывающуюся на окружность с внешней стороны. Петли внутренней орбиты непрерывно расширяются, и при $\gamma=1$ внутренняя орбита становится гиперболической спиралью, асимптотически навертывающейся на окружность с внутренней стороны. Предельное положение достигается только в том случае, если начальная точка не является апсидой. Внешняя орбита получается для положительных значений полярного угла, а внутренняя — для отрицательных. Если $\gamma > 1$, то траектория выпрямляется с внешней стороны. Когда $\gamma=+\infty$ кривая превращается в прямую линию.

Центральные силы более широкого класса рассматривает Г. Схоутен (1887). Обозначая через m и n целые числа, он записывает закон центральной силы с помощью формулы

$$f=\alpha r^{-m}+\beta r^{n},$$

Оказывается, что задача решается в круговых и эллиптических функциях, когда

$$\begin{array}{llllllllll}
m=0, & n=-3, & -2, & 0, & 1; \\
m=2, & n=-5, & -4, & -3, & -2, & 0, & 1; \\
m=3, & n=-7, & -5, & -4, & -3, & -2, & 0, & 3, & 5; \\
m=4, & n=-5, & -4, & -3, & -2; \\
m=5, & n=-7, & -5, & -4, & -3, & -2, & 1; \\
m=7, & n=-7, & -5, & -3, & 1.
\end{array}$$

В. Нобиле (1903) изучил движение материальной точки под действием центральной силы (4) при условии, что n — отрицательное целое или дробное рациональное число. Он показал, что решение выражается в виде абелевых интегралов при

$$n=-2 \qquad -3, \quad -4, \quad -5, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{5}{2}.$$

Несмотря на то что при сделанных предположениях относительно характера функции $f(r)$, интегрирование дифференциального уравнения движения материальной точки в поле центральной силы приводит к простым квадратурам, выразить полярные координаты в известных функциях времени удается только в весьма ограниченном числе случаев. Поэтому подробное изучение возможных форм траекторий движущейся точки может быть выполнено лишь на основании качественного исследования уравнений движения.

Г. Схоутен (1888) и Д. Кортевег (1884) дали классификацию траекторий центрального движения в зависимости от поведения функций $f(r)$, $r^3 f(r)$, $\psi(r)$. Они показали, что в рассмотренных ими 4 случаях получаем следующие виды полутраекторий: 1) отрицательная полутраектория с перицентром; 2) положительная полутраектория с апоцентром; 3) отрицательная полутраектория в виде спирали с конечным числом петель, оканчивающаяся в центре; 4) отрицательная полутраектория, асимптотически приближающаяся к центру в виде спирали с бесконечным числом петель; 5) положительная полутраектория, простирающаяся на бесконечность в виде спирали с бесконечным числом петель; 6) положительная полутраектория, простирающаяся на бесконечность в виде ветви параболического типа; 7) положительная полутраектория, простирающаяся на бесконечность в виде ветви гиперболического типа с асимптотой, не проходящей через центр; 8) положительная полутраектория, простирающаяся на бесконечность в виде ветви гиперболического типа с асимптотой, проходящей через центр; 9) отрицательная полутраектория в виде спирали с конечным числом петель, оканчивающаяся на круговой орбите; 10) положительная полутраектория в виде спирали с конечным числом петель, оканчивающаяся на круговой орбите.

Целая траектория состоит из отрицательной и положительной полутраекторий. Эта классификация охватывает 18 типов траекторий, три из которых соответствуют случаю нарушения аналитического характера функции $f(r)$ около некоторого конечного значения расстояния r.

Мы рассмотрели основные результаты, полученные предшественниками Ю. Д. Соколова при исследовании задачи двух тел. Перейдем теперь к изложению истории проблемы трех и более тел, также начинающейся с классических исследований Ньютона.

Если движение системы трех тел отнести к неподвижной системе координат, то она определяется системой дифференциальных уравнений 18-го порядка. Если же это движение рассматривать по отношению к системе отсчета с началом в одном из тел (или в центре инерции системы), движущейся с ним поступательно, то оно может быть описано системой дифференциальных уравнений 12-го порядка. Постановка этой задачи принадлежит Ньютону (1687). Она возникла в связи с необходимостью изучения движения планет (в частности, Земли и Луны) вокруг Солнца. Очевидно, Ньютону уже были известны шесть интегралов количества движения, которые дают возможность определить без интегрирования поступательное движение системы координат вместе с одним из тел (например, Солнцем, если рассматривается движение Солнца, Земли и Луны). Ньютон владел общим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений. В частности, этот метод относится и к системе дифференциальных уравнений задачи трех тел.

Сущность этого метода заключается в разложении искомых функций в ряд по степеням достаточно малых интервалов времени и построения системы интегральных кривых из соответствующих элементов. Однако следует заметить, что подобные ряды должны сходиться очень медленно. Все известные до сих пор методы численного интегрирования можно рассматривать как различные модификации метода Ньютона. Естественно, что ни сам Ньютон, ни его последователи не могли применить этот метод с достаточной эффективностью к решению задачи трех тел, ибо он приводит к исключительно трудоемким вычислениям, доступным лишь машинной технике. В настоящее время подобные трудности преодолены с помощью мощных вычислительных машин. Так, в 1950 г. при помощи электронной машины было осуществлено решение задачи шести тел (Солнца, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона), т. е. проинтегрирована соответствующая система дифференциальных уравнений 30-го порядка, описывающая движение этих пяти больших планет относительно Солнца. При этом вычисление координат указанных планет выполнено с 14 знаками для периода с 1650 по 2060 г. Результаты вычислений и наблюдений полностью совпали.

Л. Эйлер (1744, 1765, 1772) уже знал все десять интегралов (шесть интегралов количества движения, три интеграла кинетического момента и интеграл энергии), допускаемых задачей трех тел, и, безусловно, размышлял о возможности их использования для снижения порядка соответствующей системы дифференциальных уравнений движения. Естественно, что, стремясь прийти к положительному результату, он сузил постановку задачи и прежде всего рассмотрел (1765) движение по одной прямой системы трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Эту, так называемую прямолинейную, задачу трех тел Эйлер привел к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и квадратуре. Он показал, что в случае, когда отношения взаимных расстояний между материальными точками во время их движения остаются постоянными (такое движение называется гомографическим), указанная система дифференциальных уравнений интегрируется в конечном виде в элементарных функциях. При этом отношение двух меньших расстояний определяется из алгебраического уравнения пятой степени, коэффициенты которого представляют линейные однородные функции от масс точек. Это уравнение, как доказал Эйлер, всегда имеет единственный положительный корень. Случай, исследованный Эйлером, является первым по времени случаем интегрируемости задачи трех тел.

Фактическая реализация идеи о редукции системы дифференциальных уравнений движения трех тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, с помощью десяти классических интегралов принадлежит Лагранжу (1772). Он доказал, что взаимные расстояния между материальными точками можно определить путем решения системы трех дифференциальных уравнений, из которых два — второго и одно — третьего порядка. Так как эти уравнения содержат постоянные интегралов площадей и энергии, то их интегрирование связано с девятью произвольными постоянными. Если взаимные расстояния будут найдены, то определение положения плоскости треугольника, образуемого тремя телами, в пространстве и ориентация этого треугольника в своей плоскости на основании шести интегралов количества движения легко приводятся к квадратурам, содержащим еще три произвольных постоянных. Принимая во внимание, что полученные дифференциальные уравнения не содержат явно времени, и исключая dt, получим систему шестого порядка.

Выше уже было указано, что для прямолинейной задачи трех тел Эйлер в 1765 г. нашел интегрируемый частный случай. В рассматриваемом мемуаре 1772 г. Лагранж максимально упростил систему дифференциальных уравнений задачи в пространственном случае, приведя ее на основании известных десяти первых интегралов к седьмому (фактически шестому, если исключить время) порядку, и остановился перед непреодолимыми трудностями ее интегрирования в общем виде. В связи с этим он обратил внимание на решение более частной задачи, когда три тела движутся в одной плоскости.

Для плоской задачи трех тел Лагранжу удалось найти точное решение в двух частных случаях: 1) когда все три точки в начальный момент находятся на одной прямой, начальные скорости ограничены определенным условием и отношение двух взаимных начальных расстояний является корнем некоторого (имеющего лишь один действительный корень) алгебраического уравнения пятой степени с коэффициентами, зависящими только от линейных комбинаций масс; 2) когда все три точки в начальный момент находятся в вершинах равностороннего треугольника и их относительные скорости имеют определенные начальные значения.

Лагранж показал, что в этих случаях тела постоянно сохраняют соответственно прямолинейную (коллинеарную) и равностороннюю (эквидистантную) конфигурации и два из них движутся относительно третьего по коническим сечениям, причем отношения начальных взаимных расстояний не изменяются во время движения, т. е. как и в случае Эйлера, движение является гомографическим.

Открытые Лагранжем коллинеарный и эквидистантный интегрируемые случаи приводят к понятию либрационных точек. Оказывается, что в плоскости движения трех тел $m_1 m_2 m_3$ существуют такие пять точек L_i (точки либрации), три из которых лежат на прямой $m_1 m_2$ (слева от m_1, между m_1 и m_2 и справа от m_2), а две — на вершинах равносторонних треугольников с основанием $m_1 m_2$ таким образом, что если материальная точка m_3 будет помещена в одной из этих точек, то при определенных начальных условиях система трех тел при своем движении сохранит относительную конфигурацию.

Лагранж рассматривал открытый им эквидистантный случай как один из математических курьезов, исследование которого представляет интерес лишь с точки зрения чистой любознательности, и считал, что в действительности он не может быть реализован. Придерживаясь того же взгляда, П. Лаплас (1824) сконструировал фантастическую модель указанного случая Лагранжа. «Кое-кто из сторонников конечных причин, — пишет он, — воображал, что Луна была дана Земле, чтобы ее освещать по ночам. В таком случае природа не достигла своей цели, ибо мы часто оказываемся зараз лишенными и света Солнца, и света Луны. Для того чтобы добиться указанного, было бы достаточно вначале поместить Луну в оппозицию с Солнцем в самой плоскости эклиптики на расстоянии от Земли, равным сотой части расстояния Земли от Солнца, и сообщить Луне и Земле параллельные скорости, пропорциональные расстояниям от Солнца. Тогда Луна была бы непрерывно в оппозиции с Солнцем и описывала бы вокруг него эллипс, подобный эллипсу земной орбиты. Оба светила следовали бы одно за другим на небе над горизонтом, а поскольку Луна на этом расстоянии не затмевается, постольку ее свет постоянно заменял бы свет Солнца».

По поводу приведенного рассуждения Лапласа Ж. Лиувилль (1845) замечает: «Для совершенной точности высказанного предложения следовало бы потребовать строгого выполнения соотношения между массами. Кроме того, никакая возмущающая причина не должна была бы впоследствии нарушать движение, чего допустить невозможно». При наличии возмущающих сил конфигурация Солнце—Земля—Луна не сохранялась бы, за исключением случая, когда решение Лагранжа устойчиво. Но Лиувилль (1845) доказал, что оно устойчивым не является (см. ниже).

Однако Лаплас настолько высоко оценивал результаты, полученные Эйлером и Лагранжем, что обобщил их решения (1805) на задачу о движении трех тел под действием взаимного притяжения пропорционально любой степени расстояний (для коллинеарного случая) и любой функции взаимных расстояний (для эквидистантного случая).

В связи со случаями интегрируемости, указанными Лагранжем, заметим, что в 1906—1950 гг. была открыта группа 15 малых планет («Троянцев») — Ахиллес, Гектор, Нестор, Агамемнон, Одиссей, Аякс, Диомед, Антиох, Патрокл, Приам, Энней, Анхиз, Троил, 1945 SA, 1949 SB, которые вместе с Солнцем и Юпитером образуют в своем движении в пространстве приблизительно равносторонние треугольники, т. е. представляют собой действительную реализацию в нашей солнечной системе эквидистантного случая.

Лаплас указывает (1805), что если при взаимном притяжении пропорционально любой степени расстояния n материальных точек расположены на плоскости так, что равнодействующая сил, приложенных в каждой из точек, проходит через центр инерции системы, и процорциональны, так же как начальные скорости, соответствующим расстояниям точек до центра и если направления начальных скоростей одинаково наклонены к радиусам-векторам, то многоугольник, образованный взаимными расстояниями, останется себе подобным и точки будут двигаться вокруг центра инерции по подобным кривым так, как будто каждая из них притягивается к неподвижному центру. В дальнейших исследованиях имело большое значение открытое Лапласом понятие о неизменяемой плоскости.

В то время как Лагранж относит движение к системе координат, движущейся поступательно вместе с одной из точек материальной системы, К. Якоби (1843) за переносное движение принимает поступательное движение вместе с центром инерции системы трех точек. Пользуясь интегралами количества движения, Якоби свел задачу о движении трех тел относительно указанной системы координат к задаче о движении двух фиктивных материальных точек с определенными массами, находящихся под действием сил, для которых силовая функция зависит лишь от расстояний этих точек от начала координат и от их взаимного расстояния. При этом имеют место три интеграла площадей и интеграл энергии. С помощью этих первых интегралов Якоби, как и ранее Лагранж, понижает порядок системы дифференциальных уравнений задачи трех тел до шести. Исследование Лагранжа, как мы видели, основывается на изучении двух заданных материальных точек по отношению к системе референции с началом в третьей точке системы трех тел. Якоби же рассматривает движение двух указанных выше воображаемых материальных точек относительно координатной системы с началом в центре масс трех тел.

В методе Лагранжа силовая функция, как оказывается, имеет более простой вид, чем в методе Якоби, но зато выражения кинетической энергии и интегралов площадей в методе Лагранжа значительно более сложные. Выбор начала подвижной системы референции в центре масс материальной системы трех тел дает возможность Якоби весьма просто использовать шесть первых интегралов количества движения и тем самым привести первоначальную систему дифференциальных уравнений 18-го порядка, описывающую абсолютное движение трех тел, к системе 12-го порядка. С помощью трех интегралов кинетического момента и интеграла энергии эта система сводится к системе 8-го порядка, которая явно не содержит времени. Так как в эти уравнения время входит только посредством множителя dt, то его можно исключить, выбрав за независимую переменную одну из координат точек системы. Это позволяет уменьшить порядок системы дифференциальных уравнений задачи еще на единицу и получить систему уравнений 7-го порядка. Якоби (1843) показал, что если за одну из координат принять азимут φ одного из трех тел относительно произвольной неподвижной оси, а остальные координаты выбрать так, чтобы они определяли положение системы относительно плоскости с этим азимутом, то координата φ будет циклической и соответствующий ей первый интеграл (это будет один из интегралов площадей) даст возможность понизить порядок системы еще на одну единицу (это преобразование называется элиминацией узла) и окончательно получить систему дифференциальных уравнений, характеризующую движение трех тел, 6-го порядка.

В 1842—1843 гг. Якоби прочел в Кенигсбергском университете курс лекций по динамике, в которых содержится такое богатство оригинальных и глубоких идей и методов, что они до настоящего времени представляют для математиков и механиков большой интерес. В этих лекциях он изложил, в частности, свою знаменитую теорию последнего множителя, которая во многих случаях позволяет определить все независимые первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя эту теорию к системе n свободных материальных точек, дифференциальные уравнения движения которых не содержат явно переменной t (а этот случай мы встречаем как раз в задаче n тел), Якоби показывает, что с помощью известного здесь последнего множителя $M=1$ можно получить один первый интеграл.

В этих лекциях мы встречаем также обобщение так называемого фундаментального уравнения Лагранжа (данного последним для случая трех тел) на случай произвольной системы n свободных материальных точек. Это уравнение Лагранжа—Якоби устанавливает зависимость между второй производной от момента инерции системы относительно центральной оси, силовой функцией (которая предполагается однородной k-го порядка) и интегралом энергии в относительном движении. Из этого уравнения, как показывает Якоби, следует, что в случае $k=-2$ дифференциальные уравнения движения системы свободных материальных точек допускают новый (так называемый обобщенный интеграл Якоби), независимый от известных 10 классических, 11-й первый интеграл. Если силы взаимодействий между точками системы пропорциональны некоторой степени $2\alpha-1$ взаимных расстояний, то указанный случай имеет место при $\alpha=-1$, т. е. когда сила взаимодействия обратно пропорциональна третьей степени взаимных расстояний между точками системы.

Этот интеграл дает возможность Якоби найти новый случай интегрируемости для прямолинейной задачи трех тел, взаимодействующих между собой по указанному закону, обнаружить ряд свойств движения этих тел и понизить порядок системы дифференциальных уравнений в общем случае еще на одну единицу.

Интересно заметить, что на основании найденного им 11-го первого интеграла Якоби заключает, что если бы степенной закон взаимодействия с показателем —3 действовал в солнечной системе, то последняя распалась бы, ибо с возрастанием времени момент инерции $J \to \infty$, а следовательно, по крайней мере одно тело солнечной системы должно было бы удалиться на бесконечно большее расстояние от ее центра масс. Как отмечает Ю. Д. Соколов (1947), это заключение Якоби ошибочно, ибо при $J \to \infty$ следует лишь, что максимум взаимных расстояний точек системы неограниченно возрастает, причем этот максимум в каждый данный момент может представлять собой расстояние между различными точками.

Якоби (1836) впервые исследовал так называемую ограниченную задачу трех тел, которая имеет большое значение для определения движения малых планет. Эта задача состоит в следующем: два тела S и J движутся по круговым траекториям вокруг их общего центра масс O под действием сил взаимного притяжения согласно закону Ньютона. Третье тело P имеет пренебрежимо малую массу (т. е. притягивается телами S и J, но не влияет на их движение) и движется в той же плоскости, что и тела с конечными массами. Требуется определить движение третьего тела (астероида).

Якоби привел решение данной задачи к системе дифференциальных уравнений 4-го порядка и показал, что оно допускает некоторый первый интеграл (интеграл Якоби для ограниченной задачи трех тел). С помощью этого интеграла Якоби определил кинематические характеристики астероида и область его относительного равновесия.

Классические исследования Эйлера, Лагранжа, Лапласа и Якоби пролили некоторый свет на решение задачи трех тел, завещанной нам Ньютоном. Однако они также раскрыли перед математиками и механиками огромные, почти непреодолимые трудности, которые оно в себе таит. Как образно выражается Н. И. Идельсон (1937), сложность полученной Лагранжем нелинейной системы (которая в явном виде у него даже не написана) такова, что всякая надежда на возможность ее интегрирования должна была быть оставлена; и задача трех тел, с физической точки зрения столь элементарная, предстала после появления мемуара Лагранжа (1772) как некий вызов, брошенный природой человеческому уму.

В ближайшие 50 лет после появления мемуаров Якоби внимание исследователей задачи трех тел было сосредоточено главным образом на совершенствовании методов редукции системы дифференциальных уравнений движения трех тел, упрощении вида этой системы уравнений, изучении известных частных решений, обобщении полученных результатов при решении задачи трех тел на случай движения n ($n > 3$) тел, на приближенном решении задачи с помощью рядов.

В 1856 г. Е. Бур, пользуясь методом Якоби, впервые привел дифференциальные уравнения движения трех тел к каноническому виду. Различные модификации уравнений Бура мы находим в работах А. Бриоши (1868), Ф. Сиаччи (1871, 1874), Б. Шрайбнера (1868), Р. Радо (1878—1882), К. Перчо и Ф. Эберта (1899), С. Андрада (1889, 1899), К. Аллегре (1874), П. Серре (1873), А. Брунса (1887), А. Пуанкаре (1896, 1897), Э. Уиттекера (1927) и др.

К. Якоби впервые предложил относить второе тело к первому как началу, а третье — к центру инерции первого и второго тел. Такого рода подход к исследованию движения системы в ряде случаев оказывается эффективным.

Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел в канонической форме были изучены Б. Шрайбнером (1866), Ф. Тиссераном (1888) и А. Пуанкаре (1890).

Дифференциальные уравнения задачи n тел ($n > 3$) впервые были исследованы Радо (1869) и Аллегре (1877). Они показали, что, подобно тому как система дифференциальных уравнений 18-го порядка задачи трех тел может быть приведена к системе 6-го порядка, система дифференциальных уравнений $6n$-го порядка задачи n тел может быть приведена к системе порядка $6n—12$, если воспользоваться десятью классическими первыми интегралами, теорией последнего множителя Якоби и методом исключения узла. Аналогичный результат был получен также С. Бетти (1877), Э. Матье (1877), Р. Боллом (1877), Е. Дильнером (1877, 1882, 1886), С. Андрадом (1899), Ф. Бенетом (1904) и др. Первое исследование, посвященное специальному изучению задачи четырех тел, принадлежит К. Зайдлеру (1886).

Вопросами устойчивости движения в задаче трех тел занимались П. Лиувилль (1845, 1856), Э. Раус (1875), Н. Е. Жуковский (1882), А. М. Ляпунов (1889) и др. Лиувилль изучил движение системы трех тел в коллинеарном случае Лагранжа, принимая в качестве критерия устойчивости бесконечно малое отклонение взаимных расстояний между телами в невозмущенном и возмущенном состояниях. При таком подходе к проблеме автор имеет дело с исследованием системы линейных дифференциальных уравнений, характеризующей возмущенное движение. Лиувилль, как и другие упомянутые исследователи, ограничивается, таким образом, только первым приближением. Следует заметить, что А. М. Ляпунов во всех остальных своих работах по устойчивости механического движения в отличие от своих предшественников и современников, включая и А. Пуанкаре, принимает во внимание и второе приближение. Исходя из того, что характеристическое уравнение системы имеет по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, Лиувилль приходит к выводу, что невозмущенное движение трех тел в рассматриваемом им случае является неустойчивым.

После Лиувилля 30 лет спустя Раус рассмотрел задачу об устойчивости эквидистантных решений Лагранжа, считая движение устойчивым, если возмущение не нарушает плоскости треугольника, в вершине которого располагаются три тела. В отличие от своего предшественника, который предполагал, что тела взаимно притягиваются по закону Ньютона, Раус принимал силы притяжения обратно пропорциональными произвольной степени N расстояний. Исследование показало, что при $N > 3$ движение всегда неустойчиво, а при $N < 3$ — устойчиво при некотором определенном условии относительно масс трех тел. Из этого условия, в частности, следует, что при $N < 1$ движение всегда устойчиво.

