РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

СЕРИЯ "НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА"

Основана в 1959 г.

Л. С. Полак

Уильям
ГАМИЛЬТОН

1805-1865

Ответственный редактор
А.Т. ГРИГОРЬЯН

МОСКВА
"НАУКА"
1993

ББК 22 г
П 49
УДК51 + 53(091) Гамильтон У.Р.

Рецензенты *В.П. Визгин, Г.Э. Норман*

Полак Л.С.

П49 Уильям Гамильтон: 1805–1865. – М.: Наука, 1993. – 270 с.: ил. – (Научно-биографическая серия).
ISBN 5-02-000216-X

Книга посвящена научной биографии замечательного ирландского ученого Уильяма Гамильтона, автора фундаментальных исследований и открытий в механике, теоретической физике (принцип Гамильтона, канонические уравнения, гамильтониан, уравнение Гамильтона-Якоби, предсказание внутренней и внешней конической рефракции света, формулировка концепции групповой скорости) и математике (исчисление кватернионов – начала векторного анализа). Наряду с анализом научных открытий Гамильтона рассматривается их влияние на научные открытия и развитие идей и концепций естественных наук.

Книга предназначена для широкого круга читателей, интересующихся историей науки.

П $\frac{1401020000\text{-}162}{054(02)\text{-}93}$ 39-91 НПЛ **ББК 22г**

Книга выпущена при финансовой помощи
Ирландской академии наук

The book treats scientific biography of remarkable Irish Scientist Willian Rowan Hamilton author of fundamental investigations and discoveries in mechanics, theoretical physics (Hamilton's principle, canonic equations, Hamiltonian, equation of Hamilton-Jacobi, prediction of inner and outer conical refraction of light, formulation concept of group velocity) and mathematics (Calcule of Quaternions – the origin of vector analyse). Together with the analyse of Hamilton scientific discoveries their influence on scientific discoveries their influence on evolution of natural science ideas and concepts is considered.

The book is intended for broad sections of readers who have interested in history of science.

ISBN 5-02-000216-X

Предисловие

Гамильтониан, вариационный принцип Гамильтона, канонические уравнения Гамильтона, уравнения Гамильтона–Якоби, оптико-механическая аналогия Гамильтона сделали имя Гамильтона повсеместно знакомым специалистам в физико-математических науках. Мы не упомянули здесь и его менее известные широким научным кругам (но не менее важные) работы по предсказанию открытия внешней и внутренней конической рефракции и созданию исчисления кватернионов (ближайшего прародителя векторного анализа).

Однако биография Гамильтона малоизвестна, а пути его творчества и роль его открытий в развитии математики и физики мало освещены в историко-научной литературе. Предлагаемая вниманию читателя книга имеет своей задачей в какой-то мере восполнить этот пробел.

Биографии замечательных деятелей науки и техники по своему характеру представляют широкий спектр: от сухого хронологического построения до романизированной биографии. Эта книга лежит где-то посередине. Поэтому, как нам кажется, книга получилась скучноватой. Впрочем, об этом судить читателям.

Творчество Гамильтона охватывает чистую (исчисление кватернионов) и прикладную (математическая физика) математику, поэтому, естественно, потребовалась помощь второго автора; вклад каждого из них: главы 1–3 написаны Л.С. Полаком, глава 4 – Н.В. Александровой.

Л. Полак

Глава 1

"Я жить хочу, чтоб мыслить..."

1. Ирландия и Англия

История Ирландии, "изумрудного острова", под владычеством Англии представляет собой сплошную цепь страданий ирландцев и непрерывных, более или менее крупных восстаний, подавляющихся с традиционной жестокостью англичанами [5]. Большую часть населения Ирландии составляли земледельцы, зажатые в налоговые, земельные, юридические тиски и влачившие полуголодное существование.

Бедность, высокие налоги, быстрый рост населения, неудовлетворительная социальная структура привели к резко выраженной зависимости питания населения от единственного продукта – картофеля. Неурожай картофеля означал голод. Так было, например, в 1845/46 и 1846/47 гг., когда неурожай картофеля совпал с неурожаем пшеницы и ржи. Это привело к гибели небольших фермерских хозяйств. Правительство не спешило что-либо предпринимать. Потери же от голода были трагически велики: число умерших за эти годы от голода или лихорадки составляло от 500 тысяч до 1 миллиона человек (из общего количества около семи миллионов). Этот Великий Голод привел к чрезвычайно важным социальным и политическим последствиям, в частности к массовой эмиграции в Северную Америку и обострению проблемы состояния и развития сельского хозяйства Ирландии. Однако в ближайшие годы каких-либо мер, чтобы привести ирландское сельское хозяйство в более жизнеспособное состояние, предпринято не было [140].

Эпилогом кризиса 1846–1847 гг. было массовое изгнание ирландских арендаторов из жилищ английскими помещиками. Паулет Скрупп, крупный английский землевладелец, говорит по этому поводу: "Каждый раз, когда помещик очищает свое поместье, изгоняя из жилищ сотни бедных фермеров, не имеющих других средств существования, разве он их не убивает, по крайней мере многих из них, так же верно, как если бы он расстрелял их сразу" [5].

Освященные законом и поддерживаемые полицией, эти акции осуществляли так называемые кроубары (в Ирландии их было в это время 12 тыс.). Вооруженные ломами, они занимались тем, что выселяли арендаторов и разрушали при этом их жилища. С 1841 по 1851 г. ими было разрушено 209 тыс. домов. Динамика ограбления населения хорошо видна из эволюции земельных отношений. Всего удобной земли в Ирландии было 7,5 млн акров. В 1641 г. в руках протестантов находилось 2,0 млн акров, у католиков (ирландцев) и церкви 5,5 млн акров. В 1672 г. протестантам принадлежало уже 5,25 млн акров, а католикам 2,25 млн акров.

Отметим, что даже в 1800 г. в Ирландии католиков (т.е. ирландцев) было 3 млн, англо-ирландцев (протестантов) 450 тыс., пресвитериан (шотландо-ирландцев) 900 тыс. человек.

На вершине социальной пирамиды находились англо-ирландцы: лендлорды, чиновники, епископы, служители церкви, свиты аристократов и небольшое число зажиточных фермеров. Шотландо-ирландцы были дельцами, адвокатами, фермерами главным образом в северо-восточной части Ирландии. За немногими исключениями, к ирландским католикам принадлежали крестьяне, мелкие и средние, а также городские и сельские безземельные рабочие [146]. Страна постоянно находилась в состоянии глухого брожения. Социальная борьба не покоренной окончательно страны принимала характер борьбы религиозной. Знакомая картина и в более ранние, и в более поздние времена. Свирепые формы этой борьбы со стороны Англии обострялись географическим положением Ирландии: близость ее к границам Англии была источником постоянной потенциальной угрозы. Ни одно английское правительство не допускало даже мысли о существовании независимой Ирландии. За елизаветинскими карательными экспедициями последовал ужасный по зверству поход Кромвеля. Затем были приняты законы, по которым за протестантским населением было признано право охоты на католических священников и беглых папистов. Голова их оценивалась наравне с головой волка. Папист, который мог представить доказательство, что им убиты два его единоверца, освобождался от преследований. "Смягчение" нравов привело, однако, к тому, что в 1718 г. было признано достаточным убить только одного паписта. Это законодательство было отменено лишь после 1776 г. Восстание 1798 г., вспыхнувшее под влиянием Великой французской революции, было подавлено жесточайшим образом: вешали каждого десятого в занятых поселениях, расстреливали на месте захваченных с оружием в руках.

Последствием подавления этого восстания было уничтожение самостоятельного ирландского парламента и создание пресловутой Унии, объединившей ирландский парламент с английским. Население Ирландии было против Унии; неофициальное голосование дало: против Унии 700 тыс., за – 5–7 тыс. человек. Правительство прибегло к хорошо известному средству – подкупу. Оно ассигновало на это 1260 тыс. фунтов стерлингов, которые пошли на подкуп депутатов и лордов ирландского парламента. Уния, проведенная таким достаточно своеобразным способом, была равносильна уничтожению ирландского парламента. Обещанная Питтом эмансипация католиков не была осуществлена. За поражением Наполеона последовал период резкой реакции: католический комитет борьбы за эмансипацию католиков, созданный в Ирландии, был распущен, английская палата общин отказала ирландским полкам в Англии в праве осуществлять у себя католическое богослужение и т.п. Однако постепенное ослабление послевоенной "победоносной" реакции привело к некоторым сдвигам: в 1821 г. билль об эмансипации католиков прошел в нижней палате, но провалился в верхней. В 1823 г. была организована католическая ассоциация, во главе которой стал О'Коннель. Тем не менее в первую половину XIX в. много лет Ирландия была на исключительном положении и управлялась по законам военного времени. Однако Уния уничтожила таможенные границы между Ирландией и Англией, что способствовало развитию торговли. Верхушка населения выиграла от этого, но основная его масса оставалась по-прежнему в состоянии, недалеком от хронического голода. Численность эмигрантов (в основном в США и Канаду) была огромна.

В эту эпоху интеллигенция в Ирландии шла двумя путями. Известные ее слои давали вождей революционно-освободительного движения (О' Коннель, О' Бриен и др.). Другие находили свое место в иерархической системе английского владычества и становились одним из реакционных элементов в стране, измученной недоеданием, несвободой и тягостным многолетним молчанием. Мало что изменилось в Ирландии с конца XVII– начала XVIII в. – времени великого ирландца Дж. Свифта.

Известная часть интеллигенции уходила в мир абстракций, в мистику, погружалась в безразличие к боли народа, к политической жизни. Так было и в научной среде. Наука Ирландии в значительной мере светила отраженным светом и находилась в зависимости от английской научной мысли. Только в 1785 г. было основано Королевское ирландское общество в Дублине, ставшее центром, вокруг которого группировались ирландские ученые [132].

Гамильтон был протестантом. В Ирландии тех времен это, по существу, означало определенную партийную принадлежность. Руководящие посты в научных организациях были, как правило, заняты служителями протестантской церкви. Атмосферу церковности викторианская эпоха в Англии дополнила своеобразным ханжеством. Олицетворение этой эпохи — это мистер Домби и многие другие герои Ч. Диккенса и У. Теккерея. ("У Чарльза Диккенса спросите, что было в Англии тогда..." — О. Мандельштам.) Однако Гамильтон был "scoto-irish", что не могло не вызвать в нем известной двойственности. В 1835 г. он был возведен в дворянское достоинство. День, когда шпага лорда-лейтенанта Ирландии коснулась плеча коленопреклоненного Гамильтона и он поднялся уже не просто Гамильтоном, а сэром Гамильтоном, он отмечает как самый радостный и торжественный в своей жизни. Может быть, впрочем, это просто расхожие слова — ведь не мог же Гамильтон не понимать, что этот акт еще более отдалит от него его ирландских коллег, у которых "посвящение в рыцари" не могло вызвать ничего, кроме хмурой усмешки. И все же его нельзя отнести к сыновьям "Джона Буля". Во время пребывания в Англии в 1838 г., на очередном собрании Ассоциации содействия развитию науки, Гамильтон пишет следующие стихи.

Прости мне, Англия, что, пребывая на Имперском Острове, владычествующем над сушей и морем, мой дух часто жаждет унестись прочь.

Ни твоя красота, ни величие не приковывают моей очарованной фантазии, которая часто живописует мне другие ландшафты и картины и множество воспоминаний, давно утерянных для зрения в туманной дали.

Я люблю твою славу, Англия! Нередко набегают внезапные слезы искреннего восхищения, когда я вижу твой лучезарный облик и когда мировая арена являет следы твоего благородного прошлого.

Но Ирландия — моя родина; там провел я юношеские годы, там мой дом и там мое сердце.

Двойственность обычно исключает действенность, и Гамильтон живет только научными, поэтическими, эмоциональными и религиозными интересами.

Нам же сегодня гораздо ближе и по духу, и по сопоставимости исторической ситуации (хотя, конечно, и ограниченной сопоставимости) вдохновенный призыв ирландского поэта Т.Мура [38]:

О! Сколь ни отрадны веселья напевы,
И свет очага, и любви торжество,
И звучные арфы, и нежные девы —
Возмездье тирану отрадней всего!

И его же, звучащие как боевая труба, слова:

Уж лучше тюрьма да могила,
Где прах патриотов почил,
Чем почести, слава и сила –
Ценою бессчетных могил!

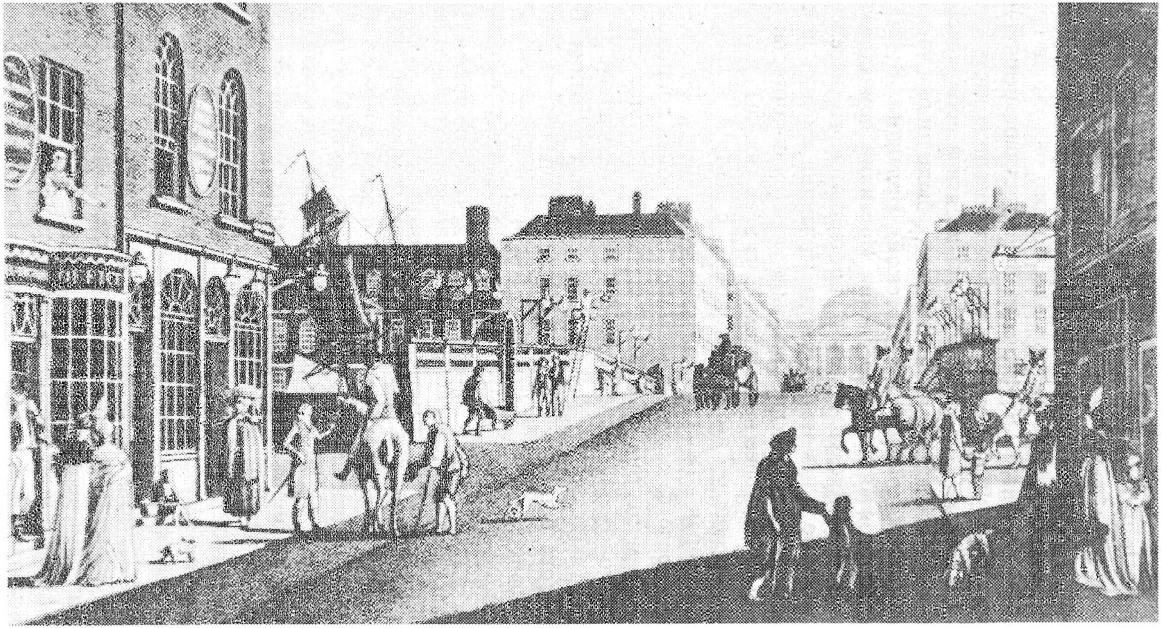
2. "Вундеркинд"

Уильям Роуэн Гамильтон родился в 1805 г., в полночь с 3 на 4 августа, в Дублине. Он был четвертым сыном в семье, где было девять детей. Дед Гамильтона – ирландец, женившийся на шотландке, был аптекарем. Старший сын его, отец Уильяма Роуэна Гамильтона, стал адвокатом и нотариусом. (Правильно Роуан, но в русской литературе часто писали Роуэн.)

Отец Уильяма Роуэна однажды защищал на суде объявленного вне закона ирландского патриота Арчибальда Роуэна и добился отмены приговора. От Роуэна, ставшего крестным отцом Уильяма, мальчик получил свое второе имя. Когда ребенку исполнился год, отец и мать решили отдать его на воспитание дяде Джеймсу Гамильтону, помощнику священника г. Трима в графстве Уэстлит, жившему вместе со своей сестрой Сидни. По-видимому, причиной было ухудшавшееся финансовое положение семьи.

В отличие от отца Гамильтона дядя Джеймс получил ученую степень в Тринити-колледже (Дублин) и был филологом-классиком. Его письма полны классических ссылок и увесистых пассажей цицероновского типа, обычно написанных стремительными каракулями. Дядя Джеймс занимал низшее положение в протестантской церкви Ирландии. Англиканская церковь Ирландии представляла собой государственную церковь, и поэтому должности в ней были основной мерой общественного веса и влияния семьи. Джеймс оставался на этой низкой должности до своей смерти в 1847 г., несмотря на все его усилия и усилия его племянника в более поздние годы.

Уния 1800 г. на самом деле не объединила все ведомства Ирландии и Англии и тем более не объединила народы. Управление Ирландией по-прежнему осталось в руках лорда-лейтенанта и его аппарата. Лорд-лейтенант имел даже нечто вроде двора в Феникс-парке в Дублине, с приемами, балами, обедами, на которых впоследствии Гамильтон иногда присутствовал. Обсерватория в Дансинке, где Гамильтон провел большую часть жизни, была расположена рядом с Феникс-парком. Когда в 1827 г. он стал королевским астрономом Ирландии, он взял к себе двух сыновей лорда-лейтенанта, чтобы обеспечить их образование. Этот факт сам по себе свидетельствует об общественной позиции молодого Гамильтона.



Дублин. Вид с Кэпель-стрит на Эссекс-мост

Гамильтон был членом протестантской общины государственной церкви Ирландии, которая, по существу, управляла этой страной в течение трех столетий. Протестанты были крупными лендлордами, и они контролировали большую часть производств, промышленности и торговли. Только они имели право заседать в парламенте, и их церковь была государственной церковью Ирландии. Дядя Джеймс получал большую часть своих доходов от приходской десятины. Эта десятина собиралась со всех жителей прихода независимо от того, были ли они членами государственной церкви(протестантской) Ирландии. В 1800 г только одна десятая часть населения Ирландии принадлежала к этой церкви. Вокруг Дублина протестантского населения было больше, но в некоторых частях Ирландии имелись приходы, в которых совершенно не было прихожан-протестантов. Десятина была наиболее ненавидимой из всех тяжелых налогов, и в 1830 г. возникла "десятинная война" с центром в графстве Уэстмит, которая лишила приходских священнослужителей привычных средств к существованию. Эта война сопровождалась огромным ростом насилия и аграрной преступности. Все это сделало положение дяди Джеймса крайне стесненным.

В Триме Гамильтон жил среди замечательных развалин. Приходская школа была расположена в замке Тальбота, укрепленном феодальном замке, построенном в 1425 г. лордом Тальботом, бывшим в то время лордом-лейтенантом Ирландии. В XVIII в. Тальбот-замок принадлежал некоторое время Джонатану Свифту.

Замок использовался как жилье и как помещение школы. Мать дяди Джеймса купила его в 1800 г. и жила в нем с 1802 г. Он был расположен на краю Трима, одной стороной круто спадая к реке Бойн. На другом берегу реки находились развалины настоящего средневекового замка, огромные каменные стены, ров, когда-то наполненный водой, высокая сторожевая башня и другие устройства средневековой фортификации. Тут же находились остатки очень высокой башни старинного аббатства, построенного в 1368 г., возвышающиеся над городом. Гамильтон использовал башню как гигантские солнечные часы, разметив деления расположением тени от нее в поле, а также как семафорную систему, которую он изобрел с одним своим школьным другом. Вдоль реки почти непрерывно тянулись развалины старинных зданий, аббатств и т.п. Гамильтон, который был большим любителем прогулок без определенной цели, использовал их как площадки для игр. Он также любил плавать, конечно, когда дядя Джеймс разрешал это.

У Гамильтона было четыре сестры. Старшая сестра Грета (старше Гамильтона на три года) вела домашнее хозяйство, когда Гамильтон поселился в Обсерватории; по своим религиозным взглядам она принадлежала к общине моравских братьев (кальвинистов). Элиза, на два года моложе Гамильтона, была самой близкой ему по возрасту и темпераменту. Гамильтон всегда называл ее poet-sister. Сидни, на пять лет моложе Гамильтона, была наиболее авантюристичной из всех сестер; она работала ассистентом в школе вблизи Белфаста. Позже Сидни эмигрировала вместе с одним из сыновей Гамильтона в Никарагуа, где она переносила климат и лишения значительно лучше, чем он. Затем вернулась в Ирландию и снова эмигрировала в Новую Зеландию, где и умерла в возрасте 78 лет. Наконец, самая младшая из сестер, Аржан, умершая в 1860 г., жила в Дублине незаметной и замкнутой жизнью. В огромной переписке Гамильтона она почти не упоминается. Ни одна из сестер не была замужем, ни одна из них не имела сколько-нибудь близких отношений с родителями.

Гамильтона привезли в Трим, когда ему еще не было трех лет. Дядя Джеймс сразу заметил, что его племянник обладает исключительными способностями. В те времена как в элементарном, так и в университетском обучении преобладала "классика" (древние языки, история и т.п.), которая вместе с интересом к восточным языкам составляла сильную сторону познаний Джеймса. Этому он и начал обучать юного Гамильтона, который проявлял удивительную способность легко все усваивать. Уже вскоре после своего приезда Гамильтон читал Библию по-английски. Дядя Джеймс начал учить его писать. Джеймс был весьма методичным человеком и обучал Гамильтона письму, следуя системе, которую сам разработал. Сначала он выбрал из словарей и книг для обучения письму все односложные слова, в которых встречается буква "а". Когда мальчик одолел их, они перешли к "б" и так далее до конца алфавита. После односложных слов пошли двусложные. С самого начала обучения Гамильтон изучал и неизвестные слова, которых даже большая часть взрослых никогда не слышала и не видела. Только его исключительно раннее развитие спасло его от полной путаницы и неразберихи.

Классические языки были следующим предметом обучения, и по той же методе мальчик изучал еврейский язык. Самая ранняя записная книжка Гамильтона содержит еврейские буквы и письмо, выведенные четкими каракулями его рукой, когда ему было три года. После еврейского он занялся латинским и греческим. Он удивлял ученых посетителей дяди Джеймса своими познаниями (например, он знал Гомера в подлиннике) и не менее тем, что эти поразительные знания и способности сочетались у него с чисто детским поведением.

Джеймс продолжал неотступно следовать своему неумолимому курсу, доводя его почти до абсурда, а Гамильтон боролся против субботнего мытья, заверяя, что с тех пор, как он начал изучать еврейский язык, он соблюдает христианскую и еврейскую субботу. Он любил воспроизводить Троянскую войну с помощью сестер, разработав для них сценарий, детальную систему команд. В восемь лет он любил произносить речи или читать латинские стихи перед сверстниками. Он не очень интересовался характером своей аудитории. Однажды, когда возчик, который обычно был терпим к болтовне маленького Гамильтона, куда-то очень спешил, Гамильтон доехал с ним до местного кузнеца, самого "дикого" человека в округе, который тем не менее с явным восхищением слушал декламацию Гамильтоном какой-то поэмы.

Тетя Сидни писала матери Уильяма Роуэна, когда ему было всего три года, что он "a hopeful blade" – подающий надежды парень. Когда ему было три года с небольшим, он свободно читал по-английски и знал значительную часть тогдашнего курса арифметики. В пять лет он не только хорошо знал географию, Библию, но и мог читать и переводить с латинского, греческого, древнееврейского языков и любил декламировать большие отрывки Драйдена, Мильтона, Гомера. К восьми годам Уильям Роуэн изучил итальянский и французский языки. В это же время он настолько овладел латынью, что мог выражать свои чувства и впечатления в импровизированных латинских речах. Кроме того, он изучает арабский и санскритский языки. Письмо, написанное Уильямом сестре 14 декабря 1815 г., в возрасте десяти с половиной лет, дает хорошее представление о его интересах и характере занятий: «Я читал в течение некоторого времени Лукиана и Теренция, еврейский псалтырь по воскресеньям, а по субботам что-нибудь санскритское, арабское и персидское. В свободные часы я читаю "Одушевленную природу" Гольдсмита и какую-либо новую повесть или стихи, которые мне встретятся. Я очень люблю Вальтера Скотта. Я далеко продвинулся в практике арифметики и проработал с дядей почти половину первой книги Евклида. Я изучаю совместно древнюю и новую географию. Каждое утро на втором уроке я занимаюсь греческим, Новым заветом...» [90, т. 1, с. 46]. Это увлечение языками имело не только, так сказать, спортивный характер. Тут была определенная жизненная цель. Отец его хотел, чтобы он впоследствии поступил на службу в Восточную Индийскую Компанию, а для этого было необходимо знание западных и восточных языков.

К 12 годам Гамильтон стал полиглотом; знания в области гуманитарных наук и в богословии были обширны, его умственное развитие поражало всех. Замечательно, что при такой исключительной одаренности и интенсивных занятиях он не отстает от своих сверстников и в физическом развитии.

В 1815 г. он поступает в школу, где обучается до 1823 г. Во время обучения в школе проявились замечательные математические способности Гамильтона. Он изучает высшую математику и небесную механику. Занимаясь по "Небесной механике" Лапласа, он обнаруживает в одном из томов ошибку, не замеченную никем ранее. Его краткая записка об этом была показана профессору астрономии, королевскому астроному Ирландии Бринкли, который выразил желание познакомиться с Гамильтоном. Это знакомство сыграло большую роль в жизни Гамильтона и усилило его интерес к математике.

Его подлинным призванием, многим казалось, были вычисления. Когда Гамильтону было 13 лет, в Дублин приезжал американский вычислитель (он был старше Гамильтона на один год) Zerah Colburn, который почти мгновенно определял число минут в 1811 годах и которому требовалось всего 20 секунд, чтобы найти два простых множителя числа 4 294 967 297. Гамильтон проиграл ему соревнование. Это он пережил нелегко, так как не привык встречаться со сверстниками, которые бы в чем-либо превосходили его интеллектуально. Тем не менее всю жизнь Гамильтон любил длинные вычисления. Он любил также вспоминать стихи далеких дней и в своих письмах не раз отмечал, что вписывает сонеты, не заглядывая в их первоначальные записи. В отличие от большинства математиков он любил вычислять, проверял свои теории, решая сложные вычислительные задачи, и вообще любил рассчитывать все что угодно, начиная от объема пирамиды Снофру и кончая скоростью вознесения Христа на небо.

Известная английская писательница Мария Эджуорт (1767–1849)[1] (с семьей которой Гамильтон в эти годы стал очень близок) писала в 1824 г. о Гамильтоне, с которым ее познакомили: "Мистер Батлер пришел с молодым Гамильтоном, восемнадцати лет, действительным чудом талантливости, о котором профессор Бринкли говорит, что он может стать вторым Ньютоном".

В 1819 г. он с согласия дяди Джеймса провел два месяца с отцом и сестрами. Отец водил его в гости, на обеды, к своим друзьям и в театр (хотя последнее и считалось тогда спорным с точки зрения приличий). Гамильтон помогал отцу выполнять деловые расчеты и учился стенографии и каллиграфии. Стено-

[1] Авторы романов, педагогических сочинений, рассказов для детей, которые были популярны и в России.

графией он пользовался впоследствии всю жизнь. Вскоре отец умер (мать умерла на два года раньше), оставив на попечение Уильяма трех его сестер.

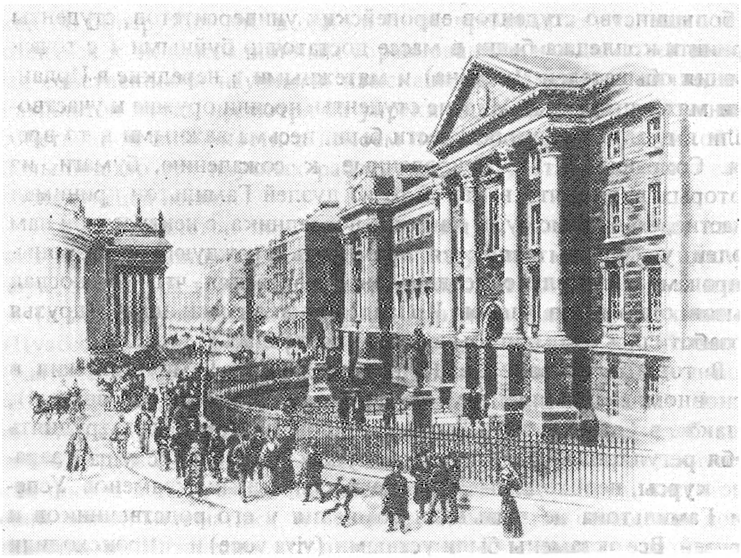
3. В Тринити-колледже

В 1823 г. Гамильтон поступил в Тринити-колледж.

Хартия, утвержденная королевой Елизаветой в 1591 г., гласила, что в Дублине создается единый колледж под названием "The College of the Holy and Undivided Trinity near Dublin founded by Queen Elisabeth". Были предусмотрены ректор, три члена ученого совета и три преподавателя. Колледж мог присуждать степени бакалавра, магистра и доктора всех искусств и факультетов; ректор выбирался членами колледжа, срок пребывания которых в этой должности ограничивался семью годами. В хартии Тринити-колледж был назван "Mother of an University". Отсюда возникли споры вокруг вопроса, является ли по мысли основателей он и Дублинский университет одним и тем же, или рядом с ним (из него) должны вырасти другие колледжи. Колледж со временем разросся.

В этот-то колледж 7 июля 1823 г. держал вступительный экзамен Гамильтон. Он собирался поступать уже годом ранее, но задержался по разным причинам, одной из которых была (как он признался сестре Элизе) боязнь публичного состязания с сильными и умными конкурентами. В этом у него не было никакого опыта. Однако на экзамене он был первым из ста экзаменовавшихся студентов, а во второй день, еще даже не приступив к изучению курса колледжа, он был награжден премией за экзамен по еврейскому языку.

В течение четырех лет пребывания в колледже Гамильтон выигрывал все соревнования на экзаменах. Каждый класс делился по алфавитному списку на три группы (по 30 человек), и соревновались на премию только члены групп между собой. Те студенты, которые имели фамилии, близкие по написанию к фамилии Гамильтона, не имели никаких шансов когда-либо получить премию. Награды, присуждавшиеся на экзаменах, были: valde bene, bene, satis, mediocriter, vix medi. Дело Гамильтона показывает, что он постоянно получал оценку valde in omnibus, т.е. наивысшую оценку по всем предметам. Кроме того, были две "премии" за научные знания и поэзию; премии состояли в кредите на покупку книг, издаваемых колледжем. И эти премии систематически получал Гамильтон, а также две премии ректора университета за стихи. При окончании курса шла ожесточенная борьба всего за две медали (класс соревновался уже целиком): за познания в науках и в классической литературе. Фактически



Тринити-колледж. Западный фасад

последний год в колледже студенты тратили на подготовку к этим соревнованиям. Гамильтон выиграл обе медали (оценка – optime.)

Когда Гамильтон поступил в колледж, в нем существовали четыре ранга учащихся, каждый из которых имел свои привилегии. Filius nobilis – самый высший ранг, дети благородных родителей; они платили большие деньги за обучение и носили мантии с золотыми и серебряными кистями. Fellow commoner также платили высокий вступительный взнос и имели привилегию обедать с членами совета колледжа. Большая часть студентов принадлежала к pensioner, они не освобождались от платы за обучение, но питались самостоятельно. Самый низший ранг – sizar; они не платили ничего за обучение и питались остатками от обеда членов совета. Общий вид студентов был скромный, чтобы не сказать бедный: O' Donoghie, который описывает встречу Вальтера Скотта в 1825 г. со студентами Тринити-колледжа, сообщает, что ''Вальтера Скотта приветствовала толпа студентов Тринити-колледжа, жаждущих его увидеть, выглядевших интеллигентно, но по большей части плохо одетых...''[77].

Гамильтон поступил в Тринити-колледж как пенсионер[2]. Как

[2] Однако в этом вопросе есть все же некоторая неясность, так как в одном архивном документе тьютор Гамильтона Ч. Бойтон именует его sizar.

и большинство студентов европейских университетов, студенты Тринити-колледжа были в массе достаточно буйными (с точки зрения обывателей Дублина) и мятежными в нередкие в Ирландии мятежные годы. Многие студенты носили оружие и участвовали в дуэлях – вопросы чести были весьма важными в то время. Сохранились не датированные, к сожалению, бумаги, из которых видно, что в какой-то из дуэлей Гамильтон принимал участие, по-видимому, в качестве посредника, с неизвестной нам долей успеха пытавшегося примирить враждующие стороны. Впрочем, значительно позднее он признавался, что сам послал вызов одному из членов Ирландской академии наук (друзья позаботились о том, чтобы дуэль не состоялась).

В годы пребывания в Тринити-колледже Гамильтон жил в основном в Дублине (вместе со своим двоюродным братом), а также в Триме, у дяди Джеймса. В общем он мог не затруднять себя регулярным посещением текущих лекций, прослушав заранее курсы, необходимые для сдачи выпускных экзаменов. Успехи Гамильтона не вызывали сомнения у его родственников и друзей. Все экзамены были устными (viva voce) и происходили на латинском языке. Гамильтон готовился к ним примерно так, как в наше время готовятся к атлетическим соревнованиям. В мае 1824 г. он тренируется, прыгая через столы, а в октябре следующего года он спрашивал в письме: "Готова ли моя шапочка и мантия? Скакалка должна дополнить мое оборудование... Бесси ⟨его кузина⟩ приготовила достаточно длинную веревку. Я много тренируюсь и провожу много времени на открытом воздухе" и пишет сестре Грете: "Пошли мне сведения о том, в каком часу будет прилив 23-го и 24-го, чтобы я мог предварительно прикинуть, смогу ли я искупаться между часами экзамена" [90, т. 1, с. 190].

После окончания колледжа можно было сдавать еще экзамены на право быть членами ученого совета. Это и было целью Гамильтона при его поступлении в Тринити-колледж. Экзамены происходили в среду перед праздником Троицы и продолжались четыре дня (по два часа утром и после полудня) под председательством ректора и старших членов ученого совета в экзаменационном зале в присутствии многочисленной публики (немалую часть ее составляли студенты, которым предстояло в ближайшее время сдавать те же экзамены).

Подготовка к этим экзаменам была весьма трудоемкой, но сдача их обеспечивала уверенную позицию в колледже в качестве преподавателя или учителя или давала возможность работать в церковных организациях. Конкуренция поэтому была очень велика, и подготовка требовала больших усилий, однако Гамильтон был в лучшем, чем большинство студентов, положении, так как он обнаружил, что в одно и то же время может успешно готовиться к экзаменационным соревнованиям и заниматься своими собственными научными изысканиями. Именно в колледже Гамильтон начал, несмотря на упреки дяди Джеймса и сознание собственной виновности в некоем пренебрежении "классикой", большинство тех научных работ, которые составили смысл его последующей жизни.

Когда Гамильтон под руководством Ч. Бойтона начал изучать курс, дававший основания для получения медали по циклу наук, этот курс требовал знания тригонометрии, алгебры, анализа (в объеме учебников Вудхоуза, Ларднера, Лакруа), механики (Пуассон), философии (Ллойд) и избранных мест из "Начал" Ньютона и "Небесной механики" Лапласа. Но Гамильтон читал не только эти "предписанные" книги, а также Лагранжа, Пюизо, Монжа, Кузена, Малюса и книги, написанные как учебные пособия для Политехнической школы в Париже. Политехническая школа в то время была общепризнанным центром чистой и прикладной математики, и Гамильтон полностью овладел ее достижениями. Интересно, что впоследствии Гамильтон не развивал методы и направления ученых Политехнической школы, а пошел собственным путем – он был всегда одиноким и независимым творцом, не оглядывавшимся на то, что происходило вокруг (даже позже он был мало связан с представителями математической школы, создавшейся в те годы в Дублине).

4. Поэт или математик?

Дилемма "кем быть?", поэтом или математиком, отняла, вероятно, немало душевных сил у молодого Гамильтона раньше, чем он понял: его творческое будущее все же математика. Он жил и думал в атмосфере поэзии, он писал поэмы по любому случаю и на любую тему. Естественно, что, будучи разочарован (причем дважды) в любви, он изливал свое горе в стихах, писал послания ко дню рождения своих сестер, сонеты о красоте местности. Но, кроме того, мы находим "Оду к Луне во время полного затмения". Он пишет Вордсворту: "Я всегда старался внести в мое научное развитие что-то от духа поэзии и чувствовал, что такая примесь существенна для интеллектуального совершенства". Например, стихи "To the Evening Star", написанные Гамильтоном в возрасте 16 лет, начинались так:

How fondly do J hail thee, star of Eve,
In all the Beaty sinking to the west
And as if both our firmament to leave
Slow and majestic sinking to the rest.

Его письма показывают, что впервые он начал писать стихи в четырнадцатилетнем возрасте. В Тринити-колледже он получал премии по науке и вдобавок премии за стихи.

Гамильтон и Джон Гершель обменивались сонетами, и первый преуспел в том, что смог убедить Вордсворта, что абстрактная математика должна рассматриваться как одна из форм искусства. Гамильтон много размышлял и писал своим друзьям о "...связи между высшей областью науки и областью поэзии, на чем он так упорно настаивал, утверждая, что и в той и другой есть простор для силы воображения и потребности в ней. Гамильтон считал, что геометрия, которая имеет дело с бесконечным и воображаемым в отношении пространства, обладает в своем роде красотой и обаянием; смелые и удачные начинания таких геометров, как Понселе и Шаль, он считал тесно связанными с поэзией" (выдержка из "Eloge" Гамильтона, прочитанной Р. Грейбсом).

Гершель Джон Фредерик (1792–1871) – сын знаменитого астронома Уильяма Гершеля. После нескольких работ по математике увлекся в 1816 г. астрономией. С помощью отца собрал восемнадцатидюймовый отражательный телескоп.

Дополнив каталог двойных звезд и туманностей, составленный его отцом для северного неба, в 1833 г. он решил выполнить ту же работу для южной половины небесной сферы. Поэтому он вместе с необходимым инструментарием (для сохранения единства измерений) и с семьей отправился на мыс Доброй Надежды в ноябре 1833 г. Он прибыл туда в январе 1834 г., а в марте начал регулярные наблюдения и до 1838 г. проводил систематические наблюдения южного неба. Он открыл за это время большое число неизвестных ранее двойных звезд (свыше 3000), звездных скоплений и туманностей. Им было составлено 11 каталогов таких звезд, а в 1864 г. он опубликовал сводный общий каталог всех туманностей и звездных скоплений (около 5000 объектов). Ему принадлежит одна из ранних оценок удельного количества тепла, приходящего от Солнца на Землю. Он открыл в области фотографии закрепляющее свойство гипосульфита, ввел термины "негатив" и "позитив" и т. п. Он неоднократно избирался президентом Лондонского Королевского астрономического общества.

Гамильтон был всегда уверен в своих математических способностях, чего не мог сказать о своем поэтическом даре. В отношении последнего он нуждался в одобрении и поддержке, которые он и попытался получить в 1827 г. После того как Гамильтон был избран профессором астрономии, он в июне предпринял большое путешествие по Ирландии и Англии, кульминацией которого было посещение в сентябре Озерного края и Уильяма Вордсворта.

Уильям Вордсворт (1770–1850), певец природы и философствующий лирик, представитель так называемой "озерной школы" английского романтизма, в молодости сочувствовавший идеям Великой французской революции, был настроен весьма радикально и демократично, но с возрастом быстро эволюционировал вправо.

К концу периода наполеоновских войн завершается превращение Вордсворта из поэта-демократа, потрясенного трагедией простых людей деревенской Англии, в консерватора, певца торийской реакции и религиозного смиренномудрия. Правительство сэра Роберта Пиля назначило ему ежегодное пособие. В 1843 г. Вордсворт согласился принять освободившийся после смерти Саути пост придворного поэта-лауреата и согласно дворцовому церемониалу публично преклонил колена перед королевой Викторией, годившейся ему во внучки, в знак благодарности за эту монаршую милость [26].

Еще в июле 1807 г. великий романтик Дж. Г. Байрон опубликовал рецензию на двухтомник стихов Уильяма Вордсворта, в которой писал: "...эти томики обнаруживают талант, достойный более высоких задач, и мы сожалеем, что м-р Вордсворт ограничивает свою музу такими вздорными темами". Байрон резко и остроумно критиковал религиозно-мистические стихи Вордсворта в "Английских бардах и шотландских обозревателях", изданных в том же году:

"Он учит друга книжек не читать,
Не знать забот, упорно избегать
Волнений жизни бурной ...
Певец с таким же пафосом вещает
Об идиота жалкого судьбе,
Что, кажется, он пишет о себе" [6].

В 1820 г. Вордсворт выпустил четырехтомник своих стихов и в 1821 г. работал над книгой "Церковные сонеты".

В письме Дж. Меррею в 1821 г. Байрон пишет "... Саути пустословит, Вордсворт пускает слюни, Кольридж завирается" [7], а в письме Ли Ханту в 1815 г.: «... в "Прогулке" несомненно виден немалый талант, но это дождь, оросивший бесплодные скалы, где он может только застаиваться ...» [Там же].

Поздний Вордсворт – одинокий, замкнутый в себе созерцатель.

Предельно лаконичная характеристика Вордсворта дана в сонете Пушкина:

"... вдали от суетного света
природы он рисует идеал"[3].

Один из выдающихся современников Вордсворта Роберт Броунинг взволнованно и скорбно писал об отступничестве Вордсворта в стихотворении "Бывший вождь".

Когда Вордсворт встретился с Гамильтоном, ему было 57 лет, а Гамильтону 22. И, несмотря на разницу в годах и жизненном опыте (независимая жизнь Гамильтона только начиналась), между ними быстро установилось глубокое взаимопонимание.

Много лет спустя Вордсворт тепло рассказывал об их первой встрече. Гамильтон и его друзья пили чай и провели вечер с Вордсвортом в Райдле. Вордсворт пошел провожать своих гостей к их жилищу, находившемуся вблизи Райдла, на расстоянии примерно мили. Во время этой прогулки происходил столь инте-

[3] *Пушкин А.С.* Полн. собр. соч. В 10 т. Л.: Наука, 1977. Т. 3. С. 158.

ресный разговор, что Гамильтон решил сопровождать Вордсворта обратно до Райдла. По прибытии туда Вордсворт решил, что они не могут расстаться, прервав разговор, и они опять пошли обратно к жилищу Гамильтона, дойдя до которого снова вернулись в Райдл. Встреча с выдающимся поэтом вдохновила Гамильтона на создание поэмы "It Haunts me Yet" ("Это мое любимое место"). В ответ Вордсворт написал: «...Ваши стихи одушевлены истинным поэтическим духом, так как они очевидно являются итогом сильного чувства .. я уверен, что Вы не будете огорчены (hurt), если я скажу Вам, что стихотворная техника... еще не такова, какой она должна быть:

SomeTouch of Human Sympathy find way
And whisper that while Truth and Science' s Ray
With such serene effulgence o'er thee shone

Sympathy могут whisper, но a Touch of Sympathy не могут. "Истинный луч и научный" вместо "луча истины и науки" не только крайне шероховато, но "луч светит" есть если не абсолютный плеоназм, то большая неуклюжесть; "луч падает или мелькает" можно сказать, Солнце, или Луна, или свеча светят, но не луч». Подобный комментарий был сделан Вордсвортом и к некоторым другим местам поэмы. Гамильтон в своем ответе хотя и пытался оправдать выбор отдельных словосочетаний, но в конце концов написал: "... искренне сознаюсь в общих дефектах моей поэзии..."

Дружба между семьями Гамильтона и Вордсворта была позднее упрочена тем, что Гамильтон по просьбе Ворсдворта стал крестным отцом одного из его внуков.

Гамильтон только один раз посетил Лондон, в сущности говоря, чтобы повидаться с другим выдающимся поэтом (принадлежащим к той же "озерной школе") Кольриджем (1772–1834), с которым он потом переписывался.

Кольридж, как и многие другие английские мыслители и поэты его времени, проделал сложный путь от демократических и даже порой революционно-демократических взглядов и настроений до консервативно-церковных, туманно-метафизических воззрений. Вот что он пишет в 1830 г. (за четыре года до смерти и как раз в период знакомства и переписки с Гамильтоном): "Если на моей могиле будет сделана надпись, пусть в ней говорится о том, что я пламенно любил церковь и также пламенно ненавидел тех, кто предавал ее, кто бы они ни были".

О Кольридже в 1820 г. очень правильно и образно написал Шелли: "... воздушный метеор, окутанный облаками, орел с завязанными глазами среди подслеповатых сов" [149].

Таково было поэтическое оружение Гамильтона. А в математике? Никого из более или менее крупных математиков, кроме А. де Моргана, мы не находим вблизи него.

Де Морган Август (1806–1871) – английский математик и логик, родился в Индии. Шестнадцати лет поступил в колледж Кембриджа, где изучал математику – частью под руководством Дж. Эри. В 23 года он стал профессором в Университетском колледже в Лондоне, где успешно работал до 1831 г., когда несогласие с правительственными учреждениями заставило де Моргана и нескольких других профессоров одновременно отказаться от своих кафедр.

В 1836 г. его преемник утонул и де Морган был приглашен вновь занять свою кафедру. Его учениками были Раус, Тодхентер и другие. Он активно работал в Астрономическом обществе.

Он занимался фундаментальными проблемами математики. Его труд "Основания алгебры" в 7-м и 8-м томах "Philosophical Transactions" содержит важные результаты в философии математического метода. Де Морган написал также "Элементы алгебры, элементы тригонометрии и тригонометрического анализа, как введение к дифференциальному исчислению". Наиболее важное значение имели его работы по реформе логики. Он независимо от своих замечательных современников Гамильтона (Эдинбург) и Дж. Буля установил принципы квантификации предиката.

Он опубликовал в 1847 г. свой основной логический трактат "Формальная логика, или Исчисление умозаключений, необходимых и вероятных".

В математике Гамильтон почти полностью самоучка. И все же он до конца своей жизни математик, пишущий стихи (теперь мы бы сказали, что стихи были его "серьезным хобби"), в которых преобладает метафизика, описание природы и только потом чувства, эмоции.

Если раскрыть статьи Гамильтона и опубликованные Грейвсом рукописи, то порой можно увидеть в них влияние философских воззрений, а вот в его поэзии можно найти прямые отсветы его научных исканий, причем таких, какие не могли быть им разрешены, но были, если так можно сказать, проблемами-предчувствиями. Вот интересный пример: глубинная связь (для Гамильтона) математики и поэзии нашла свое выражение в его двустишии, в чем-то предвосхищающем наши современные взгляды:

And how the One of Time, of Space the Tree
Might in the Chain of Symbol girdled be.

(Прозаический перевод: "Как можно объять цепью некоего символа (знака. – *Л.П.*) одно (измерение. – *Л.П.*) времени и три – пространства" – достаточно многозначен.)

Кто же он? Поэт или математик? Или поэт-математик? Прислушаемся к его собственным словам: "Я живу математикой, но я – поэт (I *live* by mathematics, but I *am* a poet)".

Приведем в заключение один характерный для поэтического творчества Гамильтона сонет (в прозаическом, слегка ритмизованном переводе):

О, всесозидающий Дух Мудрости и Любви,
Мощные крылья которого защищают меня,

Поглоти меня в твоей необъятности
И подними над моим ограниченным "я",
Очисть меня от суетных и пустых забот,
Создающих мою ненужную славу,
Но сохраняющих зло в глубине моей души,
Повлияй на лучшее во мне
И поддержи его. Пусть никакое желание облегчения,
Никакая нехватка мужества, веры или любви
Не остановят моих шагов к высокой цели –
В которой состоит стремление души моей –
И пусть радостно узрю я
Твою колесницу, несущуюся ввысь.

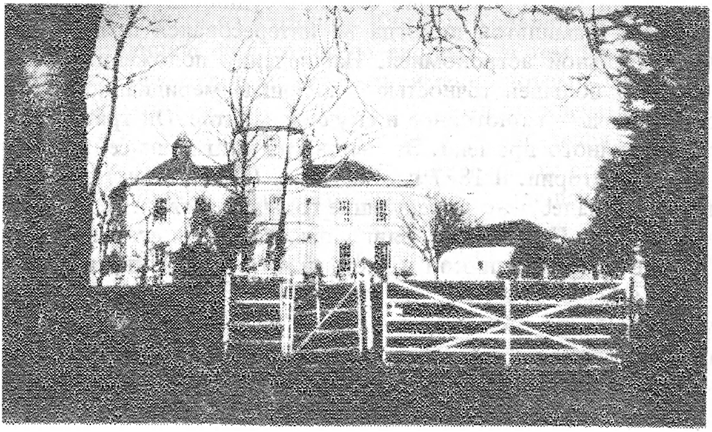
5. Взлет
(30-е годы XIX в.)

Жизнь Гамильтона в 30-е годы наполнена бурными проявлениями его кипящей энергии. Его творчество в это время – оптика, динамика, алгебра, его занятия – философия. Его физическая энергия кажется неисчерпаемой: он ходит по парапету крыши обсерватории; поднимается по трубе парового пакетбота, когда плывет в Англию; прыгает, полностью одетый, в воду в диком и заброшенном Эдар Мэноре, гоняет вместе с Робертом Грейвсом обруч по саду обсерватории и ездит верхом на своей лошади по кличке Планета, описывая галопом широкие круги по лужайкам. Впрочем, он был неважным наездником, но весьма смелым. Гамильтон приобрел привычку совершать длинные прогулки всегда с книгой в кармане, а иногда даже с заплечным мешком книг. Вечером книги сопровождали его в спальню, где он спал среди них, просыпаясь и читая в любой час.

1827 год в известном смысле был поворотным в жизни Гамильтона. В 1826 г. Бринкли, который руководил Гамильтоном в его астрономических занятиях и помогал ему в математических исследованиях, принял епархию в Клойне. На освободившееся место королевского астронома и профессора астрономии среди других кандидатур (например, такой, как известный ученый Дж. Эри) была выдвинута кандидатура Гамильтона (бывшего еще студентом), и он был единогласно избран в день окончания им колледжа. Таким образом, в невероятно юном возрасте (двадцати двух лет) он стал директором обсерватории в Дансинке[4].

Гамильтон, несомненно, мог без большого труда стать членом ученого совета после окончания колледжа. Однако это членство

[4] Обсерватория находилась примерно в пяти милях от центра Дублина; поселившись здесь в возрасте 22 лет, Гамильтон провел в Дансинке всю жизнь.



Обсерватория в Дансинке

предполагало как обязательное занятие обучение студентов (tutor) и участие в административной жизни колледжа. Кроме того, в этом случае он был обязан по статусу стать священником, а в 1827 г. это требовало обета безбрачия. Целибат был ликвидирован в 1840 г., а до 1811 г. он очень часто не выполнялся, но с этого года стал строго выполняться. Гамильтон считал (и при тогдашней ситуации – по крайне мере лет 12 – правильно считал), что, входя в ученый совет колледжа, он не сможет жениться. Кроме того, в обсерватории, где он будет жить как ее директор, он будет более независим и в своих научных работах, и в личной жизни, свободен от нудных педагогических обязанностей и сможет поселиться вместе со своими тремя сестрами.

В итоге он принял три сопряженные должности: королевского астронома, директора обсерватории в Дансинке и профессора астрономии.

Все свое время он мог теперь посвящать исследованиям и без всякого внешнего принуждения выбирать их предмет. Ему не надо было непрерывно публиковать свои работы, так как в этом отношении не было никакого давления, ибо безумного и бессмысленного измерения научной значимости ученого числом публикаций еще не существовало. Вероятно, он больше читал книг по литературе и философии, чем по математике, так как свои открытия в последней он делал, исходя из первых принципов, а не развивая идеи других ученых.

В течение ряда лет Гамильтон возглавлял Дублинскую астрономическую обсерваторию и читал не без успеха курс лекций по астрономии, представлявший собой, в сущности, курс небесной механики. Гамильтон никогда не интересовался практической наблюдательной астрономией. Наблюдения положения звезд с возможно большей точностью с помощью меридианного круга каждую ночь – монотонное и скучное занятие. Он тратил на эту работу немного времени. Это видно из книги записей наблюдений обсерватории. В 1827 г. отметка *H.* (Гамильтона) встречается часто, а далее, уже в следующие годы, все реже и реже, а начиная с 1831 г. *H.* почти не появлялось. Интересы его ограничивались небесной механикой и теорией оптических инструментов. Впрочем, надо заметить, что в силу географического расположения Дублинской обсерватории ее наблюдения никогда не играли сколько-нибудь значительной роли в новой астрономии, и Гамильтон поступал очень мудро, тратя бо́льшую часть своих сил на работу в области математики.

22 октября 1832 г. Гамильтон на основе опубликованной им в начале 30-х годов огромной работы "Теория систем лучей" теоретически предсказал существование ранее неизвестного явления – внутренней и внешней конической рефракции, экспериментально найденного затем в декабре того же года Х. Ллойдом. Маловероятно, чтобы внутреняя и внешняя коническая рефракция были когда-нибудь открыты чисто экспериментальным путем, так как их осуществление возможно только при весьма точном соблюдении определенных условий, значение которых, если не исходить из теории, не может быть предусмотрено. В 1835 г. за это открытие Гамильтон получил золотую медаль Королевского общества и медаль Кэннингема Ирландской академии наук.

В научной биографии Гамильтона 1834 год отмечен распространением на динамику идеи характеристической функции, которую он с таким успехом применил в области геометрической оптики. Исследования Гамильтона по динамике, опубликованные в виде двух статей в лондонских "Philosophical Transactions", получили блестящую оценку. В 1842 г. на ежегодном собрании Британской ассоциации содействия развитию наук в Манчестере Якоби сказал: "Гамильтон – это Лагранж вашей страны". В 1866 г. П. Тэт охарактеризовал эту работу как "крупнейшее дополнение, полученное теоретической динамикой с тех пор, как были достигнуты великие успехи Ньютоном и Лагранжем" [107].

Гамильтон отличался от других английских ученых тем, что он был не только одним из первых ученых Британии, которые серьезно изучали Канта, не только тем, что он поддерживал Кольриджа, философские работы которого сделали много для того, чтобы познакомить Англию с взглядами Шеллинга, но и тем, что его рукописи полны информации о прочитанном и попыток, исходя из взглядов Канта и Кольриджа, построить свою собственную философскую систему. И тем не менее его научные исследования, может быть, именно потому, что он был более математиком, чем физиком, не создают впечатления тесной связи их с его философией; он ни разу не пытался построить физическую модель, которая иллюстрировала бы его метафизические идеи конкретным материалом. Он оставался целиком в царстве математической абстракции: его оптика и механика аналитичны, его исходный пункт — Лагранж и Лаплас, а не Ньютон. В библиотеке Тринити-колледжа хранится любопытный документ — записная книжка 1826 г., в которой Гамильтон записывал все, что относилось к предстоящим экзаменам (тщательно записывает законы Ньютона: видимо, он не знал их достаточно хорошо), — и тут же записи заметок, пока еще в общих чертах, о возможной системе физики и механики, гораздо более *обобщенной и математизированной,* чем у кого-либо из авторов того времени. Успех Гамильтона в механике поэтому является успехом математика. Это понимали и его современники. Когда он публикует две свои воистину великие работы по механике [14], он пишет Уэвеллу в Кембридж, что думает, что они произведут переворот в механике. Уэвелл, который пытался (тщетно!) выяснить фундаментальные понятия науки, ответил ему: "Я рад узнать, что Ваши мысли обратились к механике, и не сомневаюсь, что Вы высверлите в ней глубокое отверстие Вашим длинным аналитическим сверлом и, насколько я представляю, поднимете более чистые воды с больших глубин, чем те, которые мы до сих пор затрагивали... В то же время я, который долго путался на дне колодца, убедил себя, что грязь, мутившая воду в нем, постепенно спадает, и пытался различить, какая часть материи происходит из чистого источника разума и какая часть берется из низменной, но основной грязи вещественного мира" [90, т.2, с.80]. Без материального мира, действительно, картину этого мира не построить, в этом Уэвелл прав, но он не прав в том, что в "чистом источнике разума" нет сложным образом препарированного и трансформированного реального мира. В этом одна из основ эвристической силы и конструктивной способности математического метода. Недаром мы сейчас видим физический макроскопический мир через очки, сочетающие подходы Ньютона и Лагранжа–Гамильтона.

В августе 1835 г. вице-король Ирландии граф Малгрэйв возвел Гамильтона в дворянское звание. В официальном отчете об этой процедуре мы читаем: «Лорд-лейтенант взял меч и, положив его на плечо Гамильтона, сказал: "Я, вице-король Ирландии, приказываю вам подняться, сэр У.Р.Гамильтон"». У.Уэвелл вспомнил в одной из своих речей, что 130 лет назад в другом

Тринити-колледже (Кембридж) преклонил колена перед королевой Анной другой великий математик и поднялся как сэр Исаак Ньютон.

В 1684 г. было учреждено Королевское общество (Royal Society) в Лондоне и Философское общество (Philosophical Society) в Дублине, но во время якобинских войн последнее распалось. Восемнадцатый век — век академий, и поэтому (с некоторым запозданием) и в Дублине в 1785 г. образовалась Ирландская академия наук, считавшая своей задачей способствовать изучению "науки, изящной литературы и древностей". Впрочем, у нее были предшественники: в 1714 г. было организовано Физико-историческое общество, а в 1772 г. — Избранный комитет для исследования ирландских древностей. Надо отметить в качестве знамения времени и основание в 1819 г. Ирландского общества для продвижения образования ирландцев на их родном языке. Основные интересы Ирландской академии в 30-е годы XIX в. лежали в области науки (в основном химии), но ее члены больше интересовались изучением раннего периода ирландской истории и древностей.

В декабре 1837 г. умер очередной президент Королевской Ирландской академии наук Бартоламью Ллойд. На выборы нового президента были представлены три основных кандидата: Гамильтон, Х.Ллойд и архиепископ Дублина доктор Whately. Последнего, несмотря на его некоторый либерализм, всеми допустимыми и не совсем допустимыми средствами поддерживал лорд-лейтенант Ирландии (фактически диктатор). Результаты голосования (тем не менее!) : за Гамильтона 45 голосов, за Х.Ллойда — 36 и за архиепископа — 14 ... Как видим, и в то время можно было порой не подчиниться тяжелой руке диктатора.

Вступительный адрес, прочитанный новым президентом в январе 1838 г., кроме обычных слов о красоте, истине и боге, заключал в себе некоторые конкретные предложения об организации секции биологии и развитии литературного отделения. Гамильтон в общем удовлетворительно справлялся с исполнением разнообразных функций президента, хотя и не провел в академии никаких значительных реформ.

В 1838 г. он получил пожизненную пенсию в размере 200 фунтов стерлингов в год. В том же году он получил от Российской академии наук письмо, подписанное ее президентом А.Б. Уваровым, в котором сообщалось, что он единогласно избран членом-корреспондентом этой академии. Представление Гамильтона в члены-корреспонденты, высоко оценившее его заслуги в области динамики, было подписано академиками М.В. Остроградским, В.Я. Буняковским и П.Н. Фуссом.

Приводим текст представления в переводе с французского.

"После того как были найдены общие формулы, которые дают все условия равновесия какой-либо системы, геометры свели проблемы движения к задаче равновесия.

В итоге этой эпохи Механика вступила в область чистого анализа. Любой вопрос равновесия или движения систем оказался сведенным к интегрированию дифференциальных уравнений. Однако выполнение этой интеграции представляет трудности, очень часто непреодолимые; например, в проблемах движения системы материальных точек известно вообще только *семь* интегралов, доставляемых общими принципами динамики, а именно: *три* интеграла движения относительно центра инерции, *три*, которые относятся к принципу площадей, и *один*, который содержит в себе принцип живых сил. Но для того, чтобы решение было полным, необходимо иметь двойное количество интегралов по сравнению с числом переменных; имея только семь интегралов, необходимо отыскать остальные интегралы методами, особыми для каждой частной задачи. Однако господин Гамильтон, королевский астроном в Дублине, показал, что достаточно иметь некоторое число интегралов для того, чтобы найти все остальные с помощью простого дифференцирования; этот результат, продемонстрированный с наибольшей простотой, должен быть зачислен в число наиболее блестящих открытий, сделанных в последнее время.

