АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

2-4-1

64—70НПЛ

Я. И. Трдина

Т. В. ПУТЯТА, Б. Н. ФРАДЛИН

Ярослав Иванович ГРДИНА

1871—1931

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1970

В книге кратко освещена биография и проанализировано научное наследие одного из выдающихся отечественных ученых — Ярослава Ивановича Грдины. Основные научные интересы Я. И. Грдины были сосредоточены в области теории регулирования, динамики живых организмов и теоретической механики. Исследования Я. И. Грдины по динамике живых организмов — одному из важнейших разделов современной механики, органически связанному с биокибернетикой,— являются основополагающими. В связи с развитием кибернетики, теории автоматического регулирования и машинной математики в настоящее время они стали особенно актуальными.

Книга представляет интерес не только для научных работников, но и для более широкого круга читателей, интересующихся истоками современной науки.

От авторов

Ярослав Иванович Грдина — выдающийся механик, профессор горного института и университета в Днепропетровске. Он создал совершенно новый обширный раздел механики — динамику живых организмов, построил новую систему обоснования и изложения теоретической механики, первый в мировой литературе высказал идею о сервосвязях. Ему принадлежат также ценные работы в области теории устойчивости регуляторов при непрерывном и прерывном регулировании. В настоящее время в свете развития кибернетики, теории автоматического управления, машинной математики, когда в единую цепь исследований включены и живые организмы, труды Я. И. Грдины приобретают актуальное значение.

Грдина был не только выдающимся ученым, но и талантливым педагогом. Его перу принадлежат содержательные курсы по прикладной механике, которые в свое время сыграли большую роль при подготовке высококвалифицированных инженерных кадров в нашей стране, в особенности горных инженеров.

Авторы надеются, что их скромный труд об ученом, жизнь которого может служить ярким примером беззаветного служения науке, представит интерес не только для научной общественности, но и для широкого круга советских читателей.

Большую помощь при написании книги оказала авторам дочь Ярослава Ивановича Ольга Ярославна Грдина. Она передала архивные материалы и семейные фотографии своего отца, поделилась воспоминаниями о нем. Авторы считают своим приятным долгом выразить ей глубокую благодарность.

Авторы благодарны также бывшим студентам профессора Я. И. Грдины Надежде Петровне Гришковой и Николаю Михайловичу Могилевскому за интересные воспоминания о своем учителе. Они считают необходимым отметить помощь ныне покойного Ф. А. Цыкунова в реферировании некоторых трудов Я. И. Грдины. Ценные замечания были сделаны при просмотре рукописи академиками АН УССР Г. Н. Савиным и И. З. Штокало и профессором В. А. Зморовичем, за что авторы весьма им признательны.

Глава первая

Краткий биографический очерк

Ярослав Иванович Грдина родился 2 февраля 1871 г. в г. Пльзене (Чехословакия).

Его отец Иван Францевич (1845—1906) в молодые годы работал на пивоваренном заводе в г. Пльзене рабочим, а по вечерам играл на кларнете в любительском оркестре городского сада.

Однажды Иван Францевич прочитал в газете сообщение о том, что в Россию требуются капельмейстеры духовой военной музыки. Послав запрос, он вскоре получил приглашение приехать в г. Вильно на должность капельмейстера военного духового оркестра. К этому времени он был уже женат на крестьянке Альбине Игнатьевне (1847—1936) и имел сына Ярослава. Семья Грдины переехала в г. Вильно. По свидетельству дочери Ярослава Ивановича Ольги Ярославны, Иван Францевич и Альбина Игнатьевна приняли русское подданство.

Семья Грдины была большая, трудолюбивая и дружная. Всех детей было десять, но трое умерли в раннем детстве. В гимназии Ярослав учился успешно по всем предметам, но особую любовь проявил к математике и физике. Во время учебы в последнем классе давал частные уроки, собирая деньги для поездки в Петербург. Гимназию он окончил в 1889 г. В том же году с небольшой суммой денег он впервые выехал из дому в Петербург. Подал документы одновременно в три петербургских института — технологический, путей сообщения и горный. В технологическом институте экзамены проводились раньше, чем в других. Выдержав их, юноша стал студентом механического отделения этого института. Здесь он занимался 5 лет. Учился отлично, несмотря на то что много времени тратил на репетиторство. Окончив институт в 1894 г., Я. И. Грдина получил звание инженера-технолога.

В 1894 г. Ярослав Иванович женился. В 1895 г. у него родился сын Владимир. Семья жила в г. Ковно. Ярослав Иванович работал инженером в Ковенском округе путей сообщения, руководя землечерпательными работами на одном из участков реки Неман. Но эта работа была ему не по душе. Еще со студенческих лет, зарабатывая на жизнь репетиторством, он полюбил труд учителя и мечтал о преподавательской деятельности. Поэтому он очень обрадовался, когда в 1897 г. ему предложили место преподавателя механико-технического училища в г. Иваново-Вознесенске. Здесь он проработал два года.

В 1899 г., узнав об организации в г. Екатеринославе (ныне Днепропетровск) высшего горного училища[1], он послал заявление с просьбой зачислить его преподавателем этого училища. Министерство просвещения послало его на один год в Германию для подготовки к званию профессора и в 1900 г. зачислило на должность преподавателя Екатеринославского высшего горного училища.

В 1901 г. Я. И. Грдина успешно защитил в Петербургском горном институте магистерскую диссертацию на тему «Устойчивость движения машины, управляемой центробежным регулятором» и после этого получил в Екатеринославском высшем горном училище должность профессора, заведующего кафедрой прикладной механики. Этой кафедрой он руководил непрерывно до конца своей жизни. Параллельно вел педагогическую работу в других высших учебных заведениях города: с 1919 г. как заведующий кафедрой теоретической механики университета, с 1923 г. как профессор кафедры теоретической механики Металлургического института, с 1930 г. как профессор кафедры основ машиностроения Металлургического института.

---

[1] В 1912 г. Екатеринославское высшее горное училище было переименовано в Екатеринославский горный институт, а в 1925 г.— в Днепропетровский горный институт.

Я. И. Грдина. Снимок 1902 г.

В 1902 г. Я. И. Грдина был командирован в Германию для ознакомления с постановкой образования в высших технических школах. С 1910 по 1912 г. он был инспектором Екатеринославского высшего горного училища, с 1912 по 1917 г. — деканом. С 1920 по 1921 г. он занимал должность ректора горного института. С 1922 г. Я. И. Грдина состоял бессменным руководителем научно-исследовательской кафедры механики при Днепропетровском горном институте, где концентрировалась научно-исследовательская работа всех преподавателей теоретической и прикладной механики г. Днепропетровска. Кафедра насчитывала 24 члена, в числе которых кроме Я. И. Грдины (заведующего кафедрой и руководителя секции теоретической механики) были такие известные ученые, как академик АН УССР А. Н. Динник (руководитель секции технической механики, впоследствии академик АН СССР), заслуженный профессор В. М. Маковский (руководитель секции теплогорнозаводской механики), профессора К. Э. Рерих, С. П. Гомелля, Б. С. Макаров, А. С. Локшин, А. С. Спиваковский, А. А. Беликов. Ученым секретарем кафедры была Н. П. Гришкова, ныне профессор, заведующая кафедрой сопротивления материалов Киевского технологического института пищевой промышленности, а одним из аспирантов — А. М. Пеньков, член-корр. АН УССР, профессор.

С 1927 по 1928 г. Я. И. Грдина состоял консультантом Днепропетровского филиала Гипромеза по проектированию водоснабжения Криворожского металлургического завода, а также Днепропетровской ассоциации рабочих-изобретателей.

Жена Ярослава Ивановича тяжело болела и в 1904 г. умерла. В 1909 г. Я. И. Грдина женился вторично. От второго брака в 1911 г. у Ярослава Ивановича родилась дочь Ольга. Летом семья часто отдыхала на Кавказе и в Крыму. С юных лет Ярослав Иванович был большим любителем пешеходных загородных экскурсий, и это увлечение сохранилось и в зрелом возрасте. Он поднимался на вершины гор, во всех городах, в которых бывал, обязательно посещал ботанические сады.

Я. И. Грдина скончался 2 июня 1931 г.

Глава вторая

Общая характеристика педагогической деятельности

Педагогическая деятельность Я. И. Грдины проходила главным образом в Екатеринославском горном институте и университете. В горном институте он читал лекции по предметам, относящимся к прикладной механике,— деталям машин, термодинамике, гидравлике, двигателям внутреннего сгорания, паровым машинам, паровым турбинам, газогенераторам, а в университете — по теоретической механике. Кроме того, в горном институте он руководил дипломным проектированием.

Сохранились рукописные конспекты отдельных лекций Я. И. Грдины по динамике точки, системы и твердого тела, по термодинамике, по теории плоских механизмов, теории центробежных регуляторов. Среди его архивных материалов сохранилась также составленная им рукописная программа по общей меахнике (1930 г.). Эта программа содержит статику, кинематику, динамику точки, системы и твердого тела. В основном она соответствует современным курсам теоретической механики на механико-математических факультетах университетов. Из пояснительной записки к программе можно заключить, что Я. И. Грдина вообще не считал целесообразным выделение статики в самостоятельный раздел механики, ибо, как он пишет, «со значительной экономией времени положения статики можно изложить как частные случаи соответствующих положений динамики. Однако в педагогическом учебном заведении выделение статики в самостоятельный отдел является желательным по той причине, что

Выпускники математики Екатеринославского университета. Август 1923 г.

окончившие это заведение лица будут преподавать также механику в технических учебных заведениях, в которых статика должна быть пройдена в самом начале курса, ибо она там должна предшествовать таким начальным дисциплинам, как, например, сопротивление материалов, для которых кинематика и динамика почти не нужны». Как видим, Я. И. Грдина вдумчиво относился к решению насущных вопросов методики преподавания, которые и в настоящее время являются актуальными.

Я. И. Грдине принадлежат три учебника по прикладной механике — деталям машин, паровым котлам и газовым двигателям. Эти учебники в полной мере отвечают тем требованиям, которые предъявлялись в то время к горным инженерам. Они изложены с педагогическим мастерством, хорошим языком, представляющим собой удачное сочетание лаконичности, ясности и строгости. На содержании этих учебников мы здесь не останавливаемся, поскольку ниже оно изложено достаточно подробно.

Я. И. Грдине были присущи широкая эрудиция, глубокое знание всех читаемых им предметов. Изумительная память позволяла ему помнить наизусть обширные справочные материалы. Он никогда не пользовался на лекциях конспектами, учил студентов хорошо разбираться в справочниках. Очень чутко реагировал на настроение аудитории, хорошо ею владел, умело пользовался шуткой. Он был исключительно собранный, организованный, остроумный и требовательный преподаватель. На доске он писал крупным почерком, четко и ясно, хорошо рисовал схемы, чертежи. Читал непринужденно, живо. Иногда мастерски рассказывал анекдоты.

В горном институте потоки студентов доходили до 60 человек, в университете они были значительно меньшими. Посещаемость вообще была плохая, так как многие студенты работали, но лекции Я. И. Грдины посещались всеми — настолько они были интересными и привлекательными. Состав потоков был пестрый, были студенты и с хорошей подготовкой, и с плохой. Однако Ярослава Ивановича понимали все — настолько он был прекрасным педагогом. Никогда не допускал упрощенчества, вульгаризации. Его успех был вызван исключительно знанием предмета и четкостью изложения. Всегда подтянутый, он держался со всеми скромно и корректно, никогда никого не обижал, был человеком безупречных правил и студентов воспитывал в таком же духе. Чрезвычайно честный и порядочный в семье и на работе, он строго порицал отсутствие этих качеств у других. Несмотря на свое высокое положение и авторитет, он был удивительно простым и непосредственным в обращении со студентами и сотрудниками. К своему делу он относился с душой, с любовью. Студенты его глубоко уважали и любили.

Я. И. Грдина принимал экзамены в течение всего учебного года по средам — это было традиционно, и никаких специальных экзаменационных сессий не признавал. Каждую среду с шести до десяти часов вечера в помещение горного института к нему приходили студенты сдавать экзамены. В аудитории было пять-шесть досок, и в соответствии с этим одновременно получали задание пять-шесть студентов. Однако при этом присутствовали все пришедшие, в среднем 40—50 человек. На подготовку Ярослав Иванович давал 15—20 минут, а затем студент

Я. И. Грдина. Снимок 1930 г.

должен был отвечать у доски. Обстановка на экзаменах была непринужденной: тот, кто чувствовал себя неподготовленным, просил разрешения прийти в следующий раз.

По воспоминаниям профессора Н. П. Гришковой, бывшей студентки Ярослава Ивановича в Днепропетровском университете выпуска 1922 г., студенты его боялись. Он задавал на экзамене очень трудные вопросы. Один из студентов собрал все эти вопросы, напечатал их под названием «Вопросы профессора Я. И. Грдины» и распространил среди остальных студентов. Узнав об этом, Ярослав Иванович был очень рассержен и немедленно придумал новую серию вопросов.

Свои лекции профессор Грдина тщательно отшлифовывал и готовился к ним очень серьезно. Со звонком обрывал лекцию моментально, считая, что внимание студентов снижается после звонка, а главное, в силу своего характера не мог не придерживаться строгого порядка. Следующую лекцию он начинал так, как будто бы не было перерыва в несколько дней, и записывал на доске формулы в том же незаконченном виде, в каком они были к моменту звонка в прошлый раз, продолжая начатый ранее вывод.

Однажды был такой случай. Забыли поставить в известность Ярослава Ивановича об изменении расписания. Он пришел в аудиторию и начал лекцию с середины какого-то вывода формулы по термодинамике. Студенты стали переглядываться, и староста, прервав профессора, сказал, что никто ничего не понимает. Поняв, что изменили расписание и он попал в другой поток, уточнив, какие студенты слушают его, Ярослав Иванович быстро вытер доску, сетуя на то, что потеряно 15 минут лекционного времени, и начал лекцию точно с того места, на котором он закончил предыдущую лекцию в данном потоке. Это вызвало необычайное удивление у студентов, и они рассказывали об этом случае как о феномене.

Глава третья

Работы по теории регулирования

1. Состояние теории автоматического регулирования до появления работ Я. И. Грдины

Теория автоматического регулирования зародилась в XIX столетии благодаря работам выдающегося английского ученого Д. К. Максвелла (1831—1879), корифея русской механики И. А. Вышнеградского (1831—1895) и известного словацкого ученого А. Стодолы (1859—1942).

Появление этой теории, как и ряда других, было вызвано запросами машиностроительной практики. Как известно, одной из важнейших задач динамики машин является задача об определении наиболее выгодных соотношений между массами, силами и скоростями отдельных звеньев машины. В общем случае скорости ведущего звена машины — величины переменные, а это влечет за собой появление добавочных динамических давлений, влияющих на уменьшение коэффициента полезного действия машины, понижение ее прочности и ухудшение технологического процесса работы.

Анализ изменения скоростей ведущих звеньев машин за время установившегося движения показывает, что эти изменения носят характер колебаний. Последние могут быть периодическими и непериодическими. При этом может оказаться, что во время установившегося движения машины колебания скоростей выйдут за пределы допустимых величин. В этом случае возникает необходимость регулирования указанных колебаний.

Регулирование периодических колебаний достигается соответствующим подбором масс звеньев машины, непериодических колебаний с помощью специальных установок, называемых регуляторами. Целью последних является также регулирование законов изменения движущих сил и сил сопротивления в машине.

Исследование систем автоматического регулирования тесно связано с проблемами теории колебаний и теории устойчивости движения.

Таким образом, вопросы автоматического регулирования относятся к области общей механики. Простейшим регулятором является центробежный регулятор Д. Уатта, служащий для поддержания средней угловой скорости паровой машины при изменении нагрузки, связанной с включением или выключением обслуживаемых паровой машиной станков, динамо-машин и т. д. Регулятор Уатта является регулятором прямого действия.

Запросы машиностроения уже во второй половине XIX в. потребовали создания безотказно работающих регуляторов, конструктивные данные которых были бы заранее обоснованы. Кроме того, появилась необходимость рассматривать движение машин вместе с регулятором как одной механической системы. Решение этих вопросов оказалось весьма трудным.

Первое исследование по динамике регулирования появилось в 1840 г. и принадлежит Эри[1]. Эта работа была вызвана запросами астрономической практики, связанной с применением специальных двигателей — фрикционных часовых механизмов, позволявших экваториалу автоматически следить за видимым движением звезд. Указанный механизм можно рассматривать как некоторый фрикционный регулятор. Оказалось, что работа этих механизмов подвержена нежелательным колебаниям. Теория указанных регуляторов, разработанная Эри, показала, что такие регуляторы неустойчивы. Поэтому Эри предложил добавить к рассматриваемому часовому механизму катаракт, т. е. особый прибор, присоединяемый к муфте регулятора и обеспечивающий перемещение ее пропорционально скорости. К сожалению, Эри не удалось установить критерий устойчивости.

Этот критерий был определен знаменитым английским физиком Д. К. Максвеллом. В его работе «О регу-

---

[1] G. A i r y. On the Regulator of the Clockwork vor Effecting Uniform Movement of Equatoreales.— «Memoires of the Royal Asteronomical Society», v. XX, 1850—1851.

ляторах»[1] рассмотрены регуляторы, состоящие из центробежного маятника, шары которого, раскрываясь, касались бы внутренней поверхности особого кольца, вращающегося вокруг оси симметрии. Такой регулятор поддерживал постоянное число оборотов машины при различных нагрузках. Максвелл поставил перед собой цель исследовать условия устойчивой работы регулятора. В указанной работе он рассматривал в линейной постановке задачи об устойчивости машин, снабженных астатическими регуляторами, к которым относятся рассмотренные выше регуляторы. В результате вопрос об устойчивости был сведен Максвеллом к решению алгебраической задачи, т. е. к исследованию корней характеристического уравнения. Как показал Максвелл, движение машины с регулятором будет устойчивым, если все корни указанного выше характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части. Этот вопрос был решен Максвеллом лишь для уравнения третьей степени.

Теория регулирования машин, которая могла бы ответить на запросы инженерной практики, была создана позднее, в 1876 г., русским ученым И. А. Вышнеградским. Огромной его заслугой было научное обоснование процесса регулирования с учетом взаимодействия машины и регулятора, кулонова и вязкого трения. Полученные результаты изложены в его классических работах «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) и «О регуляторах непрямого действия» (1878 г.).

И. А. Вышнеградский удачно применил теорию малых колебаний системы для решения задач о взаимодействии машины и регулятора. В первой из указанных работ он получил дифференциальное уравнение третьего порядка, описывающее движение системы (машина и регулятор) в виде

$$\frac{d^3u}{dt^3} + M\frac{d^2u}{dt^2} + N\frac{du}{dt} + \frac{KgL}{I\omega_0}u = \frac{Kg}{I\omega_0}(p - Q)\rho, \qquad (1)$$

где K, L, M, N — положительные постоянные; I — момент инерции машины; ρ — общее плечо, на котором действует как движущая сила, так и сопротивление Q;

[1] J. C. Maxwell. On Governors.— «Proceedings of the Royal Society», t. XVI, 1868.

ω_0 — начальная угловая скорость; g — ускорение силы тяжести; p — нормальное напряжение движущей силы и сопротивления; u — перемещение регулятора.

Коэффициенты уравнения (1) имеют физический смысл. Коэффициент M Вышнеградский называл силой катаракта. По сути M представляет собой замедление муфты при скорости, равной единице. Коэффициент K получил название меры подвижности регулятора. K обратно пропорционален тому изменению угловой скорости, которую нужно сообщить машине, чтобы муфта получила заданное ускорение. Коэффициент L, названный мерой силы действия регулятора,— обратно пропорционален перемещению муфты, необходимому для заданного изменения движущего момента. Произведение коэффициентов KL есть мера быстроты действия регулятора, N — мера его устойчивости.

Как видим, уравнение (1) для определения функции $u=u(t)$ является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами и с последним постоянным членом.

Следует заметить, что это уравнение получено И. А. Вышнеградским в результате исключения кулоновых сил трения, т. е. путем линеаризации поставленной им задачи.

Решение его Вышнеградский выражает в компактной форме и предлагает остроумный график, называемый диаграммой Вышнеградского. Этот график показывает, как изменяется устойчивость системы в зависимости от конструктивных параметров машины и регулятора.

Таким образом, полученные формула и диаграмма позволили использовать их в инженерной практике и сделать следующие выводы:

1) приведенные массы регулятора вредно влияют на устойчивость;
2) без трения не может быть устойчивой работы регулятора;
3) необходима определенная неравномерность регулятора, т. е. нужно, чтобы при изменении нагрузки несколько изменялась угловая скорость;
4) момент инерции влияет положительно на устойчивость, т. е. чем больше момент инерции, тем дальше от неустойчивости.

Свои результаты И. А. Вышнеградский сформулировал в виде тезисов, предназначенных для инженеров и изобретателей в области конструирования регуляторов.

Первый тезис. Катаракт есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Второй тезис. Автоматические регуляторы (т. е. регуляторы с нулевой неравномерностью) даже и с катарактом не должны быть употребляемы, короче: «без неравномерности нет регулятора».

Как видим, эти тезисы содержат фундаментальные, практически важные сведения о соотношениях между данными машины и регулятора, объяснивших неудачи многих конструкций. Выводы Вышнеградского создали эпоху в теории регулирования. Наконец, стала ясной динамика системы, состоящей из машины и регулятора. Стал понятным вопрос о том, как нужно изменять конструктивные параметры для увеличения устойчивости системы. Созданная И. А. Вышнеградским теория регуляторов находится в тесной связи с общей теорией устойчивости движения.

Во второй работе И. А. Вышнеградского «О регуляторах непрямого действия» рассматриваются нелинейные задачи теории регулирования. Эта работа была первой в мировой литературе по нелинейной теории регулирования и оказала большое влияние на последующие работы ученых по теории регулирования.

Известный ученый в области механики В. Л. Кирпичев (1845—1913) отмечает в воспоминаниях, что Вышнеградский многое задумал еще сделать, но не успел опубликовать свои результаты. Как пример В. Л. Кирпичев приводит следующее: «Однажды Иван Алексеевич рассказал мне содержание своего исследования о движении рудничных насосов, имеющих длинную штангу, которая с поверхности земли опускается на дно рудника. Математическая теория этого движения привела его мысли к интересному изобретению, а именно он придумал особый противовес вроде маятника, с помощью которого регулировалось движение массивной штанги насоса. Несколько лет спустя после этого разговора на одной из всемирных выставок я встретил выставленное (как интересная новинка) совершенно такое же изобретение — именно известное теперь приспособление Бокгольца — и указал Ивану Алексеевичу, что вследствие долгого откладывания публикации упомянутого исследования другое лицо опередило его. Я уверен, что это не был единственный случай, а лишь один из многих» [1].