Н. Е. Жуковский и А. М. Ляпунов исследовали устойчивость конфигурации системы трех тел в частных случаях Лагранжа и указали соответствующие условия устойчивости и неустойчивости. При этом Ляпунов пользовался методом малого параметра, который год спустя (1890) независимо от него предложил и Пуанкаре.

Мы уже упоминали о том, что система дифференциальных уравнений задачи трех тел настолько сложна, что решить ее в конечной форме с помощью известных в современном математическом анализе функций не представляется возможным. Поэтому мысли многих ученых сосредоточились на вопросе получения приближенного решения с помощью бесконечных рядов. Периодичность некоторых неравенств планет привела к идее искать решение задачи в виде тригонометрических рядов определенного вида, параметры которых выражаются через постоянные интегрирования. Использование подобных рядов в качестве искомого решения задачи трех тел основано на построенном Эйлером и Лагранжем методе вариации произвольных постоянных. При этом считают, что два тела совершают свое движение согласно задаче двух тел по коническому сечению, но с переменными параметрами (элементами орбиты), которые определяются возмущением, вызываемым третьим телом. Это коническое сечение соприкасается (оскулирует) с действительной орбитой в каждый момент времени. Возмущения — это отклонение элементов оскулирующего конического сечения в данный момент времени от соответствующих элементов действительной орбиты в начальный момент времени.

Теория возмущений создана трудами многих ученых — Ньютоном, Клеро, Даламбером, Эйлером, Лагранжем, Лапласом, Леверрье, Хансеном, Делоне, Линдстедтом, Ньюкомом, Гюльденом, Броуном, Баклундом, Болиным, Хиллом, Пуанкаре и др. Все эти ученые, совершенствуя методы своих предшественников, предложили приближенные решения задачи трех тел, выраженные с помощью бесконечных тригонометрических рядов.

Ньютон считал, что вследствие возмущающего действия планет положение солнечной системы является неустойчивым. В 1773 г. Лаплас показал, что возмущения больших полуосей планетных орбит, вычисленные с точностью до линейных членов относительно возмущающих масс, а также возмущения эксцентриситетов взаимных наклонов, вычисленные с точностью до вторых степеней указанных величин, не имеют вековых членов, т. е. содержат только чисто периодические слагаемые. В 1776 г. Лагранж показал, что этот результат остается справедливым, когда приняты во внимание более высокие степени возмущающих масс. Это значит, что соответствующие решения задачи трех тел заключены в определенных границах, поскольку главным образом указанные элементы орбиты определяют конфигурацию солнечной системы. Другими словами, Лагранж и Лаплас, вопреки взгляду Ньютона, считали солнечную систему устойчивой, по крайней мере на длительный период времени. Подобную устойчивость Пуанкаре назвал устойчивостью по Лагранжу.

В 1808 г. Пуассон доказал, что возмущения больших полуосей планетных орбит, вычисленные с точностью до второго порядка относительно возмущающих масс, кроме чисто периодических членов, имеют и смешанные вековые члены, характеризуемые линейной относительно времени амплитудой колебания. Очевидно, что при наличии указанных членов Солнечная система, постоянно изменяя свою начальную конфигурацию, должна бесчисленное число раз принять как угодно близкую к ней конфигурацию. Такого рода устойчивость Пуанкаре назвал устойчивостью по Пуассону.

В 1877 г. Аретю, вычислив возмущения больших полуосей планетных орбит с точностью до третьего порядка относительно возмущающих масс, обнаружил в тригонометрических рядах, представляющих решение задачи трех тел, и чисто вековые члены. Эгинитис (1889), рассмотрев члены еще более высокого порядка относительно возмущающих масс, подтвердил вывод Аретю. Таким образом, мысли ученых вновь обратились к взглядам Ньютона о неустойчивости Солнечной системы.

Теория возмущений, которая связана с методом последовательных приближений, возникла и развилась в связи с необходимостью решения проблемы движения планет, комет и спутников, главным образом Луны. Несмотря на то что в трудах творцов этой теории благодаря огромным математическим трудностям указанной проблемы сходимость полученных приближений не была доказана и погрешность, допускаемая в решении в том или другом приближении, не была оценена, оказалось, что для ограниченного промежутка времени теория возмущений в большинстве случаев описывает реальную картину движения небесных тел и между теорией и наблюдениями имеется достаточно хорошее совпадение.

Новую эпоху в небесной механике вообще и решении задачи трех тел в частности открыл Пуанкаре (1890, 1892—1898). В основу изучения устойчивости движения в задаче трех тел он положил созданные им теории интегральных инвариантов и малого параметра. Пуанкаре показал, что указанные выше бесконечные тригонометрические ряды, определяющие движение трех тел, будучи расходящимися, могут быть практически использованы для вычисления положений небесных светил только для ограниченных промежутков времени и с тем большей точностью, чем меньше эти промежутки. Пуанкаре создал теорию периодических траекторий, характеризующихся тем, что абсолютная или относительная конфигурации системы периодически повторяются. Иллюстрацией периодических орбит в задаче трех тел являются коллинеарные и эквидистантные решения Лагранжа.

Изучение периодических орбит имеет большое значение не только для исследования движения собственно по этим орбитам, но и для ориентации в движениях по так называемым асимптотическим траекториям, т. е. по траекториям, асимптотически приближающимся к периодическим. Ряды небесной механики, о которых шла речь выше, представляют собой асимптотические решения задачи трех тел. Пуанкаре показал, что устойчивость движения динамических систем, в частности периодических решений, может быть изучена с помощью определенных постоянных (характеристических показателей), которые могут быть найдены как корни некоторого детерминантного уравнения. При этом он создал новый метод исследования, основанный на составлении уравнений в вариациях, указанный ранее Якоби. Оказалось, что условием устойчивости периодической траектории является аннулирование действительных частей всех характеристических показателей.

Новые методы, созданные Пуанкаре и оказавшие существенное влияние на все дальнейшее развитие небесной механики, и до настоящего времени вместе с капитальными результатами Ляпунова составляют основы качественной теории дифференциальных уравнений. Работы Пуанкаре послужили источником для многочисленных исследований других ученых. В частности, очень большое внимание было уделено изучению периодических орбит. Оказалось, что для исследования периодических и асимптотических решений можно применять не только аналитические, но и численные методы.

Качественные методы исследования дифференциальных уравнений, указанные Ляпуновым и Пуанкаре и в дальнейшем развитые в многочисленных трудах других ученых, позволяют при надлежащем выборе параметров, характеризующих движение системы, установить ряд свойств этого движения на основании анализа дифференциальных уравнений и их известных первых интегралов. Метод численного интегрирования уравнений движения имеет то преимущество перед аналитическим, что в каждом отдельном случае дает возможность сравнительно простыми средствами получить решение в виде тех или других элементарных выражений. Однако найденное таким образом решение пригодно лишь в ограниченном интервале изменения аргумента, соответствующем данному вычислению. Этот недостаток метода устраняется, если его применить к исследованию периодических решений: в этом случае для получения полной картины движения достаточно провести вычисления для одного периода.

Рассматривая классическую ограниченную круговую задачу трех тел при определенном соотношении конечных масс, Г. Дарвин (1896, 1897) и ученые копенгагенской школы под руководством Е. Стрёмгрена (1936) установили классификацию всех существующих простых периодических решений задачи трех тел, которая позволяет проследить процесс исчезновения определенных классов периодических орбит при изменении начальных условий. Множество работ посвящено также изучению траекторий вблизи лагранжевых частных решений, исследованию ограниченной задачи трех тел, устойчивости движения динамических систем и др.

Выше было указано, что дифференциальные уравнения задачи n тел допускают десять классических интегралов — шесть интегралов количества движения, три интеграла площадей и интеграл энергии, которые соответствуют законам сохранения количества движения, момента количества движения и механической энергии системы. Эти интегралы обладают тем свойством, что содержат алгебраически координаты и скорости точек. Возникает вопрос: существуют ли другие подобные интегралы? На этот чрезвычайно важный вопрос отвечает открытая в 1887 г. теорема А. Брунса: каждый интеграл задачи трех тел, содержащий их координаты и скорости алгебраически, является алгебраической комбинацией классических интегралов.

П. Пэнлеве (1898) обобщил эту теорему, освободив ее от требования алгебраического характера координат. Он доказал, таким образом, что всякий интеграл задачи трех тел, являющийся произвольной функцией от координат и алгебраической функцией скоростей этих тел, есть алгебраическая комбинация классических интегралов.

А. Пуанкаре (1890, 1892—1898) доказал еще более общую (в определенном смысле) теорему, состоявшую в том, что в задаче трех тел, кроме классических, не существует никаких других однозначных (алгебраических или трансцендентных) первых интегралов, зависящих от некоторого малого параметра, выражающегося через массы тел.

Пэнлеве (1898) обобщил этот результат в том же направлении, что и теорему Брунса, доказав, что, за исключением известных десяти интегралов, не существует других интегралов, однозначных и аналитических относительно скоростей в некоторой достаточно малой окрестности траекторий, имеющих общий оскулирующий эллипс.

При этом не накладываются никакие ограничения на координаты трех тел.

В 1889 г. Д. А. Граве исследовал вопрос о нахождении всех интегралов системы дифференциальных уравнений задачи трех тел, не зависящих от закона взаимодействия. Он доказал, что такими интегралами являются только классические. Эту теорему на задачу n тел обобщил Е. Ловет (1908).

Со времен Эйлера, Лагранжа, Лапласа и Якоби, которые обнаружили некоторые случаи интегрируемости дифференциальных уравнений задачи трех тел в конечном виде, уже на протяжении нескольких столетий не перестает быть актуальным вопрос об обобщении этих решений и нахождении при различных законах взаимодействия таких частных случаев, когда возможно решение в квадратурах или по крайней мере понижение порядка системы уравнений движения. В 1878 г. Ф. А. Слудский указал на возможность движения при соответствующих начальных условиях системы n материальных точек с равными массами, находящихся в вершинах правильного многоугольника или многогранника, который остается во время движения себе подобным. В 1879 г. К. Гоппе рассмотрел симметричную конфигурацию системы $2n$ материальных точек с равными массами, расположенных на двух концентрических окружностях так, что n точек лежат в вершинах правильного многоугольника и n — на биссектриссах его центральных углов. В 1891 г. Р. Леман-Филе, рассматривая пространственное гомографическое движение, обобщил эквидистантный случай Лагранжа на задачу четырех тел, а коллинеарный — на задачу n тел. Следуя Лапласу, О. Дзиобек (1900) считал, что движение системы n материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, вообще говоря, будет гомографическим, если она имеет центральную конфигурацию, т. е. потенциал действующих сил в каждый момент времени равен потенциалу сил взаимодействия, прямо пропорциональных расстояниям между точками. В 1904 г. П. Пицетти доказал, что единственным видом гомографического движения в задаче n тел является гомотетическое с центром гомотетии в центре инерции системы. Движение системы трех материальных точек, образующих во все время движения равнобедренный треугольник, рассмотрел впервые Д. Н. Горячев (1895). Существование аналогичных пространственных движений с осью и плоскостью симметрии, а также плоских движений с осью симметрии в плоскости движения в классической задаче трех тел было установлено Б. Франсеном (1895).

В 1905—1907 гг. П. В. Воронец опубликовал новый метод преобразования дифференциальных уравнений динамики, который позволил значительно расширить известные ранее результаты в области задачи n тел. Этот метод дал возможность сравнительно просто получить известные результаты классиков при произвольном законе притяжения. Воронец исследовал задачу четырех тел и указал случай интегрируемости в квадратурах при законе притяжения обратно пропорционально кубам расстояний. В случае сил взаимодействия, пропорциональных любой степени расстояния, он установил два случая интегрируемости. Он исследовал случай аннулирования кинетического момента, а также случай равнобедренного пространственного движения в задаче трех тел. В 1906 г. Т. Банахевич показал, что в случае закона притяжения обратно пропорционально кубам взаимных расстояний пространственная задача трех тел допускает частный интеграл движения. Новый интегрируемый случай в задаче n тел при том же законе притяжения обнаружил А. Д. Билимович (1911). Плоское и пространственное движение трех тел, при котором соответствующий треугольник остается равнобедренным, в классическом случае рассмотрел Е. Вильчинский (1913).

В описанных выше исследованиях предполагалось, что движение n тел является регулярным, т. е. происходит без соударений и удаления на бесконечность. Между тем изучение особых траекторий динамических задач, в том числе и задачи n тел, имеет очень большое значение для определения условий, при которых данное движение будет устойчивым или неустойчивым. Могущественные методы качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений, созданные гением Ляпунова и Пуанкаре, позволяют проникнуть в природу механического движения и исследовать особенности интегралов дифференциальных уравнений, описывающих это движение. Потребность в качественных методах исследования вызвана тем, что многочисленные и очень важные задачи механики, математического анализа, геометрии, математической физики и прикладных наук приводят к дифференциальным уравнениям, не интегрирующимся в конечном виде. Таким образом, возникает необходимость в разработке метода изучения свойств функций непосредственно по дифференциальным уравнениям, их определяющим. Вот почему доказательство теорем существования, изучение критических точек, особых траекторий и устойчивости решений составляют фундамент исследований ряда крупнейших отечественных и зарубежных ученых.

Еще в 1878 г. Ф. А. Слудский высказал без доказательства теорему о том, что необходимым условием общего соударения n свободных материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, является аннулирование всех постоянных интегралов площадей в движении системы относительно центра инерции. В 1889 г. подобную же мысль высказал и К. Вейерштрасс. Он показал, что при отличной от нуля нижней границы минимума взаимных расстояний точек системы координаты этих точек являются голоморфными функциями времени t в полосе комплексной t-плоскости, ограниченными двумя симметричными относительно действительной оси прямыми. Исследуя вопрос о существовании соответствующих начальных условий движения, он пришел к заключению, что, по крайней мере для задачи трех тел, такие начальные условия не только существуют, но и представляют собой общий случай, в то время как парное и тем более общее соударение точек в конечный момент могут произойти только при особых условиях в исключительных случаях. Вейерштрасс также без доказательства заметил, что координаты точек системы разлагаются в окрестности момента парного соударения $t=t_1$ в ряды по целым положительным степеням $(t_1-t)^{1/3}$ и зависят от $6n-2$ произвольных постоянных. Эту теорему впервые доказал Пэнлеве (1895). Пользуясь своими исследованиями по аналитической теории дифференциальных уравнений, Пэнлѐве (1897) показал, что если движение в классической задаче n тел, регулярное до момента t_1, в этот момент нарушает регулярность, то минимум взаимных расстояний точек при $t \to t_1$ стремится к нулю. Если $n=3$, то единственной особенностью движения может быть только парное и общее соударение тел в момент t_1. Если $n > 3$ могут быть и такие особенности, когда некоторые из взаимных расстояний, не стремясь ни к каким определенным пределам, при $t \to t_1$ осциллируют в каких угодно границах. Пэнлеве (1897) также показал, что начальные условия движения, соответствующие парному соударению, должны удовлетворять определенным аналитическим соотношениям (двум — для пространственной и одному — для плоской) задачи n тел, однозначным относительно координат и алгебраическим относительно скоростей, если по крайней мере массы трех точек отличны от нуля. Найти эти условия удалось несколько позднее (1903) Т. Леви-Чивита для ограниченной и Г. Бискончини (1906) для общей классической задачи трех тел. Однако эти аналитические условия выражаются очень сложными рядами и могут быть использованы непосредственно только в случае, когда соударение происходит через весьма малый промежуток времени после начального момента.

В задаче трех тел очень большое значение имеют исследования К. Сундмана (1907, 1909, 1913), показавшего, что особенности, соответствующие парному соударению, в случае отличного от нуля кинетического момента системы относительно ее центра инерции, могут быть устранены при помощи некоторого преобразования. Он установил, что координаты точек, их взаимные расстояния и время могут быть разложены в целые ряды по степеням определенного параметра τ, сходящиеся при $|\tau| < 1$ и представляющие движение при всех значениях t от $-\infty$ до $+\infty$ независимо от того, происходят ли парные соударения между точками или нет. Однако ряды Сундмана сходятся настолько медленно, что ими практически пользоваться невозможно. Исследования Д. Белорицкого (1931) показали, что, пользуясь этими рядами для вычисления положения планеты с точностью астрономических ежегодников, нужно просуммировать $10^{8 \cdot 10^6}$ членов. Поэтому, как указывает Ю. Д. Соколов (1928), основной результат Сундмана следует рассматривать как теорему существования решения задачи трех тел, а не как решение этой задачи. Исследуя случай общего соударения в задаче трех тел, Сундман (1907) доказал вышеупомянутую теорему Слудского—Вейерштрасса, а также показал, что при $t \to t_1$ конфигурация, образованная точками, приближается к одной из двух конфигураций, характеризующих коллинеарное и эквидистантное решения Лагранжа. Другим путем, пользуясь элементарным преобразованием, те же результаты получил Леви-Чивита (1906, 1915, 1918) сначала для ограниченной, а затем для плоской и пространственной задачи трех тел. Для регуляризации ограниченной задачи трех тел Г. Армеллини (1914) предложил преобразование переменной более простое, чем Сундман. В случае общей классической задачи n тел он доказал, что при наличии только парных соударений между точками с интервалами, имеющими отличную от нуля нижнюю границу, координаты точек и время являются аналитическими функциями некоторого аргумента вдоль действительной оси.

В. П. Ермаков (1916) показал, что при комплексных значениях времени теорема Слудского—Вейерштрасса не правомерна. В 1919 г. Дж. Шази установил, что парное соударение в задаче трех тел происходит в неизменяемой плоскости, а десять лет спустя А. А. Марков доказал, что расстояние точки, не участвующей в соударении, до неизменяемой плоскости, вообще говоря, является бесконечно малой величиной порядка $(t_1-t)^{10/3}$ (закон десяти третей). Изучая условия общего соударения в задаче n тел, Шази (1913, 1918) в ряде своих работ пришел к выводу, что при $t \to t_1$ отношения взаимных расстояний стремятся к определенным пределам, зависящим от отношений масс, и что при этом существуют предельные конфигурации системы. Однако заметим, что в основе его рассуждений лежит постулат, который ему удалось доказать только для $n=3$ и $n=4$. Поэтому его доказательство не имеет общего характера. При этом предельные конфигурации им найдены лишь для задач трех и четырех тел. Далее Шази доказал для задачи n тел теорему Слудского—Вейерштрасса, а также исследовал параболические траектории этой задачи. Ему также принадлежит (1920) обобщение метода Сундмана на случай взаимного притяжения обратно пропорционально кубам расстояний и установление классификации движения при неограниченном возрастании времени в классической задаче трех тел. Соответствующие типы движений он назвал гиперболически-эллиптическими, параболически-эллиптическими, гиперболическими и параболическими.

Роль отечественных ученых-предшественников Ю. Д. Соколова в развитии проблемы n тел

В России первое исследование, относящееся непосредственно к задаче n тел, принадлежит профессору Московского университета Ф. А. Слудскому. В статье, датированной 1878 г., он привел некоторые простейшие частные решения задачи n тел, представляющие собой гомотетические движения. Эти решения имеют место, если точки системы с одинаковыми массами в начальный момент времени расположены в вершинах правильного многоугольника или многогранника и начальные скорости равны по модулю и одинаково направлены относительно сторон указанной конфигурации. При заданных начальных условиях система во время движения сохраняет свою эквидистантную конфигурацию, будучи подобно-изменяемой системой. Если центр инерции системы совпадает с геометрическим центром многоугольника (многогранника), то он будет неподвижным. Если же начальные скорости точек не проходят через геометрический центр, то система может вращаться вокруг центра инерции. В случае пространственной эквидистантной конфигурации такого вращения не будет, и в этом случае каждая точка станет двигаться так, как будто она притягивается к центру инерции по закону Ньютона.

Как уже было указано, Слудский высказал очень важную теорему, состоящую в том, что необходимым условием для общего соударения n точек является равенство нулю кинетического момента системы. Однако доказательства этой теоремы он не дал. Соображения, приводимые Слудским в обоснование этой теоремы, нельзя считать достаточными для ее доказательства: автор неявно допускает, что при $t—t_1$ (t_1 — момент соударения) отношения взаимных расстояний точек остаются ограниченными, между тем как это допущение само по себе требует доказательства. Мы уже говорили о том, что в 1889 г. независимо от Слудского данную теорему высказал, также без доказательства, Вейерштрасс. Для классической задачи трех тел теорему Слудского—Вейерштрасса впервые доказал Сундман (1907). Обобщение теоремы на классическую задачу n тел и ее существенное видоизменение принадлежит Шази (1918). В самой общей постановке эту теорему доказал Ю. Д. Соколов (1928, 1936).

В 1882 —1898 гг. О. А. Баклунд, выдающийся астроном Пулковской обсерватории, опубликовал ряд работ, в которых с помощью метода Гюльдена исследовал группы малых планет, средние движения которых приближенно вдвое больше, чем среднее движение Юпитера.

В 1882 г. Н. Е. Жуковский защитил докторскую диссертацию «О прочности движения». В этой работе он, в частности, исследовал устойчивость лагранжевых решений задачи трех тел при силах взаимодействия, пропорциональных n степени взаимных расстояний. В изучении устойчивости эквидистантного решения у Жуковского был предшественник Е. Раус (1875, 1877), который установил условия устойчивости состояния движения системы трех тел, образующих равносторонний треугольник. Жуковский, трактуя рассматриваемую проблему как проблему устойчивости конфигурации системы, упростил ее решение, выбрав более удачно, по сравнению с Раусом, независимую переменную и координаты, характеризующие возмущенное движение. Благодаря симметричному выбору параметров задачи Жуковскому удалось снизить порядок соответствующей системы дифференциальных уравнений на две единицы (у Рауса получилась система уравнений восьмого порядка, а у Жуковского — шестого). Как и Раус, Жуковский сохранил в уравнениях только линейные члены относительно возмущений и их производных первого и второго порядков. Таким образом, достаточные условия устойчивости решения в первом приближении у Жуковского сводятся к условиям чистой мнимости бикубического характеристического уравнения, что имеет место при $n > -3$ или при $n < 3$ при наличии определенной зависимости между массами точек и показателем n. Из этого условия, в частности, следует, что при $n < -1$ движение всегда устойчиво. Второе условие Жуковского совпадает с условием Рауса. В случае закона Ньютона это условие было известно еще Гашо.