Господин Гамильтон опубликовал также исследования о движении планет и о свете. Мы не можем ничего сказать о них, так как они еще не дошли до нас. Но каково бы ни было их значение, интегрирование общих уравнений Динамики, столь существенно улучшенное господином Гамильтоном, достаточно для допущения его в число наших членов-корреспондентов.

Фусс, Буняковский, Остроградский"[5].

30-е годы были периодом большой политической активности в Ирландии. Во время пребывания в колледже Гамильтон внимательно следил за политическими событиями, но после переезда в тихую заводь обсерватории его интерес к ним резко уменьшился. Одной из причин была удаленность от Дублина, позволявшая избежать городской сутолоки, а другой – то, что его положение и жалованье были достаточными (во всяком случае, до того, как появилось трое детей) для того, чтобы не зависеть от капризов покровителей. Великий Голод его почти не коснулся. По своим политическим убеждениям он был, по нашим современным представлениям, либеральным тори.

Он всегда относился с уважением к королевской власти (и даже к личности пустого, эгоистичного и морально нечистоплотного Георга IV). На восшествие на престол в 1837 г. королевы Виктории Гамильтон написал сонет, а через 12 лет, когда она посетила Ирландию, – другой, которые переслал ей; в 1853 г. он имел частную аудиенцию у принца Уэльского, которому преподнес недавно увидевшие свет "Лекции о кватернионах". Он

---

[5] Протокол заседания Российской академии наук от 22. XII. 1837 г. // Л.О. Архива Академии наук СССР. Ф. 1. Оп. 2. 1837. № 709.

высказывался, как и большинство его друзей, за эмансипацию католиков (в этом вопросе ему приходилось тактично лавировать в переписке с Вордсвортом, яростным ее противником.

6. Подтверждение предсказания

Исследования Гамильтона по геометрической оптике (теории систем лучей) привели его к замечательному предсказанию нового, ранее неизвестного оптического явления – внутренней и внешней конической рефракции, которую он открыл буквально "на кончике пера".

Так как геометрическая оптика отнюдь не принадлежит в настоящее время к широкоизвестным разделам физики, а коническая рефракция просто неизвестна неспециалистам, напомним кратко, в чем состоит это весьма своеобразное явление, предсказанное на основе математических расчетов Гамильтоном и по его указанию найденное экспериментально Х. Ллойдом.

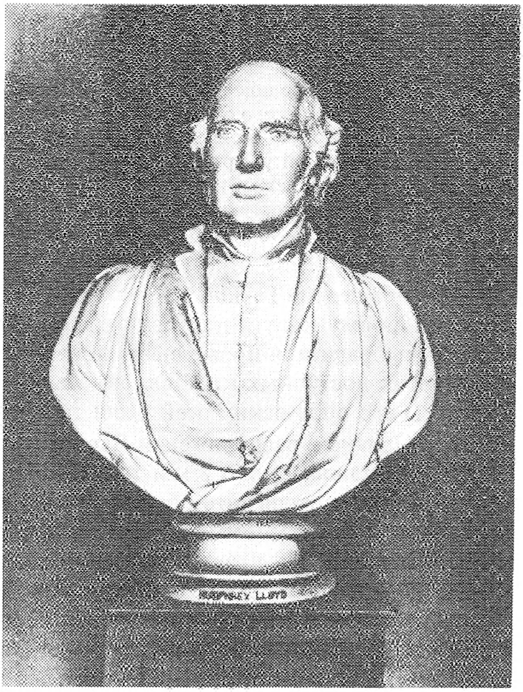
Гамильтон заметил, что поверхность, определяемая известным уравнением Френеля, имеет четыре конические точки, для каждой из которых существует бесконечное число касательных плоскостей, следовательно, единичный луч, исходящий из точки внутри кристалла в направлении одной из этих точек, должен разделиться по выходе на бесконечное число лучей, образующих коническую поверхность. Гамильтон показал также, что существуют четыре плоскости, каждая из которых касается волновой поверхности в бесконечном числе точек, образующих окружность контакта, так что соответственный луч, падающий извне, должен внутри кристалла разделиться на бесконечное число преломленных лучей, снова образующих коническую поверхность.

С современной точки зрения, "...явления конической рефракции в оптических двуосных кристаллах представляют собой одну из наиболее ярких демонстраций несовпадения направлений групповой и волновой скоростей света в кристаллах, при которых одному направлению вектора потока энергии может соответствовать целый конус волновых нормалей и, наоборот, собой волновой нормали – целый конус световых лучей.

Характерной особенностью явлений конической рефракции, как внутренней, так и внешней, является поляризация света, прошедшего сквозь кристалл. В каждой точке светового кольца, на экране свет поляризован линейно, но в то же время не существует ни одной пары точек с одинаковой поляризацией света" [15][6].

---

[6] Авторы [15] впервые осуществили лекционную демонстрацию опыта по наблюдению внешней конической рефракции и повторили опыт по наблюдению внутренней конической рефракции.



Х. Ллойд

"Полный конус лучей естественного света нормально падает на плоскопараллельную кристаллическую пластинку, вырезанную перпендикулярно одной из оптических осей первого рода. Внутри кристалла конус света свертывается в узкий пучок и распространяется по направлению оси единственной лучевой скорости (оптической оси первого рода) с очень незначительными отклонениями от этого направления" [25].

Современник Гамильтона, замечательный астроном, физик и математик Дж. Эри сказал об открытии конической рефракции: "Может быть, наиболее замечательное предсказание, какое когда-либо было сделано, – это сделанное недавно профессором Гамильтоном".

Третье добавление к "Теории систем лучей" Гамильтон заключил разделом, озаглавленным "Сочетание предшествовавшего взгляда на оптику с волновой (undulatory) теорией света", в котором он сообщил о конической рефракции.

Он сделал доклад о своем открытии на вечернем заседании Ирландской академии наук 22 октября 1832 г.; на следующий день он говорил с X. Ллойдом, не мог ли бы тот попытаться экспериментально проверить его предсказание [90, т. 1, с. 623].

Хемфри Ллойд (1800–1881) родился в Дублине и после обучения в Тринити-колледже наследовал у своего отца кафедру естественной и экспериментальной философии в этом колледже. Его важнейшая работа (1833) – обнаружение конической рефракции и открытие закона конической поляризации. Ему принадлежат книги по оптике, магнетизму и метеорологии. Он был одним из организаторов исследований земного магнетизма в Великобритании. С 1846 по 1851 г. он президент Ирландской академии наук, ректор Тринити-колледжа с 1867 г. до своей смерти.

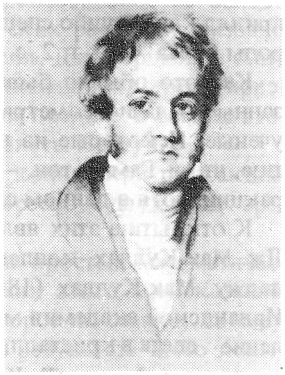
В течение следующей недели Гамильтон уточнил свое предсказание, найдя углы и форму конуса для кристалла арагонита, который он и Ллойд выбрали для проведения экспериментов, поскольку он из многих доступных кристаллов имел наибольшее преломление, а углы его оптических осей были тщательно измерены Ф. Рудбергом. Однако в распоряжении Ллойда была только тонкая пластинка кристалла, около 2 мм толщиной, и поэтому он не мог достаточно четко разделять обыкновенный и необыкновенные лучи, чтобы произвести уверенные эксперименты [Там же, с. 625]. Гамильтон был раздражен задержкой, и 25 октября написал Дж. Б. Эри письмо, содержащее неясный намек на то, что он получил интересные результаты из волновой теории Френеля [Там же].

Некоторое время Ллойд не мог найти необходимый кристалл, и Гамильтон уже собирался сообщить Эри свои теоретические результаты и попросить его сделать эксперименты. Ллойд уже даже согласился на это, так как имевшийся в его распоряжении кристалл был не только чрезмерно тонок, но и вообще непригоден для намеченного эксперимента из-за того, что представлял собой двойниковый кристалл, состоящий из нескольких пересекающих друг друга кристаллов.

Тем не менее Ллойд не сдавался, и в декабре 1832 г. он получил хороший кристалл арагонита от Доллонда из Лондона. Наконец 14 декабря он написал Гамильтону, что с этим кристаллом наблюдал внешнюю коническую рефракцию [Там же, с. 628]. Спустя четыре дня Гамильтон написал Эри и Дж. Гершелю, сообщив им основы своей математической теории и все детали экспериментов Ллойда. В эти же дни Ллойд написал Гамильтону, что он осуществил убедительную демонстрацию конуса, проектируя его на экран, на котором получил круг до 5 см диаметром.

В 1833 г. на очередном заседании Британской ассоциации содействия прогрессу науки внимание математической и физической секции было уделено почти целиком открытию Гамильтона. Дж. Гершель, Дж. Эри и другие с энтузиазмом говорили о значении этого открытия.

Дж. Эри



Дж. Гершель

Интересно отметить, что, когда Лаббок (Labbok), секретарь Royal Society, написал Гамильтону, информируя его о награждении медалью, он не упомянул статью Гамильтона "Общий метод динамики", которую Королевское общество опубликовало в издаваемых им "Philosophical Transactions". Медаль была присуждена "За Ваши открытия в Оптике, в частности за открытие конической рефракции".

По всей видимости, члены Royal Society не смогли оценить историческое значение статей об общем методе в динамике. В первой трети XIX в. еще сохранялась ситуация XVIII в., когда анализ и математическая механика в основном развивались во Франции, в Royal Society же не было, по существу говоря, ни одного крупного механика (если не считать математика Кэли).

Оценивая свои оптические работы, сам Гамильтон в письме Кольриджу так писал о цели своего исследования: "Моя цель не открывать новые явления (тем не менее открыта коническая рефракция. – *Л.П.*), не улучшать конструкцию оптических инструментов, но с помощью дифференциального исчисления (или исчисления флюксий) переделать геометрию Света, установив единый метод решения всех проблем в этой науке, выводя их из формулировки единого центрального или характеристического соотношения ... мое главное желание и прямая цель состоит в том, чтобы ввести гармонию и единство в рассмотрение и аргументацию Оптики, рассматриваемой как часть чистой науки. Для создания моего общего метода не было необходимо, чтобы я принял какую-либо специальную точку зрения относительно природы Света" [90, т. 2, с. 592][7].

Как это обычно бывает, более или менее одновременно указанные задачи геометрической оптики рассматривали и другие ученые. Некоторые из них близко подошли к тому же открытию, что и Гамильтон, – внешней и внутренней конической рефракции, хотя в данном случае приоритет Гамильтона несомненен.

К открытию этих явлений был близок и выдающийся ученый Дж. Мак-Куллах, коллега Гамильтона и Ллойда по Тринити-колледжу. Мак-Куллах (1809–1847) еще 21 июня 1831 г. прочел в Ирландской академии мемуар, озаглавленный "Двойное преломление света в кристаллической среде, рассмотренное согласно принципам Френеля". Когда он узнал об открытии конической рефракции, то объявил, что это лишь "очевидное и непосредственное следствие теорем, опубликованных им еще в 1830 г.". Это могло бы быть началом неприятной дискуссии, если бы не совершенная мягкость и благородство всех трех главных героев – Гамильтона, Ллойда, Мак-Куллаха. Действительно, Мак-Куллах был весьма близок к тому, чтобы сделать это открытие. Это тем более интересно, что он в своей работе пользовался чисто геометрическими методами в противоположность чисто аналитическим методам Гамильтона. Надо отметить, что еще один выдающийся ученый был на пути к этому открытию, это Дж.Б. Эри (1801–1892), который написал Гамильтону 19 января 1833 г., что он давно отдавал себе полный отчет в существовании конических точек пересечения лучей (или "ряби", как он однажды назвал их) в волнах Френеля. Конечно, и сам Френель мог их заметить. И Мак-Куллах, и Эри, и Френель могли сделать это открытие, тем не менее успех сопутствовал не им, а Гамильтону, который математически открыл и предсказал коническую рефракцию, а Ллойд по его указаниям осуществил ее экспериментально.

После смерти Мак-Куллаха, Гамильтон в письме Салмону еще раз признал, что Мак-Куллах "был очень близок к тому, чтобы самостоятельно построить теорию конической рефракции"[8].

---

[7] Письмо Кольриджу от 3 октября 1832 г. Это письмо представляет собой черновик, который не был отправлен. После существенных исправлений Гамильтон отослал его в феврале 1835 г.

Гамильтон понял, что его предсказание конической рефракции может быть подтверждено экспериментально и что это будет крупным успехом. Ничего подобного не наблюдалось за долгую историю оптики. Особенно важно было то, что он доказал существование этого явления без каких-либо предварительных экспериментальных данных, а вывел его чисто математическим путем.

[8] Письмо Дж. Салмону от 22 августа 1847 г. // Записная книжка № 140 по каталогу Тринити-колледжа. С. 149–150.

Открытие конической рефракции, произведенное на основе весьма длинных и сложных математических расчетов, вызвало среди современников (Дж. Эри, У. Уэвелл, Дж. Гершель в Англии, Ю. Плюккер в Германии и другие) большой интерес и признание. Его часто сравнивали со сделанным позднее, в том же столетии, открытием Леверье и Адамсом планеты Нептун.

С позиций истории науки открытие конической рефракции интересно, и притом принципиально интересно, с двух точек зрения.

1. Впервые после длинных и далеко не простых математических расчетов предсказано и на основании этого предсказания открыто новое физическое явление, которое по самому своему характеру вряд ли было бы обнаружно в результате чисто экспериментального, ненаправленного поиска. Для многих тогдашних ученых это было еще одним, и притом *прямым*, подтверждением того, что умопостигаемый мир — математически построенная структура и что эвристические возможности математической теории в принципе должны реализоваться во всех областях физической картины этого мира (как это уже было сделано учеными XVII–XVIII вв. для механики и отчасти для оптики, акустики и т.п.).

2. Показано, что эмиссионная (корпускулярная) и волновая теории света эквивалентны, приводят к одинаковым результатам, по крайней мере в области теории отражения и преломления света. После победы волновой теории (середина XIX в.), создания электромагнитной теории света (конец механического эфира, вторая половина XIX в.) вновь возникает корпускулярно-волновой дуализм, а затем и корпускулярно-волновой синтез (первая треть XX в).

Однако в развитии физической оптики открытие конической рефракции не сыграло значительной роли. Причин этому, по крайней мере, две.

Во-первых, Гамильтон, хотя и воспользовался волновыми поверхностями Френеля, сам отметил, что его рассмотрение не зависит от того, какая из теорий — волновая или корпускулярная — приняты за основу[9]. А основные интересы исследователей в области физической оптики в первой половине XIX в. концентрировались именно вокруг проблемы правильной (т.е. объясняющей все известные в то время и предсказываемые эксперимен-

[9] Вряд ли правильным является утверждение Уиттекера (*Whittaker E.* A history of aether and electricity. N.Y., 1960. Vol. 1. P. 122), что открытие Гамильтона, "... экспериментально подтвержденное Хэмфри Ллойдом, сильно помогло утвердить веру в теорию Френеля". Нельзя упускать из виду, что все изложение Гамильтона исходит из эквивалентности эмиссионной и волновой точек зрения.

ты со светом) теории света и связанной с ней проблемой строения "светоносного" (упругого!) эфира (ей Гамильтон не слишком успешно тоже уделил некоторое внимание).

Кроме того, еще Стокс заметил, что можно построить и другие поверхности, аппроксимирующие поверхности Френеля, которые приведут к предсказанию тех же результатов. Это означает, что поверхности, построенные Гамильтоном, являются скорее вспомогательными конструкциями, а не однозначной картиной реальности.

Во-вторых, работа Гамильтона (да и само предсказанное им явление конической рефракции) относилась к геометрической оптике, не без некоторого основания считавшейся скучной областью, далекой от проблем физической оптики, в которой в то время особое значение имели явления дифракции, интерференции и поляризации.

Конечно, Гамильтон понимал значение открытия конической рефракции, но... «Кто-то однажды заметил: "Я не знаю людей, которые, не видя конической рефракции, поверили бы в ее существование. Я сам обратил два десятка математиков, показывая им конус света". Гамильтон ответил: "Насколько это отлично от моего подхода! Если бы я только видел коническую рефракцию, я бы никогда не поверил в нее. Мои глаза так часто обманывали меня. Я верю в коническую рефракцию, потому что я доказал ее"» [147]. Аналогичное утверждение Гамильтон высказал и почти 20 лет спустя в письме де Моргану [90, т. 3].

7. Любовь по-викториански[10]

Несомненно, что математическое творчество открывает гораздо меньше возможностей для изучения сложной психологической структуры ученого, чем, например, творчество живописца для познания его страстей, влечений, общений. Творчество математика (особенно выдающегося математика) теснее связано с его мировоззрением, научной средой и своеобразной, присущей творцу в любой области науки и искусства "функцией отклика".

Сложный комплекс – сплав, определивший "я" Гамильтона[11]: кельтский темперамент, англосаксонская викторианс-

[10] Общую картину викторианской Англии читатель найдет в произведениях Диккенса, Бернарда Шоу, Голсуорси и других писателей той эпохи, а также в замечательном кинофильме "My fair Lady".

[11] Вот так выглядел Гамильтон в молодости. Среднего роста, с широкой грудью. Черные, с каштановым оттенком волосы, шелковистые и вьющиеся, глаза темно-синие. Руки красивые и нежные, с несколько широкими кончиками пальцев. Голос благозвучный, внятный и сильный. Талантливый, даже удивительный поэт, математик, и тем не менее его главные любовные увлечения закончились неудачно.

кая респектабельность, викторианское благолепие, неудачная личная жизнь, блестящие научные успехи, широта активных интересов (философия, логика, теология, математика, поэзия). И, несмотря на это, или именно поэтому, Гамильтон и в науке и в жизни был однолюб. Когда он вышел на "дорогу кватернионов", все остальное (хотя он и публиковал работы на разные математические темы) в течение больше чем 20 лет было для него, по существу говоря, случайным, побочным. И в жизни он по-настоящему любил, любил сложно и тяжело, только одну женщину — Кетрин Дисни, в замужестве Кетрин Барлоу.

Какие бы занятия и открытия Гамильтона мы ни стали рассматривать, везде найдем стремление к абстрактности и "идеальности". Математическая физика, алгебра, кватернионы, поэзия, философия — абстрактная общность повсюду. А как же в жизни? Любовь для него "неземное чувство" (особенно к Кетрин Дисни), хотя трое детей от Елены Бейли несколько ограничивают это представление. Впрочем, он сам много лет спустя заметил, что он по-разному относился к своим главным увлечениям, различным характерам любви: что касается Кетрин Дисни, то он чувствовал себя любовником, в отношении к Эллен де Вер он был братом, а для Елены Бейли — мужем. Он не настаивал на том, что эти три вида эмоций взаимно исключают друг друга, но в общем подразумевал это. Интересно все же, что самым сильным и длительным чувством оказалась его любовь к Кетрин. Вероятно, так и должно было быть.

Эллен де Вер, сестра его ближайшего друга, отказалась выйти за него замуж (хотя, кажется, он говорил об этом только с ее матерью, которая уверила его, что, по ее мнению и мнению ее дочери, он ей не пара). Впрочем, может быть, дело здесь было и в его чувстве к ней, которое он сам характеризовал как братское.

Елена Бейли, жена, больная женщина, большую часть жизни прожившая вне семьи, жившей в обсерватории, чуждая домашнему укладу, по существу переложила на Гамильтона все заботы о воспитании детей и самого его оставила практически без внимания, заботы и помощи (а может быть, она чувствовала, что он ее не любит, а лишь "приемлет" и заботится о ней? Но тогда как же дети и их воспитание?).

В 1824 г. дядя Гамильтона, Джеймс, ввел его в семейство Дисни, в котором было пять сыновей и четыре дочери. Сыновья также учились в Тринити-колледже и стали ближайшими друзьями Гамильтона. Он влюбился в одну из сестер — Кетрин — с первого взгляда. Эта встреча произошла 17 августа 1824 г. Эту дату Гамильтон никогда, до самого конца своей жизни, не забывал. Несмотря на взаимную любовь, их брак не состоялся. Родные Кетрин использовали все средства давления и заставили ее

Гамильтон с женой

выйти замуж за ничем не замечательного, серого, малозаметного священника Барлоу. Когда почти насильственное бракосочетание состоялось, Гамильтон психически заболел. Он выжил, в последующем увлекался другими женщинами, даже был женат имел много хороших друзей, но память о Кетрин, об их чувстве пронизывала все его существо и всегда была с ним.

В метафизике и поэзии Гамильтон был несомненно романтиком (мы бы лишь добавили, что он принадлежал к консервативному клану английской романтической школы, так называемой "озерной школе" – Вордсворт, Кольридж, Саути и другие). Такова же была его любовь к Кетрин Дисни. Он верил в любовь с первого взгляда и действовал так, как это вытекало из этой веры. Кетрин была все долгие годы после первой встречи в 1824 г. романтическим видением, не заслонявшимся никакими событиями обыденной жизни: женитьба, дети, голод, отчаянье – ничто не могло затуманить ее образ. Временами он вспыхивал в его сознании с такой силой и яркостью, которая поражала самого Гамильтона. С большим усилием Гамильтон мог вести себя как совершенный викторианский отец (во всяком случае, для внешнего мира), но никакие усилия воли не могли удалить Кетрин из его сердца – это было вне его контроля, его душевных возможностей. Все те же неизменные мечты, все та же боль выливалась в его стихах.

Вновь он увидел Кетрин в 1845 г., пятнадцать лет спустя после последней встречи в 1830 г. Он был в таком возбуждении, что разбил окуляр телескопа. Прошедшие годы были нелегкими для него, несмотря на замечательные успехи в открытии и развитии исчисления кватернионов. В следующий за этим открытием год впервые появились неприятности, связанные с пристрастием к алкоголю. В 1847 г. Гамильтон потерял двух близких людей – дядю Джеймса и дядю Уилли, в том же году покончил с собой Мак-Куллах, а 1848 год был наполнен политическими революционными событиями. В эти годы он помогал сыну Кетрин в Тринити-колледже.

Тайная переписка Гамильтона и Кетрин началась в 1848 г. и принимала все более интимный характер, их любовь не уменьшилась с 1824 г. В конце концов Кетрин решила сообщить о своих чувствах мужу, свое последнее письмо Гамильтону она закончила словами: "Полагаясь на милосердие Бога в Христе (God in Christ), я смотрю в будущее одиноко – молю о прощении за все мои грехи". Когда Гамильтон был в гостях у лорда Росса, он получил письмо от Кетрин о сложной и тяжелой ситуации в ее семье. Пока Гамильтон в мучительных раздумьях – что предпринять? – метался по саду Парсонс-тауна, Кетрин приняла большую дозу настойки опия. Ее удалось спасти.

Опустим детали следующих тяжелых пяти лет. В октябре 1853 г. (Гамильтону 48 лет – по тем временам немало) он снова встретился с Кетрин у ее брата на семейном обеде. Уже все предвещало, что ей осталось жить недолго. "... Она лежала на софе, усталая и бессильная, но заинтересованная, внимательная и счастливая... преклонив колени, я преподнес ей книгу ("Лекции о кватернионах". – *Л.П.*), которая представляет научный труд моей жизни. Поднявшись, я получил как мою награду все, что она могла на законном основании дать, – поцелуй, нет, много поцелуев, ибо *известное и близкое* приближение *смерти* (курсив Гамильтона) делало такое общение святым..." Вскоре она умерла.

Все оставшиеся годы жизни Гамильтон собирал все, что относилось так или иначе к Кетрин: книги, журналы, поэмы, сувениры, портреты, локоны ее волос (которые он смешивал со своими "как бы для совместных похорон"). Все это он хранил под замком в своей библиотеке. В многочисленных письмах своим друзьям и братьям Кетрин он излагает различные события и чувства, связанные с Кетрин. Некоторые известные нам письма и поэмы производят впечатление глубочайшей привязанности, всепоглощающего чувства и неизбывной боли.

Вместе с тем, оглядываясь на последние пять лет жизни Кетрин (1848–1853 гг.), Гамильтон с удивлением отмечает, что у него хватило сил и упорства создать "Лекции о кватернионах". Может быть, несколько странный для ученого характер этой книги в какой-то степени определяется "счастьем и мраком последних дней"?

8. Зрелые годы

(от 40-х годов до 1865 г.)

Последние 22 года своей научной жизни Гамильтон почти целиком посвятил разработке и развитию созданного им исчисления кватернионов и их применений.

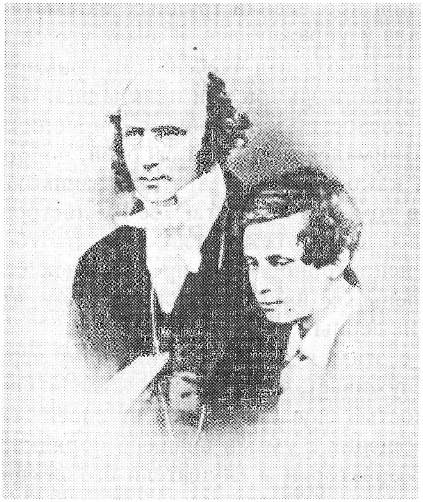
Взглянем на портрет пожилого Гамильтона. На тяжелом, одутловатом лице, которое даже классические викторианские бакенбарды ("котлеты") не делают узким, внимательно и печально смотрят куда-то мимо зрителя (в никуда) глаза, словно стремящиеся выбраться из припухлых век. О чем-то своем, отделенном от других людей думает этот явно одинокий человек, два с лишним десятилетия создававший "сагу о кватернионах". Он думал, что нашел универсальный метод описания единства миропорядка и человеческого духа, и ушел из жизни, так и не узнав о неосуществленности своей мечты.

Это был человек, любивший одинокие прогулки и страстно желавший общества и признания со стороны своих земляков. Он не нашел счастья в любви, он не был счастлив в детях (один сын – неудачливый авантюрист, другой – полусумасшедший пастор, дочь – милая, но заурядная женщина); все, что у него было, – это математическое творчество и общение (больше всего в письмах) с близкими по духу людьми. Его сын вспоминал: "...он был нечувствителен к обычной необходимости питания; мы должны были приносить легкую закуску и оставлять ее в его кабинете, но короткий кивок одобрения такого вторжения отбивной котлеты часто был единственным результатом".

Он часто работал по 12 и больше часов в день, стоя почти все время и порой поддерживая себя бо́льшим, чем следовало бы, количеством виски.

Его личность поражала современников. Вот что говорит о нем как об ученом близко и долго знавший его Р. Грейвс (это выдержка из Eloge – отсюда и некоторая приподнятость стиля):

"Гамильтон был одарен редким соединением качеств, являющихся средствами для того, чтобы делать открытия. У него было тонкое восприятие аналогии, которое руководит исследо-



Гамильтон с сыном

вателем при переходе от известного к неизвестному. Кроме того, он обладал, по-видимому, и более высокой способностью угадывать интуитивным чутьем то, что новые истины можно найти в определенном направлении и что терпеливые и систематические разыскания, производимые в ограниченных пределах, несомненно увенчаются открытием пути, ведущего в области, до сих пор не исследованные. Такова была и непоколебимая уверенность, заставившая Колумба покинуть Европу, пуститься в обширный Атлантический океан и искать новый мир на далеком западе.

Прилежание нашего знаменитого соплеменника в его разысканиях вызывает не меньшее восхищение, чем его мудрость и предвидение. Как бы ни был велик труд, который приходилось брать на себя, это не могло удержать его от вычислений, служащих для проверки его предположений. Уверенность в достижении поучительных в том или ином отношении результатов примиряла его с необходимостью самых трудных и сложных вычислений.

В отношении Гамильтона следует, кроме того, отметить, что он был готов перодолевать все трудности вычислений даже в тех случаях, когда это не обещало какого-нибудь открытия. Иногда он занимался работами такого рода, желая прочнее схватить своею мыслью общие положения путем исследования результатов, достигнутых посредством применения их в целом ряде отдельных случаев; иногда, может быть, руководясь желанием, чтобы способность вычислений, от точности и быстроты которых зависит многое при проведении трудных математических исследований, созревала и упражнялась. Я знаю, что он тратил целые часы и даже дни на работу над численными примерами какой-нибудь теоремы в области чистой или прикладной математики или над проверкой точности какой-нибудь приближенной формулы. Иногда он занимался подобной работой, доброжелательно пытаясь убедить какого-нибудь фанатика, занимающегося квадратурой круга, в том, что предлагаемое им построение не точно. Так как почти всегда он убеждался в том, что убедить математика-фанатика в непригодности его предпосылок безнадежно, он старался на отдельных примерах доказать ему, что полученные им результаты не верны.

В связи с этим я хочу отметить одну черту его характера, которая заслуживает, чтобы ее запечатлели. Он всегда с величайшей готовностью спускался с высот своей гениальности и учености для общения с умами низшего порядка. Многие его посетители в обсерватории и слушатели его лекций в Тринити-колледже могут вспомнить примеры терпения и добродушия, проявлявшиеся им в ответах на их вопросы и в разъяснении затруднений, с которыми они встречались при элементарном изучении математики и натурфилософии.

По его мнению, современная геометрия, которая имеет дело с бесконечным и воображаемым в отношении пространства, обладает в своем роде красотой и обаянием. Мы знаем, что этот взгляд, переданный им поэту Вордсворту, был совершенным откровением для этого последнего и содействовал возникновению у него более высокой оценки достоинства как самой науки, так и ее наиболее выдающихся поклонников, между тем как раньше он несправедливо недооценивал и то, и другое" [92, т.1, с. XI–XII].

Ханкинс[12], автор книги о Гамильтоне [96], который имел доступ к архивам Гамильтона и много работал над ними (по его словам, с десяток лет), справедливо замечает, что всякий, кто с ним знакомится, приходит к выводу, что Гамильтон провел большую часть своей жизни с пером в руке. Гамильтон писал непрестанно: в записных книжках разного размера и формы, на обрывках выбрасываемой бумаги, он писал на прогулках, в каретах, во время собраний Королевской ирландской академии, на ногтях, если под рукой не было бумаги... От случая к случаю он пытался навести порядок в этой огромной массе бумаги, но всегда безуспешно: бумаги растекались со стола на пол и под

[12] Ханкинс имел доступ к архивам Гамильтона в Тринити-колледже (Дублин) и в Ирландской академии наук. К сожалению, он не использовал материалы архивов для освещения картины эволюции взглядов и методов Гамильтона, приведших к окончательному виду опублико-

кровати. Без помощи мешков и корзин никакая уборка бумаг в его рабочей библиотеке не могла быть выполнена. Существует анекдот, идущий от преемника Гамильтона в должности директора обсерватории, что, когда сын Гамильтона рассортировывал после смерти отца его бумаги, он нашел засохшие отбивные котлеты, переложенные рукописями [58].

11 февраля 1846 г. Гамильтон участвовал в обеде, на котором члены Дублинского геологического общества готовили планы его годичного собрания. Во время обеда он возбужденно излагал план использования приборов обсерватории для обнаружения движения Земли. После обеда, выходя из столовой, он упал в обморок на верхней площадке лестницы и скатился вниз. Слухи и сплетни об этой истории немедленно поползли по Дублину, и Гамильтон знал о разговорах, которые ведутся за его спиной. Чарлз Грейвс, профессор математики в Тринити-колледже, специально приехал в обсерваторию поговорить с Гамильтоном о его "недуге". Гамильтон решил полностью прекратить пить, но не принял обета воздержания. Это поставило его в трудное положение, так как отказ пить в публичных собраниях раскрывал его слабость.

Гамильтон был на грани алкоголизма весь остаток жизни, но никогда его состояние не было таким плохим, как это изображали дублинские сплетни. Инцидентов, подобных тому, что был в Геологическом обществе, больше не было, и нет никаких

ванных работ по динамике и кватернионам. Эта важная историко-научная проблема остается пока не разработанной.

В остальном им использован материал трехтомной книги [90]. В свое время, в 1935 г., когда один из авторов настоящей книги (Л.С. Полак) начал по совету А.Н. Крылова заниматься изучением творчества Гамильтона и его роли в развитии физики, он получил от профессора Дж. Синга из Дублина все три тома книги Грейвса (этой книги не оказалось в библиотеках СССР). Часть материалов из нее была использована для написания первой в мировой историко-научной литературе монографии о Гамильтоне (*Полак Л.С.* В.Р. Гамильтон и принцип стационарного действия. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936), в которой, как явствует из названия, освещены в основном научная жизнь Гамильтона, его творчество в области аналитической механики и историческая роль этих работ. Книги были отосланы с благодарностью обратно, а работа автора по не зависящим от него причинам в 1937 г. была прервана и возобновилась только спустя четверть века (*Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.; Л.: Физматгиз, 1961). К сожалению, сделанные из книги Грейвса выписки не сохранились и были с пользой превращены в тепло в блокадном Ленинграде.

Судя по списку (весьма подробному) использованной Ханкинсом литературы, обе указанные книги (и ряд статей того же автора) оказались неизвестными Ханкинсу, хотя они были отмечены в различных реферативных журналах и научной литературе.

У.Р. Гамильтон –
президент Ирландской академии наук

указаний, что он когда-нибудь терял способность к напряженнейшему математическому труду. Гигантские тома "Лекций о кватернионах" и "Элементов кватернионов" никогда не могли бы быть написаны человеком, находившимся в состоянии алкогольного опьянения.

Уже до этого инцидента Гамильтон несколько раз поднимал вопрос о своем желании уйти с поста президента, чтобы целиком посвятить себя научной деятельности и не тратить значительное время на организационные, деловые и представительские обязанности президента Ирландской академии. Инцидент в Геологическом обществе побудил его действовать более настоятельно, и в том же 1846 г. он был освобожден от обязанностей президента.

Гамильтон был не просто верующий человек, он был, если так можно выразиться, активно религиозный: принимал участие в так называемом оксфордском движении англиканской церкви, был некоторое время церковным старостой и т.п. В те времена новые более или менее крупные религиозные контроверзы начинались в Англии, а оттуда переходили в Ирландию. Но именно в Ирландии их политическое значение чувствовалось сильнее. Дело в том, что в Англии так называемую англиканскую церковь поддерживало большинство населения, что же касается Ирландии, то в ней, согласно переписи 1834 г., было 80% населения римско-католического вероисповедания, около 11% принадлежало к англиканской церкви, 8,4% было пресвитерианами (бóльшая часть их жила в Ольстере) и 0,27% сектантами других толков. Все события церковной жизни англиканской церкви, теснейшим образом связанной с парламентом, сотрясали и ее ирландскую ветвь и отражались на борьбе ирландского народа за права, независимость и свободу. Англиканская церковь претерпевала и внутренние идейные и богословские неурядицы при бесчисленных попытках влить, так сказать, новое вино в ее отжившие и устаревшие мехи. И хотя сам Гамильтон оставался стойким защитником англиканской церкви, колеблясь слегка между "высокой" и "низкой" ее ветвями, он был свидетелем того, как вокруг него в последние 35 лет жизни происходило религиозное брожение и кризисные изменения. В его ближайшем окружении они отразились, например, в том, что его старшая сестра (Грета) и, может быть, Элиза, стали кальвинистками, его два ближайших друга, де Вер и лорд Эдер, перешли в 1860 г. в католицизм. Все это было нелегко воспринять искренне религиозному и даже благочестивому человеку, каким был Гамильтон.

Немало времени и сил отнимали у Гамильтона религиозные споры с друзьями, из-за которых он, в частности, охладел к старинному другу де Веру, специально приезжавшему в обсерваторию, чтобы обратить его в католицизм; дискуссии с Кольриджем (понять которого было совсем непросто); споры с Арабеллой Лоуренс, рекомендовавшей его Кольриджу, которая была убежденной унитаристкой. Кольридж не без основания с ужасом считал унитаризм почти социнианской ересью (убедить ее, впрочем, ни Гамильтону, ни Кольриджу не удалось). Как верный сын англиканской церкви, Гамильтон разделял взгляды, враждебные кальвинизму. Он говорил, что если бы кальвинизм в детстве был навязан ему, он, вероятно, стал бы неверующим. Он призывал бить кальвинизм молотом аргументации. Гамильтон добавлял, что изучил атеизм Бернса, Байрона и Шелли и пришел к заключению, что не христианство, а кальвинизм вызвал их отвращение. "Пусть Господь проявит милосердие по отношению к их душам и душам тех, кто искажает христианство", – восклицает он [Там же, т. 2, с. 306–307].

Так называемое оксфордское движение, которое также хотело духовно реформировать англиканскую церковь, началось в 1833 г. Впрочем, его реформы не затрагивали по существу ни основной догматики, ни организационной стороны англиканской церкви и, скорее всего, ограничивались обрядовой стороной и второстепенными изменениями. Тем не менее оно вызвало довольно бурные дискуссии среди интеллигентной части верующих в затхлой атмосфере англиканской церкви. В Ирландии в 1846—1848 гг., во время Великого Голода, это движение сошло на нет. Было не до него перед лицом смерти голодных людей, заброшенных деревень, массовой эмиграции, запоздалой и недостаточной помощи правительства, неуверенно организованной благотворительности.

В 50-е годы началась новая волна перехода членов англиканской церкви в католичество. Гамильтон отверг это: его отталкивала нетерпимость католической церкви, ее догматика, "идолопоклонство" и многое другое. Нравилась ему в католицизме только тайна исповеди, но это было связано лишь с бременем вины, которую он ощущал с 1848 г. из-за своих непрекращающихся отношений с Кетрин Дисни. Впрочем, он освободился от этого бремени, сделав подробную исповедь.

Гамильтон даже пытался использовать свое математическое образование для "решения" некоторых религиозных "проблем", которые казались ему важными. Он проделал в 1842 г. тщательные расчеты равноденствия в год Никейского Собора. Этот расчет был им опубликован в "Proceeding Review Irish Academy" в 1844 г. Вскоре после этого он опубликовал в "Irish Ecclesiastical Journal" статью, в которой изложил свои расчеты времени вознесения Христа на небо. Поскольку Христос вознесся не только духом, но и телом (что указано в Евангелии), то вознесение должно было происходить во времени. Душа, как нематериальный объект, могла двигаться через пространство мгновенно, но никакой материальный объект этого не может. Гамильтон пришел к выводу, что тело Христа, вероятно, достигло небес в день пятидесятницы и что святой дух мгновенно опустился на апостолов[13]. Странновато для середины XIX в., но что поделаешь! Кстати, по словам Грейвса, одной из причин женитьбы Гамильтона на Елене Бейли была ее благочестивость.

Гамильтон может быть назван наиболее методическим "мешкателем", какой когда-либо жил, ибо его обычаем было написать письмо, сделать копию с него и затем, возможно, не отправлять его в течение месяцев. Его задержки с ответом один раз вынудили де Моргана написать ему: "Если Вы умерли и похоронены, почему Вы не скажете об этом как мужчина, вместо того чтобы заставлять меня догадываться об этом по Вашему молчанию?".

Письма Гамильтона были иногда размером в 50—100 убористо написанных страниц и направлены многим корреспондентам.

---

[13] "Сошествие святого духа на апостолов" в 50-й день после Пасхи – в день пятидесятницы.

Август де Морган

Его неопубликованные манускрипты, хранящиеся в библиотеке Тринити-колледжа, составляют 60 томов, из которых Грейвс опубликовал некоторую часть переписки, особенно с математиком и логиком Августом де Морганом за время 1841–1865 гг. (390 с.). Эта переписка двух замечательных людей весьма интересна. В то же время крайне забавно то, что они встретились только один раз, и притом совершенно случайно.

Гамильтон писал о себе, что он был "трудолюбивый и правдолюбивый (truth-loving) человек". "Пусть это будет моей эпитафией", – добавлял он.

Мы уже отмечали, что Гамильтон вел весьма активную переписку с самыми различными людьми: поэтами, писателями, философами, геологами – гуманитариями и учеными, но среди его корреспондентов не было ни одного первоклассного математика, кроме А. де Моргана. Его письма скорее похожи на диалоги Платона, которые, по существу говоря, вовсе не диалоги, а монологи Сократа: второй собеседник только поддакивает и не вносит сколько-нибудь заметного вклада в рассматриваемую проблему. И хотя одновременно с Гамильтоном в области математического анализа работали такие ученые, как Гаусс, Риман и Вейерштрасс, Куммер, Кронекер и Дирихле в Германии, Лежандр, Коши, Лиувилль во Франции, он мало интересовался их открытиями. Если ему указывали на некоторые аналогии между его открытиями и результатами других ученых, он был удовлетворен защитой своего приоритета в коротких примечаниях, не предпринимая каких-либо попыток исследовать свой подход в сравнении с подходами других ученых.

Это понятно: в викторианскую эпоху репутация и слава были на первом месте (без каких-либо прагматических – оклады, премии – обертонов).

Как всякий человек, он имел смешные черточки (они только более бросаются в глаза у выдающихся людей).

У Гамильтона была любимая собака, которая иногда позволяла себе бедокурить. Как все щенки, она любила жевать вещи и, когда ей удавалось найти вблизи от себя книгу, испытывала на ней остроту своих зубов. К несчастью, вышло так, что такой книгой оказалась Библия, о святости которой пес, по-видимому, не был осведомлен. Но это было больше, чем мог вытерпеть джентльмен-христианин. Гамильтон потерял терпение и дал бедной собаке хорошую взбучку.

Вот что рассказывает о Гамильтоне известный английский ученый Э. Уиттекер, который занял в 1906 г. его кресло и встретил немало людей, которые его еще помнили. Гамильтон располагал 17 акрами земли вокруг обсерватории в Дансинке (как королевский астроном). Он купил корову, чтобы иметь молоко. По истечении некоторого времени в силу естественных причин надой молока стал падать. Он пошел консультироваться с соседним фермером. Тот сказал ему, что дело в том, что корова – единственный обитатель 17 акров – страдает от одиночества. Тогда Гамильтон задал вопрос о возможности обеспечить ее компаньонами, и фермер любезно согласился (разумеется, за плату) позволить своему стаду пастись на богатых пастбищах.

13 июня 1865 г., всего лишь за три месяца до смерти, Гамильтон получил письмо от американского астронома Бенджамена Гулда о том, что вновь созданная во время Гражданской войны Академия наук США избрала его первым в списке 15 ее иностранных членов. Гамильтон прошел значительным большинством, это означало признание его одним из самых крупных из живших тогда ученых. Это доставило ему большую радость.

Весной 1865 г. у Гамильтона был приступ подагры, затем, в июне, второй приступ, осложненный бронхитом. Его разум, однако, оставался ясным, и Гамильтон работал еще за два дня до смерти.

Вот что говорит Ч. Грейвс: "В последнее время его трудолюбие было чрезмерным – вытесняя сон, питание, моцион, развлечения. Я полагаю, что это нанесло фатальный вред его здоровью.

Общее мнение дублинских современников Гамильтона было, что он убил себя работой".

У Гамильтона никогда не было "лишних денег", хотя вообще жизнь его была достаточно обеспеченной. Существует мнение, что именно потому, что у него денег всегда было, так сказать, "в обрез" (он иногда даже брал домашних учеников), он не стал членом Лондонского Королевского общества, куда надо было вносить ежегодный членский взнос в размере четырех гиней. Сам он не годился для управления домашними делами, а жена постоянно болела и жила в основном у родственников. Даже в предсмертные месяцы денежные беспокойства не оставляли его. Типография представила ему счет на 145 фунтов стерлингов, который он не смог оплатить. В 1865 г. он показал (для обложения налогом) свой доход в сумме 607 фунтов в год. Это было достаточно для его нужд, однако 145 фунтов было почти четвертью годового дохода. Он уже не мог (из-за подагрических болей) подписывать чеки, его бакалейщик отказался предоставить ему дальнейший кредит, все его кредиторы буквально стучались в его двери. В доме не было денег даже для того, чтобы заплатить врачу.

В то же время была больна и дочь Гамильтона Елена, которая не могла оказать ему какой-либо серьезной помощи. Все бремя забот в этом тяжелейшем положении легло на плечи сына Гамильтона, Уильяма Эдвина, который, впрочем, неплохо справлялся с делами в трудных обстоятельствах. Однако только денежная помощь друга, жившего по соседству, облегчила положение.

В августе 1865 г. стало ясно, что конец Гамильтона близок. Он просил прочесть ему 145-й псалом, начинающийся словами: "Хвали, душа моя, Господа, буду восхвалять Господа, доколе жив; буду петь Богу моему, доколе есмь". Около двух часов дня, чувствуя приближающийся конец, он "торжественно вытянулся на своей кровати, положил симметрично руки, чтобы таким образом спокойно ожидать смерть". Вспомним: "Императоры умирают стоя". Он скончался 2 сентября 1865 г. в возрасте шестидесяти лет.

Похороны состоялись 7 сентября 1865 г., и члены колледжа, преподаватели, студенты в своих академических одеждах, сопровождаемые членами Ирландской академии наук, прошли процессией за катафалком от ворот колледжа до могилы на кладбище.

Отдавая должное замечательному ученому, ирландские ученые назвали высшую школу теоретической физики в Дублине "Домом Гамильтона".

9. У парапета моста

Идея создания универсального математического исчисления, проблема обобщения комплексных чисел (гиперкомплексные числа) и их геометрические интерпретации привели Гамильтона к разработке исчисления кватернионов, которой он занимался последние 22 года своей жизни. Если первые (хронологически) его исследования в области оптики и динамики связаны между собой оптико-механической аналогией, то исчисление кватернионов в творческом наследии Гамильтона стоит особняком. Это его основной и наиболее замечательный вклад в математику. 16 октября 1843 г. он установил фундаментальную теорему умножения кватернионов, лежащую в основе некоммутативных алгебр. В ноябре 1843 г. он прочитал об этом открытии доклад в Ирландской академии. 16 октября, когда он шел вдоль парапета моста... Впрочем, вот как сам Гамильтон рассказывал впоследствии об этом открытии в письме к сыну:

«Дорогой Арчибальд.

1. Я желал бы при удобном случае поговорить с тобой о кватернионах; такой случай сейчас представился благодаря твоему упоминанию во вчерашней записке, полученной мной сегодня утром, что ты размышлял о нескольких пунктах, связанных с ними (кватернионами. – *Л.П.*), особенно об умножении векторов.

2. Во всей теории кватернионов нет важнее и фундаментальнее вопроса, чем этот: что представляет собой такое умножение? Каковы его правила, объекты и результаты? Какие аналогии существуют между ним и другими действиями, получившими одно общее название? И, наконец, каково его (если таковое возможно) применение?

3. Если попутно с этим предметом мне позволят говорить о себе, то я сделаю это таким образом, что привлеку и тебя, коснувшись "дочетвертичного периода", когда ты, будучи еще ребенком, уже перенял от меня идею вектора, представленного тройками (a, b, c); случайно я запомнил год и месяц – октябрь 1843 г., когда, вскоре по возвращении из Корка и Парсонстауна, куда я ездил в связи с заседанием Британской ассоциации, желание открыть законы умножения вновь возникло во мне с силой и страстностью, желание, дремавшее в течение многих лет, хотя и в те годы почти удовлетворенное и обсуждавшееся с тобой лишь время от времени.

Каждое утро в начале указанного месяца твой (тогда) маленький братец Уильям-Эдвин и ты имели обыкновение за завтраком спрашивать меня: "Ну, папа, можешь ли ты умножать триплеты?" И я всегда был принужден отвечать, печально качая головой: "Нет, я могу производить над ними лишь действия сложения и вычитания".

4. Но 16-го числа того же месяца, оказавшегося понедельником и днем совещания Королевской ирландской академии, когда я шел в академию, чтобы председательствовать, по набережной Королевского канала в сопровождении твоей матери, которую, вероятно, подвезли сюда, то, несмотря на ее разговор со мною, мои мысли так четко работали в подсознании, что дали, наконец, результат, важность которого я тотчас же ощутил. Казалось, замкнулась электрическая цепь и вспыхнула искра, пришел вестник (как я моментально почувствовал) плодов многих долгих лет неуклонно направленной работы мысли во мне, который станет достоянием других, если мне доведется жить достаточно долго, чтобы в точных выражениях сообщить открытие. Я не смог подавить импульса – не философского, в сущности, – вырезать на камне Бругамского моста, мимо которого мы проходили, основную формулу со знаками i, j, k, именно: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, которая содержит решение проблемы, но, конечно, как надпись она давно уже стерлась. Более прочный след, однако, сохранился в книгах совещаний за это число (16 октября 1843 г.) в виде замечания, регистрирующего факт, что я тогда попросил и получил разрешение прочитать доклад о кватернионах на первом общем заседании сессии; чтение имело место в понедельник 13-го следующего ноября. Этими четырьмя параграфами заканчиваю свое первое письмо, но надеюсь в скором времени написать второе.

Твой любящий отец У.Р. Гамильтон[14]».

Теория кватернионов с единицами i, j, k объединила два исторически независимо развившиеся направления: исследования алгоритма алгебры и "геометрические исчисления".

Достижением Гамильтона было даже не столько открытие новой алгебры, сколько то, что он показал, что можно пожертвовать одной или большим числом аксиом обычной алгебры и все же получить вполне осмысленную алгебру.

Многосторонняя разработка теории кватернионов (сам термин также введен Гамильтоном) Гамильтона охватывала: 1) аксиоматическое построение теории функций комплексного переменного; 2) принцип перманентности; 3) исчисление с векторами, характеризующееся развитым символическим аппаратом (понятие оператора ∇ и на его основе понятия градиента, годографа и т.д.).

---

[14] Письмо о кватернионах его преподобию Арчибальду Х. Гамильтону, август 1865 г.

Опубликование Гамильтоном в 1853 г. "Лекций о кватернионах" отнюдь не завершило его исследования по этой теме – они продолжались до самой его смерти, и начиная с 40-х годов, за небольшим исключением, Гамильтон ничем другим не занимался. Однако его книга "Lectures on Quaternions" расходилась настолько плохо, что, когда возник вопрос об издании "руководства" по исчислению кватернионов, совет колледжа серьезно призадумался. В конце концов решили все же его издать, но под пером Гамильтона оно разрослось до 762 страниц текста и 59 страниц вводных материалов (предисловие) и не было еще закончено в 1865 г., а было опубликовано посмертно под названием "Elements of Quaternions" его сыном Уильямом-Эдвином. По мере того как Гамильтону приходили в голову новые идеи, он вносил их в текст верстки, книга разрасталась, и он терял контроль над ее архитектоникой. Он видел, что, чем больше он пищет, тем больше ему еще надо написать... и тем больше рос его долг типографам колледжа.

Интересно, что он послал листы верстки своему, строго говоря, единственному ученику Петеру Гутри Тэту, который в это время был профессором математики в Королевском колледже в Белфасте. Они вступили в переписку, и если Джон Гершель смог разобраться в трех лекциях "Lectures on Quaternions", то Тэт легко пробился через первые шесть. Однако физические приложения кватернионов, как они изложены в этой книге, которые больше всего интересовали Тэта, вызвали у него серьезные сомнения (о роли Тэта в развитии теории кватернионов см. гл. 4).

В целом теории кватернионов, которую сам Гамильтон рассматривал как "универсальную математику", он посвятил 109 работ и две большие книги. Огромные тома "Лекций о кватернионах" и "Элементов кватернионов" – нелегкое чтение. В рецензии на третий том книги Грейвса анонимный рецензент журнала "Nature" не без остроумия заметил, что "многие математики хотели бы видеть эти большие тома на своих книжных полках, но они же в общем предпочитали, чтобы они оставались там" [134].

Теория кватернионов не заменила собою всю математику, а тем более и физику, как о том мечтал Гамильтон. Тем не менее она оказала большое и принципиальное влияние на развитие математики и физики. Она стимулировала исследования по важнейшим направлениям: 1) теория гиперкомплексных чисел и ассоциативных алгебр; 2) линейная алгебра; 3) векторный анализ; 4) теория электромагнитного поля.

Настоящей трагедией Гамильтона были не неудачная женитьба, не алкоголь, а упорная вера в то, что кватернионы представляют собой ключ к единой физической вселенной[15]. Он заблуждался, как мы это ясно видим сейчас, более чем через 120 лет после его смерти, когда настаивал: "...Я должен утверждать, что это открытие (кватернионы. – *Л.П.*) кажется мне столь же важным для середины XIX в., каким открытие (исчисления) флюксий было для конца семнадцатого века".

Никогда ни один великий математик не был столь безнадежно неправ.

Работы Гамильтона, посвященные созданию и разработке теории кватернионов, место этих работ в развитии гиперкомплексных чисел, векторной алгебры и векторного анализа, влияние их на развитие математической физики подробно освещены в гл. 4 настоящей книги.

10. Философские воззрения

Общие философские воззрения Гамильтона были близки взглядам Беркли и Канта. В его письмах и конспектах мы находим много высказываний в духе кантианской философии. Насколько сильно было влияние Канта на мировоззрение Гамильтона, видно хотя бы из сделанной Гамильтоном попытки построить алгебру как науку о чистом времени. Работа под таким названием была опубликована Гамильтоном, который считал, что если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени" [90, т. 2, с. 11]. И далее: "... момент в алгебре, по-моему, является тем же, чем точка в геометрии, переходы, интервалы от одного момента к другому аналогичны ограниченным прямым линиям, время можно мысленно представить или изобразить в виде бесконечной прямой линии. Этот синтез алгебры или же построение ее заново в ее наиболее существенных отделах на основе идеи чистого времени является предметом, которым я недавно занимался".

Мы "наблюдаем, вернее, создаем при помощи математических

---

[15] Вот что пишет Феликс Клейн:

"Очень скоро кватернионы стали в Дублине той областью математических интересов, которая сосредоточила на себе максимальное внимание; они были сделаны даже предметом, по которому был установлен специальный экзамен и без знания которого было немыслимо окончание колледжа. Для самого Гамильтона они сделались краеугольным камнем его математического credo, и он насильственно связывал с кватернионами все свои геометрические и прочие работы; эта фанатичная вера в универсальное значение теории кватернионов росла по мере того, как вырастала к концу его жизни односторонность его интересов и омрачался его дух под влиянием алкоголя".

формул" очертания и соотношения, придаем им форму звезд и созвездий. Однако созданная нами схема оказывается скоро недостаточной, и мы творим все новые и новые теории, вынимая "из сокровищницы математической мысли новую формулу, в которой впечатления нашего зрительного чувства принимают форму и характеристику" [43, прилож.].

Наконец, приблизившись к более или менее адекватному представлению явлений, мы хотим, говорит Гамильтон, чтобы оно, кроме того, было максимально простым.

Теория эпициклов в общем удовлетворительна, но она позволяла объяснить лишь прошлое, она "была довольно гибкой, вы могли ее к чему угодно приспособить, ее никогда нельзя было окончательно опровергнуть фактами, хотя всегда требовалось немного изменить и исправить, но эта теория не представляла собой гениального метода, ибо не содержала принципа постоянного прогресса. Как бы точно ни было знание старых и примитивных движений, оно не дает гениальной помощи для будущего открытия и не является исходным пунктом для вывода новых и зависимых движений" [Там же].

И вот на смену этой картине приходит новая, более продуктивная. Сначала Кеплер соединил факты, а затем Ньютон объединил законы. Он переплавил в огне интеллекта в одно блестящее целое все отдельные истины, которые установил Кеплер. Он создал закон всемирного тяготения, о грандиозной общности которого, по его мнению, трудно дать точное представление. Однако и этот закон не является последним моментом исследования, идущего ко все более общим и новым проблемам. Так, в процессе нашей мыслительной деятельности воссоединяется в единую картину тот видимый мир, познание которого является важнейшей задачей человеческого интеллекта.

Гамильтон особо отмечает то, что исходным моментом познания являются "видимости". Математическая обработка явлений создает свой особый мир математических символов, который находится в каком-то соответствии с внешним миром.

В отношении конкретных проблем методологии естествознания позиция Гамильтона может быть охарактеризована следующими моментами:

1. Он "динамист", занимающий по отношению к атомистике позицию, близкую к позиции Бошковича и Канта.

2. Он рассматривает процесс научного исследования как распадающийся на два разделенных во времени этапа: индуктивный и дедуктивный, причем первый предшествует второму.

3. Он считает науку идеальным построением, которое находится в некотором соответствии с внешним миром, но ни в коем случае не является его отражением.

Теория непротяженных атомов—центров сил восходит к Бошковичу и Канту, произведениями которого особенно увлекался Гамильтон в это время.

Взгляды Гамильтона близки взглядам Бошковича, но в то же время он считает нужным произвести некоторое изменение концепции ученого иезуита. Вот что говорит Гамильтон в одном письме: «Что касается Бошковича, хотя он, вероятно, имел в виду (как вы заметили) лишь исправить имеющиеся в физической науке мнения о предмете, однако, как я попутно установил выше, его взгляды кажутся имеющими связь с возвышенным метафизическим идеализмом, и как к таковым я давно имел к ним склонность. Я прекрасно знаю, как близко они соприкасаются в физике со взглядами, принятыми великими современными аналитиками, и высказывался об этом как о полезном открытии во вступлении к своему "Очерку о динамике". Однако прерывность (хотя и не непроницаемость), которую Бошкович предполагает, кажется мне в известной мере неудовлетворительной, и я время от времени размышлял о возможности оживления старой идеи "заполненности" (plenum), но освобожденной от некоторых устарелых пут. Могла быть создана гипервысшая математика, чтобы осуществить эту идею. Я думаю, что моя характеристическая функция движения системы прерывных точек могла бы распространиться на "полноту" (plenum) "энергий", чтобы выражать результаты их взаимодействия изменением четырехкратного интеграла, но я не развил идеи...» [90, т. 2, 27. VI. 1834].

Мы видим, что Гамильтон в известной мере солидаризуется с теми взглядами, которые развивал Бошкович. Но они не представляются ему совершенно удовлетворительными, так как Бошкович построил картину, основанную на принципе прерывности. Гамильтон находит желательным "оживление старой идеи plenum'а", т.е. представления о заполненном пространстве. Эта мысль, конечно, вытекает из того, что волновая теория света, ставшая к этому времени почти общепризнанной, существенно связана с допущением некоторой среды — эфира.

Интересно отметить несколько неожиданную общность взглядов М. Фарадея и Гамильтона, несмотря на различие их исходных точек зрения.

В июне 1834 г. Гамильтон завтракал с великим экспериментатором М. Фарадеем в "Bilton Hotel" в Дублине и обсуждал с ним общие взгляды на проблемы строения материи. Гамильтон пишет: "Фарадей отправлялся всегда в противоположном направлении и исходя из другого полюса разума (подразумевается — по сравнению с Гамильтоном. — *Л.П.*), но приходил к тем же результатам".

На заседании Британской ассоциации[16], на котором он высказал свою веру в бошковичевские точки, Гамильтон также утверждал, что заключение Пуассона относительно атомного строения материи не необходимо для математического исследования физических законов. Так что здесь, по-видимому, некоторая непоследовательность. В своих реальных расчетах, однако, он всегда предполагал системы массовых точек, действующих друг на друга некоторыми силами.