Работы И. А. Вышнеградского оказали влияние и на зарубежных ученых. Эти работы были переведены на французский, немецкий и английский языки. В качестве примера можно сослаться на высказывания немецкого инженера Хорта в книге «Техническая теория колебаний» [2]. Хорт прямо заявляет, что работа Вышнеградского о регуляторах прямого действия, в частности его знаменитые тезисы, лежат в основе современной теории регулирования. Другой немецкий инженер, Лоренц, в книге «Техническая механика» указывает, что теория движения машины, снабженной регулятором Уатта, впервые была дана Вышнеградским.

Однако рядом зарубежных ученых, особенно в США, замалчиваются заслуги И. А. Вышнеградского в создании теории регулирования и основополагающая роль в ее создании приписывается второстепенным зарубежным ученым — Толле, Тринксу и некоторым другим. В то же время сам Тринкс в книге, изданной в 1919 г. в Нью-Йорке, пишет, что работы Вышнеградского лежат в основе современной теории регулирования.

Ярким последователем И. А. Вышнеградского являлся словацкий ученый А. Стодола. Ему принадлежат капитальные исследования по теории конструирования и расчета тепловых двигателей, паровых и газовых турбин. А. Стодола является создателем теории плоских инерционных регуляторов, т. е. таких регуляторов, в которых кроме центробежной силы инерции действуют еще и касательные силы инерции. Здесь А. Стодола показал, как нужно изменить знаменитые тезисы Вышнеградского для случая инерционных регуляторов. Эти классические результаты А. Стодолы отражены в его работах «О регулировании турбин I» (1893 г.), «О регулировании турбин II» (1894 г.), «Об инерционных регуляторах» (1899 г.).

---

[1] В. Л. Кирпичев. Иван Алексеевич Вышнеградский как профессор и ученый. Доклад в Харьковском отделении русского технического об-ва 27 мая 1895 г. СПб., 1895.

[2] См.: А. А. Андронов. И. А. Вышнеградский и его роль в создании теории автоматического регулирования.—В кн. «Вопросы истории отечественной науки». М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949, стр. 500—517.

Следует отметить также работу Г. Каргля, посвященную теории регулирования машин [1]. Его автор применил приближенный метод интегрирования уравнения движения, в результате чего убедился в непригодности автоматических регуляторов. Представляют интерес высказывания о работах Г. Каргля И. А. Вышнеградского, который отмечает, что не только автоматические центробежные регуляторы без катаракта, но и все статические регуляторы без катаракта не пригодны для регулирования машин. Однако, говорит И. А. Вышнеградский, заслугой Г. Каргля является то, что он объяснил ряд важных моментов в теории регуляторов [2].

Немецкий ученый Р. Грасгоф является автором многочисленных работ по прикладной механике. Основным его трудом служит трехтомник «Теоретическое машиноведение». В последнем разделе первого тома, опубликованного в 1875 г., изложена теория регулятора.

В 1905 г. была опубликована работа Толле «Регулирование двигателей» [3]. Эта книга является курсом теории регулирования машин, содержащим изложение линеаризованной теории регулирования. Толле по сути распространял в этой книге идеи Вышнеградского, но никаких ссылок на него не делал. Как известно, работы Вышнеградского были опубликованы в Германии, и о них не мог не знать Толле.

Большой вклад в развитие теории автоматического регулирования внес корифей отечественной механики, «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847—1921 г.).

Ему принадлежит исследование «Теория регулирования хода машин» [4]. Этот труд является первой монографией в России, в которой строго научно освещены основы теории регуляторов и теории регулирования работы машин. Исследование отражает содержание специаль-

---

[1] G. Kargl. Zur Lösung der Regulatorfrage.— «Civilingenieur», Bd. 17, 1871.

[2] И. А. Вышнеградский. О регуляторах прямого действия.— В сб. «Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи)». Под редакцией и с комментариями акад. А. А. Андронова и члена-корр. АН СССР И. Н. Вознесенского. Изд-во АН СССР, 1949, стр. 65—66.

[3] Tolle. Regelung der Kraftmaschinen. Berlin, 1905.

[4] Н. Е. Жуковский. Теория регулирования хода машин, ч. I. — Полное собрание сочинений, вып. 4. М.— Л., 1938—1939.

Жилой корпус горного института, в котором Я. И. Грдина жил с семьей в 1914 г.

ного курса лекций о регулировании хода машин, которые Н. Е. Жуковский читал в МВТУ в течение многих лет. В этих лекциях освещены результаты собственных исследований Н. Е. Жуковского. Он рассмотрел основные задачи теории регулирования, исследовал вопросы об устойчивости и сходимости процесса регулирования. Его работа не утратила значения до настоящего времени.

Значительный интерес представляет исследование профессора Днепропетровского горного института К. Э. Рериха по теории регулирования хода машин[1]. В качестве математического аппарата он использует главным образом разложение функций в гармонические ряды.

Ценные исследования в области автоматического регулирования принадлежат Я. И. Грдине. В них на основе анализа работ предшественников — И. А. Вышнеградского, Г. Каргля, Р. Грасгофа и некоторых других — получен ряд новых, обобщающих результатов. К сожалению, о ра-

[1] К. Э. Рерих. Теория регулирования машин, ч. I. Пг., 1916.

ботах Я. И. Грдины весьма мало упоминаний в литературе. Ряд указаний на его исследования дан в весьма содержательной книге А. Н. Боголюбова[1].

2. Исследование «Движение регуляторов прямого действия и его устойчивость»

Названная в заглавии работа состоит из предисловия, трех глав и примечания автора.

В предисловии Я. И. Грдина отмечает непреодолимые математические трудности, имеющие место при исследовании вопроса об устойчивости движения регулятора и машины, им управляемой. В связи с этим весьма ценными являются, по его мнению, приближенные методы решения указанного вопроса. Я. И. Грдина называет два таких метода: Каргля — Грасгофа и Вышнеградского.

Анализируя оба метода, автор отмечает, что применение метода Каргля — Грасгофа связано с очень сложными числовыми выкладками, причем результат получается весьма приближенный, кроме того, этим методом трудно оценить влияние катаракта. На основании теории Вышнеградского Грдина устанавливает соотношение между элементами машины и регулятора, которые необходимы для правильного их действия. Для осуществления всего сказанного он кратко излагает методы Каргля — Грасгофа и Вышнеградского, обращая особое внимание на трение, и в связи с этим дополняет уравнение Вышнеградского. Затем подробно развивает следствия, вытекающие из теории Вышнеградского, и исследует влияние касательных сил инерции.

Первая глава посвящена дифференциальному уравнению движения регулятора. Рассматриваются регуляторы прямого действия конические и плоские.

Рассматривая регулятор как свободное твердое тело, Я. И. Грдина получает дифференциальное уравнение его движения в виде

$$\frac{\omega^2 i'}{2} - S + (\mu \mp \gamma i)\frac{d\omega}{dt} - (m \mp \gamma\mu)\frac{d^2x}{dt^2} -$$

$$- (\zeta + E \pm \gamma\omega i')\frac{dx}{dt} \mp F_0 = 0, \tag{2}$$

---

[1] А. Н. Боголюбов. История механики машин. Киев. «Наукова думка», 1964, стр. 270, 283, 437.

где i — момент инерции регулятора; ω — его угловая скорость; S — давление муфты в состоянии покоя; m — приведенная масса; x — перемещение муфты; $i' = \frac{di}{dx}$; μ, γ, ζ, E, F_0 — постоянные параметры.

Как видим, уравнение (2) содержит две переменные от времени: перемещение x и угловую скорость ω. Однако между ними существует зависимость, устанавливаемая уравнением движения машины, т. е.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r(D - Q)}{I}, \tag{3}$$

где r — радиус кривошипа; D — касательная полезная движущая сила, приведенная к пальцу кривошипа; Q — полезная сила сопротивления; I — момент инерции частей (главным образом маховика), сидящих на главном валу машины, относительно оси вала; Ω — угловая скорость вала машин.

Как известно, $\frac{\omega}{\Omega} = k$, где k — передаточное число (для плоского регулятора $k = 1$). Следовательно, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{kr}{I}(D - Q). \tag{4}$$

Необходимо отметить, что Q можно считать постоянной, а D — переменной, она выражается сложной зависимостью от переменного давления пара, внутреннего трения, отношения между длинами шатуна и кривошипа, а также от влияния сил инерции движущихся взад и вперед масс.

Все это привело к попыткам получить хотя бы приближенное уравнение движения машины, но в более простом виде. Первой из таких попыток является попытка Каргля — Грасгофа. Ими внесены следующие упрощающие допущения:

1. Сила D постоянна и равна некоторому среднему значению D_s.

2. Для каждого периода

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{kr(D_s - Q)}{I} = \psi_s, \tag{5}$$

где $\psi_s = \mathrm{const}$ зависит от положения регулятора в момент первой отсечки периода s. Следовательно, интегрируя, получают

$$\omega = \omega_s + \psi_s t, \tag{6}$$

где ω_s — угловая скорость регулятора в начальный момент периода s.

3. Соответственная линия влияния силы D является ступенчатой линией.

Вышнеградский предложил свой метод решения этой же задачи, основанный на двух предположениях:

а) Среднее значение движущей силы D и движущего момента пропорциональны перемещению x_s муфты из некоторого определенного положения, т. е.

$$rD_s = \nu (a - x_s),$$

где ν — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность силы. Это предположение практически близко к истинному.

б) Действие регулятора на величину движущей силы непрерывно, т. е. в каждый момент времени движущая сила D равна той средней движущей силе D_s, которая соответствовала бы постоянному положению регулятора,

$$rD = \nu (a - x).$$

Анализ обоих методов приводит к выводу, что для больших промежутков времени, равных продолжительности нескольких оборотов машины, оба они справедливы и дают результаты, близкие к действительности.

Эти методы Я. И. Грдина применил к интегрированию уравнения (2).

В результате он получил однородное линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^3u}{dt^3} + a\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = 0, \tag{7}$$

где
$$u = x_2 - x.$$

Общий интеграл уравнения (7) будет

$$u = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + C_3 e^{z_3 t}, \tag{8}$$

где $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, $\hat{C}_3$ — постоянные интегрирования; z_1, z_2, z_3 — корни характеристического уравнения

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0. \tag{9}$$

Если среди корней (9) есть комплексные, то они будут сопряженными:

$$z_2 = \alpha + \beta i$$
$$z_3 = \alpha - \beta i. \tag{10}$$

Тогда общий интеграл (7) примет вид

$$u = C_1 e^{z_1 t} + e^{\alpha t}(M \cos \beta t + N \sin \beta t), \tag{11}$$

где C_1, M, N — постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются из условий, что положение, скорость и ускорение муфты в начале периода те же, что и в конце предыдущего периода.

В рассматриваемой работе Я. И. Грдина излагает свой метод решения поставленной задачи. Сочетая допущения Каргля — Грасгофа с первым допущением Вышнеградского, он нашел уравнение движения машины для периода s в форме (7). После чего он переходит к интегрированию уравнения (2) с учетом уравнений движения машины Каргля — Грасгофа, т. е. уравнений (8) и (9).

В третьей главе Я. И. Грдина приводит свои общие выводы, сводящиеся к следующему:

1. Положения, лежащие в основе методов Каргля — Грасгофа и Вышнеградского, одинаково точны.

2. Метод Каргля — Грасгофа требует больших вычислений в каждом частном случае и не дает никаких общих указаний на соотношения между элементами регулятора и машины.

3. Метод Вышнеградского позволяет получить самые полные указания на это соотношение.

4. Катаракт не составляет необходимой принадлежности регулятора как с колебаниями, так и без них, так как роль катаракта могут иногда исполнять дополнительное и гидравлическое трения.

5. Астатические регуляторы, в которых касательные силы инерции не оказывают влияния или оказывают отрицательное влияние на устойчивость движения, непригодны для регулирования хода машин, каким бы они ни были снабжены катарактом.

ОТЪ ГОРНАГО ИНСТИТУТА ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II

объявляется во всеобщее свѣдѣніе, что для полученія званія профессора прикладной механики Екатеринославскаго Высшаго Горнаго Училища инженеръ-технологъ ГРДИНА:

1) въ воскресенье, 18-го февраля сего года, въ 1 часъ дня будетъ публично защищать въ конференцъ-залѣ Института диссертацію: «Устойчивость движенія машины, управляемой центробѣжнымъ регуляторомъ» и 2) въ среду, 21-го февраля, въ 8 часовъ вечера, прочтетъ публично въ одной изъ аудиторій Института, двѣ пробныя лекціи: одну по назначенію Совѣта Института: «О газомоторахъ, какъ двигателяхъ заводскаго дѣла», а другую по собственному выбору: «Наивыгоднѣйшія скорости желѣзнодорожнаго поѣзда въ зависимости отъ профиля пути».

А 40095

Выдержка из газеты «Новое время» (от 2 февраля 1900 г.) о защите Я. И. Грдиной диссертации на соискание звания профессора

6. Статические регуляторы пригодны для регулирования хода машин, причем катаракт здесь не всегда нужен. Для статического регулятора должно выполняться условие, при котором уменьшаются колебания.

7. Необходимо, чтобы скорость машин во время регулирования при колебаниях не изменялась в широких пределах.

8. Для быстроходных машин более удобными являются регуляторы пружинные (плоские или конические), но не весовые (конические).

9. Двигатели без периодического изменения движущей силы, для того чтобы величина скорости не выходила за положенные пределы, нуждаются в особом маховике.

В примечании к своей работе Я. И. Грдина отмечает преимущество в смысле простоты и удобства установленной им формулы для определения напряжения Q вращающейся пружины по сравнению с формулой А. И. Сидорова[1].

[1] А. И. Сидоров. Плоские регуляторы быстроходных машин. М., 1895.

3. Исследование «О некоторых типах регуляторов с двухгрузовым маятником»

Цикл работ Я. И. Грдины по теории регуляторов на тему «О некоторых типах регуляторов с двухгрузовым маятником» опубликован в журнале «Вестник общества технологов» (№ 4—10) за 1899 г.

В статье, помещенной в четвертом номере указанного журнала, Я. И. Грдина рассматривает один из типов регуляторов с двухгрузовыми маятниками, каким является регулятор, у которого один из грузов маятника с подвижной осью вращения одновременно служит роликом. Видоизменение этого типа регулятора состоит в том, что назначение ролика исполняет особый отводный рычаг. Обратным типов служит регулятор, маятник которого имеет неподвижную ось вращения. Здесь ролик, по которому катится муфта регулятора, может быть заменен особым шатуном.

Как отмечает Я. И. Грдина, глубоко исследованы лишь конические весовые регуляторы, маятники которых имеют лишь один груз. К числу известных регуляторов с двухгрузовыми маятниками относятся лишь два: косинус-регулятор и регулятор Бусса, в то время как таких регуляторов можно создать значительное число. Указанные регуляторы с двухгрузовыми маятниками имеют то преимущество, что неравномерность хода может быть достигнута почти независимо от хода муфты. Автор применяет в этой статье особые методы, связанные с вычислением таблиц и построением характеристических кривых для ряда случаев.

В следующем номере журнала появилось продолжение первой статьи, посвященное вопросу о видоизменении основного типа регуляторов с подвижной осью вращения маятника. В шестом номере журнала ученый также публикует продолжение исследования о регуляторах с неподвижной осью вращения маятника особое внимание уделив видоизменению основного типа регуляторов.

В последующих номерах журнала Я. И. Грдина излагает вторую часть работы «О некоторых типах регуляторов с двухфазовым маятником». Здесь он исследует вопрос о нечувствительности регуляторов, происходящей от сил трения.

В статье, опубликованной в десятом номере журнала, исследуются регуляторы, маятник которых имеет подвижную ось и кривошип. Я. И. Грдина приходит к выводу, что замена ролика кривошипом или шатуном значительно уменьшает трение и делает его более постоянным и близким к трению в среднем положении регулятора.

4. Работа «Устойчивость движения машины, управляемой центробежным регулятором»

Вопрос об устойчивости машин и двигателей является и в настоящее время актуальным. В период появления рассматриваемой работы проблема устойчивости движения машины представляла очень большой интерес, но решение ее было связано с колоссальными математическими трудностями, усугублявшимися еще и тем, что приходилось по сути рассматривать совместное движение системы, состоящей из двигателя и регулирующего прибора. При решении поставленной задачи необходимо было установить закон изменения движущей силы машины и интегрировать полученные дифференциальные уравнения движения указанной выше системы.

В этой статье Я. И. Грдина сравнивает результаты решения задачи, осуществленные с помощью допущений Каргля и Вышнеградского, описанные в его предыдущих работах. Он обращает также внимание на внутреннее трение регулятора, на влияние катаракта и тангенциальных сил инерции. В результате в дифференциальных уравнениях движения получились весьма сложные коэффициенты.

Я. И. Грдина исследовал здесь регуляторы прямого действия. Однако эти результаты могут быть использованы также при исследовании регуляторов непрямого действия при выполнении двух условий: 1) вспомогательный двигатель вводится в механизм регулятора так, что с достаточной скоростью приводит парораспределительный орган машины в положение, соответствующее положению муфты в данный момент; 2) обратное воздействие частей вспомогательного двигателя на регулятор невелико.

Дифференциальное уравнение движения регулятора Я. И. Грдина получает в виде

$$\frac{\omega^2}{2} i' - S + \mu \frac{d\omega}{dt} - \zeta \frac{dx}{dt} \mp F \mp R = m \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (12)$$

Значения всех величин известны из анализа предыдущих работ Я. И. Грдины.

Присоединяя уравнение движения машины к дифференциальному уравнению движения регулятора, можно осуществить интегрирование уравнения движения регулятора. Этот вопрос рассматривается в третьей главе. В четвертой главе устанавливаются условия устойчивости движения регулятора. В связи с этим рассматриваются частные случаи движения регулятора и для конкретных числовых значений соответствующих коэффициентов устанавливаются условия устойчивости.

В главе пятой также исследуется вопрос об устойчивости движения регулятора на основании допущений Вышнеградского и Каргля, о которых ранее шла речь. В главе шестой рассматривается вопрос о связи между маховиком и регулятором. На основании ряда разобранных примеров Я. И. Грдина приходит к следующему выводу: в быстроходных машинах не следует применять весовые или конические пружинные регуляторы с очень слабыми пружинами.

В седьмой главе исследуется вопрос об изменении скорости машины во время регулирования. Здесь Я. И. Грдина отмечает, что для устойчивости движения машины необходимо обратить также внимание на пределы, в которых будет колебаться скорость машины в период регулирования. Свои рассуждения он подтверждает рассмотрением ряда частных случаев.

Наконец, восьмая глава рассматриваемой статьи посвящена выяснению вопроса о влиянии тангенциальных сил инерции на устойчивость движения регуляторов.

5. Исследование «К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов»

Последнее исследование Я. И. Грдины по теории регуляторов относится к 1927 г. Оно было посвящено вопросу о влиянии трения на процесс регулирования, Как отмечает автор, роль и значение постоянного трения в процессе непрерывного регулирования работы машин освещены в статье К. Э. Рериха[1]. Однако в ней не учтено влияние дополнительного трения от действия оси регулятора (и связанных с ней частей) на шарниры и муфту при относительном движении регулятора, когда изменяются его момент инерции относительно оси вращения и угловая скорость вращения самой оси. Вместе с тем в конических регуляторах указанное дополнительное трение очень заметно. Поскольку оно пропорционально скорости муфты регулятора, влияние трения равносильно действию сильного катаракта. Поэтому результаты исследования К. Э. Рериха оказались далекими от действительности. Как отмечает Я. И. Грдина, эти результаты непригодны для плоских регуляторов, так как последние действуют на отсечку и не дают непрерывного регулирования.

Вопрос о дополнительном трении и его влиянии на регулирование был также исследован Я. И. Грдиной в этой работе. Статья посвящена исследованию процесса непрерывного регулирования. В ней рассмотрены дифференциальные уравнения движения регулятора, общий интеграл уравнения движения регулятора, наивыгоднейший процесс регулирования, предельный размах муфты регулятора, условия устойчивости регулятора, изменение скорости машины во время регулирования. В «Вестнике инженеров и техников» (№ 2, 1931 г.) была опубликована статья «К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов при прерывном регулировании», явившаяся окончанием статьи 1927 г.

Я. И. Грдина утверждает, что если не применять грузовых регуляторов для быстроходных машин в случае, когда дополнительное трение окажется недостаточным для того, чтобы снабдить регулятор особым катарактом, то условием устойчивости движения регулятора и машины будет единственно

$$u \leqslant 2. \qquad (13)$$

Затем Грдина переходит к рассмотрению вопроса об общем и универсальном условии устойчивости движения

[1] К. Э. Рерих. Влияние трения на процесс регулирования центробежных регуляторов прямого действия.— «Изв. Екатеринославского горного ин-та», т. XIV, 1924.

регулятора и машины. Он выражает величину u через основные характерные для регулятора машины величины и получает

$$u=\frac{\varphi\eta\nu}{\xi\delta}, \tag{14}$$

где ξ — отношение наибольшего избытка или недостатка индикаторной работы в течение одного цикла или периода к индикаторной работе за весь цикл; ν — степень неравномерности вращения маховика; η — коэффициент полезного действия. Тогда универсальное условие устойчивости движения регулятора и машины имеет вид

$$\frac{\varphi\eta\nu}{\xi\,\delta}\leqslant 2. \tag{15}$$

Ученый отмечает, что величины φ, η, ξ совершенно не зависят от нашего выбора, а полностью определяются характером и назначением машины. Так, величина φ может изменяться в пределах от 1 до 2; η — от 0,75 до 0,85; ξ (для одноцилиндровой паровой машины) — от 0,3 до 0,5. Для одноцилиндрового четырехтактного двигателя внутреннего сгорания ξ близко к 1, а для двухцилиндрового — около 0,7. Что касается величин δ и ν, то они не зависят от проектируемых и удовлетворяют условию

$$\frac{\delta}{\nu}\geqslant\frac{\varphi\eta}{2\xi}. \tag{16}$$

Соотношение между элементами маховика и регулятора машины, подчиняющееся выражению (16), определяет динамическую устойчивость хода машины.

Далее Грдина анализирует работу К. Э. Рериха «Влияние быстроходности двигателя на прерывный процесс регулирования центробежных регуляторов» (1925—1927 гг.) и отмечает один чрезвычайно существенный ее недостаток, заключающийся в том, что автор этой работы, как указывалось выше, не учитывает действия дополнительного трения и катаракта (в случае существования последнего). Второй недостаток статьи Рериха, по мнению Грдины, состоит в том, что в приведенных в ней таблицах в качестве аргумента принята некоторая величина, не имеющая никакого отношения к случаю прерывного регулирования. К третьему недостатку отнесено определение Рерихом величины, характеризующей ускорение муфты, не простым дифференцированием скорости по времени, а прямо по выражению, вытекающему из уравнения движения муфты, что приводит к нежелательным ошибкам.