Что же касается коллинеарного случая Лагранжа, то, как мы уже указывали, в классическом случае его рассмотрел ранее Лиувилль, показав, что это движение всегда неустойчиво. Обобщая результаты Лиувилля и рассматривая силы взаимодействия, пропорциональные, как и раньше, n степени расстояния, Жуковский доказал, что при $n < 0$ движение неустойчиво, а при $n=1$ устойчиво.

А. М. Ляпунов (1889) расширил постановку проблемы устойчивости эквидистантного решения Лагранжа задачи трех тел, рассмотрев такие движения, в которых стороны треугольника изменяются периодически в некоторых пределах $r_0 \neq 0$ и $r_1 \neq \infty$. Ограничиваясь, как и его предшественники, первым приближением, он составил дифференциальные уравнения возмущенного движения и доказал, что решение вопроса об устойчивости приводится к определению двух постоянных. Указав способы их вычисления, Ляпунов получил ряд важных теорем, характеризующих устойчивость и неустойчивость рассматриваемого движения. В своих рассуждениях автор пользуется созданным им (независимо от Пуанкаре) методом разложения решений системы линейных дифференциальных уравнений в бесконечные ряды по степеням малого параметра при условии, что коэффициенты уравнений являются периодическими функциями аргумента, голоморфными относительно этого аргумента и соответствующего параметра.

Еще в 1886 г. Г. Хилл, развивая идеи и методы Эйлера, построил теорию движения Луны, базируясь на решении дифференциального уравнения квазигармонических колебаний. Ляпунов, исследуя уравнение Хилла, дал оригинальный метод его решения. При этом он доказал сходимость процесса последовательных приближений и равномерную сходимость ряда, представляющего решение этого уравнения. Он установил также верхнюю границу погрешности решения, возникающей если остановиться на члене с данным указателем в решении Хилла.

В 1889 г. в своей магистерской диссертации, как было уже указано выше, Д. А. Граве поставил вопрос об определении всех интегралов дифференциальных уравнений задачи трех тел в случае сил взаимодействия, являющихся произвольной функцией расстояния, не зависящих от закона взаимодействия. Применив метод А. Н. Коркина к соответствующей системе уравнений в форме Бертрана (1852), он пришел к выводу, что, кроме известных десяти классических интегралов, других интегралов, удовлетворяющих поставленному условию, не существует. Теорему Граве на задачу n тел, как указывалось, обобщил Ловет (1902).

В 1895 г. Д. Н. Горячев впервые в мировой литературе рассмотрел движение системы трех материальных точек, которые образуют конфигурацию равнобедренного треугольника. Полагая, что одна из этих точек остается неподвижной (неподвижный центр), а две другие с равными массами расположены симметрично относительно оси, проходящей через первую точку, и имеют начальные скорости, равные по модулю и одинаково наклоненные к оси симметрии, Горячев показал, что при ньютоновских силах притяжения в этом частном случае задачи трех тел интегрирование соответствующей системы дифференциальных уравнений движения приводится к интегрированию одного обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка.

В. А. Стеклов (1897) заметил, что задача Горячева представляет собой в сущности задачу о движении одной точки в плоскости под действием двух сил: силы притяжения, исходящей из неподвижного центра, обратно пропорциональной квадрату расстояния от этого центра до движущейся точки, и силы притяжения, нормальной к оси симметрии и обратно пропорциональной квадрату расстояния движущейся точки от этой оси. Стеклов указал также новый метод решения задачи Горячева, основанный на применении одной теоремы Якоби (1845).

В 1906 г. С. Д. Черный опубликовал элементарое геометрическое решение задачи трех тел в двух классических частных случаях Лагранжа более простое, чем доказательство Лапласа (1805).

Как нами уже было упомянуто, П. В. Воронец (1905—1907) построил новый метод преобразования дифференциальных уравнений динамики, который позволил ему значительно расширить известные ранее результаты в области задачи n тел. Развивая идею Рауса об игнорировании координат, Воронец показал, что в том случае, когда уравнения движения системы допускают линейные относительно скоростей интегралы, из этих уравнений можно исключить циклические координаты и соответствующие им скорости и ускорения. Этот метод дал возможность Воронцу сравнительно просто получить известные результаты Лагранжа, Якоби, Бура, Бриоши и Радо при произвольном законе притяжения. Он подробно исследовал задачу четырех тел и указал случай интегрируемости в квадратурах для закона притяжения, обратно пропорциональном кубам расстояний. В случае сил взаимодействия, пропорциональных любой степени расстояний, в задаче n тел, он установил возможность двух типов движений: 1) три точки с равными массами в каждый момент времени расположены в вершинах равностороннего треугольника, плоскость которого остается нормальной к некоторой центральной оси неизменного направления, а остальные $n—3$ точки движутся по этой оси; 2) $2p$ точек с равными массами в каждый момент времени лежат в вершинах правильного многоугольника, плоскость которого остается нормальной к определенной центральной оси неизменного направления, а остальные $n—2p$ точек движутся по этой оси. Исследуя дифференциальные уравнения задачи трех тел в форме Лагранжа, Воронец подробно изучил случай обращения в нуль момента количества движения, а также исследовал случай пространственного движения, при котором треугольник трех тел остается равнобедренным и массы точек, расположенных в его основании, равны.

Еще Слудский (1878) заметил, что совокупные дифференциальные уравнения движения свободной системы материальных точек под действием взаимных сил могут распасться на несколько автономных систем, характеризующих движения независимых групп точек, движущихся одинаково. Очевидно, под влиянием этой идеи А. Д. Билимович (1911) рассмотрел частные решения задачи n тел, когда материальная система распадается на две группы с гомотетическим движением, причем отношения гомотетии этих групп в один и тот же момент времени, вообще говоря, различны.

Автор принимает массы точек, принадлежащих к одной группе, равными. Также равными принимаются модули начальных скоростей этих точек, направления которых считаются сходящимися в центре фигуры, образованной точками. Исследуя пространственное движение при степенном законе взаимодействия, Билимович заметил, что если в начальный момент точки каждой группы лежат в вершинах гомотетично расположенных правильных многогранников, то движение каждой системы, являясь подобно-изменяемым, будет известно, если определить прямолинейное движение одной точки первой группы и одной точки второй группы Билимович показал, что в этом случае решение задачи сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка. Если при этом заданы такие начальные условия, что постоянная h интеграла энергии равна нулю, то, согласно теореме Якоби, порядок уравнения понижается на единицу. Если $n=-3$, то существует интеграл Якоби, и задача при любом h решается в квадратурах. Билимович рассмотрел также случай пространственного движения, когда точки каждой группы лежат в вершинах правильных сопряженных многогранников. Решение задачи в этом случае оказывается аналогичным ранее указанному. Решение задачи о пространственном движении n тел будет подобным рассмотренному выше также и в случае, когда точки одной группы лежат в вершинах тетраэдра, а точки другой — в вершинах октаэдра, гомотетичного другому октаэдру, полученному в результате соединения середин ребер тетраэдра.

Анализируя мемуары Сундмана, В. П. Ермаков показал, что с помощью некоторого преобразования к новому переменному u координаты точек можно разложить в бесконечные ряды по целым положительным степеням u, которые сходятся для всех действительных и комплексных значений времени. Ермаков доказал, что в отличие от теоремы Слудского—Вейерштрасса в действительной области, в комплексной области при конечном t возможно общее соударение и при отличном от нуля кинетическом моменте системы трех тел. Он также показал, что интегралы уравнений движения трех тел не имеют других критических точек, кроме тех, в которых одно из взаимных расстояний обращается в нуль.

Рассматривая вопрос о парном соударении в классической задаче трех тел в конечный момент времени t_1, Сундман (1913) доказал, что координаты точек в системе координат с началом в центре инерции системы, движущейся с ним поступательно, при условии отличного от нуля кинетического момента относительно центра инерции, а также взаимные расстояния между точками разлагаются в бесконечные ряды по степеням $(t_1-t)^{1/3}$, сходящиеся в достаточно малой окрестности момента удара (теорема Вейерштрасса). Исходя из этой теоремы, А. А. Марков (1926) исследовал характер изменения расстояния S_3 тела P_3, не участвующего в столкновении, от неизменяемой плоскости при $t \to t_1$ и пришел к следующим результатам: 1) в случае пространственного анортогонального соударения двух тел высота третьего тела S_3 при $t > t_1$ стремится к нулю, как $(t_1-t)^{10/3}$ (закон «десяти третей»); 2) в случае пространственного ортогонального неравнобедренного парного соударения высота третьего тела S_3 при $t \to t_1$ стремится к нулю, как $(t_1-t)^4$; 3) в случае пространственного ортогонального равнобедренного асимметричного парного соударения высота третьего тела S_3 при $t \to t_1$ стремится к нулю, как $(t_1-t)^{10/3}$; 4) в случае пространственного ортогонального равнобедренного симметричного парного соударения, т. е. когда точки образуют во время движения равнобедренный треугольник, симметричный относительно неизменяемой плоскости, $S_3 \equiv 0$; 5) в случае плоского соударения, которое возможно только при плоском движении (плоская задача трех тел), $S_3 \equiv 0$.

Как впервые показал Шази (1919, 1922) на основании исследований Сундмана, предельные положения точек P_1, P_2, P_3 системы, если точки P_1 и P_2 стремятся к столкновению при $t \to t_1$, находятся в неизменяемой плоскости. При этом скорость $\vec{V}$ точки P_3 относительно центра инерции точек P_1 и P_2 стремится к определенному пределу $\vec{V}_1$. Эта скорость отлична от нуля, расположена в неизменяемой плоскости и образует угол некратный π с прямой, проходящей через точку удара C с предельным положением P точки P_2. Предельное положение прямой P_1P_2 называется прямой удара. Обозначим через ω, θ_1 и θ_2 углы, которые образует прямая удара соответственно с неизменным направлением кинетического момента, прямой CP и скоростью $\vec{V}_1$, а через S_0 — длину отрезка CP. Марков называет соударение плоским или пространственным в зависимости от того, будет ли $\cos\omega$ равен нулю или отличен от нуля; ортогональным или анортогональным в зависимости от того, будет ли $\cos\theta_2$ равен или неравен нулю; равнобедренным или неравнобедренным в зависимости от того, будет ли $m_1=m_2=m$ или $m_1 \neq m_2$; симметричным или несимметричным в зависимости от того, будет ли $\cos\theta_1$ равен или неравен нулю. Из этих теорем вытекает, что в момент удара t_1 точка P_3, вообще говоря, не лежит в неизменяемой плоскости (в движении, аналитически продолженном по Сундману). Этот вывод относится только к случаю асимметричного неравнобедренного удара.

Марков (1920) исследовал известный (Г. Паванини, 1907) интегрируемый случай ограниченной задачи трех тел: когда массы двух тел P_1 и P_2 конечны и равны, эти тела движутся по окружности, лежащей в плоскости xy с центром в начале координат, а третье тело P_3 нулевой массы во все время движения находится на оси и постоянная интеграла Якоби равна нулю. Рассматривая координату z астероида P_3 как функцию $z(t)$ комплексного времени, Марков униформизировал ее и построил соответствующую риманову поверхность. Он пришел к заключению, что эта функция мероморфна. Вещественному движению соответствует изменение униформизирующей переменной по параллельному вещественной оси прямолинейному отрезку, соединяющему два полюса мероморфной функции $t(u)$. Он установил, что точки разветвления римановой поверхности функции $z(t)$ распадаются на два исчислимых множества: 1) алгебраические точки разветвления второго порядка, лежащие над $t=\infty$; 2) алгебраические точки разветвления четвертого порядка t_{mn} (m, $n=\ldots, -1, 0, 1, \ldots$), образующие в плоскости t квадратную решетку со сторонами основного квадрата, параллельные вещественной и мнимой осям. Марков показал, что при приближении к какой-либо из точек 1-го множества t и z стремятся к бесконечности, как $t^{2/3}$. В частности, это имеет место при $t=\pm\infty$ аналогично параболическому движению в задаче двух тел. При приближении к какой-либо из точек 2-го множества $t \to t_{mn}$ и $r=P_1P_3=P_2P_3 \to 0$, как $(t-t_{mn})^{2/3}$. Вещественное движение, по расчетам Маркова, допускает вещественное аналитическое продолжение за бесконечность. Результат бесконечной последовательности можно рассматривать как одно вещественное периодическое колебательное движение с бесконечным периодом и амплитудой.

Докторская диссертация Ю. Д. Соколова

В своей докторской диссертации (1928) и примыкающих к ней мемуарах Ю. Д. Соколов получил многочисленные результаты по теории соударений в классической задаче n тел, а также существенные обобщения некоторых теорем, установленных его предшественниками. Он вычислил нижнюю границу радиусов сходимости разложений координат около момента регулярного движения в зависимости от количества тел n, постоянной интеграла энергии, масс системы минимума взаимных расстояний между телами в данный момент времени. Он установил, что значение этой границы, найденной для $n=3$ Сундманом, в полтора раза меньше истинного. Соколов доказал теорему о невозможности стремления к нулю при $t \to t_1$ минимума взаимных расстояний в общей задаче трех тел, что исключает гипотезу, принятую Пэнлеве в его стокгольмских лекциях (1897). Далее им доказаны следующие две теоремы: 1) если существует такой конечный момент t_1, что квадратичный момент инерции I^2 около центра инерции системы n свободных материальных точек, движущихся в p-мерном евклидовом пространстве, стремится к нулю при $t \to t_1$ и $\lim\limits_{t \to t_1} U = +\infty$ (U — силовая функция, однородная первого порядка относительно взаимных расстояний точек системы), то все постоянные интегралов площадей в движении системы относительно центра инерции равны нулю; 2) если все постоянные интегралов площадей в движении системы n свободных материальных точек в p-мерном евклидовом пространстве ($n \leqslant p$) относительно центра инерции равны нулю, то все точки движутся в одной неподвижной плоскости n—1-измерения, проходящей через центр инерции системы.

Первая из этих теорем является обобщением теоремы Слудского—Вейерштрасса, а вторая — теоремы, полученной в 1888 г. Дзиобеком при $p=n=3$.

Подробно изучив исследуемые функции около момента общего соударения трех точек P_0, P_1, P_2 в классической задаче трех тел, Соколов с помощью специальной замены переменных преобразует систему дифференциальных уравнений относительного движения точек P_1, P_2 к виду, удобному для дальнейшего исследования. После этого преобразования в случае прямолинейного движения трех точек задача сводится к рассмотрению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с аргументом I (монотонно убывающем в некотором интервале

(t_0, t_1) и одной квадратуре, а в случае плоского движения — к системе 4-х уравнений первого порядка с тем же аргументом и двум квадратурам. При этом дифференциальные уравнения принимают классическую форму

$$I\frac{dY_i}{dI} = f_i(I, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k; \quad k = 2 \text{ или } k = 4),$$

где f_i — голоморфные функции около системы значений $I=0$, $y_i = y_i^{(1)}$, аннулирующихся при этих значениях. Автор приходит к заключению, что искомые функции разлагаются в ряды, расположенные по целым положительным степеням I и $b_j I^{\lambda_j}$, где λ_j — положительные корни (один — в случае прямолинейного движения, два — в случае плоского движения) характеристического уравнения (соответственно 2-й и 4-й степени с действительными корнями), а b_j — произвольные постоянные.

Соколов показал, что при установлении формы разложений, характеризующих движение функций в случаях, когда $\lambda_j \geqslant 2$ — целое число, если движение прямолинейное, или $\lambda_1 = \lambda_2$ и $l\lambda_1 = \lambda_2$, когда $l \geqslant 2$ целое число, $\ln I$ появляется в разложениях только при $l\lambda_1 = \lambda_2$.

В результате указанных исследований Соколова, выполненных в 1922—1928 гг., впервые были установлены все условия общего соударения трех точек в классической задаче трех тел (одно — для прямолинейного движения и два — для плоского движения, причем к ним следует присоединить условие Слудского—Вейерштрасса) и получены соответствующие разложения в ряды функций, входящих в выражения этих условий. Для симметричного случая задачи трех тел, когда во все время движения треугольник $P_0P_1P_2$ остается равнобедренным и $m_1 = m_2$, Соколов значительно упростил доказательство соответствующих теорем и выводов, полученных его предшественниками.

Особые траектории системы свободных материальных точек, обобщенная задача n тел и дальнейшие исследования Ю. Д. Соколова

С точки зрения общей теории дифференциальных уравнений и приложений к вопросам динамики, математической физики и прикладных наук значительно большую ценность, чем теория соударений в классической задаче трех тел, представляет проблема исследований особых точек и траекторий в области более общих динамических задач. В первую очередь это касается задачи движения системы свободных материальных точек, находящихся под действием взаимных сил, частным случаем которой является классическая задача n тел. Однако, несмотря на то что было решено множество задач качественной теории движения трех точек, взаимодействующих по закону Ньютона, вопрос об обобщении полученных результатов и о постановке новых задач, расширяющих область приложений, в отечественной и зарубежной научной литературе до 1934 г. не возникал. Едва ли не единственные исследования в этом направлении, да и то посвященные частным случаям, принадлежат Биркгофу и Шази (1920). Правда, Кивелиович (1932) в одной из своих статей сделал попытку решить задачу о регуляризации около момента парного соударения системы дифференциальных уравнений движения материальных точек, взаимно притягивающихся обратно пропорционально произвольной степени взаимных расстояний, однако, как показал Ю. Д. Соколов (1937), все его рассуждения ошибочны.

В ряде проблем, разработанных Ю. Д. Соколовым в 1934—1951 гг., данный вопрос впервые получил общую постановку. Эти его работы относятся к исследованию особых траекторий системы трех и более свободных материальных точек, попарно взаимно притягивающихся при $f(\Delta_{ij})>0$ или отталкивающихся при $f(\Delta_{ij})<0$ с силой, по модулю равной

$$m_i m_j \,|f(\Delta_{ij})|,$$

где $f(r)=-\frac{dF(r)}{dr}$ — функция, аналитическая около всякого действительного положительного значения r, принимающая при этих значениях аргумента действительные значения и могущая на действительной оси иметь особенности при $r=0$ и $r=\infty$. Эту задачу n тел в дальнейшем будем называть обобщенной.

Для обобщенной задачи n тел Соколов установил нижнюю границу радиусов сходимости разложений координат около момента регулярного движения. Для частного случая классической задачи трех тел отсюда следует значение этой границы в полтора раза большее значений, даваемых соответствующими формулами Сундмана и Мендеса (1935).

Первые основные результаты были получены Соколовым в 1934—1935 гг. для случая обобщенной астероидной (ограниченной) задачи трех тел, когда две материальные точки P и P_1 равномерно вращаются по концентрическим окружностям около их общего центра инерции и притягивают (или отталкивают) точку P_2 с бесконечно малой массой по указанному обобщенному закону. Если движение точки P_2 происходит регулярно до момента t_1 и в этот момент перестает быть регулярным, то при $t \to t_1$ одно из расстояний точки P_2 до P или P_1 стремится к нулю или оба расстояния неограниченно возрастают. Исследованию этих двух возможных случаев посвящено несколько специальных работ Соколова.

В первом случае им было принято, что при $r \to +0$ функция $f(r)$ обращается в $+\infty$ определенного порядка $2\alpha+1$, так что

$$\lim_{r \to +0} r^{2\alpha+1} f(r) = a \quad (\alpha > 0,\ a > 0). \tag{5}$$

После полного выяснения поведения искомых функций около момента соударения система уравнений движения точки P_2 была приведена к виду, из которого при $\alpha > 1$ непосредственно следует на основании классических теорем доказательство существования искомых решений. При $\alpha = 1$ это доказательство после соответствующих преобразований уравнений строится на результатах исследований Боля (1900) и Коттона (1911) об асимптотических решениях дифференциальных уравнений. При $\alpha < 1$ существование траекторий соударения и алгорифм построения соответствующих решений были установлены при помощи специального метода последовательных приближений. Для этого случая было выведено инвариантное соотношение, характеризующее траектории соударения (условие соударения), и образовано дифференциальное уравнение с частными производными, которому удовлетворяет функция, входящая в выражение этого условия. Были построены также разложения искомых функций около особой точки в том случае, когда выражения $r^{2\alpha}F(r)$, $r^{2\alpha+1}f(r)$ разлагаются около $r = 0$ в ряды по целым положительным степеням r, r^{α_1}, r^{α_2}, ..., r^{α_n}, где α_i — действительные положительные числа.

Детально рассмотрен случай

$$F(r) = r^{-2\alpha} \quad (\alpha < 1),$$

для которого даны разложения функций, входящих в условие соударения, в ряды по целым положительным степеням

r, r^{α} с периодическими коэффициентами. Отсюда, как частный случай, при $\alpha=\frac{1}{2}$ получено соответствующее разложение, найденное Леви-Чивита. Результаты этих исследований с небольшими изменениями относятся и к тесно связанным с ограниченной задачей трех тел задачам движения под действием притяжения к неподвижному и равномерно вращающемуся центрам (частным случаем этих задач является задача о движении под действием притяжения к двум неподвижным центрам). Относятся они и к предельным случаям: задаче Хилла и задаче притяжения к неподвижному центру и постоянной, равномерно вращающейся (или неизменного направления) возмущающей силы.

В особой статье Соколова были исследованы такие решения обобщенной астероидной задачи, при которых расстояния PP_2, PP_1 неограниченно возрастают при $t \to t_1$ (t_1 — конечный момент времени), при условии, что при $r \to +\infty$ $f(r) \to -\infty$ определенного порядка $2\beta-1$, так что

$$\lim_{r\to+\infty} f(r)\, r^{1-2\beta} = -b \quad \left(\beta > \frac{1}{2}, \quad b > 0\right). \tag{6}$$

Для построения этих решений (имеющих место только при $\beta > 1$) после полного выяснения поведения искомых функций около $t=t_1$ был разработан специальный метод последовательных приближений, подобный методу Бендиксона, и даны разложения величин, характеризующих движение в окрестности $r=\infty$, в ряды по целым положительным степеням величин r^{-1}, $r^{-\beta}$, $r^{-\beta_1}$, $\ldots$, $r^{-\beta_n}$, где β_i — действительные положительные числа.