В связи с этой идеей Гамильтона о plenum'е любопытно отметить, как ему представляется возможность осуществить конкретную разработку этой идеи. Он считает, что для этого "могла быть создана гипервысшая математика..."[17]. Склонность его к такого рода задачам отражена в одной любопытной заметке, которую мы находим в письме Ллойду: "Во всяком случае, – пишет Гамильтон, – автор не претендует на оригинальность своим парадоксом о четвертом измерении пространства, ибо помнит, что давно слышал его в разговоре; новизна, если она имеется, заключается в применении этого парадокса к современной теме, именно – к умножению триплетов".

«Действительно, я помню, что несколько лет назад в Вашем присутствии и, вероятно, в Вашей квартире возникла беседа о четвертом измерении пространства, или, вернее (что почти одно и то же), о геометрии четырех измерений, причем кто-то заметил: "Это как раз предмет для разработки Гамильтону", в ответ на что Вы, я вполне уверен, заметили, что "наука о механике уже является геометрией четырех измерений"» [90, т. 3, 3.XII. 1844].

"В каждой физической науке мы должны восходить от фактов к законам путем индукции и анализа; и можем нисходить от законов к следствиям дедуктивным или синтетическим путем. Мы должны собирать и группировать видимости до тех пор, пока научное воображение различит их скрытый закон и единство возникнет из разнообразия; и затем из единства мы должны вывести вновь разнообразие и заставить открытый закон обслуживать будущее" [92, т. 1, с. 314].

Для построения дедуктивной науки необходимо сформулировать тот основной закон или принцип, который должен являться исходной точкой всего исследования. Этот принцип должен отличаться большой общностью. Он должен устанавливать то, что является наиболее общим и типичным в свойствах данной области явлений. Общий метод "должен вытекать из некоторого закона или принципа наивысшей общности" [Там же, с. 216].

---

[16] Характеристику Британской ассоциации содействия развитию науки см. в [48].

[17] Это замечание и в наши дни звучит вполне современно.

Этот исходный принцип должен быть высшим результатом индукции. Другими словами, он должен быть "наивысшей и наиболее общей аксиомой (в смысле Бэкона)" [13], которая и должна быть отправным пунктом дедуктивного исследования.

Значение же этих аксиом в том, что они могут дать больше, чем заключено в том материале, из которого они получены. Гамильтон также считает, что аксиомы должны дать больше, чем в них как в результатах индукции заключено, так как математический метод дедукции позволяет установить новые соотношения, хотя бы формального характера.

Что же касается представления о том, что наука идет двумя путями: индукции и дедукции, взаимно дополняющими друг друга, то оно могло быть заимствовано Гамильтоном как из философской, так и из естественно-научной литературы. Не останавливаясь на соответствующих местах у Бэкона, сочинения которого были хорошо знакомы Гамильтону, можно указать на одно безусловно известное ему место у Ньютона. "Оптику" Ньютона Гамильтон читал и в конце ее мог найти следующие слова, дающие характеристику методологических устремлений Ньютона: "Как в математике, так и в натуральной философии исследование трудных предметов методом анализа всегда должно предшествовать методу соединения. Такой анализ состоит в производстве опытов и наблюдений, извлечений общих заключений из них посредством индукции и недопущения иных заключений, кроме полученных из опыта или других достоверных истин, ибо гипотезы не должны рассматриваться в натуральной философии. И хотя аргументация на основании опытов и наблюдений посредством индукции не является доказательством общих заключений, однако это – лучший путь аргументации, допускаемой природой вещей, и он может считаться тем более сильным, чем более общей является индукция... Путем такого анализа мы можем переходить от соединений к ингредиентам, от действия к их причинам, от частных причин к более общим, пока аргумент не заключится наиболее общей причиной. Таков метод анализа, синтез же предполагает причины открытыми и установленными в качестве принципов; он состоит в объяснении при помощи принципов явлений, происходящих от них, и в доказательстве объяснений" [40].

Однако сходство высказываний Ньютона и Гамильтона далеко не полное. Различие, и различие весьма резкое, заключено в понимании "принципов", которые являются результатом индукции. Мы видим, что с точки зрения Ньютона принципы – это наиболее общие причины явлений. Дедукция начинается с того момента, когда причины явлений открыты и установлены в качестве принципов. В соответствии с материалистически-детерминистическим мировоззрением XVII в. Ньютон выдвигает как цель и как результат индукции нахождение общих причин данной группы изучаемых явлений. Для Гамильтона же общие принципы, которые получаются в результате индукции и которые являются исходными пунктами для построения дедуктивной теории, имеют совсем другой смысл. Гамильтон считает, что эти принципы являются просто математической формулировкой какого-нибудь свойства, которое нам представляется наиболее важным. Наиболее важным оно является для нас, так как наиболее часто встречается. В самом деле, что является исходным пунктом оптических работ Гамильтона? Относительно этих работ он сам указывает, что их основная цель — "ввести гармонию и единство в положения и заключения оптики, рассматриваемой как отдел чистой науки" [90, т. 2, 3. X. 1832].

Эти работы начинаются, по мнению Гамильтона, с того момента, когда этап индукции в оптике уже закончен. Основной исходный принцип — основа дедукции — уже найден. Какой же это принцип? Гамильтон считает, что таким принципом является принцип Ферма, который в едином соотношении выражает всю совокупность опытных фактов, относящихся к прямолинейности распространения света. То же самое относится к динамике, которая должна быть построена как единая дедуктивная наука, основанная на одном центральном соотношении, которое будет служить основанием для разрешения всех проблем динамической науки.

Что касается существа динамики, то Гамильтон различает по их источнику два вида динамики. Один из них черпает свои заключения в наших размышлениях об идеях нашего рассудка, другой — в явлениях. Одна динамика — наука a priori, а другая — a posteriori. У Канта мы найдем такое же членение науки. Так, в "Пролегоменах ко всякой будущей метафизике" Кант говорит о том, что целый ряд положений является априорным; "таковы положения: субстанция пребывает неизменно и постоянно; все, что совершается, всегда определено известной причиной по постоянным законам и т.д. Это действительно общие законы природы, существующие вполне a priori" [27]. Сравним с этим высказывание Гамильтона, который, обсуждая проблему теории науки, пишет, что "здесь имеются или могут быть представлены две динамические науки: одна — субъективная, a priori, метафизическая, дедуцируемая из размышлений о наших идеях силы, пространства, времени; другая — объективная, a posteriori, физическая, открываемая наблюдением и обобщением фактов и явлений; что эти две науки различны по роду, но интимно и чудесно связаны вследствие последнего единства, субъективного и объективного, в боге, или, говоря менее специально и более религиозно, благодаря святости обнаружений, которые ему самому угодно было совершить во Вселенной для человеческого интеллекта: так что две науки никогда полностью неотделимы, но могут продвигаться вперед совместно и пользоваться многими общими выражениями, и каждая должна обладать аналогами для некоторых, если не для всех, результатов и теорем другой" [90, т. 2, 25.V. 1833].

Итак, мы видим, что с точки зрения Гамильтона мы должны априорно приписывать любое *мыслимое* нами изменение (в частности, криволинейное движение) некоторой причине, но если мы *наблюдаем* тело, движущееся криволинейно (т.е. изменяющее свое состояние движения), то мы только можем ожидать, что найдем какое-либо другое тело, которое своим действием вызывает наблюдаемое нами изменение; однако это не необходимо. Тот факт, что человечество бесчисленно много раз наблюдало причинно-следственные ряды и вывело отсюда заключение о детерминированности всех явлений (без этого невозможна практическая деятельность человека), не является для Гамильтона доказательством принципа причинности. Индукция от n раз повторенного опыта к $n + 1$ случаю может дать только "ожидание", или, переводя на язык математический, "математическое ожидание – вероятность".

Что является, с точки зрения Гамильтона, основной задачей и целью физической науки? На этот вопрос он дает недвусмысленный ответ в одной из своих лекций по астрономии: "Цель физики как науки – констатировать и объяснять видимые явления; классифицировать и обобщать факты; открывать скрытое единство и постоянство природы среди кажущегося разноообразия и изменчивости; построить, по крайней мере отчасти, историю внешнего мира, приспособленную к пониманию человека; дать отчет о прошлых явлениях и предвидеть будущие, изучать язык и истолковывать *пророчества* Вселенной". В этом определении прежде всего нуждается в раскрытии выражение "объяснять видимые явления". Слово "объяснять" – достаточно многозначно. Без дополнительных разъяснений остается нераскрытым, что надо под ним понимать.

Трудно сказать, чувствовал это Гамильтон или нет, но он дает некоторые пояснения тому, что он понимает под вышеприведенным выражением: "... в физической науке мы стремимся не только давать отчет о видимых явлениях, но и объяснять их, т.е. устанавливать связь между рассудком и опытом, и не только путем сравнения одних явлений с другими, но и путем раскрытия аналогий между их законами и нашими собственными законами и формами мышления, проникая нашим существом через землю, воду и воздух" [43, прилож.]. Это понимание "объяснения" не выходит за пределы философии Канта.

Глава 2

Вначале была оптика

1. Первая научная работа ”О каустиках”

Интерес к оптике (геометрической) появился у Гамильтона, если верить сообщению Грейвса [90, т. 1], когда ему было всего четырнадцать лет. В 1822 г. (ему было 17 лет) он начал писать на эту тему, а поступив в Тринити-колледж Дублина, в свободное от занятий время продолжал свои исследования. В 1824 г. он закончил работу ”О каустиках”[1]. В записях совета Ирландской академии наук под датой 13 декабря 1824 г. читаем: «Получена статья ”О каустиках”, часть I, У. Гамильтона, эсквайра Т.С.Д., представленная президентом... Решено, что она будет передана на заключение комитету, состоящему из д-ра Мак-Дониела, м-ра Харта и м-ра Ларднера, и ⟨решено⟩ просить их дать заключение так скоро, как это возможно». 13 июня 1825 г. комитет представил в совет следующее заключение (пять месяцев для ознакомления трех членов комитета с работой, совсем нелегкой по содержанию и характеру изложения, и обсуждения ее – срок не такой уж большой):

”...результаты, полученные автором, новы и чрезвычайно интересны, а при исследованиях, которые привели к ним, проявлено значительное аналитическое искусство. Однако считаем, что рассуждения, изложенные в этом мемуаре, столь абстрактны по своему характеру, а формулы столь общи, что требуется более полное изложение аргументации, с помощью которой некоторые из выводов работы были установлены, а аналитический процесс, которым некоторые из формул были получены, должен быть явно и подробно изложен. Это необходимо, считаем мы, для того, чтобы сделать опубликование мемуара полезным для всех”. В кратком введении к рукописи этой статьи Гамильтон пишет: ”Две недели назад я полагал, что никакой другой автор не рассматривал когда-либо Оптику в таком плане, но в это время преподобный Мр. Бойтон ... показал мне прекрасный мемуар Малюса на эту же тему ... представленный в Институт в 1807 г.”. Однако, отмечает Гамильтон, методы и объем рассмотренных вопросов существенно различны.

Как известно, теорема Малюса, представляющая квинтэссен-

---

[1] Каустика (каустическая поверхность) – геометрическое место точек центров кривизны главных нормальных сечений волнового фронта, исходящего из светящейся точки и прошедшего через оптическую систему.

цию его теоретической оптики, может быть установлена тремя различными методами: 1) аналитически, исходя из эмпирических законов отражения и преломления; 2) основываясь на принципе наименьшего действия в корпускулярной теории света; 3) исходя из волновой теории, в которой лучи являются ортогональными траекториями системы волновых поверхностей, распространяющихся согласно построению Гюйгенса. Уже вторым методом Гамильтон получил удовлетворительное доказательство теоремы, подобное же доказательство получается исходя из волновой теории, при замене принципа наименьшего действия принципом Ферма. Третий подход немедленно делает теорему Малюса очевидной, так как каждое семейство поверхностей обладает ортогональными траекториями. Следовательно, теорема Малюса заключена в неявном виде в построении Гюйгенса, и работы Дюпена и Жергона представляют собой только согласование эмпирических законов отражения и преломления с этим построением. Гамильтон это понял и отметил приоритет Гюйгенса [90, т. 2, с. 92]. По-видимому, Гамильтон, когда он начинал работу над "Теорией систем лучей", не знал о работах Дюпена (1784–1873) [78], Кетле [141], Жергона [86], посвященных теореме Малюса [123, 124]. В 1808 г. Малюс установил эту теорему для случая однократного отражения или преломления лучей, исходящих из светящейся точки, однако ошибочно полагал, что эта теорема не выполняется в случае двукратного (и вообще многократного) отражения или преломления.

В 1816 г. Дюпен дал простое общее доказательство этой теоремы для многократного отражения, а специальная комиссия (Араго, Ампер, Коши) разобрала причины ошибки Малюса [57]. Заметим, что в отличие от аналитического и весьма громоздкого доказательства Малюса доказательство Дюпена имело чисто геометрический характер (его построение описано Гамильтоном в п. 15 первой части "Теории систем лучей"). Правильность полной теоремы Малюса (включая и случай преломления) была строго доказана одновременно Кетле (1825 г.) и Жергоном (1826 г.); метод последнего был использован Тиммермансом [157] для преломления в двух измерениях.

Итак, с учетом решения комитета Гамильтону осталось лишь несколько подробнее изложить ход своих рассуждений для того, чтобы опубликовать эту свою первую работу по математической оптике. Однако статья "О каустиках" не была опубликована при жизни автора, а ее первая часть увидела свет 107 лет спустя [92, т. 1, с. 345–368]. Рукопись второй части не найдена.

Возникает естественный вопрос: почему Гамильтон не только не доработал свою рукопись "О каустиках", но отложил ее и не сделал никакой попытки ее опубликовать (что ему было бы нетрудно, особенно в бытность его президентом Ирландской академии наук)?

При отсутствии печатных материалов, мемуаров и архивных данных можно высказать лишь более или менее вероятные предположения, использовав как отправной пункт тот факт, что в "On caustics" нет характеристической функции, а через два-три года она становится основой исследований Гамильтона в "Теории систем лучей". Можно поэтому предположить, что применение столь общего принципа, как принцип наименьшего действия, который в оптике непосредственно связывается с характеристической функцией, показалось Гамильтону более перспективным для реализации его "программы" единой теории для света, звука и тепла (заметим, что он нигде не писал впоследствии ни о звуке, ни о тепле и что в этой программе не упоминается механика).

Придать этому предположению необходимый конкретный вид из-за отсутствия каких-либо материалов, мы, конечно, не можем, а поэтому остается только перейти к рассмотрению развития характеристической функции в оптических работах Гамильтона и возникновения на этой основе оптико-механической аналогии.

2. Теория систем лучей

Мировоззрение Гамильтона и его убежденность в существовании "универсальной математической схемы, Универсума" определяли характер (поиск общего, всеобщего) его исследований. Выбор же конкретной тематики, особенно в начальной их стадии, был связан как с его работой (ставшей многолетней) в качестве королевского астронома Ирландии и руководителя Дублинской астрономической обсерватории (оптические свойства астрономических инструментов), так и в известной степени с практическими вопросами оптического приборостроения. Ф. Клейн говорит по этому поводу: "Гамильтон первоначально исходил в своих исследованиях систем лучей из практических запросов оптического приборостроения. В силу этого он рассматривал только такие световые волны, которые выходят из отдельных точек". Подчеркивая характерную для Гамильтона "всеобщую аналитическую формулировку" основных положений, Ф. Клейн отмечает вместе с тем, что характеристическая функция в "принципе переменного действия ...служит не для того, чтобы дать ответ на вопрос о собственных целях, которые преследует природа в оптических процессах (вспомним Мопертюи и многих других.– *Л.П.*), но и для того, чтобы ответить на вполне законный вопрос конструктора оптических приборов, как нужно искусственно сочетать эти процессы для получения возможно более совершенного прибора" [28].

Начиная с 1827 г. Гамильтон публикует ряд работ по "теории систем лучей". По поводу формы этих работ Клейн делает очень меткое замечание. Он говорит, что "эти статьи по их форме суть все что угодно, только не безупречные; в необозримом, неуклюжем порядке, полные невыведенных намеков и повторений, они все-таки представляют собой большое богатство мыслей" [Там же]. Первые работы Гамильтона были "по форме весьма растрепанными", замечает Лармор [115]. "Теория систем лучей" была прочитана в академии 23 апреля 1827 г., когда Гамильтон был еще студентом. 7 мая того же года совет направил ее в печать. Первая часть была напечатана в 1828 г., вторая часть впервые опубликована в 1931 г. в [92, т. 1, с. 88–106]. Рукопись третьей части обнаружена в бумагах Гамильтона в архиве Тринити-колледжа.

Вторая часть "Theory of systems of rays" была найдена профессором Сингом в архиве рукописей Гамильтона (записная книжка № 8 в библиотеке Тринити-колледжа, Дублин). Рукопись не имеет даты, Грейвс относит ее ориентировочно к 1830 г. В начале ее можно прочесть выскобленное первоначальное заглавие, которое, как кажется, Гамильтон некоторое время намеревался дать всей работе (окончательное название которой "Theory of systems of rays"), – "Приложение анализа к оптике" (по аналогии с "Приложением анализа к геометрии" Монжа).

Указанная в начале "Теории систем лучей" дата устного сообщения этой работы совету (1824!) совпадает с датой сообщения статьи "О каустиках" тому же совету. Это позволяет предположить, что Гамильтон рассматривал "Теорию систем лучей" как пересмотр более ранней работы "О каустиках". На самом же деле содержание этих статей существенно различно. В более ранней работе не рассматриваются проблемы оптики (такие, как отражение и преломление), а рассматриваются свойства общих прямолинейных конгруэнций, не являющихся обязательно нормальными, а характеристическая функция отсутствует. В "Теории систем лучей", напротив того, преобладают оптические задачи, которые рассматриваются с помощью характеристической функции. Кроме того, так как рассматриваемые в первой и второй части оптические среды обыкновенные, то все конгруэнции, исследуемые в них, нормальные.

Первой (опубликованной) части "Theory of systems of rays" предпослано чрезвычайно подробное оглавление предполагаемого содержания всех трех частей: Ч. I. Обыкновенные системы отраженных лучей; Ч. II. Обыкновенные системы преломленных лучей; Ч. III. Необыкновенные системы и системы лучей в общем виде.

Оглавление это занимает почти восемь страниц текста. В конце его находим главу тринадцатую "Закон наименьшего действия". Изложение содержания этой главы таково: "Общие выражения этого закона; вывод этих выражений с помощью вариационного исчисления. В каждой оптической системе действие может рассматриваться как характеристическая функция, из формы которой могут быть выведены все другие свойства системы. Эта функция (если мы знаем светящуюся точку и отражающие и преломляющие среды) зависит только от координат и цвета; ее частные производные первого порядка по этим координатам в обыкновенных системах имеют вид

$$\frac{\partial i}{\partial x} = v\alpha \quad \frac{\partial i}{\partial y} = v\beta, \frac{\partial i}{\partial z} = v\gamma,$$

а в необыкновенных

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma},$$

где α, β, γ – косинусы углов, образуемых лучами с осями $x, y, z,$ а v – скорость, установленная по эмиссионной теории (по материальной гипотезе – material, как пишет Гамильтон) и рассматриваемая в необыкновенных системах как однородная функция первой степени косинусов α, β, γ. Аргументы для наименования этого принципа *принципом постоянного действия: аналогичный принцип применительно к движению систем тел* (курсив Гамильтона. – *Л.П.*) ..." [92, т. 1, с. 9].

3. Развитие теории характеристической функции

Центральная идея развиваемого Гамильтоном метода – идея характеристической функции для каждой оптической системы лучей. Это характеристическое соотношение, различное для различных систем, таково, что геометрические свойства системы могут быть выведены из него методом, аналогичным тому, который был изобретен Декартом для алгебраического решения геометрических проблем. Все свойства оптических систем для каждой кривой или поверхности вытекают из этого основного соотношения. В этой теории устанавливается связь восьми величин, из которых шесть суть координаты двух переменных оптически связанных точек в пространстве, седьмая есть индекс цвета (index of colour), и восьмая, которую Гамильтон назвал характеристической функцией, есть "действие" между двумя переменными точками. Эта функция называется характеристической, ибо Гамильтон нашел, что в способе зависимости этой функции от семи названных выше величин заключены все свойства оптической системы. Поэтому Гамильтон говорит: "Я рассматриваю как сводимые к изучению этой характеристической функции посредством ... фундаментальной формулы все проблемы математической оптики, относящиеся ко всем мыслимым сочетаниям зеркал, линз, кристаллов и атмосфер" [Там же, т. 1, с. 295–296].

Впервые характеристическая функция появляется в § 19 и 20 первой части "Теории систем лучей" лишь после того, как теорема Малюса была доказана с помощью вариационного принципа. Никакой связи этой функции с рассмотрением обобщенной теоремы Малюса в "О каустиках" указать не удается. Нет оснований связывать появление ее идеи у Гамильтона и с гравитационным потенциалом (это отметил еще Дж. Синг). Сам Гамильтон сравнивает свое открытие характеристической функции с открытием аналитической геометрии Декартом [92, т. 1]. Это, однако, не помогает понять ход его мысли. Более вероятным представляется путь, исходящий из принципа наименьшего действия. Он сам отвечает: "Общей проблемой, которую я поставил перед собой в оптике, является изучение математических следствий принципа наименьшего действия..." [Там же]. Такой подход, исходящий из "первых принципов", как говорили в то время, был, как мы уже отмечали, присущ научному credo Гамильтона.

Стремление к общности результатов, к объединению в единой математической схеме различных (в пределе – всех!) явлений и процессов природы проявилось у Гамильтона в самых первых научных работах. Так, во введении к "Теории систем лучей" двадцатидвухлетний автор пишет: "...за исключением этого автора (Малюса. – *Л.П.*), я не знаю никого, кто пытался бы во всей общности описать свойства оптических систем, а тем более установить принципы, относящиеся к системам лучей в общем, которые были бы приложимы не только к теории света, но также и к теории звука и тепла. Установить такие принципы и исследовать такие свойства – цель этой работы" [Там же, с.1].

В том же ключе развернутся в дальнейшем оптико-механическая аналогия Гамильтона и попытка создания им в исчислении кватернионов универсальной математики.

Хотя Гамильтон сам указывает на существующее (по его мнению) сходство его работы с построением аналитической геометрии Декарта, он нигде не дает геометрической интерпретации своих "вспомогательных функций" W и T.

Геометрия системы лучей подробно и в очень общем виде была разработана Куммером [108, с. 189–230]. Характеристическая функция V определяется в "Теории систем лучей" (ч. 1, 2) как функция, полный дифференциал которой dV равен

$$dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz, \tag{2.1}$$

где α, β, γ – направляющие косинусы луча, dx, dy, dz – произвольные смещения. Эта функция в первой части "Теории систем лучей" наиболее просто может быть представлена как расстояние, измеренное вдоль действительной траектории светового луча от закрепленного источника света до общей конечной точки. При этом речь здесь идет только о системах с отражением и луч состоит из некоторого числа прямых линий.

Во второй части функция V определяется и для обыкновенного преломления с помощью формулы (2.1), в которой α, β, γ являются теперь направляющими косинусами *конечного* луча. Согласно этому определению V есть указанная выше траектория, деленная на коэффициент преломления конечной среды. Только в конце этой части появляются уравнения лучей в изотропной, но гетерогенной среде, выведенные с помощью вариационного исчисления,– определение V как интеграла действия (или оптического пути) делается явным.

В самом начале первого дополнения Гамильтон вводит допущение, что интеграл действия $\int v ds$ есть общее определение характеристической функции, рассматриваемой как функция конечных координат; среда распространения лучей тоже приобретает более общий характер – она не должна быть ни однородной, ни изотропной.

Для ряда сред, которые могут быть и анизотропными, и гетерогенными, Гамильтон написал два уравнения:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega\,(x, y, z, \sigma, \tau, \nu, \chi) = 0, \\ \Omega' &= \Omega'\,(x', y', z', \sigma', \tau', \nu', \chi') = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Штрихованные величины относятся к начальным лучам, а χ – цветовой индекс. При выводе волновой поверхности начальная точка закреплена, среда однородна (но не изотропна), и Гамильтон рассматривает только один цвет света, тем самым χ исключается.

Тогда выражение

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = \mu^2 \tag{2.3}$$

для гомогенной среды есть частный случай уравнения для функции Ω. В динамике аналогом является уравнение Гамильтона–Якоби.

Однако сразу после этих общих положений Гамильтон ограничивается рассмотрением однородной среды. Здесь же вводится новая характеристическая функция W, которая является явной функцией только направления (т.е. направляющих косинусов α, β, γ) и константой вдоль каждого отдельного конечного луча.

Только позднее Гамильтон заметил, что предпочтительно рассматривать W как функцию $\partial v/\partial\alpha$, $\partial v/\partial\beta$, $\partial v/\partial\gamma$. Во втором дополнении это различие, впрочем, несущественно, так как в нем рассматривается по большей части изотропная и однородная среда, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = \mu\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial\beta} = \mu\beta, \quad \frac{\partial V}{\partial\gamma} = \mu\gamma.$$

В конечной среде функция V не может быть выбрана произвольно, а должна для однородной и изотропной среды удовлетворять некоторому уравнению в частных производных

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \mu^2, \tag{2.4}$$

в то время как функция W может быть выбрана произвольно.

Перейдем теперь к кратким замечаниям по поводу содержания третьего дополнения, которое может рассматриваться как полное изложение теории Гамильтона (без ссылок на более ранние работы).

В этом дополнении теория характеристической функции достигает большой общности и эвристическая ее ценность показана на многочисленных примерах. Если ранее исходная светящаяся точка во всем исследовании считалась фиксированной и ее координаты не входили в явном виде в функции V и W, то теперь они выступают так же явно, как и координаты конечной точки, и V определяется как интеграл действия (или оптический путь) $\int v\,ds$ в пределах от начальной до конечной точки и рассматривается как явная функция шести координат этих двух точек. Функция W переопределяется как функция начальных координат x_0, y_0, z_0 и конечных значений $\partial v/\partial\alpha$, $\partial v/\partial\beta$ $\partial v/\partial\gamma$, а на свойства однородности и изотропности среды не накладывается никаких ограничений. Здесь же вводится новая важная "вспомогательная" функция

$$T = T\left(\frac{\partial v_0}{\partial\alpha_0}, \frac{\partial v_0}{\partial\beta_0}, \frac{\partial v_0}{\partial\gamma_0}, \frac{\partial v}{\partial\alpha}, \frac{\partial v}{\partial\beta}, \frac{\partial v}{\partial\gamma}\right). \tag{2.5}$$

Функция $T\,(\sigma', \tau', \sigma, \tau)$ может быть названа угловой характеристической функцией. Для функций V, W, T имеем $V\,(x', y', z', x, y, z) = T\,(\sigma', \tau', \sigma, \tau) - (\sigma' x' + \tau' y' + \nu' z') + (\sigma x + \tau y + \nu z)$, $W(x', y', z', \sigma, \tau) = T(\sigma', \tau', \sigma, \tau) - (\sigma' x' + \tau' y' + \nu' z')$. Так как $\sigma', \tau', \nu', \sigma, \tau, \nu$ определяют полностью луч, то очевидно, что T есть функция $\sigma', \tau', \sigma, \tau$, поскольку v', v задаются этими четырьмя величинами.

Если начальная и конечная среда однородны, то T есть функция только направлений начальных и конечных лучей. Функцию T можно ввести, только если рассматривать начальную точку как изменяющуюся; в противном случае (и если конечная среда однородна) конечный и начальный лучи не независимы. Теория далее расширяется явным введением "хроматического индекса" χ – только теперь теория функции V связывает опять восемь уравнений. Для пояснения приведем таблицу, в которой показана связь вторых производных трех функций V, W, T.

Производные функции	Выражены через производные функции
$W(\sigma, \tau, \nu, x_0, y_0, z_0, \chi)$	$V(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \chi)$
V	W
$T(\sigma, \tau, \nu, \sigma_0, \tau_0, \nu_0, \chi)$	W
W	T

(Считается, что W однородная первой степени функция от σ, τ, ν [2]; T – однородная первой степени от $\sigma, \tau, \nu, \sigma_0, \tau_0, \nu_0$; там, где используется функция W, конечная среда считается однородной ($\Omega(\sigma, \tau, \nu, \chi) = 0$), а где применяется T, там однородны обе среды.)

Ранее функция V рассматривалась Гамильтоном как функция только конечных координат x, y, z (никакие вариации положения начальной точки – источника света – не рассматривались) и определялась заданной конгруэнцией лучей, пересекающих заданную комбинации сред. Теперь же в третьем дополнении выполнено обобщение, которое включает вариации начальных точек x', y', z', так что теперь V есть функция x', y', z', x, y, z и определяется заданной комбинацией сред и может быть использована для рассмотрения всех возможных оптических конгруэнций, пересекающих эту комбинацию. С помощью этого подхода функция W "первого и второго дополнения" распространяется таким образом, чтобы охватывать как начальные, так и конечные элементы луча. Здесь возможны три способа расширения в соответствии с тем, хотим ли мы включить: 1) начальное положение и конечное направление, 2) начальные и конечные направления, 3) начальное направление и конечное положение. Так как третье не отличается существенно от первого,

[2] $\sigma = \partial V/\partial x$, $\tau = \partial V/\partial y$, $\nu = \partial V/\partial z$; начальные значения у Гамильтона обозначаются обычно индексом "штрих" (например, x') или, реже, "нуль" (x_0).

то Гамильтон вводит в рассмотрение только два расширения содержания прежней W, а именно: 1) W зависит от начального положения и конечного направления и 2) T зависит от начальных и конечных направлений.

Форму W и T легко найти, приняв во внимание, что

$$\Sigma\, \sigma\delta x - \Sigma\, \sigma'\delta x' + \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi$$

есть полный дифференциал δV:

$$\delta W = \delta\, \Sigma\, \sigma x - (\Sigma\sigma\delta x - \Sigma\, \sigma'\delta x' + \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi) =$$

$$= \Sigma x\delta x + \Sigma\; x'\delta x' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi, \qquad (2.6)$$

$$\delta T = (\Sigma x\delta\sigma + \Sigma\, \sigma'\delta x' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi) - \delta\, \Sigma\sigma'\delta x' =$$

$$= \Sigma x\delta\sigma - \Sigma x'\delta\sigma' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi. \qquad (2.7)$$

Подчеркнем еще раз, что Гамильтон определил четыре функции, из которых функцию V он назвал характеристической, а функции W, T, S – вспомогательными. Однако нет никаких оснований не назвать их все характеристическими функциями, так как каждая из них характеризует оптическую систему в том смысле, что две оптические системы различной конструкции, но с одной и той же характеристической функцией ведут себя в точности одинаково.

В конце "Третьего дополнения", в § 26, Гамильтон сочетает развитую им ранее точку зрения (эмиссионную) с волновой теорией света. Величины σ, τ, ν или $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$, т.е. частные производные первого порядка характеристической функции V по конечным коэффициентам, представляют собой в волновой теории света компоненты нормальной медленности распространения волны. Основная формула его теории

$$\delta V = (\delta \int v\, ds) = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\delta x - \frac{\partial v'}{\partial \alpha'}\delta x' \qquad (2.8)$$

(и аналогично для y' и z') может быть легко объяснена и доказана на основе принципов волновой теории. Следующие параграфы развивают концепцию эквивалентности эмиссионной и волновой теорий в рассматриваемом круге задач геометрической оптики.

4. Динамика света и динамика темноты

Начиная с 1832 г. Гамильтон приступил к изучению физики распространения света и вступил в битву о природе света (корпускулярная (эмиссионная) или волновая) на стороне волновой теории. Как мы уже отмечали, в работах по "теории систем лучей" (геометрическая оптика) Гамильтон по самой сути проблемы не был связан с каким-либо конкретным представлением о природе света. Поэтому перед ним теперь возникла существенно новая задача. На стороне эмиссионной (корпускулярной) теории в Англии стоял Д. Брюстер, против него выступали сторонники волновой теории (Дж. Гершель, Дж. Эри, У. Уэвелл в Кембридже, Баден Пауэл[3] в Оксфорде). Общее состояние проблемы было таково: в начале XIX столетия в Англии Томас Юнг, во Франции Огюстен Френель показали, что явления интерференции и дифракции легко объясняются, если предположить, что свет есть волновой процесс, распространяющийся в некоторой передающей среде. Однако они столкнулись с неожиданно резкой оппозицией. В серии статей в "Edinburgh Review" с 1802 по 1805 г. Лорд Генри Брум (отнюдь не профессиональный физик, а известный политический деятель и оратор) подверг теорию Юнга такой злобной критике, что Юнг уже больше и не пытался отвратить своих коллег от ньютоновской точки зрения. Не менее резкую оппозицию встретил во Франции Френель, где против него выступили Лаплас, Био, Пуассон, Малюс, влияние которых преобладало во Французской академии наук. Ситуация еще более обострилась, когда потребовалось ввести только поперечные волны. Однако во Франции (в частности, благодаря разумной позиции Ф. Араго) примерно к 1827 г. (год смерти Френеля) волновая теория стала успешно вытеснять корпускулярную. В Англии это еще только предстояло.

Когда Гамильтон в колледже между 1824 и 1827 г. изучал оптику, он читал книги Коддингтона [69], Вуда [103] и Стэка [150], в которых оптические явления объяснялись с корпускулярной точки зрения. Даже Х. Ллойд в своей книге [120] писал, что "любой ответ на вопрос о природе света является еще сомнительным" (за год до экспериментального подтверждения им предсказанной Гамильтоном конической рефракции). То, что волновую теорию поддержал Дж. Гершель (хотя и с осторожными оговорками), в то время наиболее известный и уважаемый английский ученый, мнение которого значило очень много,

[3] Пауэл Баден (1796–1860), профессор геометрии в Оксфорде. Опубликовал исследования по оптике и излучению.

сыграло важную роль[4]. Основными проблемами, которые казались ему неясными с точки зрения волновой теории света, были дисперсия и адсорбция.

Представители корпускулярной теории защищали ее, отыскивая новые оптические явления, которые волновая теория, по их мнению, не могла объяснить. Это делал Брюстер и многие другие, стоявшие вне университетов и нашедшие в Британской ассоциации содействия развитию науки удобный форум для того, чтобы представлять свои взгляды.

Гамильтон начал исследования о природе светоносного эфира с попытки решить проблему дисперсии. Эта проблема состояла в том, что надо было построить такую механическую модель среды, в которой волны света различной длины распространялись бы с различными скоростями, и в то же время эта модель объясняла бы и другие оптические явления. Светоносный эфир начала XIX в. был странным "веществом". Для распространения волн света столь высокой частоты и скорости этот эфир должен был иметь свойства упругого твердого тела, подобного стали и, по-видимому, несжимаемого, обладающего также весьма высоким сопротивлением по отношению к деформации. Конечно, космос не мог быть заполнен "сталью" или чем-либо подобным ей. Тем не менее математический аппарат теории волн в упругой твердой среде мог быть исходным пунктом для построения теории распространения световых волн в эфире. Такие исследования начал в 1828 г. О. Коши. Эта так называемая первая теория Коши правильно предсказывала многие оптические явления, в частности волновые поверхности в кристаллах. Однако перед ней возникли трудности, одна из которых имела принципиальное значение, – можно было построить ряд таких теорий, из которых ни одна не имела преимуществ перед другой.

В итоге десятилетних попыток самого Коши [161] и его последователей стало ясно, что светоносный эфир не ведет себя подобно упругому твердому телу.

Гамильтон, как и многие другие теоретики, занимавшиеся проблемой эфира, считал, что эфир состоит из очень мелких частиц, притягивающих и отталкивающих одна другую (соседнюю!), согласно постоянным законам, и что именно для этой модели должно быть развито математическое описание. Эту картину Гамильтон, хотя и не без некоторых колебаний, предпочел континуальной концепции эфира, разрабатывавшейся его коллегой по Ирландской академии наук Мак-Куллахом. Причин такого вы-

---

[4] Отметим, что в своей статье "Light" в "Encyclopedia Metropolitana" (т. 4, с. 533) Гершель с похвалой отозвался о гамильтоновой "Теории систем лучей".

бора было две: 1) исходя из философских соображений Гамильтон предпочитал положить в основание "центры сил" Бошковича[5]; 2) он рассматривал проблему дисперсии, а для этой задачи уже Френелем было показано, что из модели непрерывного эфира нельзя получить дисперсии, а из эфира, состоящего из частиц, разделенных расстояниями, сопоставимыми с длиной волны света, можно.

Мечта Гамильтона стать "оптическим Ньютоном", опираясь на результаты, полученные Мак-Куллахом, который мог бы быть для Гамильтона "оптическим Кеплером", не сбылась, да и не могла сбыться на уровне тогдашней (доэлектромагнитной) модели оптических явлений и светоносного упругого эфира.

Только в январе 1839 г. Гамильтон нашел оптическую проблему, которая была ему по вкусу. Все предшествовавшие теории рассматривали распространение света, как если бы волна уже установилась в среде. В отличие от многих исследователей того времени Гамильтон исходил из некой гипотетической структуры эфира и затем пытался математически вывести из нее законы оптики. Получалось плохо[6] (после Максвелла мы знаем почему).

Движущийся волновой "фронт" определялся как последовательные положения гребня волны. Это были теории некоего "стационарного состояния", которое возникло спустя некоторое время после того, как первая волна вступила в покоящуюся среду, т.е. предполагалось, что частицы эфира уже находятся в состоянии колебания. Гамильтон же хотел изучить действие света, впервые вошедшего в среду, и рассчитать, как волна действует, когда свет вступает в темную (darkened) область. Он назвал эту проблему динамикой темноты (dynamics of darkness) или, по предложению Дж. Гершеля, скотодинамикой[7]. В ней он изучил точным образом, как эластооптическое возмущение в некоторой области этой среды распространяется в ее невозмущенную часть. Это привело его к открытию различия между групповой и фазовой скоростью.

---

[5] В июне 1834 г. в письме Логану (H. Logan) Гамильтон выразил некоторую неудовлетворенность атомами Бошковича на том основании, что они вводят прерывности, которые, как полагал Гамильтон, было бы лучше заменить на plenum.

Вновь возникший в это время интерес к взглядам Бошковича виден хотя бы из того, что и Фарадей так же, как Гамильтон, внимательно обсуждал концепцию Бащковича [90, т. 2, с. 88].

[6] Эти исследования, содержащиеся в записной книжке № 40 (1835) Гамильтона, хранящейся в библиотеке Тринити-колледжа (Дублин), предвосхищают частично последующие исследования Коши.

[7] От греческого слова σχοτεῖνοξ – темный. Этот термин, которому нельзя отказать в известной красочности, в науке не удержался.

Гамильтон пишет: "Много сделано, может быть, в динамике *света*; мало, я полагаю, в динамике *темноты*" [90, т. 2, с. 599].

Как это было и в других работах Гамильтона, эти исследования привели к плодотворным математическим методам, включающим теорию "флуктуирующей функции" и асимптотического разложения, называемого в настоящее время "бесселевыми функциями" [Там же, с. XIV].

Все же наиболее важным открытием было впервые установленное им различие между групповой скоростью и скоростью фазовой[8].

Открытие этого различия часто приписывается Рэлею. Он упоминает его в "Теории звука" [142] и в статье "On progressive waves" [143]. В этой статье он отмечает, что первым, кто указал на отличие этих скоростей, был Стокс, о Гамильтоне он не упоминает. Рэлей пишет: "В тихой воде можно наблюдать, что скорость группы волн меньше, чем скорость индивидуальных волн, из которых она состоит; волны кажутся продвигающимися через группу и замирают, когда они приближаются к ее внешней границе. Явление, я полагаю, объяснено впервые Стоксом" [143].

Это неверно. Работы Гамильтона были опубликованы на 9–10 лет раньше работы Стокса [15], а насколько ясно понимал Гамильтон физический смысл различия этих скоростей, хорошо видно из следующего отрывка из его письма Дж. Гершелю: "Я полагаю, что полностью установлено различие между *скоростью распространения данной фазы* (курсив Гамильтона.– *Л.П.*) в пространстве, *уже занятом* некой системой волн, и *скоростью*

---

[8] Понятие групповой скорости относится к случаю распространения волн сложного (несинусоидального) характера в среде, в которой фазовая скорость распространения синусоидальных волн зависит от их частоты. Зависимость фазовой скорости волн от их частоты называется дисперсией волн.

Выражение для групповой скорости u, которая в среде с дисперсией не равна фазовой скорости v волны с длиной волны λ имеет вид

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

Групповая скорость может быть как меньше, так и больше фазовой в зависимости от знака $dv/d\lambda$; $u < v$, если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, т.е. когда более длинные волны распространяются быстрее более коротких, – этот случай носит название нормальной дисперсии.

Всякая реальная волна может быть по теореме Фурье разложена на бесчисленное множество неограниченных во времени идеальных синусоид, представляет собой наложение – группу волн, и скорость ее распространения в диспергирующей среде отлична от фазовой скорости слагаемых волн.

распространения колебаний, которыми набегающая система занимает все новые области пространства".

Гамильтон смог достаточно строго показать, что, "если фаза колебания в обычной диспергирующей среде для какого-либо цвета может быть представлена выражением

$$\epsilon + \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\mu} - \lambda\right), \tag{2.9}$$

так что λ есть длина волны для этого цвета и этой среды, и если возможно представить дисперсию разложением *скорости переноса фазы* $1/\mu$ в ряд вида

$$1/\mu = M_0 - M_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + M_2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - \text{т.д.}, \tag{2.10}$$

то *скорость, с которой свет данного цвета завоевывает темноту в этой диспергирующей среде при распространении колебания в те ее части, которые ранее не колебались, несколько меньше чем* $1/\mu$ и может быть представлена рядом

$$M_0 - 3M_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + 5M_2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - \text{т.д.} \tag{2.11}$$

За другими деталями отсылаем к мемуару, который будет опубликован в Сообщениях этой академии и будет содержать много других результатов о колеблющихся системах с приложением к теории света" [92, т. 2]. Этот мемуар никогда не был опубликован и, по-видимому, не был и написан.

Значение понятий групповой и фазовой скорости, их количественное соотношение и применение в оптике и теории распространения волн излагаются практически в любом курсе оптики, теории радиоволн и т.п. Фундаментальная роль этих понятий в процессе формирования квантовой механики (в первую очередь в работах Л. де Бройля и Э. Шредингера) освещена в книгах [53, 24, 14].

5. Шестьдесят лет спустя

Работы Гамильтона по теории систем лучей остались мало известными на континенте. Одной из основных причин этого является то, что "Transactions" Ирландской академии в Германии, Франции и России являлся редким и малодоступным журналом. Неумелая и запутанная форма изложения этих работ Гамильтона также не способствовала их распространению. Только постепенно идеи, заключенные в его работах, становятся известными.

В Англии его идеи и методы применительно к оптическим приборам развивал великий Максвелл, а в Германии – М. Тийзен.

Функции W и T, определенные Гамильтоном для общего случая анизотропной и гетерогенной среды, были вновь открыты (причем даже в менее общем виде) почти 60 лет спустя Г. Брунсом (1848–1919), который дал им общее имя "эйконал".

Следующая таблица поясняет соотношение функций Гамильтона и Брунса.

Точечный эйконал $\tilde{S}$	Граничное значение ($z' = z = 0$) гамильтоновой характеристической функции V
Смешанный эйконал	Граничное значение ($z' = 0$) функции Гамильтона W
Угловой эйконал	Функция T Гамильтона

Брунс в своей теории исходил из теоремы Малюса, очевидно не зная, что гамильтонов метод характеристической функции приложим и в случае преломления в кристаллах, где теорема Малюса неприменима. Нельзя не согласиться с Дж. Сингом, когда он пишет, что игнорирование Брунсом оптических работ Гамильтона совершенно экстраординарно, особенно если принять во внимание его утверждение: "Роль, подобную гамильтонову математическому изложению механики, играет теперь понятие эйконала в гораздо более узкой области геометрической оптики..." Напомним, что метод Гамильтона, возникший из его оптических работ (что им было отмечено в статьях о механике), был хорошо известен благодаря работам Якоби; в нем использована только часть его оптического метода, поскольку оптический метод Гамильтона для кристаллических сред никогда не применялся в динамике.

Брунс предпочел положить в основу своего метода абстрактную теорию контактного преобразования, развитую Софусом Ли в 70-х годах XIX в., но и это не порывает его связи с идеями и методом Гамильтона, так как исходный источник контактных преобразований находится в гамильтоновом оптическом методе и был перенесен Гамильтоном в динамику и развит далее Якоби и в теоретико-групповом аспекте Софусом Ли.

Изобретение слова "эйконал" Брунсом было несчастьем для геометрической оптики, потому что новое наименование подразумевает существование нового метода, в то время как на самом деле ничего существенно нового нет. Этот термин помешал усилить внимание к более глубоким и общим идеям Гамильтона. Мало того, этимология слова (εἰχον – образ) увековечивает ошибочное представление, что геометрическая оптика совпадает с теорией образования изображений и исчерпывает ее.

Брунс показал, что совокупность общих положений геометрической оптики, о которых идет речь в теории оптических изображений, "может быть до известной степени сведена к простому выражению: объект и изображение коллинеарны".

Это положение дает основание для введения некоторой функции E.

Эйконал E есть в общем случае функция шести переменных: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Если x_1, y_1, z_1 даны и известно начальное направление луча из уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -\mu m_1, \quad \frac{\partial E}{\partial y_1} = -\mu p_1, \quad \frac{\partial E}{\partial z_1} = -\mu q_1, \tag{2.12}$$

где μ — коэффициент преломления среды, m_1, p_1, q_1 — направляющие косинусы луча, то всегда можно определить координаты конечной точки x_2, y_2, z_2. Таким образом, в данном случае эйконал определяет оптическое изображение.

Возведя (2.12) в квадрат и сложив, получим в общем виде уравнение эйконала Брунса

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 = \mu^2 \tag{2.13}$$

(ср. с уравнением (2.4) Гамильтона).

К. Шварцшильд (со ссылкой на работы Гамильтона) в 1905 г. распространил этот метод на теорию аберрации симметричных оптических инструментов. Обзор применений метода Гамильтона к таким инструментам был дан Т. Смитом и Г. Стьюардом, а ссылки на него имеются в трудах Ф. Клейна и Рэлея. Подробное изложение дано Сингом.

Остановимся в связи с работой Брунса еще на одном вопросе. Довольно широко распространено ошибочное мнение, что открытый Гамильтоном новый изящный метод в геометрической оптике 60 лет спустя был независимо переоткрыт в близкой форме Брунсом (метод эйконала), метод которого в отличие от метода Гамильтона допускал практические приложения.

Как справедливо показал Дж. Синг, Брунс вновь открыл метод Гамильтона в форме менее общей, но достаточной для практических приложений. На самом деле как метод Гамильтона, так и метод Брунса одинаково приложимы к частным практическим задачам, так как они в существенном одинаковы. Почему же, спрашивает Синг, семена, посеянные Гамильтоном, оказались бесплодными, а посеянные вновь спустя 60 лет Брунсом оказались плодотворными? Ответ Синга состоит в следующем: 1) лагранжев — без чертежей — чисто аналитический метод изложения Гамильтона; 2) его подход к проблемам оптики имел характер, скорее типичный для XVIII в., – более философский, чем более практический подход XIX в. Вероятно, к этому надо добавить рост потребностей промышленности оптических приборов с 30-х годов до 90-х годов XIX в. и трудное (см. выше) изложение работ Гамильтона в малодоступных научных журналах.

Заметим, что сам Гамильтон, несмотря на то что он очень мало опубликовал работ по прикладным аспектам своего метода, весьма ими интересовался и потратил очень много энергии для того, чтобы расширить область его применения. Это стало очевидным после опубликования в 1931 г., много лет спустя после смерти Гамильтона, части его рукописей (см. [90, т. 1]).

В бумагах Гамильтона, хранящихся в архиве Тринити-колледжа, обнаружено много и других расчетов, посвященных устройству и свойствам оптических приборов, которые не были им опубликованы. Перечисленные выше работы стали известными в 1931 г., тогда, когда многие из найденных в них результатов были открыты другими авторами (заметим, что, как правило, методами, представляющими собой не слишком значительную модификацию метода Гамильтона). Для Гамильтона абстрактная всеобщность его теории и эстетическая выразительность ее имели гораздо большее значение, чем ее практические приложения.

Тем не менее методы, созданные Гамильтоном, нашли впоследствии широкое применение в геометрической оптике, теории оптических приборов и электронной оптике. Особенно успешно они применяются для рассмотрения задач электронной оптики. Электромагнитное поле ведет себя по отношению к заряженным частицам как среда, показатель преломления которой не только изменяется непрерывно от точки к точке, но зависит также от направления луча в данный момент. Для меридионального потенциала, который является в этой задаче аналогом показателя преломления, получается выражение, в которое неявно входит как направление движения, так и положение частицы в любой данный момент.

В силу этого непосредственное применение метода Гамильтона к электронно-оптической задаче вполне обосновано, причем форма выражений не меняется, а лишь вводится определенное значение показателя преломления[9].

Интересным направлением в развитии оптического метода Гамильтона явились работы Дж. Синга в середине XX в.

Гамильтон основал свою теорию лучей и волн на вариацион-

---

[9] *Косселет В.* Введение в электронную оптику. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

ном принципе Ферма в *пространстве*, в котором все *три* координаты равноправны. Возникает вопрос о возможности применения метода Гамильтона к такому же вариационному принципу в *пространстве-времени*, в котором все *четыре* координаты рассматривались бы как равноправные. При анализе этой проблемы возникает полная и общая релятивистская теория волн де Бройля, в которой лучи оказываются кривыми в пространстве-времени (истории частиц), а волны — поверхностями в трехмерном пространстве. Теория, естественным образом вытекающая из метода Гамильтона, может быть объединена с некоторым "квантованием", для того чтобы охватить интерференцию "волн материи". Эта теория в целом может быть рассмотрена как синтез идей Гамильтона, Минковского и де Бройля. Используемый метод есть оптический метод Гамильтона, а не примененный им метод в динамике. Существенная разница состоит в том, что в его оптическом методе все координаты равноправны (три координаты пространства у Гамильтона и четыре координаты пространства-времени в релятивистском обобщении), в то время как в его динамическом методе (как и в классической механике в целом) время выведено из совокупности остальных координат.

В заключение покажем кратко, как можно в очень сжатой и изящной векторной форме дать формулировку основного закона геометрической оптики. Эта формулировка была подробно разработана в статье Зоммерфельда и Рунге в 1911 г.[10]

В направлении светового луча в каждой точке вводится единичный вектор **A**. Так как луч есть линия тока **A**, то условие прямолинейности требует, чтобы кривизна была равна нулю. Обозначим элемент траектории через $d\mathbf{A}$. Тогда кривизна прямолинейного луча

$$d\mathbf{A}/ds = 0. \qquad (2.14)$$

Легко найти векторное условие прямолинейности луча

$$[\mathrm{rot}\mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0. \qquad (2.15)$$

Вектор **A**, нормальный к некоторой поверхности, определяется как градиент некоторой функции φ, зависящей только от координат; отождествить **A** с $\mathrm{grad}\varphi$ можно, умножив его на некоторую величину λ, зависящую также только от координат. Тогда

$$\lambda \mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\varphi, \qquad (2.16)$$

и, образовав $\mathrm{rot}\,\lambda\,\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$, после несложных преобра-

[10] Ann. Phys. 1911. Bd 35. S. 277–299.

зований найдем

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0. \tag{2.17}$$

Сопоставляя уравнения (2.15) и (2.17), видим, что они могут быть оба удовлетворены, только когда

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \tag{2.18}$$

так как согласно им $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ одновременно перпендикулярен и параллелен **А**. Итак, характеристическим условием оптической системы лучей является обращение в нуль $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, или, иначе, отсутствие вихрей в токе **А**. Таково векторное выражение оптики лучей, которое допускает обобщение на неоднородные и неизотропные среды.

Глава 3

Прекрасное в механике

1. Оптико-механическая аналогия

Для того чтобы от оптики Гамильтона перейти к его динамике, надо прежде всего рассмотреть вопросы, связанные с оптико-механической аналогией[1]. Это необходимо не только потому, что сам Гамильтон двигался именно таким путем, но и потому, что оптико-механическая аналогия сыграла исключительно важную роль в развитии механики, оптики, квантовой механики и явилась в некотором смысле слова прообразом (пусть еще элементарным) "великого объединения". С ней связано несколько важных вопросов. Этих вопросов три: 1) связь корпускулярного и волнового аспекта в оптике – прообраз связи уравнений движения систем тел и касательного преобразования в механике; 2) оптико-механическая аналогия Гамильтона; 3) геометризация проблем динамики.

С первого взгляда кажется, что первый из этих вопросов не имеет отношения (во всяком случае прямого) к оптико-механической аналогии. На самом же деле это не так – речь идет не о переходе от оптики к уже хорошо известной в то время механике Лагранжа, а о создании *новой* формы механики – механики Гамильтона. Для нее именно этот аспект оптики имеет решающее значение.

---

[1] Аналогия между оптическими и механическими явлениями была известна еще Иоганну Бернулли (*Бернулли И.* Избр. соч. по механике. М.; Л.: 1937. С. 26–39).

Луч может быть истолкован и как нормаль к волновой поверхности, и как траектория потока некоторых "световых" частиц. Математический формализм теории и в том и в другом случае один и тот же. Уже в этом заключена идея оптика-механической аналогии.

Прежде чем перейти к рассмотрению существа дела, напомним, что лучевой и волновой аспекты той части оптики, которая охватывает явления отражения и преломления света, одинаково приводят к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных, имеющему в прямоугольных декартовых координатах вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0; \tag{3.1}$$

в физической оптике, охватывающей явления интерференции, дифракции и поляризации, основным будет уравнение

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)=0. \tag{3.2}$$

Как видно, различие между характером и структурой фундаментальных уравнений очень велико. Однако, как хорошо известно, последнее уравнение переходит в первое в предельном случае бесконечно малой длины волны, выражая тем самым переход физической оптики в геометрическую.

Гамильтон ясно понимал, что прежде всего необходимо связать принцип Гюйгенса с принципом наименьшего действия. Надо заметить, что уже в оглавлении "Theory of systems of rays" (1827 г.) предусмотрена в предполагавшейся, но не написанной третьей части глава 28 – "Необыкновенные системы, образуемые одноосными кристаллами", в которой Гамильтоном было намечено рассмотрение аналитического выражения закона Гюйгенса, а рядом с ним в перечислении содержания стоит "принцип наименьшего действия".

Раздел 26 "Третьего дополнения" (1823 г.) к "Теории системы лучей" Гамильтон посвятил "увязке предшествовавшего взгляда на оптику с волновой (undulatory) теорией света". Как указывает заголовок этого раздела, величины σ, τ, ν, или

$$\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z},$$

т.е. частные производные первого порядка характеристической функции V, взятые по текущим координатам, представляют собой в волновой теории света компоненты "нормальной медленности" (normal slowness) распространения волн. Фундаментальная формула может быть легко объяснена и доказана согласно принципам этой теории:

$$\delta V = \delta \int v\, ds = \Sigma\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_i}\, \delta x_i - \frac{\partial v_0}{\partial \alpha_{0i}}\, \delta x_{0i}\right). \tag{3.3}$$

Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать правомерность найденных результатов в волновой теории. Все прежние рассуждения базировались на принципе наименьшего действия и развивались в терминах "эмиссионной гипотезы". Гамильтон хочет показать, что все аналитические результаты могут быть сохранены и в терминах волновой теории при использовании принципа Ферма. Заметим, что в своем нобелевском докладе Шредингер [19] дает следующую характеристику принципу Ферма: "Таким образом, принцип Ферма представляется просто т р и в и а л ь н о й к в и н т э с с е н ц и е й (разрядка Шредингера. – *Л.П.*) волновой теории". В волновой теории этот принцип находит свое обоснование: "Только с точки зрения волновой теории принцип Ферма становится вполне понятным и перестает быть чудом" [19].

С точки зрения волновой теории главная функция Гамильтона будет временем распространения света данного цвета от источника x', y', z' до точки x, y, z через некоторую комбинацию сред, т.е.

$$V = V(x, y, z, x', y', z', \chi), \tag{3.4}$$

а вариация выражения (3. 3) обращается в нуль.

Этот результат Гамильтон называет принципом постоянного действия. Название это выбрано им исходя из двух соображений: во-первых, для того, чтобы "отметить его связь с известным законом наименьшего действия", и, во-вторых, "потому, что он дает непосредственно дифференциальное уравнение того важного класса поверхностей, которые согласно гипотезе колебаний называются волнами, а согласно гипотезе испускания частиц могут быть названы поверхностями постоянного действия" [92, т. 1, с. 107]. Это замечание имеет очень большое значение. Прежде всего, ясно осознаваемая Гамильтоном связь его оптического метода с принципом наименьшего действия механики указывает на большую общность, существующую между математической оптикой и механикой. Это показывает, что уже в то время (1830 г.) Гамильтон вплотную подошел к идее оптико-механической аналогии. От представления поверхностей постоянного действия для распространяющегося в пространстве потока частиц один шаг к картине движения материальных корпускул. Однако Гамильтон хочет быть свободным от каких бы то ни было гипотетических элементов, даже если они заключены лишь в способе выражения.

Для того чтобы совершенно освободиться от известного элемента гипотетичности, кроющегося в самом названии, Гамильтон называет в этом мемуаре принцип стационарного действия уравнением характеристической функции. Это название основано на утверждении, что, "какова бы ни была природа света", интеграл $\int v\, ds$ полностью определяет все свойства системы лучей.

Приведем лишь наглядный пример тождества формы уравнений теории системы лучей и механики.

В третьем дополнении Гамильтон [92, т. 1] приходит, рассматривая проблему теории лучей с точки зрения принципа наименьшего действия, к следующим общим уравнениям луча:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} ds = d\frac{\partial v}{\partial \alpha_i}. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что эти уравнения имеют точно ту же форму, что и уравнения динамики Лагранжа. В самом деле, обозначив $\alpha_i = dx_i/ds = x_i'$, найдем

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial x_i'} - \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \tag{3.6}$$

где $v = v(x_i, x_i')$. Это уравнения Лагранжа второго рода[2], являющиеся необходимым и достаточным условием существования экстремума интеграла принципа Гамильтона. Гамильтон, который прекрасно знал работы Лагранжа, Лапласа и Пуассона и называл "Аналитическую механику" Лагранжа величественной математической поэмой, не мог не заметить этого.

Гамильтонов метод в динамике есть прямое развитие его оптических исследований. Не вдаваясь в детали, укажем, что характеристическая функция V в оптике соответствует интегралу действия в динамике, величины σ, τ, ν соответствуют компонентам импульса, уравнение $\Omega = 0$ в одной форме (уравнение F третьего дополнения) есть уравнение энергии, а в другой (C) соответствует первому из уравнений динамики Гамильтона;

[2] Уравнения Лагранжа впервые встречаются в ранней его работе, напечатанной в "Miscellanea Taurinensia" (1760. Vol. 7; см. также: Oeuvres. P., 1867. T. 1. P. 411). Полученный результат, конечно, не является неожиданным по самому смыслу вариационной задачи. Гамильтон назвал эту работу бессмертной и стоящей выше всякой похвалы.

"хроматический индекс" χ в обоих случаях соответствует некоторой функции заданной полной энергии; уравнения движения Гамильтона содержатся в выражениях (I), (K) и (O) этого же дополнения [92, т.1., с. 170–172].