В статье рассматривалась также динамическая неравномерность регулятора. Как известно, движение машины должно быть не только устойчивым при переходе от одного равновесного положения к другому, но еще во время этого перехода скорость машины не должна изменяться в слишком широких пределах. Грдина предполагал опубликовать еще одну статью, завершающую указанную тему. Однако смерть помешала ему осуществить эти планы.

Подводя итоги, можно сказать, что своими исследованиями по теории автоматического регулирования Я. И. Грдина внес большой вклад и по существу завершил цикл работ по автоматическому регулированию, относящихся к механическим системам. Это дало толчок появлению в 40—60-е годы исследований по проблемам автоматического регулирования электрических систем, успешно развиваемых в нашей стране.

В современной технике очень велика роль различных автоматических устройств. Поэтому все большее значение и развитие получает теория автоматического регулирования. Возникнув в области машиностроения, эта теория охватывает ныне все больше и больше различных областей техники.

Глава четвертая

Работы по прикладной механике

1. Курс прикладной механики «Паровые котлы»

Широкий диапазон исследований Я. И. Грдины и глубокая эрудиция в вопросах теоретической, аналитической и прикладной механики позволили ему создать весьма содержательные курсы по паровым котлам и газовым двигателям. Составленные им учебники отражали содержание читаемых в Екатеринославском высшем горном училище лекций.

Первая глава учебника «Паровые котлы» посвящена топкам паровых котлов. Изложение начинается с определения парового котла и описания частей, из которых он состоит: печи парового котла, собственного котла и арматуры. При этом дается и определение частей, из которых состоят указанные детали котла. Специально рассматривается вопрос о классификации топок по месту их расположения (топки внутри котла, топки под котлом и топки впереди котла). Устанавливается формула для определения температуры в топке:

$$T = t_2 + \frac{f_1 w (1 - i)}{c (1 + L)}, \tag{1}$$

где $f_1 w$ — число калорий, практически выделяемых килограммом топлива: f_1 — коэффициент полезного действия топки; w — число калорий, теоретически выделяемых килограммом топлива, i — количество теплоты, выделяемое лучеиспусканием, отданное стенкам и воде парового котла; $f_1 w (1 - i)$ — число калорий, идущее на нагрев $(1 + L)$ килограммом продуктов горения; c — теплоемкость при постоянном давлении продуктов горения; t_2 — температура наружного воздуха.

Я. И. Грдина отмечает достоинство топок внутри котла, заключающееся в том, что в них устранена потеря теплоты во внешнее пространство. Температура в топке под котлом определяется по той же формуле (1) при значении $i = 0{,}2$. Затем рассматривается вопрос о топке перед котлом и даются рекомендации для улучшения горения топлива на обыкновенной решетке. При этом Грдина отмечает, что экономное действие топки во многом зависит от умения и искусства кочегара. Он считает, что хороший кочегар может сжечь при всех одинаковых условиях минимальное количество топлива. Наряду с этим, чтобы не ставить совершенство процесса горения в тесную зависимость от индивидуальных свойств кочегара, предлагается много видоизменений обыкновенной топки. Как наиболее удачное видоизменение топки Грдина отмечает топку Карно в применении к ланкаширскому котлу с двумя жаровыми трубами. Рассматривая дымогарные топки, целью которых является сжигание топлива, не сопровождающееся появлением дыма, автор учебника отмечает, что такие топки не всегда обеспечивают полное сгорание топлива и экономичность действия котла. Чтобы добиться более полного сгорания, прибегают к следующим средствам:

1) впускают в топку дополнительную струю воздуха навстречу горящим газам;

2) впускают в топку тонкие струи пара, которые способствуют перемешиванию горящих газов с кислородом воздуха;

3) устраивают топки с непрерывной механической подачей топлива;

4) сжигают топливо в порошкообразном виде;

5) выделяют из топлива в особых генераторах горючие газы, которые сжигают под топками паровых котлов. В результате дается краткая характеристика топок Тенбринка, Лича, Шварцкопфа и некоторых других.

Вторая глава книги содержит теорию парового котла.

Третья глава посвящена дымовым трубам как наиболее распространенным устройствам для получения тяги. Установлено, что сила тяги пропорциональна корню квадратному из высоты трубы. Показано, что при расчете устойчивости трубы не следует ограничиваться только степенью сцепления кирпичей между собой, так как внутренняя часть стенки трубы нагревается при движении через нее горячих газов, и труба стремится удлиниться. Однако этому препятствует внешняя холодная часть стенки, причем горизонтальные швы стенки очень растягиваются и стремятся разойтись. В качестве подтверждения этого факта Я. И. Грдина приводит пример с падением фабричных труб в Германии в 1876 г. в г. Аахене во время пронесшегося урагана. Оказалось, что все упавшие трубы в это время находились в работе, а холодные трубы все уцелели.

Далее Грдина отмечает, что дымовые трубы совершенно непригодны для получения очень большой тяги. Искусственная тяга получается в результате применения приспособлений двух видов: пароструйных приборов и вентиляторов.

В четвертой главе рассмотрен вопрос о постройке котлов.

Пятая глава посвящена типам паровых котлов. Здесь отмечено преимущество одних типов котлов перед другими. Особо удобным и прочным назван котел отечественного ученого Шухова.

В последней, шестой, главе дано описание арматуры котлов — совокупности приборов, необходимых для правильного действия котла и ухода за ним. Здесь рассмотрены предохранительные клапаны, их устройство, выбор рациональных размеров. Даются практические советы о необходимости ежедневного испробования клапанов в целях выяснения, не прикипели ли эти клапаны к котлу. Для питания котлов водой употребляются два вида приборов — поршневые насосы и инжекторы.

Книга снабжена атласом чертежей.

Таково вкратце содержание этого в основном описательного курса.

2. Учебник «Газовые двигатели»

Книга «Газовые двигатели» опубликована в 1903 г. Она является курсом лекций, прочитанных автором студентам второго курса Екатеринославского высшего горного училища. Книга предполагает знакомство читателей с действием паровой машины и основами термодинамики. Из термодинамики здесь приведен только краткий вывод некоторых формул, нужных для понимания излагаемого в книге материала. При составлении этого руководства и чертежей к нему автор воспользовался исследованием Шеттлера «Die Gasmaschine».

Так как лекции по газовым двигателям читались студентам горной специальности, автор особое внимание уделил газовым двигателям, сжигающим колошниковые газы доменных частей. Достаточно подробно он остановился на двигателе Дизеля, в котором использовалось дешевое топливо (нефть и нефтяные отходы) и который в то время только начали применять.

Книга общим объемом в 171 страницу содержит девять глав. Первая глава посвящена двух-, четырех- и шеститактным двигателям.

Во второй главе рассматриваются виды горючего, используемого в газовых двигателях: светильный газ, химические свойства которого описаны в этой книге; газ Довсона, состоящий из смеси «воздушного» и «водяного» газов, получаемый одновременным продуванием воздуха и паров воды через толстый слой раскаленного антрацита, кокса или их смеси, доменный газ, называемый также колошниковым и получаемый в доменной печи.

Третья глава книги посвящена вопросам газораспределения, зажигания и регулирования. Для впуска газа и воздуха, а также выпуска продуктов сгорания в газовых двигателях употребляются золотники, краны и клапаны; последние применяются и в настоящее время. Воспламенение горючей смеси в цилиндре двигателя выполняется одним из следующих способов: 1) с помощью посредствующего пламени, 2) с помощью калильной трубки и 3) посредством электрической искры. Двигатели большой мощности обычно имеют третий вид зажигания.

Простейший способ регулирования хода газового двигателя заключается в том, что центробежный регулятор при изменении скорости вращения поворачивает в газоприводной трубе плоский эллиптический клапан, чем увеличивает или уменьшает приток газа в цилиндр, а значит, и производимую при этом работу. Однако в случае использования в качестве горючего светильного газа этот способ регулирования обладает существенным недостатком, заключающимся в том, что при уменьшении притока газа смесь может не воспламениться.

Особый вид регулирования представляет собой регулирование пропусками. К числу его достоинств относятся: простота устройства регулирующего аппарата и одинаково выгодный термический режим работы машины (например, сжатие всегда остается одинаковым и достаточно большим).

Недостатками указанного вида регулирования являются уменьшение механического коэффициента полезного действия двигателя вследствие увеличивающихся промежутков времени между рабочими ходами поршня и значительная неравномерность хода. Для устранения последнего недостатка в некоторых случаях ставят очень тяжелые маховики.

В четвертой главе книги рассматриваются бензиновые, керосиновые и спиртовые двигатели.

Здесь Я. И. Грдина высказывает свое мнение о том, что «керосиновые двигатели, вероятно, найдут значительное распространение в России, как стране производства керосина» (стр. 56). Спиртовые двигатели имеют много преимуществ перед бензиновыми и керосиновыми. Во-первых, применение спирта менее огнеопасно, чем керосина, а тем более бензина. Во-вторых, продукты горения спирта не имеют неприятного запаха, как продукты горения керосина и бензина. В-третьих, спирт совсем не загрязняет двигатель. По своей конструкции спиртовые двигатели существенно ничем не отличаются от конструкции бензиновых и керосиновых двигателей.

В заключение этой главы Я. И. Грдина отмечает: «К сожалению, введение денатурализации спирта в России в настоящее время еще встречает некоторые затруднения, а без таковой о применении у нас спиртовых двигателей не может быть и речи, так как акциз на спирт в несколько раз превышает стоимость самого спирта. Но можно надеяться, что затруднения эти удастся в скором времени преодолеть» (стр. 58).

Пятая глава посвящена описанию многоцилиндровых машин четырехтактного типа и двухтактных двигателей для доменных газов. Шестая глава содержит сведения о запуске газовых двигателей.

В седьмой главе рассмотрены вопросы расхода топлива и потерь его в газовых двигателях.

Оценка качества газового двигателя зависит от расхода горючего на каждую лошадиную (индикаторную или эффективную) силу в час. Для сравнения достоинств двигателей, работающих на разных видах топлива, служит экономический коэффициент полезного действия, который показывает, какая часть всего количества теплоты, развиваемой при полном сгорании топлива, может быть преобразована двигателем в полезную механическую работу. Экономический коэффициент f всего устройства определяется по формуле

$$f = f_g f', \tag{2}$$

где f_g — коэффициент полезного действия генератора;
f' — экономический коэффициент собственно двигателя.

Как показывают эксперименты, экономический коэффициент газовых двигателей изменяется в пределах от 10 до 30%.

Восьмая глава посвящена работе газового двигателя. Показано, что работа двигателя равна разности между работой, выполненной при адиабатическом расширении продуктов горения, и работой, затраченной на адиабатическое сжатие горючей смеси.

Последняя, девятая, глава посвящается двигателю Дизеля, представляющему собой четырехтактный двигатель простого действия. Этот двигатель обладает рядом особенностей, что и заставляет его выделить в особую группу. Для его работы используется главным образом жидкое топливо (керосин, нефть и нефтяные остатки).

Интересно отметить, что анализ продуктов горения убеждает в почти полном отсутствии несгоревших частей. Из соображений прочности двигателя Дизель вводил топливо в цилиндр не сразу, а постепенно, в течение первой части рабочего хода поршня (примерно до 12% хода). Я. И. Грдина после рассмотрения основных принципов действия двигателя Дизеля переходит к описанию конструкции. Здесь им рассматриваются игольчатый клапан для впуска жидкого топлива и насос, подающий сжатый воздух в особый цилиндрический резервуар, из которого он поступает затем в верхнюю часть игольчатого клапана.

Дизели по сравнению с другими газовыми двигателями обладают рядом достоинств: высокой экономичностью, отсутствием зажигателя, легким пуском без подогревания, отсутствием неприятного запаха продуктов сгорания, возможностью сжигания более дешевого топлива.

В начале нынешнего столетия, когда в России создавалось двигателестроение, связанное с широкими запросами многих отраслей промышленности, работы Грдины заполнили пробел в отсутствовавшей по этому вопросу отечественной учебной литературе. В настоящее время они, конечно, утратили свое практическое значение и интересны лишь с точки зрения истории развития теории двигателей.

3. Учебник «Детали машин»

С большим педагогическим мастерством написан учебник «Детали машин» (1905 г.). Книга объемом в 290 страниц содержит десять глав и атлас чертежей. Этот курс, как и два других, предназначен для студентов Екатеринославского высшего горного училища.

В первой его главе даны определения общих понятий, как, например, кинематическая цепь, механизм, машина. Приводится классификация механизмов и машин, а также их частей. Выводится основное уравнение движения машины. Как известно, при движении машины на нее действуют движущие силы, полезные сопротивления, для преодоления которых предназначена машина, и вредные сопротивления, какими являются силы трения, сопротивления воздуха или жидкости.

По теореме об изменении кинетической энергии системы имеем

$$T - T_0 = A - A_1 - A_2, \tag{3}$$

где T — кинетическая энергия в конце движения; T_0 — кинетическая энергия в начальный момент времени; A — работа двигательной силы; A_1 — работа силы полезного сопротивления; A_2—работа силы вредного сопротивления.

Уравнение (3) является основным уравнением движения машины. Исследуя движение машины за промежуток времени от момента пуска в ход и до момента ее остановки, получаем

$$T - T_0 = 0.$$

Следовательно,

$$A = A_1 + A_2. \tag{4}$$

Грдина останавливается на вопросе о невозможности создания вечного двигателя (perpetum mobile). Говоря о деталях машины, он отмечает, что изучение их связано с кинематикой и динамикой детали, а также конструктивным ее выполнением.

Вторая глава содержит исследование вредных сопротивлений, к числу которых относятся трение скольжения и качения, трение гибких тел, трение в цепях, внутреннее трение жидкости, трение при смазке.

В третьей главе дается расчет клина, в четвертой изложена теория винта, куда входят различные системы нарезок, и различные виды винтовых соединений. В пятой главе приводится расчет заклепок. Шестая глава посвящена теории катков. Здесь описываются цилиндрические и эллиптические катки и колеса, клинчатые катки, конические и гиперболоидальные катки. Седьмая глава содержит теорию зубчатых колес. В ней рассматриваются профили зубцов и различных видов зацеплений, винтовые зубчатые колеса, червячная передача и др. Восьмая глава посвящена ременным и канатным передачам, вопросу о коэффициенте полезного действия ременной и канатной передачи. Девятая глава содержит сведения об осях и валах. Сначала вводится понятие о различии между осью и валом. Затем исследуются условия, которым должны удовлетворять цапфы и пяты осей и валов. Разбираются различные виды муфт (разъемные, сцепные), подшипников и подпятников. В последней, десятой, главе освещен вопрос о преобразовании поступательного движения во вращательное. Здесь показаны механизмы с шатуном при наличии одного и двух ползунов, шатун с кривошипом и ползуном, кривошип и кулиса, коленчатый вал, эксцентрики.

Книга снабжена атласом чертежей. Весь материал отражает запросы горной промышленности того времени. В книге много внимания уделяется гибким связям, канатам. Для современных горных институтов этот курс представляет интерес, хотя, конечно, должен быть дополнен рядом вопросов, связанных с широким применением автоматизации в горной промышленности. В связи с этим возникает необходимость в исследовании деталей новых узлов различных установок и горных машин.

Недостаток книги — отсутствие кратких сведений по истории развития теории механизмов и машин, деталей машин в нашей стране. Не отмечен приоритет отечественных ученых в области деталей машин.

Глава пятая

Работы по математике

1. Работа «К теории случайных ошибок»

В исследованиях Я. И. Грдины по теории автоматического регулирования проявились глубокие математические познания и большое мастерство в выборе и применении математических методов. Точность полученных им результатов в этой области требовала проверки и определения допустимых погрешностей. Поэтому не случайным оказалось появление двух его работ по математике.

В первой из них «К теории случайных ошибок» (1908 г.) Грдина излагает свои мысли, критикуя статью П. М. Леонтовского «Практическое применение теории случайных ошибок непосредственных наблюдений» (1907 г.). Как указывает Грдина, наибольший интерес в работе Леонтовского представляют теоретические ряды ошибок, с которыми он предлагает сравнивать ошибки действительных наблюдений, а также предложенная приближенная формула для определения средней ошибки арифметической средины. Этой формуле П. М. Леонтовский посвятил ранее две статьи: «Средняя ошибка арифметической средины» (1904 г.) и «Точность наблюдений и их средние ошибки» (1905 г.). Целью исследования Я. И. Грдины явилось освещение вопросов, изложенных в указанных статьях П. М. Леонтовского.

Следует заметить, что Леонтовский в основу своего исследования положил понятие кривой ошибок, определяя при этом относительные ошибки k по соответствующим им вероятностным ошибкам w с помощью таблицы, в которой в качестве аргумента взято k. Я. И. Грдина замечает, что было бы значительно полезнее, если бы Леонтовский в качестве аргумента взял w, а k рассматривал как функцию w. Вызывает удивление, говорит Я. И. Грдина, что П. М. Леонтовский, стремясь показать преимущество кривой ошибок перед кривой вероятностей, заявляет о недостатках последней, якобы связанных с тем, что кривая вероятностей не позволяет геометрически представить меру точности h. А ведь известно, что мера точности h пропорциональна средней наибольшей ординате кривой вероятностей.

Вторая глава статьи посвящена теоретическим рядам ошибок.

В начале рассматривается ряд Леонтовского

$$x_1', \; x_2', \; \ldots, \; x_n',$$

которому соответствует ряд истинных ошибок

$$\varepsilon_1', \; \varepsilon_2', \; \ldots, \; \varepsilon_n'.$$

Для анализа указанных рядов Леонтовский предлагает сравнивать их, по его терминологии, с «идеальными» рядами

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

$$\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \; \ldots, \; \varepsilon_n.$$

Вот как определяет Леонтовский идеальный ряд: «Самое правильное решение этого вопроса мы получим, очевидно, лишь в том случае, когда при переходе от $n=\infty$ к конечному n, мы наименьше уклонимся от теоретических выводов Гаусса, полученных для $n=\infty$»[1].

Как видим, здесь неопределенным является «наименьше уклонимся». Леонтовский сознавал свои пробелы в приведенных выше рассуждениях и определениях. Недаром он говорил, что в теории ошибок большую роль играет «род инстинкта», в то время как здесь может идти речь только о логике, а не об инстинкте.

При рассмотрении вопроса о вероятнейших границах истинных ошибок Я. И. Грдина предлагает свой способ. Он устанавливает те вероятнейшие границы, внутри которых можно ожидать появления каждой отдельной ошибки. Я. И. Грдина рассуждает так. Допустим, что из общего числа n ошибок i ошибок окажутся в пределах от $(-a_i)$ до $(+a_i)$, а все остальные $n-i$ ошибок — вне этих пределов. Обозначим вероятность по-

[1] П. М. Леонтовский. Средняя ошибка арифметической средины. Екатеринослав, 1904, стр. 31.

явления одной ошибки в указанных пределах через w_i, тогда вероятность вне этих пределов будет $1 - w_i$. Вероятность же совместного появления i ошибок в указанных пределах и $n - i$ ошибок вне этих пределов, но в данном определенном порядке будет

$$w_i^i (1 - w_i)^{n-i},$$

а в каком угодно порядке

$$w_i = C_n^i w_i^i (1 - w_i)^{n-i}, \tag{1}$$

где

$$C_n^i = \frac{n(n-1) \ldots (n-i+1)}{1.2.3 \ldots i} = C_n^{n-i} \tag{2}$$

представляет собой число сочетаний из n элементов по i или по $n - i$.

Далее Грдина отмечает, что наиболее вероятные граничные значения $(-a_i)$ и $(+a_i)$ соответствуют такому значению w_i, которое обращает w_i в максимум. При $W_i = 0$ и $W_i = 1$ $w_i = 0$, следовательно при промежуточном значении W_i вероятность w_i обращается в максимум.

Затем он переходит к определению вероятнейших значений истинных ошибок. Приступив к вопросу об истинных и вероятнейших ошибках, он отмечает отличие последних от истинных значений наблюдаемых величин. Ряд вероятнейших ошибок является рядом отклонений каждого из наблюдений от указанного среднего арифметического.

Третья глава статьи посвящена вопросу о средней ошибке и средней ошибке арифметической средины. Автор знакомит читателей с формулами Леонтовского.

Для средней ошибки арифметической средины M приближенная формула Леонтовского имеет вид

$$M = \varphi \frac{x_m - x_n}{n}, \tag{3}$$

где x_m — наибольшее из n полученных значений определяемой величины, а x_n — наименьшее; φ — некоторый поправочный коэффициент, получаемый в результате сравнения формулы (3) с формулами Гаусса. Леонтовский пытался обосновать теоретический вывод для определения коэффициента φ, однако, как показал Грдина, допустил много грубых ошибок.

Анализируя вторую статью Леонтовского «Точность наблюдений и их средние ошибки», Грдина вскрыл несостоятельность выводов Леонтовского, неточность его формул, сравнивая их с формулой Гаусса. Ярослав Иванович отметил принципиальную неправильность формулы Леонтовского, состоящую в том, что на ее значение влияют только два крайних по величине наблюдения, т. е. наибольшее и наименьшее, а остальные $n-2$ наблюдения влиять на результат не могут. Он предлагает свою более точную приближенную формулу

$$M = \frac{qx_0 - \Sigma x''}{0{,}4n\sqrt{n-1}}, \tag{4}$$

где q — число отрицательных ошибок; x'' — соответствующие им наблюдения; x_0 — арифметическое среднее.

Преимущество формулы (4) в том, что она не содержит поправочного коэффициента, как это имеет место в формуле Леонтовского. Поэтому отпадает необходимость в составлении вспомогательных таблиц для вычисления указанного коэффициента. Если сравнить приближенную формулу Грдины с точными формулами Гаусса для определения вероятнейших значений искомых величин, то следует отметить такие ее преимущества, как простота и удобство вычислений.

2. Работа «Ряды вероятных и средних ошибок»

Большой интерес представляет вторая математическая работа Я. И. Грдины —«Ряды вероятных и средних ошибок» (1909 г.), содержащая много ценных дополнений и указаний. К числу их относятся вопросы о вероятности появления данной в ряду ошибки в заданных пределах, вопрос об исключении наблюдений с грубыми ошибками, тесно связанный с понятием наибольшей вероятной ошибки, а также описание основного свойства рядов средних ошибок разнообразного вида. Первая глава посвящена рядам вероятных ошибок, а вторая — рядам средних ошибок.

Вероятность w_i появления i-й ошибки определена по формуле

$$w_i = 1 - [(1-W_i)^n + C_n^1 W(1-W)^{n+1} + \\ + C_n^2 W^2 (1-W)^{n-2} + \ldots + C_n^{i-1} W^{i-1} (1-W)^{n-i+1}], \tag{5}$$

где w — вероятность появления в указанных пределах $(-\varepsilon)$ и $(+\varepsilon)$ одной ошибки.