В ряде статей Ю. Д. Соколова, напечатанных в изданиях АН СССР, АН УССР и Бельгийской академии наук, предыдущие исследования были распространены для обобщенного закона взаимодействия. Для обобщенной задачи n тел была доказана теорема (обобщающая теорему Пэнлеве), установленная для случая взаимодействия по закону Ньютона. Пусть $f(r)$ голоморфна при $-\delta < \arg r < +\delta$ и ограничена по модулю в этой области при $|r| > d > 0$, а $F(r)$ ограничена сверху при изменении r вдоль действительной оси от $r=d$ до $r=+\infty$. Тогда если движение n материальных точек, взаимодействующих по обобщенному закону, происходит регулярно до момента t_1, а в этот момент перестает быть регулярным, то минимум взаимных расстояний точек стремится к нулю при $t \to t_1$.

Аналогично Соколов обобщил теорему Слудского—Вейерштрасса: если существует такой момент t_1, что квадратичный момент около центра инерции системы n свободных материальных точек, движущихся в p-мерном евклидовом пространстве, стремится к нулю при $t \to t_1$, причем в случае $\lim\limits_{t \to t_1} U = +\infty$ в окрестности $\Delta_{ij} = 0$

$$(2 - B)\, U + \sum_{i,j} \Delta_{ij} \frac{\partial U}{\partial \Delta_{ij}} \geqslant 0,$$

где U — силовая функция, зависящая только от взаимных расстояний точек Δ_{ij}, а B — положительная постоянная, то в движении системы относительно центра инерции все постоянные интегралов площадей равны нулю.

При условиях этой теоремы ($n \leqslant p$) все n точек движутся в одной неподвижной гиперплоскости $n-1$ измерения, проходящей через их центр инерции.

Теорема Шази, установленная им для случая закона Ньютона (1922), была обобщена Соколовым (1937) для указанного выше закона взаимодействия в следующем виде. Если при условии (5)

$$r^{\gamma} |f(r)| \leqslant A \qquad (\text{при } 0 < d \leqslant r < +\infty, \quad \gamma > 1),$$

а при $\alpha = 1$

$$\lim_{r \to +\infty} r^{\gamma} [2F(r) - rf(r)] = g \neq 0$$

или

$$2F(r) - rf(r) = 0, \qquad h \neq 0,$$

то в обобщенной задаче трех тел минимум взаимных расстояний не может стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

При известных ограничениях для функции $f(r)$ Соколов доказал, что если движение трех точек при обобщенном законе взаимодействия перестает быть регулярным в момент $t = t_1$, то при $t \to t_1$ имеем $I^2 \to I_1^2$ (I_1 — определенный конечный предел) или I^2 неограниченно возрастает. В случае $I_1^2 > 0$, которому соответствует соударение двух точек в момент t_1, применение обобщенных Соколовым методов Леви-Чивита и Сундмана позволяет полностью исследовать поведение и формы аналитического представления функций, характеризующих движение в окрестности $t = t_1$. При изучении относительного движения точки P_1 относительно точки P_0 и точки P_2 относительно центра инерции точек P_0 и P_1 за неизвестные рационально выбрать сферические координаты и соответствующие сопряженные величины. Установив, что в случае $I_1^2 > 0$ одно и то же расстояние, например $\Delta_{01} = r$, стремится к нулю, Соколов доказал, что при $t \to t_1 > 0$ и $\alpha \neq 1$ координаты точек и указанные выше неизвестные стремятся к определенным пределам. Приняв r за аргумент, он далее привел систему уравнений движения к форме, из которой при $\alpha > 1$ доказательство существования траекторий парного соударения следует непосредственно из классических теорем. Для более сложных случаев $\alpha < 1$ и $\alpha = 1$ он разработал специальные методы исследования, также приводящие к доказательству существования соответствующих решений. При $\alpha < 1$ ученый установил два инвариантных соотношения (условия соударения), характеризующие траектории парного соударения, и составил дифференциальные уравнения с частными производными, которым удовлетворяют функции, входящие в условия соударения. Им детально рассмотрен случай $F(r) = r^{-2\alpha}$. При этом Соколову удалось составить первые члены разложений, из которых при $\alpha = \frac{1}{2}$ в классической задаче получаются соответствующие формулы Леви-Чивита и Бисканчини.

Соколов разработал новый метод исследования, основанный на специальных преобразованиях уравнений движения к виду, позволяющему унифицировать трактовку всех случаев, включая и такой, для которого предыдущий метод неприменим. Использование этого метода позволяет значительно быстрее получить все заключения о поведении искомых функций в окрестности момента парного соударения. Он особо рассмотрел соответствующие вопросы для некоторых частных и предельных случаев: движения с плоскостью и осью симметрии, плоского и пространственного движения в ограниченной задаче трех тел.

Значительно более сложные обстоятельства имеют место в случаях $I_1^2 = 0$, $I_1^2 = +\infty$, исследование которых потребовало создания новых, более общих методов. При этом пришлось изучить некоторые частные случаи. Прежде всего Соколов исследовал характер особых точек интегралов прямолинейного движения трех тел, взаимно притягивающихся обратно пропорционально произвольной степени расстояний между ними. На этом пути им было впервые изучено трансцендентное уравнение, связывающее отношения взаимных расстояний с отношениями масс в обобщенном случае Эйлера—Лагранжа.

Соколов расширил случай Якоби — интегрируемости в гиперэллиптических квадратурах для функции $f(r) =$

$=Ar+Br^{-3}$ (A и B — произвольные постоянные) и впервые после Якоби нашел новый случай интегрируемости (в эллиптических функциях) уравнений прямолинейного движения при $f(r)=Ar+Br^3+Cr^{-3}$ и $m_1=m_2=m_3$. В дальнейшем он исследовал поведение и формы аналитического представления функций, характеризующих симметричное движение для общего случая около момента тройного соударения. Оказалось, что уравнения такого движения интегрируются в эллиптических функциях при $f(r)=Ar+Br^{-3}$. Эти исследования Соколова являются обобщением соответствующих результатов Воронца (1907).

Соколов распространил на указанный закон взаимного протяжения также интегрируемый случай пространственного гомографического движения Банахевича (1906) и в обобщенном виде доказал высказанную им теорему о невозможности такого движения в случае $f(r)=gr^{-(2\alpha+1)}$ при $\alpha\neq 1$. Позднее Соколов в общем случае изучил плоские траектории при тройном соударении в случае произвольной силы взаимодействия при условии (5). Это очень сложное исследование может служить образцом разработки тонких идей качественной теории дифференциальных уравнений. Соколов показал, что предельные конфигурации при плоском движении представляют собой равносторонний треугольник и прямолинейную конфигурацию. Таким образом, известные лагранжевы конфигурации свойственны не только классической задаче трех тел, но и значительно сложнейшим задачам динамики. В эти исследования Соколов вовлек и пространственные траектории общего соударения (при $\alpha>1$), соответствующие прямолинейной и эквидистантной конфигурациям. При этом им отдельно было изучено пространственное симметричное движение, особенно траектории общего соударения при наличии плоскости симметрии и коллинеарной предельной конфигурации (на оси вращения).

Соколов впервые в литературе применил свои новые методы (с некоторыми изменениями) к изучению траекторий неограниченного расхождения в прямолинейной и плоской обобщенной задаче трех тел, а также в пространственной ограниченной задаче. Также впервые он поставил (в общем виде) вопрос о пространственном гомографическом движении системы свободных материальных точек, установил необходимые и достаточные условия существования такого движения, нашел новые случаи гомографических движений и доказал обобщенные теоремы Банахевича—Пицетти.

Исследования в области проблемы n тел систематизированы Соколовым в монографии «Особые траектории системы свободных материальных точек» (Киев, 1951).

Исследования современников и учеников Ю. Д. Соколова в области задачи n тел; современный аспект постановки задачи двух тел

В 1928 г. Т. Леви-Чивита заявил о решении ограничений релятивистской задачи двух тел. Как известно, эта задача сводится к следующему: в силовом поле евклидова пространства, обладающем центральной симметрией, материальная точка движется со скоростью, не превышающей некоторой постоянной c. При этом требуется, чтобы предельный случай соответствовал классическому, рассмотренному выше, т. е. при $c \to \infty$ функция Лагранжа L^*, характеризующая силовое поле, должна превратиться в классическую функцию Лагранжа $L = \frac{1}{2} V^2 + 2\Phi(r)$. Автор предложил соответствующую формулу для функции Лагранжа L^*.

Дальнейшее развитие задача Леви-Чивита получила в работе В. А. Зморовича (1954). Автор доказывает весьма любопытную теорему о том, что ограниченная релятивистская задача двух тел, характеризующаяся определенной функцией Лагранжа L^*, эквивалентна в отношении траекторий движения точек некоторой классической задаче двух тел с определенной потенциальной функцией. Зморович указывает несколько вариантов выражения функции Лагранжа L^*, отличных от варианта Леви-Чивита.

Задача о движении двух тел с переменными массами, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, рассматривалась многими авторами. Основные исследования этой задачи принадлежат А. Гюльдену (1884), И. В. Мещерскому (1892, 1902), Г. Армеллини (1911—1932), Г. Н. Дубошину (1930, 1932), А. С. Лапину (1944), М. Мендесу (1935), Т. Леви-Чивита (1928). Задачу двух тел, движущихся в сопротивляющейся среде, в последнее время исследовал Дубошин (1930, 1932, 1936, 1937, 1939).

Решение задачи двух тел с постоянными и переменными массами (в более сложной постановке — задачи n тел) лежит в основе исследования проблемы межпланетных путешествий. Еще в 1903 г. в работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами» К. Э. Циолковский построил теорию движения ракет в мировом пространстве. Дальнейшие исследования К. Э. Циолковского, Ю. В. Кондратюка, Ф. А. Цандера, Г. Оберта, Г. Ноордунга и других ученых значительно продвинули решение этой чрезвычайно сложной и важной для человечества проблемы. Однако практически гениальные идеи Циолковского стали осуществляться лишь в наши дни. Благодаря могуществу современной науки и техники удалось запустить в космическое пространство искусственные спутники Земли с человеком на борту и вплотную подойти к освоению космоса.

В ряде своих работ (1947—1953) Б. Н. Фрадлин расширил поставленную Схоутеном и Кортевегом задачу, рассмотрев более общий закон центральной силы $f(r)$, допускающей для функции $\varphi(r)=r^3 f(r)$ в интервале $0<r<\infty$ конечное или бесконечное (без точек сгущения) множество экстремальных значений. В этом наиболее общем случае задачи двух тел удается доказать ряд теорем, указывающих характер необходимых и достаточных условий для появления возможных типов полутраекторий. Анализируя эти теоремы, автор пришел к следующему заключению.

1. Указанные условия имеют место не только в тех случаях, когда на рассматриваемых интервалах функция $c^2+\varphi(r)$ знакопостоянна, но также и тогда, когда функция $\varphi(r)$ имеет конечное или даже бесконечное множество экстремальных значений, не обладающее точкой сгущения. В последнем случае поле действия центральной силы всегда можно разбить на конечное или бесконечное число районов отталкивания, устойчивости, неустойчивости и граничных, в которых функция $\varphi(r)$ сохраняет свой знак. При этом форма траекторий будет определяться поведением кинематических элементов движения в окрестности силового полюса и бесконечно удаленной точки.

2. Необходимые и достаточные условия существования возможных полутраекторий общей задачи двух тел, указанные в упомянутых теоремах, охватывают все возможные случаи поведения кинематических элементов движения и центральной силы и исчерпывают все возможные типы полутраекторий задачи, за исключением тривиальных случаев движения по круговой и радиальной траекториям.

3. Полную классификацию траекторий центрального движения можно получить с помощью простой суперпозиции полутраекторий, характеризующих поведение траекторий в окрестности силового полюса и бесконечно удаленной точки. Автор изучил также особые траектории соударения и бесконечного удаления в общей задаче двух тел.

Анализируя исследования Ю. Д. Соколова, Е. Егервари (1947, 1950) обнаружил новые частные решения плоской задачи трех тел, в которых отношение главных моментов инерции системы остается постоянным. Такие решения, как оказывается, существуют, если массы точек равны и силовая функция зависит только от момента инерции системы относительно ее центра инерции и от площади треугольника, образуемого точками.

П. П. Лавриненко (1949) исследовал особые траектории соударения и бесконечного расхождения пространственного движения точки, взаимодействующей с неподвижным центром по общему закону и находящейся в поле постоянной возмущающей силы. В частном случае эллиптического движения точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона в поле постоянной возмущающей силы, автор, пользуясь методом малого параметра, определил элементы оскулирующей орбиты в первом приближении в функции от эксцентрической аномалии.

Л. А. Газархи (1950) исследовала теорему Брунса применительно к общему закону взаимодействия. Она показала, что метод, предложенный Брунсом при доказательстве своей теоремы, приложим только для случая взаимодействия по закону Ньютона. Газархи нашла новый независимый интеграл пространственного движения и с его помощью исследовала плоскую обобщенную задачу трех тел.

Работа Т. С. Шестаковой (1951) дополнила исследования Ю. Д. Соколова (1934), относящиеся к изучению траекторий соударения в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел при общем законе взаимодействия. Она показала, что результаты, полученные Соколовым, могут быть расширены на диапазон изменения параметра α от $-{}^1/_2$ до $+\infty$, исключая случай $\alpha=0$. Для плоской ограниченной задачи она указала существование траекторий соударения в случае взаимодействия по логарифмическому закону.

А. Л. Склянский (1954—1957) расширил некоторые исследования Ю. Д. Соколова о тректориях парного соударения в обобщенной задаче трех тел, а также при логарифмическом и показательном законах взаимодействия. Из этих его результатов в классическом случае получаем теорему Шази—Маркова. Склянский доказал, что сундмановский метод непосредственной регуляризации задачи трех тел приложим только в классическом случае ньютоновского притяжения. Он упростил метод Шази о решении задачи трех тел в случае взаимодействия обратно пропорционально кубу взаимных расстояний. Он обобщил теоремы Шази и Маркова о парном соударении в задаче трех тел при общем законе взаимодействия. Он также обобщил результаты Мендеса (1935), относящиеся к решению классической задачи трех тел переменной массы на случай взаимодействия, обратно пропорционального произвольной степени взаимных расстояний.

А. М. Слесареву (1960—1965) принадлежит обобщение вышеуказанных исследований Б. Н. Фрадлина на случай системы двух тел переменной массы.

И. А. Григорьева обобщила теорему Воронца—Вильчинского — Шази о возможности симметрического движения в задаче трех тел только при равенстве двух масс, находящихся в вершинах основания равнобедренного треугольника, на случай сил взаимного притяжения, обратно пропорциональных произвольной степени расстояния.

Важное значение для развития проблемы n тел имеют исследования учеников и сотрудников О. Ю. Шмидта, которые используют качественную теорию дифференциальных уравнений для изучения свойств финальных движений системы свободных материальных точек, взаимодействующих между собой по закону Ньютона. Начало исследованию этого вопроса положил еще в 1842 г. Якоби в своих знаменитых «Лекциях по динамике». Шази (1922), как указывалось, дал классификацию финальных движений. В 1947 г. Шмидт в результате применения к соответствующей системе дифференциальных уравнений методов численного интегрирования построил пример захвата, тем самым показав, что заключение Шази о невозможности захвата при положительном значении постоянной интеграла энергии ($h > 0$) является ошибочным. Новые методы изучения финальных движений (методы размерностей, непрерывной индукции, инвариантной меры), которые в ряде случаев дают возможность установить область изменения начальных условий, для которой возможны соответствующие движения того или другого типа, построил

Г. Ф. Хильми (1948—1958). Ряд эффективных качественных теорем, которые могут служить критерием осуществимости финальных движений, принадлежит Г. А. Мерману (1952—1955). Изучению данного вопроса посвящены также работы В. Ф. Проскурина (1953), О. А. Сизовой (1952), К. А. Ситникова (1953), Г. Е. Храповицкой (1953).

Критические точки дифференциальных уравнений классической задачи двух тел изучила Н. С. Самойлова-Яхонтова (1927).

Большую роль в развитии аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики, в частности в области приложений к проблеме n тел, в Советском Союзе сыграли семинары, организованные в Ленинграде, Москве и Киеве.

В 1925 г. В. И. Смирнов организовал при Ленинградском астрономическом институте семинар по изучению задачи трех тел. На этом семинаре зародились многие исследования М. Ф. Субботина, А. А. Маркова, Н. С. Самойловой-Яхонтовой и др. О работах Маркова мы уже говорили выше. Субботину принадлежит первый фундаментальный трактат по небесной механике на русском языке в трех томах (1933, 1937, 1949). Самойлова-Яхонтова (1927) использовала свойства особых точек задачи трех тел для улучшения сходимости бесконечных рядов, представляющих координаты точек системы. Она показала, что если принять за независимую переменную приближенное значение функции, с помощью которой производится регуляризация задачи при парном соударении, то соответствующие ряды будут значительно более быстро сходиться.

Почти одновременно с семинаром в Ленинграде В. В. Степанов организовал аналогичный семинар при Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга в Москве. В этом семинаре (в дальнейшем его возглавил Н. Д. Моисеев) возникли исследования В. В. Степанова, Н. Д. Моисеева, Г. Н. Дубошина, А. Н. Чибисова, Н. Ф. Рейн и др.

В. В. Степанов (1936) положил начало изучению устойчивости движения (в смысле Якоби). Ему (совместно с В. В. Немыцким) принадлежит известный учебник по качественной теории дифференциальных уравнений (1947). Большая часть многочисленных работ Н. Д. Моисеева (1933—1940) посвящена изучению теории устойчивости движения. Установлению общих свойств движения материальной системы и его устойчивости посвящен также ряд исследований Г. Н. Дубошина и Н. Ф. Рейн. Многие из проблем, изученных в семинаре профессора Н. Д. Моисеева, связаны с решением системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

где x, y — координаты; $U\ (x,\ y)$ — силовая функция движущейся точки; n — постоянная. К подобного рода проблемам относятся: классическая проблема двух сферических тел; проблема подвижной точки и двух неподвижных центров; классическая ограниченная круговая проблема трех тел; проблема движения точки под действием притяжения системы материальных (гауссовых) колец или двух точек, движущихся по окружностям вокруг их центра инерции (Моисеев); проблема движения точки под действием притяжения нескольких колец и одного центрального тела (Фату); полуосредненная ограниченная эллиптическая проблема трех тел (Рейн); проблема движения двух сфероидов с совпадающими плоскостями симметрии (Кондурарь); ограниченная проблема трех тел в гравитирующей среде (Рейн); проблема трех точек Хилла; проблема движения точки внутри гравитирующего кольца типа кольца Сатурна (Дубошин) и др.

Исследованием некоторых специальных вариантов классической ограниченной проблемы трех тел занимались Н. Д. Моисеев и главным образом Н. Ф. Рейн, которая детально изучила точки либрации и поверхности нулевой скорости в ограниченной круговой задаче трех тел, расположенных в гравитирующей среде. Она также рассмотрела осредненную ограниченную эллиптическую задачу трех тел, подвергнув осреднению часть возмущения нулевой массы, обусловленную эксцентриситетом орбиты малой планеты конечной массы. Пользуясь интегралом Якоби полученной таким образом системы дифференциальных уравнений, она смогла с помощью качественных методов исследовать некоторые свойства движения системы.

В Институте теоретической геофизики АН СССР под руководством О. Ю. Шмидта (ученика Д. А. Граве) в 1938 г. образовался еще один московский центр, интересы которого сосредоточились вокруг классической проблемы n тел в плане приложения к космогонии. В 1944—1950 гг. Шмидт выдвинул новую теорию происхождения больших планет Солнечной системы путем конденсации мелких космических частиц. Для механико-математического обоснования своей гипотезы ему нужно было доказать возможность такого движения в задаче трех тел, когда одно из них, придя из бесконечности в непосредственную окрестность двух других, остается навсегда в этой окрестности, иначе говоря, доказать возможность «захвата» сначала одной частицы, затем другой и т. д., пока не образуется достаточно сконденсированное «облако частиц», из которого затем образуется одна из планет. Такая постановка проблемы привела сотрудников группы Шмидта к изучению финальных движений в классической задаче трех тел.

Финальными движениями, по определению французского ученого Ж. Шази, называются те предельные движения, которые имеют место при стремлении времени $k - \infty$ или $+\infty$. Шази, как указывалось, дал исчерпывающую классификацию всех возможных видов таких движений (эллиптического, гиперболического и гиперболо-эллиптического) и пришел к выводу о невозможности захвата, иными словами, о невозможности перехода движения гиперболического при $t \to -\infty$ в движение гиперболо-эллиптическое при $t \to +\infty$.

Работы группы Шмидта показали, что это заключение необосновано. Проблема Шази подверглась тщательной проверке и изучению. Окончательное решение этой проблемы было дано К. А. Ситниковым (1953). Однако в его работе возможность захвата обоснована чисто аналитически, без помощи численного интегрирования уравнений движения, которое применяли все другие исследователи. Таким образом была доказана только возможность захвата, так что полного математического решения эта задача до сих пор не имеет.

Новые методы изучения финальных движений (метод размерностей, метод непрерывной индукции, метод инвариантной меры), в ряде случаев позволяющие установить область изменения начальных условий, для которой возможны соответствующие движения различных типов, как уже было отмечено, разработал Г. Ф. Хильми (1948—1958). Его исследования обобщены в монографиях «Проблема n тел в небесной механике и космогонии» и «Качественные методы в проблеме n тел».

В настоящее время исследование финальных движений в задаче трех и более тел потеряло свою первоначальную связь с космогонической гипотезой Шмидта. Теперь оно приобрело более общее значение, положив начало новой области науки — звездной небесной механики — исследованию форм движения звездных систем различного типа при различных условиях.

Как уже указывалось, в небесной механике при решении проблемы трех тел наряду с точными методами аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений динамики применяются и приближенные методы, основанные на теории возмущений. Однако в большинстве случаев эти методы вызывают расходимость соответствующих рядов, которыми в пределах достаточно длительных периодов времени, очевидно, нельзя пользоваться для описания движения.

Эти математические трудности были в значительной степени преодолены в работах математиков школы Колмогорова. Основная идея этих работ заключается в применении вместо рядов, расположенных по степеням малых возмущающих масс (которые были основным математическим аппаратом классической небесной механики), процесса последовательных канонических преобразований, которые в той же форме применялись еще А. Пуанкаре. При этом в каждом приближении исключается множество частот, соответствующих тем малым делителям, которые стремятся к нулю слишком быстро. Этот метод, указанный впервые А. Н. Колмогоровым (1954), затем был строго обоснован В. И. Арнольдом (1961—1963 гг.) и применен им для доказательства устойчивости (в смысле Лагранжа) системы материальных точек с отрицательной энергией типа Солнечной системы. Было доказано, что такая система является устойчивой, во всяком случае, при достаточно малых значениях возмущающих масс и почти при всех начальных условиях. Этот важный результат значительно продвигает решение задачи об устойчивости нашей натуральной Солнечной системы или хотя бы системы точек, массы которых близки к массам планет.