Основная черта гамильтонова метода в оптике – связь принципа наименьшего действия (или принципа Ферма) с контактным преобразованием (построением Гюйгенса) – переносится в динамику, где исходя из принципа наименьшего действия уравнения движения приводятся к некоторому бесконечно малому контактному преобразованию. Этот характерный для гамильтоновой динамики дуализм определяет не только ее внутреннюю структуру, но и ее фундаментальное значение в различных ветвях физической науки.

Можно уподобить эти траектории лучам света в оптике, так как они ведут себя точно так же, как последние, которые везде перпендикулярны волновым поверхностям (фронту волны). Эти свойства механических траекторий возникают лишь потому, что аналитически они подчиняются вариационным принципам, без них они не могли бы иметь место. Однако лучевые свойства механических траекторий далеко не исчерпывают глубокой аналогии оптики и механики. Дифференциальная формулировка принципа Гюйгенса (и построение на его основе волнового фронта) совпадает с уравнением в частных производных Гамильтона для оптики. Как мы уже отмечали, это дифференциальное уравнение (3.1) было открыто Гамильтоном в его фундаментальных исследованиях в области геометрической оптики.

В оптико-механической аналогии Гамильтона время распространения света и действие являются сопоставляемыми величинами. Зная начальную поверхность, можно строить бесконечное семейство поверхностей, до которых за последовательно малые интервалы времени доходит свет – в механике это поверхности равного действия. Построение одно и то же. Отметим лишь, что в оптико-механической аналогии речь идет только о механических траекториях и световых лучах. Движение во времени происходит по совершенно иным законам.

Итак, и оптические, и механические явления могут быть описаны как с помощью корпускулярной модели, так и с помощью модели волн[3], принцип наименьшего действия в форме Эйлера–

---

[3] Выбор между корпускулярной и волновой теорией света не может быть сделан только на основе исследования траекторий световых лучей. Только анализ закона преломления света со скоростями в двух соответствующих средах в обеих теориях позволяет сделать этот выбор, так как приводит к прямо противоположным результатам (Фуко в 1850 г. выполнил эксперимент, показавший, что в воде свет распространяется медленнее, чем в воздухе, что противоречит корпускулярной теории).

Лагранжа (или этот же принцип в форме Якоби) соответствует принципу наименьшего времени Ферма. Описание с помощью волн – бесконечное семейство поверхностей – уравнение в частных производных Гамильтона–Якоби; описание с помощью частиц – ортогональные траектории к этим поверхностям – принципы Ферма и Якоби.

Основные понятия гамильтоновой механики (импульсы $\vec{p}$, функция Гамильтона H, форма $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$, уравнение Гамильтона–Якоби) возникли при перенесении на общие вариационные принципы (в частности на принцип Гамильтона $\delta\int\mathcal{L}dt=0$) весьма простых и естественных понятий геометрической оптики, управляемой частным вариационным принципом – принципом Ферми[4].

Оптико-механическая аналогия

Оптика	Механика
Оптическая среда	Расширенное конфигурационное пространство $(\mathbf{q}, t)$
Принцип Ферма	Принцип Гамильтона
Лучи	Траектории $\mathbf{q}(t)$
Индикатриса	Лангранжиан $\mathcal{L}$
Нормальная медленность фронта	Импульс $\mathbf{p}$
Выражение $\mathbf{p}$ через скорость луча $\dot{\mathbf{q}}$	Преобразование Лежандра
I форма $\mathbf{p}d\mathbf{q}$	I форма $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$

Форма $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$ сама собой возникает при проведении оптико-механической аналогии из рассмотрения функции действия, соответствующей оптической длине пути.

2. Экстремальные и вариационные принципы в оптике и механике до Гамильтона

Еще Герон Александрийский в I в. н.э. открыл принцип наименьшего времени для частного случая отражения света. Рассмотрим ход его рассуждений[5]. Пусть A – источник света, B – глаз, CD – зеркало, AEB – действительный путь света, AFB – какой-либо другой возможный путь луча, испытавшего отраже-

[4] Для пояснения приводим очень наглядную таблицу, заимствованную из книги: *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. С. 217, 219.

[5] Читатель без труда сам сделает необходимый рисунок.

ние $AO \perp CD$; продолжим BE до встречи в G с продолжением AO. Так как углы падения и отражения равны, то $AE = EG$ и $AF = FG$. Из $GF + FB > GB$ следует, что путь AFB больше пути AEB; так как AFB – произвольный путь, то AEB есть кратчайший из всех возможных путей луча, отраженного от зеркала (скорость света постоянна), что и требовалось доказать. Утверждение Герона было обобщением наглядного опыта, который показывает, что, когда свет распространяется от одной точки к другой, его путь есть прямая линия, т.е. кратчайшее расстояние между двумя точками [98].

В середине XVII в. (в 1638 г.) мы находим у Галилея задачу, в некоторой степени предвосхищающую задачу о брахистохроне. Он впервые поставил задачу о кривой спуска в книге "Беседы и математические доказательства, касающиеся всех новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению" [17]. Приведем это интересное место: "Теорема XXII. Предложение XXXVI: Если из нижней точки круга, возвышающегося над горизонтом, провести плоскость, отсекающую дугу, меньшую квадранта, и из конечных точек этой плоскости провести в какой-либо промежуточной точке дуги две какие угодно плоскости, то время падения по этим двум последним плоскостям будет меньше, чем по одной первоначальной плоскости, и меньше, чем по нижней из двух последних плоскостей" [17]. Теорема Галилея означает лишь, что движение по дуге круга происходит быстрее, чем по соответствующей хорде или любой другой вписанной ломаной линии; однако Галилей нигде не доказывает, что это движение является наибыстрейшим. Поэтому неверно часто встречающееся утверждение, что Галилей ошибочно считал дугу окружности абсолютной брахистохроной. Обычно основываются на начальной фразе замечания к теореме XXII: "... быстрейшее движение от одной конечной точки до другой совершается не по кратчайщей линии, каковой является прямая, а по дуге окружности" [17]. Однако все доказательство Галилея и заключительная фраза того же замечания содержат лишь утверждение, что "... чем более вписанный многоугольник приближается к окружности, тем быстрее совершается падение между двумя конечными точками A и C" [17]. Это положение, конечно, правильно и не находится в противоречии с понятием об абсолютной брахистохроне.

Как известно, вариационное исчисление возникло в связи с задачей отыскания кривой, обладающей некоторым свойством максимума или минимума. Первой задачей такого рода в физике была задача, приведенная Ньютоном в "Началах", решение которой он привел без указания метода, которым оно было найдено: "какую форму надо придать твердому телу вращения, движущемуся вдоль оси, для того чтобы испытываемое им сопротивление было бы наименьшим" [39].

К переводу Мотта "Начал" на английский язык сделано небольшое прибавление, в котором дано решение задачи о теле наименьшего сопротивления. Перевод этот сделан в 1727–1729 гг., а поэтому решение может служить примером того, как решались подобные задачи математиками–современниками Ньютона. Оно изложено в примечании А.Н. Крылова к этому разделу "Начал" [32, с. 430–433].

Принцип Ферма. Вариационный принцип для физической проблемы был впервые отчетливо сформулирован в геометрической оптике в XVII в. и применен к решению задач отражения и преломления света. Это был принцип кратчайшего времени, или принцип Ферма. Естественно, возникает вопрос о том, почему экстремальный принцип возник первоначально в оптике, а не в механике, хотя и в последней уже в то время имелось достаточно высказываний отдельных ученых о простоте законов движения, или, в телеологическом варианте, о том, что природа достигает своих целей простейшими средствами.

Дело здесь в том, что для оптической задачи величина, которая должна быть минимумом в конкретных явлениях, чрезвычайно доступна и не требует дальнейших исследований. Это время. Как бы ни относиться к философским проблемам, связанным с категорией времени, наглядные и издревле измеряемые интервалы времени в достаточно широких пределах не нуждаются в другом определении, кроме возможности сравнения их по величине. В механике же совсем неочевидно, какая величина в процессе движения должна иметь минимум (или максимум), и, как мы теперь знаем, структура этой величины отнюдь не проста.

Поэтому, хотя поиски экстремальных соотношений в оптике и механике начались на самой заре развития вариационного исчисления, которое и возникло в связи с ними и при решении соответствующих частных задач (например, задачи о брахистохроне), однако оформились они в виде ясных математических выражений раньше всего в оптике, где не требовалось ни введения такого сложного понятия, как "действие", ни выяснения характера его варьирования.

Однако время входит основным элементом и в картину механического движения; поэтому почти одновременно с открытием принципа кратчайшего времени в оптике возникла идея о применении его в механике, а также более глубокая идея о разработке в механике самостоятельного, но аналогичного по структуре принципа. Механическая концепция единой физической картины мира подсказывала возможность единого принципа для оптики и механики – еще неясная, но чреватая многочисленными последствиями первая идея оптико-механической аналогии.

Закон преломления света был установлен Снеллиусом и Декартом. Выводя этот закон, Декарт сделал ряд допущений, из которых наименее обоснованным являлось утверждение, что скорость света в более плотной среде больше, чем в менее плотной. Против этого допущения выступили английский философ Гоббс, а в 1662 г. знаменитый французский математик Ферма (1601–1665).

Пьер Ферма положил в основу исследования закона преломления света принцип кратчайшего времени. В заметке "Synthesis ad refractiones" он вывел закон преломления света геометрическим способом исходя из этого принципа. По мнению Ферма, "природа действует наиболее легкими и доступными путями", а отнюдь не более краткими, как это думают многие. Конкретизируя эту идею, он говорит: "Подобно тому как Галилей, когда рассматривал движение тяжелых тел в природе, измерял отношения этого движения не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время" [14, с. 8].

Геометрический вывод закона преломления, который основывается на этом положении, очень громоздок. Во всех изложениях своеобразная прелесть рассуждений Ферма почти исчезает.

Как известно, принцип Ферма является наиболее общей математической формой выражения законов геометрической оптики.

По существу, Ферма показал, что закон преломления Снеллиуса удовлетворяет гипотезе, что время, взятое для траектории, соседней с действительной, отличается от времени прохождения этой последней на величину второго порядка малости. В доказательстве Ферма, в сущности, фигурирует утверждение, что вариация некоторого определенного интеграла, взятого вдоль действительной траектории луча, равна нулю. Это условие необходимо, но недостаточно для того, чтобы время было минимумом. В простом случае, рассмотренном Ферма, условие минимальности и вариационное условие совпадают, но в более сложных случаях это не имеет места.

Принцип Ферма привел не только к экспериментально изученному факту, но также к новому результату, что коэффициент преломления равен отношению скоростей света в двух средах. Ферма хотел доказать, что его точка зрения о том, что свет распространяется медленнее в более плотной среде, соответствует действительности, в то время как Декарт защищал противоположное утверждение. Во всяком случае, принцип наименьшего времени, по крайней мере отчасти, выведен a priori, а не индуктивным путем.

Первое настоящее оправдание принципа Ферма дал Гюйгенс, который на основе своей "волновой" теории вывел, что коэффициент преломления на границе двух сред равен отношению скоростей света в этих средах. Доказательство Гюйгенса показывает, что время, необходимое свету, чтобы пройти путь между двумя точками, действительно является минимумом.

Более строгое доказательство можно получить, воспользовавшись волновой теорией света. Математическое выражение принципа Ферма

$$\delta \int_P^Q \frac{ds}{v} = 0.$$

Какая же скорость входит в интеграл Ферма — фазовая или групповая, что имеет значение в диспергирующей среде? Волновая оптика показывает, что это волновая (фазовая) скорость.

Итак, принцип кратчайшего времени был сформулирован и продемонстрирован в геометрической оптике. Немедленно и закономерно возникла проблема отыскания аналогичных задач о минимальном значении времени в механике. Одна из них связана с возникновением вариационного исчисления и в дальнейшем привела к формулированию вариационного принципа в механике.

Оптико-механическая аналогия И. Бернулли. В 1696 г. в июньской книге лейпцигского журнала "Acta Eruditorum" (с. 269) И. Бернулли опубликовал заметку "Problema novum ad cujus solutionem matematice invitantur".(Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики). В этой заметке говорилось: "В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до другой точки B в кратчайшее время. Для того чтобы вызвать интерес со стороны любителей подобных вопросов и побудить их охотнее предпринять попытку разрешения указанной задачи, довожу до их сведения, что эта задача не сводится к пустой умственной спекуляции, лишенной какого бы то ни было практического значения, как это может кому-либо показаться. В действительности она представляет большой практический интерес, и притом, кроме механики, также и для других дисциплин, что может всем показаться неправдоподобным" [88]. Это была знаменитая задача о брахистохроне, или кривой наискорейшего ската: даны две точки в вертикальной плоскости, не лежащие на одной вертикали; найти вид кривой линии, спускаясь по которой тяжелое тело прошло бы путь между этими точками в наименьшее время. Решение этой, по словам Лейбница, "столь прекрасной и до сих пор неслыханной задачи" [117] было дано самим И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном, Я. Бернулли и Лопиталем.

На решение предложенной задачи И. Бернулли дал полугодичный срок, но за это время решение прислал только Лейбниц. Поэтому по его предложению И. Бернулли продлил срок до пасхи 1697 г. В этот срок задача была решена также Ньютоном, Якобом Бернулли и Лопиталем, которые нашли, что кривой наибыстрейшего спуска является циклоида. Решение Ньютона было напечатано в майском номере "Philosophical Transactions" за 1697 г. (№ 224, с. 384) без подписи автора.

В майском же номере "Acta Eruditorum" за 1697 г., в котором опубликовал свое решение И. Бернулли, была напечатана статья его старшего брата Я. Бернулли (с. 211) и статья Лопиталя (с. 217) с аналогичными решениями.

В решении И. Бернулли речь идет одновременно об оптике и механике, о движении луча и тяжелой частицы. Указав на то, что Ферма вывел закон преломления света из принципа кратчайшего времени (при $v = \mathrm{const}$ принцип кратчайшего времени Ферма переходит в принцип кратчайшего пути), И. Бернулли рассматривает задачу о кривизне луча в неоднородных прозрачных средах. Этому вопросу им посвящена работа «Кривизна луча в неоднородных прозрачных средах и решение задачи, предложенной мной в "Acta" за 1696 г., с. 269, о нахождении брахистохронной линии, т.е. такой линии, по которой тело должно проходить от одной заданной точки до другой в кратчайшее время; затем о построении синхронной кривой, т.е. "волны лучей"»[6]. И. Бернулли не ищет общих методов решения задачи отыскания максимума или минимума какой-либо функции, он указывает, что сомневается и в самой возможности существования таких общих методов. Его цель — дать метод решения специальной задачи, задачи о брахистохроне, метод, который может оказаться применимым и для других задач аналогичного характера. Прежде всего Бернулли указывает на тот изумительный, по его мнению, результат, что брахистохроной, так же как и таутохроной Гюйгенса, является циклоида. Этот результат он нашел двумя путями: косвенным и прямым.

Тут же И. Бернулли дает, по существу, первую формулировку

---

[6] Опубликовано в "Acta Eruditorum", 1967, май. С. 206. В "Opera Omnia" статья помещена в т. 1. С. 187–193.

оптико-механической аналогии, хотя, конечно, еще в очень частной форме: "Я укажу, что мною открыто удивительное совпадение между кривизной луча света в непрерывно изменяющейся среде и нашей брахистохронной кривой".

Воспользовавшись принципом Ферма, представляя луч в виде "шарика" и исходя из связи синусов углов падения и преломления со скоростями в среде данной разреженности (или обратной плотности), И. Бернулли без труда приходит к выводу, что в среде, как бы разделенной бесконечно большим количеством горизонтально расположенных пластинок, промежутки между которыми заполнены прозрачной материей, плотность которой возрастает или убывает в определенном отношении, траектория светового луча будет брахистохроной. Это значит, что она такова же, что и в случае движения тяжелых тел. "Так как, — восклицает И. Бернулли, отчетливо выражая основную идею оптико-механической аналогии, — в обоих случаях кривая подчинена тому условию, что она должна быть пройдена в кратчайшее время, то что мешает нам поставить одно на место другого?".

Для кривой AMB найдем общее дифференциальное уравнение

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}. \tag{3.7}$$

Получив этот результат, И. Бернулли не без гордости пишет: "Я, таким образом, одновременно решил две замечательные задачи — одну оптическую, другую механическую, т.е. я сделал больше того, что требовал от других. Я показал, что, хотя эти две задачи взяты из совершенно различных частей науки, тем не менее они имеют одинаковую природу". Задавшись законом, доказанным Галилеем, что скорости падающих весомых тел находятся между собой в отношении корней квадратных из пройденных высот, т.е. в нашем случае $t = \sqrt{ax}$, получим после подстановки в уравнение (3.7)

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a - x}}\,dx, \tag{3.8}$$

откуда очевидно, что брахистохронная кривая является обыкновенной циклоидой. Рассмотрев далее некоторые частные вопросы, связанные с этой кривой, И. Бернулли снова возвращается к вопросу о тождестве таутохроны и брахистохроны: "Раньше чем закончить, я не могу воздержаться от того, чтобы еще раз не выразить своего изумления по поводу отмеченного неожиданного тождества между гюйгенсовой таутохроной и нашей брахистохроной. Сверх того, я считаю нужным отметить, что это тождество вытекает только из основного положения Галилея; уже из этого можно было бы заключить, что это положение находится в согласии с природой. Природа всегда действует *простейшим образом*, как и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различные услуги" [8, с. 36–37].

Это столь характерное для взглядов ученых-механиков XVII в. представление о том, что природа всегда действует простейшим образом[7], основано у И. Бернулли в данном случае на том, что, как показал Гюйгенс, циклоида, помещенная в вертикальной плоскости так, чтобы линия ее основания была горизонтальной и лежала выше производящего круга, обладает тем замечательным свойством, что, из какой бы точки на этой кривой тело ни начало спускаться, оно придет в низшее положение за одно и то же время (таутохрона).

Решение задачи о брахистохроне не только открыло путь для развития вариационного исчисления, но послужило отправным пунктом для разработки принципа наименьшего действия в его конкретном динамическом смысле.

Действие у Лейбница. Для того чтобы перейти к механике в целом, необходимо было выяснить, какая величина может быть минимальной (или максимальной) в процессе движения. Эта проблема, которая, так же как и принцип Ферма, возникла еще в XVII в., была более или менее отчетливо выяснена только в середине XVIII в. и доведена до такой же математической ясности и определенности, как и принцип Ферма, только в конце XVIII – начале XIX в.

Впервые понятие действия сформулировано Лейбницем (1646–1716), на которого в этом отношении ссылается и Мопертюи. Оно изложено в труде по динамике, над которым Лейбниц работал во время путешествия по Италии в 1669 г., но который остался незаконченным и только в 1860 г. был издан К.И. Гергардтом [117] по рукописи, сохранившейся в королевской библиотеке в Ганновере. Лейбниц называет эту величину "actio formalis".

В не опубликованном при жизни Лейбница большом произведении "Dynamica de potentia et legibus naturae corporeae", в третьем отделе, излагаются основные понятия динамики Лейбница: действие, потенция, эффект движения. Для своеобразной терминологии Лейбница характерно следующее: все то, что присуще

[7] Ср. хотя бы первое правило умозаключений в физике Ньютона: "Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений. По этому поводу философы утверждают, что природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей" (*Ньютон И.* Математические начала... С. 502).

всякому движению, всякое свойство, общее всем движениям, Лейбниц называет формальным (formalis). В более современной терминологии понятие формального у Лейбница можно было бы выразить как существенное свойство, или, с некоторыми ограничениями, просто как сущность. Сам Лейбниц так поясняет понятие формального: "Как эффект, так и действие я называю здесь формальным потому, что они в данном случае присущи просто движению как таковому. Совсем иными являются те эффекты действия, которые возникают благодаря какому-либо препятствию, — например, вследствие силы тяготения, притягивающей тела к центру Земли, вследствие сопротивления среды или связи или вследствие необходимости преодолеть какую-либо пружину, — вообще вследствие каких-либо подобных причин, связанных с конкретной материей" [117]. Определение 3 Лейбница таково: "Величина формального действия в движении есть то, мерой чего является определенное количество материи, передвинувшееся на определенное расстояние (при поступательном равномерном движении) в течение определенного времени" [117]. Для измерения формального действия Лейбниц в Предложении 10 устанавливает: "Формальные действия движения пропорциональны произведению формальных эффектов и скоростей, т.е. произведению количества материи, расстояний, на которые они передвигаются, и скоростей" [117]. В современной записи это будет mvs.

Лейбниц дал второе определение формального действия, также вполне совпадающее с современным понятием действия. В Предложении 17 он говорит: "Формальные действия движений пропорциональны произведению движущихся тел, пройденных промежутков времени и квадратов скорости. В самом деле, действия пропорциональны произведению скоростей и эффектов (по Предложению 10), а эффекты пропорциональны произведению скоростей, промежутков времени и движущихся тел (по предыдущему Предложению 16). Следовательно, действия пропорциональны произведению квадрата скорости, первой степени промежутка времени и движущегося тела" [117]. В современной записи это даст $kmv^2 \Delta t$, где коэффициент пропорциональности k может быть при соответствующем выборе единиц сделан равным единице, и тогда получится просто $mv^2 \Delta t$.

Необходимо отметить, что в XVII и XVIII вв. понятие скорости не заключало в себе указания на направление. Это была чисто алгебраическая, а у Декарта даже чисто арифметическая величина. Направление движения было отдельным понятием, которое не зависело от скорости. До начала XIX в. в научной литературе по механике употребляли выражение "направление тела", а не "направление скорости".

В работе Лейбница о динамике и в его переписке с И. Бернулли по этому вопросу, где он защищает свое определение величины действия, не содержится никаких определенных указаний на принцип наименьшего действия, между тем очевидно, что до открытия принципа наименьшего действия ему оставался всего один шаг. При таком положении вещей подлинность опубликованного Самуилом Кенигом в 1751 г. отрывка из письма, якобы направленного Лейбницем базельскому математику Германну, кажется очень вероятной:

"В действие входит не только время, как Вы полагаете, но оно есть произведение массы на время или времени на живую силу. Я заметил, что в изменениях движений оно остается обычно максимумом или минимумом. Отсюда можно вывести различные предложения. . ." [116].

Даже не рассматривая вопроса о подлинности этого письма, надо признать, что здесь отнюдь не сформулирован универсальный закон Мопертюи о минимуме количества действия. На это указывает и оговорка "обычно" и указание на "максимум или минимум". Возможно, что именно потому, что Лейбниц не мог найти условий обязательности для действия быть минимумом, он не опубликовал своих соображений. Во всяком случае, Мопертюи не знал этих соображений Лейбница.

Принцип наименьшего действия у Мопертюи. В 1744 г. Мопертюи (1698–1759) сформулировал принцип наименьшего действия. Он возвел его в ранг наиболее общих законов природы, управляющих физическими явлениями и находящих свое основание в бесконечной мудрости "творца" и целесообразности устройства вселенной.

Это была прямая атака на то течение французской науки, которое если и не было целиком атеистическим, то во всяком случае стремилось внутри науки избавиться от опеки религии и теологической аргументации. Крупнейшие научные силы приняли активное участие в обсуждении этого принципа.

Почему же принцип наименьшего действия стал предметом такого оживленного внимания, такой дискуссии, рамки которой раздвинулись далеко за пределы собственно механических проблем? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо вспомнить историческую обстановку, в которой протекали обсуждение и разработка принципа Мопертюи.

В эпоху, непосредственно предшествующую французской революции 1789 г., в литературе и науке происходит ожесточенная борьба. Обострившиеся классовые противоречия находят резкое выражение и на самых отдаленных от практики участках науки.

В области теоретической механики борьба класса, доживавшего свой последний исторический час, и "третьего сословия" отразилась в известной попытке обосновать механику теологией и тем самым подкрепить теологию со стороны механики при помощи "принципа наименьшего количества действия". В этой исторической обстановке 15 апреля 1744 г. (т.е. за несколько месяцев до появления эйлерова труда [54]) Пьер-Луи Моро де Мопертюи, бывший драгунский капитан, выступавший как геометр, геодезист, географ, астроном, биолог, моралист, лингвист и прежде всего метафизик, пропитанный насквозь духом теологической системы, но не лишенный фантазии, автор "проекта" создания города, где говорили бы только по-латыни, и "теории", объяснявшей образование зародыша при помощи сил тяготения, представил Парижской академии мемуар "Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu' ici paru incompatibles" [126]. В нем Мопертюи говорит прежде всего о распространении света. Еще раньше, в 1740 г., Мопертюи заявил, что в простейших случаях равновесия некоторая функция сил имеет максимум или минимум [14, с. 18]. Этот закон был рассмотрен затем в 1748 и 1749 гг. Куртивроном (1715–1785) [71] и в 1751 г. Эйлером.

Только в 1746 г. Мопертюи объявил об универсальном законе движения и равновесия – принципе наименьшего количества действия. Термин "количество действия" понимается им в смысле "деятельности" и измеряется произведением mvs, где m – масса, v – скорость, s – путь, пробегаемый телом [46, с. 24].

Согласно Мопертюи для движения $mvs = \min$, а в случае равновесия положение тела таково, что, когда ему сообщено малое движение, то произведенное этим количество действия минимально.

Универсальный характер принципа доказывается Мопертюи с помощью аргументов телеологического и теологического характера:"Наш принцип более соответствует представлениям, которые мы должны иметь о вещах, оставляет мир в постоянной потребности в могуществе творца и является необходимым следствием из наиболее мудрого употребления этого могущества" [129, с. 44]. Для доказательства же значения этого принципа в механике Мопертюи вывел из него всего лишь известные законы рычага и удара упругих и твердых тел.

При рассмотрении конкретных примеров Мопертюи начинает с оптики. Он предлагает считать, что путь, проходимый светом при преломлении, таков, что для него количество действия минимально. Он следующим образом пытается объяснить, какой смысл надо вкладывать в это понятие. "При перемещении тела из одной точки в другую необходимо некоторое действие: оно зависит от скорости, имеющейся у тела, и от пространства, пробегаемого последним, но оно не является ни скоростью, ни пространством, взятыми в отдельности. Количество действия тем больше, чем больше скорость тела и чем длиннее путь, пробегаемый телом; оно пропорционально сумме произведений отрезков на скорость, с которой тело проходит каждый из них.

Именно это количество действия является истинной тратой Природы; и именно оно выгадывается как можно более при движении света" [14].

Однако такое определение количества действия может быть применено только к свету, так как в него не входит масса того тела, которое проходит некоторое пространство с той или иной скоростью. Поэтому, чтобы сделать это определение полным, надо ввести в него массу, и тогда "количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на пространство, которое они проходят. В силу этого, если тело перемещается из одного места в другое, действие тем больше, чем больше масса, чем больше скорость и чем длиннее пространство, на которое тело перемещается" [129, с. 36]. Позднее Мопертюи отмечает, что многие ученые возражали против данного им наименования, и указывает, что, поскольку Лейбниц и Х. Вольф (1679–1754) употребляли это слово ("действие") для выражения той же идеи, он решил оставить этот термин без изменения.

Рассмотрев с помощью своего принципа наименьшего действия закон преломления света. Мопертюи должен был естественно задаться вопросом о том, можно ли, руководствуясь этим принципом, вывести законы других явлений, связанных с распространением света. Поскольку он искал общие принципы природы, исходя из метафизических предпосылок, вопрос становился для него особенно важным: ". . .это количество действия, которое природа сберегает в движении света через различные среды, управляет ли оно равным образом в случае отражения от непрозрачных тел и в случае простого распространения света? Да, это количество всегда самое малое из возможных" [14].

Провозгласив принцип наименьшего действия общим законом света, Мопертюи в 1746 г. представил Берлинской академии мемуар [14, с. 41], в котором он применяет его к удару тела и к случаю равновесия. Самое название этого мемуара подчеркивает исходную идею Мопертюи, целиком лежащую в области телеологической метафизики.

Мопертюи рассматривает задачу удара для случая твердых и других тел. Вопрос о твердых телах усиленно обсуждался в XVIII в.

Что касается равновесия, то несколькими годами раньше, в 1740 г., в работе "Le lois de repos" Мопертюи пишет: "Пусть имеется система тяжелых тел или тел, притягиваемых к центрам силами, действующими каждая на каждом теле, как n-я степень их расстояний от центров: тогда, для того чтобы эти тела пребывали в покое, необходимо, чтобы сумма произведений каждой массы на интенсивность силы и на $(n + 1)$-ю степень ее расстояния от центра силы (что можно назвать суммой сил покоя) являлась максимумом или минимумом". Он считает, что законы статики могут быть выведены из этого принципа. Общность этого закона имела для Мопертюи особое, исключительно важное значение. Закон должен охватывать всю совокупность явлений природы. Сопоставляя законы удара и равновесия, Мопертюи пишет: ". . .при ударе тел движение распределяется таким образом, что количество действия, которое допускает происходящее изменение, является наименьшим возможным. В покое тела, которые находятся в равновесии, должны быть расположены таким образом, что, если они претерпевают некоторое малое движение, количество действия должно быть наименьшим". Обобщая это положение, Мопертюи далее утверждает: "Законы движения и покоя, выведенные из этого принципа, являются точно теми, какие наблюдаются в природе, и мы можем восхищаться результатами его применения ко всем явлениям. Движение животных, произрастание растений, вращение звезд являются только его следствиями" [14].

Как же Мопертюи применяет этот принцип к конкретным задачам оптики и механики, правильное решение которых должно, по его мнению, дать незыблемое доказательство истинности его утверждения?

Мопертюи рассматривает в работе "Accord de différents lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles" прежде всего законы, которым подчиняется свет: закон прямолинейного распространения в однородной среде, закон отражения, закон преломления, и привлекает при этом механические аналогии.

Первый из этих законов является общим для света и всех тел: они движутся по прямой линии, если только с этой линии не отклоняет их инородная сила.

Второй является тем самым законом, которому следует упругий мяч, брошенный на несгибаемую поверхность. Механика доказывает, что мяч, встречающий такую поверхность, отражается под углом, равным углу встречи с нею; это же совершает и свет.

Но третий закон объясняется далеко не так удачно. Когда свет переходит из одной среды в другую, явления совершенно отличны от явлений, имеющих место в случае мяча, пересекающего различные среды, и, каким бы способом ни пытались объяснить преломление, находятся трудности, которые пока еще не преодолены" [14, с. 24].

Изложив состояние вопроса о преломлении света и отвергнув концепции Декарта и Ферма, Мопертюи, прежде чем вывести закон преломления, излагает предпосылки своего фундаментального принципа.

"Глубоко продумав рассматриваемый вопрос, я полагаю, что свет при переходе из одной среды в другую, уже оставив наиболее короткую дорогу, являющуюся прямой линией, может также не следовать по пути наибыстрейшего времени. В самом деле, какое предпочтение должно здесь иметь время перед протяженностью? Если свет не может идти сразу и по наиболее короткому пути, и по пути кратчайшего времени, то почему он идет скорее по одному из путей, чем по другому? Он не следует ни по какому из них; он выбирает путь, имеющий более реальное преимущество: путь, которого он придерживается, является путем, для которого количество действия будет наименьшим" [Там же].

Затем Мопертюи выводит закон преломления света.

Переходя к соударению движущихся тел, Мопертюи отмечает, что для упругих тел имеет место закон сохранения живых сил. "Однако это сохранение имеет место только для упругих тел и не имеет места для тел твердых. Общим принципом. . . является то, что количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным".

Итак, для доказательства механического значения своего принципа Мопертюи вывел из него законы рычага и законы удара упругих и твердых тел. Что же касается доказательства универсальной значимости этого принципа, то аргументы Мопертюи, как мы видели, имеют исключительно телеологический характер.

Можно сказать, что наиболее крупной заслугой Мопертюи явилось выдвижение принципа минимума количества действия как универсального закона природы, в то время как у Эйлера то же соотношение, более осмысленное и точно математически выраженное, рассматривалось как применимое лишь к частным задачам. Вот в этом универсальном смысле сформулированного Мопертюи принципа наименьшего действия и заключена причина признания Эйлером приоритета Мопертюи. Такого универсального принципа не было ни у Лейбница, ни у Эйлера, хотя тот же принцип, но не возведенный в ранг "законов мироздания", был открыт Эйлером даже ранее Мопертюи.

Попытка введения телеологии в механику вызвала резкий отпор. Опубликованные Мопертюи работы, в которых давалось телеологическое "обоснование" принципа наименьшего действия, породили большую дискуссию, вышедшую далеко за пределы механики. В этой дискуссии переплелись вопросы приоритета (Кениг оспаривал приоритет Мопертюи), натурфилософские и физические вопросы о мере движения и фундаментальные проблемы мировоззрения и философии. Недаром в ней приняли участие не только математики и механики, но и представители философии и публицистической литературы. Были опубликованы многочисленные статьи самого Мопертюи, Кенига, Патрика Дарси, Г. Куртиврона, Эйлера, ряд статьей Д'Аламбера в энциклопедии (статьи "Сила", "Действие", "Космология" и др.), памфлеты Вольтера, письма прусского короля Фридриха II и др. В этой дискуссии Эйлер выступал на стороне Мопертюи, защищая его приоритет.

Независимо от того, рассматривался ли тем или иным автором вопрос о приоритете или мере движения, в конечном счете на авансцену выступал центральный вопрос мировоззрения о причинной обусловленности явлений материального мира или о телеологической их преднаправленности мудростью творца. Именно поэтому дискуссия приняла столь острый характер, что Д'Аламбер сравнивает этот спор, разгоревшийся вокруг принципа наименьшего действия, с религиозными спорами: "Этот спор о действии, если нам будет позволено сказать, несколько походит на некоторые религиозные споры по горечи, которая была в него вложена, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысля". Таким образом, идейным источником работы Мопертюи было желание найти теологически или, по меньшей мере, телеологически обоснованный закон, который был бы последним основанием механики и из которого следовали бы все законы природы.

Д'Аламбер (1717–1783), конечно, не мог остаться в стороне от этой дискуссии ни как механик, ни как философ. Действительно, в статьях в энциклопедии, редактором которой он был вместе с Дидро, Д'Аламбер с большей или меньшей подробностью рассматривает вопрос о принципе наименьшего действия. С плохо скрытой иронией он отводит претензии Мопертюи на открытие универсального закона, являющегося якобы непосредственным выражением могущества бога. Что же касается чисто механического значения принципа, то он указывает прежде всего, следуя Эйлеру, на его глубокую связь с принципом живых сил и на возможность решения отдельных частных задач механики. Д'Аламбер вполне в духе своих взглядов на механику в целом отмечает, что можно найти различные математические выражения для одних и тех же явлений и что отыскивать в этих выражениях какой-либо иной смысл, кроме того, который заключен в их математической форме, – задача ненужная и даже вредная. По сравнению с принципом причинности, который нашел свое выражение в механике Ньютона и самого Д'Аламбера, говорит последний, попытки телеологически обосновать науку на принципе наименьшего действия производят впечатление чахлого дерева. Все эти глубокие замечания Д'Аламбера сопровождаются весьма вежливыми и явно внешними для существа разбираемых вопросов упоминаниями всемогущего творца и т.п.

Д'Аламбер говорит далее о необоснованности ". . .тех доказательств законов движения, которые давали некоторые философы исходя из принципа конечных причин, т.е. из тех целей, которые творец мира должен ставить себе, устанавливая эти самые законы. Подобные доказательства могут иметь силу лишь в том случае, когда они опираются на предшествующие им прямые доказательства, полученные из принципов, более доступных нашему пониманию. В противном случае, как это нередко бывает, они могут приводить нас к ошибочным заключениям. Именно потому, что Декарт следовал этому пути, именго потому, что он полагал, что по мудрости создателя во Вселенной сохраняется всегда одно и то же количество движения, он ошибся в законах движения. Кто будет подражать в этом Декарту, тот рискует или впасть в такую же ошибку, или выдать за общий принцип то, что справедливо лишь в определенных случаях, или, наконец, счесть за первичные законы природы то, что является лишь чисто математическим следствием из тех или иных формул".

В этой дискуссии принял участие Вольтер (1694–1778), который написал специальный памфлет "История доктора Акакия и уроженца Сан-Мало" [14, с. 723] по поводу принципа Мопертюи и попыток последнего дать с помощью этого принципа доказательство бытия бога. По приказу прусского короля Фридриха II этот памфлет был сожжен рукой палача.

Вольтер зло высмеивает Мопертюи и его телеологию, которая, по мнению Вольтера, сводится к банальному утверждению, что бог существует, и к видимости доказательства его существования. Он ссылается на Лейбница, когорый еще до Мопертюи видел, что на самом деле возможен как минимум, так и максимум, что уже разрушает всю телеологическую и теологическую аргументацию Мопертюи. Вольтер ехидно замечает, что целесообразность устройства мира особенно проявилась в том, что бог послал Эйлера Мопертюи и Эйлер дал принципу осмысленное и правильное математическое выражение, придав аморфным рассуждениям Мопертюи научную отчетливость, а Мопертюи "ничего не смог понять" в том, что сделал Эйлер.

Вольтер и в других сочинениях не раз с неприкрытой злобой высмеивал телеологию Мопертюи; достаточно взять такие его произведения, как "Micromegas", "Candide", "L'Homme aux quarante écus". Вряд ли нужно говорить, что дело здесь не в научном аспекте проблемы и даже не столько в философской, сколько в общественной и идеологической роли финализма Мопертюи, в той идейной борьбе, которая подготовляла революцию 1789 г.

Принцип наименьшего действия у Эйлера. В ходе решения задачи о брахистохроне, приведшего к выводу о том, что искомая кривая является циклоидой, Я. Бернулли высказал принцип, который хотя и не имел полной общности, но сыграл значительную роль на первой стадии развития вариационного исчисления и формулировки Эйлером принципа наименьшего действия. Принцип Я. Бернулли гласит, что если какая-либо кривая обладает свойством максимума или минимума, то и каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством. Именно это позволило Эйлеру написать вместо конечного пути s, входившего в формулировку принципа наименьшего действия, данную Мопертюи, элемент пути ds и тем самым сделать огромный шаг вперед. Надо отметить, что, рассматривая задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде, Эйлер показал, что длина и форма предшествовавшего пути имеют влияние на скорость в элементе пути. Таким образом, вся кривая могла быть брахистохроной, хотя каждый элемент ее и не обнаруживал этого свойства. Это означало, что принцип Я. Бернулли не может быть универсальным.

В 1697 г. И. Бернулли была поставлена еще одна задача на отыскание минимума: провести кратчайшую линию между двумя заданными точками на произвольной поверхности. Первые исследования этой задачи были выполнены Лейбницем и Я. Бернулли, но наиболее важный результат был найден самим И. Бернулли. Он показал, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна касательной плоскости к поверхности, что, как известно, является основным свойством геодезических линий. Понимая всю важность решения задачи о геодезических линиях, И. Бернулли хотя и не сразу опубликовал найденный результат[8], но предложил заняться этой задачей своему ученику Л. Эйлеру. Эйлер, который уже тогда, хотя ему был лишь двадцать один год, "вычислял, как человек дышит" (Араго), напечатал в 1728 г. статью, где дал общее решение поставленной И. Бернулли задачи. Четыре года спустя Эйлер опубликовал мемуар, в котором изопериметрическая задача была сформулирована в общем виде. После этого Эйлер публикует ряд работ, которые заложили основы вариационного исчисления. Он показал, что проблема нахождения экстремума определенного интеграла может быть решена простыми средствами без применения специальных методов. Для этого надо воспользоваться тем, что определенный интеграл может быть заменен суммой достаточно большого числа членов, а производные могут быть заменены конечными разностями. Ошибки, которые при этом возникают, могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Эйлер отчетливо сформулировал принципиальную разницу между задачами на максимум и минимум дифференциального исчисления и задачами вариационного исчисления. Если в первом определяется то место какой-либо определенной кривой, где "какая-либо заданная переменная величина, относящаяся к кривой, была бы максимумом или минимумом", то в вариационном исчислении "отыскивается сама кривая линия, для которой какая-либо заданная величина была бы наибольшей или наименьшей" [54, с. 27]. Затем во втором томе сочинения "Механика или наука о движении, изложенная аналитически", вышедшем в 1736 г., Эйлер снова занялся исследованием геодезических линий и решил изопериметрическую задачу о брахистохроне заданной длины. Наконец, в 1744 г. отдельным изданием вышел трактат, в котором Эйлер собрал почти все свои исследования предыдущих лет. В своих работах по вариационному исчислению Эйлер ближе к идеям Якоба, а не Иоганна Бернулли. Однако метод его работы существенно отличен от методов предшественников; если последние рассматривали отдельные вопросы, то Эйлер анализирует общие черты ряда проблем в целом. В силу этого решение вариационных задач, которое до него представляло боковую ветвь анализа, возводится им в ранг самостоятельной математической науки.

В письме от 28 января 1741 г. Даниил Бернулли спрашивал Эйлера, может ли он решить задачу центральных сил методом изопериметров. Эйлер нашел решение этой задачи в марте

---

[8] Он сообщил его в конце 1728 г. упсальскому профессору Клингенштерну; работы И. Бернулли о геодезических линиях были напечатаны лишь в 1742 г.

1743 г., а в 1744 г. оно было опубликовано им под заглавием "Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов" в приложении к знаменитой книге "Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле" [54].

Как правильно указывает Серре [46, с. 40], Эйлеру принадлежит первая отчетливая идея математического содержания, которое вкладывается наукой в принцип наименьшего действия. Именно Эйлер в 1744 г. в указанном выше приложении показал, что для траекторий, описываемых под действием центральных сил, интеграл $\int v ds$, где v — скорость, всегда равен минимуму или максимуму. Эйлер не дал этому выражению какого-либо специального наименования.

Этим замечанием Эйлера неявно формулируется ограничение области применения принципа наименьшего действия кругом задач, в которых силы имеют потенциал[9].

Таким образом, согласно Эйлеру необходимым условием применимости принципа наименьшего действия является выполнение закона живых сил[10], в то время как Мопертюи именно

---

[9] Однако Эйлер более ясно нигде не говорит о том, что возможный путь должен быть подчинен условию сохранения энергии, хотя он и предполагает везде, что скорость частицы зависит только от ее положения, т.е. рассматривает те случаи, когда силы имеют потенциал.

Интеграл Эйлера может быть записан для консервативной системы ($T + U = h$) так:

$$\int \sqrt{(h - U)ds^2} = \min. \tag{3.9}$$

Такую форму ровно сто лет спустя (1842–1843 гг.) Якоби придал принципу наименьшего действия. Однако для него ds уже не было обычным элементом траектории в обыкновенном пространстве, а элементом линии, изображающей кривую в фазовом пространстве, в котором

$$ds^2 = \sum_i m_i ds_i^2 .$$

[10] Насколько была ясна важность этого вопроса многим ученым того времени, видно из приводимого ниже отрывка неопубликованного письма Лаланда.

В письме от 3 марта 1753 г. (Архив АН СССР. Ф. 136. Оп. 2, № 3. Л. 315, 316) Лаланд пишет Эйлеру: "Я прочитал с удовольствием Ваши мемуары в защиту Мопертюи; я хотел бы, чтобы Вами было обращено больше внимания на то, чем принцип наименьшего действия отличается от принципа живых сил, потому что и тот и другой оценивают действие (l'action) квадратом скорости, предполагая время постоянным; в случае, рассмотренном в статье Кенига, живая сила равна нулю, ее элемент также равен нулю, точно так же, как элемент действия у Мопертюи, так что здесь нет никакой разнив том и усматривал универсальность своего принципа наименьшего количества действия, что он имеет более общее значение, чем закон живых сил или другие законы механики. Однако в той форме, которую придал Мопертюи этому принципу, он имеет смысл только для конечных и мгновенных изменений скорости, и поэтому из него можно получать только уравнения, связывающие конечные величины. Эйлерова же форма принципа наименьшего действия охватывает непрерывные движения, и из нее получаются дифференциальные уравнения траекторий.

Работа Эйлера делает совершенно незначительной роль Мопертюи, которому, по существу, принадлежит только название принципа, да и то не слишком удачное. Мопертюи сам пишет: "Этот великий геометр (Л. Эйлер. – *Л.П.*) не только обосновал принцип более основательно, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный, чем мой, привел его к открытию следствий, которых я не извлек" [125, с. 281].

Формулировка принципа, данная Мопертюи и требующая лишь того, чтобы $mvs = \min$, в сущности, не позволяет сделать заключение о законах варьирования, ибо не указаны условия, которым должны удовлетворять возможные варьированные движения. Даже Эйлер не смог добиться ясной формулировки принципа, для чего в одинаковой степени важно как выяснение величины, которая должна иметь экстремум, так и условий, которым должны удовлетворять сравниваемые движения.

Несмотря на то что выражение $\delta \int v ds$, являющееся математически осмысленной формой принципа наименьшего действия, дано Эйлером независимо и одновременно с работами Мопертюи, Эйлер всегда подчеркивал приоритет Мопертюи. Возможно, это объясняется тем, что при склонности к метафизическим спекуляциям он отдавал предпочтение априорной и кажущейся универсальной метафизической аргументации Мопертюи по сравнению со своими результатами, найденными им, как он сам говорит, a posteriori. Возможно также, что неоднократное подчеркивание Эйлером приоритета Мопертюи обусловлено в какой-то мере и его дружескими чувствами к президенту Берлинской академии.

Гениальный математик, Эйлер ставит задачу прежде всего математически: он ищет выражение, вариация которого, будучи приравнена нулю, дает обычные уравнения механики.

цы между ними. С другой стороны, кажется, что Кениг находится в согласии с Вами, когда он говорит (с. 169), что "если полный элемент живой силы делается равным нулю, то имеет место равновесие"; это означает не что иное, как то, что живая сила есть минимум..."

Эйлер показывает, что для нахождения кривой, на которой значение некоторой величины W было бы наибольшим или наименьшим по сравнению с другими кривыми, W должно быть "неопределенной величиной" (quantitas integralis indefinita), которая может быть проинтегрирована только в том случае, когда существует определенное соотношение между x и y. Следовательно,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} Z dx \tag{3.10}$$

и величина Z должна быть образована так, чтобы дифференциал Zdx не мог быть проинтегрирован без установления соотношения между x и y ($p = dy/dx$).

Эйлер делает следующий вывод: "Итак, этот принцип имеет столь широкое значение, что подлежащим изъятию представляется только движение, возмущаемое сопротивлением среды; причем легко видеть причину этого изъятия, потому что в этом случае тело, приходя к одному и тому же месту различными путями, приобретает не одну и ту же скорость. Таким образом, если устранить всякое сопротивление движению брошенных тел, то всегда будет иметь место то постоянное свойство, что сумма всех элементарных движений будет наименьшей. И это свойство будет наблюдаться в движении нескольких тел, рассматриваемых вместе; как бы они ни действовали одно на другое, всегда сумма их движений остается наименьшей" [54, с. 592].

Далее Эйлер решает задачи о движении брошенного тела в однородном поле тяжести и в поле тяжести, в котором сила, направленная вертикально вниз, есть некоторая функция высоты, а также более сложную задачу, когда на тело действуют две силы (горизонтальная и вертикальная), и некоторые другие. Все эти задачи решены Эйлером в простой и изящной форме способами, развитыми в его книге "Метода нахождения кривых линий".

К этим решениям вполне относятся известные слова Лапласа: "Читайте, читайте Эйлера – это наш общий учитель".

Однако Эйлер не приложил принципа наименьшего действия к задаче взаимного притяжения. Эта задача была позже рассмотрена Лагранжем.

Математическое рассмотрение интересующей нас задачи не обходится у Эйлера без телеологических и метафизических соображений.

Мы уже упоминали, что Эйлер поддерживал Мопертюи во время известной дискуссии. Поэтому неудивительно, что для обоснования принципа он сначала пользуется прямо телеологической аргументацией, но в конце концов приходит к выводам, которые, по существу, лишают этот принцип столь дорогого для Мопертюи божественного ореола.

Вот что говорит Эйлер в Приложении 1 "Об упругих кривых": "Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума: поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самых причин производящих. Повсюду существуют столь яркие оказания этой истины, что для ее подтверждения нам нет нужды в многочисленных примерах; скорее надо будет направить усилия на то, чтобы в каждой области физических вопросов отыскать ту величину, которая принимает наибольшее или наименьшее значение: исследование, принадлежащее, по-видимому, скорее к философии, чем к математике. Итак, открыто два пути для познания явлений природы – один через производящие причины, который обычно называют прямым методом, другой – через конечные причины – и математик с равным успехом пользуется обоими. А именно, когда производящие причины слишком глубоко скрыты, а конечные более доступны для нашего познания, то вопрос обыкновенно решается непрямым методом... Но прежде всего надо прилагать усилия, чтобы открыть доступ к решению обоими путями, ибо тогда не только одно решение наилучшим образом подтверждается другим, но от согласия обоих мы получаем высшее наслаждение" [Там же, с. 447].

Указав, что развитый им для исследования движения в поле центральных сил метод может быть применен к задаче нахождения условий равновесия механических систем, Эйлер усматривает обоснование такой возможности в аргументах, доказательная сила которых ему самому представляется недостаточной:

"... Так как тела в силу инерции сопротивляются всякому изменению состояния, то они, если только будут свободны, будут насколько возможно меньше подчиняться действующим силам; отсюда вытекает, что в порожденном движении эффект, произведенный силами, должен быть меньшим, чем если бы тела двигались каким-либо иным способом. Хотя сила этого рассуждения еще недостаточно видна, все же, так как оно согласно с истиной, я не сомневаюсь, что при помощи принципов здравой метафизики оно может быть возведено к большей очевидности; но это я предоставляю другим – тем, кто занимается метафизикой" [Там же, с. 593].

Последнее замечание, впрочем, излишне скромно: Эйлер сам немало занимался метафизикой. Для него было характерно стремление дать натурфилософское обоснование механики, не довольствуясь тем, что ее основные законы суть научное обобщение эксперимента и наблюдения. Поэтому Эйлер многократно возвращался к проблемам, находящимся на стыке математики, механики, натурфилософии и философии. Им опубликована, например, любопытная с точки зрения изучения попыток ученых XVIII в. воедино связать философию и механику работа: "Enodatio quaestionis: utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? ex principiis mechanicis petita", т.е. "Основанное на принципах механики исследование вопроса, можно ли материи приписать способность мышления или нельзя". В этой работе механика привлекается на помощь философии. Однако у Эйлера есть и такие работы, где метафизика положена в основание механики: "Essay d'une demonstration metaphysique de principe général de l'équilibre", т.е. "Опыт метафизического доказательства общего принципа равновесия".

Склонность Эйлера к проблемам, относившимся в XVIII в. к метафизике, и присущие ему теологические и телеологические тенденции проявились в его известной популярной книге "Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе" [55].

Эта книга получила отрицательную оценку Д'Аламбера и Лагранжа. Они восприняли книгу Эйлера как выступление против антитеологических, материалистических взглядов передовых французских ученых.

Лагранж пишет Д'Аламберу: «Труды, которые Эйлер публикует в Петербурге, были написаны давно и оставались в рукописи лишь за отсутствием издателя, который хотел бы ими заняться; среди них имеется одно сочинение, которое он не должен был публиковать ради своей чести: это "Письма к немецкой принцессе"» (письмо от 2 декабря 1769 г.). И в другом письме: "...Письма Эйлера к немецкой принцессе, которые Вы желаете видеть и которые, может быть, Вас позабавят выходками против вольнодумцев" (письмо от 15 июля 1769 г.) [111, с. 132–143].

Д'Аламбер в письме Лагранжу от 10 июня 1769 г. остроумно сравнивает эту работу Эйлера с имеющими печальную известность комментариями Ньютона к Апокалипсису: "...Судя по тому, что Вы мне о них говорите (речь идет о сочинении Эйлера "Письма к немецкой принцессе". – *Л.П.*), это его комментарии к Апокалипсису. Наш друг – великий аналитик, но довольно плохой философ" [Там же, с. 135].

Прочитав "Письма к немецкой принцессе", Д'Аламбер пишет (письмо Лагранжу от 7 августа 1769 г.): «Вы имели полное основание говорить, что он не должен был печатать это произведение ради своей чести. Это просто невероятно, как такой великий гений, каким он является в геометрии и анализе, может быть в метафизике ниже самого маленького школяра, чтобы не сказать таким плоским и абсурдным, и вот действительно подходящий случай воскликнуть: "Не все богами даровано одному!"» [Там же].

В течение 1746–1749 гг. Эйлер подготавливает к печати несколько работ, посвященных поискам выражений, имеющих минимум, в различных задачах динамики и статики. Эти работы были напечатаны в 1750–1753 гг.

Несмотря на использование терминологии Мопертюи, Эйлер сформулировал идеи, далеко превосходящие ограниченные и односторонние высказывания Мопертюи. Эйлеру принадлежит первая точная и математически плодотворная формулировка принципа наименьшего действия, открывшая новые горизонты для его подлинно научного применения. Именно Эйлер разработал в виде отчетливого и последовательного стройного математического метода те идеи, которые иначе рисковали остаться в глазах поколений блестящей, но не слишком глубокой догадкой. В этом смысле Эйлер является действительным основоположником научно сформулированного принципа наименьшего действия в механике. Он придал ему научную форму, и нужен был еще только один шаг для того, чтобы завершить полное освобождение принципа наименьшего действия от метафизических лохмотьев и математически обобщить его. Этот шаг был сделан Лагранжем (1736–1813).

Принцип наименьшего действия у Лагранжа. Научное творчество Лагранжа падает на период, непосредственно предшествовавший Великой французской революции 1789 г., и на время самой революции. В силу этого и несмотря на то что сам Лагранж оставался в стороне от политических бурь, сотрясавших не только Францию, но и всю Европу, он все же в какой-то мере отразил дух этой замечательной эпохи в своем подходе к осмыслению результатов математического исследования.

Лагранж занимает в истории механики чрезвычайно важное место. Он сыграл решающую роль и в развитии принципа наименьшего действия. Проблема принципа наименьшего действия становится объектом его внимания в 1760 г. В предисловии к своей "Аналитической механике" [33, с. 9] он говорит: "...план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи... кроме того, эта работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и представит с одной и той же точки зрения принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их взаимную связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения".

И действительно, его "Аналитическая механика" сыграла роль сочинения, открывшего новый этап в развитии механики. Основная для Лагранжа идея построения механики как систематического и гармонического здания, возводимого на фундаменте единой общей предпосылки, пронизывает "Аналитическую механику". И это стремление к систематичности и изяществу изложения, к математической законченности построения нашло восторженную оценку у другого великого мастера математического анализа проблем механики – Гамильтона. Во введении к своей работе "Общий метод динамики" Гамильтон говорит: "Лагранж, пожалуй, больше, чем какой-либо другой аналитик, сделал для того, чтобы придать стройность подобным дедуктивным исследованиям, доказав, что самые разнообразные следствия, относящиеся к движению системы тел, могут быть выведены из одной основной формулы. При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта великая работа превращается в своего рода математическую поэму" [14, с. 176].

В 1760–1761 гг. в "Miscellanea Taurinensia", т. II, Лагранж опубликовал статью под названием "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies" ("Опыт нового метода для нахождения максимумов и минимумов формул интегралов").

Лагранж понял, что отыскание минимума определенного интеграла требует специальных методов. С помощью этих методов он прямо решил задачу, которую Эйлер исследовал с помощью сложного предельного процесса.

Непосредственно за указанной статьей в том же томе Лагранж печатает статью под характерным заглавием "Application de la méthode, exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique" ("Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, к решению различных проблем динамики").

Лагранж ссылается в начале статьи на работу Эйлера "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate guadentes sive solutio isoperimetrici latissimo sensu accepti", в которой Эйлер показал, что для случая движения в поле центральной силы траектория, по которой движется тело, удовлетворяет требованию

$$\int v ds = \min. \tag{3.11}$$

Лагранж обобщает этот принцип и дает ему следующее выражение: "Общий принцип: имеем произвольные тела M, M', M'', ..., которые каким-либо образом действуют друг на друга и которые могут быть, кроме того, подвергнуты действию центральных сил, пропорциональных произвольным функциям расстояний; пусть s, s', s'', ... представляют пространства, пройденные этими телами за время t, и пусть v, v', v'', ... будут их скоростями к концу этого времени, тогда выражение

$$M\int v ds + M'\int v' ds' + M''\int v'' ds'' + \ldots \tag{3.12}$$

всегда будет представлять максимум или минимум"[11] [14, с. 117].

Это определение и выражает тот шаг вперед, который совершил Лагранж в развитии принципа наименьшего действия. Он распространил принцип, сформулированный у Эйлера для материальной точки, на случай произвольной системы точек, связанных между собой и действующих друг на друга произвольным образом.

Таким образом, оказывается возможным применить принцип наименьшего действия к динамике системы. Действительно, пользуясь принципом наименьшего действия, Лагранж в своем мемуаре аналитически решает ряд задач динамики. Это дало повод Якоби заметить, что лагранжев принцип наименьшего действия есть родоначальник всей нашей аналитической механики.

По установленным в его предшествующем мемуаре правилам вариационного исчисления Лагранж пишет

$$\delta\Sigma m\int v ds = 0, \tag{3.13}$$

[11] В первых приложениях вариационного исчисления Лагранж не обращал внимания на условия, которыми различаются максимум и минимум, и доказательство начала наименьшего действия, данное им в "Аналитической механике", с последующими уточнениями этого доказательства не установило ничего иного, кроме того, что вариация действия для действительного движения, в котором имеет место закон сохранения полной механической энергии, равна нулю и, наоборот, из равенства нулю вариации действия можно получить результат, который не отличается от общей формулы динамики. Но это только одна часть вариационной задачи на нахождение минимума интеграла действия. Вторая часть задачи основана на определении знака второй вариации. Этот вопрос нашел отражение в работах русских ученых: Сабинина, Преображенского, Бобылева, Жуковского, Слудского, Соколова, Талызина и Сомова. Отметим фундаментальное различие между δy и dy. Обе операции суть бесконечно малые изменения функции y. Однако dy относится к бесконечно малому изменению данной функции $f(x)$, которое обусловливается бесконечно малым изменением dx независимой переменной, в то время как δy – бесконечно малое изменение y, которое создает новую функцию $y + \delta y$.

а так как

$$\delta \int v ds = \int \delta (v ds),$$

то, преобразуя

$$\delta (v ds) = v \delta ds + \delta v ds,$$

получаем

$$\Sigma m \int (v \delta ds + \delta v ds) = 0. \tag{3.14}$$

Затем Лагранж вводит условие, что если p, q, r, ... – расстояния тела от центров сил P, Q, R, ..., то

$$\frac{v^2}{2} = \text{const} - \int (P dp + Q dq + R dr + ...)$$

или

$$v \delta v = -\delta \int (P dp + Q dq + R dr + ...) = -\int (\delta P dp + P \delta dp + ...).$$

Таким образом, уже в самом начале исследования вводится как необходимое условие принцип живых сил.

Этим предрешается и круг задач, рассматриваемых Лагранжем в его сочинении. Всего Лагранж решает десять задач из разных отделов динамики. Важнейшими из них являются задачи о движении тела под действием центральных сил, пропорциональных произвольным степеням расстояния, о движении связанных тел, о движении жидкости и некоторые другие.

Возвращаясь к рассмотрению общего направления этой работы, напомним, как мы уже отметили, что само заглавие ее подчеркивает сугубо математический характер этого сочинения Лагранжа. Действительно, в нем не затрагивается ни одна из проблем, связанных с обоснованием механики. В этой работе задачи механики представляют собой лишь определенный класс задач вариационного исчисления.