Вероятность появления вне указанных пределов i-й ошибки будет

$$1-w_i=(1-W)^n+C_n'W(1-W)^{n-1}+C_n^2W^2(1-W)^{n-2}+\\+\ldots+C_n^{i-1}W^{i-1}(1-W)^{n-i+1}, \qquad (6)$$

откуда также получается формула (5).

Однако нахождение коэффициентов разложения в формуле (6) в общем виде представляет значительные трудности. Поэтому Грдина предлагает другой, более удобный вывод, предполагая, что ошибка должна оказаться между некоторыми бесконечно близкими пределами $(-\xi)$ и $(-\xi-d\xi)$ или (ξ) и $(\xi+d\xi)$.
Тогда вероятность появления i-й ошибки имеет вид

$$w_i=B_i\left[\frac{1}{i}W^i-\frac{n-i}{i+1}W^{i+1}+\frac{(n-i)(n-i+1)}{(i+2)\cdot 1\cdot 2}W^{i+2}-\right.\\\left.-\ldots\pm\frac{1}{n}W^n\right], \qquad (7)$$

где

$$B_i=nC_{n-1}^{i-1}=nC_{n-1}^{n-i}.$$

Для наибольшей ошибки $B_n=n=B_1$.

Оказывается, что можно найти такие значения для пределов $(-\xi)$ и $(+\xi)$, для которых вероятность появления i-й ошибки внутри них равна вероятности появления этой ошибки вне этих пределов.

Завершается глава исследованием вопроса о наблюдениях с грубыми ошибками, появление которых отрицательно влияет на точность окончательного результата.

Имеются рекомендации, позволяющие отличать грубые ошибки от случайных.

Вторая глава рассматриваемой работы посвящена рядам средних ошибок.

Краткий анализ математических работ Я. И. Грдины убеждает в том, что они весьма полезны особенно для инженеров, расчеты которых связаны с уточнением и определением погрешностей, возникающих при создании различных проектов. Эти работы полезны также и экспериментаторам при математической обработке результатов своих наблюдений и опытов.

Глава шестая

Работы по теоретической механике

1. Основные принципы и понятия теоретической механики

Перу Я. И. Грдины принадлежат три оригинальные работы по обоснованию теоретической механики. Они отражают также философское кредо их автора. Появление этих работ было определенным образом обусловлено наметившейся в начале XX столетия общей тенденцией как в отечественной, так и в зарубежной науке — подвергнуть анализу и пересмотру основы классической механики и физики в связи с появлением теории относительности А. Эйнштейна, работ М. Планка, А. Пуанкаре и др.

В 1905 г. Грдина опубликовал исследование «Новое изложение основных принципов теоретической механики», посвященное вопросам динамики и состоящее из 12 глав.

Первая глава посвящена принципам сохранения вещества и энергии. Вначале автор рассматривает вопрос о количестве вещества. Он определяет динамику как науку о движении вещества, отмечая при этом, что к понятиям пространства и времени, введенным в кинематику, в динамике присоединяется еще новое понятие — вещества, или материи, являющееся также основным, не поддающимся дальнейшему разделению и объяснению. Исследователь отмечает, что с помощью основных понятий (пространства, времени и вещества) динамика, опираясь на данные опыта и наблюдения, вводя небольшое число гипотез, устанавливает основные и общие законы всех явлений материального мира.

Дальнейшее и специальное развитие этих законов принадлежит физике и химии.

В начале работы автором допущены принципиальные методологические ошибки. Как известно, к числу основных понятий динамики относятся пространство, время, масса и сила. Грдина повторяет ошибки ученых XVII и XVIII столетий, отождествлявших массу с материей, что имело место и в работах И. Ньютона.

Грдина вводит следующие определения гипотезы.

Основное определение I. Я. И. Грдина отмечает, что «количество вещества целого равно сумме количеств вещества всех его частей». Это количество вещества пропорционально объему. Сравнивая количества различных сплошных однородных веществ, он вместо понятия плотности вводит понятие характеристических коэффициентов ρ. Количество вещества M определяет по формуле

$$M = \sum \rho_i q_i, \tag{1}$$

где ρ_i — характеристические коэффициенты; v_i — объемы частей однородного тела.

Если тело неоднородное, то

$$M = \int\limits_{(q)} \rho \, dv. \tag{2}$$

В первой главе рассматривается также вопрос о мере движения. Для характеристики движения материальных тел Грдина вводит особую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) если аргумент $x=0$, то и функция

$$f(0) = 0; \tag{3}$$

2) при положительном конечном x $f(x)$ тоже положительна и конечна, т. е.

$$\infty > f(x) > 0; \tag{4}$$

3) при $x=\infty$ $f(x)=\infty$;

4) при непрерывном увеличении x от нуля до положительной бесконечности $f(x)$ также непрерывно увеличивается. Математически это выражается тем, что $f'(x)$ будет положительна, т. е.

$$\infty > f'(x) > 0; \tag{5}$$

5) при всех $x>0$ $f(x)$ будет однозначна;

6) каждому положительному значению x функции $f(x)$ должно соответствовать только одно положительное значение X.

Следовательно, уравнение

$$f(x) = X$$

должно иметь при $X > 0$ только один положительный корень $x_1 > 0$, что не исключает возможности существования отрицательных и мнимых корней.

Функцию $f(x)$, удовлетворяющую всем шести условиям, Я. И. Грдина называет сопровождающей функцией от x. Эта функция имеет бесчисленное множество видов, например $f(x) = ax_n$, $f(x) = a(e^{bx} - 1)$, где a, b, n — положительные параметры.

Для характеристики движения материальных тел Я. И. Грдина вводит особое понятие меры движения, основанное на следующих двух определениях:

Основное определение II. Мера поступательного движения тела равна произведению количества вещества этого тела на сопровождающую функцию от его скорости.

Основное определение III. Мера произвольного движения тела равна сумме мер движения всех его частей. Обозначая количество вещества тела m, а скорость поступательного движения тела v, по определению II для меры движения тела τ, получим

$$\tau = mf(v). \tag{6}$$

В случае произвольного движения тела имеем

$$T = \int d\tau = \int \rho f(v)\, dm. \tag{7}$$

Рассматривая далее вопрос о превращении вещества и движения, автор отмечает, что «появление или увеличение количества одного или нескольких веществ всегда сопровождается исчезновением или уменьшением количества другого или нескольких веществ» и, наоборот, «исчезновение или уменьшение количества вещества сопровождается появлением или увеличением другого вещества».

Например, при таянии и исчезновении льда появляется вода, при горении углерода исчезает или уменьшается количество кислорода и углерода и появляется углекислота и т. д. Этому закону подчиняются все физические и химические явления.

Интересно отметить, что эти высказывания идентичны высказываниям М. В. Ломоносова, хотя Я. И. Грдина об этом не говорит.

Наряду с этим Я. И. Грдина отмечает некоторые явления, не подчиняющиеся указанному закону М. В. Ломоносова. Это, по его мнению, относится к телам, действующим друг на друга на расстоянии.

Основная гипотеза I. Вещество и его движение обладают такими свойствами, что возможно подыскать систему характеристических коэффициентов и вид сопровождающей функции, с принятием которых окажется, что при каких угодно превращениях не изменяется ни общее количество вещества, ни общая мера движения всех участвующих в превращениях тел.

Подобранные подобным образом характеристические коэффициенты автор назвал плотностями соответствующих веществ, а сопровождающую функцию — функцией движения; количество вещества некоторого тела — массой, а меру движения тела, определенную с помощью плотности или массы, а также функции движения — энергией или живой силой. Тогда на основании гипотезы I получаются законы, важные как для динамики, так и для точного естествознания вообще.

Во второй главе рассматриваемой работы излагается принцип инерции. Грдина считает, что двух рассмотренных законов для детального описания движения недостаточно. Сначала нужно исследовать условия простейших движений тел, представляющих свободные изолированные системы, а затем исследовать сложные движения.

Он останавливается на вопросе о влиянии общего движения тела на частные, относительные движения его отдельных частиц. Так, равномерное и прямолинейное движения и близкие к ним не влияют на относительные движения тел группы или частей данного тела. В результате он высказывает следующую гипотезу.

Основная гипотеза II. Всякая свободная изолированная система сохраняет свое поступательное прямолинейное и равномерное движение, причем относительные движения частей ее происходят так, как будто бы общего поступательного движения не было.

Полученное при этом составное движение удовлетворяет закону сохранения энергии. Закон инерции в работе сформулирован так: всякая свободная изолированная система, имеющая в некоторый момент времени только поступательное движение, сохраняет его как по величине, так и по направлению скорости (основной закон III). Этот закон находится в полном согласии с законом сохранения энергии.

Третья глава работы посвящена исследованию функции движения.

На основании закона сохранения энергии Я. И. Грдина получает уравнение для определения вида функции движения

$$f(v+w)+f(v-w)=2f\left(\sqrt{v^2+w^2}\right), \tag{10}$$

где v и w — произвольные положительные и независимые друг от друга величины.

Берем частные производные от (10) сначала по v, а потом по w, получим

$$f'(v+w)=f'\left(\sqrt{v^2+w^2}\right)\cdot\frac{v+w}{\sqrt{v^2+w^2}},$$

$$f'(v-w)=f'\left(\sqrt{v^2+w^2}\right)\cdot\frac{v-w}{\sqrt{v^2+w^2}},$$

откуда

$$\frac{f'(v+w)}{v+w}=\frac{f'(v-w)}{v-w}.$$

Или, вводя обозначения $v+w=x$, $v-w=y$, получим

$$\frac{f'(x)}{x}=\frac{f'(y)}{y}=\mathrm{const}=C.$$

Откуда

$$f(x)=\frac{Cx^2}{2}+b.$$

Подставляя в (10), найдем

$$[a(v+w)^2+b]+[a(v-w)^2+b]=2\left[a\left(\sqrt{v^2+w^2}\right)^2+b\right],$$

где

$$a=\frac{C}{2}.$$

На основании шести положений, которым должна удовлетворять функция движения, получим $f(x)=ax^2$, так как b должно равняться нулю. Пользуясь видом функции движения, Грдина находит выражение живой силы T какого угодно тела. Причем в случае поступательного движения тела

$$T = aMv^2, \tag{11}$$

т. е. T пропорциональна массе тела и квадрату скорости его движения.

В случае материальной точки массы m

$$T = amv^2, \tag{12}$$

где a — постоянное.

Четвертая глава посвящена рассмотрению понятия количества движения.

Количество движения материальной точки Грдина рассматривает как меру движения, когда функция движения пропорциональна или равна своему независимому переменному. Отсюда вытекают три основных определения.

Основное определение IV. Количество движения материальной точки или тела в поступательном движении равно произведению массы этой точки или тела на скорость

$$l = mv. \tag{13}$$

В случае произвольного движения количество движения равно $\int vdm$.

Количество движения рассматривается как вектор на основании еще двух основных определений.

Основное определение V. Количество движения материальной точки направлено по линии ее скорости.

Основное определение VI. Количество движения какого угодно тела равно геометрической сумме количества движения всех его частей:

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i}.$$

В пятой главе рассматривается движение материальной точки с ускорением. Мера влияния или действия окружающих масс на движение свободной материальной точки называется силой. К понятию силы как вектора относятся следующие определения.

Основное определение VII. Сила действия окружающих масс на свободную материальную точку по величине равна произведению массы этой точки на ее ускорение.

Основное определение VIII. Эта сила направлена по линии ускорения материальной точки.

Основное определение IX. Точкой приложения рассматриваемой силы является сама материальная точка.

Следовательно,

$$F = mu, \tag{14}$$

где F — сила; m — масса точки; u — ускорение.

Как видим, объективный закон природы — второй закон Ньютона — заменен тремя определениями.

Закон независимости действия силы Грдина также представляет как определение.

Основное определение X. Сила действия каждого из нескольких тел, влияющих одновременно на движение свободной материальной точки, определяется так по величине и направлению ускорения, сообщаемого при этом точке данным телом, как будто бы эта точка имела только одно это ускорение. Как частный случай получается правило параллелограмма сил.

Шестая глава посвящена рассмотрению несвободной системы материальных точек. Здесь приводится классификация систем и действующих на них сил, а также связей. После этого вводится понятие возможных перемещений и возможных скоростей. Необычным является деление возможных перемещений на удерживающие и освобождающие. Принцип Даламбера автор вводит в формулировке самого Даламбера: потерянные силы уравновешиваются при помощи реакций связей системы. Определение идеальных связей влечет за собой введение последней, четвертой гипотезы.

Основная гипотеза IV. Элементы всякой совокупности уравновешивающихся потерянных сил при идеальных связях системы зависят исключительно от расположения и геометрических свойств этих связей в каждый момент времени.

Здесь же рассматривается вопрос о реакциях идеальных связей, выводится уравнение движения несвободной системы в первой форме Лагранжа. После этого Я. И. Грдина рассматривает третий закон Ньютона, не называя его.

Седьмая глава посвящена закону живой силы для системы материальных точек. В ней же раскрыто понятие силовой функции и излагается закон сохранения механической энергии.

Глава восьмая содержит описание вопросов о свободной системе фактически свободного твердого тела. Выводятся дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Недостатком главы является отсутствие аксиомы об освобождении от связей. Автор употребляет кинематические уравнения Эйлера без ссылки на него. Вообще к освещению вопросов истории развития динамики в данной работе Грдина относится невнимательно, не упоминая даже имен И. Ньютона, М. В. Ломоносова, Л. Эйлера.

В девятой главе рассматривается движение твердого тела. Здесь показано, что внутренние силы в твердом теле уравновешиваются, а потому они не входят в уравнение движения свободного твердого тела. Показано также, что силу, действующую на твердое тело, можно переносить по линии ее действия. Это позволяет легко складывать силы, приложенные к твердому телу, если линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Сложение параллельных сил излагается обычным способом, как в любых курсах физики. Далее рассматривается вопрос о центре параллельных сил и его свойства.

Десятая глава посвящена вопросу о равновесии. В ней, как и в предыдущих главах, не сказано, кем установлен принцип возможных перемещений, ничего не сказано об обобщении его М. В. Остроградским. На основании этого принципа Я. И. Грдина выводит условия равновесия свободной системы, в частности свободного твердого тела.

Одиннадцатая глава посвящена рассмотрению понятия силы тяжести.

Последняя, двенадцатая, глава содержит описание вопросов, связанных с измерением масс тел с помощью рычажных весов.

2. Функция движения и ее значение для обоснования теоретической механики

Работа Я. И. Грдины «Функция движения» (1906 г.) является продолжением предыдущей его статьи «Новое изложение основных принципов теоретической механики». Новый труд состоит из двух глав.

В первой главе приводятся некоторые краткие сведения из предыдущей работы, а именно понятие о количестве вещества, о мере движения, о превращении вещества и движения, о принципах сохранения вещества и энергии, относительного движения и энергии, об определении вида функции движения. Новый материал содержится только во второй главе, посвященной функции движения.

Я. И. Грдина показал, что как в случае системы, состоящей из двух материальных точек, соединенных идеальным стержнем, так и в случае системы из четырех материальных точек, соединенных ромбом, получается один и тот же вид функции движения. Как замечает автор, при определении вида функции движения были введены два фиктивных понятия: материальной точки и неизменяемого стержня, массой которого пренебрегают. Однако можно ограничиться лишь введением одного фиктивного понятия сплошного абсолютно твердого тела.

3. О мерах движения

В 1907 г. Грдина опубликовал исследование «Меры движения», состоящее из введения и трех глав.

Во введении изложены основные положения первых двух работ, необходимых для построения динамики.

Первая глава посвящена определению вида функции на основании анализа самых общих свойств движения любой свободной изолированной системы. Предлагаемый здесь способ позволяет пренебречь одной из четырех гипотез, рассмотренных в первой работе Я. И. Грдины, а именно третьей гипотезой, основанной на законе причинности [1].

[1] Закон причинности, замечает Я. И. Грдина, заключается в том, что всегда должны существовать причины и условия, которые обусловливают то обстоятельство, что всякое явление материального мира происходит в данном направлении, а не иначе.

Во второй и третьей главах показаны некоторые характерные свойства других мер движения, отличные от живой силы.

Рассматривая несвободную изолированную систему, ученый отмечает, что ее масса и живая сила постоянны, как и в случае свободной изолированной системы, а количество движения изменяется.

Далее автор излагает интересные собственные мысли о построении динамики. Он говорит, что взаимодействие между телами позволяет ввести такое понятие, как мера отклонения действительного движения материальной точки от ее естественного движения по инерции. Эта «мера» равна произведению массы точки на ее ускорение. Ей соответствует равная по величине и направлению мера отклоняющего влияния или действия окружающих тел на естественное движение рассматриваемой материальной точки по инерции. Эта мера называется силой действия масс на точку или просто силой.
Поэтому

$$F = ma, \tag{15}$$

где F — сила; m — масса; a — ускорение точки.

При выводе уравнений движения системы несвободных материальных точек Грдина вводит в динамику последнюю гипотезу: элементы всякой совокупности уравновешивающихся сил при идеальных связях системы зависят исключительно от расположения и геометрических свойств этих связей в каждый момент времени.

Далее он замечает, что эта гипотеза, закон совместной передачи живых сил и принцип сохранения энергии дают возможность определить реакции идеальных связей и получить, таким образом, уравнения движения несвободной системы. Третий закон Ньютона, как отмечает Я. И. Грдина, получается как следствие принципа сохранения энергии или же следует из свойств идеальных связей.

Как известно, характер движения любой изолированной системы с течением времени может изменяться, однако на величине живой силы системы это не отразится, так как живая сила представляет постоянную величину во все время движения изолированной системы. Поэтому желательно в некоторых случаях измерять движения системы не только живой силой, но и другими мерами движения, на величину которых оказывали бы влияние некоторые особенности движения системы.

В этой главе показано, как отражаются особенности движения изолированных систем на величине некоторых мер движения.

Так, мерой движения материальной точки массы или системы при поступательном движении будет

$$r = mf(v),$$

а мерой движения твердого тела

$$R = \int dr = \int f(v)\,dm.$$

Для любой системы

$$R = \sum r_i = \sum m_i f(v_i) = m_1 f(v_1) + m_2 f(v_2) + \ldots + m_n f(v_n), \tag{16}$$

где $f_i(v_i)$ — одна из сопровождающих функций от скорости какой-либо точки системы.

Ученый различает простые и сложные меры движения. Меры движения, которые при изменении разности между скоростями двух каких-нибудь масс изолированной системы всегда в одном и том же направлении изменяются также в том же направлении, называют простыми. Если при любом увеличении положительной разности между скоростями двух точек изолированной системы величина простой меры движения системы будет также увеличиваться, то такую меру движения называют прямой, в противном случае — обратной.

Все остальные меры движения называются сложными.

Далее Грдина устанавливает аналитические признаки простых и сложных мер движения. Для того чтобы мера движения была прямой, необходимо и достаточно, чтобы сопровождающая функция ее удовлетворяла условию

$$vf''(v) - f'(v) > 0 \tag{17}$$

для всех положительных значений v.

Если мера движения обратная, то необходимо и достаточно, чтобы сопровождающая функция ее удовлетворяла условию

$$vf''(v) - f'(v) < 0 \tag{18}$$

для всех положительных значений v.

Как показал Грдина, все простые меры движения имеют замечательное свойство, заключающееся в равенстве между собой скоростей всех точек изолированной системы

$$v_1 = v_2 = \ldots = w.$$

Величина этих мер получает наибольшее или наименьшее возможное значение, а именно величина прямой меры будет минимальной, обратной — максимальной.

Сложные меры движения изолированной системы получают наибольшие или наименьшие возможные значения в некоторых случаях также при равенстве скоростей всех точек системы. Однако в других случаях указанные значения мер получаются и при других значениях скоростей.

Если сопровождающая функция пропорциональна некоторой степени независимого переменного

$$f(v) = av^n, \tag{19}$$

где a и n — положительные отвлеченные числа, то соответствующая этой функции мера движения называется политропической, или многообразной.

Например, для одной материальной точки эта мера $r = amv^n$. При $a = {}^1/_2$, $n = 2$ получим $r = {}^1/_2 mv^2$, т. е. живую силу. При $a = n = 1$ получим количество движения $r = mv$. Если сопровождающая функция является показательной функцией вида

$$f(v) = A(e^{av^n} - 1), \tag{20}$$

где n, A, a — положительные параметры (причем A и n — отвлеченные числа, a имеет измерение, обратное измерению n-й степени скорости), то соответствующая этой функции мера движения называется показательной.

Так, для одной материальной точки массы m имеем

$$r = Am(e^{av^n} - 1).$$

Аналогичным образом можно установить логарифмическую меру движения

$$r = Am \log(av^n + 1).$$

Последняя глава статьи посвящена вопросу об изменении простых мер движения изолированной системы.

Таким образом, анализ работ по теоретической механике раскрывает некоторые особенности их автора как теоретика. Как известно, в теоретической механике, изучающей наиболее общие законы механического движения, отражены две меры механического движения: количество движения и живая сила, или кинетическая энергия. Вводя понятие о функции движения и сопровождающей ее функции, Грдина расширяет понятия мер механического движения. Считая, что основными законами являются законы превращения вещества и движения, а также законы сохранения вещества и энергии, он своеобразно рассматривает законы Ньютона как некоторые определения, опирающиеся на указанные выше законы и две дополнительные гипотезы. Такой путь рассуждений интересен тем, что позволяет ученому перейти от механической формы движения материи к другим формам ее движения. К недостаткам указанных работ следует отнести неверное определение массы, отождествляемой с материей, в то время как масса выражает только инертные и гравитационные свойства материи. К сожалению, в этих работах Я. И. Грдины отсутствуют исторические экскурсы, особенно важные для отражения приоритета отечественных ученых. К числу недостатков следует отнести также отсутствие ссылок на использованную и рекомендуемую литературу.

4. Отношение Я. И. Грдины к теории относительности

Вопросам теории относительности Я. И. Грдина посвятил семь статей, в которых ярко выражено его отрицательное отношение к этой теории.

Первая его статья из этого цикла работ «К вопросу о массе электрона» была опубликована в 1912 г.

В этой статье он приходит к следующим выводам:

1) принцип относительности является недостаточно обоснованным в теоретическом отношении;
2) теория движения электронов Абрагама лучше согласуется с опытными данными, чем принцип относительности;
3) приняв теорию Абрагама, с большой вероятностью можно допустить существование обыкновенной механической массы для электрона, чем отсутствие таковой. Другими словами, более вероятным является то, что электрон представляет частицу вещества, а не одно только возмущение в эфире;
4) для отношения a механической массы электрона к его начальной поперечной электромагнитной массе со значительной вероятностью можно принять $a > 0,1$;
5) существующие опытные данные относительно движения электронов вполне достаточны для довольно точного определения отношения e/m_0, где e — электрический заряд электрона; m_0 — полная поперечная (кажущаяся) масса электрона при бесконечно малых скоростях электрона и при поперечной электромагнитной массе μ_0;
6) наоборот, существующие опытные данные совершенно недостаточны для определения отношения a. Необходимы более точные опыты, а главное новые методы исследования рассматриваемого вопроса.