Еще одно течение в небесной механике, зародившееся в 30-х годах, получило в последнее время широкое признание и явилось источником множества работ (В. Т. Кондурарь, 1936—1962; Г. Н. Дубошин, 1945—1960; В. В. Белецкий, 1963, и др.). Это направление рассматривает общую задачу о поступательно-вращательных движениях небесных тел, уже не заменяемых материальными точками, а являющихся телами в истинном смысле (твердыми или жидкими). В этих работах установлено, что оба движения влияют друг на друга, и что разделение их на только поступательное и только вращательное возможно лишь в первом приближении.

Кондурарь исследовал частное решение задачи о поступательно-вращательном движении для практически важного случая проблемы двух тел, когда планета имеет форму шара, а спутник — форму сфероида. Под сфероидом автор понимает любое однородное тело вращения с плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси вращения. Рассмотренному решению соответствуют круговые движения центра тяжести спутника около центра планеты с постоянной угловой скоростью, а также прецессионные движения оси спутника около оси, перпендикулярной к плоскости движения, с постоянной скоростью. Кроме того, спутник вращается вокруг своей оси симметрии. Это исследование может быть использовано при расчете ракеты рассматриваемой формы, а также при сооружении ракетодромов, имеющих конфигурацию сжатого сфероида («тарелки» или «диска»).

Дубошин рассмотрел общую проблему о поступательно-вращательном движении системы абсолютно твердых тел при ньютоновском законе взаимного притяжения. Система полученных уравнений подразделяется на две автономные группы, соответственно характеризующие поступательное движения вместе с центрами масс и вращательные движения около этих центров только тогда, когда тела представляют собой шары со сферическим распределением плотностей. В общем же случае поступательные и вращательные движения взаимосвязаны между собой и, следовательно, центры масс движутся не по кеплеровым траекториям. Однако при исследовании вращения небесных тел вокруг их центров масс указанные движения считают независимыми, так как их взаимосвязь невелика.

Проблема взаимосвязанного поступательно-вращательного движения системы твердых тел имеет большой теоретический и практический интерес для развития и уточнения различных теорий небесной механики, в частности теории движения Луны, а также для оценки эффектов взаимосвязи указанных видов движений искусственных спутников Земли.

Метод осреднения функциональных поправок, его обобщения и модификации

Новый приближенный метод решения функциональных уравнений, установленный Ю. Д. Соколовым

Как известно, большинство задач современной науки и техники сводится к дифференциальным, интегральным, интегродифференциальным и другим классам функциональных уравнений, решить которые в замкнутом виде не удается. Вследствие этого теория приближенных методов решения различных классов уравнений стала одним из основных разделов современной вычислительной математики. Однако бо́льшая часть из существующих в настоящее время приближенных методов оказывается вполне эффективной лишь в случае простейших классов линейных уравнений. Что же касается нелинейных задач, значение которых все более возрастает, то отсутствие эффективных методов их решения часто влечет за собой применение известных алгоритмов без достаточного математического обоснования. Поэтому разработка новых вычислительных алгоритмов, обладающих большой эффективностью и широкой областью применимости, их математическое обоснование, естественно, имеет большое значение как с теоретической, так и с практической точки зрения.

В 1952 г. Ю. Д. Соколов предложил новый алгоритм приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, получивший впоследствии название метода осреднения функциональных поправок. Этот алгоритм сочетает в себе идеи как итеративного, так и проекционного метода и поэтому относится к проекционно-итеративным алгоритмам. В настоящее время этот алгоритм уже нашел достаточно широкое применение при решении многих важных задач прикладного анализа. Он использовался для решения некоторых задач теории упругости, гидро- и газодинамики, теории теплопроводности, теории фильтрации и других областей естествознания и техники.

По сравнению с обычным методом последовательных приближений метод осреднения функциональных поправок обладает большим преимуществом: во многих важных случаях он сходится значительно быстрее, а также имеет более широкую область применимости. Он может быть сходящимся к решению и в случаях, когда обычный метод последовательных приближений расходится.

Ю. Д. Соколов рассмотрел применение метода осреднения функциональных поправок для решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с постоянными, переменными и смешанными пределами интегрирования, систем таких уравнений, а также краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными эллиптического, гиперболического и параболического типов. Суть своего метода Ю. Д. Соколов изложил в монографии «Метод осреднения функциональных поправок». Ниже мы постараемся проиллюстрировать его на примере решения интегральных уравнений.

Рассмотрим в некотором функциональном пространстве нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(t, s) f[t, s, x(s)]\, ds. \tag{7}$$

Идея первоначального варианта метода осреднения функциональных поправок заключается в том, что последовательные приближения $x_n(t)$ к искомому решению уравнения (7) определяются согласно формулам

$$x_n(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(t, s) f[t, s, x_{n-1}(s) + \alpha_n]\, ds, \tag{8}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b \delta_n(t)\, dt, \quad \delta_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \quad x_0(t) = 0. \tag{9}$$

Подставляя выражение для $x_n(t)$ из (8) в (9), получаем для определения постоянных α_n алгебраическое или трансцендентное уравнение

$$(b-a)\alpha_n = \int_a^b \left\{\varphi(t) + \int_a^b K(t, s) f[t, s, x_{n-1}(s) + \alpha_n]\, ds - \right.$$

$$\left. - x_{n-1}(t)\right\} dt. \tag{10}$$

Это уравнение является линейным, если исходное уравнение (7) линейное.

Ю. Д. Соколов подробно исследовал указанный выше алгоритм как в случае, когда уравнение (7) линейное, так и в общем случае нелинейных уравнений. Он установил ряд эффективных достаточных признаков сходимости построенных процессов последовательных приближений и соответствующих априорных оценок погрешности приближенных решений при различных предположениях о функциях, входящих в уравнение (7). Приведем некоторые из них.

Простейшим достаточным условием сходимости процесса последовательных приближений, определяемым согласно (8)—(9), к решению уравнения (7) является неравенство

$$A(L+2N)<1, \tag{11}$$

где

$$L \geqslant \int_a^b |K(t, s)|\, ds, \qquad N = \frac{1}{b-a}\int_a^b dt \int_a^b |K(t, s)|\, ds,$$

A — константа Липшица функции $f(t, s, x)$ по x в области D, определяемой условиями $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, $-\mu+\varphi \leqslant x \leqslant \mu+\Phi$ ($\mu>0$), φ и Φ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $\varphi(t)$ на отрезке $[a, b]$, μ — наименьший положительный корень (если таковой существует) уравнения

$$(L+2N)\, F(\mu)=\mu, \tag{12}$$

$F(\mu) \geqslant |f(t, s, x)|$ в области D (в случае знакопостоянной функции $f(t, s, x)$ в неравенстве (11) $2N$ можно заменить на N). При этом имеет место оценка погрешности n приближения

$$|x-x_n| \leqslant \frac{\delta\eta}{1-AL}\left[1-\frac{2AL}{1+AL}(1-\eta^{n-1})\right]\varepsilon^n, \tag{13}$$

где

$$\delta \geqslant |K_1(t)-\alpha_1|, \quad \varepsilon=\frac{A(L+N)}{1-AN}<1, \quad \eta=\frac{AL}{\varepsilon}.$$

В случае интегрируемости функции $K(t, s)$ в уравнении (7) вместе со своим квадратом Ю. Д. Соколов установил достаточный признак сходимости алгоритма (8)—(9), аналогичный известному достаточному признаку сходимости обычного метода последовательных приближений. Этот признак имеет вид

$$q<1, \qquad q^2=A^2\int_a^b dt \int_a^b K^2(t, s)\, ds, \tag{14}$$

где A — константа Липшица функции $f(t, s, x)$ в указанной области D. Соответствующая оценка погрешности n приближения имеет вид

$$|x-x_n| \leqslant \frac{A\sqrt{\Delta_1}\,\bar{K}}{\sqrt{1-q^2}}\,\frac{q^{n-1}}{1-q}, \tag{15}$$

где

$$\Delta_1 = \int_a^b [x_1(s) - \alpha_1]^2 ds, \qquad \bar{K}^2 = \sup_t \int_a^b K^2(t, s)\, ds.$$

Указанные достаточные признаки сходимости алгоритма (8)—(9) сравнительно просты, но с довольно жесткими ограничениями. Ю. Д. Соколов установил ряд достаточных признаков сходимости при менее жестких предположениях. Приведем здесь два таковых для случая уравнения в пространстве C и L_2.

Пусть в области D функции

$$V(s, z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b K(t, s) f(t, s, z)\, dt$$

и

$$W(t, s, z) = K(t, s)[f(t, s, z) - V(s, z)]$$

удовлетворяют условиям

$$|V(s, z) - V(s, \bar{z})| \leqslant B(s)|z - \bar{z}|,$$
$$|W(t, s, z) - W(t, s, \bar{z})| \leqslant C(t, s)|z - \bar{z}|.$$

Введем обозначения:

$$N_0 = \int_0^b B(s)\, ds, \qquad L_0 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b C(t, s)\, ds,$$

$$J_0^2 = (b-a) \int_a^b B^2(s)\, ds, \qquad K_0^2 = \int_a^b \int_a^b C^2(t, s)\, dt ds,$$

$$Q_0(s) = \int_a^b B(t) C(t, s)\, dt.$$

Тогда имеют место соответственно следующие два признака сходимости:

$$\bar{\varepsilon}_{01} = L_0 + (1 - N_0) \int_a^b Q_0(s)\, ds < 1 \ (N_0 < 1), \tag{16}$$

$$\bar{\varepsilon}_{01} = \sqrt{\int_a^b \int_a^b [C(t, s) + (1 - N_0) Q(s)]^2 dt ds} < 1 \ (N_0 < 1). \tag{17}$$

Этим признакам соответствуют более точные оценки погрешности последовательных приближений.

В случае, когда уравнение (7) линейное, например $f(t, s, x) = x$, установлены достаточные условия сходимости процесса (8)—(9), которые могут выполняться и тогда, когда обычный процесс последовательных приближений не сходится.

Алгоритм (8)—(9) был обобщен Ю. Д. Соколовым на случай систем линейных и нелинейных интегральных уравнений. Для случая системы вида

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \int_a^b K_i(t, s) f_i[t, s, x_1(s), \ldots$$
$$\ldots, x_n(s)]\,ds \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{18}$$

последовательные приближения $x_{i,n}(t)$ определяются из систем

$$x_{i,n}(t) = \varphi_i(t) + \int_a^b K_i(t, s) f_i[t, s, x_{1,n-1} +$$
$$+ \alpha_{1,n}, \ldots, x_{m,n-1} + \alpha_{m,n}]\,ds, \tag{19}$$

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \delta_{i,n}(t)\,dt, \quad \delta_{i,n}(t) = x_{i,n}(t) - x_{i,n-1}(t),$$
$$x_{i,0}(t) = 0. \tag{20}$$

Подставляя выражения для $x_{i,n}(t)$ из (19) в (20), для нахождения $\alpha_{i,n}$ получим систему алгебраических или трансцендентных уравнений m-го порядка. Эта система будет линейной, если исходная система (18) линейная.

Ю. Д. Соколовым установлен ряд достаточных признаков сходимости алгоритма (19)—(20) для случая как линейных, так и нелинейных уравнений.

Пусть функции

$$V_i(s, z_1, \ldots, z_m) = \frac{1}{b-a}\int_a^b K_i(t, s) f_i(t, s, z_1, \ldots, z_m)\,dt,$$

$$W_i(t, s, z_1, \ldots, z_m) = K_i(t, s) f_i(t, s, z_1, \ldots, z_m) -$$
$$- V_i(s, z_1, \ldots, z_m)$$

в рассматриваемой области D удовлетворяют условиям

$$|V_i(s, z_1, \ldots, z_m) - V_i(s, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} B_{ij}(s)\,|z_j - \bar{z}_j|,$$

$$|W_i(t, s, z_1 \ldots, z_m) - W_i(t, s, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} C_{ij}(t, s)|z_j - \bar{z}_j|.$$

Введем обозначения:

$$N_{0ij} = \int_a^b B_{ij}(s)\,ds, \qquad L_{0ij} = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b C_{ij}(t, s)\,ds,$$
$$J_{0ij}^2 = (b-a)\int_a^b B_{ij}^2(s)\,ds, \qquad K_{0ij}^2 = \int_a^b\int_a^b C_{ij}^2(t, s)\,dtds,$$
$$N_0 = \max_i \sum_j N_{0ij}, \qquad L_0 = \max_i \sum_j L_{0ij},$$
$$J_0 = \max_i \sum_j J_{0ij}, \qquad K_0 = \max_i \sum_j K_{0ij}.$$

Тогда имеют место следующие достаточные признаки сходимости алгоритма (19)—(20):

$$\bar{\varepsilon}_0 = L_0(1 - N_0)^{-1} < 1 \quad (N_0 < 1), \tag{21}$$
$$\tilde{\varepsilon}_0 = K_0(1 - J_0)^{-1} < 1 \quad (J_0 < 1), \tag{22}$$
$$\bar{\varepsilon}_{01} = \max_i \sum_j \left[L_{0ij} + \frac{1}{\bar{D}}\int_a^b S_{0ij}(s)\,ds\right] < 1 \quad (\bar{D} > 0,\ \bar{D}_{ij} > 0), \tag{23}$$
$$\tilde{\varepsilon}_0 = \max_i \sum_j \sqrt{\int_a^b\int_a^b \left[C_{ij}(t, s) + \frac{1}{\bar{D}} S_{0ij}(s)\right]^2 dtds} < 1. \tag{24}$$

Здесь через $\bar{D}$ и $\bar{D}_{ij}$ обозначены соответственно определитель

$$\begin{vmatrix} 1 - N_{011} & -N_{012} & \ldots & -N_{01m} \\ -N_{021} & 1 - N_{022} & \ldots & -N_{02m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -N_{0m1} & -N_{0m2} & \ldots & 1 - N_{0mm} \end{vmatrix} \quad (N_{0ij} < 1)$$

и алгебраическое дополнение, соответствующее i-й строке и j-му столбцу

$$S_{0ij}(s) = \sum_q \sum_p \bar{D}_{qi} Q_{0pi}^{qp}(s),$$
$$Q_{0ij}^{pi} = \int_a^b B_{pi}(t)\,C_{ij}(t, s)\,dt.$$

Признаки сходимости (23)—(24) являются аналогами признаков сходимости (16)—(17) для одного уравнения.

Для системы линейных интегральных уравнений Ю. Д. Соколовым установлен ряд достаточных признаков сходимости алгоритма (19)—(20), которые могут выполняться и в случае, если обычный процесс последовательных приближений расходится.

Пусть имеем линейную систему

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_a^b K_{ij}(t, s)\, y_i(s)\, ds \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Тогда алгоритм (19)—(20) можно записать в виде

$$x_{i,n}(t) = \varphi_i(t) + \\ + \sum_j \int_a^b K_{ij}(t, s)\, x_{j,n-1}(s)\, ds + h \sum_j \alpha_{in} M_{ij}(t), \tag{26}$$

где

$$M_{ij}(t) = \frac{1}{h} \int_a^b K_{ij}(t, s)\, ds \quad (h = b - a)$$

и $\alpha_{i,n}$ определяются по формулам (20).

Если обозначить

$$C_{\text{т}ij}(s) = \frac{1}{h} \int_a^b K_{ij}(t, s)\, dt,$$

$$H_{ij}(t, s) = K_{ij}(t, s) - C_{\text{т}i,j}(s),$$

$$S_{ij}(s) = \sum_q \sum_p D_{qi} Q_{pj}^{qp},$$

$$Q_{ij}^{pi} = \int_a^b G_{pi}(t)\, H_{ij}(t, s)\, dt,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 - hK_{11} & -hK_{12} & \ldots & -hK_{1m} \\ -hK_{21} & 1 - hK_{22} & \ldots & -hK_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -hK_{m1} & -hK_{m2} & \ldots & 1 - hK_{mm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$K_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_a^b dt \int_a^b K_{ij}(t, s)\, ds,$$

D_{ij} — алгебраическое дополнение, соответствующее i-й строке и j-му столбцу, то можно получить следующие достаточные условия сходимости алгоритма (19)—(20):

$$\bar{\eta} = \max_i \sup_{0 \leqslant x \leqslant b} \sum_j \int_a^b \left| H_{ij}(t, s) + \frac{1}{D} S_{ij}(s) \right| ds < 1, \tag{27}$$

$$\tilde{\eta} = \max_i \sum_j \sqrt{\tilde{K}_{ij}^2 + \frac{h}{D^2} \int_a^b S_{ij}^2(s)\, ds} < 1, \tag{28}$$

где

$$\tilde{K}_j^2 = \int_a^b \int_a^b H_{ij}^2(t, s)\, dt ds.$$

Ю. Д. Соколов рассмотрел применение метода осреднения функциональных поправок в случаях приближенного решения линейной одномерной краевой задачи для дифференциальных уравнений второго и высших порядков, задачи Дирихле для кольца при уравнениях Лапласа и Пуассона, первой краевой задачи в общем случае линейного уравнения эллиптического типа, а также для решения соответствующих одномерных краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений и первой краевой задачи для уравнения $\Delta U = p\,(x, y, u, u_x^1, u_y^1)$.

Во многих случаях метод осреднения функциональных поправок удобнее использовать при решении непосредственно этих задач, не сводя их предварительно к интегральным уравнениям.

Ю. Д. Соколов построил аналог метода осреднения функциональных поправок для приближенного решения интегральных уравнений с переменным верхним пределом и уравнений смешанного типа.

Рассмотрим последовательно уравнение

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(t, s)\, f[t, s, x(s)]\, ds, \tag{29}$$

систему уравнений

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \int_a^t K_i(t, s)\, f_i[t, s, x_1(s), \ldots, x_m(s)]\, ds$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m), \tag{30}$$

уравнение

$$u(p)=\varphi(p)+\int\limits_{B_t} K(p, q) f[p, q, u(q)]\, d\sigma \tag{31}$$

и систему уравнений

$$u_i(p)=\varphi_i(p)+\int\limits_{B_t} K_i(p, q) f[p, q, u_1(q), \ldots, u_m(q)]\, d\sigma$$

$$(i=1, 2, \ldots, m), \tag{32}$$

где $p(x, t)$ — точка области $B(a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant T \leqslant T_0)$, $q(\xi, \tau)$ — точка области $B_t(a \leqslant \xi \leqslant b,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t)$, а $d\sigma$ — элемент площади $d\xi d\tau$.

В случаях уравнения (29) и системы (30) алгоритм метода осреднения функциональных поправок можно записать соответственно в виде

$$J_n(t)=\varphi(t)+\int\limits_a^t K(t, s) f[t, s, x_{n-1}(s)+\alpha_n]\, ds, \tag{33}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} \delta_n(t)\, dt, \quad \delta_n(t)=x_n(t)-x_{n-1}(t) \quad \text{и} \tag{34}$$

$$J_{i,n}(t)=\varphi_i(t)+\int\limits_a^b K_i(t, s) f_i[t, s, x_{1,n-1}+$$

$$+\alpha_{1,n}, \ldots, x_{m,n-1}+\alpha_{m,n}]\, ds, \tag{35}$$

$$\alpha_{i,n}=\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} \delta_{i,n}(t)\, dt, \quad \delta_{i,n}(t)=x_{i,n}(t)-x_{i,n-1}(t), \tag{36}$$

где h — некоторое число $h>a$, $x_0(t)=0$, $x_{i,0}(t)=0$.

В случаях же уравнения (31) и системы (32) последовательные приближения, определяемые согласно методу осреднения функциональных поправок, находятся соответственно из формул

$$u_n(p)=\varphi(p)+\int\limits_{B_t} K(p, q) f[p, q, u_{n-1}(q)+\alpha_n]\, d\sigma, \tag{37}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{s}\int\limits_B \delta_n(p)\, ds, \quad \delta_n(p)=u_n(p)-u_{n-1}(p) \quad \text{и} \tag{38}$$

$$u_{i,n}(p)=\varphi_i(p)+\int\limits_{B_t} K_i(p, q) f_i[p, q, u_{1,n-1}+$$

$$+\alpha_{1,n-1}, \ldots, u_{m,n-1}+\alpha_{m,n}]\, d\sigma, \tag{39}$$

$$\alpha_{i,n}=\frac{1}{s}\int\limits_B \delta_{i,n}(p)\,ds, \quad \delta_{i,n}(p)=u_{i,n}(p)-u_{i,n-1}(p), \tag{40}$$

где ds обозначает элемент площади $dxdt$ и $s=hT_0$.

Поскольку уравнение (29) и система (30) являются частными случаями соответственно уравнения (7) и системы (18), а алгоритмы (8)—(9) и (19)—(20) в этих случаях совпадают с алгоритмами соответственно (33)—(34) и (35)—(36), то приведенные выше признаки сходимости и оценки погрешности применимы и в случае алгоритмов (33)—(34) и (35)—(36). Это же касается уравнения (31) и системы (32) и соответственных им алгоритмов (37)—(38) и (39)—(40), поскольку уравнение (31) и систему (32) можно рассматривать как частные случаи соответствующих уравнений и систем с постоянными пределами.

Развитие и обобщение метода осреднения функциональных поправок Соколова

Первые обобщения метода осреднения функциональных поправок на случай операторных уравнений в полном нормированном пространстве были получены Е. А. Чернышенко (1956). Используя идею метода Соколова, автор построила алгоритмы приближенного решения уравнения

$$x=Tx+f \tag{41}$$

в полном нормированном пространстве. Согласно этому алгоритму последовательные приближения x_n к решению уравнения (41) определяются из системы операторных уравнений

$$x_n=T(x_{n-1}+\alpha_n)+f \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{42}$$

$$\alpha_n=s(x_n-x_{n-1}), \tag{43}$$

где s — некоторый оператор осреднения.