Мы видим, что Лагранж, для которого механика была "аналитической геометрией четырех измерений", о котором говорили, что он более интересовался выкладками, чем логическим содержанием понятий, подошел здесь к принципу наименьшего действия как чистый математик. Для него возможность широкого применения принципа основывается на разработанном им вариационном методе. Это есть лишь удобный и изящный способ решения задач.

Никаких "метафизических" предпосылок с поражавшим умы фактом минимальности "действия" Лагранж не связывает, и вообще о нем с полным правом можно сказать, что в противоположность многим своим современникам он был не только чужд "метафизике", но и прекрасно осознал неприменимость подобной аргументации внутри механической науки.

Всякие попытки связать науку с религией, телеологией вызывали у него глубокий протест. В этом смысле характерно резко отрицательное отношение Лагранжа к Бошковичу – одному из ученых иезуитов. Всякое явное влияние религии на науку отталкивало Лагранжа. Он пишет Кондорсе: "Я в восторге, что Вы, наконец, отделались от Бошковича: каковы бы ни были заслуги его трудов, я думаю, что они все же стоят больше, чем его личность. Он монах и иезуит, которого следовало бы сжечь (Il est moin et jésuite à abrûler) [110, с. 200].

Лагранжу совершенно чужды теологические рассуждения Мопертюи. И не находят у него никакого отклика слова Эйлера в письме к нему от 9 ноября 1762 г.: "Какое удовлетворение получил бы Мопертюи, если бы был еще жив, увидев свои принцип наименьшего действия возведенным на высшую ступень, доступную для него".

Словно отвечая Эйлеру, Лагранж в своей "Аналитической механике" говорит, что он называет этот принцип принципом наименьшего действия лишь "по аналогии с тем, который Мопертюи дал под этим названием". Для Лагранжа принцип наименьшего действия не связан с тем специфическим теологическим содержанием, которое вложил в него Мопертюи.

Согласно Лагранжу имеем

$$\delta \Sigma m \int v ds = 0,$$

и это выражение будет максимумом или минимумом. Мы можем сформулировать следующую теорему, выражаемую этим равенством: "При движении любой системы тел, находящихся под действием сил взаимного притяжения или сил, направленных к неподвижным центрам и пропорциональных каким-либо функциям расстояний, кривые, описываемые различными телами, а равно их скорости необходимо таковы, что сумма произведений отдельных масс на интеграл скорости, умноженной на элемент кривой, является максимумом или минимумом при условии, что первые и последние точки каждой кривой рассматриваются как заданные, так что вариации координат, соответствующих этим точкам, равны нулю" [33, с. 389]. Некоторая неясность этого предложения Лагранжа послужила предметом для ряда исследований в XIX в.

Необходимо отметить, что, так же как Эйлер, Лагранж оставил почти не освещенным вопрос о характере сравниваемых варьированных движений в принципе наименьшего действия в форме Эйлера–Лагранжа.

Продолжая рассмотрение принципа наименьшего действия, Лагранж так же изящно выводит из него общее уравнение динамики. Отметим, что и при этом обратном выводе он пользуется как необходимым звеном законом сохранения живой силы. Мы видим, что для применимости принципа наименьшего действия Лагранж выдвигает определенное условие, чтобы как для действительного, так и для варьированного движения был применим закон живых сил. Этот вывод общего уравнения динамики служит для Лагранжа иллюстрацией того, что принцип наименьшего действия не представляет собой только некоторое любопытное свойство движения тел. Лагранж подчеркивает, что он может также служить для того, чтобы определить движение. В самом деле на основании правил вариационного исчисления могут быть определены условия, при которых выражение $\Sigma m \int v ds$ имеет максимум и минимум. А затем, "если применить общее уравнение сохранения живых сил, то мы всегда найдем все уравнения, необходимые для определения движения каждого тела" [Там же, с. 383].

Что касается математической стороны доказательства Лагранжем эквивалентности уравнения динамики и принципа наименьшего действия, то и она давно вызывала сомнения.

Мы видели, что у Лагранжа сравниваются между собой два бесконечно близких движения, причем вариация обусловлена законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + E_{\text{пот}} = \text{const},$$

т.е.

$$\delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\delta E_{\text{пот}} .$$

Это условие требует, чтобы кинетическая энергия была определена во все время движения в любой точке. Следовательно, и скорости варьированного движения не могут иметь произвольных значений[12] [133, с. 343]. Ясно поэтому, что нельзя сравнивать точки варьированного и действительного движения в один и тот же момент времени. Вообще говоря, мы не можем полагать $\delta t = 0$. Поэтому $\frac{d\delta x}{dt}$ отнюдь не равно $\delta \frac{dx}{dt}$, как пишет Лагранж, а

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{d\delta t}{dt}. \tag{3.15}$$

[12]Более того, v для Лагранжа, так же как для Эйлера, есть скорость, определяемая уравнением живых сил.

Этот вопрос [133] имеет и значительный физический смысл. В самом деле, рассмотрим ближе смысл сопоставления действительного движения с варьированным. Мы исходим из предположения, что оба движения начинаются одновременно в некоторой точке A, в точку же B – конечное положение – они приходят неодновременно. Для точного представления операции варьирования надо сопоставить с каждой точкой действительной траектории точку варьированной. Без этого нельзя писать

$$\delta \int E_{\text{кин}}\, dt = \int \delta (E_{\text{кин}}\, dt). \tag{3.16}$$

В нашем случае сопоставляемые точки будут проходиться в различные моменты времени. Следовательно, вариация времени выражает различие времен, в которые проходятся соответственные точки траекторий.

Допустим, что для внешних сил, действующих на тело, существует потенциальная функция; тогда можно определить вариацию следующим образом: для соответственных состояний сравниваемых траекторий полная энергия должна быть одной и той же. Так как полная энергия равна $E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$ и так как исходное движение задано, то для любого положения траекторий дана кинетическая и потенциальная энергия. Для соответствующего положения варьированной траектории сначала известна только зависящая от координат потенциальная энергия и из налагаемого условия вариации сразу определяется для любого положения кинетическая энергия и вместе с тем скорость [14, с. 538].

У Лагранжа же при выводе из принципа наименьшего действия уравнения динамики выражение

$$\delta \Sigma m \int v ds = 0$$

преобразуется следующим образом:

$$\Sigma m \int (ds \delta v + v \delta ds) = 0.$$

Первый член

$$\Sigma m \int ds \delta v$$

дает

$$-\int dt \Sigma m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots) \tag{3.17}$$

при помощи уравнения живых сил в форме

$$\Sigma m v^2 = 2h - 2 \Sigma m E_{\text{пот}}.$$

Второй член после преобразований "перестановки знаков Σ и $\int$ и предполагая dt постоянным" (Лагранж) принимает вид

$$-\int dt\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right). \qquad (3.18)$$

Этим, очевидно, и решается задача выведения из принципа наименьшего действия общей формулы динамики.

Но при этом Лагранж не исключает скорости ds/dt, чем и создается известная неясность вывода и затемняется его физический смысл, так как, вообще говоря, у Лагранжа независимая переменная варьируется.

Наконец, отметим еще один момент, который возбуждал сомнения в выводе Лагранжа. Лагранж полагает dt = const. Однако, как нетрудно усмотреть, это означает у Лагранжа (как и у Лапласа) только то, что dt является независимой переменной, могущей иметь произвольное значение.

Таким образом, собственно математическая сторона рассуждений Лагранжа хотя и не лишена неясностей, но не является принципиально неверной.

Произведем еще одно математическое преобразование, которое даст возможность глубже раскрыть смысл принципа наименьшего действия. Любопытно отметить, что место, к рассмотрению которого мы сейчас переходим, появилось лишь во втором издании "Аналитической механики" и, следовательно, принадлежит к наиболее поздним высказываниям Лагранжа относительно принципа наименьшего действия. В этом высказывании Лагранж непосредственно восходит к Эйлеру, развивая указанную последним связь закона живых сил и принципа наименьшего действия.

Так как $ds = vdt$, то формула

$$\Sigma m\int v ds,$$

которая имеет максимум или минимум, может быть записана в виде

$$\Sigma m\int v^2 dt$$

или

$$\int dt\Sigma mv^2,$$

где Σmv^2 обозначает живую силу всей системы в данный момент.

Знаменитые введения к отдельным главам "Аналитической механики" представляют собой попытку подойти к обоснованию механических понятий и законов без "метафизики". Конечно, это не исключает того, что формальная сторона очень сильна у Лагранжа и что он, как замечает Гаусс, иногда слишком много полагался на символическое вычисление при решении задач, не давая себе достаточного отчета в каждом шаге своих математических выкладок. В чем же Лагранж усматривает смысл принципа наименьшего действия, сведенного им на положение следствия основного закона механики?

Ответ Лагранжа предопределен тем, что, как мы видели выше, область применения принципа ограничена для него сферой применения закона живых сил. Если вспомнить, что Лагранж показал, что принцип наименьшего действия может быть выражен в форме интеграла $\int dt \Sigma mv^2$, который должен иметь максимум или минимум, то станет совершенно ясен ответ Лагранжа на поставленный выше вопрос: "Таким образом, рассматриваемый принцип сводится собственно к тому, что сумма живых сил всех тел от момента, когда они выходят из заданных точек, до того момента, когда они приходят в другие заданные точки, является максимумом или минимумом. Следовательно, его можно было бы с большим основанием назвать *принципом наибольшей или наименьшей живой силы*; эта формула имела бы то преимущество, что она была бы общей как для движения, так и для равновесия ...мы видели, что при прохождении положения равновесия живая сила системы всегда бывает наибольшей или наименьшей" [33, с. 389].

Таким образом, это толкование находит физический смысл принципа наименьшего действия в конкретизации закона живых сил. Но, более того, оно увязывается Лагранжем с установленным им фактом из статики, заключающимся в том, что в случае равновесия живая сила всегда максимальна или минимальна.

Так как Лагранж, по существу, рассматривает консервативные системы, то это утверждение выражает тот факт, что в случае равновесия потенциальная энергия имеет всегда соответственно минимум или максимум. По этому поводу Гаусс справедливо замечает, что приведенное положение Лагранжа скорее остроумно, чем правильно, так как минимум в случае положения равновесия и в случае движения имеет место в совершенно различном смысле.

Развитая Лагранжем точка зрения на принцип наименьшего действия разделялась рядом ученых того времени. Например, Лаплас, который расширил сферу приложения принципа в оптике, применив его к преломлению в кристаллах, говорит о механическом содержании этого принципа. "Интеграл живой силы системы, умноженный на элемент времени, есть минумум, так что, следовательно, *истинная экономия природы есть экономия живой силы*" [113, с. 205].

В заключение характеристики, данной им принципу наименьшего действия, Лагранж говорит, что он рассматривает его не как "метафизический принцип, а как простой и общий вывод из законов механики" [33, с. 320].

Здесь, таким образом, Лагранж настойчиво и совершенно определенно отказывается от всякой метафизической трактовки принципа. Под метафизической же трактовкой тогда понималась теологически-телеологическое обоснование принципа наименьшего действия, образец которого имеется в работах Мопертюи.

Лагранж самое название "принципа наименьшего действия" употребляет, как он сам говорит, лишь по традиции. Это название отнюдь не соответствует математической формулировке принципа. Телеология вытекает не из механики в ее математической формулировке, а привносится извне, предвзятыми и произвольными обобщениями и неопределенными наименованиями, "как будто бы неопределенные и произвольные наименования составляли сущность законов природы и с помощью какого-то скрытого свойства способны простые выводы из известных законов механики возвести до степени конечных причин" [Там же, с. 318] .

Это весьма интересное место. Лагранж правильно подмечает произвольность наименования величины *mvs* действием. Он указывает, что эта произвольность и неясность в терминологии дает возможность протаскивать телеологию туда, где ей иначе не было бы места. Эти даваемые нами наименования ни в коем случае "не составляют сущности законов природы".

Аналогичные взгляды высказывал Д'Аламбер. Он говорил: "Какую бы ни занять позицию как относительно метафизики, которая ему (принципу Мопертюи.– *Л.П.*) служит основанием, так и относительно данного Мопертюи понятия количества действия, все же останется верным, что произведение пространства на скорость есть минимум в наиболее общих законах природы. Эта геометрическая истина, которой мы обязаны Мопертюи, будет существовать всегда. Можно, если угодно, принять слова "количество действия" только в качестве сокращенного способа выражать произведение пространства на скорость".

Лагранж вместе с тем отвергает претензии принципа наименьшего действия на всеобщую значимость и на звание основного общего закона природы.

В это же время великий современник Лагранжа Лаплас (1749–1827) в работе "Sur la double réfractions dans le spath d'Islande" [114, с. 300] приложил метод, примененный Мопертюи для получения с корпускулярной точки зрения закона преломления обычного луча, к задаче двойного лучепреломления. Он использовал для этого принцип наименьшего действия, математическое выражение которого было настолько улучшено со времени Мопертюи, что стало возможным применять его к более сложным задачам, чем простое преломление света.

Под непосредственным влиянием работ Лагранжа Л. Карно

(1753—1823) применил принцип наименьшего действия к теории удара и установлению общих теорем импульсивного движения. В его формулировке, данной в 1803 г., как говорит сам Карно, "более не остается ничего неопределенного в принципе Мопертюи, который выражен строго и математически" [65]. Исключив категорически всякий метафизический аспект, Л. Карно указывает вместе с тем, что претензии Мопертюи на универсальность принципа не обоснованы, и, в частности, отмечает, что и в области законов удара, которые выводил из него Мопертюи, этот принцип не охватывает того случая, когда тела имеют различную степень упругости. В отдельных же случаях с помощью этого принципа можно получить интересные результаты. Л. Карно находит таким образом важную теорему, что во всякой материальной системе, подчиненной связям без трения, в которой без наличия прямо приложенных импульсов происходят резкие изменения скоростей, всегда будет иметь место общая потеря живой силы, равная живой силе, соответствующей этим изменениям скоростей.

Следующий важный шаг в развитии интересующего нас круга идей сделал замечательный французский ученый Пуассон, исходя из разработанного Лагранжем и им метода вариации произвольных постоянных. Вместе с тем Пуассон как бы завершил исключение всякой посторонней метафизики из вопросов, связанных с соотношением, получившим название принципа наименьшего действия.

Таким образом, в первый период формирования вариационных принципов механики их развитие, по существу, неотделимо от вариационного исчисления и проблемы построения аналитической механики. Развитие вариационного исчисления давало математические методы аналитической механике, развитие последней было одной из важнейших причин, приведших к созданию вариационного исчисления, а в последующем постоянно расширяло круг его проблем.

3. Вариационный принцип Гамильтона

Вариационные принципы были сформулированы в первоначальном виде в "век философии". Они были (и не раз) в центре философских дискуссий и более или менее туманных словопрений. Они легко могли быть истолкованы как выражение теологической структуры процессов природы в противовес причинному (уже тогда господствовавшему среди физиков и механиков) описанию явлений. Однако в то время эти два подхода, кажущиеся нам сегодня взаимно исключающими, отнюдь не обязательно воспринимались таковыми. В различных формах философы и ученые того времени утверждали (или допускали) предустановленную гармонию "божественного творения" и подобного ему безграничного в своих возможностях интеллекта человека. Недаром познание природы считалось у гуманистов лучшим выражением любви к творцу путем богопознания. Мир сам глубочайше интеллектуален (хотя он отнюдь не обязательно наилучший из всех возможных миров, как учил Лейбниц). Поэтому расширение представлений о мироздании путем анализа не обязательно реализующихся, но возможных миров с выделением одного из них как реального при помощи условия минимума (экстремума!) некоторой величины являлось для них оправданным с философской (и теологической) точки зрения. Возможность выделить с помощью такого условия из всех *мыслимых* миров мир *реальный* поражала тогдашних ученых.

Может быть, поэтому обсуждение вариационных принципов (прежде всего принципа наименьшего действия, само название которого как бы вызывало на дискуссию) приняло даже не столько научный, сколько теологический, философский, мировоззренческий характер. Эти проблемы теперь имеют, конечно, в основном интерес в историко-научном и историко-культурном планах. Для эволюции же самих принципов существенны их связь с основными законами механики и физики и их внутренняя математическая структура.

При рассмотрении принципа наименьшего действия необходимо иметь в виду его отличительную черту: на варьируемые движения накладывается ограничение, состоящее в том, что для них *интеграл энергии* $E = h$ сохраняет постоянное значение. Это важное ограничение является единственным[13].

Трудности, связанные с ограничением, накладываемым на вариации в принципе наименьшего действия, заставили искать новую форму принципа, свободную от этого ограничения. Это форму достаточно простым путем нашел Якоби (1847 г.).

Для голономной системы с n степенями свободы как для исходного, так и для варьированного движения будем иметь

$$T = h - U(x, y, z) = \sqrt{T(h - U)}, \qquad (3.19)$$

и согласно принципу наименьшего действия

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{T(h - U)}\, dt \qquad (3.20)$$

---

[13] Принцип Гамильтона, который во многом схож с принципом наименьшего действия, имеет перед ним то преимущество, что он не требует одинаковости энергии для всех варьируемых траекторий. Зато он требует, чтобы частицы покрывали все траектории за одно и то же время, чего не требует принцип наименьшего действия.

принимает стационарное значение для движений с постоянной энергией h. Теперь уже требование $h = \mathrm{const}$ для всех сравниваемых движений не является существенным. Подынтегральная функция в (3.20) является однородной функцией первой степени относительно скоростей, так что значение интеграла зависит только от траектории системы в пространстве конфигураций, метрика которого

$$ds^2 = \sum \sum a_{jk} dq_j dq_k, \tag{3.21}$$

и не зависит от скорости движения вдоль этой траектории. Это означает, что интеграл (3.20) принимает в действительном движении стационарное значение по сравнению с его значениями для соседних движений, соединяющих те же концевые точки в пространстве. Это и есть принцип наименьшего действия в форме Якоби [14, с. 294], который сводит задачу об определении траектории, изображающей точки в пространстве конфигураций, к обычной задаче вариационного исчисления с фиксированными концами. Для задачи о движении частиц в пространстве под действием сил консервативного поля $U(x, y, z)$ выражение (3.20) принимает вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - U)}\, ds = 0, \tag{3.22}$$

где s — длина дуги. Эта форма записи напоминает принцип Ферма в оптике.

Однако значительно раньше этих результатов Якоби Гамильтон в своих исследованиях об общем методе динамики сформулировал другой вариационный принцип, получивший его имя, истоки которого лежат в его оптических работах.

Первой работой Гамильтона в области динамики является, однако, не опубликованная при его жизни рукопись (так же было, кстати сказать, и с его первой работой по оптике), помеченная 1833 г. и озаглавленная «Проблема трех тел, рассматриваемая с помощью моей "характеристической функции"» [Там же, с. 759] (опубликована в 1940 г.). Эта работа содержит попытку применить характеристическую функцию для решения классических задач небесной механики. В главном ее содержание таково: после общих замечаний о проблеме движения Солнца, Юпитера и Сатурна вводятся характеристическая функция V и ее вариация δV, затем рассматриваются возмущения Юпитера и результаты сравниваются с результатами Лапласа; рассмотрение приближенных выражений для возмущений, живой силы, возмущений почти круговых орбит, вариации констант (элементов) приводит к изменению постановки задачи, и, наконец, вводится и доказывается в общем случае, что $\partial V/\partial h = t$ и что уравнения в частных производных

$$\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = 2F(r), \quad \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 = 2F(r_0)$$

имеют общее решение. В заключение находится выражение V для различных законов силы.

Уже в этой работе получены многие существенные результаты, вошедшие затем в две его основные работы. Из этих результатов наиболее важным является найденное первоначально для частного случая движения по эллиптической орбите соотношение

$$\partial V/\partial h = t, \tag{3.23}$$

где $V = \int\limits_0^t \Sigma m v^2 dt$ – характеристическая функция, h – "постоянная живых сил", по терминологии Гамильтона – полная энергия систем, t – время. Он сразу понял важность этого результата и записал: "*Это будет чрезвычайно важная теорема, если мы сможем найти, что в общем случае* $\partial V/\partial h = t$ (курсив Гамильтона. – *Л.П.*)" [Там же, с. 762] , и далее тут же находим: "(8 января 1834 г.) тремя страницами далее я дал общее доказательство справедливости этой теоремы $t = \partial V/\partial h$. При помощи этой теоремы интегрирование дифференциальных уравнений движения любой системы тел (включая вращение) сводится к нахождению вида функции V, дифференцированию ее по начальным координатам и h и определению конечных координат как функций полученных таким образом частных производных и начальных координат. Полученные таким образом выражения для конечных координат не должны содержать h". В этом результате заложены исходные предпосылки Гамильтона.

Важнейшие открытия Гамильтона в аналитической механике изложены были им в двух объемистых работах (108 с.) "Об общем методе динамики" [Там же, с. 175–283]. Они потребовали от него наименьшей затраты времени по сравнению со всеми другими его важными исследованиями.

Интересно, что они изложены вполне упорядоченно и к ним неприменимы жесткие замечания Ф. Клейна, Лармора и других, которые были сделаны ими по поводу "Теории систем лучей" и приведены нами выше[14]. Эти работы возникли непосредственно из "Теории систем лучей" и показали исключительную способ-

[14] Только чтение двух работ по динамике ограничивает напрашивающийся при ознакомлении с работами Гамильтона вывод, что он плохо излагал свои собственные новые идеи. Из работ по динамике, вошедших в [92, т. 2], ранее опубликовано меньше четверти. Гамильтон достигал выводов тяжелой предварительной работой, рассмотрением мно-

ность Гамильтона быстро создавать огромную по объему теорию, почти не имеющую аналогов в механике по общности и абстрактности. Призванием Гамильтона не было применение его теорий к частным физическим и механическим задачам. Это не значит, что он не интересовался прикладными аспектами – мы уже отмечали это в главе 2 по поводу его оптических исследований, – но по большей части не публиковал такие результаты. Это относится и к механике. Значение Гамильтона не столько в его непосредственном вкладе в решение конкретных задач механики, сколько в тех колоссальных возможностях, которые он открыл для других исследователей в механике и сопредельных науках. Это точно выразил Дж. Максвелл в письме к П. Тэту: "Полезность Гамильтона не в том, что он сделал сам, а в тех исследованиях (выполненных едва ли наполовину), которые он как бы заставил осуществить других ученых. Для того чтобы понять его, Вы должны подняться до него и, пройдя затем через все виды наук, вернуться вновь к нему, и тогда он даст Вам полезный совет" [107].

Гамильтон начал вплотную заниматься приложением своей оптической теории к динамике в начале 1833 г., сразу после успешного экспериментального подтверждения Х. Ллойдом существования конической рефракции, предсказанной Гамильтоном. Он перешел от оптики к динамике, в частности, потому, что теория светоносного упругого эфира, которую он предполагал построить, есть в основном динамическая проблема: надо найти силы и движения среды, которые должны объяснить явления физической оптики. В то же время "Теория систем лучей" была теорией геометрической оптики. В ней изучались геометрические пути света без рассмотрения движения волн или частиц, переносящих свет, и как геометрическая теория она не имела и не могла иметь динамического содержания. Хотя в своих приложениях геометрическая оптика и динамика совершенно различны, Гамильтон создал прекрасную теорию, которая связала обе эти науки на исключительно абстрактном уровне. Построенная таким образом математическая теория имела применения, в частности, в небесной механике, которой Га-

гих примеров и находил общие результаты постепенно через частные. Когда он в конце концов публиковал свои результаты, они появлялись в очень компактной и конденсированной форме, что делало его статьи трудными для чтения и давало очень мало указаний на путь, каким он прибыл к концу его. Многие публикуемые рукописи имеют весьма незавершенную форму, но они ясно показывают метод работы Гамильтона. Издатели-редакторы [92] печатают эти рукописи полностью, хотя сам Гамильтон не был, очевидно, полностью удовлетворен ими и поэтому опубликовал только короткие сводки их содержания.

мильтон занимался как раз в то же время, когда он работал над своей динамической теорией.

Впервые Гамильтон упоминает о своей новой теории в письме к Х. Ллойду 9 февраля 1833 г. Он пишет, что нашел форму новой динамической функции для эллиптического движения и что, используя свою новую систему, он работает над уравнениями движения для любого числа взаимно притягивающихся точек [90].

Далее в течение 1833 г. Гамильтон был занят изучением основ алгебры, дискуссией с Поттером, женитьбой, собранием Британской ассоциации в Кембридже, но сохранял намерение вернуться к механике. В сентябре этого же года он опять пишет Ллойду: "Вы, может быть, помните мое письмо в феврале о распространении моего оптического метода и функции на физическую астрономию, о которых я думал тогда. С тех пор я нашел, что почти та же идея приходила мне на ум в 1826 г., в то время, когда я сделал мои главные шаги в оптике. Этот цикл мыслей также заставил меня вернуться к ним после того, как я совершенно забыл некоторые из них среди деталей вычисления. Я даже определил явную форму динамической функции для случая обычных частиц в пустоте" [90, 2.IX. 1833]. Гамильтон нашел свою записную книжку 1826 г., где он развивал принцип постоянного действия для случаев движения частиц и атмосферной рефракции в то время, как готовился к экзаменам в колледже. Впечатляющее открытие старых идей, которые теперь были подготовлены к тому, чтобы предстать в совершенно новом свете!

В этом письме он сообщает Ллойду, что пишет популярную статью для "Proceedings Irish Academy", причем "испытывает некоторые родовые муки". Совет колледжа просил его написать "легкую книгу" об его оптических методах, и он рассматривал эту статью, как некоторое упражнение и подготовку к книге о свете, которая, впрочем, никогда не была им написана. По своему характеру Гамильтон не мог писать о чем-либо, что не было для него в это время на первом месте. Так появилась статья "Об общем методе выражения путей света и планет с помощью коэффициентов характеристической функции" [92, т. 2]. Это была крайне неровная статья. Подробное историческое введение было рассчитано на среднего читателя, изложение вопроса о характеристической функции могло остановить самого выносливого читателя, а приложение к планетным движениям было слишком коротким, чтобы продвинуть читателя в понимании проблемы. В декабре он написал не опубликованную им впоследствии рукопись о задаче трех тел, в которой хотя и не были получены какие-либо новые неизвестные ранее результаты, но в каком-то смысле слова он отточил свою теорию. Затем летом и осенью 1834 г. он написал две указанные выше знаменитые статьи "Об общем методе динамики".

Гамильтон послал эти две статьи в "Philosophical Transactions" с благословения своего дяди Джеймса, так как они оба считали, что в "Proceedings Irish Academy" статьи пролежат месяцы, а может быть, и годы и после опубликования останутся мало известными в Англии и совершенно неизвестными на континенте. Джеймс думал, что, может быть, название статьи "Об общем методе динамики" не вполне точно, так как Гамильтон приложил свой метод только к некоторым задачам небесной механики. Однако Гамильтон ответил ему, что заглавие правильно, так как оно выражает его "надежду и цель вновь вылепить в целом динамику в наиболее широком смысле слова с помощью идеи (его) характеристической функции или центрального закона (связи) отношения (relation)" [90, т. 2, с. 74].

Гамильтон полностью осознавал важность своей новой динамики. Она важна не только в силу того значения, которое может иметь для решения проблем динамики, оптики и астрономии, но она также простирается на "невидимый мир", описанный в его вводной лекции по астрономии (1833 г.), который является "истолкователем" видимого мира. Уэвеллу он просто написал, что "всякий раз как она (новая динамика. – *Л.П.*) будет подхвачена другими, она совершит, может быть, переворот" [Там же, с. 81].

Интересно, что после отсылки первой из своих статей "Об общем методе динамики" Гамильтон на некоторое время погрузился в изучение "Критики чистого разума" Канта. Однако следов влияния философии Канта во второй статье, написанной в течение месяца сразу после эдинбургского собрания Британской ассоциации, не видно.

Гамильтону принадлежит принципиальная идея нахождения фундаментальной функции, из которой дифференцированием и конечными преобразованиями (без какого-либо интегрирования) могут быть получены все решения уравнений движения. Он впервые доказал существование такой функции в геометрической оптике ("характеристическая функция V"), а затем и в динамике ("главная функция"). Так как и геометрическая оптика, и механика имеют, по существу, единую вариационную основу, то открытие Гамильтона можно отнести и к *вариационному исчислению в целом,* а специальная форма интеграла несущественна.

Главная функция S определяет расстояние между двумя точками в соответствующим образом определенном метрическом пространстве, являясь при этом функцией координат этих двух точек. Она является производящей функцией некоторого канонического преобразования, которое полностью ею определяется. Нахождение этой одной функции решает задачу нахождения такого канонического преобразования, которое делает уравнения движения интегрируемыми. Эта функция определяется одним уравнением в частных производных – уравнением Гамильтона–Якоби. Тем самым задача решения системы канонических уравнений Гамильтона заменяется задачей решения уравнения Гамильтона–Якоби.

Введенная во второй работе Гамильтона "Об общем методе в динамике" *главная функция* S, подсказанная методами, примененными им в геометрической оптике, позволяет получить динамически возможные движения системы. Главная функция Гамильтона в явном виде представляет собой интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$, взятый вдоль действительной траектории (т.е. вдоль пути в пространстве конфигураций, удовлетворяющего уравнениям движения) и выраженный через начальные и конечные значения координат, а также начальные и конечные значения времени:

$$S = S\,(q_{0i}, q_{ti}, t_0, t). \tag{3.24}$$

Знание этой функции было бы исключительно полезно для изучения динамической системы, если бы ее можно было каким-либо способом составить, не зная заранее интегралы уравнений движения Лагранжа.

Рассмотрим теперь связь принципа Гамильтона и уравнений Эйлера–Лагранжа, следуя изложению Биркгофа [9, с. 35–36].

Пусть уравнения

$$x_i = x_i\,(t, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.25}$$

определяют систему функций, зависящих от параметра λ, причем при $x = 0$

$$x_i\,(t, 0) = \alpha_i^0\,(t). \tag{3.25a}$$

Допустим, что функции $x_i(t, \lambda)$ непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые производные по t и λ, а также что достаточно близко к концам рассматриваемого интервала $(t_0, \ t_1)$ эти функции обращаются в $x_i^0\ (t)$ тождественно при любом λ:

$$x_i\,(t, \lambda) = x_i^0(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \epsilon, t_1 - \epsilon \leqslant t \leqslant t_1).$$

В этом случае интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)\, dt, \tag{3.26}$$

где F – непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка, называется стационарным[15] при $x_i = x_i^0(t)$, если для всякой системы функций описанного типа имеем

$$\delta I = \left.\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = 0} \delta\lambda = 0. \tag{3.27}$$

Это равносильно уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \lambda} \right) dt = 0$$

при $\lambda = 0$. Интегрируя по частям и заметив, что $\delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \lambda} \delta\lambda_i$ обращается в нуль на концах интервала (t_0, t_1), получаем уравнение, эквивалентное предыдущему:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right) \right] \delta x_j\, dt = 0. \tag{3.28}$$

В частности, можно положить

$$x_i(t, \lambda) = x_i^0(t) + \lambda \delta x_i,$$

---

[15] Необходимо отчетливо различать стационарное значение и экстремум и ближе рассмотреть их взаимоотношение. Стационарное значение требует только равенства нулю первой вариации без какого-либо ограничения в отношении второй вариации. Экстремум требует равенства нулю первой вариации плюс добавочные условия относительно второй вариации. Кроме того, проблему экстремума рассматривают, предполагая, что мы находимся внутри границ пространства конфигураций. Функция, которая не имеет экстремума внутри области, может иметь его на границе этой области. На границе смещения необратимы. Для необратимых смещений функция может иметь экстремум без того, чтобы она имела в этой точке стационарное значение. В этом случае экстремум существует без равенства нулю первой вариации.

Так, например, если шар катится по наклонному желобу, то он будет в равновесии в самой низкой точке желоба, где касательная к траектории горизонтальна. Если же остановить шар раньше с помощью колышка, то шар будет в этом случае в наинизшем доступном для него положении, хотя угловой коэффициент касательной не обращается в нуль и высота не имеет стационарного значения. Это условие больше не требуется, потому что шар достиг границы доступного ему пространства конфигураций и здесь вариация положения необратима.

где функции δx_i – произвольные и непрерывные функции от t с непрерывными производными первого и второго порядка, подчиненные только условию, что они обращаются в нуль достаточно близко от обоих концов интервала (t_0, t_1).

Таким образом, найдем, что требование стационарности интеграла I равносильно системе m дифференциальных уравнений относительно $x_1^0, \ldots, x_m^0$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \tag{3.29}$$

Это уравнение Эйлера–Лагранжа, в котором только $\mathcal{L}$ заменено на F. Отсюда: уравнениям Эйлера–Лагранжа можно придать вариационную форму, известную под названием принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0. \tag{3.30}$$

В соответствии с понятием вариации можно произвести любую замену переменных в уравнениях (3. 15) посредством подстановки этих переменных в функцию $\mathcal{L}$. От этого в значительной мере зависит удобство лагранжевой формы уравнений движения.

Принцип Гамильтона был им записан в двух формах:

$$1.\ \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\,(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0, \tag{3.31}$$

где $\mathcal{L} = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}}$ [16] (необходимые и достаточные условия стационарности (3. 31) уравнения Эйлера–Лагранжа).

$$2.\ \delta \int_{t_0}^{t_1} [\Sigma p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)]\ dt = 0. \tag{3.32}$$

Найдем дифференциальные уравнения для (3. 32). Проварьировав выражение $[\sum\limits_{i=0}^{m} p_i \dot{q}_i - H]$ по p_i, получим

$$\delta \mathcal{L} = \Sigma\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \delta p_i. \tag{3.33}$$

Выражение в скобках перед δp_i равно нулю вследствие преобра-

[16] По аналогии с термодинамикой можно было бы назвать функцию $\mathcal{L} = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}}$ "свободной энергией" в отличие от "полной энергии" $E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$.

зования Лежандра. Следовательно, произвольное варьирование p_i не влияет на вариацию $\mathcal{L}$. Поэтому, если теперь рассматривать p_i не как заданные функции q_i и $\dot{q}_i$, а как вторую систему независимых переменных, то можно обобщить соответственно принцип Гамильтона и на этот случай и определить его стационарное значение.

Тогда второе выражение принципа Гамильтона (3. 32) при независимых произвольных вариациях q_i, p_i для $2n$ переменных сопряжено с $2n$ уравнениями Эйлера–Лагранжа (см. выше):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\equiv\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_i}=0, \tag{3.34}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{p}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_i}\equiv-\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}=0, \tag{3.35}$$

т.е. мы получили канонические уравнения Гамильтона из интеграла (3. 32). Структура получающихся из выражения (3. 32) дифференциальных уравнений проще, чем структура уравнений, получающихся из (3. 31): они не второго, а первого порядка, и все производные выделены, а не скрыты какими-либо алгебраическими операциями.

В общем виде утверждение, что интеграл вариационного принципа в форме (3. 32) принимает стационарное значение при произвольной форме вариации переменных q_i и p_i, было доказано в 1919 г. Ливенсом [119].

С математической точки зрения дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа и вариационное уравнение принципа Гамильтона являются различными способами выражения одного и того же утверждения. Однако первые не могут быть выражены в словах, которые бы яснее осветили суть дела, чем голые формулы, а принцип Гамильтона, напротив того, может быть выражен так: лагранжево действие имеет стационарное значение для действительной траектории. Это выражение легче связать с физическими понятиями.

Необходимо также иметь в виду следующее принципиально важное обстоятельство.

Во времена Эйлера, Лагранжа и Гамильтона, Якоби еще не было известно фундаментальное требование формулировки законов природы – инвариантность и ковариантность, – открытое лишь в XX в., но оказалось, что в развитой ими вариационной концепции механики инвариантность выполняется автоматически. В этой концепции расчеты и их результаты остаются справедливыми в любой системе координат. Никто из создателей вариационного подхода в механике, разумеется, не предвидел, да и не мог предвидеть всей важности этого не только для вычислительной схемы решения дифференциальных уравнений движения для сложных задач, но и для единственности и истинности описания процессов, происходящих в макро- и микрокосмосе.

Укажем еще на некоторое предвосхищение в гамильтоновой механике замечательной теоремы Нетер.

Применение циклических переменных позволяет указать на связь закона сохранения энергии со временем в классической механике; в теории относительности энергия также соответствует четвертой (временной) компоненте четырехмерного тензора энергии-импульса. Рассмотрим склерономную систему, для которой $\mathcal{L}$ не содержит явно времени. Будем рассматривать t не как независимую переменную, а примем, что $n+1$ переменных q_i и t являются функциями некоторого параметра τ. Обозначим производную по τ штрихом. Тогда

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \frac{\dot{q}_i}{t'}\right) t'\, d\tau; \tag{3.36}$$

так как только t' входит в подынтегральное выражение, а t не входит, то t является циклической координатой. Найдем импульс, связанный с циклической координатой t:

$$p_t = \frac{\partial(\mathcal{L}t')}{\partial t'} = \mathcal{L} - \left(\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\dot{q}_i}{t'^2}\right) t' = \mathcal{L} - \Sigma p_i q_i =$$
$$= -(\Sigma p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}). \tag{3.37}$$

Согласно известной теореме импульс, соответствующий циклической координате, остается постоянным в процессе движения. В (3. 37) выражение в скобках есть полная энергия E, равная для обычной механической системы $T + U$. Следовательно, для консервативной и неконсервативной систем обобщенный импульс, связанный со временем t, есть отрицательная величина полной энергии. Если система консервативна, то $p_i = -E = \text{const}$, и мы получим закон сохранения энергии.

Можно показать, что задача решения уравнений динамики и задача нахождения геодезической линии на определенном — вообще говоря, неримановом — многообразии эквивалентны. В этой геометрической интерпретации основную роль играет главная функция Гамильтона: действие геометрически представляет длину дуги, а наименьшее действие — наименьшую дугу, поэтому S — функция Гамильтона — определяет расстояние между двумя точками $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{n+1}$ и $q_1, \ldots, q_{n+1}$ этого многообразия. Геодезические линии могут быть получены как ортогональные траектории волновых поверхностей, а механическая задача соответствует задаче распространения света в оптически однородной среде.

И наконец, одно замечание о прикладном значении вариационных методов.

Огромное число простых (и совсем непростых) задач механики, физики и техники решаются векторными методами и не требуют использования аналитических методов. Однако в более сложных задачах приходится переходить к вариационным методам. Дело в том, что для последних методов характерна полная свобода в выборе системы координат решаемой задачи, в то время как векторные методы решения удобны только для тех задач, которые могут быть рассмотрены в ортогональных прямолинейных системах координат[17].

Посмотрим теперь, как же сам Гамильтон определяет место своего принципа и связанного с ним метода в системе физических наук? Ведь он недвусмысленно отказался признать космологическое значение принципа наименьшего действия. В самом деле, Гамильтон пишет: "Хотя закон наименьшего действия стал, таким образом, в ряд высочайших теорем физики, все же его притязания на космологическую необходимость на основе экономии во Вселенной в настоящее время обычно отвергаются. И это представляется справедливым. Среди других причин это вытекает и из того, что величина, которая претендует на то, чтобы быть сэкономленной, в действительности часто расточительно расходуется" [92, т. 1, с. 317].

Гамильтон видит в принципе средство "преобразовать в широком смысле слова всю динамику" и считает, что сфера его применения значительно шире, чем только оптика и динамика. Эта широкая программа им самим осуществляется только частично, его задача – набросать основной план, развитие которого – дело будущего. Речь идет о новом простроении физики, как он сам говорит в одном письме:

«Что касается заглавия – "О новом методе в динамике" – признаюсь, что при точном истолковании оно означает исключение оптики. . . и включение гидростатики со многими другими отделами физической науки, лишь отдаленно связанными с астрономией. . . я надеюсь и стремлюсь преобразовать в широком смысле слова всю динамику при помощи теории характеристической функции или закона центрального отношения; однако в настоящее время я, конечно, не претендую на большее, как только набросать точный план, по которому можно было бы выполнить эту великую задачу. . . В настоящее время было бы безрассудно пытаться приступить к такой обширной

---

[17] Представление векторов в криволинейных координатах – задача далеко не простая, а методы тензорного анализа очень сложны.

теме, обнимающей в действительности наиболее важные физические явления. . . Уместно отметить, что этот динамический принцип является только другой формой идеи, примененной мной уже к оптике в "Теории систем лучей", и что намерение применить ее к движениям систем тел было объявлено при публикации этой теории. . . метод, который таким образом служил примером в "Оптике" и "Динамике", кажется, не ограничивается двумя этими дисциплинами и допускает более широкую сферу применения» [90, т. 2, 12.III.1834].

Так были заложены основы аналитической механики Гамильтона, ставшие в дальнейшем основой динамики в смысле Гамильтона–Якоби, так как замечательный немецкий математик Якоби (1804–1851) [14, с. 287 и сл.] блестяще развил и значительно обогатил идеи Гамильтона в области интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Карл Густав Якоб Якоби родился в 1804 г. в семье потсдамского банкира. Он окончил Берлинский университет и в 1825 г. защитил диссертацию. С 1826 г. он в течение 17 лет работает в Кенигсберге. Поступление его на работу в Кенигсбергский университет натолкнулось на затруднения, так как каждому он успел сказать что-нибудь неприятное. Однако все же победило очевидное значение его научных трудов. Он целиком отдался кипучей и разносторонней деятельности, которая подорвала его силы. В 1843 г. он был вынужден в течение полутора лет отдыхать в Италии, а затем принять предложение в Берлине, где ему была предоставлена чисто академическая должность без твердых преподавательских обязанностей. Несмотря на спокойную жизнь, нарушаемую лишь внешними событиями, он уже никогда не достигал прежнего творческого напряжения. Сначала он пользовался хорошим отношением прусского короля, но в 1848 г. явно склонился на сторону революции. После поражения революции 1848 г. он оставался для прусской монархии подозрительным человеком. Умер Якоби 18 февраля 1851 г. в Блаттерне.

Разностороннее математическое творчество Якоби, его блестящий педагогический талант, знаменитый и внушавший противникам страх его сарказм позволили ему не только широко воздействовать на современников, но и создать научную школу.

Для Якоби характерно постоянное стремление к новому, к переменам, ему не хватает спокойствия, необходимого для завершения научных исследований.

Якоби интересовался именно важнейшим для механики вопросом об интегрировании уравнений движения и не связывал с вариационными принципами каких-либо далеко идущих, зачастую спекулятивных обобщений [14, с. 289].

Только после работ Римана в исследованиях ряда математиков и механиков было выяснено, что принцип наименьшего действия в форме Якоби связывает движение голономных, консервативных систем и риманову геометрию. Так, при движении системы по инерции (в отсутствие приложенных сил) изображающая ее точка описывает геодезическую линию в пространстве конфигураций, которое является n-мерным римановым пространством. Из закона сохранения энергии следует также, что движение происходит с постоянной скоростью.

Дальнейшее развитие собственно математической стороны *вариационного принципа* Гамильтона (и принципа наименьшего действия), естественно, пошло по пути, подсказанному проблематикой и подходами вариационного исчисления (в ней, кстати сказать, есть и "поля Гамильтона"). Из этих работ наиболее важной является большая статья [14], опубликованная в 1848 г. выдающимся русским математиком М.В. Остроградским (1801–1862)[18]. В этой статье принцип Гамильтона, сформулированный им в 1833–1834 гг. (как мы отмечали выше) для склерономной системы (кинетическая энергия представлялась в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей), был обобщен Остроградским на общий случай системы с нестационарными связями. В этой же работе Остроградский обратил внимание на то, что в общем случае для приведения уравнений движения к каноническому виду требуются только дифференцирования и исключения переменных. В связи с этим принцип Гамильтона иногда называют принципом Гамильтона–Остроградского.

Мы лишь кратко перечислим рассмотренные в этом аспекте проблемы (подробное их изложение и основные работы, посвященные им, см. в [14, 46]): 1) вторая вариация интеграла действия; 2) изохронная и изоэнергетическая вариация; 3) асинхронное варьирование; 4) обобщение вариационных принципов механики на неголономные системы; 5) геометризация проблем динамики; 6) интегрирование уравнения Гамильтона–Якоби; 7) интегральные инварианты Пуанкаре–Картана; 8) вариационный принцип Гельдера; 9) вариационный принцип Фосса.

Объем книги не позволяет нам также рассмотреть с необходимой подробностью значение вариационных принципов в решении вопросов, связанных с формальной устойчивостью динамических систем вблизи точки равновесия, или периодического движения, хотя Биркгоф замечает, что можно даже сказать, "что в этом состоит их (вариационных принципов. – *Л.П.*) главное значение для динамики" [9, с. 53]. Заключающееся в методе "особое соединение законов вариаций с законами частных дифференциалов может образовать в будущем, когда он разовьется трудами математиков, отдельную ветвь анализа".

---

[18] Мы не приводим биографических данных о М.В. Остроградском, так как на русском языке имеется доступная широкому кругу читателей биография [20].

Оценивая значение своей работы об общем методе динамики, Гамильтон прежде всего подчеркивает, что, благодаря найденной им новой математической форме, ”динамика и оптика будут точно рассмотрены, как следствия общего принципа” [90, т. 2, 12.III.1834]. Для него основой является установление единой схемы, в которой бы из некоторого основного принципа выводились все законы механики и оптики.

Итак, Гамильтон придает своему методу основное значение: этот метод должен охватить всю физику. Но это универсальное значение разработанного им метода основывается на его математической форме. Единство и простота, симметрия, достигаемая таким путем, – вот главнейшие и определяющие преимущества нового метода, по мнению Гамильтона[19].

Не только в самих статьях, опубликованных в ”Philosophical Transactions”, он избегает каких-либо ”философских” вопросов, но и в письме к де Моргану оценивает свою работу как лежащую в области математической разработки задач динамики. Несмотря на резко выраженный интерес к общим вопросам теории познания, Гамильтон пишет свои статьи максимально формально[20].

Он сам в письме к де Моргану характеризует свои исследования так: ”Мои собственные исследования по динамике лежат в совершенно ином направлении, они приводят меня к системе строгих и общих выражений для интегралов дифференциальных уравнений движения системы материальных точек”[21] [90, т. 2, 18.II.1842].

---

[19] ”Мне хотелось бы, чтобы интеллектуальную красоту науки. . . по крайней мере края ее величия, увидели все, так как все созданы для того, чтобы черпать наслаждение в этом возвышающем зрелище”.

[20] ”Unmetaphysisch”, как он выражается в одном письме к Уэвеллу.

[21] Краткая, но очень отчетливая характеристика динамики Гамильтона–Якоби дана в книге: *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. С. 136. Приводим ее: ”Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием (фазовым пространством), симплектической структурой на нем (интегральным инвариантом Пуанкаре) и функцией на нем (функцией Гамильтона).

Лагранжева механика включается в гамильтонову как частный случай.

Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)”.

Мы имеем здесь довольно распространенный в истории науки случай . Какая-либо общая проблема постепенно освобождается от полуфилософских пут и, теряя в очаровании (псевдо)всеобщности, столь любимой "популяризаторами", делается по-иному общей, более глубокой и эвристически ценной.

4. Канонические уравнения Гамильтона и уравнение Гамильтона–Якоби

Уравнения Эйлера–Лагранжа выражают необходимые условия стационарности некоторого интеграла относительно вариации переменных, входящих в его подынтегральную функцию. Если интеграл является инвариантом относительно преобразования координат, то соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа выражают условия, которые не могут зависеть от выбора координат, иначе говоря, уравнения Эйлера–Лагранжа являются ковариантными дифференциальными уравнениями.

Развивая свой "оптический" метод, Гамильтон в 1835 г. выводит уравнения, получившие название "канонических уравнений Гамильтона". Они появлялись в механике и раньше.

Еще в 1809 г. Пуассон ввел функцию $\sum_i \dot{q}_i p_i - T$, рассматриваемую как функция от $\dot{q}_i$ и p_i, и вывел половину гамильтоновных уравнений [138, с. 266].

Лагранж в 1809 г., рассматривая варьирование элементов орбит, установил систему уравнений в гамильтоновской форме, в которые вместо функции H входила пертурбационная функция R [109, с. 341].

Лагранж применил эти дифференциальные уравнения в каноническом виде в своей теории возмущений и отметил, что, несмотря на то, что число их в 2 раза больше, чем число обычных уравнений динамики, они обладают некоторыми преимуществами.

Во втором издании "Аналитической механики" [33, с. 420–426] Лагранж приводит следующие уравнения:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial R_i}{\partial s_i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_i},$$

где α_i – начальные значения координат, s_i – начальные значения $\partial T/\partial \dot{q}_i = p_i$. Это простейший пример системы канонических элементов. Однако Лагранж не заметил глубокой связи между этими уравнениями и уравнениями движения.

В 1834–1835 гг. Гамильтон не только написал канонические уравнения, но и положил их в основу своих замечательных работ по динамике[22]. Поэтому принятое в механике наименование "канонические уравнения Гамильтона" безусловно правильно.

Для перехода от лагранжевой к гамильтоновой форме динамики можно воспользоваться преобразованием Лежандра (1752–1833)[23] или методом неопределенных множителей Лагранжа.

Использовав преобразование Лежандра, мы заменим уравнения Лагранжа каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{3.38}$$

Как мы уже отметили выше, они обладают большим преимуществом по сравнению с уравнением Лагранжа: производные по времени в них имеются только в левых частях уравнений, так как H не содержит производных q_i или p_i по t. Для любой системы, описываемой уравнениями Лагранжа, будут иметь место и уравнения Гамильтона.

Если функция H зависит явно от t, скорость ее изменения

$$\dot{H} = \partial H/\partial t,$$

а если не зависит явно от t,

$$H = \text{const}$$

(это равенство называют интегралом энергии).

Надо отметить, что две группы уравнений (3.38) неодинаковы по содержанию. Первые n уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

получены исключительно на основе определения функции H и совершенно не связаны с законами динамики; они эквивалентны n уравнениям, определяющим переменные

---

[22] С математической точки зрения теория Гамильтона–Якоби является лишь частным случаем теории характеристик Коши.

[23] "Преобразование Лежандра – вспомогательный математический прием, состоящий в переходе от функций на линейном пространстве к функциям на сопряженном пространстве. Преобразование Лежандра сродни проективной двойственности и тангенциальным координатам в алгебраической геометрии или сопряженному банахову пространству в анализе. Оно часто встречается в физике (например, при определении термодинамических величин)" (*Арнольд В.И.* Указ. соч. С. 54). Надо заметить, что так называемое преобразование Лежандра встречается впервые не у Лежандра, а у Эйлера, если не у Лейбница.

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

На связь уравнений в частных производных первого порядка и систем обыкновенных дифференциальных уравнений указал еще в 1819 г. Коши в заметке, воспроизведенной вновь в 1841 г. [66]. Он показал, что интегрирование уравнений в частных производных первого порядка может быть сведено к интегрированию единственной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Якоби позже нашел частный случай этой теоремы для уравнений динамики.

Кэли в 1858 г. [68, § 1; 67] отметил, что изложение содержания считавшегося не опубликованным мемуара Коши 1831 г. дано в работе [66], опубликованной литографически с датой "1832 г. Турин", с дополнением, датированным 6 марта 1833 г. Это краткое изложение начинается так: "§ 1. Вариация произвольных постоянных. Пусть даны $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, связывающие переменные t, . . . с n функциями t, обозначенными $x, y, z, \ldots$, и n другими функциями t, обозначенными $u, v, w, \ldots$, имеющие вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{du}, \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dv}, \frac{dz}{dt} = \frac{dQ}{dw}, \ldots \tag{3.39}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{dQ}{dx}, \frac{dv}{dt} = -\frac{dQ}{dy}, \frac{dw}{dt} = -\frac{dQ}{dz}, \ldots$$

Причем происхождение этих уравнений безразлично, и пусть даны выражения для вариаций постоянных в интегралах написанной выше системы" Это кажется достаточным для того, чтобы считать, что в 1831 г. Коши был уже знаком с той формой уравнений, которую Гамильтон придал уравнениям движения.

Таким образом, до работ Гамильтона были уже известны в математике (в той ее области, которую мы теперь называем теорией дифференциальных уравнений) уравнения, имеющие форму канонических уравнений механики. Однако основной шаг, необходимый для того, чтобы сделать уравнения такого вида фундаментальными уравнениями механики и показать их связь с другими уравнениями, был сделан Гамильтоном, который, насколько можно судить по имеющимся опубликованным материалам, не знал этой работы Коши. Впрочем, если бы и знал, то от чисто математической работы Коши еще очень длинный путь до *основных уравнений* механики; Гамильтону потребовалось для этого прежде всего ввести вместо независимых переменных, принятых ранее в механике, q_i, $\dot{q}_i$, переменные q_i, p_i, что имело принципиальное значение не только для механики, где p_i – обобщенные импульсы, определяемые равенствами $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$. (Заметим, что отсюда возникло понятие о фазовом пространстве, и отметим важнейшую роль этих переменных в квантовой и статистической механике.) Он ввел функцию $H(q_i, p_i, t)$ – гамильтониан – и положил эти уравнения в *основу* механики, а также указал на их связь с теорией преобразований и так называемым уравнением Гамильтона–Якоби. Особенно важно то, что он показал взаимозаменяемость уравнений Лагранжа и канонических уравнений и глубокую связь последних с вариационным принципом механики в форме Гамильтона.

Динамические закономерности находят отражение лишь во второй группе уравнений (3.38):

$$\dot{p}_i = - \partial H/\partial q_i.$$

Это различие, однако, не существенно для приложений, и в них эти уравнения можно считать совершенно равноправными.

Уравнения Гамильтона (3.38), полученные им для голономных систем, могут быть без большого труда выведены и для механических систем других типов (неголономные, системы голономные с непотенциальными силами, системы голономые с силами трения типа сил Рэлея; последние два типа легко обобщаются на случай неголономной системы).

Наконец, заметим, что можно получить как функцию Гамильтона H из функции Лагранжа $\mathcal{L}$, так и наоборот – функцию $\mathcal{L}$ из H.

Исторически исследования в динамике концентрировались вокруг задач с функциями Лагранжа $\mathcal{L}$ и Гамильтона H в виде квадратичных форм.

Это имело место как в силу физических соображений, так и благодаря возможности использования римановой n-мерной дифференциальной геометрии. Вначале рассматривали, как правило, лишь обратимые системы. Однако, как было замечено Леви-Чивита, если $\mathcal{L}$ имеет вид $T + U$, но содержит явно время t, то $\mathcal{L}$ можно заменить консервативной функцией необратимого типа при условии, что t вводится как $(n + 1)$-я координата (соответствующий импульс оказывается циклической координатой). Гамильтон нашел исключительно важное и красивое преобразование, делающее квадратичную по скоростям функцию Лагранжа линейной по скоростям при одновременном удвоении числа механических переменных. Преобразование Гамильтона, применимое не только к специально механическому виду функции Лагранжа, сводит все лагранжевы задачи к особенно простой и симметричной изящной форме, которую Якоби назвал "канонической", исходные n дифференциальных уравнений Лагранжа второго порядка заменяются $2n$ дифференциальными уравнениями первого порядка. Открытие этих уравнений означало не только новую эру в развитии механики, но и новый подход к проблеме построения единой и единственной физической картины мира.

Это прекрасно видно в частной и общей теории относительности. Что же касается квантовой механики, то Гейзенберг указывает, что в ней "...математическая схема в конце концов внешне похожа на классическую теорию и отличается от последней только наличием перестановочных соотношений, при помощи которых уравнения движения могут быть выведены из функции Гамильтона" [19, с. 21].

Уравнения Гамильтона можно записать и в ряде важных случаев найти хотя бы некоторые их интегралы с помощью так называемых скобок Пуассона (за подробным ознакомлением с ними и со скобками Лагранжа, которые менее удобны в приложениях, отсылаем к любому курсу аналитической механики).

Фундаментальным свойством скобок Пуассона, определяющим их использование в механике, является то, что скобки Пуассона двух функций при каноническом преобразовании остаются инвариантными.

После того как уравнения движения записаны в каноническом виде, возникает задача их решения. Прямой метод нам неизвестен, поэтому нужен какой-либо косвенный метод. Из последних особенный интерес представляет метод преобразования координат. Для решения канонических уравнений естественно рассматривать всю группу связанных с ними преобразований координат.

Теория канонических преобразований была разработана в основном Якоби [14, с. 289] и Софусом Ли [Там же, с. 404]. Хотя работы Якоби имели своей целью решение задачи интегрирования уравнений, они в той теоретико-групповой форме, которую придал касательным (или, что почти то же самое в механике, – каноническим) преобразованиям Софус Ли, приобрели принципиальный характер и сыграли фундаментальную роль в развитии двойственной концепции движения, столь важной для микро- и макрофизики XX в.

Итак, пусть дифференциальные уравнения движения записаны на основании вариационного принципа Гамильтона. Возникает вопрос об их фактической интеграции. Для этой цели Гамильтоном и Якоби была развита специальная теория, которая заключает в себе три последовательных этапа. Прежде всего необходимо найти возможно более простую форму дифференциальных уравнений. Эта форма была найдена в канонических уравнениях Гамильтона. Затем надо установить общие законы таких преобразований этих дифференциальных уравнений, при которых они сохраняли бы свою форму. Такими законами оказались канонические преобразования и теория их инвариантов. Наконец, надо развить собственно теорию интегрирования систем канонических уравнений. Решение этой задачи привело к установлению и интегрированию уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби.

Именно тут Гамильтон не то чтобы совершил ошибку, а скорее не заметил важного и принципиального упрощения, которое спустя четыре года заметил Якоби и (после справедливой критики теории Гамильтона) дал необходимое обобщение.

Гамильтон привел задачу интегрирования уравнения для функции $S = S(\eta_1, \dots, \eta_{3n}, t)$ к решению двух уравнений в частных производных, одно из которых имеет место для конечных, а другое – для начальных координат:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \eta_{3n}}, \eta_1, \dots, \eta_{3n}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{3.40}$$

$$H\left(-\frac{\partial S}{\partial l_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial l_{3n}}, l_1, \dots, l_{3n}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.41}$$

Решение этих двух уравнений в частных производных первого порядка, если мы его найдем, даст нам главную функцию S. Задача эта практически крайне трудная. Однако в 1837 г. Якоби открыл достаточно легкий путь нахождения S, используя только первое уравнение (3.40) [99], и в силу этого уравнение (3.40) получило наименование уравнения Гамильтона–Якоби. Интегрирование двух уравнений Гамильтона приводит к $6n$ произвольным постоянным, которые по его теории представляют собой $3n$ начальных импульсов и $3n$ начальных координат. Якоби же открыл, что на основе "теории контактных преобразований" возможно показать, что достаточно любого интеграла уравнения (3.40), содержащего столько произвольных постоянных, сколько здесь имеется независимых переменных. Нет необходимости интегрировать два уравнения в частных производных – достаточно одного.

Дав высокую оценку результатам Гамильтона, Якоби отметил сразу и недостатки его теории: "Мне кажется, что Гамильтон представил свое *прекрасное открытие* (курсив мой. – *Л.П.*) в неправильном освещении, благодаря чему оно оказалось одновременно ненужно сложным и ограниченным. . ." [56, с. 6] .