В 1914 г. появилась небольшая заметка Я. И. Грдины «К вопросу о принципе относительности». Здесь им высказан ряд положений, характеризующих его отрицательный взгляд на теорию относительности.

Автор замечает, что принцип относительности очень осложняет привычные простые понятия. Предпосылки же физического принципа относительности не безупречны с логической стороны. Он пытается объяснить, чем вызвано признание большим числом ученых принципа относительности. Ведь уже к концу 1913 г. принципу относительности было посвящено 350 работ. Он считает, что популярность теории относительности объясняется двумя причинами: 1) за короткое время с момента появления принципа относительности (1905 г.) не успели еще определиться все возражения; 2) вследствие исторических условий, наука должна была вступить на такой путь, ложность которого обнаружится лишь тогда, когда он будет пройден до конца.

Как видим, эти предсказания Я. И. Грдины не оправдались, а наоборот, дальнейшее развитие физики полностью подтвердило правильность принципа относительности Эйнштейна.

Свою отрицательную критику принципа относительности Я. И. Грдина отразил также в статье «Физический или ограниченный принцип относительности».

Небольшая статья Я. И. Грдины «Заметка по поводу статьи L. De la Rive'a «Hypothèse sur le mouvement de l'éther dans le voisinage de la térre»[1] (1916 г.) содержит критические замечания к указанной статье Делярива.

Заметка «К вопросу об истолковании опыта Майкельсона» (1927 г.) посвящена определению относительной скорости того из двух лучей в опыте Майкельсона, который перпендикулярен к направлению движения земного шара.

Краткая статья «Новое об опыте Майкельсона и принципе относительности А. Эйнштейна» (1927 г.) посвящена ошибке, допущенной Л. Штрумом в одной его статье[2] и искажающей полученные им результаты.

К 1927 г. относится и последняя его работа о принципе относительности: «Заметки по принципу относительности». В ней автор отмечает, что специальный принцип относительности Эйнштейна, несмотря на всю парадоксальность своих выводов, не имеет внутренних логических противоречий. Поэтому, говорит он, этот принцип может быть опровергнут только опытным путем.

Результаты исследований Я. И. Грдины привели его к следующим выводам:

1. Третий закон Ньютона, закон сохранения движения центра инерции, наблюдение формы по возможности изолированных жидких тел позволяют находить инерциальные системы координат и отличать их от неинерциальных, чего по общему принципу относительности не должно быть.

---

[1] Делярив. Гипотеза о движении эфира вблизи Земли.

[2] Л. Штрум. К вопросу об истолковании опыта Майкельсона.— «Вісті КПІ», 1926, кн. I.

2. Указанные законы справедливы в инерциальных системах координат и не выполняются в неинерциальных системах координат, что противоречит общему принципу относительности, согласно которому законы природы для всех систем координат должны выражаться одинаково.

3. Общий принцип относительности противоречит закону инерции и третьему закону Ньютона, в то время как эти законы принимаются общим принципом относительности.

На этом основании Я. И. Грдина утверждает о неправильности общего принципа относительности.

Конечно, с его утверждением нельзя согласиться. Достаточно вспомнить о том, что общий принцип относительности позволил объяснить три физических явления и их результаты (вращение перигелия Меркурия, отклонение лучей света вблизи тяжелых тел и смещение спектральных линий к красному концу спектра).

Как отмечает Я. И. Грдина, все указанные явления можно объяснить другим путем. Оказалось, что числовые результаты хорошо совпадают с данными опыта только для явления отклонения света. Для смещения спектральных полос опыты оказываются, по мнению Я. И. Грдины, противоречивыми. Приходится сожалеть, что отрицательная оценка теории относительности не позволила Грдине понять то, что основной заслугой А. Эйнштейна является не открытие новых соотношений — формул, а коренное изменение наших представлений о пространстве, времени, материи и движении.

Не следует забывать о том, что любая наука, в том числе и механика, проходит длительный период развития. Поэтому формулировки основных понятий должны время от времени вступать в критическую фазу, когда старые понятия, казавшиеся ранее совершенно ясными, становятся неясными, сомнительными. При разрешении таких кризисов должна произойти смена основных понятий. При этом новые идеи могут противоречить старым, однако сохраняя правильность этих идей в предельных случаях и приближениях. Так, ньютоновская механика является первым приближением релятивистской механики при наличии малых скоростей по сравнению со скоростью света.

Если глубоко проанализировать ньютоновскую механику, то можно убедиться в том, что она содержит много черт релятивистской механики. Достаточно вспомнить о том, что законы механики выражаются одними и теми же соотношениями во всех системах отсчета, связанных между собой преобразованиями Галилея. Однако ни Ньютон, ни его последователи не понимали полностью релятивистскую сущность динамики, ими развиваемую. Действительно, достаточно вспомнить об абсолютном пространстве и времени в механике Ньютона, когда пространство рассматривается независимо от движущейся материи и отмечается отсутствие взаимосвязи между пространством и временем. Новые данные, установленные уже в XIX в., показали несостоятельность этих представлений об абсолютном пространстве и времени и привели к релятивистской концепции А. Эйнштейна, согласно которой все законы физики представляют собой инвариантные соотношения, связывающие изменения, имеющие место в явлениях природы.

Необходимо также отметить, что опыт Майкельсона явился одним из решающих опытов в современной физике, так как противоречил гипотезе о том, что свет распространяется благодаря наличию эфира. Этот опыт в конечном итоге привел к изменению представлений о пространстве и времени, т. е. к теории относительности.

Таким образом, сущность взглядов А. Эйнштейна заключалась в отказе от представлений об абсолютном пространстве и времени, на которых основана гипотеза эфира, и принятии вместо этого относительного подхода к электромагнитным явлениям и распространению электромагнитного излучения.

Эйнштейн подытожил то, что электромагнитное излучение количественно исследуется на основании соотношений между электромагнитными явлениями и приборами и, как известно из опыта, законы электродинамики выражаются инвариантными соотношениями между наблюдаемыми величинами.

Важно отметить, что релятивистская механика имеет большую эвристическую ценность. Это означает, что принцип относительности незаменим при установлении новых соотношений и законов как в механике, так и в ряде других областей знаний.

Я. И. Грдина — основоположник динамики живых организмов

1. Динамика живых организмов как новый раздел теоретической механики

Зарождение биокибернетики — науки о механическом движении, которым сопровождаются жизненные процессы, относится еще к эпохе Возрождения. Так, например, большой интерес к динамике человека и животных проявлял Леонардо да Винчи [1].

Классические работы Л. Эйлера о движении жидкости в упругих трубках стали основой современной гидромеханической теории кровообращения (гемодинамики). Исследования Н. Е. Жуковского о гидравлическом ударе значительно продвинули вперед развитие проблемы об упругих пульсовых волнах, распространяющихся по артериальной системе при движении крови. Благодаря работам О. Фишера учение о сочленениях костей и их движении при сокращении мышц (кинематика суставов) представляет собой в настоящее время точную физико-математическую науку, которая дает возможность на основе законов механики исследовать функциональные особенности отдельных видов суставов. Ценные работы в области биофизики принадлежат Г. Гельмгольцу, И. М. Сеченову, К. И. Тимирязеву, П. П. Лазареву, Н. М. Амосову [2].

---

[1] Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 846—850.

[2] Г. Д. Смирнов. Биофизика.— БСЭ, изд. 2, т. 5, стр. 218—220; Он же. Биомеханика.—БСЭ, изд. 2, т. 5, стр. 214—215; И. М. Сеченов. Очерк рабочих движений в человеке. М., 1901; П. П. Лазарев. Современные проблемы биофизики. М., Изд-во АН СССР, 1945; Н. М. Амосов. Очерки торокальной хирургии. Киев, Госмедиздат, 1958.

В период с 1910 по 1916 г. появляется ряд монографий Я. И. Грдины — «Меры отклонения в механике», «Динамика живых организмов», «К динамике живых организмов», «Примечания к динамике живых организмов», «Дополнение к динамике живых организмов», «Заметки по динамике живых организмов»,— в которых дается систематическое изложение совершенно новой области теоретической механики — динамики живых организмов. Опираясь на хорошо разработанную классическую теорию динамики обыкновенных материальных систем и исследуя специфические особенности живых организмов, Я. И. Грдина последовательно устанавливает классификацию связей, вариационные принципы, динамические уравнения движения и методы их интегрирования, основные теоремы динамики живых организмов.

Движение живых организмов происходит в непосредственном взаимодействии с внешней средой. Существенную роль в этом движении играют внутренние силы (напряжение мышц, механическое сопротивление тканей, силы взаимодействия подвижных частей тела). Внешние и внутренние силы при движении живого организма изменяются, влияют друг на друга. Как известно, в классической механике постулируется принцип суперпозиции, или независимости действия сил. Следовательно, классическая механика живых организмов не учитывает указанного взаимного влияния приложенных к телу внешних и внутренних сил. Сложное взаимодействие между отдельными частями живого организма, между живым организмом и внешней средой обусловливается систематическим обменом веществ, ростом клеток и всего тела, раздражительностью, чувствительностью к внешним влияниям.

Общеизвестно, что живые организмы могут в определенном смысле изменять характер своего движения по собственному желанию. Это свойство живого организма проявлять свободу воли следует рассматривать как свойство осознавать необходимость того или иного движения, поступка, действия. Следуя Я. И. Грдине, свободу воли живых организмов в отношении механических движений можно характеризовать «волевыми связями» и «волевыми параметрами». В отличие от постоянных параметров, которые могут входить в уравнения внешних связей обычной управляемой материальной системы, параметры, фигурирующие в уравнениях внутренних связей живого организма, которыми последний может распоряжаться свободно в силу своей свободы воли, не обязательно должны быть постоянными, они могут быть и переменными величинами. Такие параметры и такие связи будем называть волевыми. Проявление живым организмом волевого импульса сопровождается, согласно основной гипотезе Грдины, изменением волевых параметров.

Таким образом, согласно Я. И. Грдине, динамика живых организмов представляет собой классическую динамику несвободных материальных систем, подчиненных волевым связям.

2. Классификация механических связей живого организма

Механические связи, ограничивающие механическое движение живого организма, Я. И. Грдина подразделяет на волевые (внутренние, стационарные), обычные (внешние или внутренние, стационарные) и управляемые или ведущие (внешние, нестационарные).

Если волевые параметры волевых связей изменяются в результате проявления живым организмом своих волевых импульсов, движение живого организма будем называть активным. Однако очевидно, что свобода воли живого организма может проявляться и при отсутствии волевых импульсов по тем или другим причинам (приятное ощущение, достижение определенной цели, например для укрепления здоровья, и т. п.). При этом волевые параметры остаются неизменными, и живой организм в отношении своего механического движения ведет себя так же, как и обыкновенная система материальных точек. Такое движение живого организма будем называть пассивным.

Рассматривая живой организм как материальную систему и относя его движение к прямолинейной системе координат, уравнения волевых связей можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si}(x_k,\ a_{sl})\,dx_i + \sum_{g=1}^{h_s} H_{sg}(x_k,\ a_{sl})\,da_{sg} = 0, \qquad (1)$$

где n — число материальных точек в живом организме; x_i — декартовы координаты этих точек; a_{sg} — волевые параметры; s — номер данной связи; h_s — количество волевых параметров этой связи.

Уравнения обычных и ведущих связей живого организма соответственно имеют вид

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si}(x_k)\,dx_i = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si}(x_k,\ t)\,dx_i + B_s(x_k,\ t) = 0. \qquad (3)$$

Уравнения связей (1—3) записаны в дифференциальной форме. В случае неголономных связей эти уравнения являются неинтегрируемыми, если же связи голономные, то соответственно в случаях волевых, обычных и ведущих связей уравнения (1—3) можно представить в конечной форме

$$F_s(x_k,\ a_s t) = 0, \qquad (1)$$

$$F_s(x_k) = 0, \qquad (2)$$

$$F_s(x_k,\ t) = 0, \qquad (3)$$

так что

$$A_{si} = \frac{\partial F_s}{\partial x_i};\quad H_{sg} = \frac{\partial F_s}{\partial a_{sg}};\quad B_s = \frac{\partial F_s}{\partial t}. \qquad (4)$$

Величины

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt};\quad a_{sg}' = \frac{da_{sg}}{dt} \qquad (5)$$

будем называть соответственно проекциями скоростей материальных точек и скоростями изменения волевых параметров (волевыми скоростями) живого организма. Эти величины представляют собой простые отношения дифференциалов, а не производные в обычном смысле слова, ибо между этими дифференциалами нет определенных зависимостей. Поэтому Я. И. Грдина называет их условными производными соответственно координатам материальных точек и волевым параметрам живого организма по времени.

Волевые скорости могут изменяться как непрерывно, так и скачками, с разрывом непрерывности, соответственно аналогичным изменениям волевых импульсов, однако величины самих волевых параметров должны изменяться непрерывно.

Будем формально различать волевые связи первого и второго рода в зависимости от того, зависят ли скорости материальных точек x_i' от волевых скоростей a_j' или нет. Но нетрудно убедиться в том, что живой организм не может иметь волевых связей первого рода, так как в противном случае при проявлении им волевых импульсов, вызывающих прерывное изменение волевых скоростей, происходили бы удары, которые неизбежно сопровождались бы разрывом частей организма. Однако такие явления в живых организмах отсутствуют, поэтому волевые связи первого рода в действительности не имеют места.

Будем различать волевые связи разных порядков. Порядком волевой связи называется наименьший порядок ускорения материальных точек живого организма, не зависящего от волевых скоростей. Так, если x_i' не зависит от волевых скоростей a_{sl}', а x_i'' зависит от них, то волевая связь имеет первый порядок; если x_i'' не зависит от a_{sl}', а x_i''' зависит, то волевая связь имеет второй порядок и т. д. Очевидно, что волевая связь не может иметь нулевой порядок, поскольку связь нулевого порядка идентична со связью первого рода. Таким образом, оправдывается гипотеза Я. И. Грдины о том, что от волевых скоростей могут явно зависеть лишь ускорения материльных точек живого организма, но не скорости этих точек.

В соответствии с этой гипотезой уравнения (1) волевых связей расчленяются на две самостоятельные группы

$$A_s \equiv \sum_{i=1}^{3n} A_{si}(x_k,\ a_{sl})\, dx_i = 0, \tag{6}$$

$$H_s \equiv \sum_{g=1}^{h_s} H_{sg}(x_k,\ a_{sl})\, da_{sg} = 0, \tag{7}$$

первая из которых ограничивает дифференциалы материальных точек, а вторая — дифференциалы волевых параметров живого организма.

В дальнейшем будем различать изменения величин троякого рода: дифференциал d, характеризующий изменение величины в связи с изменением лишь координат x_i материальных точек живого организма, усеченную вариацию $\bar{\delta}$, связанную с изменением только волевых параметров a_{sl}, и полную вариацию или просто вариацию δ, вызванную одновременным изменением координат материальных точек и волевых параметров живого организма.

Для волевой связи порядка α путем варьирования соответствующего уравнения (6) получим две группы дополнительных уравнений

$$\bar{\delta} A_s = 0, \quad \bar{\delta}\, dA_s = 0, \quad \ldots, \quad \bar{\delta} d^{(\alpha-1)} A_s = 0, \tag{8}$$

$$dA_s = 0, \quad d^2 A_s = 0, \quad \ldots, \quad d^{(\alpha)} A_s = 0, \tag{9}$$

из которых первая вместе с соответствующим уравнением (7) составляет систему $\alpha + 1$ независимых уравнений, связывающих между собой дифференциалы волевых параметров живого организма, а вторая вместе с соответствующим уравнением (6) дает $\alpha + 1$ уравнений, ограничивающих дифференциалы координат материальных точек $d^{(\nu)} x_i \, (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha)$. Из сказанного следует, что уравнение волевой связи порядка α должно содержать не менее $c + 1$ волевых параметров $(h_s \geqslant \alpha + 1)$, из которых независимых будет $h_s - \alpha$.

Если уравнения (6 — 9) разделить на соответствующие степени dt, получим аналогичные уравнения, содержащие соответственно скорости и ускорения различных порядков $x_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha)$ материальных точек живого организма и его волевые скорости a'_{sl} с коэффициентами, зависящими в общем случае от a_{sl}, x_k, $x_k^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha - 1)$.

Пусть некоторый живой организм имеет η_1 волевых связей первого порядка, η_2 волевых связей второго порядка и т. д. и, наконец, h_c волевых связей порядка c. Тогда общее число волевых связей живого организма будет

$$\eta = \sum_{r=1}^{c} \eta_r. \tag{10}$$

Эти связи в своей совокупности определятся числом независимых уравнений, равным

$$\omega = \sum_{r=1}^{c} (r+1)\eta_r. \tag{11}$$

Предполагая, что часть волевых параметров будет общей для некоторых волевых связей, получим для суммарного количества w волевых связей живого организма соотношение

$$w \leqslant \sum_{\beta=1}^{\eta} \eta_\beta. \tag{12}$$

Общее число всех зависимых волевых параметров равно

$$\sigma = \sum_{r=1}^{c} r\eta_r, \tag{13}$$

а независимых

$$b = w - \sigma = w - \sum_{r=1}^{c} r\eta_r, \tag{14}$$

что влечет за собой неравенство

$$w > \sum_{r=1}^{c} r\eta_r. \tag{15}$$

Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{c} r\eta_r < w \leqslant \sum_{\beta=1}^{\eta} \eta_\beta. \tag{16}$$

Кроме того, очевидно,

$$\eta = \omega - \sigma, \tag{17}$$

так что число независимых уравнений, ограничивающих декартовы координаты скорости и ускорения различных порядков материальных точек живого организма, равно общему числу его волевых связей.

Уравнение связей живого организма (1—3) Я. И. Грдина выражает также в обобщенных координатах.

Пусть конфигурация живого организма полностью определяется обобщенными координатами q_ε ($\varepsilon=1, 2,\ldots$ $\ldots, k$). Предположим, что из общего числа μ волевых, обычных и ведущих связей имеем μ_1 голономных и $\mu_2=\mu-\mu_1$ неголономных. Пусть между декартовыми и лагранжевыми координатами существуют зависимости

$$q_\varepsilon = q_\varepsilon(x_i,\ a_l,\ t);\quad x_i = x_i(q_\varepsilon,\ a_l,\ t); \tag{18}$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots, 3n;\ 3n \geqslant k \geqslant 3n - \mu_1).$$

Получим

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{\varepsilon=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varepsilon} q_\varepsilon' + \sum_{g=1}^{w} \frac{\partial x_i}{\partial a_{sg}} a_{sg}' \tag{19}$$

и, следовательно, уравнения связей живого организма, ограничивающие его материальные точки, представятся в виде

$$P_s + \sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon} q_\varepsilon' + \sum_{g=1}^{w} N_{sg} a_{sg}' = 0, \tag{20}$$

где

$$P_s = B_s + \sum_{i=1}^{3n} A_{si} \frac{\partial x_i}{\partial t},\quad P_{s\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3n} A_{si} \frac{\partial x_i}{\partial t},\quad N_{sg} = \sum_{i=1}^{3n} A_{si} \frac{\partial x_i}{\partial a_g}. \tag{21}$$

Из μ соотношений (20) равенства

$$\overline{F}_s(q_\varepsilon,\ a_{sl},\ t) = 0;\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa = 3n - k) \tag{22}$$

являются тождествами, равенства

$$\overline{F}_s(q_\varepsilon,\ a_{sl},\ t) = 0\quad (s = \varkappa + 1,\ \varkappa + 2,\ \ldots,\ \mu_1) - \tag{23}$$

уравнениями голономных связей, а остальные μ_2 равенств — уравнениями неголономных связей. При этом

$$P_s = \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial t} = 0;\quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a_{sg}} + \frac{\partial F_s}{\partial a_{sg}} = 0; \tag{24}$$

$$(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa)$$

$$P_{s\varepsilon}=\frac{\partial\overline{F}_s}{\partial q_\varepsilon};\qquad (\varepsilon=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{25}$$

$$\frac{\partial\overline{F}_s}{\partial a_{sg}}=0;\quad N_{sg}=\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial F_s}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial a_{sg}}=-\frac{\partial F_s}{\partial a_{sg}}; \tag{26}$$

$$(g=1,\ 2,\ \ldots,\ w).$$

Если обобщенные скорости живого организма не зависят от его волевых скоростей, то уравнение связей (20) распадаются на две автономные группы уравнений:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon}q'_\varepsilon+P_s=0, \tag{27}$$

$$\sum_{g=1}^{w} N_{sg}a'_{sg}=0, \tag{28}$$

$$(s=\varkappa+1,\quad \varkappa+2,\ \ldots,\ \mu),$$

из которых первая ограничивает лагранжевы скорости, а вторая — волевые. Однако уравнения (28) не имеют самостоятельного значения, а являются следствиями уравнений (7—8). Я. И. Грдина считает, что в качестве основы для построения аналитической механики живых организмов можно принять формулу

$$\sum_{i=1}^{3n} R_{ix}\delta x_i=0, \tag{29}$$

известную из аналитической динамики обычных материальных систем. Это означает, что связи живого организма он рассматривает как идеальные и двухсторонние. В том, что ряд связей живого организма имеет такой характер, не может быть сомнения. Но, во-первых, некоторые из этих связей могут быть односторонними, а во-вторых, волевые и ведущие связи, если их трактовать как сервосвязи, не обладают свойством (29), т. е. возможная работа реакций этих связей вообще не равна нулю[1]. Правда, автор пишет («Динамика живых

[1] П. Аппель. Теоретическая механика, т. II. М., Физматгиз, 1960, стр. 344—356.

организмов»), что «здесь везде будут рассматриваться только удерживающие связи, так как связи неудерживающие, пока они напряжены, действуют как удерживающие, и условия таких неудерживающих связей сводятся к таким же равенствам, какие имеют место для соответственных удерживающих связей». Но такая аргументация недостаточно убедительна, поскольку при этом возникает весьма сложный вопрос об определении периодов времени, когда односторонняя связь напряжена и когда она не напряжена. Автор данный вопрос не затрагивает. Таким образом, полученные им в области аналитической динамики живых организмов результаты, которые мы рассматриваем в следующих параграфах данной главы, несколько ограниченны в указанном смысле слова и относятся к движениям живого организма при наличии лишь удерживающих идеальных связей.