Для случая, когда оператор T линейный, а уравнение (41) решается в гильбертовском пространстве, Чернышенко построила алгоритм, согласно которому α_n в формуле (42) ищутся в виде

$$\alpha_n=\sum_{i=1}^{k} a_{in}\varphi_i, \tag{44}$$

где $\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ — ортонормированная система элементов, а операторы a_{in} определяются из системы

$$(x_n-x_{n-1},\ \varphi_i)=(\alpha_n,\ \varphi_i), \tag{45}$$

т. е. $\alpha_n = p(x_n - x_{n-1})$, где p — оператор ортогонального проектирования исходного пространства на его подпространство, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Чернышенко рассмотрела также применение метода Соколова для приближенного решения ряда других задач.

Исследования в области теории и применений метода осреднения функциональных поправок для случая линейных операторных уравнений в банаховом и гильбертовом пространствах были выполнены А. Ю. Лучкой (1960). Первоначально его результаты относились к теории метода Соколова для случая линейных интегральных уравнений в пространстве L_2. Им установлено достаточное условие сходимости алгоритма (8)—(9) в случае, когда $f(t, s, x) = x$, показывающее, что данный алгоритм может быть сходящимся также во многих случаях неприменимости обычного метода последовательных приближений. При этом быстрота сходимости его часто бывает значительно более высокой, чем для обычного процесса последовательных приближений. Аналогичные факты были установлены и для случая систем интегральных уравнений. Дальнейшее уточнение и обобщение этих признаков было проведено Ю. Д. Соколовым как для случая одного линейного уравнения, так и для систем таких уравнений.

Для более общего случая линейного операторного уравнения

$$Ax = g + Bx \tag{46}$$

в предположении, что линейные операторы A и B действуют на банахово пространство E_1 в банаховом пространстве E_2 и существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, А. Ю. Лучкой предложен и исследован обобщенный метод осреднения функциональных поправок. Согласно этому методу последовательные приближения x_n определяются из уравнений

$$Ax_n = g + B(x_{n-1} + \alpha_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{47}$$

$$s\alpha_n = ps\delta_n, \quad \delta_n = x_n - x_{n-1}, \tag{48}$$

где S — некоторый линейный оператор, переводящий элементы пространства E_1 в элементы банахова пространства E_3, такой, что существует ограниченный обратный оператор S^{-1}, p — проекционный оператор, проектирующий пространство E_3 на его подпространство конечной или же бесконечной размерности. В случае, когда E_3 — конечномерное подпространство размерности k, алгоритм (47)—

(48) приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений k-го порядка. А. Ю. Лучкой рассмотрены также различные частные случаи задания оператора s и проекционного оператора p. Сведя алгоритмы (47)—(48) к обычному методу последовательных приближений для некоторого преобразованного уравнения, эквивалентного исходному, Лучка определил необходимое и достаточное условие его сходимости и априорные оценки погрешности последовательных приближений. Ряд эффективных достаточных признаков сходимости и соответствующих оценок погрешностей алгоритма (47)—(48) и его частных случаев установлен Лучкой для линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Лучкой рассмотрено также применение алгоритма (47)—(48) и его частных случаев для различных частных классов операторных уравнений — интегральных уравнений, бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

Н. С. Курпель (1963) построил алгоритм для приближенного решения уравнения

$$x = Tx, \tag{49}$$

где T — некоторый оператор, действующий в некотором функциональном пространстве E, такой, что $Tx = F(x, x)$, а $F(u, v) \in E$ при $u, v \in E$. Этот алгоритм заключается в том, что последовательные приближения x_n выражаются как решения операторных уравнений

$$x_n = F_k(x_n, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x_0 \in E, \tag{50}$$

где операторы F_k определяются согласно формулам

$$F_1(u, v) = F(u, v), \quad F_i(u, v) = F[u, F_i(u, v)]$$
$$(i = 2, 3, \ldots). \tag{51}$$

В зависимости от способа представления оператора T в виде $Tx = F(x, x)$ получаем различные алгоритмы приближенного решения операторных уравнений. В частности, при $k=1$ имеем алгоритм, предложенный Т. Важевским. При надлежащем выборе оператора F алгоритм (50)—(51) сходится значительно быстрее, чем обычный процесс последовательных приближений, применяемый непосредственно к уравнению (49), он также может быть сходящимся и в случаях, когда последний расходится. Быстрота сходимости и область применимости его весьма существенно зависят от числа k.

Первоначально алгоритм (50)—(51) был рассмотрен в работах Курпеля в некоторых частных случаях представления оператора T в виде $Tx=F(x, x)$ при $k=1$ и для частных случаев пространства E, а затем в общем случае в пространстве, матризованном элементами некоторого полуупорядоченного множества, и в структурно-нормированном пространстве. Если пространство E линейное, то во многих важных с теоретической и практической точки зрения случаях оператор T удобно строить в виде

$$F(u, v) = pTu + QTv, \qquad F(u, v) = T(pu + Qv),$$
$$F(u, v) = pTu + QT(pu + Qv),$$

где p — проекционный оператор, проектирующий исходное пространство E на некоторое его подпространство E_p, $Q=1-p$. В случае выбора оператора F в указанном виде алгоритм (50)—(51) приводит к решению операторных уравнений в подпространстве E_p. Эти уравнения являются линейными, если исходное уравнение (49) линейное. В работах Курпеля также исследованы различные нестационарные процессы последовательных приближений, дан анализ влияния погрешностей округления на их скорость сходимости, построен ряд других алгоритмов, не укладывающихся в общую схему (50)—(51).

Для приближенного решения уравнений вида (29) и (31) в случае $f(t, s, x)=x$ В. И. Тивончук (1963) предложил и исследовал новые варианты метода осреднения функциональных поправок. Согласно этим поправкам последовательные приближения $x_n(t)$ и $u_n(p)$ определяются соответственно по формулам (33) и (37), где вместо α_n берутся функции $\alpha_n(t)$, определяемые соответственно равенствами

$$\alpha_n = \frac{1}{t-a}\int_a^t \delta_n(s)\,ds, \qquad \alpha_n(t) = \frac{1}{(b-a)\,t}\int_{B_t} \delta_n(q)\,d\sigma. \tag{52}$$

В обоих случаях для определения $\alpha_n(t)$ имеем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Тивенчук исследовал также вариант метода решения уравнений (31), который приводит к решению интегрального уравнения относительно $\alpha_n(t)$. Характерное свойство предложенных вариантов: в отличие от алгоритмов (33)—(34) и (37)—(38) при определенных условиях, налагаемых на пространства, в которых рассматриваются уравнения, они сходятся во всей заданной области соответственно $a \leqslant t \leqslant a+h$ и B, причем сходятся факториально. Для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра Тивончук построил и исследовал алгоритм, сочетающий идеи методов Соколова и Пиконе.

Использованию метода осреднения функциональных поправок в решении интегральных уравнений с запаздыванием посвящены исследования М. М. Галя (1966). Некоторые варианты метода применительно к интегральным уравнениям, заданным в неявном виде, рассмотрены Л. П. Пакловой (1969). В. Г. Иваницкий (1968) предложил некоторые модификации метода Соколова для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Различные модификации этого метода применительно к интегральным уравнениям типа Фредгольма—Вольтерра и с запаздыванием были рассмотрены в работах В. Ю. Дидыка (1969). Ф. М. Мигович (1969) исследовал комбинации алгоритмов метода осреднения функциональных поправок и метода Ньютона—Канторовича, а также соответствующие им нестационарные процессы. Т. С. Кравчук (1970) применила варианты метода Соколова для построения монотонных процессов последовательных приближений к решениям операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах с конусом.

Над развитием метода осреднения функциональных поправок работали не только сотрудники Института математики АН УССР. Этот метод исследовался во многих научных центрах Советского Союза. Еще в 50-х годах он был использован Л. Е. Кривошеиным (г. Фрунзе) для приближенного решения задачи Коши и краевых задач для интегродифференциальных уравнений. Применение этого метода к некоторым классам интегродифференциальных уравнений и к линейным операторным уравнениям первого рода содержится в работах Б. Г. Мосолова и С. С. Мосоловой (Ташкент, 1968). Некоторые модификации метода Соколова предложены Ю. М. Молоковичем (Казань, 1967) и В. М. Мадорским (Минск, 1967). К. Б. Бараталиев (г. Фрунзе, 1967) применил этот метод к интегральным уравнениям с запаздыванием. Алгоритмы, по своей идее близкие к алгоритму метода Соколова, предложены В. И. Лебедевым (Москва), М. А. Красносельским (Воронеж), Б. А. Бальтюковым (Иркутск) и другими авторами.

Метод осреднения функциональных поправок, его обобщения и модификации получили применение и за рубежом. Основной вариант метода был использован для решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений К. Викером. Построение общих алгоритмов, близких по идее к обобщенным алгоритмам метода Соколова, осуществлено независимо в работах Т. Важевского, И. Варги, И. Шмидта, М. Квапиша. Исследованию нестационарного процесса, соответствующего алгоритму (50)—(51), посвящена работа Т. Янковского.

В настоящее время теория метода осреднения функциональных поправок, его обобщений и модификаций продолжает эффективно развиваться как в Советском Союзе, так и в зарубежных странах. Этот метод находит все более широкое применение для решения многих важных задач современной науки и техники.

Работы Ю. Д. Соколова в области теории фильтрации грунтовых вод, динамики шахтных подъемных канатов

Предшественники Ю. Д. Соколова в области исследования теории фильтрации

Фильтрация — это движение жидкости или газа сквозь пористую среду. Основой решения задач фильтрации является гидравлика и гидродинамика. Первые серьезные работы в этой области написаны в 80-х годах XIX в. и принадлежат Н. Е. Жуковскому, который при построении теории фильтрации исходил из уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Он пренебрегал силами инерции, считая, что грунтовые воды движутся с малыми скоростями.

Последователем Жуковского в данной области был Н. Н. Павловский, написавший большую монографию «Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями» (1922). Как и Жуковский, он исходит из закона Дарси, согласно которому скорость фильтрации является линейной функцией от градиента напора. Стационарную задачу фильтрации Павловский сводит к решению уравнения Лапласа. Ему же принадлежит эффективный приближенный метод расчета фильтрации, известный в литературе под названием «способ фрагментов».

Долгое время для решения фильтрационных задач ученые пользовались методиками Жуковского и Павловского. Новый метод в теории плоской установившейся фильтрации был предложен в 1938 г. П. Я. Полубариновой-Кочиной. Этот метод опирается на аналитическую теорию линейных дифференциальных уравнений и может быть эффективно применен к расчету земляных плотин. С. Н. Нумеров (1939) построил метод решения задачи плоской установившейся фильтрации, который требует определения аналитической функции в некоторой области с заданными вещественной и мнимой частями этой функции на различных участках границы области.

Пространственные задачи фильтрации до настоящего времени решаются приближенными методами. Дальнейшее обобщение фильтрационных задач относится к случаю нарушения закона Дарси. Некоторые варианты таких задач решены С. А. Христиановичем (1940). Основоположником исследований неустановившихся фильтрационных процессов является Л. С. Лейбензон (1934). Ему же принадлежит вывод дифференциальных уравнений движения газов и газированной жидкости. Эти исследования систематически изложены в его монографии «Нефтепромысловая механика» (1934). Неустановившееся движение газа в пористой среде определяется нелинейным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа. Для установившегося режима это уравнение переходит в уравнение Лапласа.

Мы указали лишь основополагающие работы в области теории фильтрации. В настоящее время теория фильтрации это хорошо развитый самостоятельный раздел теоретической и прикладной механики, возникший непосредственно из запросов технической практики.

Исследованием различных вопросов этой теории занимаются многочисленные ученые в нашей стране и за рубежом (В. Н. Щелкачев, В. В. Ведерников, Л. Хопф, Э. Трефц, И. А. Чарный, М. Маскет и др.).

Вклад Ю. Д. Соколова в развитие теории фильтрации

1951 г. является началом нового направления исследований Ю. Д. Соколова, относящихся к проблемам фильтрации грунтовых вод. Как уже указывалось выше, эти проблемы гидродинамики имеют не только теоретическую ценность, но и практическое значение в связи с наличием значительной потери воды на фильтрацию из каналов.

Ю. Д. Соколов решил задачу о фильтрации в однородном грунте из незакольматированного канала трапецеидального поперечного сечения при конечной глубине залегания дренажного слоя, уделяя большое внимание построению эффективных методов приближенного расчета, что представляет интерес для инженеров.

Некоторые работы Ю. Д. Соколова этого цикла посвящены исследованию стационарного и нестационарного движений грунтовых вод. В этих работах он получил расчетные формулы, удобные для применения в инженерной практике. Рассматривая задачу о плоском нестационарном движении грунтовых вод при мгновенном изменении уровня воды в водохранилище, он применил для решения соответствующего уравнения Буссинека метод последовательного изменения стационарных состояний. Соколов показал, что к аналогичным задачам теории фильтрации и теории теплопроводности, а также к значительно более сложным задачам механики и математической физики можно применить новый, установленный им, метод осреднения функциональных поправок, который, сохраняя простоту ранее названного метода последовательного изменения стационарных состояний, весьма распространенного в исследованиях в области теории фильтрации грунтовых вод, увеличивает точность расчетных формул.

В дальнейшем Ю. Д. Соколов решил задачу о нестационарном радиальном приплыве грунтовых вод в дренажную галлерею (или в колодец) двумя методами: методом последовательного изменения стационарных состояний и методом осреднения функциональных поправок.

Применение метода осреднения Соколова к приближенному решению этой задачи состоит в осреднении величины производной $\frac{\partial h}{\partial t}$ в уравнении Буссинека

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{C}{2\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{\omega}{\mu}, \tag{53}$$

где C — коэффициент фильтрации; μ — коэффициент водоотдачи; ω — интенсивность фильтрации; h — уровень воды в момент t на расстоянии r от оси галереи. Необходимо найти решение уравнения (53), удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$h(r, 0)=H_0=\text{const} \quad (r_0\leqslant r\leqslant L),$$

$$h(r_0, t)=h_0<H_0, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=L}=0,$$

где L — радиус цилиндрического слоя (который требуется осушить), коаксиального с галерей радиуса r_0.

Рассматривая две фазы процесса (распространение зоны депрессии и истощение водоносного пласта) и обозначая через l радиус депрессии в момент t, предположим, что на протяжении первой фазы при $l\leqslant r\leqslant L$

$$h=H=H_0+\frac{\omega}{\mu}t=H_0+\frac{\varepsilon C}{\mu}t\left(\varepsilon=\frac{\omega}{C}\geqslant 0\right),$$

а при $r_0 \leqslant r \leqslant l$ приближенное значение h определяется

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) = -2f(t), \tag{54}$$

где

$$f(t) = \varepsilon - \frac{2\mu}{C}\frac{\int\limits_{r0}^{l}\frac{\partial h}{\partial t}rdr}{l^2 - r_0^2}, \tag{55}$$

и условиями

$$h(r_0, t) = h_0, \quad h(l, t) = H_0 + \frac{\omega}{\mu}t = H_0 + \frac{\varepsilon C}{\mu}t, \tag{56}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=l} = 0.$$

При исследовании второй фазы h определяется формулами (54)—(56), если заменить l на L и $H_0 + \frac{\omega}{\mu}t$ на $H(t)$, где $H(t)$ — искомая функция.

Соколов установил формулы, которые определяют все необходимые для гидрогеологических расчетов величины. Расчет шести различных вариантов показал, что вычисления методом осреднения функциональных поправок значительно отличаются от полученных методом последовательной смены стационарных состояний. Метод Соколова оказался более эффективным и точным.

Динамика шахтных подъемных канатов

Значительный интерес представляют исследования Ю. Д. Соколова по динамике шахтных подъемных канатов. Он предложил оригинальный подход к приближенному решению основного уравнения динамики подъемного каната, установленного в 1954 г. Г. Н. Савиным. При этом канат принимается за не целиком упругую нить переменной длины. В системе координат с началом в точке O набегания каната на барабан и осью Ox, направленной вдоль каната вниз, указанное уравнение имеет вид

$$\frac{g}{q}\frac{\partial T}{\partial x} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)_{x=0} + \frac{\partial v}{\partial t} - g, \tag{56}$$

где t — время; x — абсцисса расчетного сечения, $v(t)$ — скорость точки обода барабана $[v(0)=0]$; g — ускорение силы тяжести; $w(x, t)$ — абсолютная деформация отрезка каната длиной x; $T = K\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$ —усилие в поперечном сечении каната; $K=ES$; E — модуль упругости каната; S — площадь металла в поперечном сечении каната; α — коэффициент затухания динамических усилий в канате; $\beta=\frac{g}{q}K$, $\gamma=\frac{g}{q}\alpha$ — вес погонного метра каната.

Соколов принимает, что подъем груза с неподвижного основания происходит в соответствии с трапецеидальной тахограммой. Применяя метод функциональных поправок и осредняя инерционные члены в данном уравнении, он получает его приближенное решение для четырех фаз процесса: 1) снятие груза с неподвижного основания; 2) равноускоренное движение точек обода барабана; 3) неравномерное движение этих точек; 4) равнозамедленное движение этих точек. Это решение приводится для первой фазы к интегрированию одного линейного уравнения, для трех других фаз подъема к решению системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Для нахождения динамических усилий в нижнем конце каната Соколов получил линейное однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка. При исследовании поведения указанной системы двух уравнений при $l \to \infty$ (l — длина деформированного каната в момент t) он рассмотрел задачу в более общей постановке и построил четырехпараметрическое семейство решений, которые остаются ограниченными при этом предельном переходе. Этот результат имеет большое значение для обоснования новой теории расчета шахтных подъемных канатов, выдвинутой Г. Н. Савиным.

Послесловие

В этой небольшой книге сделана попытка кратко осветить жизненный путь, педагогическую и научную деятельность члена-корреспондента АН УССР Юрия Дмитриевича Соколова. Его научные интересы стояли на краю современной науки и носили энциклопедический характер, ведь его учителем был Д. А. Граве, один из последних энциклопедистов XX в. Результаты, полученные Ю. Д. Соколовым, вошли в золотой фонд теоретической и прикладной математики и механики.

Ю. Д. Соколов занимался также исследованиями в области истории этих наук. Ему принадлежит ряд работ, в которых оценивается роль Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и М. В. Остроградского в развитии математических наук. Специальное исследование Ю. Д. Соколова посвящено развитию аналитической и небесной механики на Украине за годы Советской власти. Много времени и сил он отдавал работе по изданию трудов выдающихся отечественных математиков и механиков — М. В. Остроградского, Н. М. Крылова, Т. Ф. Вороного и др. Он был постоянным членом редколлегии «Украинского математического журнала» и многих других научных сборников.

Ю. Д. Соколов был ученым высокой культуры. Зная английский, французский, немецкий, итальянский, латинский и греческий языки, он читал в подлинниках классиков науки и литературы.

Он был большим знатоком литературы, особенно поэзии. Любил читать наизусть стихи Омара Хайяма, полные мудрости и философского содержания. Ему были близки театр и музыка, история и философия. Как уже было отмечено, Ю. Д. Соколов на протяжении многих лет руководил научным семинаром по дифференциальным уравнениям при Институте математики АН УССР. Этот семинар регулярно работает с 1928 по 1941 г. и с 1944 г. по сей день. Он координировал научно-исследовательскую работу в различных направлениях теории дифференциальных интегральных уравнений и их приложений. На заседаниях семинара выступали научные сотрудники ряда научных центров наших союзных республик. Здесь зародились и получили надлежащее оформление и завершение многие работы монографического и диссертационного характера. Ю. Д. Соколов был душой этого семинара. Высокая культура, широкая эрудиция, глубокие знания, феноменальная память — этими большими духовными ценностями он обладал сполна. Комментируя выступления докладчиков, он с легкостью схватывал глубинные идеи сообщений и всегда делал тонкие, полные мудрости замечания и давал необходимые наставления и советы.

Память о большом ученом и гражданине навсегда останется в сердце нашего народа.

Основные даты жизни и деятельности Ю. Д. Соколова

1896 14 (26) мая родился в станице Лабинской (ныне г. Лабинск, Краснодарский край).
1915 Окончил с золотой медалью Лабинскую мужскую гимназию и поступил на физико-математический факультет Киевского университета.
1917—1920 Учитель в станице Лабинской.
1921 Окончил Киевский университет. Назначен научным сотрудником Комиссии прикладной математики Украинской академии наук. Опубликовал первую научную статью «К движению материальной точки, которая притягивается к неподвижному центру и находится под действием пертурбацийной силы».
1923 Женитьба на М. А. Курик-Пинщечиской.
1929 Защитил докторскую диссертацию на тему «Условия общего соударения трех тел, которые взаимно притягиваются по закону Ньютона». Присвоена ученая степень доктора математики.
1929—1934 Заведующий кафедрой математики и механики Киевского рабочего машиностроительного института.
1930 Получил за диссертационную работу первую премию Комиссии премирования научных работ при Наркомпросе УССР.
1930—1938 Заведующий кафедрой математики Киевского политехнического института и Института кожевенной промышленности.
1930—1971 Заведующий кафедрой математики Киевского инженерно-строительного института.
1932—1971 Работал в Институте математики АН УССР.
1937—1941 Заведующий кафедрой математики Киевского индустриального института.
1939 Избран членом-корреспондентом АН УССР.
1940 Награжден знаком «Отличник Наркомстроя СССР».
1941—1943 Находясь в оккупированном Киеве, активно помогал подпольщикам и партизанам в борьбе с фашистами.
1943—1949 Заведующий кафедрой теоретической механики Киевского государственного университета.
1944 Награжден медалью «За оборону Киева».
1951 Опубликовал монографию «Особые траектории системы свободных материальных точек».
1951—1967 Разрабатывал и развивал приближенный метод решения широкого класса функциональных уравнений.
1966 В связи с 70-летием награжден орденом Трудового Красного Знамени.
1971 2 февраля скончался в г. Киеве.