Критика Якоби исследования Гамильтона содержала два основных замечания. На первом месте стояло замечание о том, что не доказано, что решение двух одновременно имеющих место уравнений существует. Гамильтон такое доказательство не опубликовал, однако он обладал им для специального случая (орбита под действием центральной силы), поскольку в записной книжке о проблеме трех тел, где содержатся записи начала 1833 г., это доказательство изложено (см. [92, т. 2]). На вторoе замечание труднее ответить. Оно состоит в том, что использование Гамильтоном *двух* дифференциальных уравнений в частных производных препятствует приложению метода Лагранжа для решения таких уравнений. В самом деле, в немногих местах, в которых он образует характеристическую функцию для специальной динамической задачи (как, например, функцию первого очерка по динамике), мы не можем уточнить, каким методом он пользовался, так как он не дает прямых указаний об этом. Кажется вероятным, что он сначала интегрирует дифференциальные уравнения движения, а затем исключает прямым интегрированием правую сторону уравнения

$$V = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt. \tag{3.42}$$

Выразив это в терминах начальной и конечной конфигурации, Гамильтон получает соответствующую форму характеристической функции.

Гамильтон впервые узнал о статье Якоби от Ф.К. Логана (F.C. Logan), который написал ему, что, по его мнению, ни Пуассон, ни Якоби не дали теории Гамильтона той справедливой оценки, которую она заслуживает [92, т. 2, с. 85]. В более позднем письме Логан несколько изменил свою точку зрения и просил Гамильтона ускорить публикацию его исследований в этой области. Интересно отметить, что Гамильтон в письме Лаббоку в Лондон горько жалуется на трудности с получением иностранных журналов и просит его прислать ему статью Якоби [Там же, с. 283].

Гамильтон не видел статьи Якоби до получения письма Логана и увидел ее только шесть месяцев спустя, когда он ответил Логану, что прочел перевод некоторых замечаний Якоби в [99]. Он был польщен похвалой Якоби, но огорчен тем, что Якоби нашел его метод без нужды ограниченным. Он писал Логану: "Если бы я имел досуг приняться за этот вопрос снова, я не сомневаюсь в том, что показал бы, что в области обобщения мы могли бы поменяться местами". Гамильтон думал, конечно, о своем "Исчислении основных соотношений", о котором он сообщил во введении ко второму очерку и которое Логан побуждал его опубликовать возможно быстрее [92, т. 2, с. 163].

Покажем связь уравнений Ньютона, Лагранжа–Эйлера и Гамильтона методом, близким к изложению Гамильтона.

При изучении задач динамики мы исходим из уравнений

$$m_i\ddot{x}_{ik} = \frac{\partial U}{\partial x_{ik}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, 3).$$

Для решения поставленной задачи полезно выразить $3n$ декартовых координат как функции $3n$ других обобщенных координат η (Гамильтон называет их marks of position). Тогда дифференциальные уравнения движения примут замечательно общую форму, открытую Эйлером и Лагранжем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \tag{3.43}$$

где $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3} m\dot{x}_k^2$. Это уравнение (3.43) легко доказывается, если принять во внимание, что

$$\delta U = \sum_{k=1}^{3} m\ddot{x}_k \delta x_k.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} m\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{n}\left(m\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} - \right.$$

$$\left. - m\dot{x}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i}\right),$$

так как $\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \eta_i}$ и т.д.

Преобразуем наши выражения:

$$m\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} = m\dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i},$$

$$m\dot{x}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} = m\dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \eta_i} = \frac{\partial T}{\partial \eta_i}$$

(опускаем знаки двойного суммирования);

причем T здесь будет функцией $6n$ величин вида η_i, $\dot{\eta}_i$, получаемой, если их ввести в выражение для T, ибо

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{3n} \dot{\eta}_i \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \quad \text{и т.д.}$$

Функция T, являющаяся однородной функцией второй степени[24] от $\dot{\eta}_i$, должна удовлетворять соотношению

$$2T = \sum_i \dot{\eta}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i}, \tag{3.44}$$

а так как $T = T(\dot{\eta}_i, \eta_i)$, то вариация функции T будет

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i \right).$$

Взяв вариацию выражения (3.44), получим

$$2\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i + \dot{\eta}_i \delta \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \right),$$

а так как $\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i = \delta T - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i$, то окончательно

$$\delta T = \sum_i \left(\dot{\eta}_i \delta \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i \right).$$

Положим для сокращения $\partial T / \partial \dot{\eta}_i = \bar{\omega}_i$ и представим T как функцию следующих переменных[25]:

$$T = F(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{3n}, \eta_1, \dots, \eta_{3n}).$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} = \dot{\eta}_i, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_i} = -\frac{\partial T}{\partial \eta_i}.$$

Подставив полученные значения в уравнение Лагранжа (3.43), найдем

---

[24] В исследовании Гамильтона переход от лагранжевых уравнений к новым уравнениям существенно зависит от того, что T есть однородная функция второй степени от производных координат по времени.

Вообще же можно показать, что это ограничение не является необходимым и аналогичные рассуждения могут быть проведены в случае, когда T есть любая функция координат и их первых производных по времени.

[25] Величина $\bar{\omega}$ вводится потому, что она остается неизменной при отсутствии силы, в то время как обобщенная скорость может и не быть постоянной.

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial(U-F)}{\partial \eta_i}. \qquad (3.45)$$

Введя функцию H следующего вида:

$$H = F - U = F(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_{3n}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}) - U(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}),$$

мы получаем новые дифференциальные уравнения движения системы n точек[26]:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\omega}}, \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}. \qquad (3.46)$$

"С этой точки зрения задача математической динамики системы n точек состоит в интегрировании системы $6n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих $6n$ переменных $\eta_i, \bar{\omega}_i$ и время t; решение задачи должно состоять в определении этих $6n$ переменных как функций времени и их собственных начальных значений..." [92, т. 2].

Уравнения Гамильтона (3. 46) пишутся в такой форме только для консервативных систем, и в таком виде они неприменимы для случая полей, не имеющих потенциала, и для неголономных связей.

К форме уравнений типа уравнений Гамильтона привела и теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Как показали Пфафф (1814–1815) и Коши (1819), дифференциальные уравнения характеристик уравнения в частных производных

$$f(x_i, p_i) = 0,$$

где

$$p_i = \partial f / \partial x_i,$$

имеют вид

$$\frac{dx_1}{\partial f/\partial p_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\partial f/\partial p_n} = \frac{dp_1}{-\partial f/\partial x_1} = \ldots = \frac{dp_n}{-\partial f/\partial x_n}.$$

Интересно отметить, что Гамильтон не дал каноническим уравнениям какого-либо применения и был более заинтересован в рассмотрении одной характеристической функции и в нахождении последовательных приближений с ее помощью. Он, одна-

[26] Уравнения (3. 46) являются исторически первой записью канонических уравнений механики (1835 г.).

ко, сразу заметил, что общий метод, развитый им в динамике, может быть значительно расширен.

В физике уравнения Гамильтона в форме (3. 46) играют первостепенную роль, в частности, в статистической и квантовой механике.

Значение гамильтоновой функции H как для классической, так и для квантовой механики прекрасно выразил Дирак.

Он пишет: "Известно, что в некоторых предельных случаях, например, когда массы очень велики, классическая механика удачно описывает поведение механических систем. Если же мы не имеем дела с этими предельными случаями, то можно надеяться построить теорию таких же механических систем, сделав в классических уравнениях некоторые естественные обобщения и выбрав квантовые условия таким образом, чтобы они были естественным обобщением классического закона, по которому все переменные коммутируют друг с другом. Мы увидим, что таким путем возможно построить квантовую теорию отдельных механических систем, аналогичную классической механике" [46, с. 168]. Как же построить уравнения движения для квантовой системы по аналогии с классической механикой? По мысли Дирака, для этого надо воспользоваться скобками Пуассона, которым соответствуют некоторые аналоги и в квантовой теории.

Рассмотрев вид функции H и ту форму, которую она принимает для квантово-механических задач, Дирак пишет: "Мы теперь в состоянии получить все, что требуется для любой механической системы, для которой известна гамильтонова функция H, выраженная через q и p и, быть может, зависящая также явно и от времени t".

Таким образом, задание H полностью определяет, и притом однозначно, поведение классической системы. Что же касается соотношения функций H для классической системы и для системы квантово-механической, то тут имеется следующее важное обстоятельство. "Одной и той же классической функции Гамильтона может соответствовать, вообще говоря, несколько функций Гамильтона в квантовой механике; поэтому, если дается определенная механическая система в классической механике, то, вообще говоря, нет никакого смысла говорить о такой же самой системе в квантовой теории. Однако существуют и исключения из этого общего правила; и на практике во многих случаях в квантовой механике оказывается возможным однозначно описывать механические системы языком классической теории" [Там же, с. 169].

Надо заметить, что в математике уравнения того же вида, что (3. 46), определяют касательное преобразование.

Применяя метод преобразования координат, мы уже не рассматриваем q_i и p_i как функции времени t, как это делается при непосредственном интегрировании. Эти величины q_i и p_i при таком преобразовании рассматриваются просто как некоторые переменные. Они являются координатами фазового пространства, и этим исчерпывается их содержание. Другими словами, специфика проблемы механического движения, заключенная в дифференциальных уравнениях механики, полностью исключена. Существенным является лишь сохранение формы канонических уравнений при рассматриваемых преобразованиях. Так как канонические уравнения сохраняют свою форму, если сохраняется дифференциальная форма подынтегрального выражения интеграла $\int (p_i \dot{q}_i - \mathcal{L})\, dt$, то рассматриваемые преобразования характеризуются инвариантностью некоторой дифференциальной формы. Эти преобразования, сохраняющие форму канонических уравнений, называются каноническими.

Этот результат представляет собой обобщение того положения, что путь светового луча определяется постепенным продвижением волнового фронта. Так как касательные преобразования образуют группу, то это предложение является основанием теории преобразований механики системы.

Разработанный Гамильтоном метод был применен им к различным задачам астрономии (небесной механики). Он подробно рассматривает движение различных систем материальных точек под влиянием сил, действующих между ними и изменяющихся в зависимости от расстояния. Наибольшее внимание он уделяет задаче исследования движения при действии возмущающих сил. Эта проблема возмущенного движения есть основная проблема движения планет, и решение ее есть центральная задача небесной механики. Непосредственная цель, которую ставил перед собой Гамильтон, состояла в интегрировании уравнений движения и нахождении удобного метода решения астрономической задачи возмущенного движения.

Первый мемуар Гамильтона содержит приложения его метода к задаче двух тел и к задаче трех или большего числа тел.

Во втором мемуаре Гамильтон приложил свои новые функции S и H к проблеме трех и большего числа тел, причем движение всех тел зависело лишь от одной возмущающей функции H_1 [14, с. 246].

Гамильтон получает для $(a, b) = f(t, \eta, \omega)$ такое же выражение, какое было получено Пуассоном:

$$\frac{da}{dt} = (a,b)\,\frac{dH_1}{db}, \tag{3.47}$$

где

$$(a, b) = \frac{\partial (a, b)}{\partial (\eta, \bar{\omega})} + \ldots, \quad \frac{\partial (a, b)}{\partial (\eta, \bar{\omega})} = \frac{\partial a}{\partial \eta}\frac{\partial b}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\partial b}{\partial \eta}\frac{\partial a}{\partial \bar{\omega}}. \qquad (3.48)$$

Наоборот, $\partial H_1 / \partial a$ в функции da/dt может быть выражено в форме, аналогичной форме Лагранжа.

Символ (a, b) имеет тот же смысл, что и в теории Пуассона и Лагранжа. Это видно из того, что как в теориях Пуассона и Лагранжа, так и в этом методе Гамильтона производная от (a, b) по времени исчезает, что означает, что (a, b) есть функция только η и ω, являясь инвариантом относительно времени.

Методы Гамильтона сыграли свою исторически важную роль в небесной механике. Они имеют большое значение также и в настоящее время. Задачей истории небесной механики является исследование и анализ их развития.

Таково богатое математическое содержание развитого Гамильтоном общего метода рассмотрения проблем механики, который получил впоследствии многочисленные применения.

Начиная с января 1836 г. Гамильтон заполнял большую записную книжку вычислениями и начал трактат о своем исчислении, который он предполагал опубликовать в "Proceedings of Irish Academy". Эти рукописи впервые опубликованы в 1940 г. Решение Гамильтона опубликовать эту работу в Ирландии имело и некоторый патриотический оттенок. Послав свои работы по динамике в лондонский журнал "Philosophical Transactions", он упустил шанс принести славу Дублину и Королевской академии. Однако Гамильтон не закончил предполагавшуюся книгу. Краткий отчет о своем методе Гамильтон представил в Британскую ассоциацию содействия прогрессу науки в 1836 г. на заседании в Бристоле, но кроме этого отчета в печати ничего не появилось. Исчисление основных соотношений представляло собой метод решения дифференциальных уравнений, который вырос из его динамики. Кроме чисто теоретического исследования, он рассматривал также теорию движения Луны. Начав эту работу в 1836 г., частично побуждаемый Британской ассоциацией, он развил ее в нескольких длинных письмах Дж. В. Лаббоку, написанных между июлем и ноябрем 1837 г. [92, т. 2, с. 297–407].

Гамильтон встретился с Якоби в 1842 г. в Манчестере на очередном собрании Британской ассоциации. Описывая собрание, он пишет, что видел "много Бесселя и некоторое количество Якоби" [90, т. 2, с. 390]. Из этих двух замечательных немецких ученых Бессель, по-видимому, произвел большее впечатление на Гамильтона, чем Якоби. Оба ученых наверняка слушали работы Гамильтона о теории света, которые были представлены в математической и физической секциях. Якоби в своей работе "О новых общих принципах аналитической механики" отозвался о

Гамильтоне как о "знаменитом королевском астрономе Ирландии" и позже как о Лагранже этой страны [90, т. 2, с. 388].

Вряд ли можно представить более приятный отзыв для Гамильтона с его преклонением перед творческим обаянием Лагранжа и, в частности, перед его "Аналитической механикой".

Подведем итог. Использование уравнения Гамильтона–Якоби при интегрировании уравнений движения и построении канонического преобразования основано на так называемой теореме Гамильтона–Якоби, доказанной для функции S[27], если

$$S = S(q, \alpha, t) \tag{3.49}$$

представляет полный интеграл уравнений Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \tag{3.50}$$

то интегралы гамильтоновых уравнений движения определяются соотношениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \tag{3.52}$$

где β_i – n новых произвольных постоянных. Уравнения (3.51) и

---

[27] Отметим одно обстоятельство, важное для приложений. Пусть функция S представляет собой сумму функций, каждая из которых в отдельности зависит от координат q (и, кроме того, от постоянных интегрирования α_i):

$$S = S_1(q_1) + \ldots + S_i(q_i),$$

Тогда уравнение в частных производных

$$H = \left(q_1, q_2, \ldots, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \ldots\right) = V(\alpha_i) \tag{A}$$

распадается на i обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i\right) = \alpha_i,$$

и, разрешая их, получим

$$\partial S/\partial q_i = p_i(q_i, \alpha_i).$$

В данном случае говорят, что уравнение (A) решается разделением переменных.

(3. 52) определяют q и p как функции t, зависящие еще от $2n$ произвольных постоянных α и β. Уравнения (3. 51) дают решение задачи Лагранжа, т.е. определяют движение в пространстве конфигураций. Уравнения же (3. 51) вместе с (3. 52) дают решение задачи Гамильтона, т.е. определяют движение в фазовом пространстве. В 1834 г. дифференциальное уравнение для S было впервые получено Гамильтоном, им же была доказана приведенная теорема для частного случая, когда постоянные α и β имеют смысл начальных значений фазовых координат q и p. В более общем виде при большом произволе в выборе параметров α и β теорема была доказана Якоби в 1837 г. [101, с. 97; 56, с. 157].

С точки зрения задачи интегрирования канонических уравнений Гамильтона отметим еще следующие их преимущества: 1) в отличие от функции $\mathcal{L}$ функция H зависит от переменных и не содержит каких-либо производных; 2) увеличение вдвое числа переменных расширяет область возможных преобразований; 3) в лагранжевой механике не существует единого метода упрощения функции $\mathcal{L}$, в то время как в гамильтоновой механике он существует и сводит всю задачу интегрирования к нахождению одной фундаментальной функции, являющейся производящей функцией некоторого преобразования.

В методе преобразования координаты q_i и p_i уже не рассматриваются (в отличие от метода прямого интегрирования) как функции t, а являются просто некоторыми переменными величинами – координатами точки в фазовом пространстве. Задача о движении в рассуждениях и выводах не фигурирует, важно лишь, чтобы при преобразовании сохранялись канонические уравнения. В этом заключена уже возможность применения гамильтонова формализма (как принято говорить в настощее время) к широкому кругу задач немеханического характера.

Для лучшего понимания динамической проблемы введем в рассмотрение пространство $2n + 2$ измерений с координатами q_i, p_i, t, H, которые Ланцош [35] называет расширенным фазовым пространством, а Синг [51] – пространством состояний и энергии (N – число степеней свободы системы, q_i и p_i – сопряженные переменные). Динамическая система определена, если заданы $(2n + 1)$-мерная поверхность энергии и находящаяся на этой поверхности изображающая точка. Пусть уравнение поверхности энергии имеет вид

$$\Omega (q_i, p_i, t) = 0. \qquad (3.53)$$

Легко видеть, что динамика консервативной системы в фазовом пространстве с гамильтоновой функцией $H(q_i, p_i)$ математически тождественна динамике в пространстве $(2n + 2)$ измерений

(q_i, p_i, t, H) с функцией энергии Ω. Этот изоморфизм интересен потому, что он объединяет противоположные подходы к гамильтоновой динамике. В динамике в пространстве (q_i, p_i, t, H) достигнута большая общность, причем как время t, так и гамильтониан H входят в уравнения математически равноправно с q, p, так что теория вполне пригодна для применения в релятивистском случае. В то же время динамика консервативной системы в фазовом пространстве охватывает те проблемы, которые являются наиболее интересными в ньютоновой динамике и возникают из рассмотрения движения систем частиц и твердых тел.

Сделаем в заключение краткое замечание о теореме Лиувилля и теореме возврата Пуанкаре. Теорема Лиувилля [122] может быть написана так.

Якобиан

$$\frac{\partial (q_{11}, q_{21}, \dots, q_{n1}, p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1})}{\partial (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}, p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0})} = +1, \tag{3.54}$$

что означает, что преобразование от (q_{i0}, p_{i0}) к (q_{i1}, p_{i1}), осуществляемое интегралами уравнений Гамильтона (при фиксированных t_0 и t_1), обладает свойством сохранения протяженности (объема, меры) фазового пространства; иначе говоря, "фазовая жидкость несжимаема[28]. Эта теорема и уравнения Гамильтона явились исходным пунктом для обоснования так называемой теоремы возврата Пуанкаре (1890 г.) [137, с. 67], которая самым существенным образом изменила дальнейшее развитие механики[29].

Использовав только одно свойство уравнений Гамильтона – теорему Лиувилля о сохранении меры при преобразовании с помощью оператора T_t (объем, протяженность фазового пространства является инвариантом преобразования, определяемого каноническими уравнениями), – можно получить теорему возврата Пуанкаре. Для этого надо рассмотреть автономную систему

$$\dot{x}_i = X_i, \tag{3.55}$$

обладающую двумя следующими свойствами: 1) $\Delta = 0$, т.е. объем пространства переменных инвариантен относительно преобразования, определяемого решениями уравнений (3.55). "Фазо-

[28] Это означает, что фазовый поток гамильтоновых уравнений сохраняет фазовый объем. Отсюда вытекает, например, что устойчивость в гамильтоновой системе не может быть асимптотической.

[29] Модернизированная формулировка теоремы Пуанкаре была дана Ван Флеком (*van Fleck E.V.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1915. Vol. 21. P. 335). Доказательство Пуанкаре корректно, хотя в нем нет непосредственной ссылки на понятие нулевого множества (понятие меры Лебега относится к более позднему времени).

вая жидкость несжимаема". В наиболее интересных случаях уравнений Гамильтона это условие выполняется; 2) существует замкнутая область Ω конечного объема $m\Omega$, такая, что начинающиеся в ней характеристики целиком располагаются в ней ("жидкость движется в замкнутом сосуде"). Такая область переводится сама в себя и поэтому называется *инвариантной областью.*

Теорема Пуанкаре устанавливает, что если α есть любая сколь угодно малая замкнутая подобласть области Ω, то существуют характеристики, которые бесконечное число раз пересекают подобласть α. Точнее, для любого сколь угодно большого значения t_1 можно указать также движение системы, при которых изображающая точка для некоторого $t < t_1$ окажется в области α.

Простое доказательство этой теоремы Пуанкаре см. [41].

Теорему Пуанкаре – теорему возврата – можно считать отправным пунктом в новом подходе к задачам классической динамики. До нее считалось, что *решение* задачи динамики – нахождение зависимости положения системы от времени t и заданных начальных значений координат и скоростей частиц. Однако для большей части задач такое решение получить не удается; отсюда интерес механиков к теореме Пуанкаре. Основное внимание поэтому в настоящее время обращено не на изучение индивидуальных свойств характеристик, а на исследование *статистических свойств целого семейства характеристик.* Такой подход реализуется, конечно, не только при применении и исследовании уравнений механики.

Дальнейшее исследование теоремы Пуанкаре связано с выяснением следующего вопроса: какую долю времени своего движения изображающая точка находится в области α? Аналогичный вопрос возникает и тогда, когда мы имеем дело с дискретными моментами $n\tau$. Тогда спрашивается, какая часть этих моментов характеризуется попаданием изображающей точки в область α? Ответ на эти и аналогичные вопросы дается так называемыми *эргодическими теоремами.* Они восходят к трудам Л. Больцмана [10]; впервые эргодическая теорема была доказана Дж.Г. Биркгофом [9]. Несколько более слабый результат незадолго до него был установлен Дж. фон Нейманом [135]. Глубокое доказательство принадлежит также А.Н. Колмогорову [31]. Оригинальное доказательство для случая, когда усреднение производится по дискретным значениям t, дано Ф. Риссом [145]. Анализ и рассмотрение этой важнейшей проблемы выходит далеко за пределы темы настоящей книги.

5. Канонические преобразования

Как мы видели, геометрическая оптика Гамильтона в частной форме, применимой для изотропного пространства, послужила исходным пунктом для его динамики. В ней эквивалентны корпускулярный и волновой подходы к описанию траектории динамической системы или распространения луча[30] как нормали к поверхности некоторой волны. Поэтому уже сам Гамильтон использовал построение Гюйгенса, которое представляет собой не что иное, как некоторое преобразование (по существу касательное), которое устанавливает соответствие между точками и касательными элементами в этих точках двух волновых поверхностей. Это значит, что исходный пункт динамики Гамильтона представляет собой рассмотрение движения как некоторого преобразования.

Мы уже выше обращали внимание на аналогию гамильтоновой оптики и механики с принципом Гюйгенса. Здесь уместно отметить, в чем состоит ограниченность этой аналогии.

Сопоставим контактное преобразование в динамике с простым геометрическим построением Гюйгенса, которое можно рассматривать как такое преобразование. Тогда его общее аналитическое выражение должно позволить обобщить результаты, полученные для конечных систем, на динамические системы с бесконечным числом степеней свободы [61].

На самом деле идеи Гюйгенса не развивались в этом направлении. Причина состоит в том, что в практических применениях принципа Гюйгенса излучение (возмущение среды, которую для удобства изложения можно назвать "эфиром") в общем происходит из источников.

Эти источники с точки зрения динамики есть сингулярности, в которых энергия вводится в эфир; наличие этих сингулярностей препятствует нам развить принцип Гюйгенса таким способом, который был бы естественным, если бы мы имели дело с замкнутой консервативной динамической системой. В частности, решение динамической проблемы с конечным числом степеней свободы есть решение, имеющее смысл для всех значений t,

---

[30] Термин "траектория" связывает математическое понятие с физическими понятиями динамики. Слово "луч" связывает его с оптикой, так что с первого взгляда ему нет места в динамике. Однако волновая механика де Бройля и Шредингера уничтожила барьер между динамикой и оптикой. Если в динамике нам нужно слово "волна", то слово "луч" естественно сопровождает его. Изложение общей динамической теории столь же обязано методу Гамильтона в оптике, сколь и его методу в динамике, так как в то время, как в его оптике все координаты равноправны, в его динамике t было на особом положении.

как последующих, так и предшествующих времени t_0, в то время как в проблеме излучения мы не можем проследить излучение назад за момент его выхода из источника. Формулы, полезные для практического применения принципа Гюйгенса, будут, вообще говоря, применимы только к времени t, следующим за некоторым начальным временем t_0; результаты, полученные подстановкой t, меньшего, чем t_0, не имеют никакого отношения к каким-либо реальным явлениям.

Для механики основной группой преобразований являются канонические преобразования[31]. В 1837 г. Якоби [102] доказал следующую теорему относительно уравнений Гамильтона: эти уравнения при канонических преобразованиях сохраняют свою форму, а общую теорию групп касательных преобразований, которые в механике выступают как канонические[32], дал в 1877 г. Софус Ли [14, 118]. Группу преобразований можно определить либо посредством бесконечно малых преобразований, либо посредством инвариантов этой группы. Первый способ, в котором задаются бесконечно малые изменения канонических переменных при бесконечно малом каноническом преобразовании, выражен уравнениями Гамильтона, второй – инвариантностью действия.

Так как новые переменные Q_i, P_i – канонические, то они должны удовлетворять принципу Гамильтона, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\Sigma P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t)]\, dt = 0, \tag{3.56}$$

в то время, как для старых переменных

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\Sigma p_i q_i - H(q, p, t)]\, dt = 0. \tag{3.57}$$

Оба соотношения должны выполняться одновременно. Отсюда следует, что подынтегральные функции могут отличаться не больше чем на полную производную по времени некоторой функции F.

Если под интегралом принципа Гамильтона прибавить еще полную производную любой функции вида $F = F(q, Q, t)$, то ни-

---

[31] Канонические преобразования иногда не совсем точно называют также контактными преобразованиями. Терминология здесь не установилась.

[32] Канонические преобразования сохраняют вид уравнений Гамильтона; один первый интеграл уравнений Гамильтона позволяет понизить порядок системы сразу на две единицы; движение в лагранжевой натуральной системе происходит по геодезической конфигурационного пространства, имеющего некоторую риманову метрику.

чего не изменится, так как очевидно, что

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dF(q, Q, t) = \delta F\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{3.58}$$

потому что на границах интегрирования все δq и δQ равны нулю.

Поэтому общее каноническое преобразование удовлетворяет соотношению

$$\sum_k p_k \delta q_k - Hdt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{H}dt - dF. \tag{3.59}$$

Приведем таблицу, в которой для четырех главных форм производящей функции F выписаны уравнения преобразования (в предположении, что между переменными, от которых зависит функция F, нет соотношения вида $\varphi_r(\alpha_i, \beta_i) = 0$) :

$F = F(q_i, Q_i, t)$	$F = F(q_i, P_i, t)$	$F = F(p_i, Q_i, t)$	$F = F(p_i, P_i, t)$
$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$	$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$
$P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F}{\partial P_i}$	$P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F}{\partial P_i}$
$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$

В зависимости от выбора функции преобразования F[33]

$F = F(q_i, Q_i, t)$, $F = F(q_i, P_i, t)$, $F = F(p_i, Q_i, t)$ $F = F(p_i, P_i, t)$

получаем одну из четырех форм канонического преобразования[34]. В них особенно часто пользуются второй и реже – пер-

---

[33] Такая функция F называется *производящей функцией* данного преобразования. Задание этой функции однозначно определяет уравнения преобразования.

[34] Интересно отметить соответствия классической механики в гамильтоновой форме (канонические преобразования) и термодинамики, на которые обращают незаслуженно мало внимания. Обозначим термодинамические величины P, V, T, U, A, H, F, S – давление, объем, температура, внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия, термодинамический потенциал Гиббса, энтропия. Тогда имеем соответствия с классической механикой

$A = U - TS,$ $\quad \psi = \varphi - p_i q_i,$

$H = U + PV,$ $\quad \psi' = \varphi + \bar{p}_i \bar{q}_i,$

$F = U + PV - TS,$ $\quad \varphi' = \varphi' + \bar{p}_i \bar{q}_i - p_i q_i.$

вой. Третья форма совершенно эквивалентна второй, так как понятия "старые" и "новые" координаты и импульсы относительны, а функции $F(p_i, Q_i, t)$ и $F(q_i, P_i, t)$ отличаются друг от друга лишь наименованием "старых" и "новых" координат и импульсов.

Легко видеть, что в этом случае новые координаты зависят не только от старых координат, но и от старых импульсов. Как известно, в механике так называемые точечные преобразования связывают старые и новые координаты системы, рассмотренные же здесь более общие преобразования связывают новые координаты и импульсы со старыми. Однако эти преобразования являются преобразованиями не в обычном трехмерном, а в шестимерном фазовом пространстве.

Производящая функция канонического преобразования может быть чисто математической величиной, гамильтонова же главная функция S, которая является производящей, тесно связана с вариационным интегралом. Эта функция имеет поразительную геометрическую интерпретацию: она определяет расстояние между двумя точками в соответственно определенной метрической геометрии, выраженное как функция координат этих точек. Главная функция есть производящая функция того частного вида канонического преобразования, которое непосредственно, без участия каких-либо промежуточных внешних точек, связывает два состояния "фазового флюида", соответствующие двум различным моментам времени.

Уравнение Гамильтона–Якоби (3.40) означает, что производящая функция $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ с основными переменными t и q_i ($\tilde{q}_i$ рассматриваются здесь как параметры) удовлетворяет уравнению в частных производных Гамильтона–Якоби[35].

где p_i, q_i – исходные, а $\bar{p}_i, \bar{q}_i$ – преобразованные обобщенные импульсы и координаты, $\psi = \psi(\bar{q}_i, p_i, t)$, $\psi' = \psi(q_i, \bar{p}_i, t)$, $\varphi' = \varphi'(p_i, \bar{p}_i, t)$ – производящие функции касательного преобразования. Установим соответствия

$$p \to T, \quad G \to U, \quad \bar{p} \to P, \quad \psi' \to H,$$
$$q \to S, \quad \psi \to A, \quad \bar{q} \to V, \quad G' \to F.$$

Тогда любая из обычных термодинамических функций:

$$U = U(S, V), \quad A = A(T, V), \quad H = H(S, P), \quad F = F(T, P)$$

может рассматриваться как производящая для преобразования от переменных T, S к V, P, а взятые со знаком минус эти же функции определяют преобразование от V, P к T, S.

[35] При этом кроме уравнения (3.40) должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{d^2 S}{dq_i, d\tilde{q}_i}\right)^n_{i, k=1} \neq 0. \qquad (3.40a)$$

Как только производящая функция $S(t, \quad q_i, \quad \tilde{q}_i)$ таким образом найдена, формулы (3.40) определяют искомое каноническое преобразование. Заменив в этих формулах $\tilde{q}_i$ на α_i и $\tilde{p}_i$ на β_i, мы получим уравнения данной голономной системы в конечном виде.

Назовем решение $S(t, \quad q_i, \quad \alpha_i)$ уравнения (3.40), содержащее n произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, полным интегралом этого уравнения, если выполняется условие (3.40а). Тогда теорема Гамильтона–Якоби звучит так: если $S(t, \quad q_i, \quad \alpha_i)$ – некоторый полный интеграл уравнения (3.40), ингералы уравнения движения Гамильтона голономной системы с данной функцией H могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i, \tag{3.60}$$

где α_i и β_i – произвольные постоянные. Таким образом задача интегрирования системы уравнений (3.38) заменяется эквивалентной задачей отыскания полного интеграла уравнения в частных производных (3.40).

Как известно, общего метода решения уравнений в частных производных не существует. Однако в некотором очень важном для задач математической физики случае одно уравнение в частных производных с n переменными может быть заменено n обыкновенными дифференциальными уравнениями с одной независимой переменной, которые полностью интегрируются. Это так называемая задача с разделяющимися переменными. В развитиии теоретической физики этот метод сыграл немаловажную роль, так как основные задачи теории атома Бора (до квантовой механики) решались именно таким способом [12].

Перейдем теперь к таким каноническим преобразованиям, для которых новые обобщенные координаты и импульсы отличаются от прежних только на бесконечно малые величины, т. е.

$$Q_r = q_r + \lambda g_r, \qquad P_r = p_r + \lambda h_r, \tag{3.61}$$

где λ – бесконечно малая постоянная. Уравнение $\sum\limits_k (P_r\, dQ_r - p_r dq_r) = -dF$, которое вместе с $\tilde{H} = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}$ достаточно для преобразования уравнения Гамильтона к новой координатной системе, запишется тогда так:

$$\Sigma (p_r + \lambda h_r)\, d\,(q_r + \lambda g_r) - p_r dq_r = -dF,$$

откуда

$$\Sigma \lambda\, (h_r dq_r + p_r\, dg_r) = -dF. \tag{3.62}$$

Из этого уравнения очевидно, что $F = \lambda G$, где G – некоторая функция от q, p, и поэтому можно написать

$$\Sigma h_i dq_i + p_i dg_r = -dG,$$

или

$$\Sigma(h_r dq_r - g_r dp_r) = -d(G + \Sigma p_r g_r),$$

так что

$$\Sigma(h_r dq_r - g_r dp_r) = -dK, \tag{3.63}$$

если

$$K = G + \Sigma p_r g_r, \tag{3.64}$$

откуда

$$g_r = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \qquad h_r = -\frac{\partial K}{\partial q_r}. \tag{3.65}$$

Таким образом, *"весь процесс движения можно рассматривать, как постепенное развертывание контактного преобразования"* [52].

Итак, синтез корпускулярного и полевого (поле, в каждой точке которого задана функция действия S) аспектов физических процессов имеет место уже в классической механике – как в еще элементарной форме оптико-механической аналогии, так и в развитой форме представления движения как канонического преобразования с самой общей теоретико-групповой точки зрения.

Сочетание представления о механическом движении как о некотором преобразовании с теоретико-групповой точки зрения Софуса Ли и вариационного принципа Гамильтона позволяет существенно углубить и обогатить картину движения, связав в таком подходе свойства пространства времени с законами сохранения, обобщаемыми далеко за рамки классической механики. Для этого оказалось необходимым привлечь важнейшее понятие инвариантов непрерывных групп преобразования. Это сделано в знаменитой работе Э. Нетер [14]. Мы здесь лишь кратко перечислим основные этапы, предшествующие формулировке и доказательству этой теоремы.

Еще в 1851 г. Дж. Сильвестр впервые ввел понятие об инвариантах алгебраических форм [153]. В 1872 г. Ф. Клейн в так называемой эрлангенской программе (ее название "Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований") сформулировал следующий принцип: каждое многообразие (в том числе различные геометрии) задается системой инвариантов относительно некоторой группы преобразований [29]. А в 70-х годах XIX в. Софус Ли установил связь между интегралами дифференциальных уравнений и инвариантами непрерывных групп. Отсюда вытекает возможность интерпретации механики в терминах непрерывной группы преобразований и ее инвариантов. Основываясь на объединении вариационного исчисления и методов теории групп Ли, Э. Нетер в 1918 г. развила алгоритм, позволяющий найти систему инвариантов любой физической теории, формулируемой при помощи лагранжева или гамильтонова формализма [14].

Теорема Нетер гласит, что всякому непрерывному преобразованию координат, обращающему в нуль вариацию действия, при котором задан также закон преобразования поля, соответствует определенный инвариант, т. е. сохраняющаяся комбинация функций поля и их производных[36]. Так, инвариантности лагранжевой функции относительно смещения начала отсчета в пространстве (однородности пространства) соответствует закон сохранения импульса; инвариантности лагранжевой функции относительно смещения начала отсчета времени (однородности времени) соответствует закон сохранения энергии; инвариантности ее относительно пространственных поворотов (изотропности пространства) соответствует закон сохранения момента импульса; инвариантность относительно преобразований Лоренца, т. е. вращения в плоскостях (x, t), (y, t), (z, t), приводит к обобщенному закону сохранения движения центра масс. Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени имеем всего десять фундаметнальных законов сохранения.

Собственно говоря, физический смысл принципа Гамильтона глубже всего выражается теоремой Нетер.

6. Некоторые математические вопросы, связанные с вариационными принципами механики

Остановимся кратко на некоторых математических вопросах, связанных с принципом наименьшего действия и принципом Гамильтона. Мы не можем проследить эволюцию каждого из этих вопросов, поэтому ограничимся их формулировкой, что позволит несколько более строго рассмотреть "принципиальность" указанных принципов и поможет читателю некоторым образом глубже "вжиться" в них. Дальнейшее изложение охватывает восемь таких вопросов.

1. Вторая вариация интеграла действия. Ограничиваясь первой вариацией, мы не можем быть уверены, что условие $\delta I = 0$ определяет такую функцию $q(t)$, при которой интеграл принимает

---

[36] Очень наглядный вывод теоремы Нетер дан в книге: *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.А.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехтеориздат, 1957. С. 20–23; для простого случая механической системы точек см. предложенное Г.А. Соколиком доказательство теоремы Нетер в [14, с. 334–335].

максимальное или минимальное значение. Можно только ручаться, что при произвольном бесконечно малом изменении вида функции $q(t)$ интеграл I в первом приближении (с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости) остается постоянным.

Для того чтобы определить, имеет ли место максимум или минимум, надо исследовать вторую вариацию интеграла; однако в большинстве задач и из самого физического содержания ясно, с каким экстремальным значением мы имеем дело, а кроме того, для физики важно лишь составить лагранжеву функцию и уравнения для нее. Тем не менее вопрос о второй вариации интеграла действия был подробно изучен с математической точки зрения [46, 50].

2. Изохронная и изоэнергетическая вариации. В развитии вариационных принципов механики в XIX в. наиболее спорным оказался вопрос о характере вариации в принципе наименьшего действия в форме Лагранжа.

Остроградский пишет по этому поводу: "Итак, если вместе с Лагранжем ограничить общность вариаций, относя их к кривым, которые все начинаются в точках с координатами x_{i0}, y_{i0}, z_{i0} и оканчиваются в точках x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, то мы будем иметь

$$\delta x_{i0} = 0, \delta y_{i0} = 0, \delta z_{i0} = 0, \delta x_{i1} = 0, \delta y_{i1} = 0, \delta z_{i1} = 0,$$

следовательно,

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0,$$

а это означает, что

$$\int (T + U)\, dt$$

имеет минимум. Согласно Лагранжу имеет минимум $\int T dt$, но его анализ неточен".

Начиная с 1866 г., когда было опубликовано письмо М.В. Остроградского к Н.Д. Брашману, в котором высказано сомнение в справедливости принципа наименьшего действия Эйлера–Лагранжа, в русской научной литературе появился ряд статей, в которых принцип наименьшего действия был рассмотрен с различных точек зрения. В этих работах представлены: Ф.А. Слудский (Московский университет), М.И. Талызин (Киевский университет), И.Д. Соколов (Харьковский университет), О.И. Сомов (Петербургский университет), Н.Д. Брашман (Московский университет), И.И. Рахманинов (Киевский университет) [46, гл. 3].

Продолжая исследования Остроградского, Ф.А. Слудский и затем М.И. Талызин показали, что принцип наименьшего действия в форме Эйлера–Лагранжа и принцип Гамильтона–Остроградского существенно различны. Дело в том, что в принципе

Гамильтона вариации координат δq_i изохронны и время не варьируется, так как каждой точке действительной траектории ставится в соответствие точка на другой бесконечно близкой кривой, причем обе точки проходятся в один и тот же момент времени. В случае же принципа Эйлера–Лагранжа связи стационарны и имеет место закон живых сил: $T = U + h$. При этом допущении время должно варьироваться.

3. Обобщение вариационных принципов Гельдером. Вопрос о смысле вариаций в принципах Гамильтона и наименьшего действия рассмотрел в 1896 г. О. Гельдер (1859–1937) [14, с. 538].

Для того чтобы составить отчетливое представление о смысле вариации, необходимо каждое положение точки при варьированном движении отнести к какому-либо положению точки в первоначальном движении. Без установления такого соответствия нельзя написать

$$\delta \int T dt = \int \delta (T dt). \tag{3.66}$$

Установить такое соответствие можно произвольно, так как оно лишено физического смысла, – вариация движения есть только математическое вспомогательное построение. Вариация времени будет разностью между моментами прохождения через соответствующие положения.

Для того чтобы выполнить вариацию движения, сообщим сначала каждой точке первоначальной траектории некоторое смещение, так что возникнет новая траектория с точками, соответствующими исходной, затем определим скорость для каждой точки новой траектории, причем она может быть произвольной, но возможно мало отличающейся от скорости в соответствующей точке исходной траектории.

Эту скорость можно определить двумя способами: 1) соответствующие точки обеих траекторий проходятся одновременно; 2) полная энергия для соответствующих точек траекторий одна и та же.

Так как полная энергия есть $T-U$, а первоначальное движение задано, то для каждого положения варьированного движения сначала известна лишь потенциальная энергия, а из условия варьирования получается в силу $h = T-U$ значение кинетической энергии, а следовательно, и скорости. Видно, что при втором способе варьирования время варьируется, а при первом – нет.

Вывод интегрального принципа для общего случая варьирования приводит Гельдера при допущении, что вариация движения выполнена так, что δx_i, δy_i, δz_i суть виртуальные перемещения системы, к выражению

$$\int \{2T d\delta t + (\delta T + \delta' U)\} dt, \tag{3.67}$$

где

$$\delta' U = \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

— работа, которую совершили бы действующие силы на одном из этих воображаемых перемещений.

Воспользуемся теперь двумя введенными способами варьирования. При изохронной вариации $\delta t = 0$ и из (3. 67) получаем

$$\int (\delta T + \delta' U)\, dt = 0, \tag{3.68}$$

т.е. принцип Гамильтона. При изоэнергетической вариации $\delta T = \delta' U$ и из уравнения (3. 67) получаем

$$\int \delta (T dt) = \delta \int T dt = 0, \tag{3.69}$$

т.е. принцип наименьшего действия.

Если существует силовая функция U, то

$$\delta U = \sum_{\nu} \frac{\partial U}{\partial x_{i\nu}} \delta x_{i\nu},\ \nu = 1, 2, 3, \tag{3.70}$$

причем если даже δU содержит время, то все-таки в том случае, когда время не варьируется,

$$\delta U' = \delta U, \tag{3.71}$$

и для принципа Гамильтона получим

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0. \tag{3.72}$$

В случае же вариации, требуемой принципом наименьшего действия, должна существовать не зависящая от времени функция U, чтобы удовлетворялось уравнение (3. 69).

Отсюда получается сразу более узкая форма принципа наименьшего действия для того случая, когда существует не зависящая от времени силовая функция и время не входит в уравнения связей; при этом вариации положений должны быть виртуальными перемещениями, а начальное и конечное положения должны оставаться неварьированными.

Лагранж в "Аналитической механике" рассматривает именно эту узкую форму принципа наименьшего действия. Однако указание на более широкую форму принципа содержится в его ранней работе, где в § 13 прямо указывается на то, что полученное Лагранжем в § 8 этой статьи соотношение, тождественное с уравнением (3.69), применимо в случае произвольных сил. Большинство ученых, разрабатывавших этот вопрос после Лагранжа, взяли у него как раз узкую форму принципа (в том числе Гамильтон и Якоби). Лишь Гельмгольц рассмотрел расширенную форму принципа [14, с. 402].

4. Распространение вариационных принципов на неголоном-

ные системы. Кинематические условия, которые могут быть заданы только как отношения между дифференциалами координат и не могут быть представлены в форме алгебраических соотношений между самими координатами, Герц назвал неголономными связями. Сопоставим их со связями голономными.

Кинематическое условие, имеющее вид

$$f(q_i) = 0,$$

выражает голономные связи. Из него простым дифференцированием получим

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial q_i}\, dq_i = 0. \qquad (3.73)$$

Для неголономных связей имеем

$$\Sigma A_i dq_i = 0, \qquad (3.74)$$

где коэффициенты A_i – заданные функции от q_i. Эти соотношения (3. 74) могут быть преобразованы к виду $f(q_i) = 0$, только если выполняются некоторые добавочные условия интегрируемости. Единственным исключением является случай $i = 2$, так как дифференциальное соотношение между двумя переменными всегда интегрируемо.

Голономные кинематические условия можно рассматривать двумя способами. Если имеется m уравнений между n переменными, то можно исключить m из них и свести задачу к проблеме $n-m$ независимых переменных. Другой путь состоит в том, чтобы рассматривать избыточное число переменных и принимать уравнения для m их них в качестве вспомогательных условий. Неголономные же связи допускают только второй путь рассмотрения. Уменьшение числа переменных здесь неосуществимо, и мы должны рассматривать большее число переменных, чем этого требует число степеней свободы системы.

Выражения (3. 74) отличаются от соотношений (3. 73) тем, что в них слева стоят не полные дифференциалы, как это имеет место для уравнений (3. 73).

Примером движения, ограниченного неголономными связями, является качение твердого тела по поверхности.

Гельдер распространил принцип Гамильтона на неголономные системы [14, с. 538].

Обобщение вариационных принципов на случай неголономных систем было выполнено также в 1900 г. А. Фоссом (1845–1931), а затем в 1901–1902 гг. П.В. Воронцом и Г.К. Сусловым [14, 46].

5. Задача интегрирования уравнения Гамильтона–Якоби. Ос-

тановимся еще на вопросе о фактической интеграции уравнения Гамильтона–Якоби. Полное решение уравнения Гамильтона–Якоби осуществимо лишь при некоторых специальных условиях. Эти условия имеют место, в частности, в задачах теории атома Бора. В такой задаче одно дифференциальное уравнение в частных производных с n переменными может быть заменено n обыкновенными дифференциальными уравнениями с одной переменной, причем эти уравнения полностью интегрируемы. Такого рода задача называется задачей с разделяющимися переменными.

Метод разделения следующий. Полагаем, что функция S может быть представлена как сумма функций, каждая из которых зависит только от одной-единственной переменной:

$$S = S_1 (q_1) + S_2 (q_2) + \ldots + S_n (q_n). \tag{3.75}$$

Осуществимо или нет такое представление функции S, непосредственно не может быть установлено. Леви-Чивита показал, как исследовать гамильтониан на "разделимость", но, вообще говоря, проще предположить, что функция S имеет форму (3. 75), и испробовать это допущение непосредственно при решении уравнения в частных производных.

Основная особенность решения в форме (3.75) состоит в том, что импульс

$$P_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k (q_k)}{\partial q_k} \tag{3.76}$$

становится функцией одного q_k. Напишем уравнение

$$H(q_i p_i) - h = 0 \tag{3.77}$$

и решим его относительно p_k. Согласно выражению (3. 76) это решение должно дать p_k как функцию одного q_k, в то время как фактическое решение даст p_k как функцию всех других q_i, а также и p_i. Это противоречие может быть устранено только в том случае, если некоторая комбинация этих переменных сводится просто к некоторой постоянной.

Таким образом, разделение переменных возможно только тогда, когда уравнение (3.77) может быть рассмотрено как следствие n соотношений вида

$$p_k = f_k (q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h), \tag{3.78}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ – произвольные постоянные, полученные при выполнении разделения переменных.

Обычно не все α_i входят в каждое из уравнений (3. 78). Если постоянные появляются при каждом последовательном отделении переменных, то в конце концов найдем n постоянных α_i

и энергия h будет некоторой функцией этих постоянных

$$h = \psi(\alpha_i). \tag{3.79}$$

Исключим α_n из этого уравнения, выразив эту постоянную как функцию $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$, h. Если заменить p_k через $\partial S_k/\partial q_k$ согласно уравнению (3. 76), то с помощью квадратуры получим

$$S_k = \int f_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h)\, dq_k + C_k. \tag{3.80}$$

Типичный пример – задача Кеплера. Так как

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2,$$

то

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin\theta}\right) - \frac{k^2}{r}.$$

Уравнение

$$H = E$$

может быть разделено так:

$$p\psi = \text{const} = \alpha,$$

$$p_\theta^2 + \frac{\alpha^2}{\sin^2 \alpha} = \text{const} = \beta^2,$$

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r^2} = E.$$

Процесс разделения автоматически дает нужное количество постоянных. Действительное интегрирование не создает никаких новых постоянных.

Уравнение (3. 80) показывает, что разделимые системы позволяют получить в квадратурах полное решение уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби. В этом случае сопряженные переменные p'_k, q_k в каждой паре связаны только одна с другой и не связаны ни с какими другими. Механическая система с n степенями свободы может рассматриваться как суперпозиция n систем с одной степенью свободы. Истинные уравнения движения содержатся в уравнениях

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t - \tau, \tag{3.81}$$

и эти уравнения неразделимы, так как, вообще говоря, некоторые α_i (и также E) входят более чем в одну функцию S_i.

6. Уравнения Рауса. Существенно новое, особенно для прило-

жений в физике, внес в аналитическую механику Э.Дж. Раус (1831–1907).

Э.Дж. Раус в 1877 г. [14, 46] вывел уравнения движения, занимающие промежуточное положение между уравнениями Гамильтона и уравнениями Лагранжа. Для получения уравнений Рауса разобьем все степени свободы системы на две группы: одну, состоящую из $j-r$ степеней свободы, будем описывать обобщенными координатами Лагранжа $q_1, \ldots, q_{j-r}; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{j-r}$; вторую же группу будем характеризовать гамильтоновыми обобщенными координатами и импульсами

$$q_{j-r+1}, \ldots, q_f;\ p_{j-r+1}, \ldots, p_f.$$

Вместо функции Лагранжа $\mathcal{L}$ или функции Гамильтона H вводим теперь функцию Рауса $\mathcal{R}$, причем

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\,(t, q_1, \ldots, q_f; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{f-r}; p_{j-r+1}, \ldots, p_f).$$

Определяем $\mathcal{R}$ следующим образом:

$$\mathcal{R} = \sum_{k=j-r+1}^{f} p_k\dot{q}_k - \mathcal{L}\,(t, q_1, \ldots, q_f; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f) \tag{3.82}$$

или

$$\mathcal{R} = H\,(t, q_1, \ldots, q_f; p_1, \ldots, p_f) - \sum_{k=1}^{f-r} p_k\dot{q}_k. \tag{3.83}$$

При $r=f$ функция Рауса переходит в функцию Гамильтона, а при $r=0$ с точностью до знака переходит в функцию Лагранжа. Написав два выражения для полного дифференциала $\mathcal{R}$ из (3.82), (3.83) и воспользовавшись известным $d\mathcal{L}$, после небольших преобразований найдем уравнения Рауса:

для $k = 1, 2, \ldots, f-r$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_k}, \quad p_k = -\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{q}_k}, \tag{3.84}$$

для $k = j-r+1, j-r+2, \ldots, f$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = +\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_k}. \tag{3.85}$$

Первая группа k уравнений относится к типу уравнения Лагранжа (при $\mathcal{R} = -\mathcal{L}$), а r уравнений второй группы относятся к типу уравнений Гамильтона (при $H = \mathcal{R}$).

Раус выводил эти уравнения для приложений к циклическим системам. Для этого примем, что координаты второй группы степеней свободы являются циклическими и, следовательно, не входят в функцию Лагранжа, а также, как очевидно, и в функцию Рауса. Вследствие этого, согласно первому уравнению из второй группы, p_k оказываются постоянными. Подставляя эти постоянные p_k в уравнения (3.82) и (3.83), получим функцию Рауса, зависящую только от $f-r$ координат q_k первой группы и от $\dot{q}_k$. Для этих координат справедлива первая группа уравнений Рауса, в силу чего задача сводится к $f-r$ уравнениям типа Лагранжа.

Гельмгольц положил этот вид уравнений Рауса в основу своей теории моно- и полициклических систем, связанной с основными проблемами термодинамики.

Система уравнений Рауса приобретает большой интерес, если в функцию $\mathscr{R}$ входят не величины q_i, а только соответствующие p_i. Этот случай так называемых циклических координат встречается всегда, когда имеет место вращательное движение тел вращения, – циклической координатой является здесь угол вращения, проявляющийся только в соответствующем моменте вращения. Если заключить вращающееся тело в непрозрачную оболочку, то скрытое движение тела проявит себя только в необычном поведении при движении в пространстве тела как целого.

Как известно, циклическая координата может быть исключена, что уменьшает число переменных вариационной задачи на единицу. Если рассматривать как циклическую координату время, то можно исключить t из вариационной задачи и получить новую вариационную задачу, которая определяет движение в пространстве, но ничего не говорит о том, как описывается эта траектория во времени t.

7. Геометризация проблем динамики. Проблема геометризации основных соотношений динамики, вытекавшая из глубокого внутреннего родства теории поверхностей и задачи отыскания динамических траекторий для различных механических систем, вызвала многочисленные исследования.

Теория относительности отнюдь не является первой теорией, геометризующей динамику. Теория относительности в этом смысле была лишь первой теорией, проводившей геометризацию в пространстве-времени. Уже в классической механике, придавая принципу наименьшего действия подходящую форму, геометризовали общую задачу динамики.

Исходя из работ Якоби, Томсона и Тэта, Лиувилля и Липшица, Г. Дарбу (1842–1919) [46] геометризовал проблемы динамики, рассматривая среди всех возможных движений с потенциальной функцией U такие движения, которым отвечает одно и то же значение постоянной закона сохранения энергии h, или, что то же самое, одна и та же полная энергия. Возьмем в качестве основной формы

$$2T dt^2 = \Sigma a_{ik}\, dq_i\, dq_k; \tag{3.86}$$

введем импульсы

$$p_i = a_{ij}\, \dot{q}_j,$$

отсюда получим

$$2T = \Sigma a^{ik} p_i p_k.$$

Тогда уравнение в частных производных Якоби запишется так:

$$a^{ik} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_k} = 2(U + h). \tag{3.87}$$

Пусть θ — полный интеграл этого уравнения и θ_1, θ_2, ... , θ_{n-1} — частные интегралы линейного относительно F уравнения

$$a^{ik} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0. \tag{3.88}$$

Согласно Липшицу (1832–1903) имеем

$$2\,(U + h)\, a_{ik}\, dq_i\, dq_k = d\theta^2 + f(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}),$$

откуда для действительного движения, при котором

$$d\theta_1 = d\theta_2 = \ldots = d\theta_{n-1} = 0,$$

имеем

$$\delta \int \sqrt{2\,(U + h)\, a_{ik}\, dq_i dq_k} = 0. \tag{3.89}$$

Таким образом, с помощью этого выражения принципа наименьшего действия определение траектории тела сводится к отысканию геодезической линии

$$ds^2 = 2\,(U + h)\, a_{ik}\, dq_i\, dq_k. \tag{3.90}$$

Преимущество геометрической точки зрения особенно очевидно, если рассматривать механическую систему, не подверженную действию внешних сил. В этом случае траектория системы представляет собой геодезическую линию в пространстве конфигураций.

Можно сделать дальнейшее обобщение для случая, когда потенциальная энергия не является функцией времени, введя мероопределение риманова пространства

$$\overline{d\sigma} = \sqrt{h - U}\, ds, \tag{3.91}$$

где ds — элемент длины исходного пространства конфигураций. Тогда все траектории с одной и той же полной энергией h будут геодезическими линиями в пространстве с таким мероопределением.

Однако это не всегда имеет место, и поэтому необходим переход к неримановой геометрии. Риманова геометрия, как известно, имеет ту особенность, что в непосредственной близости от любой точки риманова пространства в бесконечно малой области имеет место евклидова геометрия. В неримановых геометриях, структурными элементами которых также являются линии и углы, это ограничение больше не имеет места. Поэтому оказывается возможной геометризация самых общих задач механики.

Для этого прежде всего будем рассматривать время t как одну из координат положения и обозначим ее q_{n+1}; следовательно, координатами положения будут q_i, где i изменяется от 1 до $n+1$. т.е. это пространство имеет $n+1$ измерений (вместо n).

Определим линейный элемент так:

$$ds = F(q_1 \ldots, q_{n+1}, dq_1, \ldots, dq_{n+1}),$$

где F – произвольная функция $2n+2$ переменных q_i и dq_i с одним лишь ограничением, что она есть однородная форма первого порядка относительно dq_i, т. е.

$$F(q_i, \alpha dq_i) = \alpha F(q_i, dq_i).$$

Если определить линейный элемент ds в $(n+1)$-мерном пространстве как

$$ds = L\left(q_i, \frac{dq_{i-1}}{dq_{n+1}}\right) dq_{n+1} = F(q_i, dq_i), \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{3.92}$$

то проблема механического движения будет сведена к нахождению геодезической линии в $(n+1)$-мерном многообразии. Дальнейший шаг в геометризации динамики можно сделать, если попрежнему считать t дополнительным измерением пространства и иметь дело с $(n+1)$-мерным пространством конфигураций, в котором t рассматривается наряду с обобщенными координатами как независимое переменное. В этом пространстве последовательные этапы движения суть последовательные точки кривой. В такой картине вариация положения системы в любое время между t_1 и t_2 становится вариацией этой кривой, т. е. мировой линии механической системы. Так как два конечных положения системы в любые моменты времени t_1 и t_2 заданы, вариация выполняется между определенными границами, т.е. варьированная кривая имеет одни и те же конечные положения. Время t не играет какой-либо специальной роли в этой концепции и даже может не рассматриваться как независимая переменная. Можно было бы характеризовать кривую и в параметрической форме, рассматривая q_i и t как функции параметра τ.

Задача отыскания экстремума определенного интеграла совершенно не зависит от выбора координатной системы. Предположим, что исходная сетка координат преобразуется в новую сетку координат с помощью точечного преобразования

$$\overline{q}_i = f_i(q_i). \tag{3.93}$$

Это точечное преобразование может быть представлено как отображение n-мерного q-пространства на себя. В $(\overline{q}, t)$-пространстве кривая преобразуется в некоторую новую кривую. Варьированная кривая преобразуется в соответственную варьированную кривую этой новой кривой. Вариация между определенными пределами в (q, t)-пространстве означает и вариацию между определенными пределами в пространстве $(\overline{q}, t)$. Обращение в нуль вариации интеграла I требует того же для вариации, выраженной в новых координатах. Поэтому уравнения Эйлера–Лагранжа сохраняют свое значение в новой системе отсчета. Лагранжева функция $\mathcal{L}$ и интеграл I являются инвариантами преобразования.

Так как t есть только добавочная переменная, то изложенное действительно и тогда, когда отношение между старыми и новыми q_i зависит от времени, что имеет место в случае, когда механическое явление рассматривается в системе отсчета, находящейся в движении. Лагранжевы уравнения остаются действительными и для произвольно движущейся системы отсчета.

Так как значение n обобщенных координат q_i определено только тем требованием, чтобы они полностью характеризовали систему, то мы можем выбрать другую группу величин $\overline{q}_i$ в качестве обобщенных координат. В таком случае должно существовать функциональное соотношение между этими двумя системами координат. Оно может быть записано в виде (3. 93), где функции f_i должны быть конечными, однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями q_i с якобианом, отличным от нуля.

Дифференцируя (3.93), получим

$$d\overline{q}_i = \Sigma \frac{\partial f_i}{\partial q_i} dq_i. \tag{3.94}$$

Эти уравнения показывают, что независимо от того, какие функциональные соотношения существуют между двумя группами координат, между их дифференциалами существует линейная зависимость.