Уравнения этих связей (1—3; 20) соответственно в декартовых и обобщенных координатах, очевидно, приводят к следующим соотношениям, ограничивающим изохронные вариации координат и волевых параметров («возможные вариации» по терминологии автора):

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si}\delta x_i + \sum_{g=1}^{hs} H_{sg}\delta a_{sg} = 0; \tag{30}$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon}\delta q_\varepsilon + \sum_{g=1}^{w} N_{sg}\delta a_{sg} = 0. \tag{31}$$

Уравнения (30) всегда и уравнения (31) в случае, когда лагранжевы скорости живого организма не зависят от его волевых скоростей, соответственно распадаются на самостоятельные уравнения

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si}\delta x_i = 0; \quad \sum_{g=1}^{h_s} H_{sg}\delta a_{sg} = 0; \tag{30'}$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon}\delta q_\varepsilon = 0; \quad \sum_{g=1}^{w} N_{sg}\delta a_{sg} = 0. \tag{31'}$$

Я. И. Грдину можно считать основоположником понятия о сервосвязях, которое в настоящее время играет большую роль в машинной математике, теории автоматического регулирования, кибернетике. Об этом свидетельствуют, в частности, следующие слова Я. И. Грдины, написанные им еще в 1912 г.:

«Предположим, что человек управляет паровозом, автомобилем, лодкой, аэропланом и т. п. или же просто несет какой-либо предмет и т. д. Сложная система, состоящая из человека и одного из транспортирующих устройств с двигателем, рассматриваемая как одно целое, имеет внешнее, механическое сходство с живым организмом. С чисто математической стороны для сложной системы, состоящей из живого организма и какого-либо неодушевленного предмета, получатся уравнения движения такого же вида, как и для отдельного живого организма, причем понятно, волевые связи непосредственно относятся только к частицам живого организма» [1].

В 1924 г. такую же мысль высказал П. Аппель [2] в связи с исследованиями А. Бегена (1921 г.) [3]: «Этот механизм (сервомеханизм) можно сравнить с живым существом, действующим непосредственным прикосновением и регулирующим свои усилия так, чтобы заданная связь осуществлялась». П. Аппель ссылается на А. Бегена как на основоположника учения о сервосвязях: «Анри Беген ввел новое понятие о сервосвязях» [4]. Оказывается, таким образом, что Я. И. Грдина на 10 лет раньше А. Бегена открыл «сервосвязи».

---

[1] См. «Примечания к динамике живых организмов», примечание X.

[2] П. Аппель. Теоретическая механика, т. II. М., Физматгиз, 1960, стр. 344.

[3] А. Беген. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. М., Изд-во «Наука», 1967.

Эта книга была впервые опубликована в Париже в 1921 г. и представляет собой диссертацию автора.

[4] П. Аппель. Теоретическая механика, т. II. М., Физматгиз, 1960, стр. 344.

К сожалению, работы Я. И. Грдины мало известны не только за рубежом, но и в Советском Союзе. Об этом свидетельствуют, например, следующие слова, взятые из аннотации указанного советского издания книги А. Бегена: «Автором впервые вводится в аналитическую механику понятие о сервосвязях». И далее (стр. 7): «В этой работе А. Беген ввел в аналитическую механику новое понятие о сервосвязях».

3. Вариационные принципы механики

Из общих дифференциальных принципов механики Я. И. Грдина рассматривает два: принцип Даламбера — Лагранжа и принцип Гаусса.

Если для динамики живых организмов принять в качестве основных положений второй закон Ньютона и аксиому об освобождаемости от связей

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{ix}, \tag{32}$$

$$(m_{3k} = m_{3k-1} = m_{3k-2}; \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, 3n),$$

то из соотношения (29) непосредственно вытекает, как и для динамики обычных материальных систем, принцип Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i = 0, \tag{33}$$

выраженный в декартовых координатах. Исследование вопроса о представлении принципа Даламбера — Лагранжа для живых организмов в обобщенных координатах мы в работах Я. И. Грдины не находим.

Как известно, принцип Гаусса наименьшего принуждения для обычных материальных систем состоит в следующем: материальная система движется с такими ускорениями, при которых в каждый момент времени выражение

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{(m_i \ddot{x}_i - X_i)^2}{m_i} \tag{34}$$

оказывается возможно наименьшим. При этом ускорения должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si} \ddot{x}_i + D_s = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{35}$$

вытекающему из уравнений связей, наложенных на систему.

Таким образом, задача сводится к отысканию условий относительного минимума выражения (34). При этом следует варьировать только ускорения, а не скорости и координаты материальных точек. Заметим, что для живых организмов в каждый момент времени не изменяются также и волевые параметры. Но даже если бы такие изменения и были возможны, то для каждой заданной системы значений этих параметров получим свое особое движение частей живого организма, причем уже для данного момента времени и по отношению к этому движению заданная система значений параметров является неизменной. Например, для волевых связей первого порядка члены

$$D_s = \sum_{i=1}^{3n} x_i' \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial A_{si}}{\partial x_k} x_k' + \sum_{g=1}^{k} a_{sg}' \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial A_{si}}{\partial a_{sg}} x_i' \qquad (36)$$

содержат скорости, которые являются постоянными по отношению к соответствующему движению в данный момент времени. Вообще живые организмы сами устанавливают в любой момент времени некоторую вполне определенную систему волевых скоростей и ускорений, с которой должно согласоваться движение в последующий момент времени. Следовательно, принцип Гаусса можно применять как к обычным материальным системам, так и к живым организмам. Необходимо лишь оговорить, что условные уравнения (35) могут быть непосредственно получены для живых организмов только с принятием без доказательства положения о независимости ускорений материальных точек живого организма от его волевых скоростей.

Я. И. Грдина исследует выражение принципа наименьшего принуждения для живых организмов и в обобщенных координатах. Пусть положение всех материальных точек живого организма в каждый момент времени определяется при данных значениях волевых параметров $a_j (j=1, 2, \ldots, w)$ какими-либо обобщенными координатами $q_\varepsilon (\varepsilon=1, 2, \ldots, k)$, причем

$$3n \geqslant k \geqslant 3n - \mu_1. \qquad (37)$$

Положим, что между декартовыми и лагранжевыми координатами имеются зависимости

$$\Phi_\nu (x_i, q_\varepsilon, a_j, t) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \qquad (38)$$

Пусть l обобщенных координат являются независимыми, а $p=k-l$ зависимыми. Тогда имеем равенство

$$3n+p+\sigma=\mu+\sigma+k,$$

откуда

$$p=\mu+k-3n\geqslant 0;\ l=k-p=3n-\mu>0. \qquad (39)$$

Очевидно, что скорости материальных точек живого организма и его волевые скорости связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_i}x_i'+\sum_{\varepsilon=1}^{l+p}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial q_\varepsilon}+\sum_{j=1}^{b+\sigma}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial a_j}+\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial t}=0, \qquad (40)$$

$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Известно, что скорости материальных точек живого организма x_i' не зависят от волевых скоростей a_j'; что же касается обобщенных скоростей, то они только в частном случае могут оказаться независимыми от волевых скоростей. В общем же случае между ними имеется зависимость.

Составим функцию

$$R=S-\sum_{\varepsilon=1}^{l}Q_\varepsilon q_\varepsilon''-\sum_{j=1}^{b}E_j a_j''+D. \qquad (41)$$

В ней S — энергия ускорений Гиббса — Аппеля

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}m_i x_i'', \qquad (42)$$

преобразованная посредством соотношений

$$x_i''=\sum_{\varepsilon=1}^{l}K_{i\varepsilon}q_\varepsilon''+\sum_{j=1}^{b}G_{ij}a_j''+K_{0i}, \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 3n), \quad (43)$$

где коэффициенты $K_{i\varepsilon}$ и G_{ij} — суть функции времени t, независимых и зависимых обобщенных координат q_ε, $q_{l+\zeta}$ ($\varepsilon=1,\ 2,\ \ldots,\ l$; $\zeta=1,\ 2,\ \ldots,\ p$), независимых и зависимых волевых параметров a_j, $a_{b+\xi}$ ($j=1,\ 2,\ldots,\ b$; $\xi=1,\ 2,\ \ldots.\ \sigma$); K_{0i} содержит слагаемые, в которые не входят q_ε'', a_j''; Q_ε, E_j — соответственно обобщенные силы и обобщенные параметровые силы

$$Q_\varepsilon = \sum_{i=1}^{3n} K_{i\varepsilon} X_i; \quad E_j = \sum_{i=1}^{3n} G_{ij} X_i. \tag{44}$$

Так что

$$\sum_{l=1}^{3n} X_i \delta x_i = \sum_{\varepsilon=1}^{l} Q_\varepsilon \delta q_\varepsilon + \sum_{j=1}^{b} E_j \delta a_j; \tag{45}$$

D — произвольная определенная функция времени t, зависимых и независимых координат и волевых параметров, зависимых и независимых обобщенных и волевых скоростей. Род произвольной функции D выбирают в зависимости от свойств координат q_ε и обобщенного отклонения живого организма R; функции S и R — многочлены второй степени относительно обобщенных и волевых независимых ускорений q''_ε и a''_j. При варьировании этих ускорений в каждый данный момент времени t не будет изменяться ни одна из величин q_ε, a_j, q'_ε, a'_j. Что же касается обобщенных и волевых зависимых ускорений, то они определяются соотношениями

$$q''_{l+\zeta} = \sum_{\varepsilon=1}^{l} L_{\zeta\varepsilon} q''_\varepsilon + \sum_{j=1}^{b} I_{\zeta j} a''_j + L_{0\zeta}; \tag{46}$$

$$a''_{b+\xi} = \sum_{\varepsilon=1}^{l} M_{\xi\varepsilon} q''_\varepsilon + \sum_{j=1}^{b} J_{\xi j} a''_j + M_{0\xi};$$

$$(\zeta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ \xi = 1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma),$$

где коэффициенты $L_{\zeta\varepsilon}$, $I_{\zeta j}$, $M_{\xi\varepsilon}$, $J_{\xi j}$ — суть функции тех же переменных, что и коэффициенты $K_{i\varepsilon}$, G_{ij}, а члены $L_{0\zeta}$, $M_{0\xi}$ представляют совокупность слагаемых, не содержащих ускорения q''_ε, a''_j. Однако эти зависимые обобщенные и волевые ускорения не входят в выражения S и R.

Я. И. Грдина показывает, что принцип наименьшего принуждения (наименьшего отклонения — по его терминологии) может быть выражен равенствами

$$\frac{\partial R}{\partial q''_\varepsilon} = 0; \ \frac{\partial R}{\partial a''_j} = 0, \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, b), \tag{47}$$

т. е. в каждый данный момент времени живой организм движется с такими обобщенными и волевыми ускорениями, которые обращают в минимум величину его обобщенного отклонения R.

В частном случае, когда живой организм представляет собой изолированную систему ($Q_\varepsilon = 0,\ E_j = 0$), соотношения (47) принимают более простой вид

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial a''_j} = 0, \qquad \varepsilon = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, b. \quad (48)$$

Принцип наименьшего отклонения, согласно Я. И. Грдине, можно рассматривать так же, как условие относительного минимума функции R, если принять

$$R = S - \sum_{\varepsilon=1}^{k} Q_\varepsilon q''_\varepsilon - \sum_{j=1}^{w} E_j a''_j + D \qquad (49)$$

и учесть уравнения связей

$$\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon} q''_\varepsilon + \sum_{j=1}^{w} N_{sj} a''_j + N_{0s} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu). \quad (50)$$

При этом следует заметить, что если выбрать соответствующим образом дополнительный аддитивный член D, то величина обобщенного отклонения будет инвариантна относительно обобщенных координат. Грдина показывает, что в соответствии с наличием соотношений

$$x''_i = \sum_{\varepsilon=1}^{l} K_{i\varepsilon} q''_\varepsilon + \sum_{j=1}^{b} G_{ij} a''_j + K_{0i}, \qquad (51)$$

$$x''_i = \sum_{\varepsilon=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varepsilon} q''_\varepsilon + \Pi_i, \qquad (52)$$

$$x''_i = \sum_{\varepsilon=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varepsilon} q''_\varepsilon + \sum_{j=1}^{w} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} a''_j + \Omega_i \qquad (53)$$

дополнительный член D должен быть выбран в одной из следующих трех форм:

$$D = D_0 - \sum_{i=1}^{3n} K_{0i} X_i, \qquad (51')$$

$$D = D_0 - \sum_{i=1}^{3n} \Pi_i X_i, \tag{52'}$$

$$D = D_0 - \sum_{i=1}^{3n} \Omega_i X_i, \tag{53'}$$

где величина D_0 может быть выбрана произвольно как функция t, x_i, a_j, x_i', a_j'. В частном случае, если выбрать

$$D_0 = \sum_{i=1}^{3n} \frac{X_i^2}{m_i}, \tag{54}$$

получим принцип наименьшего принуждения в форме Гаусса. Таким образом, принцип наименьшего принуждения Гаусса является одной из форм принципа наименьшего отклонения Грдины.

Оказывается, как показывает Я. И. Грдина, интегральные принципы для живых организмов неправомерны.

Рассматривая интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i \right) dt \tag{55}$$

при условиях, соответствующих принципу Гамильтона — Остроградского, его можно представить в виде

$$I = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\varepsilon=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon'} - \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon} - Q_\varepsilon \right) \delta q_\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{w} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial a_j'} - \frac{\partial T}{\partial a_j} - E_j \right) \delta a_j \right\} dt \tag{56}$$

и с помощью уравнений движения окончательно записать следующим образом:

$$I = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=\varkappa_1+1}^{\mu} \lambda_s \left(\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon} \delta q_\varepsilon + \sum_{j=1}^{w} N_{sj} \delta a_j \right) dt. \tag{57}$$

Здесь $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$ — число конечных связей, из которых $\varkappa_1$ — обычные, или ведущие, а дальнейшие $\varkappa_2$ — волевые, так что при всяком ε первые $\varkappa_2$ коэффициентов $P_{s\varepsilon}=0$. И поскольку, как это можно показать,

$$\sum_{\varepsilon=1}^{k} P_{s\varepsilon}\delta q_\varepsilon + \sum_{j=1}^{w} N_{sj}\delta\alpha_j \neq 0, \tag{58}$$

$$(s=\varkappa+1,\ \varkappa+2,\ \ldots,\mu)$$

интеграл I не может обратиться в нуль. Следовательно, принцип Гамильтона — Остроградского для живых организмов не имеет места. Вариация интеграла

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} 2\,\tau dt, \tag{59}$$

если ее понимать в соответствии с принципом наименьшего действия Лагранжа, может быть преобразована в вид

$$\Delta I_1 = -\int_{(q_1)_1}^{(q_1)_2} \left\{ \sum_{\varepsilon=2}^{k} \left(\frac{d}{dq_1}\ \frac{\partial P}{\partial q'_\varepsilon} - \frac{\partial P}{\partial q_\varepsilon} \right) \delta q_\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{w} \left(\frac{d}{dq_1}\ \frac{\partial P}{\partial \xi_j} - \frac{\partial P}{\partial a_j} \right) \delta a_j \right\} (\pm\, dq_1), \tag{60}$$

где q_1 — одна из обобщенных координат живого организма и

$$\xi_j = \frac{da_j}{dq_1},\ P=\sqrt{G(U+h)},\ G=\frac{T}{q'^2_1}\ . \tag{61}$$

С другой стороны, на основании уравнений движения можно показать, что

$$\frac{d}{dq_1}\cdot\frac{\partial P}{\partial q'_\varepsilon} - \frac{\partial P}{\partial q_\varepsilon} \neq 0,\ \frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial \xi_j} - \frac{\partial P}{\partial a_j} \neq 0, \tag{62}$$

$$(\varepsilon=2,3,\ \ldots,k;\ j=1,2,\ \ldots,w).$$

Отсюда следует, что вариация ΔI_1 не может обратиться в нуль. Таким образом, принцип наименьшего действия Лагранжа для живых организмов также не имеет места.

4. Динамические уравнения движения

В связи с тем, что волевые параметры как переменные величины в уравнениях связей живых организмов формально не отличаются от координат его материальных точек, очевидно, дифференциальные уравнения движения живых организмов по внешней форме совпадут с аналогичными уравнениями движения обычных материальных систем. Однако по своей внутренней природе эти уравнения существенно различные: в динамических уравнениях движения живых организмов фигурируют не обычные производные соответствующих функций времени, а условные (по терминологии Я. И. Грдины). Кроме того, эти функции содержат не постоянные, а переменные параметры, обусловленные наличием волевых связей.

Пользуясь известными методами аналитической механики, Я. И. Грдина в своих работах выводит динамические уравнения живых организмов в различных формах: уравнения Лагранжа первого и второго рода, уравнения Рауса — Фосса, Гиббса — Аппеля, Гамильтона, Якоби.

Исходя из второго закона Ньютона и пользуясь аксиомой об освобождаемости от связей, Грдина считает справедливым и для живых организмов принцип Германа — Эйлера в форме дифференциальных уравнений.

$$m_i x_i'' = X_i + R_{ix}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n). \tag{63}$$

Если число всех связей живого организма есть μ, то $3n$ проекций возможных вариаций его материальных точек на оси координат должны удовлетворять μ уравнениям этих связей:

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si} \delta x_i = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{64}$$

С помощью метода неопределенных множителей, как это делается обычно, из соотношений (29) и (64) можно получить уравнение Лагранжа первого рода для живых организмов:

$$m_i x_i'' = X_i + \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s A_{si}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n). \tag{65}$$

Присовокупляя к этим уравнениям уравнения связей, получим систему динамических уравнений движения живого организма:

$$\left.\begin{aligned}&m_i x_i'' = X_i + \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s A_{si} \, (i = 1, 2, \ldots, 3\,n),\\&\sum_{i=1}^{3n} A_{si} x_i'' + D_s = 0 \;\; (s = 1, 2, \ldots, \mu),\\&\sum_{j=1}^{w} H_{\sigma j} a_{\sigma j}' = 0, \sum_{j=1}^{w} a_{\sigma j}' \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial A_{\sigma i}}{\partial a_{\sigma j}} x_i' = 0,\\&\qquad\qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \eta).\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Из $3n+\mu+2\eta$ уравнений (66) в результате интегрирования можно получить $3n+\mu+2\eta$ искомых величин x_i, $a_{\sigma j}$, λ_s в функции от времени t и от независимых волевых параметров.

$$b = \sum_{s=1}^{\eta} (\eta_s - 2) = \sum_{s=1}^{\eta} \eta_s - 2\eta = w - 2\eta \tag{67}$$

Исходя из уравнений (66) и переходя к обобщенным координатам, Я. И. Грдина получает применительно к живым организмам уравнения Рауса — Фосса, к которым для полноты следует присоединить уравнения связей,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon'} - \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon} = \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon} + Q_\varepsilon \, (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k),\\&\sum_{\nu=1}^{k} P_{s\nu} q_\nu' + P_s = 0 \;\; (s = \varkappa + 1, \; \varkappa + 2, \ldots, \mu),\\&\sum_{j=1}^{w} N_{\sigma j} a_{\sigma j}' = 0, \sum_{j=1}^{w} a_{\sigma j}' \left(\sum_{\nu=1}^{k} N_{\sigma j\nu} q_\nu' + N_{\sigma j}\right) = 0,\\&\qquad\qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \eta).\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Данная система $k+\mu-\varkappa+2\eta=2k+\mu+2\eta-3n$ уравнений путем интегрирования позволяет выразить одноименное число искомых величин q_ε, λ_s, $a_{\sigma j}$ в функции времени и $b = w - 2\eta$ независимых волевых параметров. Заметим, что вторая и третья группы уравнений (68) относятся к тому случаю, когда обобщенные и волевые скорости независимы между собой. В более же общем случае наличия зависимости между ними указанные группы уравнений, не будучи атономными, представятся в виде

$$P_s + \sum_{j=1}^{w} N_{sj} a_j' + \sum_{\nu=1}^{k} P_{s\nu} q_\nu' = 0, \qquad (s = \varkappa + 1,\ \varkappa + 2, \ldots, \mu). \tag{69}$$

Я. И. Грдина показывает, что как следствие из уравнений (68) можно получить уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a_j'} - \frac{\partial T}{\partial a_j} = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s N_{sj} + E_j, \ (j = 1, 2, \ldots, w), \tag{70}$$

которые по своей внешней форме вполне сходны с уравнениями Рауса—Фосса. В этих уравнениях величины

$$E_j = \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \tag{71}$$

можно назвать обобщенными параметровыми силами.

Пусть живой организм представляет собой голономную систему ($\mu_2 = 0$, $\mu_1 = \mu$) и $k = 3n - \mu_1 = 3n - \mu$. Тогда $\varkappa = \mu_1 = \mu$, $\mu_1 - \varkappa = 0$, $\mu - \varkappa = 0$ и, следовательно, уравнения Рауса—Фосса примут более простой вид уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon'} - \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon} = Q_\varepsilon, \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k). \tag{72}$$

К этим уравнениям нужно присовокупить 2η уравнений, ограничивающих волевые скорости, т. е. третью и четвертую группы уравнений (68).

Если внешние силы, действующие на живой организм, консервативны, уравнения (72), как и в случае обычной материальной системы, можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\varepsilon'} - \frac{\partial L}{\partial q_\varepsilon} = 0, \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k). \tag{73}$$

Полагая при этом, что первые η среди всех μ связей являются волевыми, можно уравнения (30) записать так:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{dL}{\partial a_j'}-\frac{\partial L}{\partial a_j}=\sum_{s=1}^{\eta}\lambda_s N_{sj} \quad (j=1,\ 2,\ldots,\ w), \tag{74}$$

причем

$$N_{sj}=-\frac{\partial F_s}{\partial a_j}, \qquad (s=1,2,\ldots,\eta). \tag{75}$$

В результате исключения из этих уравнений множителей λ_s получим $w-\eta$ уравнений, представляющих следствия уравнений (72) и уравнений связей. Множители же связей независимо могут быть определены из уравнений Лагранжа первого рода.

Уравнения Рауса — Фосса для живых организмов могут быть приведены к каноническому виду. Для этого вместо обобщенных и волевых скоростей Я. И. Грдина вводит соответственно обобщенные импульсы и обобщенные параметровые импульсы.

$$p_\varepsilon=\frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon'},\ \rho_j=\frac{\partial T}{\partial a_j'}, \qquad (\varepsilon=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,w). \tag{76}$$

Здесь, как и в уравнениях Рауса — Фосса и Лагранжа второго рода, выражение кинетической энергии живого организма предполагается преобразованным к виду

$$T=\sum_{\varepsilon=1}^{k}q_\varepsilon'\sum_{\nu=1}^{k}K_{\varepsilon\nu}q_\nu'+\sum_{\varepsilon=1}^{k}K_\varepsilon q_\varepsilon'+\sum_{\varepsilon=1}^{k}q_\varepsilon'\sum_{j=1}^{w}L_{\varepsilon j}a_j'+$$
$$+\sum_{j=1}^{w}a_j'\sum_{l=1}^{w}M_{jl}a_l'+\sum_{j=1}^{w}M_j a_j'+K_0, \tag{77}$$

где коэффициенты $K_{\varepsilon\nu}$, K_ε, $L_{\varepsilon j}$, M_{jl}, K_0 являются функциями времени, обобщенных координат и волевых параметров. При этом если обобщенные скорости не зависят от волевых скоростей, выражение (76) значительно упрощается и принимает вид

$$T=\sum_{\varepsilon=1}^{k}q_\varepsilon'\sum_{\nu=1}^{k}K_{\varepsilon\nu}q_\nu'+\sum_{\varepsilon=1}^{k}K_\varepsilon q_\varepsilon'+K_0. \tag{78}$$

Однако в этом случае при определении частных производных от кинетической энергии по обобщенным координатам, фигурирующих в динамических уравнениях движения, следует пользоваться полным выражением кинетической энергии (77).