Библиография

Труды Ю. Д. Соколова

1. *Sokoloff G.* Sur le mouvement d'un point materiel, attiré par un centre fixe et soumis a l'action d'une force perturbatrice constante. — Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1923, т. 1, вип. 1, с. 35—41.
2. *Sokoloff G.* Sur la limite inférieure des rayons de convergence des developpements des coordonnées dans le probléme des trois corps. — Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1925, т. 1, вип. 4, с. 12—14.
3. *Sokoloff G.* Über die Anwendung des Cauchy-Picardischen Satzes auf die Bewegunggleichungen der n Körper. — Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1926, т. 2, вип. 1, с. 32—35.
4. *Gravé D., Sokoloff G.* Sur le mouvement du périhelie de Mercure. — Тр. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1926, т. 5, вип. 1, с. 3—11.
5. *Sokoloff G.* Über den Einfluss des magnetichen Sonnenfeldes auf die Planetenbevegung. — Astron. Nachr., 1927, Bd. 229, N 5480, S. 129—130.
6. *Соколов Ю. Д.* Узагальнення теореми Weierstrass'а — Sundman'а з теорії руху трьох тіл. — Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1927, т. 2, вип. 3, с. 25—28.
7. *Соколов Ю. Д.* Про траєкторії матеріальної точки, що притягається нерухомим центром та підлягає діянню сталої пертурбаційної сили. — Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1927, т. 2, вип. 3, с. 39—55.
8. *Sokoloff G.* Über die notwendige Bedingung für den allgemeinen Zusammenstoss von n Körpern, die einander nach dem Newtonschen Gesetz ansiehen. — Astron. Nachr., 1927, Bd. 230, N 5518, S. 417—418.
9. *Соколов Ю. Д., Граве Д. А.* О влиянии магнитного поля Солнца на движение планет. — В кн.: Тр. I Всерос. съезда математиков. Москва, 1927. М.: Изд-во АН СССР, 1928, с. 263—264.
10. *Соколов Ю. Д.* Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягаються за законом Ньютона: Дис. . . . д-ра мат. наук. — Тр. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1928, т. 9, вип. 1, с. 1—63.
11. *Соколов Ю. Д.* Про деякі формули наближеного обчислення означених інтегралів. — Зб. наук. праць Київ. будівельн. ін-ту, 1933, т. 1, с. 5—10.
12. *Соколов Ю. Д.* До дюффінгового методу чисельного інтегрування діфференціальних рівнянь. — Бюл. Київ. технол. ін-ту шкіряної пром-сті, 1934, № 1, с. 3—7.
13. *Соколов Ю. Д.* Про загальний співудар в симетричному випадку задачі трьох тіл. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1934, № 1, с. 27—33.
14. *Соколов Ю. Д.* Про співудар в обмеженій задачі трьох тіл, що обопільно протягаються (або відштовхуються) пропорціонально їхнім

масам і якійсь функції відповідного віддалення. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1934, № 4, с. 133—155.
15. *Соколов Ю. Д.* Про деякі особливості в обмеженій задачі трьох тіл. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1935, № 1, с. 107—118.
16. *Соколов Ю. Д.* Про особливі траєкторії в задачі трьох тіл, що обопільно притягаються пропорціонально їхнім масам і якійсь функції відповідного віддалення. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1935, № 3, с. 11—34.
17. *Соколов Ю. Д.* Лінійні різнецеві рівняння (з прикладами простіших застосувань). Київ: Вид-во АН УРСР, 1935. 52 с.
18. *Соколов Ю. Д.* Про одну теорему Weierstrass'a. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1936, № 2, с. 47—51.
19. *Соколов Ю. Д.* До задачі *n* тіл. — Бюл. Київ. технол. ін-ту шкіряної пром-сті, 1936, № 2, с. 3—10.
20. *Sokoloff G.* Sur le choc dans le probléme das trois corps, qui s'attirent proportionnellement à leurs masses et à une fonction de la distance. — Bull. classe sci. Acad. Belg., 1936, Ser. 5, t. 22, N 3, p. 295—305.
21. *Sokoloff G.* Sur les tracjectoires singulieres dans le probléme des trois corps, qui sattirement mutuellement proportionnellement à leurs masses et à une fonction de la distance. — Bull. classe sci. Acad. Belg., 1936, Ser. 5, t. 22, N 4, p. 540—551.
22. *Socoloff G.* Sur une généralisation d'un thèorème de Weierstrass — Sundman. — Rev. math. Hisp. — Amer., 1936, t. 11, N 2, p. 28—30.
23. *Соколов Ю. Д.* Про узагальнення однієї теореми. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1937, № 1, с. 3—7.
24. *Соколов Ю. Д.* Досліди з аналітичної дінаміки. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1937, № 3, с. 25—35.
25. *Соколов Ю. Д.* Уваги про узагальнену задачу *n* тіл. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1937, № 8, с. 95—100.
26. *Соколов Ю. Д.* Про один мемуар M. Kivéliovitch'a. — Журн. Ін-ту математики АН УРСР, 1937, № 4, с. 69—72.
27. *Соколов Ю. Д.* О прямолинейном движении трех материальных точек, взаимно притягивающихся обратно пропорционально произвольным степеням расстояний. — Сб. науч.-исслед. работ Киев. ин-та кожев. пром-сти, 1938, № 3, с. 221—230.
28. *Соколов Ю. Д.* Замечания о прямолинейной задаче трех тел.— Сб. науч.-исслед. работ Киев. ин-та кожев. пром-сти, 1938, № 3, с. 231—235.
29. *Соколов Ю. Д.* Про особиві точки інтегралів прямолінійного руху трьох матеріальних точок, які взаємно притягаються обернено пропорціонально довільним степеням віддалень. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1938, № 1, с. 3—16.
30. *Соколов Ю. Д.* Про особливі точки інтегралів в симетричному випадку узагальненої задачі трьох тіл. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1939, № 3, с. 3—20.
31. *Соколов Ю. Д.* Про загальний епівудар в задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено пропорціонально довільній степенні віддалення. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1940, № 4, с. 7—45.
32. *Соколов Ю. Д.* Про симметричний рух системи матеріальних точок, які взаємодіють з силами, що залежать від взаємних віддалень. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, № 5, с. 99—115.

33. *Соколов Ю. Д.* Про полюси координат в симетричному русі системи матеріальних точок, які взаємодіють з силами, що залежать від взаємних віддалень. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1941, № 6, с. 33—50.
34. *Соколов Ю. Д.* О траекториях общего соударения трех материальных точек, взаимодействующих с силами, зависящими от взаимных расстояний. — ДАН СССР, 1941, т. 33, № 2, с. 112—115.
35. *Соколов Ю. Д.* О новом случае интегрируемости в прямолинейной задаче трех тел. — ДАН СССР, 1945, т. 46, № 3, с. 99—102.
36. *Соколов Ю. Д.* Про особливі траекторії системи матеріальних точок, які взаємодіють з силами, що залежать від взаємних віддалень. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1947, № 9, с. 62—88.
37. *Соколов Ю. Д.* Про випадки інтегрувальності в плоскій та прямолінійній задачі трьох тіл. — Доповіді АН УРСР, 1947, № 4, с. 3—8.
38. *Соколов Ю. Д.* Про випадки інтегрувальності в загальній задачі трьох тіл. — Доповіді АН УРСР, 1947, № 4, с. 9—13.
39. *Соколов Ю. Д.* О пространственном гомографическом движении системы трех материальных точек. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 3, с. 369—371.
40. *Соколов Ю. Д.* О траекториях неограниченного удаления трех материальных точек, находящихся под действием взаимных сил. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 4, с. 539—542.
41. *Соколов Ю. Д.* Траекторії співудару в узагальненій «problème restraint». — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1948, т. 7, вип. 4, № 2, с. 41—57.
42. *Соколов Ю. Д.* Траекторії необмеженного віддалення в узагальненій «Problème restraint». — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1948, т. 7, вип. 4, № 2, с. 61—70.
43. *Соколов Ю. Д.* Про траекторії необмеженого віддаленняя системи матеріальних точок, що знаходяться під дією взаємних сил. — Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, 1948, № 10, с. 142—161.
44. *Соколов Ю. Д.* Об асимптотических решениях дифференциальных уравнений. — Сб. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1948, вып. 8, с. 62—74.
45. *Соколов Ю. Д.* Пространственные траектории общего соударения системы материальных точек, находящихся под действием взаимных сил. — Сб. Ин-та математики АН УССР, 1948, № 11, с. 3—23.
46. *Соколов Ю. Д.* О пространственном движении системы трех материальных точек, сохраняющей постоянные отношения взаимных расстояний. — Сб. тр. Ин-та математики АН УССР, 1948, № 11, с. 83—96.
47. *Соколов Ю. Д.* Про симетричный випадок в задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено пропорціонально кубам віддалень. — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1949, т. 8, вип. 4, № 3, с. 25—46.
48. *Соколов Ю. Д.* Про форми розкладів функцій, що характеризують рух в узагальненій задачі трьох тіл, в околиці особливої точки. — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1949, т. 8, вип. 4, № 3, с. 47—67.
49. *Соколов Ю. Д.* О некоторых обобщениях теорем Т. Банахевича

и П. Пиццети. — Сб. тр. Ин-та математики АН УССР, 1949, № 12, с. 3—11.
50. *Соколов Ю. Д.* О некоторых случаях пространственного движения в обобщенной задаче n тел. — Сб. тр. Ин-та математики АН УССР, 1949, № 12, с. 12—21.
51. *Соколов Ю. Д.* О движении системы трех материальных точек по одной прямой. — Укр. мат. журн., 1949, т. 1, № 3, с. 3—40.
52. *Соколов Ю. Д.* Дослiди з якiсної та аналiтичної теорiї дiфференцiальних рiвнянь динамiки. — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1950, т. 9, вип. 9, № 4, с. 29—40.
53. *Соколов Ю. Д.* Об общем случае симметрического движения системы трех материальных точек. — Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 3, с. 7—44.
54. *Соколов Ю. Д.* О прямолинейном движении с общим соударением системы трех материальных точек, взаимно притягивающихся по экспоненциальному закону. — Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 4, с. 18—24.
55. *Соколов Ю. Д.* О движении по одной прямой системы трех материальных точек, взаимодействующих с силами, пропорциональными логарифмам взаимных расстояний. — Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 4, с. 25—36.
56. *Соколов Ю. Д.* Про iнтегрування в елiптичних фiнкцiях рiвнянь прямолiнiйного руху трьох рiвних мас, що взаємодiють з силами, прямопропорцiональними кубам вiддалень. — Доповiдi АН УРСР, 1950, № 6, с. 423—432.
57. *Соколов Ю. Д.* Про iнтегрування в елiптичних фiнкцiях рiвнянь прямолiнiйного руху трьох рiвних мас, що взаємодiють з силами, прямопропорцiональними кубам вiддалень. — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1950, т. 9, вип. 9, № 4, с. 41—49.
58. *Соколов Ю. Д.* Об одном случае интегрируемости уравнений симметрического движения системы трех материальных точек.— Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 4, с. 347—380.
59. *Соколов Ю. Д.* Об особых траекториях в обобщенной задаче трех тел. — Сб. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1950, вып. 9, с. 198—203.
60. *Соколов Ю. Д.* Особые траектории свободных материальных точек. Киев: Изд-во АН УССР, 1951. 126 с.
61. *Соколов Ю. Д.* Про деякi просторовi траєкторiї в узагальненiй астероїднiй задачi. — Доповiдi АН УРСР, 1951, № 2, с. 63—67.
62. *Соколов Ю. Д.* Про деякi загальнi характеристики поводження матерiальної системи в околi особливого моменту. — Доповiдi АН УРСР, 1954, № 4, с. 227—233.
63. *Соколов Ю. Д.* О расчете фильтрации из канала трапецеидального сечения. — ДАН СССР, 1951, т. 79, № 5, с. 759—762.
64. *Соколов Ю. Д.* О притоке грунтовых вод к дренажной канаве трапецеидального сечения. — ЖПММ, 1951, т. 15, вып. 6, с. 683—688.
65. *Соколов Ю. Д.* Фильтрация без подпора из незакольматированного канала трапецеидального сечения в однородном грунте. — Укр. мат. журн., 1952, т. 4, № 1, с. 65—96.
66. *Соколов Ю. Д.* Про безнапiрний приплив грунтових вод до дренажної галереї за наявностi iнфiльтрацiї (перша фаза нестацiонарного руху). — Доповiдi АН УРСР, 1952, № 4, с. 251—257.
67. *Соколов Ю. Д.* Про безнапiрний приплив грунтових вод до дренажної галереї при наявностi iнфiльтрацiї (друга фаза неста-

ціонарного руху). — Доповіді АН УРСР, 1952, № 5, с. 364—369.
68. *Соколов Ю. Д.* Про безнапірний приплив грунтовых вод до дренажної галереї при похилій лінії водоупору (перша фаза нестаціонарного руху). — Доповіді АН УРСР, 1952, с. 370—376.
69. *Соколов Ю. Д.* Про приплив грунтових вод до дренажної галереї при похилій лінії водоупору та наявності інфільтрації (перша фаза нестаціонарного руху). — Доповіді АН УРСР, 1952, № 6, с. 439—446.
70. *Соколов Ю. Д.* Про безнапірний приплив грунтових вод до дренажної галереї при похилій лінії водоупору (друга фаза нестаціонарного руху). — Доповіді АН УРСР, 1953, № 1, с. 3—6
71. *Соколов Ю. Д.* Про приплив грунтових вод до дренажної галереї при похилій лінії водоупору та наявності інфільтрації. — Доповіді АН УРСР, 1953, № 1, с. 7—10.
72. *Соколов Ю. Д.* Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. — Укр. мат. журн., 1953, т. 5, № 2, с. 159—170.
73. *Соколов Ю. Д.* Безнапорный радиальный приток грунтовых вод к скважине при наличии инфильтрации. —Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 1, с. 58—80.
74. *Соколов Ю. Д.* О расчете фильтрации из канала трапецеидального сечения. — В кн.: Вопросы научного обоснования строительства Каховского гидроузла. Киев: Изд-во АН УССР, 1954, с.85—95.
75. *Соколов Ю. Д.* К теории плоской неустановившейся фильтации грунтовых вод. — Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 2, с. 218—232.
76. *Соколов Ю. Д.* Елементи теорії комплексної змінної. Київ: Рад. школа, 1954. 202 с.
77. *Соколов Ю. Д.* Про наближене розв'язання основного рівняння динаміки підіймального каната. — Доповіді АН УРСР, 1955, № 1, с. 21—25.
78. *Соколов Ю. Д.* Об одной осесимметричной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. — Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 1, с. 101—111.
79. *Соколов Ю. Д.* Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних і діфференціальних рівнянь. — Доповіді АН УРСР, 1955, № 2, с. 107—111.
80. *Соколов Ю. Д.* Про визначення дінамічних зусиль в шахтних підіймальних канатах. — Прикл. механіка, 1955, т. 1, № 1, с. 23—25.
81. *Соколов Ю. Д.* О некоторых частных решениях уравнения Буссинеска. — Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 1, с. 54—58.
82. *Соколов Ю. Д.* О методе осреднения функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 1, с. 82—100.
83. *Соколов Ю. Д.* О применении метода осреднения функциональных поправок к нелинейным интегральным уравнениям. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 4, с. 394—412.
84. *Соколов Ю. Д.* О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. — Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 2, с. 193—208.
85. *Соколов Ю. Д.* Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами. — Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 4, с. 419—433.
86. *Соколов Ю. Д.* Новые методы расчета фильтрации без подпора из незакольматированного канала трапецеидального сечения

в однородном грунте. — Сб. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1959, вып. 13, с. 311—331.
87. *Соколов Ю. Д.* Исследования по теории особых траекторий системы свободных материальных точек. — Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 5, с. 3—15.
88. *Соколов Ю. Д.* Основні праці Леонарда Ейлера в галузі аналізу нескінченно малих та теорії чисел. — В кн.: Історико-математическиії збірник. Київ: Вид-во АН УРСР, 1959, т. 1, с. 5—19.
89. *Соколов Ю. Д.* Исследования М. В. Остроградского по механике. — В кн.: М. В. Остроградский: Собр. тр. Киев: Наук. думка, 1960, т. 2, с. 346—356.
90. *Соколов Ю. Д.* О применении метода осреднения функциональных поправок к линейным относительно производных дифференциальным уравнениям параболического типа. — Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 2, с. 181—195.
91. *Соколов Ю. Д.* Краткий очерк жизни и научной деятельности Жозефа Луи Лагранжа: (К 225-летию со дня рождения). — Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 2, с. 127—135.
92. *Соколов Ю. Д.* Об одном методе приближенного решения систем линейных интегральных уравнений. — Укр. мат. журн., 1962, т. 13, № 4, с. 79—87.
93. *Соколов Ю. Д.* Об одном методе приближенного решения систем нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами. — Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 1, с. 58—70.
94. *Соколов Ю. Д.* О достаточных признаках сходимости метода функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 3, с. 91—103.
95. *Савин Г. Н., Соколов Ю. Д., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н.* Александр Петрович Котельников. — Прикл. механика, 1966, т. 2, вып. 3, с. 142—144.
96. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. Киев: Наук. думка, 1967. 336 с.
97. *Соколов Ю. Д., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н.* О работах ученых Украины по аналитической и небесной механике. — Прикл. механика, 1967, т. 3, вып. 10, с. 89—99.
98. *Соколов Ю. Д.* Исследования по дифференциальным уравнениям. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 6, с. 32—38.
99. *Соколов Ю. Д.* О поведении на бесконечности решений дифференциальных уравнений прямолинейного движения в обобщенной задаче трех лет. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев, 1969, вып. 1, с. 5—69.

Использованная литература

100. *Егервари Е.* Об одном обобщении решения Лагранжа задачи трех тел. — ДАН СССР, 1947, т. 55, № 9, с. 805—807.
101. *Фрадлин Б. Н.* Классификация траекторий материальной точки, находящейся под действием центральной силы, зависящей только от расстояния. — Сб. науч. тр. Киев. политехн. ин-та, 1948, с. 607—613.
102. *Фрадлин Б. Н.* О движении материальной точки, движущейся в поле центральной силы. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1949, т. 9, с. 151—162.
103. *Лавриненко П. П.* Особые траектории при движении материальной точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижным

центром, в постоянно возмущающем поле. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1949, т. 9, с. 280—301.
104. *Фрадлин Б. Н.* Полная классификация траекторий общей задачи двух тел. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1950, т. 10, с. 98—109.
105. *Фрадлін Б. Н.* Особливі траєкторії нескінченного віддалення загальної задачі двох тіл. — Наук. зап. Київ. ун-ту, 1952, т. 11, вип. 7, с. 105—110.
106. *Фрадлин Б. Н.* Особые траектории соударения общей задачи двух тел. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1953, т. 12, с. 25—34.
107. *Лавриненко П. П.* Определение элементов орбиты в одном случае центрального возмущенного движения. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1953, т. 12, с. 35—42.
108. *Склянский А. Л.* О траектории парного соударения в задаче трех тел, взаимодействующих с силами, пропорциональными логарифмам взаимных расстояний. — Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 3, с. 349—362.
109. *Чернышенко Э. А.* Исследование сходимости и установление оценки погрешности метода усреднения в полном нормированном пространстве. — Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 3, с. 305—313.
110. *Склянский А. Л.* К теории парного соударения в обобщенной задаче трех тел. — Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 2, с. 160—166.
111. *Чернышенко Э. А.* Метод осереднення в застосуванні до визначення власних значень операторного рівняння. — Доповіді АН УРСР, 1955, № 3, с. 217—221.
112. *Чернышенко Э. А.* Про один варіант методу осереднення. — Доповіді АН УРСР, 1956, № 1, с. 10—11.
113. *Газархи Л. А.* О новом относительно скоростей интеграле обобщенной задачи трех тел. — Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 1, с. 5—11.
114. *Путята Т. В.*, *Фрадлин Б. Н.* Юрий Дмитриевич Соколов (К шестидесятилетию со дня рождения). — Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 1, с. 223—230.
115. *Григорьева И. А.* К вопросу о существовании симметричных решений обобщенной задачи трех тел. — Изв. Киев. политехн. ин-та, 1956, т. 19, с. 278—286.
116. *Склянский А. Л.* К вопросу о классификации соударений в обобщенной задаче трех тел. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 1, с. 66—81.
117. *Склянский А. Л.* Особые траектории при парном соударении в обобщенной задаче трех тел. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 2, с. 163—175.
118. *Лучка А. Ю.* Достаточное условие сходимости метода осреднения функциональных поправок. — ДАН СССР, 1958, т. 122, № 2, с. 179—182.
119. *Рудченко П. А.* До питання фільтрації з каналів довільного поперечного перерізу. — Доповіді АН УРСР, 1958, № 12, с. 1300—1304.
120. *Чернышенко Э. А.* Об одном методе приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 1, с. 89—100.
121 *Чернышенко Э. А.* О приближенном решении краевой задачи с дифференциальным уравнением теплопроводности. — Науч. сообщ. Днепр. инж.-строит. ин-та, 1959, вып. 41, с. 3—8.

122. *Рудченко П. А.* Обчислення втрати води на фільтрацію в каналі довільного поперечного перерізу. — Доповіді АН УРСР, 1959, № 8, с. 853—857.
123. *Склянский А. Л.* О применении методов Сундмана и Шави к обобщенной задаче трех тел. — Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 4, с. 380—392.
124. *Молокович Ю. М.* Об одном приближенном методе решения линейных интегральных уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1959, вып. 5 (12), с. 164—170.
125. *Василенко Ю. А.* Плоская задача теории неустановившегося движения грунтовых вод при наличии инфильтрации и при заданном дебите галереи. — Сб. науч. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1959, вып. 13, с. 333—338.
126. *Василенко Ю. А.* Движения языка грунтовых вод. — Сб. науч. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1959, вып. 13, с. 339—365.
127. *Лучка А. Ю.* Приближенное рашение интегральных уравнений Фредгольма методом осреднения функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 11, с. 32—45.
128. *Фрадлин Б. Н.* Краткий исторический очерк развития проблемы *n* тел. — Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, 1960, т. 34, с. 198—225.
129. *Швець І. Т.*, *Федоров В. Й.*, *Бондарчук В. Г.* Застосування деяких наближених методів до розв'язання рівнянь теплопровідності у роторах турбін. — Зб. праць Ін-ту теплоенергетики АН УРСР. Теплообмін та гідродинаміка, 1960, вип. 18, с. 3—15.
130. *У-Жуй-Фын.* Расчет арочных плотин с учетом ползучести. — ДАН СССР, 1960, т. 30, № 2, с. 77—86.
131. *У-Жуй-Фын.* Температурное напряжение в арочных плотинах с учетом ползучести бетона. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1960, т. 13, № 4, с. 29—54.
132. *Слесарев А. М.* Достатні умови віддалення точки змінної маси від силового центра на нескінченість при відсутності реактивных сил. — Доповіді АН УРСР, 1960, № 5, с. 601—604.
133. *Лучка А. Ю.* Приближенное решение линейных операторных уравнений в пространстве Банаха методом Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 1, с. 39—52.
134. *Лучка А. Ю.* Наближене розв'язання безконечних систем алгебраїчних рівнянь методом Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР, 1961, № 2, с. 146—149.
135. *Лучка А. Ю.* Про наближне розв'язання лінійних операторних рівнянь в просторі Банаха методом Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР, 1961, № 4, с. 424—427.
136. *Кривошеин Л. Е.* Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизском государственном университете. — В кн.: Материалы X науч. конф. проф.-преп. состава физ.-мат. фак. Кирг. ун-та. Секция математики. Фрунзе: Изд-во Кирг. ун-та, 1961, с. 3—13.
137. *Мосолов Б. Г.* Об одном приближенном методе ришения нелинейного интегродифференциального уравнения. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, № 2, с. 41—51.
138. *Мосолов Б. Г.* Об одном приближенном методе решения линейных операторных уравнений в метрическом пространстве. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, № 5, с. 29—34.
139. *Сиренко В. Х.* О численной реализации метода осреднения функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 4, с. 51—56.