Наглядный язык n-мерной геометрии позволяет распространить механику отдельной материальной точки на произвольно сложные механические системы. Такая система может быть заменена для изучения ее движения одной-единственной точкой. Но движение этой точки происходит уже не в обычном физическом пространстве. Это есть абстрактное пространство конфигураций с таким количеством измерений, какого требует природа рассматриваемой задачи.

Первым отметил внутреннюю связь между динамикой и геометрией искривленных пространств Якоби в 1845 г. Много исследований в более позднее время было выполнено различными механиками, геометрами и аналитиками. Наиболее исчерпывающее исследование вопроса, основанное на систематическом использовании тензорного исчисления, принадлежит Дж. Сингу.

Линейный элемент

$$ds^2 = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i dq_k,$$

где a_{ik} – известные функции от q_i, является римановым, так как q_i – криволинейные координаты, а геометрия пространства конфигурацией только в бесконечно малых областях сохраняет евклидову структуру первоначального $3n$-мерного пространства. Движение произвольной механической системы можно рассматривать как движение свободной частицы в некотором n-мерном римановом пространстве. Задача механики превращается в задачу дифференциальной геометрии.

Эта задача точно та же, что и отыскание кратчайшего пути между двумя определенными конечными точками в некотором римановом пространстве. Это значит, что движение механической системы (при наличии потенциальной энергии) может быть сопоставлено движению точки по геодезической кривой некоторого риманова пространства.

Таким образом, нахождение решения динамической задачи математически эквивалентно задаче отыскания геодезической линии. В частности, в теории относительности отыскание геодезических линий в римановом пространстве есть основной метод решения задачи движения. Отличие от классической механики состоит только в том, что в теории относительности риманова структура пространства-времени есть внутреннее свойство Вселенной, а не следствие кинематических связей.

Заметим, что хотя общий метод интегрирования уравнений Лагранжа и не реализуем, но при некоторых условиях может быть найден, по крайней мере, частный интеграл. Это имеет место в случае циклических переменных. Вообще говоря, лагранжева функция $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ включает все координаты и скорости. Однако может быть и такой случай, когда некоторая переменная q_k не входит в нее, хотя $\dot{q}_k$ входит. Сначала в 1877 г. Раус, а затем Гельмгольц рассмотрели этот важный случай. Раус назвал эти переменные "отсутствующими координатами", Дж.Дж. Томсон – киностеническими, Гельмгольц – циклическими переменными.

8. Интегральные инварианты Пуанкаре. В 1890 г. А. Пуанкаре (1854–1912) ввел понятие об интегральных инвариантах. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{3.95}$$

где X_i – заданная функция x_i, t. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения движения точки в пространстве n измерений. Множество такого рода точек, занимающих в начальный момент некоторую m-мерную область A_0, будет и для всякого последующего момента занимать некоторую m-мерную область A. Распространенный на область A m-кратный интеграл называется интегральным инвариантом, если он сохраняет одинаковые значения для всякого момента времени t. Так, например, при движении несжимаемой жидкости интеграл для объема жидкости, распространенный на все ее частицы, заполняющие в начальный момент определенную область, будет интегральным инвариантом, ибо состоящий из этих частиц объем жидкости не изменяется со временем.

Теория интегральных инвариантов, созданная А. Пуанкаре, изложена им в труде "Methodes nouvelles de la mèchanique céleste" (т. III).

В каждой совокупности преобразований имеются некоторые основные величины, которые не изменяются при преобразовании. Это основные инварианты, которые определяют природу преобразования. Если мы начинаем изучение канонического преобразования, то устанавливаем инвариантность дифференциальной формы $\Sigma p_i dq_i$, чтобы обеспечить инвариантность канонических уравнений. Однако инвариантность этих уравнений имеет место и при более общих условиях. Необходимое и достаточное условие канонического преобразования дано в форме требования, чтобы разность двух дифференциальных форм была полным дифференциалом dS некоторой функции S.

Этот вопрос тесно связан с вопросом о геометрической структуре фазового пространства. В самом деле, лагранжево пространство конфигураций имеет определенную геометрическую структуру, ибо в нем задан риманов линейный элемент ds, квадрат которого является квадратичной дифференциальной формой переменных q_i. Эта величина ds^2 есть основной инвариант лагранжева точечного преобразования и в то же время бесконечно малое расстояние, определяющее геометрическую структуру пространства конфигураций.

В гамильтоновом фазовом пространстве имеет место нечто подобное. Здесь существует основная дифференциальная форма, связанная с каноническим преобразованием и являющаяся инвариантом этих преобразований, хотя она и совершенно отлична от риманова ds^2. Она также квадратична в дифференциалах, но связана с двумя смещениями и поэтому уже не представляет расстояния. Геометрия фазового пространства не является поэтому обычной метрической геометрией. Она представляет собой скорее геометрию, в которой могут быть измерены площади, а не расстояния.

Так как основной дифференциальный инвариант канонических преобразований линеен для обоих бесконечно малых перемещений, то мы называем его билинейной дифференциальной формой. Вся теория канонических преобразований может быть основана на этой инвариантной дифференциальной форме. Дифференциальная величина

$$\Sigma p_i dq_i - \Sigma P_i dQ_i = dS \qquad (3.96)$$

напоминает по своему виду работу сил, могущих быть представленными в виде производной одной скалярной функции. Для того чтобы определить, таков ли характер тех или иных рассматриваемых сил, мы допускаем, что силы, действующие на частицу, приводят ее некоторым произвольным путем назад в исходное положение. Если полная работа силы равна нулю для замкнутого пути, то силы удовлетворяют этому условию, в противном случае – нет. Подобный критерий может быть приложен к форме (3.96).

Проинтегрируем (3. 96) по какой-либо замкнутой кривой l фазового пространства. Тогда мы получим два линейных интеграла в левой части (3. 96), так как каждая (p, q)-точка связана с соответствующей (P, Q)-точкой с помощью преобразования. Интеграл справа исчезает. В силу этого мы получаем инвариантный принцип, в котором уже нет неопределенной функции S:

$$\Gamma = \oint \Sigma p_i dq_i = \oint \Sigma P_i dQ_i. \qquad (3.97)$$

Для любой замкнутой кривой фазового пространства может быть образована величина Γ – "циркуляция", которая является инвариантом по отношению к произвольному каноническому преобразованию.

Пуанкаре назвал любой интеграл, связанный с фазовым флюидом и имеющий свойство оставаться неизменным в течение движения, "интегральным инвариантом". Объем σ фазового флюида есть один из примеров интегрального инварианта. Другим примером может служить величина, введенная Гельмгольцем под названием циркуляции.

Вариация интеграла действия I для произвольных вариаций q_i (вариация может не равняться нулю в конечных точках пути) будет

$$\delta I = \int \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} . \qquad (3.98)$$

Эта важная теорема сохраняется без какого-либо изменения и в гамильтоновом формализме, так как вариация p_i не влияет на δI. Поэтому (3. 98) имеет место для произвольных вариаций q_i и p_i.

А. Пуанкаре показал, что общие уравнения динамики обладают тем свойством, что они допускают линейный интегральный инвариант

$$\int \Sigma p_i dq_i \qquad (3.99)$$

или, что естественно получается из теории Гамильтона,

$$\int \Sigma p_i dq_i - H\delta t. \qquad (3.99a)$$

Выражению под знаком интеграла, как указывает Э. Картан (1869–1951), можно дать название тензора "количество движения-энергии". Элементарное действие Гамильтона есть не что иное, как тензор, рассматриваемый вдоль траектории.

Дифференциальные уравнения движения не только допускают интегральный инвариант (3. 99), но и являются единственными дифференциальными уравнениями, обладающими этим свойством. Поэтому в основу механики можно положить "принцип сохранения количества движения и энергии". «Движения материальной системы (с вполне голономными связями), находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию, управляются дифференциальными уравнениями первого порядка, связывающими время, параметры положения и параметры скоростей, и эти дифференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что интеграл тензора "количества движения-энергии", распространенный на любую непрерывную линейную замкнутую последовательность состояний системы, не меняет значения при перемещении этих состояний каким-либо способом вдоль соответственных траекторий» [46, с. 291].

Эта формулировка хотя и весьма абстрактна, но имеет и некоторые преимущества. Дело в том, что уравнения Лагранжа не зависят от координатной системы, в чем и заключается их значение, но время в этих уравнениях еще играет особую роль. Напротив, принцип сохранения количества движения-энергии позволяет дать законам динамики форму, не зависящую от выбора координат пространства-времени. Действительно, если одновременно заменить переменные, относящиеся к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора "количества движения-энергии" в новой системе координат, чтобы получить уравнения движения. Эта схема охватывает, естественно, и релятивистскую механику.

Если теперь взять последовательность одновременных состояний, т.е. положить $\delta t = 0$, то получим выражение

$$\int \Sigma m_i \dot{x}_i \delta x_i,$$

для которого имеет место следующая теорема: если рассматривать замкнутую последовательность траекторий и если взять на этих траекториях состояния, соответствующие какому-либо определенному моменту t, то интеграл $\int \Sigma m_i \dot{x}_i \delta x_i$, взятый по замкнутой последовательности полученных таким образом состояний, не зависит от t. Это и есть определение интегрального инварианта по Пуанкаре.

Картан отмечает следующее важное обстоятельство: ⟨⟨ Замечательно, что если вместо последовательности одновременных состояний мы будем рассматривать последовательность состояний, удовлетворяющих соотношениям

$$\delta x_i = \dot{x}_i \delta t,$$

то тензор $\Sigma m_i \dot{x}_i \delta x_i - h dt$ приводится к элементарному действию Гамильтона

$$dI = \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U \right] dt.$$

Следовательно, интегральный инвариант Пуанкаре и действие Гамильтона представляют собой лишь два различных вида интеграла "количество движения-энергия", хотя с первого взгляда между этими двумя понятиями и нет никакой связи⟩⟩. Доказав, что дифференциальные уравнения движения являются единственными, которые допускают в качестве инварианта интеграл $\int dI$, взятый по любому замкнутому контуру, можно перейти к построению других интегральных инвариантов. Из них очень важное значение имеет интегральный инвариант

$$I = \int\int \Sigma dp_i dq_i, \qquad (3.\ 100)$$

т.е. если дано двумерное многообразие траекторий и на каждой траектории даны состояния, соответствующие определенному моменту времени t, то двойной интеграл (3. 100), распространенный по всем этим состояниям, не зависит от t.

Пуанкаре не ограничился исследованием только инвариантов порядка, равного порядку системы; он показал, что полезно ввести в рассмотрение и более общие инварианты, определяемые интегралами, распространенными на многообразие с каким угодно числом измерений, меньшим порядка системы (линейные, поверхностные и другие интегралы).

7. Механика Гамильтона в развитии физики второй половины XIX в. и первой половины XX в.

Динамика Гамильтона нашла широчайшее применение практически во всех разделах физики. Изложение даже только основных, связанных с этими применениями вопросов невозможно в рамках настоящей книги. За многими подробностями отсылаем читателя к книге [46]. Здесь же дадим только самую краткую характеристику применения динамики Гамильтона в термодинамике, электродинамике, классической и релятивистской теории поля, квантовой механике и теории относительности.

Общими чертами всех так называемых "доказательств" второго начала термодинамики, основанных на аналитической механике (и в первую очередь на механике Гамильтона–Якоби), являются следующие.

1. Предположение, что силы имеют потенциал, и рассмотрение центральных сил, т.е. частного случая потенциальных сил.

2. Произвольное введение диссипативных, не имеющих потенциала сил в том случае, когда равенство $\oint \frac{dQ}{T} = 0$, полученное для обратимых замкнутых процессов, надо обобщить на процессы необратимые и написать неравенство $\oint \frac{dQ}{T} > 0$.

3. Допущение, что координаты и скорости всех частиц являются определенными функциями времени в течение одного стационарного состояния, но с изменением состояния форма зависимости их от времени изменяется. (Как отметил В.А. Михельсон, это обстоятельство вполне соответствует идее вариационного исчисления, почему здесь и применяется варьирование, т.е. сравнение двух бесконечно мало отличающихся движений.)

4. Использование средних значений величин: дело в том, что сопоставление механических величин (координат, скоростей, истинных кинетических энергий движения в данный момент и т.д.) с величинами термодинамическими (объемом, давлением, температурой и т.д.) возможно только с помощью средних величин, ибо только они доступны макроскопическому эксперименту, сопоставимому с макроскопической феноменологической термодинамикой.

Среди предлагавшихся доказательств надо отметить особо те доказательства, которые начинаются с рассмотрения одной материальной точки. В этом случае приходится выдвигать искусственные допущения о характере движения точки, как, например, замкнутость траекторий у Клаузиуса, или говорить о "дисгрегации" одной точки (Больцман) и т.п. Естественно, что попытки таким путем определить состояние системы, поведение которой, по существу, определяется законами статистического ансамбля, оказались неудачными.

Один из крупнейших ученых-физиков XIX в. Г. Гельмгольц (1821–1894) отчетливо сформулировал задачу физического познания так, как она рисовалась механистическому мировоззрению. В известном сочинении "О сохранении силы", вышедшем в 1847 г., он пишет: "Задача физического естествознания, в конце концов, заключается в том, чтобы свести явления природы на неизменные притягивательные и отталкивательные силы, величина которых зависит от их расстояний. Разрешимость этой задачи есть в то же время условие для возможности полного понимания природы" [46, с. 390].

Эту задачу Гельмгольц в 70–80-х годах XIX в. пытался решить с помощью принципа наименьшего действия. При этом он сохранил механическое существо принципа. Однако это ограничение уже отступало у него на задний план, так как при исследовании многих физических систем, как, например, гальванических токов, магнитов, ему не надо было входить в рассмотрение их специальных физических свойств. Зато Гельмгольц уже тогда сделал решительный шаг. Он не стал выводить лагранжиан из энергии как разность кинетической и потенциальной энергий, что делалось до него, а, наоборот, взял лагранжеву функцию за основу в качестве исходной, первичной величины и из нее вывел как все другие законы движения, так и величину энергии.

Гельмгольц указывает, что "известные законы обратимых процессов могут быть фактически выражены в форме уравнений Лагранжа, а следовательно, и в форме теоремы минимальности кинетического потенциала" [14, с. 432].

Однако при изучении общих свойств систем, которые подчинены принципу Гамильтона, "необходимо отбросить старое, более узкое предположение, согласно которому скорости входят только в выражение живой силы и притом в форме однородной функции второй степени; надо исследовать, как будет обстоять дело, если H есть функция любого вида от координат и скоростей".

Таким образом, при исследовании немеханических явлений мы можем руководствоваться принципом Гамильтона, но только необходимо изменить вид входящей в него функции $\mathcal{L}$. Если форма большой группы механических процессов характеризуется тем, что кинетическая энергия есть однородная квадратичная форма скоростей, а потенциальная энергия – функция только координат, то вне пределов механики имеют место и другие соотношения.

По мнению Гельмгольца, "область применения принципа наименьшего действия далеко переросла границы механики весомых тел". Принцип наименьшего действия приобрел универсальный характер, и поэтому он становится важнейшим эвристическим средством. Гельмгольц считал, что этот принцип дает возможность открывать новые законы физических явлений: "Во всяком случае, мне кажется, что всеобщая значимость принципа наименьшего действия настолько не подлежит сомнению, что он может претендовать на большую роль в качестве эвристического принципа и путеводной нити в исканиях формулировок для законов новых классов явлений" [14].

Гельмгольц широко раздвинул границы применения принципа Гамильтона. Он не только применил его ко всем обратимым явлениям, но пытался при его помощи охватить механистической схемой принцип энтропии без введения каких-либо вероятностных соображений. Принцип Гамильтона оказался для Гельмгольца наиболее подходящим средством для разработки того "кинетического" аспекта механицизма, к которому он пришел в 80-х годах XIX в., преодолев "динамические" тенденции, присущие ему в первый период научной деятельности. Гельмгольц применил своеобразный модельный метод, который представляет большой интерес, во-первых, с точки зрения стремления объяснить макроскопические явления скрытыми движениями и, во-вторых, из-за смелого введения в науку ненаблюдаемых реальностей (скрытые движения), о существовании которых мы можем заключать только на основе характера их внешнего проявления.

Методологически скрытые движения представляют собой вариант непознаваемых сущностей, отделенных от их наблюдаемых (и измеряемых) проявлений. Отсюда росла иероглифическая теория познания Гельмгольца, и она же питала развитие концепции скрытых движений.

"Я не хочу спорить о том, что является более ясным: понятие положения в пространстве, или понятие температуры, или электрического заряда – подобный спор был бы беспредметным. Но все же мы сильно выиграли бы в ясности картины, если бы могли посредством представления о движении материальных точек в пространстве, т.е. посредством одного-единственного и единого принципа, объяснить не только все явления движения твердых, жидких и газообразных тел, но и теплоту, свет, электричество, магнетизм, гравитацию. Это было бы яснее, чем употребление для каждой из этих действующих сил природы целого инвентаря таких совершенно необычных понятий, как температура, электрический заряд, потенциал – характеризуем ли мы эти необычные понятия как нечто совершенно самостоятельное или только как разрозненные энергетические факторы, постулируемые для каждой формы энергии отдельно".

Больцман же пошел по пути введения новых, не сводимых к механике понятий (вероятность состояния системы), по пути исследования закономерности не динамического, а статистического типа (разработка статистической механики). Отметим здесь только основную идею статистической механики в интересующем нас аспекте.

В статистической механике Гиббса фундаментальное значение имеет гипотеза о том, что все механические системы, входящие в один и тот же ансамбль, будут иметь одни и те же динамические свойства. Иначе говоря, предполагается, что для всех систем одного и того же ансамбля энергия будет одинаково зависеть от обобщенных координат и обобщенных импульсов системы и что, следовательно, для всех систем внешние силы и положения тел, окружающих систему, одни и те же. В этом смысле нет индивидуальных различий между системами; существует лишь различие их внутренних координат и импульсов.

Гиббсово построение статистической механики исходит из канонических уравнений и функции Гамильтона. Он рассматривает общий случай, когда силы, действующие на систему, не являются консервативными, т.е. для них не существует потенциальной функции. Кроме того, Гиббс рассматривает случай, когда потенциал существует, но потенциальная энергия зависит (кроме других переменных) еще от внешних координат.

В XIX в. многие физики склонялись к тому убеждению, что наиболее правильный способ употребления понятия потенциальной энергии – это устранение его из физики. Одним из стимулов для такой точки зрения послужило изучение волчков и гироскопов в механике. Если они приводятся в быстрое вращение, то, как известно, система ведет себя так, как если бы она находилась под действием сил, производимых каким-то незримым источником. Математическая теория этого движения была развита в 1877 г. Раусом, который показал, что во всех таких системах (получивших название систем с игнорируемыми – исключенными – координатами) кинетическая энергия вращения производит точно такие же эффекты, какие должна была вызвать дополнительная потенциальная энергия. В 1886–1888 г. Дж.Дж. Томсон (1856–1940) использовал результаты Рауса для того, чтобы показать, что различные виды потенциальной энергии, наблюдаемые в природе, могут рассматриваться как наблюдаемый эффект скрытых движений: кинетическая энергия их не воспринимается нами прямо, но ее существование приходится постулировать, причем она такова, что потенциальная энергия, соответствующая ей согласно теории Рауса, совпадает с действительно наблюдаемой потенциальной энергией. Дж.Дж. Томсон рассмотрел с помощью этого метода следующие физические задачи: действие температуры на свойства тел, электродвижущая сила, вызванная разностью температуры, испарение, свойства разведенных растворов, диссоциация, общий случай химического равновесия, действия, производимые изменением физических условий на коэффициент химической связи, изменение состояния из твердого в жидкое, связь между электродвижущей силой и химическим изменением, необратимые эффекты.

Многообразие различных химических, термодинамических, электрических задач Дж.Дж. Томсон пытался рассмотреть с помощью единого метода составления лагранжевой функции. Отметим, что Дж.Дж. Томсон не применяет этот метод к силовым полям, т.е. не рассматривает наиболее плодотворного применения лагранжевой функции в виде интеграла принципа Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в той новой по существу форме, которая была дана ему Гамильтоном и Гельмгольцем, стал важнейшим законом физики, о котором говорил М. Планк (1858–1947) в своих лекциях по теоретической физике: "Все обратимые процессы, будь они по природе механического, электродинамического или термического характера, – все они подчинены одному и тому же принципу, дающему однозначный ответ на все вопросы, касающиеся хода процесса. Этот закон не есть принцип сохранения энергии, который хотя и приложим ко всем явлениям, но определяет их ход не однозначно: это принцип более общий – принцип наименьшего действия" [46, с. 439].

Несмотря на все усилия замечательных ученых, второе начало термодинамики и законы молекулярного движения не удалось подчинить единому принципу классической механики. Иначе говоря, не удалось объяснить, исходя только из классической механики, тот круг явлений, который для своего движения потребовал создания статистической механики. Это было первое большое поражение механистической концепции, за которым скоро последовали и другие.

Рассмотренные в этой главе в целом неудачные попытки кажутся нам теперь во многом наивными, хотя ясно, что на уровне физики второй половины XIX в. они были необходимы. Эти попытки, как это часто бывает в истории науки, хотя и не вошли в классическую теоретическую физику, все же дали науке ряд методов и идей, нашедших продуктивное применение в совершенно других областях физики.

Одним из последних могикан классической традиции английских физиков – В. Томсона, Фарадея, Мак-Куллаха, Максвелла, которые разрабатывали физические модели на основе аналогии (вспомним хотя бы слова В. Томсона "объяснить – это значит построить механическую модель"), – является Дж. Лармор (1847–1942).

Лармор, как и его предшественники, декларирует, что "конечной целью теоретической физики является сведение законов изменений в физическом мире к *динамическим принципам*" [115, с. 448].

Принцип наименьшего действия – основное в общей динамике. Благодаря своей вариационной форме этот принцип нашел чрезвычайно широкое применение, так как почти всякую физическую проблему можно выразить "как вариационную задачу для того, чтобы облегчить сведение к динамике таких физических теорий, в которых внутренний динамический механизм более или менее скрыт от непосредственного наблюдения" [Там же, с. 450]. Роль принципа наименьшего действия, по мнению Лармора, состоит в том, что если законы какого-либо из отделов физики сформулированы в виде вариационной теоремы, то проблема фактически сводится к динамическому типу, исследование которого исчерпывает описание данного физического явления.

В большой работе Лоренца, опубликованной в 1903 г., "Contributions to the theory of electrons" находим главу, носящую характерное название "Theorems corresponding to the principle of D'Alembert and that of least action" ("Теоремы, соответствующие принципу Д'Аламбера и наименьшего действия").

Пожалуй, этим все сказано, но новых результатов получить не удалось.

Густав Ми (1868–1957) впервые указал на возможность нелинейной электродинамики. Его теория страдала тем недостатком, что она не была калибровочно-инвариантной[37], так как в его уравнения входили в явном виде электромагнитные потенциалы. Однако у него мы находим две важные идеи, которые сыграли существенную роль в развитии общей теории относитель-

[37] Как известно, при заданном электромагнитном поле мировой вектор потенциала определяется неоднозначно, так как к нему можно прибавить произвольное градиентное поле без того, чтобы нарушились уравнения поля. Это преобразование мирового вектора потенциала путем прибавления градиента является калибровочным преобразованием (иногда называемым градиентным преобразованием). Это преобразование, конечно, не имеет ничего общего с преобразованием координат. Отсюда требование калибровочной инвариантности.

ности и теории квантованных полей. Это, во-первых, идея построения новой обобщенной электродинамики путем использования различных инвариантов поля и, во-вторых, отчетливо выраженная идея единой теории поля, в которой характеристики частиц должны были получаться из полевой картины.

Хотя доказать возможность механического толкования электрических явлений, как и следовало ожидать, не удалось, однако было, в частности М. Планком, показано, что и значение принципа наименьшего действия распространяется далеко за пределы механики в узком смысле слова и что, так как этот принцип охватывает собою все обратимые процессы, то он может быть принят в основание общей динамики [14].

Такова точка зрения Планка, основной методологической идеей которого была идея единой физической картины мира. В начале XX в. единственной реальной возможностью не дать физической картине мира распасться на отдельные внутренне разобщенные элементы было использование принципа наименьшего действия, или принципа Гамильтона, в качестве объединяющего начала. Именно эта роль отводится ему М. Планком.

Как отметил впервые М. Планк [46], уравнения движения релятивистской механики можно получить из вариационного принципа. Введя функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \qquad (3.101)$$

легко получить

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathcal{L} + \mathbf{k}\delta \mathbf{r})dt = 0, \qquad (3.102)$$

где $\mathbf{k}$ – четырехмерная сила Минковского; в выражении (3.102), так же как и в классической механике, t_0, t_1 и конечные точки пути заданы.

В теории относительности "действие" является инвариантом. А. Эддингтон (1882–1944), отметив, что законы гравитации, механики и электромагнитного поля удалось свести к принципу Гамильтона, ставит вопрос о причинах той большой роли, которую играет в физике величина "действия". Основание для этой важной роли он усматривает в том, что, говоря "о непрерывной материи, находящейся в некоторой точке пространства и времени, мы должны употребить слово "плотность". Плотность, умноженная на объем некоторой части пространства, дает нам массу, или, что то же самое, энергию. Но с нашей пространственно-временной точки зрения гораздо большее значение имеет плотность, умноженная на четырехмерный объем некоторой части пространства-времени; это и есть действие" [46, с. 493].

Принцип Гамильтона позволял объединить теорию в виде последовательного и в какой-то степени логически замкнутого изложения, как бы "аксиоматизировать" физику. В этом направлении было сделано много попыток физиками и математиками. Наиболее интересную попытку аксиоматизировать физику сделал в 1915 г. знаменитый математик Д. Гильберт [14].

Все законы поля теории относительности могут быть объединены в одном вариационном принципе, особенностью функции действия которого является возможность разделить ее на две части, из которых одна независима от материальных переменных, а другая – от производных $\mathcal{L}$.

Таким образом, хотя при применении вариационных принципов механики в классической и релятивистской теориях поля не было получено новых существенных принципиальных результатов, однако этот цикл исследований имел принципиальное значение.

Во-первых, был выяснен фундаментальный, инвариантный смысл вариационных принципов механики, который делает их, по существу говоря, одним из основных законов макроскопической физики и превращает само их наименование "вариационные принципы механики" скорее в дань исторической традиции, чем в выражение их подлинного содержания и значения.

Во-вторых, была разработана совокупность приемов, раскрывающих эвристическое значение этих принципов: поиски инвариантных относительно тех или иных преобразований лагранжианов различных видов и нахождение таким путем уравнений полей (или единого поля) и уравнений движения.

Эти результаты нашли в 30–50-х годах XX в. широкое и углубленное применение в квантовой электродинамике и квантовой теории полей.

Воистину необозримо количество научных статей, посвященных методологическому осмыслению вариационных принципов, анализу различных сторон их математической формы, расширению и ограничению их применения в точном естествознании и решению или постановке на их основе огромного количества конкретных задач в физике, физической химии, технологии и технике.

Мы уже не раз подчеркивали в этой главе, что возможность выразить уравнения движения в лапидарной и инвариантной форме, аналогичной форме принципа Гамильтона, имеет место во многих отделах физической науки. Если условно называть основные уравнения электродинамики в форме Максвелла или уравнения квантовой механики в форме Шредингера "уравнениями движения", то для них, так же как для уравнений движения Ньютона, можно сформулировать соответствующие вариационные принципы. Хотя понимание электродинамики или квантовой механики отнюдь еще не обогащается таким образом и с первого взгляда дело сводится к чисто формальной операции, однако в действительности здесь открываются новые возможности познания того или иного круга физических явлений. В самом деле, если изложить математическую теорию какой-либо области частично изученных физических явлений, положив в основу соответствующий вариационный принцип, то это изложение по своей внутренней структуре и форме будет аналогично подобным же изложениям теорий других физических областей. Представим себе, что в одной из этих теорий эксперимент дал прямые или косвенные указания на существенную необходимость в той или иной степени изменить физическое содержание этой теории. Тогда аналогия во внутренней структуре построения теорий с помощью вариационных принципов может ориентировать ученого в отношении того, как надо произвести изменения в физических теориях других отделов физической науки. Как пример можно указать на проблему электромагнитного излучения элементарных частиц. После того как в начале XX в. установили их квантовое строение, было разработано квантование для элементарных частиц, поведение которых описывалось классической аналитической механикой. Если изложить эту теорию, основываясь на принципе Гамильтона, а при построении теории электромагнитного поля исходить из лагранжиана и вариационного принципа, то методы, разработанные для квантования элементарных частиц, можно будет использовать для анализа проблем квантовой электродинамики и квантовой теории полей и элементарных частиц и для дальнейшего развития синтеза микро- и макрофизики и космологии.

Подводя итоги, можно сказать, что вариационные принципы механики не только выражают в простой инвариантной форме уравнения движения и уравнения многих полей, но и заключают в себе синтез дискретного и континуального аспектов движения и являются выражением обобщенного принципа причинности в физике.

Глава 4

Сага о кватернионах[1]

1. До сотворения кватернионов

В начале XIX в. в работах нескольких ученых появилась геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций с ними. Авторы таких исчислений с направленными отрезками *плоскости* – К. Вессель, Ж. Арган, Г. Беллавитис – пытались развить и теорию гиперкомплексных чисел, которые изображались бы точками трехмерного пространства. Эти поиски начались в 1796–1806 гг., когда и функций-то комплексной переменной еще не было, когда еще не родились Вейерштрасс и Риман, когда еще не было ни публикаций Коши, ни рецензий на них: "Выдумки Коши – вздор, способный запутать умы..."; "Мы оставим в стороне формулы метафизического происхождения, изобретателем которых был Коши и которые никто и никогда не будет употреблять..."

Самая ранняя, а также наиболее последовательно и далее всего развитая теория "отрезков в пространстве" принадлежала Каспару Весселю (1745–1818). Он представил Королевской академии наук в Копенгагене статью "Об опыте аналитического представления направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников" (1797 г.), которая была опубликована в мемуарах академии в 1799 г. Статья неизвестного математикам норвежского землемера не вызвала никакого внимания. В 1895 г. ее "открыли" С. Христенсен и Ж. Гуэль; статью опубликовал С. Ли (1896 г.), а затем – во французском переводе – Валентинер и Тиль (1897 г.).

Вессель представлял "аналитически" отрезок плоскости выражениями $x + \epsilon y$ или $r\ (\cos v + \epsilon \sin v)$; он определил сумму направленных отрезков как замыкающую соответственной ломаной линии, показал, как производить действия с такими выражениями, и дал геометрическую интерпретацию всех алгебраических операций, в том числе и умножения

$$(x + \epsilon y)\ (\cos u + \epsilon \sin u) = (x \cos u - y \sin u) + \epsilon (y \cos u + x \sin u)$$

как вращения отрезка $x + \epsilon y$ на угол u.

Затем он перешел к построению аналогичной теории для направленных отрезков трехмерного пространства: $x + \epsilon y + \eta z$. Вессель определил $\epsilon\epsilon = \eta\eta = -1$ и попытался найти закон умножения

---

[1] Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность профессору И.Г. Башмаковой за полезные обсуждения и советы по работе *(Н.В. Александрова)*.

чисел вида $x+\epsilon y+\eta z$. Как и все математики после него, он встретил основное препятствие: как определить произведение $\epsilon\eta$. Вессель обошел эту трудность следующим приемом: преобразование одного вектора пространства в другой он представлял как два последовательных вращения вокруг оси Oy и вокруг оси Oz. Он заметил, что при вращении отрезка вокруг оси Oz, например, составляющая по оси вращения остается неизменной, а составляющая $x+\epsilon y$ вращается в плоскости xOy, и результат умножения $(x+\epsilon y+\eta z)(\cos u+\epsilon\sin u)$ должен быть таким: $\eta z+(x\cos u-y\sin u)+\epsilon(y\cos u+x\sin u)$.

Вессель никогда не рассматривал вращения вокруг оси Ox или вокруг произвольной оси, дабы не определять произведений $\epsilon\eta$ и $\eta\epsilon$. Этот ход рассуждений Весселя (с незначительными вариациями) повторили У.Р. Гамильтон и Дж.Т. Грейвс).

В 1806 г. швейцарский математик, живший в Париже, Жан Арган (1768–1822) опубликовал "Очерк о способе представления мнимых количеств геометрическими построениями". Здесь были даны "современное" геометрическое представление сложения и умножения комплексных чисел и некоторые применения к алгебре, геометрии и тригонометрии. В 1813 г. Ж. Франсэ (1775–1838) привлек внимание математиков к "Очерку" Аргана. В журнале "Annales" Жергона развернулось обсуждение и этого мемуара, и способов обобщения метода на пространственный случай, в котором приняли участие Франсэ, Жергон, Арган, Сервуа... Любопытно, что Арган предполагал ввести "новую мнимость, $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$", и рассматривать точки трехмерного пространства как изображения чисел $x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Наконец, в 1828 г. в Англии и Франции были опубликованы, по-видимому, независимо друг от друга и от "Очерка" Аргана "Трактат о геометрическом представлении квадратных корней из отрицательных величин" Джона Уоррена (1796–1852) и "Истинная теория отрицательных и так называемых мнимых величин" Муррея. Этот последний математик писал о своих попытках распространить теорию на случай трехмерного пространства — это, кажется, все, что сегодня о нем известно.

Все эти исследования были сравнительно мало известны; многие математики узнали о геометрической интерпретации комплексных чисел из статьи К. Гаусса (1777–1855) "Теория биквадратичных вычетов" от 1831 г. (правда, Гамильтону эта работа стала известной лишь в 1852 г.).

Здесь Гаусс несколько раз разными словами объясняет такое построение: нужно разбить неограниченную плоскость на квадраты двумя системами параллельных, взаимно перпендикулярных прямых и рассмотреть точки пересечения. Каждая такая точка имеет четыре "соседних". Если переход к одной из них обозначить через +1, то переход к "противоположной" будет –1, а переходы к двум другим соседним точкам определяют как $+i$ и $-i$. Итак, повторяет Гаусс, +1, –1, $+i$, $-i$ нужны для различения "налево", "направо", "вперед", "назад", и заканчивает: «Если +1, –1, i назвать не "положительная, отрицательная, мнимая", а "прямая, обратная, боковая единицы", то можно избежать какой бы то ни было неясности (темноты) в речи» [85, т. 2, с. 178].

Гаусс замечает, что следы такого представления мнимых величин внимательный читатель найдет в его работе 1799 г. Полагают, что к 1819 г. относятся заметки в его "Записных книжках" о "мутациях пространства", т. е. наметки, наброски теории гиперкомплексных чисел, аналогичной исчислению кватернионов Гамильтона. Эти заметки опубликованы в "Werke" Гаусса (1900 г.). Вторая, более поздняя серия записей содержит два отрывка, которые, собственно говоря, подводят итог всему, написанному Гауссом ранее. Приведем полностью фрагмент 1°.

"Уже в течение долгого времени я привык выражать каждую мутацию пространства четырьмя величинами

$a, b, c, d,$

комплекс которых я называю мутационной шкалой (под мутацией я понимаю преобразование пространства в некоторое другое пространство, связанное с величинами первого подобием). Одновременно предполагается, что одна точка пространства, преобразующегося в другое, остается закрепленной или абсолютно неподвижной; эту точку можно принять за нулевую" [Там же, т. 8, с. 361].

Следующий отрывок посвящен объяснению геометрического смысла этих четырех величин. Формулы Гаусса только обозначениями отличаются от соответствующих формул теории кватернионов Гамильтона.

В ранних записях (1819 г.) Гаусс рассматривает преобразование, состоящее в последовательном выполнении двух таких "мутаций". Здесь и дается определение произведения двух шкал (аналогичное произведению двух кватернионов), и здесь же Гаусс отмечает, что такое произведение некоммутативно. Весь фрагмент состоит из нескольких строк.

По лаконичности, целенаправленности, ясности постановки задачи и решения в предыстории теории кватернионов нет ничего равного этим записям. Но исчисления тоже нет, до этого дело не дошло.

На развитие векторных методов большое влияние оказала книга Л. Карно (1753–1823) "Геометрия положения" (1803 г.). Карно сформулировал определение суммы векторов, он рассматривал ориентированные площади, различал направление обхода контура; эти идеи были уточнены А. Мебиусом (1790–1868) и после его "Барицентрического исчисления" (1827 г.) сделались классическими в математике. Влияние Карно проявилось и в языке теории: вместе с Карно сумму векторов стали называть геометрической суммой (а произведение – в дальнейшем – геометрическим произведением). А самое главное – то, что работа его была широкоизвестной, и его идеи сразу же стали достоянием науки и нашли много последователей, среди которых Сен-Веннан, Резаль, Беллавитис. "Метод эквиполенций" Беллавитиса (1803–1880), подытоживший публикации 1832–1854 гг., представляет собой исчисление, объектами которого являются направленные отрезки плоскости. Беллавитис делал долгие безуспешные попытки распространить учение на трехмерное пространство. Это исчисление, оперировавшее с "геометрическими сущностями", имело, таким образом, принципиально иную основу, нежели алгебра и теория функций комплексной переменной, поэтому "теория эквиполенций" идейно ближе "Линейному учению о протяженности" Г. Грассмана (1809–1877).

Об этих попытках ученых разных стран, о том, что именно было достигнуто к 1830 г., к началу исследований Гамильтона, и что из этого ему было известно, об истории своего открытия Гамильтон подробно и доверительно рассказал в предисловии к "Лекциям о кватернионах" (1853 г.); он не ведет при этом читателя логически прямым путем, а заводит его в те же тупики, в которые попадал и сам, и достигает временами прямо-таки драматического эффекта.

Несмотря на то что Гамильтон заранее объявил, что не имеет "претензии писать историю науки и даже историю одного раздела математических рассуждений", в предисловии приведен не только "отчет о развитии собственных мыслей", но и почти исчерпывающий обзор всех работ по комплексным и гиперкомплексным числам. К 1830 г. Гамильтон знал лишь работы английских авторов: Уоллиса, Уоррена, Бюэ, Гомпертца[2]; к 1853 г.

---

[2] В "Трактате об алгебре" (1685 г.) Джон Уоллис (или Валлис, 1616–1703) рассматривал $\sqrt{-1}$ как среднее геометрическое отрезков +1 и –1. Бюэ (1748–1826) – аббат, эмигрировавший из Франции, опубликовал в "Philosophical Transactions" (1806 г.) мемуар, который, по современной оценке, не представляет большой ценности.

Б. Гомпертц (1779–1865) – английский математик, происходил из семьи эмигрантов из Голландии. Он осваивал математику главным образом по работам Ньютона, Уоллиса, поэтому де Морган назвал его "звеном между старым и новым".

ему были известны все исследования, кроме двух, самых важных: он не знал о статье Весселя и не мог знать о размышлениях Гаусса.

2. Гамильтон открывает кватернионы

Всякая попытка хотя бы связно изложить правила действий с комплексными числами неминуемо приводила к необходимости расширения понятий "величина", "количество", употребляемых в алгебре. Уоррен, например, четко сформулировал проблему: "Должны быть созданы другие определения и аксиомы, такого содержания, чтобы их с одинаковым успехом можно было применять к обоим классам количеств – действительным и мнимым" (Цит по: [32, с. 276]).В работах алгебраистов того времени обоснование "теории мнимых величин" и изучение алгоритма алгебры – анализ алгебраических операций и свойств объектов, с которыми оперируют в алгебре – теснейшим образом связаны. Да и понятия (как и термины) ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности возникли именно в то время и именно в тех работах (названия ввели Сервуа и Гамильтон). Ближайшее математическое окружение Гамильтона – алгебраисты – это братья Грейвс, де Морган, Пикок и др. Поэтому и интерес Гамильтона к этому кругу вопросов не является таким уж неожиданным и необъяснимым.

Впервые Гамильтон обратился к этим проблемам около 1830 г.

Отправным понятием для Гамильтона было представление о времени, моменты времени $A, B, \ldots$ он мыслил отложенными на числовой оси; ясно, что такое $B - A = +a$ – это промежуток времени, длящийся от момента A до момента B; A предшествует B; этот промежуток Гамильтон называет "шаг во времени". Ясен смысл и +2a, +3a,..., +*n*a; а также и –a –это "обращенный шаг", знак минус означает "обращение" времени: если +2a – промежуток некоторой длительности, протекающий *с* момента A, то –2a – промежуток времени той же длительности *до* момента A; тогда –3(–2a) – промежуток времени, обращенный еще раз, он должен вновь "начинаться" в момент A и "быть направленным в будущее", а по длительности он в 6 раз дольше, чем a. Гамильтон считал, что только после этих рассуждений можно отделить числовые коэффициенты от промежутков времени и допустить действия с ними, так как теперь *доказано*, что $-3 \cdot (-2) = +6$. Только теперь действия с относительными величинами получили твердую основу.

Далее, вполне возможно мыслить о *паре* моментов (A, B), о паре шагов (a_1, a_2) как о едином объекте (moment-couple, step-coup-

1e). Некоторые операции с парами шагов не нуждаются в пояснениях, но вот деление пар шагов производится "естественно" и "очевидно" в одном-единственном случае – при пропорциональности "первых и вторых шагов", тогда

$$\frac{(a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2)}{(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)} = a.$$

Но "...мы оказываемся не в состоянии определить такое отношение во всех других случаях... Дух (spirit) настоящей теории пар приводит нас, однако, к мысли, что отношение... возможно, может быть выражено в общем случае парой чисел" [92, т. 3, с. 80].

Как и в предыдущем случае, все операции между *числовыми парами* Гамильтон определяет через операции между парами шагов во времени (причем не самым рациональным образом). В результате он заключает, что числовая пара может быть представлена через "первую и вторую числовые единицы": $(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1\ (1, 0) + a_2\ (0, 1)$.

1. Действительное число рассматривается как частный случай числовой пары $(a, 0)$, мнимое число – пара $(0, b)$, а комплексное – (a, b).

2. Известно, что $(a, 0)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2)$.

Нужно понять, узнать, установить закон умножения числовой пары (a_1, a_2) на пару шагов $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)$.

3. Если такой закон будет найден, из него можно извлечь и закон умножения числовых пар:

$(a, b)\ (c, d)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a, b)\ (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2) = (\mu, \nu)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)$, следовательно, $(a, b)\ (c, d) = (\mu, \nu)$.

При "выводе" этих законов контрольной точкой было правило умножения комплексных чисел. Кавычки здесь уместны, так как несколькими страницами текста Гамильтон пытался убедить, что закон умножения числовых пар $(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ является следствием распределительного свойства умножения, а также "условий отделимости" (числовых коэффициентов от "временных множителей")... а не постулирован самим Гамильтоном.

Почти в это же время к аналогичному представлению комплексного числа упорядоченной парой действительных чисел пришел Я. Бойяи (1837 г.), который не опубликовал свои исследования.

Таким образом, современная традиция аксиоматического построения теории комплексных чисел ведет свое происхождение от гамильтоновой теории. Этот факт очень скоро был забыт, хотя вначале и был признан: например, книга казанского математика В.П. Максимовича (1850–1889) была озаглавлена

"Новая теория гамильтоновых пар и соответственное обобщение теории функций мнимого переменного" (1884 г.). Названия "гамильтонова пара", "гамильтонова теория пар" употреблялись очень недолго. Источник быстро забыли, и теория функций комплексной переменной стала излагаться строго логически, без указаний на исторические корни.

Следующим этапом в исследованиях Гамильтона была теория троек шагов и троек чисел – "триплетов". Вначале он ввел "первую, вторую и третью единицы" 1_1, 1_2, 1_3, или (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) и записывал триплет в виде $r1_1 + s1_2 + t1_3$. В 1835 г. он пришел к другой "конструкции", которая с точностью до обозначений повторила идеи Весселя. Год спустя к таким же соображениям пришли друзья Гамильтона братья Джон (1806–1870) и Чарлз (1812–1899) Грейвс. Последний и ввел в употребление, кроме i, вторую мнимую единицу j (абсолютно аналогичные мнимым единицам и операторам ϵ и η Весселя); он представлял "линию в пространстве элегантным экспоненциальным выражением $re^{il}\ e^{j\lambda}$" (по словам Гамильтона). Приняв эти символы (и добавив к ним впоследствии следующую букву алфавита k), Гамильтон увековечил их – они сохранились в современном векторном исчислении в виде ортов i, j, k.

Задача умножения триплетов $(x_1 + iy_1 + iz_1)(x_2 + iy_1 + jz_2)$ надолго задержала Гамильтона. Когда он вдруг (после тринадцати лет напряженных раздумий!) заметил, что: 1) комплексное число $x + iy$ содержит столько же слагаемых, сколько параметров нужно для описания преобразования вектора (угол и коэффициент растяжения), и 2) что вращение с растяжением отрезка в пространстве характеризуется *четырьмя* величинами (угол поворота, коэффициент растяжения и ось вращения задается двумя направляющими косинусами или пропорциональными им коэффициентами), – тогда Гамильтон решил, что гиперкомплексные числа должны состоять не из трех слагаемых, а из четырех! Т. е. нужно строить теорию четверок – кватернионов, ввести еще одну мнимую единицу k и рассматривать триплеты «только как неполную форму чисел $xi + yj + zk + u$». Ход своих мыслей Гамильтон записал в тот же вечер (16 октября 1843 г.) и сообщил об открытии на следующий день Дж. Грейвсу.

Новый образ мыслей был совершенно неожиданным для друзей Гамильтона. "Кватернионы подействовали как шок на тех, с кем он переписывался. Реакция Джона Грейвса и Августа де Моргана... передает их изумление... Грейвс определенно не считал, что Гамильтону позволительно *творить* кватернионы; он не мог выдвинуть никаких логических возражений против того, что сделал Гамильтон. И все-таки это удручало (graveled) его" [96, с. 300].

Несмотря на такую первую реакцию, де Морган, Грейвс и Кэли оценили важность нового подхода и тотчас же использовали его: Дж. Грейвс в течение двух месяцев нашел гиперкомплексные числа, составленные из восьми элементов, которые он назвал "октавами" (octaves). Занятый своими исследованиями, Гамильтон не прочел и не опубликовал своевременно это сообщение (до лета 1844 г.), а за это время октавы вновь открыл Кэли (1821–1895), с именем которого они связаны в математике.

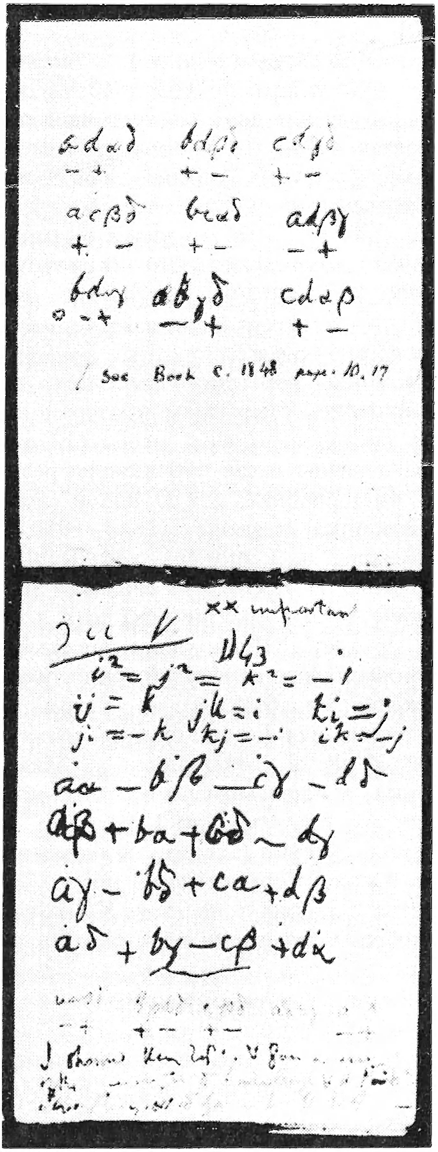
Модификацию рассуждений Гамильтона применил затем Ч.С. Пирс (1880 г.) и, может быть, даже Г. Фробениус в статье "О линейных подстановках и билинейных формах" (1878 г.).

Итак, десятилетние попытки Гамильтона развить теорию триплетов завершились открытием кватернионов. Сообщение Академии наук последовало через месяц (13 ноября 1843 г.), и Гамильтон немедленно начал публикацию результатов: серии сообщений "О кватернионах, или О новой системе мнимых в алгебре" в "Philosophical Magazine "(1844–1850 гг.) и "О символической геометрии" в "Cambridge and Dublin Mathematical Journal" (1846–1849 гг.). Обе эти серии (одна из 18, другая из 10 сообщений) не были окончены, хотя в обеих обещано: "Продолжение следует". Публикации доставляют поучительную картину формирования понятий, развития методов, поисков для приложений, выработки языка, "стиля" теории...

Так как в теории пар Гамильтона числовые пары (a_1, a_2) как комплексные числа представляли отрезки на плоскости (т. е. геометрию), а пары моментов, пары шагов очевидным образом связаны со временем, то Гамильтон считал, что его теория неразрывно сочетает алгебру и геометрию. Он надеялся осуществить такой же органический синтез алгебры и геометрии пространства в теории триплетов. К его восторгу, "на самом деле" алгебра и геометрия пространства объединялись в кватернионах совсем иным способом – суммой двух слагаемых $u + (ix+jy+kz)$. Уже само наличие такой связи воодушевляло Гамильтона и, казалось, гарантировало создание универсального исчисления, охватывавшего всю математику и всю физику. Гамильтон предполагал даже (в 1846 г.) заменить слово "кватернион" новым – "граммарифм", чтобы подчеркнуть, что налицо сумма линии ($\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta'$) и числа ($'\alpha\rho\iota\theta\mu o'\zeta$).

Гамильтон установил закон умножения кватернионов, введя правила:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1,$$
$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik. \qquad (4.1)$$



Записная книжка, в которой Гамильтон впервые записал основные формулы произведения кватернионов

Основное препятствие было преодолено. Теория родилась.

В первой же статье Гамильтон вводит новую терминологию и обозначения, знакомые нам по векторному исчислению: "Алгебраически *действительную* часть... можно получить как значения, содержащиеся на одной *шкале* (scale) последовательности чисел от $-\infty$ до $+\infty$; поэтому мы будем называть ее *скалярной частью* и образуем для нее символ-приставку перед символом кватерниона, характеристику Scal. или просто S. С другой стороны – алгебраически мнимая часть (будучи геометрически представлена прямой линией или радиусом-вектором, которые для каждого определенного кватерниона имеют, вообще говоря, определенную длину и направление в пространстве) может быть названа *векторной частью* или просто вектором кватерниона и может быть обозначена приставкой-характеристикой Vect. или V. Следовательно, мы можем сказать, что кватернион есть, вообще говоря, сумма своих скалярной и векторной частей, и написать $Q = \mathrm{Scal.}\ Q + \mathrm{Vect.}\ Q = \mathrm{S.}\ Q + \mathrm{V.}Q$" [92, т. 3, с. 237]. В первые годы Гамильтон на равных правах использовал выражения "действительная и мнимая части" – "скалярная и векторная части"; но уже через три года в язык теории прочно вошла новая терминология[3]. Слово "vector" Гамильтон ввел впервые, чтобы обозначить "шаг от точки A к точке B... потому что его можно рассматривать как работу, задание (work, task) по транспортированию или переносу (по-латыни vehere) подвижной точки из начального положения в ... конечное" [95, с. 15]. А еще встречается и такое определение: "... вектор или направленная прямая в трехмерном пространстве..." [92, т. 3, с. 279].

Другое представление кватерниона, аналогичное показательной форме комплексного числа, тесно связано с задачей вращения вектора в пространстве, подсказавшей необходимость перехода от триплетов к кватернионам. Оказалось, что поворот вектора ρ вокруг некоторого единичного вектора α на угол 2θ осуществляется следующими операциями[4]:

$$(\cos\theta + \alpha\sin\theta)\,\rho(\cos\theta - \alpha\sin\theta) = q\rho q^{-1}.$$

Поэтому член $\cos\varphi + \alpha\sin\varphi$ назван "верзором". Для длины вектора Гамильтон ввел название "тензор", "чтобы связать это

---

[3] Таким образом, обозначения S.q и V.q исторически предшествовали общепринятым в ТФКП $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$, которые введены Вейерштрассом, возможно, не без влияния теории кватернионов.

[4] С помощью *одного* множителя такое преобразование можно представить только тогда, когда поворот происходит в плоскости, перпендикулярной оси вращения: например, $i \cdot j = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)\cdot j = k$. В этом случае оператор (i) называется "квадрантальным верзором".

понятие с действием растяжения", и обозначение Tρ. Для кватерниона $q = u + ix + jy + kz$ тензор $\sqrt{u^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Итак, $q = \mathrm{T}q \cdot \mathrm{U}q$ (от "unit" – единица).

Наконец, аналогом тригонометрической формы комплексного числа является представление кватерниона в виде $q = \mathrm{T}q(\cos\varphi + \alpha\sin\varphi)$.

Гамильтон обозначал векторные величины греческими буквами, а скалярные – латинскими, чтобы с первого взгляда различать их (исключения составляют единичные векторы i, j, k и число π).

При перемножении двух векторов, выполненном по правилам (4.1), получается следующий результат:

$$\sigma\sigma' = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k) = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + \\ + i(y_1 z_2 - y_2 z_1) + j(z_1 x_2 - z_2 x_1) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

В векторной части произведения ($\mathrm{V}.\sigma\sigma'$) мы узнаем современное векторное произведение. А скалярная часть, $\mathrm{S}\sigma\sigma' = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$, отличается от "нашего"скалярного произведения знаком именно из-за своего "кватернионного происхождения". Алгебра кватернионов отличается от обычной алгебры лишь некоммутативностью произведения[5]: по любым двум элементам произведения однозначно определяется третий, и произведение обращается в нуль, только если один из сомножителей равен нулю.

По аналогии с терминами Коши для комплексных чисел кватернионы $q = u + ix + jy + kz$ и $\mathrm{K}q = u - ix - jy - kz$ названы "сопряженными"(Konjugate). Немедленно следуют простейшие тождества:

$$q + \mathrm{K}q = 2\mathrm{S}.q, \quad q - \mathrm{K}q = 2\mathrm{V}.q,$$

а также очевидные $\mathrm{V}.\alpha = \alpha$, $\mathrm{S}.\alpha = 0$, $\mathrm{S}.a = a$, $\mathrm{V}.a = 0$ и т. п. Аналогия на этом и кончается: в 1830–1843 гг. не было еще примера, которому можно было подражать; созданная Гамильтоном теория не похожа ни на теорию функций комплексной переменной, ни на современное векторное исчисление, рожденное ею.

Набор кватернионных тождеств возрастал со скоростью лавины; использование их и создало те специфические методы, свойственные теории кватернионов, о которых Ф. Клейн писал: "Легкость и изящество, с которыми получают на этом

---

[5] Антикоммутативность векторного произведения произвольных векторов (не i, j, k) следовала автоматически (что и свойственно теории кватернионов): $\mathrm{V}.\alpha\alpha = 0$ для любого вектора α, в том числе и $\mathrm{V}.(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = 0$, $\mathrm{V}.(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta\beta) = 0$, $\mathrm{V}.\alpha\beta + \mathrm{V}.\beta\alpha = 0$, $\mathrm{V}.\alpha\beta = -\mathrm{V}.\beta\alpha$.

пути глубоко содержательные теоремы, действительно изумительны; этим и объясняется восхищение кватернионистов своей системой, которая . . .вскоре была ими расширена за разумные границы в ущерб не только для математики в целом, но и для самой теории кватернионов. Такому развитию способствовал и высокоразвитый формальный аппарат системы, богато питаемый символикой обозначений, внушавший глубокое уважение, доходившее до благоговения. Возникло много больших надежд на дальнейшее систематическое развитие теории кватернионов, наподобие теории обыкновенных комплексных чисел. . . Крайней целью было создание. . . теории функций для кватернионов, от которой ожидали совершенно новых, необычайно широких результатов для всей математики" [28, с. 227–229].

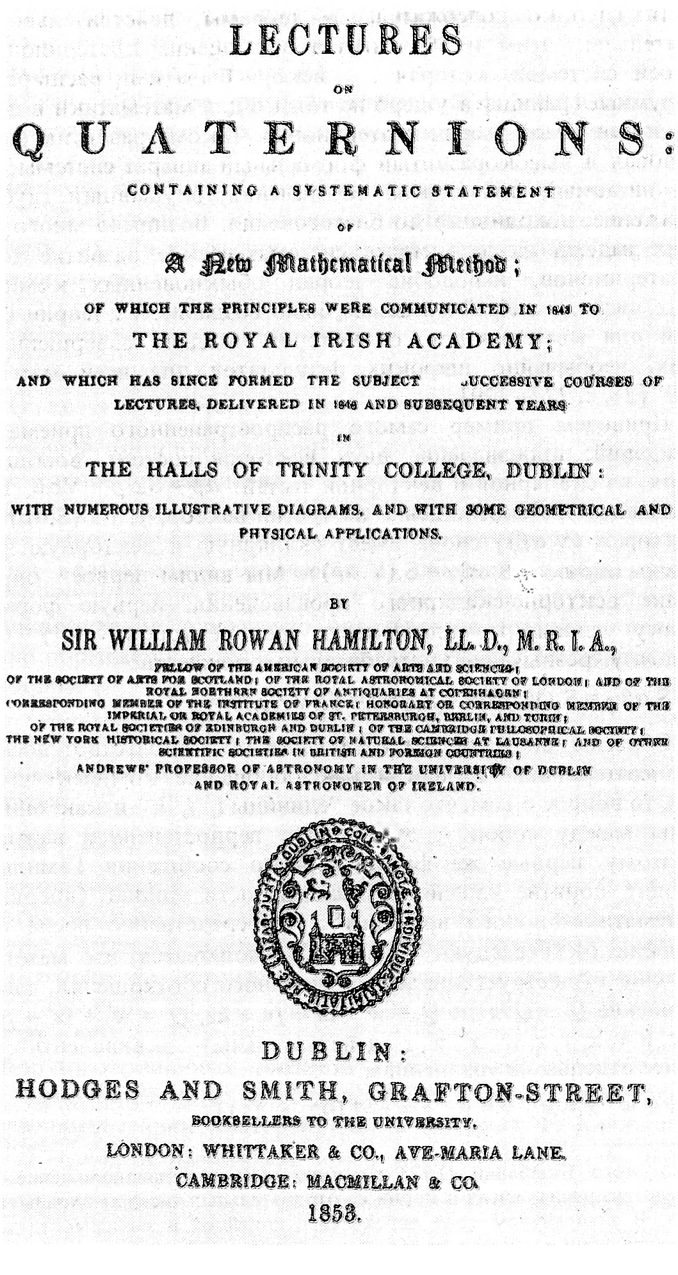
Приведем пример самого распространенного приема рассуждений: произведение двух векторов состоит, вообще говоря, из скалярной и векторной частей: $\alpha\beta = \mathrm{S}.\alpha\beta + \mathrm{V}.\alpha\beta$. Если умножить это соотношение на третий вектор, γ, то $(\mathrm{S}.\alpha\beta)\gamma$ – вектор, а $(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma$ снова имеет скалярную и векторную части. Таким образом, $\mathrm{S}.\alpha\beta\gamma = \mathrm{S}.(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma$. Мы видим первое определение векторно-скалярного произведения, первую формулировку условия компланарности трех векторов: $\mathrm{S}.\alpha\beta\gamma = 0$ и цепочку чрезвычайно употребительных тождеств:

$$\mathrm{S}.\alpha\beta\gamma = \mathrm{S}.(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma = \mathrm{S}.\gamma\alpha\beta = \mathrm{S}.(\mathrm{V}.\gamma\alpha)\beta = \ldots .$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: поскольку кватернионы возникли как обобщение комплексных чисел, то вопрос о том, что такое "единицы i, j, k" и как они связаны между собой – это вопрос первостепенной важности. Поэтому первые же фразы первого сообщения Гамильтона вводят понятие линейной независимости единиц (впервые в математике нового времени)[6]. Непосредственно после определений (4.1) следуют слова: "Предполагается, что между i, j, k не существует никакого линейного соотношения, так что уравнение $Q = Q'$ (где $Q = w + ix + jy + kz$, $Q' = w' + ix' + jy' + kz'$ и $w, x, y, z, w', x', y', z'$ действительны) эквивалентно четырем отдельным уравнениям

$w = w', x = x', y = y', z = z'$" [92, с. 111].