Из формулы (77) следует, что величины p_ε и ρ_j есть линейные функции обобщенных и волевых скоростей (и наоборот) с коэффициентами, зависящими от времени, лагранжевых координат и волевых параметров. Преобразованное к каноническим переменным q_k, a_j, p_ε, ρ_j, t, общее выражение кинетической энергии (76) Грдина называет союзным выражением кинетической энергии. Это выражение будет полиномом второй степени относительно обобщенных импульсов и обобщенных параметровых импульсов с коэффициентами, зависящими от времени, лагранжевых координат и волновых параметров. Далее составляется выражение

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu q'_\nu + \sum_{l=1}^{w} \rho_l a'_l - T, \tag{79}$$

которое предполагается выраженным в канонических переменных. Эта величина, которую можно назвать функцией Гамильтона — Грдины, также представляет собой многочлен второй степени относительно p_ε и ρ_j с коэффициентами, зависящими от t, q_ε, a_j.

Можно доказать путем непосредственного дифференцирования, что

$$q'_\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\varepsilon}; \quad a'_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_\varepsilon}; \quad \frac{\partial T}{\partial a_j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_j}. \tag{80}$$

На основании этих равенств уравнения Рауса — Фосса для живого организма

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\varepsilon} - \frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon} = \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon} + Q_\varepsilon;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'_j} - \frac{\partial T}{\partial a_j} = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s N_{sj} + E_j;$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, w) \tag{81}$$

принимают каноническую форму:

$$q_\varepsilon' = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\varepsilon}, \; a_j' = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j};$$

$$p_\varepsilon' + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\varepsilon} = \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon} + Q_\varepsilon; \qquad \rho_j' + \frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s N_{sj} + E_j,$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k; \; j = 1, 2, \ldots, w). \qquad (82)$$

Здесь обобщенные и обобщенные параметровые силы должны быть выраженными в канонических переменных. В канонических переменных должны быть представлены и уравнения связей живого организма (69):

$$I_s + \sum_{j=1}^{w} J_{\varepsilon j} \rho_j + \sum_{\varepsilon=1}^{k} I_{s\varepsilon} p_\varepsilon = 0, \qquad (83)$$

$$(s = \varkappa + 1, \; \varkappa + 2, \ldots, \mu),$$

причем коэффициенты I_s, $J_{\varepsilon j}$, $I_{s\varepsilon}$ являются функциями переменных t, q_ε, a_j. Можно принять, что движение живого организма определяется первыми тремя группами уравнений (82) (всего таких уравнений $2k+w$), $\rho-\varkappa$ уравнениями (83) и σ уравнениями, ограничивающими волевые скорости (выраженными в канонических переменных). Всего получим систему $2k+w+(\rho-\varkappa)+\sigma$ совокупных уравнений для определения обобщенных координат q_ε ($\varepsilon=1, 2,\ldots$ $\ldots, k$), обобщенных импульсов p_ε ($\varepsilon=1, 2, \ldots, k$), зависимых волевых параметров a_β ($\beta=1, 2, \ldots, \sigma$), обобщенных параметровых импульсов ρ_j ($j=1, 2, \ldots, w$), множителей связей λ_s ($s=\varkappa+1, \varkappa+2, \ldots, \mu$) в функции от времени и независимых волевых параметров a_γ ($\gamma=\sigma+1, \sigma+2, \ldots, w$; $w-\sigma=b$), так что число зависимых переменных оказывается равным числу уравнений. Четвертая же группа уравнений (82) является простым следствием рассматриваемой системы уравнений.

Если живой организм представляет собой голономную систему и среди лагранжевых координат q^ε нет избыточных, то обобщенная Я. И. Грдиной на живые организмы каноническая система уравнений в форме Суслова — Морера несколько упрощается. В этом случае две последние группы уравнений (82) примут вид

$$p_\varepsilon' + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\varepsilon} = Q_\varepsilon,\ \rho_j' + \frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = \sum_{s=1}^{\eta} \lambda_s N_{sj} + E_j, \tag{84}$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, w),$$

а равенства (83) обращаются в тождества (η—число волевых связей). Всего уравнений движения будет $2k + w + \sigma$ при таком же числе зависимых переменных.

Пусть, кроме того, действующие на живой организм внешние силы являются консервативными. Тогда, вводя в рассмотрение функцию Гамильтона—Грдины

$$H = \Phi - U = \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu q_\nu' + \sum_{l=1}^{w} \rho_l a_l' - L, \tag{85}$$

можно канонические уравнения механики живых организмов (82) представить следующим образом:

$$q_\varepsilon' = \frac{\partial H}{\partial p_\varepsilon},\quad p_\varepsilon' = -\frac{\partial H}{\partial q_\varepsilon},\ (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k),$$

$$a_j' = \frac{\partial H}{\partial \rho_j},\quad \rho_j' = -\frac{\partial H}{\partial a_j} + \sum_{s=1}^{\eta} \lambda_s N_{sj},\ (j = 1, 2, \ldots, w). \tag{86}$$

В последней группе уравнений можно исключить множители связей, тогда в ней останется w—η уравнений.

Если живой организм не имеет ведущих связей, то

$$\Phi = T;\ H = T - U = H(q_\varepsilon, a_j, p_\varepsilon, \rho_j) = h = \text{const}. \tag{87}$$

При построении канонических уравнений механики живых организмов можно было бы не вводить обобщенных параметровых импульсов и принять

$$\Phi = \Phi(t, q_\varepsilon, p_\varepsilon, a_j, a_j') = \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu q_\nu' - T. \tag{88}$$

При этом уравнения движения принимают вид

$$q_\varepsilon' = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\varepsilon},\ p_\varepsilon' + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\varepsilon} = \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon} + Q_\varepsilon,$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k), \tag{89}$$

а уравнения связей (83) запишутся в форме

$$I_s + \sum_{j=1}^{w} J_{sj} a_j' + \sum_{\varepsilon=1}^{k} I_{s\varepsilon} p_\varepsilon = 0, \qquad (s = \varkappa + 1, \varkappa + 2, \ldots, \mu) \tag{90}$$

с коэффициентами I_s, J_{sj}, $I_{s\varepsilon}$, которые, как и раньше, будут функциями времени, обобщенных координат и волевых параметров. В рассматриваемом случае имеем $2k + (\mu - \varkappa) + \sigma$ совокупных уравнений при том же числе зависимых переменных.

Если живой организм имеет только конечные связи и все лагранжевы координаты независимы друг от друга, то уравнения движения примут более простой вид

$$q_\varepsilon' = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\varepsilon}; \quad p_\varepsilon' + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\varepsilon} = Q_\varepsilon, \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k). \tag{91}$$

В случае, когда действующие на живой организм внешние силы имеют силовую функцию, канонические уравнения движения живого организма по внешней форме аналогичны уравнениям движения обычной материальной системы:

$$q_\varepsilon' = \frac{\partial H}{\partial p_\varepsilon}; \quad p_\varepsilon' = -\frac{\partial H}{\partial q_\varepsilon} \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k); \tag{92}$$

$$H = \Phi - U = \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu q_\nu' - L.$$

Переходя к установлению динамических уравнений движения живого организма в форме Якоби, Я. И. Грдина, естественно, ограничивается случаем, когда живой организм представляет собой консервативную голономную систему. В этом случае кинетическая энергия живого организма будет однородным полиномом второй степени относительно обобщенных и волевых скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат и волевых параметров:

$$T = \sum_{\varepsilon=1}^{k} q_\varepsilon' \sum_{\nu=1}^{k} K_{\varepsilon\nu} q_\nu' + \sum_{\varepsilon=1}^{k} q_\varepsilon' \sum_{j=1}^{w} L_{\varepsilon j} a_j' + \sum_{j=1}^{w} a_j' \sum_{l=1}^{w} M_{jl} a_l', \tag{93}$$

а потенциальная энергия не будет явно зависеть от времени. Следовательно, уравнения Рауса — Фосса представятся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\varepsilon}-\frac{\partial T}{\partial q_\varepsilon}-\frac{\partial U}{\partial q_\varepsilon}=0;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'_j}-\frac{\partial T}{\partial a_j}-\frac{\partial U}{\partial a_j}=\sum_{s=1}^{\eta}\lambda_s N_{sj}, \tag{94}$$

$$(\varepsilon=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,w)$$

и не будут явно содержать время.

Принимая вместо t в качестве независимой переменной обобщенную координату q_1 и вводя обозначения

$$\frac{dq_\varepsilon}{dq_1}=g_\varepsilon,\ \frac{da_j}{dq_1}=\xi_j;\ G=\frac{T}{q_1'^2};\ P=\sqrt{G(U+h)};$$

$$V_j=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{G+h}}\cdot\sum_{s=1}^{\eta}\lambda_s N_{sj}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{G+h}}\cdot\sum_{s=1}^{\eta}\lambda_s\frac{\partial F^s}{\partial a_j}, \tag{95}$$

получим возможность преобразовать дифференциальные уравнения движения живого организма (94) в форму Якоби:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial g_\varepsilon}-\frac{\partial P}{\partial g_\varepsilon}=0;\ \frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial \xi_j}-\frac{\partial P}{\partial a_j}=V_j,$$

$$(\varepsilon=2,3,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,w), \tag{96}$$

где h — постоянная интеграла энергии;

$$T=U+h. \tag{97}$$

Первая группа уравнений (96) по внешней форме сходна с уравнениями движения Якоби для обыкновенной консервативной голономной материальной системы. В настоящем случае имеем систему уравнений, состоящую из первой группы уравнений (96) (число этих уравнений равно $k-1$), и σ уравнений, ограничивающих волевые скорости, в которых за независимую переменную принята координата q_1 вместо t. Всего получим $k-1+\sigma$ совокупных уравнений для определения обобщенных координат q_ε ($\varepsilon=2, 3,\ldots,k$) и зависимых волевых параметров a_β ($\beta=1, 2,\ldots,\sigma$) в функции от обобщенной координаты q_1 и независимых волевых параметров a_γ ($\gamma=\sigma+1, \sigma+2,\ldots,w$; $w-\sigma=l$), так что число зависимых переменных оказывается равным числу уравнений. Что же касается второй группы уравнений (94), то она является простым следствием рассматриваемой системы уравнений движения живого организма. После решения системы уравнений Якоби время t определится условной квадратурой

$$t = t_0 + \int_{(q_1)_0}^{q_1} \sqrt{\frac{G}{G+h}} \cdot (\pm\, dq_1), \tag{98}$$

где знак должен быть выбран таким образом, чтобы всегда получался положительный элемент.

В заключение Я. И. Грдина обобщает для живых организмов динамические уравнения в форме Гиббса—Аппеля, исходя из принципа Даламбера—Лагранжа или уравнений Лагранжа первого рода. Указанные уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\varepsilon} = Q_\varepsilon + \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon}, \ (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\frac{\partial S}{\partial a''_j} = E_j + \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s N_{sj}, \ (j = 1, 2, \ldots, w). \tag{99}$$

Здесь S означает энергию ускорений (42), выраженную посредством соотношений (43) как квадратичная функция обобщенных и волевых ускорений с коэффициентами, зависящими от времени, обобщенных координат, волевых параметров, обобщенных и волевых скоростей; Q_ε и E_j — соответственно обобщенные и обобщенные параметровые силы, определяемые формулами (44); $P_{s\varepsilon}$ и N_{sj} — коэффициенты в уравнениях связей (20), ограничивающих движение материальных точек живого организма; $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — число голономных связей, из которых $\varkappa_1$ — число обычных, или ведущих, а $\varkappa_2$ — число волевых связей, так что $P_s = 0$, $P_{s\varepsilon} = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, \varkappa)$, $N_{sj} = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, \varkappa_1)$.

Первая группа уравнений (99) по внешнему виду вполне подобна аналогичным уравнениям для обыкновенной материальной системы. При решении задачи о движении живого организма имеем k уравнений первой группы (99), $\mu - \varkappa$ уравнений связей (20) или (27), ограничивающих обобщенные скорости, и σ — уравнений вида (8), ограничивающих волевые скорости. Всего $k + \mu - \varkappa + \sigma$ совокупных уравнений для определения обобщенных координат q_ε ($\varepsilon = 1, 2, \ldots, k$), множителей связей λ_s ($s = \varkappa + 1, \varkappa + 2, \ldots, \mu$) и σ—зависимых волевых параметров a_β ($\beta = 1, 2, \ldots, \sigma$), всего $k + \mu - \varkappa + \sigma$ зависимых переменных в функции от времени и независимых волевых параметров a_γ ($\gamma = \sigma + 1, \sigma + 2, \ldots, w$; $w - \sigma = b$). Что же касается второй группы уравнений (99), то $\varkappa_2$ из них могут служить для определения первых $\varkappa_2$ множителей λ_s; внеся значения этих множителей в остальные уравнения этой группы, получим $w - \varkappa_2$ уравнений, которые будут содержать те же множители λ_s, что и уравнения первой группы (99). Указанные $w - \varkappa_2$ уравнений явятся простыми аналитическими следствиями рассмотренной выше полной системы уравнений. Очевидно, что значения множителей связей можно получить также из уравнений Лагранжа первого рода.

В случае отсутствия избыточных лагранжевых координат, если живой организм представляет собой голономную систему, первая группа уравнений движения (99) примет более простой вид

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\varepsilon} = Q_\varepsilon, \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, k). \tag{100}$$

Наконец, заметим, что путем введения функции R, определяемой формулой (41), уравнения (99) можно представить в виде

$$\frac{\partial R}{\partial q''_\varepsilon} = \sum_{s=\varkappa+1}^{\mu} \lambda_s P_{s\varepsilon}; \qquad \frac{\partial R}{\partial a''_j} = \sum_{s=\varkappa_1+1}^{\mu} \lambda_s N_{sj}; \tag{101}$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k; \; j = 1, 2, \ldots, w).$$

В случае наличия лишь голономных связей и отсутствия избыточных обобщенных координат эти уравнения еще более упрощаются:

$$\frac{\partial R}{\partial q''_\varepsilon} = 0; \; \frac{\partial R}{\partial a''_j} = \sum_{s=\varkappa_1+1}^{\mu} \lambda_s N_{sj}; \tag{102}$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k; \; j = 1, 2, \ldots, w).$$

В этом случае для решения задачи о движении живого организма имеем k уравнений (100) и σ уравнений вида (8), всего — систему $k + \sigma$ совокупных уравнений с условными производными, позволяющую определить k обобщенных координат и σ зависимых волевых параметров в функции от времени и b независимых волевых параметров.

5. Интегрирование динамических уравнений движения

Пусть движение живого организма описывается, например, уравнениями Лагранжа I рода

$$m_i x_i'' = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_{si} + X_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{103}$$

к которым следует присоединить уравнения связей,

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{si} x_i' + B_s = 0; \ \sum_{j=1}^{h_s} H_{\nu j} a_{\nu j}' = 0, \tag{104}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p; \ \nu = 1, 2, \ldots, q).$$

Данная система дифференциальных уравнений может быть названа системой уравнений в полных дифференциалах второго порядка или системой уравнений с условными производными второго порядка. Число входящих в эту систему уравнений равно $3n + p + q$, а число переменных — $1 + 3n + w + p$, где $w = \sum_{s=1}^{q} h_s$ — количество всех волевых параметров живого организма. Следовательно, число независимых переменных будет $1 + w + q$. В качестве таких переменных можно принять время t и $b = w - q$ волевых параметров $a_1, a_2, \ldots, a_b$. Остальные q волевых параметров $a_{b+1}, a_{b+2}, \ldots, a_w$, а также координаты материальных точек живого организма x_i и множители связей λ_s будут функциями времени и независимых волевых параметров:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, a_1, a_2, \ldots, a_b) && (i = 1, 2, \ldots, 3n); \\ a_l &= a_l(t, a_1, a_2, \ldots, a_b) && (l = b + 1, b + 2, \ldots, w); \\ \lambda_s &= \lambda_s(t, a_1, a_2, \ldots, a_b) && (s = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \tag{105}$$

Однако, как следует из этих соотношений,

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{b} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} a_j', \tag{106}$$

т. е. скорости материальных точек живого организма зависят от волевых скоростей, чего, как известно, не может быть. Это противоречие могло бы быть устранено при условии $\frac{\partial x_i}{\partial t}=0$, но это повлекло бы за собой соотношения $x_i=x_i(t)$. Это значит, что движение живого организма не зависело бы от волевых импульсов. Снова противоречие с действительным положением вещей. Для устранения указанных противоречий Я. И. Грдина предлагает принять, что независимые волевые параметры могут входить в выражения для координат только под знаками особых интегралов вида

$$V_\varepsilon=\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(\tau,\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\,d\tau, \qquad (107)$$
$$(\varepsilon=1,2,\ldots.\sigma),$$

где $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_b$ — значения независимых волевых параметров для момента времени τ, t_0 — начальный момент времени, φ_ε — некоторые функции указанных переменных. Тогда получим

$$x_i=x_i(t,V_1,V_2,\ldots,V_\sigma), \qquad (108$$
$$(i=1,2,\ldots,3n).$$

Заметим, что в интегралах (107) между подынтегральной функцией и переменной τ нет определенной зависимости, ибо волевые параметры $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_b$ не зависят от времени τ. Такие интегралы Я. И. Грдина называет условными.

Введение условных интегралов позволяет записать выражения для скоростей материальных точек живого организма в виде

$$x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\sum_{\varepsilon=1}^{\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial V_\varepsilon}\cdot\varphi_\varepsilon. \qquad (109)$$

Эти выражения совершенно не зависят от волевых скоростей, как и требуется в динамике живых организмов.

Наиболее общее предположение относительно зависимых волевых параметров и множителей связей, по мнению Я. И. Грдины, состоит в том, что эти величины являются функциями времени, независимых волевых параметров, условных интегралов V_ε и некоторых дополнительных условных интегралов от времени и не зависимых волевых параметров, взятых по одному из этих параметров. Тогда на основании соотношений

$$m_i x_i'' = \theta_i(t;\ a_1, a_2, \ldots, a_b;\ V_1, V_2, \ldots, V_b;\ \ldots, S_\rho, \ldots), \quad (110)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 3n)$$

можно утверждать, что ускорения материальных точек живого организма не зависят от его волевых скоростей. С другой стороны, дифференцируя выражения (109) по времени (конечно, в условном смысле), получим, что ускорения x_i'' являются функциями волевых скоростей. Грдина считает возможным разрешить указанное противоречие, предполагая, что в выражения (108) для координат материальных точек живого организма входят двойные условные интегралы особого вида:

$$W_\nu = \int_{t_0}^{t} \psi_\nu(\theta, U_1, U_2, \ldots, U_\sigma)\, d\theta, \quad (111)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \omega),$$

где

$$U_\varepsilon = \int_{t_0}^{\theta} \bar{\varphi}_\varepsilon(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_b)\, d\tau, \quad (112)$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

так что

$$x_i = x_i(t, W_1, W_2, \ldots, W_\omega), \quad (113)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Тогда

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{\gamma=1}^{\omega} \frac{\partial x_i}{\partial W_\gamma} \cdot W_\nu' = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{\gamma=1}^{\omega} \frac{\partial x_i}{\partial W_\nu} \cdot \psi_\nu(t, V_1, V_2, \ldots, V_\sigma), \quad (114)$$

и поскольку

$$W_\nu'' = \frac{\partial\psi_\nu}{\partial t} + \sum_{\varepsilon=1}^{\sigma} \frac{\partial\psi_\nu}{\partial V_\varepsilon} \cdot \varphi_\varepsilon(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_b), \tag{115}$$

получим

$$x_i'' = \Phi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_b; V_1, V_2, \ldots, V_\sigma; W_1, W_2, \ldots, W_\omega), \tag{116}$$

т. е. ускорения материальных точек живого организма не зависят от волевых скоростей.

Выражения вида

$$x_i = f_i(t; W_1, W_2, \ldots, W_\omega), \tag{117}$$
$$x_i' = \theta_i(t; W_1, W_2, \ldots, W_\omega; V_1, V_2, \ldots, V_\sigma)$$

являются интегралами уравнений движения живого организма

$$x_i'' = \Omega_i(t; a_1, a_2, \ldots, a_W; x_1, x_2, \ldots x_{3n}; x_1', x_2', \ldots, x_{3n}'),$$

$$\sum_{j=1}^{h_s} H_{sj}a_{sj}' = 0; \quad \sum_{j=1}^{h_s} a_{sj}' \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial A_{si}}{\partial a_{sj}} x_i' = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 3n; \; s = 1, 2, \ldots, q; \; w = b + 2q). \tag{118}$$

В состав этих выражений входят условные интегралы, простые и двойные, представляющие некоторые квадратуры относительно всей совокупности независимых переменных. Если в этих квадратурах допустить наличие и зависимых переменных, то интегрирование уравнений движения (118) можно произвести непосредственно. Действительно, для каждой волевой связи первого порядка два волевых параметра являются зависимыми, а остальные h_s—2—независимыми. Пусть зависимыми параметрами будут первые два по порядку нумерации для каждой связи. Для определения волевым параметрам последние две группы равенств (118) дают для каждой связи два уравнения первой степени с двумя неизвестными

$$H_{s1}a_{s1}' + H_{s2}a_{s2}' + \sum_{j=3}^{h_s} H_{sj}a_{sj}' = 0;$$

$$a'_{s1}\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial A_{si}}{\partial a_{s1}}x'_i+a'_{s2}\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial A_{si}}{\partial a_{s2}}x'_i+\sum_{j=3}^{h_s}a'_{sj}\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial A_{si}}{\partial a_{sj}}x'_i=0. \quad (119)$$

Откуда получим

$$a'_{s\alpha}=\sum_{j=3}^{h_s}\Pi_{s\alpha j}(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sh_s}; x_i; x'_i), \quad (120)$$

$$(\alpha=1,2;\ i=1,2,\ldots,3n),$$

где $\Pi_{s\alpha j}$ — символы некоторых определенных функций.