140. *Лучка А. Ю.* Наближене розв'язання безконечних систем лінійних інтегральних рівнянь методом Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР, 1962, № 9, с. 1149—1153.
141. *Кривошеин Л. Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1962. 240 с.
142. *Слесарев А. М.* Нижняя граница радиусов сходимости разложений координат системы свободных материальных точек с переменными массами около момента регулярного движения. — Сб. науч. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1962, вып. 16, с. 152—158.
143. *Слесарев А. М.* Некоторые общие свойства центральных траекторий точки переменной массы. — В кн.: Тр. аспирантов Ин-та кибернетики АН УССР. Вычислительная математика и техника. Киев: Изд-во АН УССР, 1962, с. 131—178.
144. *Слесарев А. М.* К классификации центральных траекторий точки переменной массы. — Сб. науч. тр. Киев. инж.-строит. ин-та, 1962, вып. 20, с. 227—248.
145. *Курпель М. С.* Оцінки похибки проекційного методу та методу Ю. Д. Соколова для нелінійних рівнянь в координатному просторі. — Доповіді АН УРСР, 1963, № 9, с. 1135—1139.
146. *Курпель М. С.* Про один наближений метод розв'язування лінійних операторних рівнянь в гільбертовому просторі. — Доповіді АН УРСР, 1963, № 10, с. 1275—1279.
147. *Курпель М. С.* О приближенном решении нелинейных операторных уравнений методом Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 3, с. 309—314.
148. *Мосолов Б. Г.* Приближенное решение операторных уравнений методом Ю. Д. Соколова. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1963, № 5, с. 26—29.
149. *Лучка А. Ю.* Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 128 с.
150. *Тивончук В. И.* О применении метода осреднения функциональных поправок к решению линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. — В кн.: Тр. науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр. Ин-та математики АН УССР (апрель 1963 г.). Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 73—76.
151. *Тукалевская Н. И.* Численная реализация метода осреднения функциональных поправок для интегральных уравнений типа Вольтерра. — В кн.: Тр. науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр. Ин-та математики АН УССР (апрель 1963). Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 77—83.
152. *Курпель Н. С.* О применении метода Ю. Д. Соколова при приближенном решении нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. — В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 47—53.
153. *Богданова Л. П.* О приближенном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами. — В кн.: Тр. науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр. Ин-та математики АН УССР (апрель 1963 г.). Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 63—72.
154. *Курпель Н. С.* О некоторых приближенных методах решения нелинейных уравнений в специальных банаховых пространствах. — В кн.: Тр. науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр.

Ин-та математики АН УССР (апрель 1963 г.). Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 57—62.

155. *Лучка А. Ю.* Наближене розв'язання нескінченних систем лінійних диференціальних рівнянь методом Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР, 1963, № 5, с. 563—567.

156. *Мосолов Б. Г.* Приближенное решение операторных уравнений методом Ю. Д. Соколова. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1963, № 5, с. 26—29.

157. *Стоницький А. А.* Наближене розв'язування методом Ю. Д. Соколова нескінченної системи рівнянь типу Вольтерра, що залежить від параметра. — Доповіді АН УРСР, 1963, № 12, с. 1555—1559.

158. *Савин Г. Н.*, *Путята В. Н.*, *Фрадлин Б. Н.* Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики. Киев: Наук. думка, 1964, с. 209—338, 342—346, 362.

159. *Тивончук В. І.* Про застосування методу Ю. Д. Соколова до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішанного типу. — Доповіді АН УРСР, 1964, № 8, с. 1015—1018.

160. *Тивончук В. І.* Про оцінку похибки одного варіанта методу Ю. Д. Соколова розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра та рівнянь змішаного типу. — Доповіді АН УССР, 1964, № 10, с. 1281—1283.

161. *Тивончук В. І.* Про розв'язування лінійних інтегральных рівнянь змішанного типу за допомогою одного варіанта методу Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР, 1964, № 12, с. 1559—1563.

162. *Мосолов В. Г.* Приближенное решение линейных нагруженных интегральных уравнений методом Ю. Д. Соколова. — В кн.: Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений математической физики. Ташкент: Фан, 1964, с. 168—182.

163. *Курпель Н. С.* О некоторых приближенных методах решения нелинейных уравнений в координатном банаховом пространстве. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 1, с. 115—120.

164. *Лучка А. Ю.*, *Курпель Н. С.* Об одном нестационарном итерационном методе приближенного решения линейных операторных уравнений. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 3, с. 389—395.

165. *Лучка А. Ю.* Про застосування методу Ю. Д. Соколова до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. — Доповіді АН УРСР, 1965, № 4, с. 426—429; № 5, с. 547—553.

166. *Курпель М. С.* Про одне узагальнення методу осереднення функціональних поправок. — Доповіді АН УРСР, 1965, № 8, с. 1005—1009.

167. *Курпель М. С.* Збіжність і оцінки похибки деяких загальних ітеративних методів розв'язування операторних рівнянь. — Доповіді АН УРСР, 1965, № 11, с. 1423—1427.

168. *Тивончук В. И.* О решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра при помощи одного варианта метода Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 1, с. 77—88.

169. *Тивончук В. И.* О решении линейных интегральных уравнений Вольтерра и уравнений смешанного типа в пространстве при помощи одного варианта метода Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 4, с. 133—139.

170. *Бараталиев К. Б.* Применение метода Ю. Д. Соколова к решению интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом.—

Тр. по математике, физике и механике Фрунз. политехн. ин-та. Математика, 1965, вып. 21, с. 59—69.
171. *Буравский Е. С., Яремчук Ф. П.* Применение метода конформных отображений к решению задач свободной фильтрации из открытых русел. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 66—72.
172. *Зарубич Е. С.* Об одном итерационном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 249—253.
173. *Калайда А. Ф.* Новый метод приближенного решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 302—309.
174. *Курпель Н. С.* Условия сходимости и оценки погрешности одного общего итеративного метода решения линейных операторных уравнений. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 418—427.
175. *Курпель Н. С.* О существовании и единственности решения одного класса нелинейных операторных уравнений. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 428—433.
176. *Нестерчук А. В.* О решении интегральных уравнений типа Вольтерра с помощью операторов численного интегрирования. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 541—547.
177. *Слесарев А. М.* Обобщение полного вириала Гринвиса и его следствия в случае центрального движения точки переменной массы при наличии реактивных сил, коллинеарных вектору скорости. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 593—599.
178. *Тивончук В. И.* О решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнений смешанного типа при помощи одного варианта метода Ю. Д. Соколова. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 628—635.
179. *Тукалевская Н. И.* О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. — В кн.: Первая респ. мат. конф. мол. исследователей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965, вып. 1, с. 636—640.
180. *Тукалевская Н. И., Нестерчук А. В.* Об одном методе решения линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. — Укр. мат. жур., 1965, т. 17, № 1, с. 95—101.
181. *Тукалевська Н. І.* Про один метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. — Доповіді АН УРСР, 1965, № 8, с. 998—1001.
182. *Бараталиев К. Б.* Приближенное решение линейных двумерных интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом методом Ю. Д. Соколова. — В кн.: Материалы XIII науч. конф. проф.-преп. состава физ.-мат. фак. Кирг. ун-та. Секция математики. Фрунзе: Изд-во Кирг. ун-та, 1965, с. 16—18.
183. *Бараталиев К. Б.* Приближенное решение интегродифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — В кн.:

Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: изд-во АН КиргССР, 1965, вып. 3, с. 69—83.
184. *Бельтюков Б. А.* Построение быстросходящихся итерационных алгоритмов для решения интегральных уравнений. — Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 6, с. 1415—1419.
185. *Кривошеин Л. Е., Бараталиев К. Б.* К приближенному решению нелинейных двумерных интегродифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — В кн.: Материалы XIII науч. конф. проф.-преп. состава физ.-мат. фак. Кирг. ун-та. Секция математики. Фрунзе: Изд-во Кирг. ун-та, 1965, вып. 3, с. 50—53.
186. *Тунік А. А.* Розрахунок флуктіаційної похибки в дискретных екстремальних системах з синхронним детектором. — Автоматика, 1965, № 2, с. 29—38.
187. *Мосолов Б. Г.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода методом осреднения функциональных поправок. — В кн.: Вопросы вычислительной математики и техники. Ташкент: Фан, 1965, вып. 7, с. 20—26.
188. *Мосолов Б. Г.* Приближенное решение систем нелинейных интегродифференциальных уравнений методом осреднения функциональных поправок. — В кн.: Вопросы кибернетики и вычислительной математики. Ташкент: Фан, 1966, вып. 2, с. 66—73.
189. *Митропольский Ю. А., Шевело В. И., Лучка А. Ю., Курпель Н. С.* Юрий Дмитриевич Соколов: (К семидесятилетию со дня рождения). — Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 4, с. 94—101.
190. *Тивончук В. И.* Об одном варианте метода осреднения функциональных поправок для решения линейных интегральных уравнений смешанного типа. — Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 9, с. 1228—1238.
191. *Курпель М. С.* Збіжність і оцінки похибки одного проекційно-ітеративного методу розв'язування операторних рівнянь. — В кн.: Друга наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1966, с. 361—364.
192. *Тивончук В. І.* Про один варіант методу осереднення функціональних поправок розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішанного типу. — В кн.: Друга наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1966, с. 601—605.
193. *Тукалевська Н. І.* Про один метод наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу в просторі L_2. — В кн.: Друга наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1966, с. 609—613.
194. *Слесарев А. М.* Деякі умови, які визначають характер особливих траєкторій системи вільних точек із змінними масами в загальному випадку. — В кн.: Друга наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1966, с. 568—573.
195. *Тукалевська Н. І.* Про один метод наближеного роз'язування лінійних інтегральних рівнянь вольтеррівського типу в класі L^p функкій. — Доповіді АН УРСР, 1966, № 3, с. 299—302.
196. *Сабиров Т., Есаян А. Р.* К вопросу о сходимости метода осреднения функциональных поправок. — ДАН ТаджССР, 1966, т. 9, № 1, с. 8—12.
197. *Галь М. М.* Приближенное решение интегральных уравнений с запаздывающим аргументом методом Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 6, с. 102—107.

198. *Митропольский Ю. А.*, *Бреус К. А.* Основные исследования Института математики АН УССР за годы Советской власти. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 4, с. 16—31.
199. *Погребысский И. Б.* Аналитическая механика. — В кн.: Развитие механики в СССР. М.: Наука, 1967, с. 31—60.
200. *Лучка А. Ю.*, *Курпель М. С.* Метод осереднення функціональних поправок так його різні узагальнення. — В кн.: Третя наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1967, с. 49—72.
201. *Бататалієв К. Б.* Про застосування методу Ю. Д. Соколова до розв'язання одного класу інтегродиференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. — В кн.: Третя наук. конф. мол. математиків Україны. Київ: Наук. думка, 1967, с. 197—199.
202. *Галь М. М.* Про достатні умови збіжності методу осереднення функціональних поправок для нелінійних інтегрорізнецевих рівнянь. — В кн.: Третя наук. конф. мол. математиків Україны. Київ: Наук. думка, 1967, с. 289—295.
203. *Калайда О. Ф.* Про один метод наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. — В кн.: Третя наук. конф. мол. математиків Україны. Київ: Наук. думка, 1967, с. 377—380.
204. *Галь М. М.* Обоснование применения метода осреднения функциональных поправок для определения спектральной плотности ошибки импульсной экстремальной системы с модуляцией (ЦЭСМ). — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 3, с. 95—103.
205. *Ковтун И. И.* О работе семинара по дифференциальным уравнениям при Ин-те математики АН УССР. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 1, с. 141—142.
206. *Молокович Ю. М.* О приближенном решении линейных интегральных уравнений с помощью некоторого варианта метода Ю. Д. Соколова. — Учен. зап. Казан. ун-та, 1967, т. 127, вып. 1, с. 139—147.
207. *Курпель М. С.*, *Лучка А. Ю.* Про деякі методи наближеного розв'язування операторних рівнянь. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 140—142.
208. *Галь М. М.* Про один алгоритм наближеного розв'язування нелінійних інтегрорізнецових рівнянь. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 153—154.
209. *Калайда О. Ф.*, *Янішевська А. Т.* Про одне узагальнення методу Ю. Д. Соколова розв'язування інтегральних рівнянь змішаного типу. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 163—164.
210. *Мосолова С. С.* Наближене розв'язування лінійних навантажених інтегральних рівнянь Ліхтенштейна методом осереднення функціональних поправок. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 177—179.
211. *Курпель М. С.*, *Сергієнко Н. П.* Про наближене розв'язування деяких нелінійних операторних рівнянь. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 172—174.
212. *Рощин В. С.* Про наближене розв'язування інтегрального рівняння типу згортки методом осереднення функціональних

поправок. — В кн.: Четверта наук. конф. мол. математиків України. Київ: Наук. думка, 1968, с. 191—192.
213. *Туник А. А., Галь М. М.* Об ограниченности дисперсии ошибки пропорциональных импульсных систем экстремального управления при воздействии случайных возмущений. — Изв. АН СССР. ТК, 1968, № 3, с. 147—159.
214. *Тунік А. А.* Дискретні екстремальні регулятори з модуляцією. Київ: Техніка, 1968. 271 с.
215. *Бодрик А. Г., Старостин М. Г., Чернышевская Л. Е.* К решению задачи о передвижении влаги в ненасыщенных грунтах. — В кн.: Мелиорация и водное хозяйство. Киев: Урожай, 1968, № 9, с. 132—141.
216. *Иваницкий В. Г.* Приближенное решение одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом методом осреднения функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1968, т. 20, № 5, с. 700—705.
217. *Іваніцький В. Г.* Про один метод розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Гільберта. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1968, № 7, с. 586—590.
218. *Галь М. М., Мосолов Б. Г.* Про одну модифікацію методу Ю. Д. Соколова для наближеного розв'язування інтегрорізнецевих рівнянь. — Доповіді АН УРСР. Сер. А., Фіз.-техн. та мат. науки, 1968, № 8, с. 675—680.
219. *Янішевський А. Т.* Про деяке узагальнення методу осереднення функціональних поправок розв'язування одного класу інтегродиференціальних рівнянь. — Доповіді АН УРСР. Сер. А., Фіз.-техн. та мат. науки, 1968, № 8, с. 737—742.
220. *Галь М. М.* Про наближене розв'язання системи нелінійних інтегрорізнецевих рівнянь типу Гаммерштейна. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1968, № 9, с. 777—783.
221. *Калайда О. Ф., Янішевський А. Т.* Про удосконалений метод Ю. Д. Соколова розв'язування інтегродиференціальних рівнянь. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз-техн. та мат. науки, 1968, № 9, с. 794—800.
222. *Курпель Н. С.* Об одном обобщении метода Зейделя решения систем операторных уравнений. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1969, вып. 1, с. 105—112.
223. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1969. 244 с.
224. *Тивончук В. И.* О решении в пространстве нелинейных интегральных уравнений смешанного типа. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 123—129.
225. *Тивончук В. И.* О решении нелинейных интегральных уравнений смешанного типа методом осреднения функциональных поправок. — Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 3, с. 563—573.
226. *Галь М. М.* Применение метода осреднения функциональных поправок к приближенному решению нелинейных интегро-разностных уравнений. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 200—205.
227. *Голович Г. П.* О некоторых новых методах решения бесконеч-

ных систем. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 206—210.
228. *Калайда А. Ф., Якишевский А. Т.* Об оценке погрешности метода осреднения функциональных поправок. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 228—232.
229. *Пеклова Л. П.* О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений неявного вида. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 301—307.
230. *Пеклова Л. П.* Численная реализация метода Ю. Д. Соколова для уравнений неявного вида. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 308—311.
231. *Рощин В. А.* О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений типа свертки. — В кн.: Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 1, с. 325—334.
232. *Митропольский Ю. Д.* Основные достижения в области математики в Академии наук УССР за пятьдесят лет. — Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 2, с. 147—164.
233. *Склянський А. Л.* Зведення узагальненої задачі *n* тіл із змінними масами до відповідної задачі зі сталими масами. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз-.техн. та мат. науки, 1969, № 7, с. 636—639.
234. *Старостин М. Г., Бодрин А. Г., Чернышевская Л. Е.* Приближенное решение задачи о передвижении влаги в пористой ненасыщенной среде. — В кн.: Тр. 1-й респ. конф. по пробл. аэрогидромеханики и тепло-массообмена. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1969, с. 308—312.
235. *Чернышевская Л. Е., Бодрин А. Г.* Решение задачи о передвижении влаги в ненасыщенных грунтах под действием капиллярных сил и силы тяжести методом гидроаналогий. — В кн.: Мелиорация и водное хозяйство. Киев: Урожай, 1969, № 12, с. 105—115.
236. *Пеклова Л. П.* О градиентном варианте метода Ю. Д. Соколова. — Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 5, с. 712—713.
237. *Король А. Н.* Об одном варианте метода осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова.— Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 1, с. 110—117.
238. *Добровольский В. А.* Развитие математических методов в аналитической механике.—В кн.: История отечественной математики. Киев: Наук. думка, 1970, т. 4, кн. 2, с. 236—251.
239. *Мандровский-Соколов Б. Ю., Туник А. А.* Система экстремального управления при случайных возмущениях. Киев: Наук. думка, 1970. 208 с.
240. *Рощин В. О.* Наближене розв'язання інтегрального рівняння типу згортки методом Ю. Д. Соколова. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1970, № 12, с. 1079—1083.
241. *Іваницький В. Г.* Про наближене розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь із складеним ядром. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1970, № 12, с. 1070—1073.
242. *Кравчук Т. С.* Про збіжність одного нестаціонарного процесу

послідовних наближень. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1970, № 12, с. 1073—1076.
243. *Склянський А. Л.* Узагальнені співвідношення Лагранжа—Якобі. — Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-техн. та мат. науки, 1971, № 7, с. 601—605.
244. *Фильчакова В. П.* Очерк жизни и научной деятельности члена-корреспондента АН УССР Ю. Д.Соколова: (К 75-летию со дня рождения). — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 5—50.
245. *Курпель Н. С.* Об одном нестационарном проекционно-итеративном методе. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 73—84.
246. *Курпель Н. С., Шпортюк Г. А.* Об одном проекционно-итеративном методе для задачи на собственные значения. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 85—92.
247. *Лучка А. Ю.* О сходимости проекционных методов в гильбертовом пространстве. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 93—121.
248. *Лучка А. Ю.* Об устойчивости проекционных методов в гильбертовом пространстве. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 122—132.
249. *Лучка А. Ю., Рощин В. А.* О приближенном решении линейного интегрального уравнения типа сверки. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 133—141.
250. *Тивончук В. И.* О решении двумерных линейных интегральных уравнений с переменными пределами методом осреднения функциональных поправок. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 142—155.
251. *Иваницкий В. Г.* Приближенное решение уравнения типа Батебашина при помощи метода осреднения функциональных поправок. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 183—194.
252. *Маланюк Л. Б.* О решении уравнений первого рода проекционно-итеративными методами. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 226—232.
253. *Пеклова Л. П.* Об одном приближенном методе решения интегральных уравнений. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 261—263.
254. *Пеклова Л. П.* Об устойчивости численного алгоритма Ю. Д. Соколова относительно погрешности округления. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 264—267.

255. *Склянский А. Л.* К вопросу о применении метода вариации в парном соударении в обобщенной задаче трех тел с переменными массами. — В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 282—294.
256. *Фрадлин Б. Н.* Механика дискретных систем. — В кн.: История механики с конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972, с. 86—115.
257. *Путята Т. В.*, *Фрадлин Б. Н.*, *Склянский А. Л.* Развитие механики в исследованиях Юрия Дмитриевича Соколова. — Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 4, с. 136—139.
258. Розвиток науки в Українській РСР за 40 років. Київ. Вид-во АН УРСР, 1957. 230 с.
259. Українська математична бібліографія. Київ: Вид-во АН УРСР, 1963. 311 с.
260. История отечественной математики: Киев: Наук. думка, 1966—1970. Т. 1—4.
261. Развитие механики в СССР. М.: Наука, 1967. 511 с.
262. *Григорьян А. Т.*, *Фрадлин Б. Н.* Механика в СССР. М.: Наука, 1971. 411 с.
263. *Лучка А. Ю.*, *Склянский А. Л.*, *Фрадлин Б. Н.*, *Фильчакова В. П.* Юрий Дмитриевич Соколов. — В кн.: Киевские математики-педагоги. Київ: Вища школа, 1979, с. 34—78.

Содержание

Борис Наумович Фрадлин

Юрий Дмитриевич Соколов

1896—1971

Утверждено к печати редколлегией научно-биографической серии Академии наук СССР

Редактор издательства **В. П. Большаков**
Художественный редактор **Н. А. Фильчагина**
Технические редакторы **О. М. Гуськова, Т. С. Жарикова**
Корректоры **Н. М. Вселюбская, Л. В. Лукичева**

ИБ № 27414

Сдано в набор 21.06.83. Подписано к печати 23.02.84
Т-05257. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 6,3. Усл. кр. отт. 5,67. Тираж 8750 экз.
Тип. зак. 625. Цена 40 коп.

Издательство «Наука» 117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

Б. Н. Фрадлин

Юрий Дмитриевич
СОКОЛОВ

Б. Н. Фрадлин Юрий Дмитриевич СОКОЛОВ

40 коп.