Аналогично получим

$$a'_l=\sum_{j=1}^{h_s}\Pi_{lj}(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sh_s}; x_k; x'_k)\,a'_{sj}, \quad (121)$$

$$(l=b+1,\ b+2,\ldots,w;\ k=1,2,\ldots,3n).$$

Уравнениям движения живого организма (118) теперь можно придать вид

$$\begin{gathered} x''_i=\Omega_i(t; a_1, a_2, \ldots, a_w; x_k; x'_k), \\ a'_l=\sum_{j=3}^{h_s}\Pi_{lj}(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sh_s}; x_k; x'_k)\,a'_{sj}, \\ (l=b+1,\ b+2,\ldots,w;\ k=1,2,\ldots,3n). \end{gathered} \quad (122)$$

В результате непосредственного интегрирования этих дифференциальных уравнений с учетом начальных условий движения живого организма получим

$$\begin{gathered} a_l=a_{l_0}+\sum_{j=3}^{h_s}\int_{a_{sj_0}}^{a_{sj}}\Pi_{lj}\,da_{sj}, \\ x'_i=x'_{i_0}+\int_{t_0}^{\theta}\Omega_i\,d\tau, \\ x_i=x_{i0}+x'_{i0}(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}d\theta\int_{t_0}^{\theta}\Omega_i\,d\tau, \\ (l=b+1,\ b+2,\ldots,w;\ k=1,2,\ldots,3n), \end{gathered} \quad (123)$$

причем фигурирующие здесь интегралы являются условными и представляют собой некоторые квадратуры, в состав которых входят и зависимые переменные. Значения этих переменных определяются параллельно нахождению последовательных значений указанных квадратур. Но так как и интегралы вида (117), зависящие только от независимых переменных, неизбежно приводят к вычислению квадратур, то приведенный здесь способ Я. И. Грдины безусловно является целесообразным. Заметим, что этот способ можно применять к интегрированию системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах со многими независимыми переменными в тех случаях, когда эта система не приводится к полным дифференциалам при наличии известных начальных условий. Решения получатся в условных интегралах соответствующих порядков и всегда сведутся к квадратурам. Эти интегралы будут зависеть не только от окончательных значений независимых переменных, но и от всех промежуточных их значений. Поэтому они являются в известном смысле неопределенными выражениями.

Зная координаты и скорости материальных точек живого организма, а также волевые параметры в соответствии с формулами (123), получим ускорения материальных точек и волевые скорости на основании соотношений (122), а ускорения высших порядков найдем путем последовательного дифференцирования по времени этих соотношений.

Представляет интерес точка зрения Я. И. Грдины на характер особых решений динамических уравнений живого организма. Положим, что какой-либо вопрос приводит к нескольким решениям. Если при этом приходится иметь дело с конечными уравнениями, то постановка вопроса довольно проста: указанные уравнения могут иметь несколько решений, а потому и приходим к вышеуказанному случаю. Иначе обстоит дело, когда вопрос сводится к дифференциальным уравнениям. Если здесь при отыскании интегралов данных дифференциальных уравнений получаются вспомогательные уравнения, имеющие несколько решений, то это еще не означает, что и поставленный вопрос будет иметь несколько решений: просто эти несколько решений приведут в дальнейшем к достаточной общности общих интегралов данных дифференциальных уравнений.

Подобный случай имеет место при решении вопроса о движении живого организма. Здесь ввиду необходимости иметь выбор по крайней мере между несколькими возможными движениями априори ожидаем несколько решений, а между тем дифференциальные уравнения движения ведут только к одной совокупности этих интегралов, постоянные интегрирования которых вполне определяются по начальным условиям движения. Поэтому, пишет Я. И. Грдина, если отказаться от принятого выше метода построения динамики живых организмов, основанного на варьировании волевых связей, можно принять предположение о том, что уравнения движения живого организма помимо общих интегралов имеют также особые интегралы и что живой организм может избрать по собственному желанию или движение, соответствующее общим интегралам, или же движение, соответствующее особым решениям его дифференциальных уравнений движения.

По существу эта идея вообще была высказана впервые еще в XIX в. Ж. Буссинеском и Г. Дарбу и Я. И. Грдина фактически ее исследует применительно к динамике живых организмов. Данная концепция имеет свои достоинства и недостатки. Действительно, какое бы движение ни предпринял живой организм,— соответствующее ли общим интегралам или особым решениям,— независимо от этого и общие интегралы, и особые решения должны удовлетворять одним и тем же дифференциальным уравнениям движения. А так как эти уравнения содержат в себе все свойства механического движения любых материальных систем, то все уравнения и теоремы динамики живых организмов ничем не будут отличаться от соответствующих уравнений и теорем динамики обыкновенных материальных систем. Поэтому, кроме формулировки гипотезы об особых решениях и соответствующих им движениях, нет надобности излагать динамику живых организмов особо.

В этом Я. И. Грдина усматривает достоинство гипотезы об особых решениях. Однако возникает вопрос, какая причина может заставить живой организм выбрать движение, соответствующее общим интегралам, или движение, соответствующее особым решениям. Можно предположить, что такой причиной являются непосредственно волевые импульсы живого организма. Но это совершенно непонятно и невероятно, ибо движение живого организма может изменяться только под действием двух причин: во-первых, вследствие воздействия на него новых внешних тел, обусловливающих появление новых внешних связей; во-вторых, вследствие воздействия на него или на его внутренние связи волевых импульсов. Заметим, что сущность указанного влияния и изменения волевых связей в настоящее время нам совершенно неизвестна, ибо неизвестна сущность всех связей материальных тел. Возможность же непосредственного воздействия волевых импульсов на движение живого организма без соответствующего изменения его связей совершенно не может быть допущена. Если же признать возможность изменения и варьирования связей, то делается совершенно излишней гипотеза об особых решениях уравнений движения и соответствующих им движениях живого организма. Кроме того, как показывает Я. И. Грдина, гипотеза о существовании особых решений динамических уравнений движения живых организмов не может быть принята в связи с тем, что она не находится в противоречии с интегральными принципами механики, которые, как известно, для живых организмов неприменимы.

6. Основные теоремы динамики

Я. И. Грдина исследует характер основных теорем динамики живых организмов («Динамика живых организмов»).

Как известно, динамические уравнения движения живого организма можно представить в форме уравнений Лагранжа первого рода:

$$m_i x_i'' = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_{si} + X_i; \quad m_i y_i'' = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s B_{si} + Y_i; \quad m_i z_i'' = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s C_{si} + Z_i;$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{124}$$

Сложив почленно уравнения, относящиеся к каждой из трех групп уравнений (124), получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i'' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_{si} + \sum_{i=1}^{p} X_i, \ldots, \ldots \qquad (125)$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_{si} + \sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots, \ldots \qquad (126)$$

Уравнения (126) выражают теорему об изменении количества движения живого организма.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m x_c; \ \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_c; \ \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = m z_c, \qquad (127)$$

уравнениям (125) можно придать вид

$$m x_c'' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_{si} + \sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots, \ldots \qquad (128)$$

Уравнения (128) выражают теорему о движении центра масс живого организма.

Умножим почленно третье из уравнений (124) на y_i, второе — на z_i и составим разность полученных выражений, а затем сложим составленные таким образом равенства, относящиеся к первой группе уравнений (124). Аналогичные операции произведем соответственно с первым и вторым, а также со вторым и третьим уравнениями (124). Получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i (z_i' y_i - y_i' z_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} \lambda_s (C_{si} y_i - B_{si} z_i) + \sum_{i=1}^{n} (Z_i y_i - Y_i z_i), \ldots, \ldots \qquad (129)$$

Уравнения (129) выражают теорему об изменении кинетического момента живого организма.

Умножим все уравнения (124) почленно на соответствующие равенства

$$x_i' dt = dx_i; \ y_i' dz = dy_i; \ z_i' dt = dz_i \qquad (130)$$

и полученные соотношения почленно сложим. Тогда, принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'x_i'' + y_i'y_i'' + z_i'z_i'')\,dt = d\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}{2} = dT, \tag{131}$$

получим

$$dT = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} \lambda_s(A_{si}dx_i + B_{si}dy_i + C_{si}dz) + \sum_{i=1}^{n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i). \tag{132}$$

Уравнение (132) выражает теорему об изменении кинетической энергии живого организма.

Если живой организм не имеет внешних связей, т. е. представляет собой свободную материальную систему, то в уравнениях (126), (128), (129), (132) исчезают члены, содержащие множители связей. Если живой организм является свободной изолированной материальной системой, а также в случае уравновешивающихся внешних сил получим соответствующие законы сохранения:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = \text{const}, \ldots, \ldots \tag{133}$$

$$x_c' = \text{const}, \ldots, \ldots \tag{134}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(z_i'y_i - y_i'z_i) = \text{const}, \ldots, \ldots \tag{135}$$

$$T = \text{const}. \tag{136}$$

Таким образом, приходим к выводу, что для живого организма справедливы все основные теоремы динамики, известные для движения обыкновенной материальной системы, а также и соответствующие законы сохранения.

Как известно, действующие силы являются вообще функциями времени, координат и скоростей материальных точек живого организма. На основании соотношений (117) заключаем, что

$$X_i = X_i(t;\, V_\varepsilon;\, W_\nu);\ R_{six} = R_{six}(t;\, V_\varepsilon;\, W_\nu;\, a_1, a_2, \ldots, a_b). \tag{137}$$

Следовательно, живой организм распоряжается в известной мере по своему свободному выбору как внешними активными силами, так и реакциями внешних и внутренних связей, однако для изменения последних требуется больший или меньший конечный промежуток времени. Формулы (137) показывают также, что положение и скорости материальных точек живого организма зависят в каждый данный момент времени не от характерных для этого момента волевых параметров, а только от всей совокупности предшествовавших значений независимых волевых параметров, начиная с некоторого начального момента времени, и от положения и состояния живого организма в этот начальный момент.

Таким образом, имеем полную аналогию механического движения живого организма с необратимыми физическими процессами. Если бы живой организм и находился в таких физических условиях, при которых были возможны обратимые процессы, то при воздействии волевых импульсов, т. е. при активных движениях происходящие с живым организмом процессы оказались бы необратимыми. Так как жизнь организма, заключает Я. И. Грдина, постоянно сопровождается проявлением тех или других волевых импульсов, определяющихся его свободной волей, то явления жизни представляют существенно необратимые процессы. «Не может растение обратиться в семя,— пишет Я. И. Грдина,— а старик — в ребенка».

7. Аксиоматика динамики живых организмов. Перспективы дальнейшего развития исследований по динамике живых организмов

Изложение в монографиях Я. И. Грдины динамики живых организмов основано на принципе свободы воли и следующих трех положениях.

1. Основная гипотеза относительно изменения под воздействием волевых импульсов живого существа, его внутренних связей, должно сопровождаться изменением некоторых параметров указанных функций. Эта гипотеза вводит во все изложения именно те элементы, которыми в механическом отношении и характеризуется

отличие живых организмов от обыкновенных материальных систем.

2. Вспомогательный закон эмпирического характера о том, что проявление живым организмом волевых импульсов не сопровождается в нем никакими ударами. Этот закон позволяет расчленить каждое из уравнений волевых связей на два уравнения, первое из которых характеризует различие между данамикой живых организмов и динамикой обыкновенных материальных систем, а второе — сходство между ними.

3. Основное положение относительно суммарной работы всех реакций связей живого организма на любом возможном перемещении его материальных точек: эта работа принимается равной нулю (принцип идеальности связей).

Я. И. Грдина подчеркивает, что он рассматривает только механические движения живого организма, которыми обязательно сопровождается его сложная деятельность, и совершенно оставляет в стороне физиологическую и техническую стороны вопроса. Так, например, к задаче физиологии нужно отнести разъяснение порядка и способов передачи изменения волевых параметров мозговых центров, происходящего под действием волевых импульсов живого организма, к волевым связям двигательных органов (мускулов) и пр. Он не затрагивает и вопроса о роли некоторых бессознательных процессов, например кровообращения, пищеварения и пр., что должно быть отнесено к задачам физиологии и психологии.

Следует далее заметить, что даже для простейших живых организмов нам неизвестен характер волевых связей и поэтому, как указывает сам Грдина, нельзя показать на каком-либо приборе применение общих уравнений движения живых организмов. Примеры связей первого и второго порядков с переменными параметрами, которые приводит Я. И. Грдина в своих работах как иллюстрации к теории, можно рассматривать лишь как далекие от действительности и предельно элементарные модели движения обыкновенных материальных систем. Это полностью осознавал и сам Грдина 50 лет тому назад. Однако в наши дни зародилась новая наука — биокибернетика, которая открывает неограниченные возможности для использования аналитической динамики живых организмов, построенной Я. И. Грдиной. Для созданных гением человека кибернетических устройств, которые имитируют те или другие процессы, происходящие в живом организме, волевые связи и их волевые параметры известны. Так, например, в 1960 г. на I Международном конгрессе по автоматическому управлению А. И. Кухтенко[1] выступил с докладом о динамике кибернетических устройств, которые имитируют живые организмы. В этом докладе он установил уравнения Аппеля — Грдины для кибернетической черепахи и искусственного сердца и сделал ряд важных выводов относительно дальнейших возможностей в данном направлении развития механики. Таким образом, исследования Я. И. Грдины в наше время приобретают практическое значение и заманчивую перспективу своего дальнейшего развития.

---

[1] А. И. Кухтенко. О динамике устройств, имитирующих живые организмы. I Международный конгресс по автоматическому управлению. М., 1960.

Заключение

Подведем итоги нашей работы, в которой изложены основные контуры научно-педагогической деятельности Я. И. Грдины, произведена ретроспективная оценка его исследований, относящихся к наиболее актуальным направлениям современной механики — механике живых организмов, теории регуляторов, аксиоматике классической и релятивистской механики, исследований, имеющих основополагающее значение для развития соответствующих проблем биокибернетики, теории автоматического управления и основных понятий и принципов механики.

В основу построения механики живых организмов Я. И. Грдина положил идею, согласно которой при проявлении живым организмом волевого импульса изменяется характер некоторых его внутренних кинематических связей. Изменение характера волевых связей сопровождается варьированием вида тех функций, которые входят в управления этих связей. Варьирование же указанных функций можно рассматривать как происходящее от изменения величин некоторых параметров этих функций — волевых параметров. Вместе с возникающим из опыта положением об отсутствии ударов в частях живого организма при проявлении им волевых импульсов указанная выше гипотеза позволяет выяснить характер волевых связей и установить динамические уравнения движения живого организма. Оказывается, что все варианты дифференциальных уравнений движения живых организмов (уравнения Лагранжа I и II рода, Гиббса — Аппеля, Рауса — Фосса, Гамильтона, Якоби) имеют тот же вид, что и уравнения движения обычных материальных систем. Для живых организмов получаются еще дополнительные дифференциальные уравнения кинематических волевых связей, которые могут быть и выше второго порядка. Таким образом, полученная Я. И. Грдиной система динамических уравнений может иметь порядок значительно более высокий, чем второй, в зависимости от рода живого организма. Основные теоремы движения (теорема о движении центра масс, теоремы об изменении количества движения, кинетического момента, кинетической энергии) и соответствующие законы сохранения для живых организмов ничем не отличаются от аналогичных положений для обыкновенных материальных систем. Для живых организмов остаются в силе дифференциальные вариационные принципы механики (принципы Даламбера — Лагранжа и Гаусса), между тем как интегральные вариационные принципы механики (принципы Эйлера — Лагранжа, Гамильтона — Остроградского) для живых организмов места не имеют. В открытии сервосвязей, представляющих одно из основных понятий современной кибернетики, Я. И. Грдина является предшественником А. Бегена и П. Аппеля.

Важное значение для развития теории автоматического регулирования и управления имеют многочисленные исследования Я. И. Грдины в области теории движения регуляторов прямого действия и их устойчивости, некоторых типов регуляторов с двухгрузовым маятником, устойчивости машин, управляемых центробежными регуляторами, динамической устойчивости центробежных регуляторов при наличии процесса непрерывного и прерывного регулирования. В этих работах, примыкающих по своему направлению и методу исследования к основополагающим работам И. А. Вышнеградского, содержится ряд ценных идей, обогащающих теорию устойчивости движения регуляторов различных типов при непрерывном и прерывном регулировании.

Весьма существенным для характеристики научного наследия Я. И. Грдины является цикл исследований, посвященных проблеме обоснования теоретической механики в аспекте картезианской концепции. В основу построения системы классической механики Я. И. Грдина, по-видимому, положил концепцию сохранения материи и движения М. В. Ломоносова [1], выраженную в не-

[1] Следует заметить, что Я. И. Грдина нигде не упоминает имени М. В. Ломоносова.

явном виде. В частности, зависимость меры движения от скорости в этом законе представлена в нераскрытой форме, названной функцией движения. Вид этой функции подлежит дальнейшему определению в процессе конкретизациии содержания конструируемой системы механики, в процессе раскрытия закона Ломоносова. При этом также устанавливается вид относительного движения инерциальных систем координат, т. е. принцип относительности классической механики Галилея — Ньютона и первый закон Ньютона. Пользуясь законом Ломоносова, Грдина обосновывает определение понятия массы материального тела и получает, в частности, закон сохранения количества движения свободной изолированной материальной системы. Понятие силы Я. И. Грдина вводит как вторичное, производное понятие, зависящее от массы тела. Для случая одновременного действия на материальную точку нескольких тел автор исследует закон суперпозиции компонентов кинетической энергии этих тел, передаваемых данной точке, и в соответствии с этим законом простым и естественным способом вводит понятие об идеальных связях и получает принцип Даламбера — Лагранжа. Отсюда непосредственно следуют уравнения Лагранжа II рода, на основании которых получается ряд теорем механики.

Как и многие передовые отечественные ученые дореволюционного периода, Я. И. Грдина был стихийным материалистом. Приходится сожалеть, что он не понял теорию относительности и был ее противником.

Библиография

Труды Я. И. Грдины

1. Движение регуляторов прямого действия и его устойчивость.— «Вестник об-ва технологов», 1898.
2. О некоторых типах регуляторов с двухгрузовым маятником.— «Вестник об-ва технологов», 1899, № 4—10.
3. Устойчивость движения машины, управляемой центробежным регулятором.— «Вестник об-ва технологов», 1900.
4. Паровые котлы (курс прикладной механики). Екатеринослав, изд. Екатеринославского высшего горного училища (ЕВГУ), 1902.
5. Газовые двигатели (курс прикладной механики). Екатеринослав, ЕВГУ, 1903.
6. Детали машин (курс прикладной механики). Екатеринослав, ЕВГУ, 1905.
7. Новое изложение основных принципов теоретической механики. Екатеринослав, ЕВГУ, 1905.
8. Функция движения. Екатеринослав, ЕВГУ, 1906.
9. Меры движения. Екатеринослав, ЕВГУ, 1907. См. также «Известия ЕВГУ», 1907, вып. 2.
10. К теории случайных ошибок. Екатеринослав, ЕВГУ, 1908. См. также «Известия ЕВГУ», 1908, вып. 2.
11. Ряды вероятных и средних ошибок. Екатеринослав, ЕВГУ, 1909. См. также «Известия ЕВГУ», 1909, вып. 1.
12. Меры отклонения в механике. Екатеринослав, ЕВГУ, 1910. См. также «Известия ЕВГУ», 1910, вып. 1.
13. Динамика живых организмов, Екатеринослав, ЕВГУ, 1911. См. также «Известия ЕВГУ», 1911, вып. 1.
14. К динамике живых организмов. Екатеринослав, изд. Екатеринославского горного института (ЕГИ), 1911. См. также «Известия ЕГИ», 1912, вып. 1.
15. К вопросу о массе электрона. Екатеринослав, ЕГИ, 1912. См. также «Известия ЕГИ», 1912, вып. 2.
16. Примечания к динамике живых организмов. Екатеринослав, ЕГИ, 1912. См. также «Известия ЕГИ», 1912, вып. 2.
17. Дополнение к динамике живых организмов. Екатеринослав, ЕГИ, 1912. См. также «Известия ЕГИ», 1913, вып. 2.
18. К вопросу о принципе относительности. Екатеринослав, ЕГИ, 1914. См. также «Известия ЕГИ», 1914, вып. 2.
19. Физический или органический принцип относительности. Екатеринослав, ЕГИ, 1915, см. также «Известия ЕГИ», 1915, вып. 2.
20. Заметки по динамике живых организмов. Екатеринослав, ЕГИ, 1916. См. также «Известия ЕГИ», 1916, вып. 1.

21. Заметка по поводу статьи Делярива «Гипотеза о движении эфира в окрестностях Земли». Екатеринослав, ЕГИ, 1916. См. также «Известия ЕГИ», 1916, вып. 1.
22. Новое об опыте Майкельсона и принципе оцносительности Эйнштейна. Екатеринослав, ЕГИ, 1924. См. также «Известия ЕГИ», т. XIV, 1924.
23. Основные законы движения. Екатеринослав, ЕГИ, 1924. См. также «Известия ЕГИ», т. XIV, 1924.
24. Заметки по принципу относительности. Днепропетровск, ДГИ, 1925—1927. См. также «Известия ДГИ», т. XV, 1925—1927.
25. К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов. Днепропетровск, изд-во Днепропетровского горного института (ДГИ), 1925—1927. См. также «Известия ДГИ», т. XV, 1925—1927.
26. К вопросу об исголковании опыта Майкельсона. Днепропетровск, ДГИ, 1925—1927. См. также «Известия ДГИ», т. XV, 1925—1927.
27. К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов при прерывном регулировании.— «Вестник инженеров и техников», 1937, № 1—2.

Работы о Я. И. Грдине

Зотин А. И., Зотина Р. С. Работы Ярослава Ивановича Грдины по теоретической механике живых организмов.— В сб. «Биофизика», т. 1, вып. 5. М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 480—492.

Путята Т. В., Фрадлин Б. Н., Добровольский В. А. Математика в Екатеринославском горном институте.— В кн: «История отечественной математики», т. 2. Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 497—500.

Фрадлін Б. Н. Про розвиток досліджень з динаміки неголономних систем на Україні.— «Прикладна механіка», т. VII, вып. 5, 1961, стр. 554—560.

Фрадлин Б. Н. К истории динамики неголономных систем.— «Вопросы истории естествознания и техники», вып. 11, 1961, стр. 61—69.

Фрадлін Б. Н. Динаміка живых організмів в працях Я. І. Грдіни.— «Прикладна механіка», т. VIII, вып. 6, 1962, стр. 581—591.

Фрадлин Б. Н. Неголономная механика и ее приложения в естествознании и технике. Автореферат докторской диссертации. Киев, Изд-во АН УССР, 1965.

Оглавление

Татьяна Васильевна Путята, Борис Наумович Фрадлин

Ярослав Иванович Грдина

Утверждено к печати редколлегией научно-биографической серии Академии наук СССР

Редакторы *В. И. Алексеев* и *Л. В. Лукошевич*
Технический редактор *И. А. Макогонова.*

Сдано в набор 3/I 1970 г. Подписано к печати 14/VII 1970 г. Формат 84×108 1/32.
Бумага. № 1. Усл. печ. л. 5,88+1 вкл. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 2800 экз.
Т-09497. Тип. зак. 4013.

Цена 35 коп.

Издательство «Наука». Москва К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». Москва Г-99, Шубинский пер., 10

Ярослав Иванович
ГРДИНА

35 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
·НАУКА·