[6] До этого Бомбелли (1573 г.) явно высказал предположение, что действительные числа и корни из отрицательных чисел не складываются. В аналогичном виде определение линейной независимости четырех величин высказал де Морган, а затем независимо от английских математиков, в форме, близкой к современной, понятие ввел Г. Грассман (1844 г.), от которого через Дж. Пеано оно вошло в курсы векторного исчисления XX в.



LECTURES

ON

QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

OF

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT ᴊUCCESSIVE COURSES OF LECTURES, DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS

IN

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES; OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN; CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN; OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY; THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;

ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.

DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.

1853.

Титульный лист "Лекций о кватернионах"

В дальнейшем исчисление кватернионов развивалось и преображалось так, чтобы теория получила наглядность, алгебраический подход был вытеснен геометрическими соображениями и замечания о линейной независимости (или зависимости) векторов были просто излишними, а стандартным приемом доказательств стало такое рассуждение: раз три вектора α, β, ρ компланарны, то один из них можно разложить в сумму двух других: $\rho = x\alpha + y\beta$. И такое рассуждение было у Гамильтона наряду с упоминанием линейной зависимости векторов, но затем в руководствах по теории кватернионов осталось только одно оно.

Определяя произведение векторов (кватернионов), Гамильтон отметил важность понятия ориентации тройки векторов. Впервые правую-левую системы координат стали различать Мебиус (1827 г.) и Гаусс (1856 г.). Однако в постоянный обиход это различение вошло только с развитием векторного исчисления. Гамильтон употреблял термины "левый, правый характер вращения"[7]. Эти названия Максвелл перенес на системы координат (1873 г.) – первоначально он хотел использовать выражения "характер вращения, как у винограда; характер вращения, как у хмеля". До того как современные термины стали общепринятыми, употреблялись названия "положительно и отрицательно ориентированные системы" или "французская и английская системы" и многие другие.

Геометрический смысл скалярного произведения векторов (вернее, скалярной части произведения $S.\alpha\beta$), векторного произведения ($S.\alpha(V_{\iota}\beta\gamma)$) Гамильтон констатировал без каких-либо доказательств, так как соответствующие формулы, выраженнные через декартовы координаты, были хорошо известны к тому времени в аналитической геометрии, кроме, может быть, объема параллелепипеда. В работе, представленной на премию в 1815 г. и опубликованной в более спокойные времена, в 1827 г., Коши выразил объем параллелепипеда в виде $A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1$, или в его краткой записи определителя в виде $S\,(\pm A_1B_2C_3)$, где A, B, C, – проекции соответствующего ребра параллелепипеда на оси x, y, z.

Выражение для объема тетраэдра было открыто еще раз в 1857 г. итальянским математиком Фаа ди Бруно (1825–1888) – учеником Коши!! Раз результат был записан в виде

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

[7] Употреблял в смысле, противоположном ныне принятому.

Поэтому условия перпендикулярности и коллинеарности двух векторов $S.\alpha\beta = 0$ и $V.\alpha\beta = 0$ (или соответственно $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$ и $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$), а также условие компланарности трех векторов ($S.\alpha\beta\gamma = 0$) сразу же становятся привычным, расхожим инструментом теории кватернионов.

Кстати, термин "coplanar" Гамильтон ввел в первых публикациях, а некомпланарные векторы, как лежащие в двух плоскостях, иногда назывались "дипланарными", а иногда даже не удостаивались названия; писали: "Пусть α, β, γ – произвольные векторы, $S.\alpha\beta\gamma \neq 0$". Термин "коллинеарность" введен значительно позже: на протяжении десяти лет Гамильтон писал: "Векторы α и β направлены точно одинаково или точно противоположно друг другу" или "векторы α и β соаксиальны".

Характерная черта теории кватернионов – постоянное использование вспомогательных векторов и всевозможных операторов: если некоторое утверждение справедливо для некоторого вектора ρ, из этого соотношения получают многообразные результаты, следствия, заменив ρ другим вектром, например, $V.\mu\nu$ или $\Phi\rho$ или $\Phi^{-1}\rho$, и т.п. Так совершенно "автоматически" получают новую теорему – не всегда тривиальную!

Такой же автоматизм достигается применением многочисленных операторов. Например, вектор ρ разложен по трем некомпланарным α, β, γ:

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Если α, β, γ – взаимно перпендикулярны, то коэффициенты разложения x, y, z можно найти, "подействовав на обе части оператором $S.\alpha$ (или $S.\beta$, $S.\gamma$)". Тогда

$$S.\alpha\rho = x\alpha^2 + yS.\alpha\beta + zS.\alpha\gamma;$$

$S.\alpha\beta = 0$, $S.\alpha\gamma = 0$ – как скалярные произведения перпендикулярных векторов и

$$x = \frac{S.\alpha\rho}{\alpha^2}.$$

Если же α, β, γ не являются попарно ортогональными, то надо подействовать оператором $S.(V\alpha\beta)$ (а затем $S.V(\alpha\gamma)$, $S.(V\beta\gamma)$);; получается $S.(V\alpha\beta)\rho = xS.(V\alpha\beta)\alpha + yS.(V\alpha\beta)\beta + zS.(V\alpha\beta)\gamma$. Произведения с одинаковыми сомножителями обращаются в нуль, определяется один коэффициент (z), а вслед за ним аналогично два другие.

Можно разобрать геометрический смысл соотношений $S.(V\alpha\beta)\rho = zS.\alpha\beta\gamma$,... но это нужно для современного читателя, истинный кватернионист мыслил такими тождествами и оперировал с ними виртуозно (вновь см. Ф. Клейна). Хотя для того чтобы читать сегодня кватернионное исследование, достаточно, вообще говоря, знать, только, что $S.\alpha\beta = -(\alpha, \beta)$, а $V.\alpha\beta = [\alpha, \beta]$, перестроить мышление и думать, как кватернионисты, непросто. В этом легко убедиться почти на каждом из приводимых примеров, хотя подобраны специально самые наглядные, негромоздкие, "в одно действие".

Как облегчаются доказательства в духе теории кватернионов, можно представить себе по знакомому нам оператору набла: что поле $\mathbf{F} = \text{qrad}\, U$ потенциально, конечно, можно доказать и не прибегая к ∇, но насколько компактнее и красивее доказательство: "векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю $V.\nabla(\nabla U) = 0$".

После того как Гамильтон ввел (в 1846 г.) "символический вектор $\nabla = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$", арсенал кватернионных тождеств существенно пополнился; приведем для примера оператор $S.\alpha\nabla$ $(\alpha = xi + yj + zk)$:

$$S.\alpha\nabla = -x\frac{d}{dx} - y\frac{d}{dy} - z\frac{d}{dz}$$

и запишем формулу Стокса в новых обозначениях: $\text{rot}\,\sigma = V.\nabla\sigma$; проекция этого вектора на единичный вектор нормали $U\nu$, равна $S.U\nu V.\nabla\sigma$; по тождеству $S.\alpha V\beta\gamma = S.\alpha\beta\gamma$ следует $S.U\nu V.\nabla\sigma = S.U\nu\nabla\sigma$, и тогда формула Стокса имеет вид

$$\iint S.U\nu\nabla\sigma = \int S.\sigma d\rho$$

(направление обхода контура, сторону поверхности интегрирования не оговаривали в те годы).

Гибкости и, так сказать, оперативности аппарата теории кватернионов существенно способствовал и тот факт (о котором слегка упоминалось уже), что "вектор" — понятие многозначное. Символ i означал, во-первых, перенос, единичный вектор оси Ox; во-вторых, мнимую единицу, $i^2 = -1$; и, наконец, в-третьих, оператор вращения, верзор, $i \cdot j = k$. К доказательству того, что во всех трех случаях $i^2 = -1$, что во всех случаях справедливы ассоциативный и дистрибутивный законы, Гамильтон возвращался вновь и вновь (что, вероятно, означает, что его не удовлетворяли эти доказательства). По-видимому, они не удовлетворяли и его учеников: некоторые из этих рассуждений никогда не цитировались, не упоминались. Впоследствии все три закона умножения были просто объединены; приведем изложение из курса Келлэнда и Тэта (1882 г.):

"Перейдем к получению одного из результатов применения ассоциативного закона. Так как $ij = k$, то мы имеем ⟨по умножении слева обеих частей на i⟩ $i \cdot ij = i \cdot k = -j$. Затем (вследствие ассоциативности умножения) $i \cdot ij = ii \cdot j = i^2 \cdot j$. Следовательно, $i^2 j = -j$, или $i^2 = -1$.

На наш взгляд, вывод состоит в том, что квадрат единичного вектора вдоль оси Ox есть -1; и поскольку ось Ox может иметь любое направление, то вообще имеем, что квадрат единичного вектора равен -1. Другими словами, повторение операции поворота на прямой угол изменяет направление вектора на противоположное" [106, с. 35].

Когда нужно было разделить эти ипостаси вектора, Гамильтон отмечал это обозначениями: i, j, k или I, J, K. Но вообще говоря, вскоре перестали обращать внимание на эти детали, и это обстоятельство вызвало критику сначала Максвелла, а затем Хевисайда.

Изучение функций кватернионов Гамильтон начинает с рассмотрения частных случаев: 1) аргумент – скалярная величина, функция – векторная; 2) и аргумент, и функция – векторы; 3) аргумент – вектор, функция – скаляр; 4) наконец, частным же случаем теории кватернионов оказывается алгебра и математический анализ, когда и аргумент, и функция – скалярные величины.

1. Теория векторной функции скалярных аргументов развита Гамильтоном в 1846 г. Гамильтон ввел понятие годографа[8] и применил теорию к задачам небесной механики; легко и красиво были получены результаты, которые уже отчасти были известны Ламберту и Мебиусу (как это выяснилось позднее). В "Лекциях о кватернионах" раздел, посвященный векторной функции скалярного аргумента, был изложен очень сжато, без каких-либо доказательств и пояснений, может быть, потому, что материал был известен из аналитической механи-

[8] Слово "hodograph" составлено из греческих οδος – дорога и γραφω – пишу, черчу; так что буквальный смысл термина "дорога, описанная чем-либо". Путь движущейся точки Гамильтон называл "орбитой"; кривая, которую описывает конец вектора скорости точки, если все векторы перенесены в начало координат, была названа "годографом". Наиболее красивая теорема, доказанная Гамильтоном, состоит в том, что в случае движения по орбите под действием центральной силы, подчиненной закону Ньютона, годограф всегда является окружностью.

Вероятно, переход к современному словоупотреблению совершился в начале XX в., когда физики постигали векторное исчисление уже не по кватернионным трактатам, а авторы этих последних, желая отойти от теории кватернионов и все же подчиняясь привычкам и традициям, стали писать "годограф скорости". Отсюда уже один шаг до "годографа функции".

ки и геометрии. Теория приобрела "современный" вид после того, как Тэт изложил ее, сопроводив некоторыми объяснениями и чертежами в "Treatise on Quaternions".

Введя векторную функцию двух скалярных аргументов $\rho = f(u, v)$, Гамильтон развил и теорию поверхностей (которая была еще более непонятна, чем предыдущая).

В этих исследованиях появилась еще одна векторная функция скалярных аргументов $-\nabla u = i\frac{du}{dx} + j\frac{du}{dy} + k\frac{du}{dz}$. Мы можем сравнивать три варианта изложения ∇-теории (1846, 1853 и 1866 гг.). Они незначительно отличаются друг от друга.

При первом введении "символа-дифференциатора ∇" Гамильтон объясняет, как оперировать с этим символом, его "доказательства" выглядят как набор мнемонических правил. Хотя и сам он вначале не очень уверенно манипулировал с ∇: так, он утверждал, что соотношение $\nabla^2 v = -\nabla v$ справедливо для любой функции – скалярной, векторной или кватернионной. Легко убедиться, что это неверно.

За семь лет, прошедших между первой публикацией и выходом в свет книги "Лекции о кватернионах", Гамильтон не расширил по объему, не изменил по стилю изложение этого материала, достаточно сказать, что ему уделено лишь три страницы (из 700). Гамильтон как бы "застолбил" открытие: "Поверхностного обзора этих формул достаточно, чтобы убедить любого, кто хотя бы слегка знаком (а я не претендую на хорошую осведомленность) с современными исследованиями в аналитической физике по тяготению, теплу, электричеству, магнетизму и т.п., что уравнения этого раздела (как я намекнул выше) еще должны стать широко полезными в изучении природы, когда исчисление кватернионов привлечет больше внимания, чем до сих пор, и им овладеют как инструментом исследования руки, более искусные, чем мои" [95, с. 610].

В обеих публикациях (1846 и 1853 гг.) Гамильтон весьма неубедительно доказывает, что "∇ не зависит от любой частной системы координат". Доказательство из "Элементов кватернионов" (1866 г.) истинно кватернионное – оно состоит в том, чтобы, переходя от одного равенства к другому, "исключить систему координат":

"...если $\rho = ix + jy + kz$, то для *любой* системы прямоугольных осей ⟨справедливо⟩ $df(\rho) = (dxD_x + dyD_y + dzD_z)f(\rho) = -\,\mathrm{S}.d\rho\nabla f(\rho)$. Сравнивая это выражение со следующим: $df(\rho) = n\mathrm{S}.\nu d\rho$, видим, что должно быть справедливо уравнение $n\nu = -\nabla f(\rho)$ (так как $d\rho$ может иметь любое направление). Отсюда можно заключить, что ∇ не зависит от любой частной системы координатных осей" [95, с. 548]. В этом доказательстве

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

(так что выражение в скобках представляет собой скалярное произведение вектора $d\rho = idx + jdy + kdz$ и ∇, т.е. $-S.\, d\rho\nabla$); и, как обычно, n скалярная, а ν – векторная величины[9].

Гамильтон отметил, что мыслимо применить оператор ∇ к любому скаляру, вектору или кватерниону, рассматриваемым как функции x, y, z. Однако сам он в "Лекциях о кватернионах" рассмотрел только одну из этих операций – умножение "вектора ∇" на скалярную функцию u. Другие возможности изучит Тэт, который впервые рассмотрел приложения оператора ∇ к физическим проблемам.

2. Переходя к изучению функций кватернионного аргумента, Гамильтон ввел следующее определение: "Предположим, что кватернионная функция fq состоит из некоторого конечного числа членов, в каждый из которых... кватернион входит как множитель некоторое конечное число раз; пусть наибольшее число этих раз будет n. Тогда уравнение $fq = r$ может быть названо кватернионным уравнением степени n. Уравнение

$$a_2 q a_1 q a + a_2' q a_1' q a' + a_2'' q a_1'' q a'' + \ldots + b_1 q b + b_1' q b' + \ldots = c$$

будет представлять кватернионное уравнение второй степени" [95, с. 558], а самый общий вид линейного уравнения таков:

$$bqa + b' qa' + b'' qa'' + \ldots = c,$$

где известны все величины, кроме q. Приравнивая скалярные и векторные слагаемые, Гамильтон получает линейное алгебраическое уравнение (которым он, конечно, не занимается) и "линейное векторное уравнение". Значение этого последнего, таким образом, возрастает, поскольку к нему сводится и любое кватернионное уравнение. Эти рассуждения повторялись затем во всех руководствах по теории кватернионов (вплоть до учебников по векторному анализу) и лишь Тэтом были приведены к "виду, удобному для преподавания".

Итак, особое внимание Гамильтон уделяет линейной век-

---

[9] Во втором (расширенном) издании "Элементов кватернионов" (1890 г.) много дополнений издателя Жоли. К сожалению, он не сообщает, сколько в них использовано заметок, черновиков, "заготовок" самого Гамильтона, – труд издавался после смерти Гамильтона, хотя и был почти завершен им. В примечаниях ко второму тому приведены еще два доказательства. Возможно, уже из этого примера видны черты, характерные для "поздней" теории кватернионов.

торной функции, но даже и "особенное" внимание не помогает пониманию – седьмая глава, в которой изложен материал, трактует о множестве предметов, от самых элементарных до дифференциального исчисления кватернионов, разложения в ряды и т.п. Уже тот факт, что из 700 страниц текста "Лекций о кватернионах" половина – шесть лекций, а 320 страниц – седьмая, характеризует неудачную структуру книги и свидетельствует о том, что теория линейной векторной функции "затерялась" среди этого обилия. Но этого мало, полностью справедлив отзыв Г. Ганкеля: «Самую теорию вместе с некоторыми применениями ее он изложил в обширных "Lectures on quaternions" в форме, очень неудобной для математиков на материке, но, по-видимому, очень естественной для англичан. Дело в том, что эта теория изложена в разбросанных отрывках, проблемы рассматриваются не во всей общности, но сначала лишь в некоторых специальных случаях, далее излагается все это несвязно, благодаря разным применениям и другим исследованиям для того, чтобы только лишь впоследствии закончить задачу во всем ее объеме, да и то иногда лишь случайно. Тут присоединяется еще необычно обширное, непрерывно повторяющееся изложение...» [18, с. 24]. Добавим только, что эта характеристика завершается словами: "...теория кватернионов, этот продукт блестящих открытий знаменитого и гениального математика".

Еще один отзыв современника Гамильтона и Тэта интересен тем, что он принадлежит киевскому профессору математики Павлу Эмильевичу Ромеру (1835–1899): «Это сочинение ("Лекции о кватернионах") пока единственный капитальный труд о кватернёнах, теория которых представляет одно из оригинальнейших произведений английской математической школы и пренадлежит ей вполне... Кватернёны могут быть тесно связаны с Декартовою системой, всего удобнее заменяют ее и поэтому необходимо захватывают все ветви математического анализа, насколько в них входит геометрия...

В настоящее время Тэт уже более трех лет приготовляет к печати трактат о кватернёнах, в который, вероятно, войдут и некоторые еще не опубликованные исследования Гамильтона, но сочинение его до сих пор не появилось. Оно должно быть первым руководством по этому предмету, потому что "Lectures on quaternions" так назвать нельзя и по приему, каким оно написано, и по совершенному недостатку системы; это, скорее, огромный мемуар, нередко затруднительный для чтения и требующий от изучающего порядочного запаса предварительных сведений. Но написать именно руководство Гамильтон не имел и намерения» [49, с. 3].

Учение Гамильтона о линейной векторной функции — источник современной теории линейных преобразований векторов; важнейшие результаты этой теории получены в исчислении кватернионов, правда, часто их трудно распознать современному читателю из-за непривычности формы и "чужих" методов.

В "Лекциях о кватернионах" Гамильтон дал следующее определение "линейной и векторной функции": "Положим для краткости $\nu = \Phi(\rho)$ или просто $\nu = \Phi\rho$; векторная функция будет линейной или дистрибутивной, если $\Phi(\rho + \rho') = \Phi\rho + \Phi\rho'$; $\Delta\Phi\rho = \Phi\Delta\rho$; $\Phi(x\rho) = x\Phi\rho$" [95, с. XLVI].

Мы видим, что определение Гамильтона связывает линейность функции с разностями и дифференциалами, что представлялось ему самым существенным. В "Элементах кватернионов" (1866 г.) Гамильтон вместо приведенного определения дает довольно расплывчатое описание: он отмечает, что дифференциал функции кватерниона $f(q)$ или fq представляет собой функцию переменных q и dq, "всегда дистрибутивную относительно дифференциала dq, рассматриваемого как независимая переменная, независимо от вида данной функции fq. Мы видим также, что если умножить дифференциал dq переменной q на любой скаляр x, то дифференциал dfq функции fq также умножается на тот же самый скаляр, или что $f(q, xdq) = xf(q, dq)$" (эта f, естественно, должна быть отлична от fq, так что Гамильтон напрасно употребляет одну и ту же букву). Нечеткость определений компенсировалась тем, что Гамильтон записывал любое линейное уравнение в виде

$$\beta \mathrm{S}.\,\alpha\rho + \beta' \mathrm{S}.\,\alpha'\rho + \beta'' \mathrm{S}.\,\alpha''\rho = \sigma,$$

а следовательно, любую линейную векторную функцию как

$$\Phi\rho = \beta \mathrm{S}.\,\alpha\rho + \beta' \mathrm{S}.\,\alpha'\rho + \beta'' \mathrm{S}.\,\alpha''\rho,$$

это была "стандартная триномиальная форма для линейной и векторной функции вектора".

Это представление линейной функции впоследствии существенно использовал Гиббс; он же вернул первое определение линейной функции Гамильтона. По Гиббсу, "непрерывная функция Φ называется линейной, если для любых двух векторов ρ и ρ' выполняется равенство $\Phi(\rho + \rho') = \Phi\rho + \Phi\rho'$". Свойство $\Phi(x\rho) = x\Phi\rho$ при этом *доказывается* (на что требуется две страницы учебника); для того чтобы не вводить его в определение, конечно, требуется непрерывность функции. По-видимому, Пеано сформулировал современное определение: преобразование называется линейным, если выполняются условия $\Phi(\rho + \rho') = \Phi\rho + \Phi\rho'$, $\Phi(c\rho) = c\Phi\rho$ (1895 г.).

Главной задачей теории линейной векторной функции было решение линейного уравнения $\Phi\rho = \sigma$, т.е. задача обращения функции Ф. Сначала Гамильтон рассматривал некоторые частные случаи (функции Ф), например уравнения $V.\alpha'\alpha\rho = \sigma$, $V.q\rho = \sigma$ и др., а затем "самый общий возможный вид *линейного и векторного уравнения* $\Sigma\beta S.\alpha\rho + V.r\rho = \sigma$". Общий метод решения был усовершенствован в дальнейшем и самим Гамильтоном, и Тэтом, но в основных чертах все наиболее важные приемы были созданы в 1853 г.

Гиббс распространил кватернионный метод операторов и, исходя из гамильтонова представления векторной функции, сделал следующий шаг: он записал векторную функцию как $\Phi\rho = (\beta S.\alpha + \beta' S.\alpha' + \beta'' S.\alpha'')\rho$, где, очевидно, выражение, стоящее в скобках, не имеет "самостоятельного" смысла, это оператор, применяемый к ρ. Оператор $\beta S.\alpha$ Гиббс назвал "диадой", а произведение (которого на самом деле ведь нет) он назвал "неопределенным". Все эти определения, преобразования, действия настолько близки к кватернионным традициям[10], что поистине удивительно то возмущение, с которым они были встречены кватернионистами. Кроме того, Гиббс вместо "линейной и векторной функции" стал систематически рассматривать "линейное преобразование пространства". Его модификация этой теории существенно приблизила ее к современной трактовке.

Гамильтон (одновременно с Кэли – в 1854 г.) вывел характеристическое уравнение линейного преобразования, которое долго называли "символическим уравнением Гамильтона–Кэли" или "символическим кубическим уравнением". Гамильтон нашел, что существуют векторы, "не меняющие своего направления" после действия на них линейной векторной функции, но написал о них всего несколько фраз. Эти векторы совершенно теряются среди бесчисленных вспомогательных векторов и многих других векторов с интересными свойствами.

Любопытно, что современные "симметрические преобразования" (или нечто аналогичное им) появились в теории Гамильтона почти без какой-либо связи с линейными преобразованиями, а, наоборот, неразрывно связанные со скалярной функцией векторного аргумента, к которой мы переходим, наконец.

3. В теории Гамильтона скалярная и векторная функции векторного аргумента связаны теснейшим образом. Определение последней содержало следующее "продолжение": "...и если мы условимся писать $f(\rho,\omega) = S.\rho\Phi\omega$, то скалярная

---

[10] В самом деле, гиббсово $\Phi\rho = (...)\rho$ ничуть не бо́льшая вольность, чем $(dxD_x + dyD_y + dzD_z)\rho$, приведенное выше.

функция f будет одновременно: 1) коммутативна или симметрична относительно двух векторов, от которых она зависит, и 2) линейна или дистрибутивна относительно каждого из них". Эту и только эту скалярную функцию вектора изучает Гамильтон. В "Лекциях о кватернионах" он утверждает, что любая линейная функция обладает обоими свойствами. Второе свойство, справедливость которого очевидна, он подробно доказывает, первое же оставляет без всякого доказательства. Между тем оно означает $\mathrm{S}.\rho\Phi\omega = \mathrm{S}.\omega\Phi\rho$ или $(\rho, A\,\omega) = (\omega, A\rho)$, т.е. Гамильтон полагал вначале, что любое линейное преобразование является симметрическим!

В "Элементах кватернионов" этого утверждения нет; здесь Гамильтон вводит "сопряженную функцию": "...каждой такой функции Φ всегда соответствует линейная и векторная функция Φ′, которая может быть названа *сопряженной*, связанная с первой уравнением сопряжения

$$\mathrm{S}.\lambda\Phi\rho = \mathrm{S}.\rho\Phi'\lambda,$$

где λ и ρ – два произвольных вектора" [94, с. 485].

Оказалось, что сопряженные функции выражаются как

$$\Phi\rho = \beta\mathrm{S}.\alpha\rho + \beta'\mathrm{S}.\alpha'\rho + \beta''\mathrm{S}.\alpha''\rho \text{ и } \Phi'\rho = \alpha\mathrm{S}.\beta\rho + \alpha'\mathrm{S}.\beta'\rho + \\ + \alpha''\mathrm{S}.\beta''\rho.$$

Эта связь явилась источником новых соотношений между коэффициентами соответствующих "символических уравнений", собственными значениями и пр. Функции же, которые Гамильтон рассматривал в "Лекциях о кватернионах", оказались "самосопряженными" и нашли применение в изучении квадратичных форм, поверхностей второго порядка, линейной алгебре и т.д., вплоть до теории интегральных уравнений Гильберта, куда они вошли вместе с языком векторного исчисления.

Необычность материала и новизна методов, неточности и ошибки, сумбурное построение книги основательно затрудняли понимание; сочинения Гамильтона пересыщены новыми понятиями и названиями – наряду с известными нам употребляются "revector", "provector", "transvector"... Книгу и сейчас называют "нечитабельной" ("unreadable") [96, с. 8]. К сочинениям Гамильтона по теории кватернионов в полной мере относятся слова Клейна, сказанные о других его трудах: "О форме этих работ можно сказать все что угодно, кроме того, что она безупречна; но несмотря на запутанное, неумелое расположение, на многочисленные намеки и повторения, эти работы содержат огромное богатство мысли" [28, с. 235].

Отметим два из общих замечаний Гамильтона, рассеянных в предисловии к ”Лекциям о кватернионах”, да и в других его статьях. Соображения Гамильтона о принципах обобщения понятий (о ”правилах” обобщений, так сказать) предвосхищают так называемый закон перманентности. Также интересно, что, получая многократно один и тот же результат различными рассуждениями, Гамильтон поступает так не ради проверки, ”подстраховки”, а по глубоким принципиальным причинам: ”Но хотя возможно таким образом использовать геометрические рассмотрения, чтобы *навести на мысль, подсказать* и даже чтобы *доказать* законность многих общих преобразований, все же всегда желательно знать, как получить те же самые *символические результаты* из *законов комбинации символов:* так же и *исчисление кватернионов* не следовало бы считать завершенным, пока такие *эквивалентности форм* не могут быть выведены из таких символических законов посредством наименьшего числа (и наипростейших) принципов” [92, т. 3, с. 241].

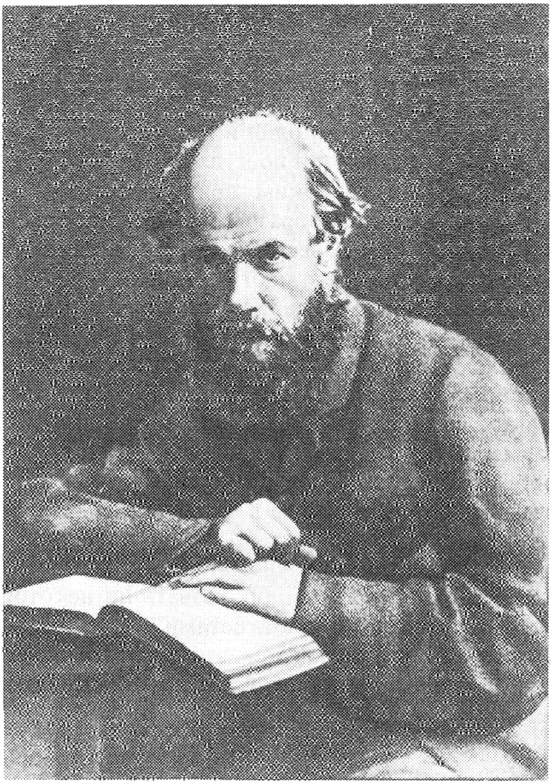
Эти соображения относительно аксиоматического построения теории высказаны впервые в математике – за 50 лет до исследований школы Пеано и за 60 лет до известной реплики Гильберта о независимости аксиоматически построенной теории от конкретной интерпретации: назвать ли некоторые объекты ”точками, прямыми, плоскостями” или же ”столами, стульями, пивными кружками”, – это будут те объекты, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами.

3. Гамильтон и Тэт

В 1848 г. Гамильтон прочел в Тринити-колледже Дублина лекцию о своем исчислении; Ирландская академия наук и Королевское общество Эдинбурга выбили медаль в честь открытия! Среди слушателей этих лекций были Кэли и Салмон – они были первыми математиками, опубликовавшими вслед за Гамильтоном статьи о кватернионах (в 1845 г.). Но подлинным преемником Гамильтона и признанным главой школы после его смерти стал шотландский физик Питер Гесри Тэт (1831–1901).

Его биограф, Нотт, начинает книгу ”Life and scientific work of P.G. Tait” словами: ”Он был личным другом Гамильтона, Стокса, Эндрюса, Джоуля, Кельвина, Максвелла, Стюарта, Кэли, Сильвестра... Эти современники были для него личностями, а не просто авторами книг и статей. Он получил много от них, и они много взяли от него” [107, с. 2]. Из этих имен нужно выделить Максвелла и Кельвина.

Тэт был сверстником и другом Максвелла со школьных лет. Они учились одновременно в Эдинбургском университете, а



П.Г. Тэт

затем в Кембридже, дружили с одним и тем же человеком – У. Томсоном (впоследствии лордом Кельвином), состояли в переписке и были в курсе научных интересов друг друга. С 1860 г. до самой смерти Тэт работал в содружестве с Томсоном. Тэт говорил, что последнее десятилетие он известен как отец Фредди Тэта – лучшего спортсмена города; гибели своего сына в Англо-бурской войне Тэт не пережил.

Тэт – автор 365 статей и восьми книг (среди которых наибольшей известностью пользовался курс "Treatise on natural philosophy" Томсона и Тэта).

Только после работ Тэта идеи Гамильтона были облечены в общедоступную форму. Ф. Келлэнд (1808–1879), автор более позднего учебника по теории кватернионов, свидетельствует: "Первая работа сэра У. Гамильтона "Lectures on quaternions" была очень неясна и совершенно непонятна мне и, смею сказать, и другим до тех пор, пока проф. Тэт не опубликовал свои статьи по этому предмету в "Messenger of Mathematics". Тогда, и не раньше, наука предстала передо мной во всей своей простоте. Проф. Тэт опубликовал труд большой ценности и оригинальности "An elementary treatise on quaternions" (1867) " [106, с. IX].

С 1857 г. началась плодотворная переписка между Тэтом и Гамильтоном, которая побудила и Гамильтона к работе над книгой "Элементы кватернионов". Интерес Тэта к кватернионам возник, когда эту теорию ему напомнили формулы в статьях Гельмгольца (связанные с ∇). В этих письмах обсуждались и уточнялись результаты, шлифовались методы теории – некоторые из писем содержали по 80–90 густо исписанных страниц.

Тэту принадлежат многочисленные теоремы и результаты исчисления. Опытный педагог и лектор (Нотт утверждает, что Тэт вообще был лучшим лектором своего времени), Тэт упорядочил и систематизировал изложение и создал, по выражению Хевисайда, "единственно доступный трактат по этому предмету". Наконец, Тэт развил приложения теории кватернионов к геометрии и физике.

В книгах Тэта впервые дано векторное изложение аналитической геометрии; глава "Геометрия прямой и плоскости" его книги отличается от современных учебников, вообще говоря, лишь обозначениями и второстепенными деталями. Так, один и тот же факт – коллинеарность двух векторов – мы выражаем уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а Тэт – условием: их векторное произведение равно нулю: $V.(\rho-\alpha)\beta=0$.

Также уравнение плоскости в современных учебниках и в руководствах по теории кватернионов означает условие ортогональности двух векторов соответственно в форме

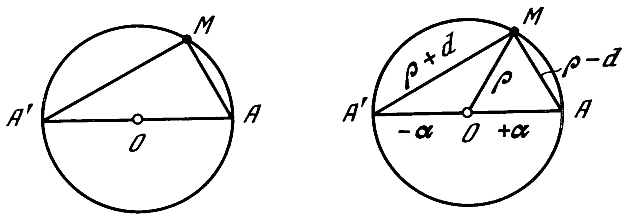
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{ и } S.\nu(\rho-\alpha)=0.$$

После введения этих уравнений Тэт предлагает задачи: найти уравнение прямой, проходящей через две заданные точки; найти длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую (на плоскость); найти уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум данным прямым; найти условие, при котором четыре точки (две прямые) лежат в одной плоскости, и т. д. – до сих пор все курсы строятся по этому плану.

Понимая, что условие ортогональности двух векторов – α и текущего ρ записывается как $S.\alpha\rho = 0$, условие коллинеарности $V.\alpha\rho = 0$, а компланарности $S.\alpha\beta\rho = 0$, можно свободно читать руководство по теории кватернионов, правда, будет казаться, что материал изложен "шиворот-навыворот".

Разделы же о кривых и поверхностях второго порядка далеки от современных. Например, начало главы VII "О сфере и круговом конусе" выглядит так: "Уравнение сферы $T\rho = T\alpha$ $\rho^2 = \alpha^2$. Отсюда уравнение $S\cdot(\rho+\alpha)(\rho-\alpha) = 0$ показывает, что хорды, проведенные в конце диаметра (векторы которого суть $+\alpha$ и $-\alpha$), образуют друг с другом прямой угол" [155, с. 237].

Рисунок к доказательству Тэта



Суть дела становится ясной, как только на чертеже Тэта расставлены стрелки и обозначения векторов; надо лишь заметить еще, что в соотношении $\rho^2 = \alpha^2$, $\rho^2 - \alpha^2 = 0$ фигурируют скалярные величины, поэтому переход к следующей строке

$$S(\rho^2 - \alpha^2) = 0, \quad S\cdot(\rho+\alpha)(\rho-\alpha) = 0$$

ничего не меняет по существу.

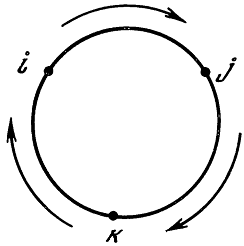
Из-за произвольности вектора ρ нельзя заключить, что один из множителей равен нулю, отсюда векторы $\rho + \alpha$ и $\rho - \alpha$ перпендикулярны.

Кватернионное изложение теории кривых и поверхностей второго порядка век назад, вероятно, понималось с таким же трудом, как и сегодня. По этому примеру можно судить о том, как неоправданно мало пояснений содержали книги Гамильтона и даже Тэта. В переводе "Трактата" Тэта на французский язык (1882, 1884 гг.) довольно часто доказательства автора сопровождаются комментариями переводчика: иногда полстраницы текста дополнены страницей-полутора (петитом) пояснений Пларра.

Некоторые разделы перешли в наши учебники практически без изменений – это относится в первую очередь к теории векторной функции скалярного аргумента.

В книгу, естественно, вошли и важнейшие результаты Тэта, относящиеся к 1862 г., об "операторе, избранном Гамильтоном, $\nabla = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$". Именно Тэт превратил наброски Гамильтона в связно изложенную теорию. Он впервые применил оператор ∇ к векторной функции. Нотт писал об этих исследованиях: «Гамильтон не развил теорию ∇-функции ни в "Лекциях", ни в "Элементах". Это сделано Тэтом во втором издании его книги (в первом издании о символе набла только просто упомянуто)».

Для запоминания правила Гамильтон поместил рисунок, который перешел на страницы наших учебников; возможно, раньше он был нужнее, так как напоминал о некоммутативности произведения, которая встретилась в математике впервые



Если $\sigma = \xi i + \eta j + \zeta k$ – произвольная векторная функция, то формальное умножение вектора $\nabla = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$ на σ по кватернионным правилам (4.1) дает

$$\nabla\sigma = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)(\xi i + \eta j + \zeta k) = \mathrm{S}.\nabla\sigma + \mathrm{V}.\nabla\sigma =$$
$$= -\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + i\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) + j\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) +$$
$$+ k\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right),$$

т. е. слагаемые $\mathrm{S}.\nabla\sigma$, $\mathrm{V}.\nabla\sigma$ равны соответственно – div σ и rot σ. "Чтобы дать интерпретацию. . .⟨величинам $\mathrm{S}.\nabla\sigma$ и $\mathrm{V}.\nabla\sigma$⟩, придадим вектору σ значение перемещения (или лучше – скорости) точки, расположенной в конце вектора ρ, и рассмотрим группу точек, лежащих вокруг конца ρ, так как величины $\mathrm{S}.\nabla\sigma$ и $\mathrm{V}.\nabla\sigma$ тесно связаны с деформацией рассматриваемой группы точек" [155, с. 125] – так впервые появляются в математике div σ и rot σ.

Мы видим, что Тэт подводит читателей к понятиям скалярного и векторного полей. Термин "поле" у него отсутствует, он использует выражение "скалярная функция вектора точки" и "вектор σ – функция вектора точки ρ". С помощью функции $\nabla\sigma$ Тэт исследует поле скоростей $\sigma(x,y,z)$. Он констатирует, что вектор $V.\nabla\sigma$ направлен по оси вращения и равен удвоенной угловой скорости; он устанавливает, что если преобразование состоит в смещении по нормали, вращения нет, то $V.\nabla\sigma=0$ (составляющие вектора $\nabla\sigma$ были хорошо известны к тому времени – Тэт ссылается на работы Стокса и Гельмгольца – 1845 и 1857 гг.). Однако приемы доказательств и рассуждений истинно кватернионные и понимаются с некоторым напряжением.

Как только определен символ ∇, Тэт вводит ряд кватернионных тождеств с ним, например

$$S.\sigma\nabla = -\left(\xi\frac{d}{dx} + \eta\frac{d}{dy} + \zeta\frac{d}{dz}\right) = -D_\sigma$$

или $dF = -S\cdot d\rho\nabla F$. Эти-то тождества и "работают". Рассмотрим пример.

"Когда вращения нет, имеет место перемещение в направлений нормалей к семейству поверхностей и они ⟨смещения⟩ пропорциональны длинам этих нормалей.

В самом деле, мы имеем тождество

$$V(d\rho V.\nabla\sigma) = (S\cdot d\rho\nabla)\sigma - \nabla(S\cdot\sigma d\rho),$$

∇ в последнем члене действует только на σ.

Левая часть этого уравнения есть тождественный нуль вследствие предположения $V\cdot\nabla\sigma=0$; первое слагаемое правой части есть точный дифференциал, поскольку он выражает $-D_{d\rho}\sigma$; тогда оставшийся член тоже должен быть точным дифференциалом.

Итак, мы видим, что в системе, испытывающей деформацию (в которой перемещение вектора точки равно σ), не будет сжатия, если в каждой точке системы справедливо уравнение $S.\nabla\sigma=0$, и не будет вращения, если в каждой точке системы справедливо уравнение $V.\nabla\sigma=0$.

Перемещения не будет, когда $\sigma=\alpha$, α – некоторый постоянный вектор, этот случай охватывается уравнением $\nabla\sigma=0$" [Там же].

В двух последних обширных главах, "Кинематика" и "Физические приложения", Тэт часто пишет о заведомо известных вещах, поэтому приводит их без доказательства. В то же время он выводит не менее известные соотношения, вероятно, для того, чтобы показать эффективность кватернионных методов. Например, после нечеткого определения криволинейного интеграла Тэт подробно останавливается на условии консервативности силы: "§ 478. Если σ представляет собой вектор силы, действующей на частицу материи в точке $\rho\,(x,y,z)$, то $-S.\sigma d\rho$ представляет собой работу, проделанную при перемещении частицы на $d\rho$, так что очевидно, $-\int S.\sigma d\rho$ – работа, сделанная при обходе контура всего пути.

...Для того чтобы работа, выполненная при обходе кривых, имеющих общие концы, была бы одна и та же вдоль любого пути, система должна быть консервативной: $-\int S.\sigma d\rho = 0$. Двойной < на самом деле – поверхностный > интеграл, равный криволинейному, тоже должен быть равен нулю; так что имеем

$$\iint ds\, S \cdot \nabla\sigma U\nu = 0.$$

Консервативная система будет характеризоваться этим уравнением и удовлетворяться, какой бы ни была поверхность интегрирования. Но так как $\nabla\,\sigma$ – определенная величина в каждой точке пространства, а $U\nu$ может изменять направление при модификации поверхности, то для того чтобы уравнение выполнялось, необходимо, чтобы во всех точках $V.\nabla\sigma = 0$, т. е чтобы $\nabla\,\sigma$ было скаляром.

Обозначим через X, Y, Z составляющие силы, параллельные трем ортогональным осям, уравнение $V.\nabla\sigma = 0$ распадается на три уравнения

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0, \quad \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0\text{”}$$

[Там же, с. 273].

Чрезвычайно важная глава – пятая – о линейных преобразованиях векторов (о линейной и векторной функции – по терминологии теории кватернионов). Основная цель этого учения (как и у Гамильтона) – дать метод решения линейного уравнения $\Phi\rho = \sigma$ (ρ-искомый вектор). Здесь изложены фундаментальные результаты, причем в четкой, ясной форме. Так как создавался учебный курс, сводка всех известных результатов, то не разделены "персонально" теоремы, и хотя "Трактат" творился при постоянных контактах и консультациях Гамильтон –Тэт, заслуги Тэта, видимо, все же очень велики.

"Трактат" Тэта содержит все те теоремы, которые входят в современный курс "матрицы": после того как введены сопряженные и самосопряженные линейные векторные функции, рассмотрено характеристическое уравнение, доказано, что существует вектор, "не изменяющий своего направления" при преобразовании, Тэт доказывает, что в случае, когда корни характеристического уравнения действительны и различны, соответствующие им векторы взаимно перпендикулярны, а также что симметрическое преобразование имеет взаимно перпендикулярные собственные векторы. Он приводит выражение линейной векторной функции, когда за базис приняты собственные векторы и т. д. Да и мимоходом, при вычислениях и преобразованиях, получены многие важные теоремы, которые трудно узнать в их первоначальном виде. Например, при обращении линейной векторной функции получено соотношение $m\Phi^{-1}\,\mathrm{V}.\lambda\mu = \mathrm{V}.\Phi'\lambda\Phi'\mu$. К нему применяют оператор $\mathrm{S}.\Phi'\nu$, где ν — произвольный вектор, некомпланарный с λ и μ, а после этого — стандартные кватернионные тождества дают $m\mathrm{S}.\Phi'\nu\Phi^{-1}\,\mathrm{V}.\lambda\mu = m\mathrm{S}.\nu\Phi\Phi^{-1}\,\mathrm{V}.\lambda\mu = m\mathrm{S}.\lambda\mu\nu = \mathrm{S}.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$. Таким образом,

$$m = \frac{\mathrm{S}.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu}{\mathrm{S}.\lambda\mu\nu}.$$

Здесь доказано, что отношение объемов параллелепипедов, построенных соответственно на образах трех векторов $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ и на самих векторах λ, μ, ν, есть постоянная m. На следующих страницах Тэт показывает, что число m равно детерминанту матрицы линейного преобразования (с точностью до терминологии).

Когда Тэт демонстрирует разные методы, получая результат тем или иным приемом, это, как правило, не вредит изложению — в отличие от книг Гамильтона повествование четкое, упорядоченное, хорошо продуманное. Нет возвращений к одним и тем же вопросам, строгий язык — нет многих "лишних" понятий, "не прижившихся в математике". Злые языки (Раус-Болл, в частности) утверждали, что "экстраординарную разговорчивость" Гамильтона не преодолел даже Тэт, что даже он не прочел "от корки до корки" последние два тома Гамильтона (800 страниц!), — от Тэта не поступило опровержения. Книги Тэта лишены этого недостатка; по-видимому, он заслуженно пользовался славой лучшего лектора, и эти профессиональные способности помогли ему создать превосходный учебник.

Кроме отзывов учеников, последователей и почитателей, мы располагаем еще характеристикой, которую Тэту дал Ф. Клейн: "Тэт был натурой доктринерской, отличался резким национализмом, притом он был не свободен от педантизма и последовательно проводил свои планы. Этой картине полностью соответствует то, что он был убежденным сторонником теории кватернионов. Томсон же, хотя он вообще был очень уступчив, раз навсегда отказался что бы то ни было слышать о кватернионах и даже в смягченной форме теории векторов не давал им доступа в свою книгу" [28, с. 279].

Зато второй друг Тэта, Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879), открыл кватернионам путь в электромагнитную теорию. Несомненно Масквелл познакомился с кватернионами благодаря Тэту.

Если отношение к кватернионам (по последнему высказыванию Клейна) действительно определяет характер, Томсон и Масквелл должны быть антагонистами.

4. Физика при рождении векторного исчисления

К середине XIX в. в физике не было единой, общепризнанной теории, объяснявшей явления электричества и магнетизма. Пожалуй, самой распространенной была теория В. Вебера (1804–1890), по которой существуют две (положительная и отрицательная) невесомые жидкости, которые, смешиваясь, нейтрализуют друг друга; между ними существует дальнодействие, т. е. мгновенная передача действия одного тока на другой. Другая теория родилась в Англии – теория электромагнитного поля Фарадея.

Майкл Фарадей (1791–1867) убедился в том, что и среда, в которой находятся два электрических или магнитных заряда, принимает непосредственное участие во взаимодействии этих зарядов, иначе говоря, Фарадей ввел понятие физического поля. "Экспериментальные исследования по электричеству и магнетизму" (1839–1855 гг.) Фарадея ждали математической обработки и соответствующего изложения; Максвелл был как раз тем человеком, который "владел обоими языками" (по его выражению): и проникся идеями Фарадея, и был математически образован, а главное – был знаком с теорией кватернионов, он мог перевести теорию Фарадея на язык "математических символов". Математический аппарат – векторное исчисление, перенесенное в электромагнитную теорию, – позволил из эмпирических наблюдений, описаний создать теорию и развить эту ветвь физики.

Максвелл отлил в математическую форму теорию Фарадея и связал ее с теорией света, высказав предположение, что и свет, и электричество сводятся к колебаниям эфира и по существу тождественны. Увидев, что эта теория оперирует с направленными величинами, Максвелл решил, что она должна иметь естественное изложение на языке векторов. Но в середине прошлого века исчисление векторов существовало только как часть теории кватернионов. Эту часть Максвелл выделил из теории кватернионов и изложил как "Предварительные сведения" в "Трактате об электричестве и магнетизме" (1873 г.). Вот как писал Максвелл об этом в предисловии:

"Когда я перешел к изучению работ Фарадея, я понял, что его метод понимания тоже математичен, хотя и не представлен в условной форме математических символов. Я нашел также, что эти методы могут быть выражены в обычной математической форме и таким образом сопоставлены с методами признанных математиков. Я понимал, что в описании явлений путь Фарадея и путь математиков предполагались существенно различными, так что ни он, ни они не были удовлетворены языком другой стороны. Но я также был уверен в том, что это противоречие возникает не из-за того, что одна из групп не права... Когда я перевел... результаты Фарадея в математическую форму, я увидел, что, вообще говоря, результаты двух методов совпадают" [131, т. 1, с. IX].

Но Максвелл не просто изложил результаты Фарадея на языке кватернионов. Он критически пересмотрел аппарат теории, целесообразно и экономно отобрал необходимое и создал эффективный инструмент. Его очерк векторного исчисления даже внешне не похож на кватернионное исследование, так как Максвелл не отказывался от декартовых координат.

Максвелл взял минимум из теории кватернионов – векторы. Но эту часть теории кватернионов Максвелл перенес в физику совершенно без изменений: он рассматривает не числа $u + ix + jy + kz$, а только частный случай – векторы $ix + jy + kz$, но правила операций (умножения главным образом) кватернионные, поэтому $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

$$\nabla \sigma = S.\nabla\sigma + V.\nabla\sigma = -\operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot}\sigma.$$

Начало очерка традиционно повторяется во всех учебниках физики – это деление величин на скалярные и векторные. Процитируем статью Максвелла "О классификации физических величин" (1871 г.): "Чрезвычайно важное различие было проведено Гамильтоном, разделившим величины... на скалярные, полностью изображаемые одной числовой величиной, и векторные – требующие для определения трех числовых величин.

Изобретение исчисления кватернионов есть шаг вперед в познании величин, связанных с пространством, который по своей важности можно сравнить только с изобретением пространственных координат Декартом" [36, с. 39]. По-видимому, Максвелл считал, что исчисление векторов имеет осязаемую наглядность: "Эта отрасль математики... станет, может быть, под каким-нибудь новым именем могущественным методом сообщения истинно научных знаний лицам, очевидно лишенным вычислительного духа". Позднее Хевисайд утверждал приблизительно то же – что человек, не образованный математически и не привыкший к манипуляциям с проекциями на оси координат, естественно мыслит векторами.

Следуя Фарадею, Максвелл вводит понятие электрического поля. Фарадей использовал "наглядное" понятие "силовой линии", Максвелл ввел такие определения: "Электрическое поле есть часть пространства в окрестности электрических тел, рассматриваемых с точки зрения электрических явлений" [131, т. 1, с. 44]. Это расплывчатое определение дополняется определениями силовых линий, которые несколько отличаются друг от друга в разных статьях: "Линия, описанная точкой, движущейся в направлении результирующей силы, называется силовой линией. Она всегда пересекает эквипотенциальные поверхности под прямым углом" [Там же, с. 47]. Или: "Если направление электрической силы в различных точках поля определено и если линия проведена так, что ее направление в каждой точке совпадает с направлением силы в этой точке, то такая линия называется силовой линией". Максвелл приводит уравнения силовых линий в виде $\frac{1}{a}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\frac{dy}{ds}=\frac{1}{c}\frac{dz}{ds}$. Отметим, что в это же время Томсон при изучении явлений электричества опирался на аналогии с явлениями теплопроводности. Томсон ввел в 1851 г. термины "поле вихревое", "безвихревое", "соленоидальное". Эти термины вскоре появляются и в работах Максвелла. Он приводит общее условие соленоидальности поля. $\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0$ или "скалярная часть $\nabla\sigma$ равна нулю".

Тот факт, что математический аппарат теории Максвелла без изменений взят из теории кватернионов, наложил известный отпечаток на понятия, вводимые Максвеллом: величину $S.\nabla\sigma$, которая отличается знаком от принятой ныне div σ, Максвелл называл конвергенцией (convergence – сходимость).

Первоначально Максвелл ввел вектор $\mathfrak{F}=-\left(\frac{d\psi}{dx}i+\frac{d\psi}{dy}j+\frac{d\psi}{dz}k\right)$, назвав его скатом или склоном функции ψ, используя слово "slope", чтобы указать направление (и величину) наиболее быстрого убывания функции φ [Там же, с. 15], а для функции двух переменных – направление самого крутого склона поверхности. Впоследствии Максвелл заменил термин "slope" словом "gradient" (образованным от латинского gradior - идти вперед). Термин "градиент" вошел в математику, благодаря немецким ученым, в частности, его принял Г. Вебер (1842–1913) и ввел его в переиздании лекций Римана по дифференциальным уравнениям в частных производных.

Об этом векторе Максвелл писал в "Трактате по электричеству и магнетизму": « Г. Ламе в своем "Traité des fonctions inverses" использует термин "дифференциальный параметр", чтобы выразить величину этой наибольшей скорости убывания. Ни само понятие, ни способ, каким Ламе его использует, не указывают, что эта величина (quantity) имеет и направление, и длину (magnitude) » [Там же]. Предварительно Максвелл это же писал Тэту и советовался с ним, какую ввести терминологию, чтобы подчеркнуть, что результат применения ∇ к скалярной функции есть вектор.

В статьях 1834–1837 гг. Г. Ламе (1795–1870) ввел понятие и название "функция точки", "функция положения". По существу, это лучшее определение скалярного поля из всех, употреблявшихся в XIX в.: "Я буду называть функцией точки любую величину, которая имеет определенное значение в каждой точке пространства, ограниченного или нет". Ламе установил, что для функции $v = v(x, y, z)$ выражения

$$\Delta_1 v = \sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}, \quad \Delta_2 v = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$$

являются инвариантами относительно преобразования координат. Эти выражения он назвал первым и вторым дифференциальными параметрами.

В статьях 1855 г. Максвелл "с большой неуверенностью" назвал вектор произведения $\nabla\sigma$ "curl" или "rotation" вектора σ в точке P. Эти английские наименования означают "локон, завиток" и "вращение". Некоторое время в употреблении был термин "curl", в Германии Вихерт ввел (1896 г.) близкое по смыслу и звучанию слово "Quirl". В 1878 г. Клиффорд предложил название "rotor" и обозначение rot.

Обсуждая вводимые термины, Максвелл спрашивал Тэта: « Как называть ∇? Атледом? (прочитанное наоборот "дельта"). Хорошо ли звучит "convergence" для S. $\nabla\sigma$? Какое слово ввести – "twist"? "turn"? "version"? Или это слишком динамично для чистых математиков и ради Кэли стоит остановиться на "curl" (согласно моде на завитки) »?

Название "атлед" привилось на время и употреблялось до конца XIX в. В переписке с друзьями (Тэтом, Томсоном), в стихах к Тэту Максвелл употреблял для ∇ название "набла" – так назывался остов ассирийской арфы, по форме похожий на ∇. В математической статье термин "набла" появился впервые у Тэта (1890 г.) уже после смерти Максвелла.

Результаты Ламе, переведенные на векторный язык Максвеллом, сразу же приобрели тот вид и ту форму изложения, которые они сохранили до настоящего времени, даже схема доказательств теорем дошла до наших учебников. В очерке Максвелла нет замечаний о направлении обхода контура, о гладкости поверхности или контура и т.д. Единственное замечание, относящееся к этой стороне дела, это следующее: "Существуют случаи, когда выполняются условия

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 0,$$

которые являются условием того, что $Xdx + Ydy + Zdz$ – полный дифференциал, а линейный интеграл от точки A до точки B все-таки зависит от вида кривой. В этом случае один путь не может быть трансформирован в другой непрерывным движением без выхода из области" [Там же, с. 17].

В исследованиях Максвелла впервые появляются в явном виде многие основные формулы векторного анализа, в том числе и формулы Стокса, Гаусса–Остроградского, записанные не в кватернионных обозначениях, а в декартовых координатах.

Это обстоятельство достаточно убедительно свидетельствует о том, что Максвелл хотел каким-нибудь образом согласовать векторы и координаты. Это же подтверждают его вопросы к Тэту: "Отрицает ли декартова система идею вектора как реальной вещи, поскольку они выражаются в единицах своеобразной шкалы корней из – 1?" [107, с. 161].

Максвелл нашел в теории кватернионов нужный ему математический аппарат, поскольку в иной форме векторного исчисления не существовало. Но, поставив на службу электричеству и магнетизму эту часть кватернионной теории, Максвелл сделал первый шаг к выделению векторного анализа из теории кватернионов. Ученик Тэта, пытавшийся построить векторную систему без кватернионов, А. Макфарлан (1851–1913) писал, что в кватернионной "неортодоксальности" Максвелла "... мы имеем начало школы векторного анализа, противостоящего чистым кватернионам" [73, с. 139].

Опубликованные в 1911 г. в книге Нотта [107] фрагменты из переписки Максвелла и Тэта (сохранились только письма Максвелла) показывают, что Максвелл размышлял над теми сторонами теории кватернионов, которые затрудняли непосредственное приложение векторных методов к решению физических проблем, т.е. именно над теми же вопросами, которые обсуждались в ожесточенной полемике "двадцать лет спустя". Максвелл писал, что в "двуязычном исследовании" (т.е. когда используются и векторы, и координаты) отрицательный квадрат вектора "вызывает беспокойство (если выбирать самое мягкое выражение), это очень большое неудобство при переходе от одного языка к другому: надо менять знаки у величин и постоянно отмечать, в каком же языке говорят о величине. Как примирить эти факты — что квадрат AB всегда положителен в декартовой системе и всегда отрицателен в теории кватернионов? Как пахать одновременно быком и ослом?" [107, с. 151].

В другом письме обсуждалась тема, также позднее затронутая Хевисайдом: Максвелл писал, что в теории кватернионов геометрические понятия могут делать порочный круг, многообразие форм смешивает все вещи... речь шла о том, что даже в одной формуле величина может иметь разный смысл (т.е. вектор может выступать то как число, то как вектор, то как мнимая...).

Позиция Максвелла (судя по этим письмам) определенно ближе к взглядам Гиббса и Хевисайда, чем к принципам кватернионистов.

Для того чтобы вывести уравнения, описывающие законы распространения электрических и магнитных возбуждений, Максвелл построил очень детализированную модель эфира, передающего электрические и магнитные возмущения поля. "Максвелл представлял себе этот процесс с такой грубой реалистичностью, которая теперь кажется нам поразительной. Он представлял себе, что между вращающимися частями среды помещены для устранения или уменьшения трения фрикционные ролики. Эти тельца, похожие на шарики в шарикоподшипнике, он и рассматривает как подлинное местоположение электричества" [28, с. 283]. После того как Максвелл с помощью этой модели вывел "уравнения Максвелла", он больше не возвращался к этой модели.

Теория Максвелла не нашла немедленного понимания, признания физиков. Как оценил ситуацию Гельмгольц, новая теория, теория Фарадея—Максвелла, от физиков "потребовала полного изменения ранее существовавших представлений": допустить близкодействие, принять уравнения, вывод которых базировался на неоправданно сложной модели, и исследовать проблемы сомнительными кватернионными методами. По словам Больцмана, "на континенте так привыкли к старой теории двух жидкостей, что новые идеи не встретили большого внимания. Кирхгоф, например, до конца жизни лишь мимоходом упоминал теорию Максвелла. Только два физика на континенте — Гельмгольц и Стефан — сразу признали ее значение" [11, с. 110]. Ученикам этих двух ученых — Герцу и Больцману — суждено было привести к победе теорию Максвелла. Вместе с этой физической теорией восторжествовал и ее математический язык, преобразованный и усовершенствованный, — векторный анализ. Как ни парадоксально, но Больцман и Герц невольно способствовали этой победе. Как же они относились к векторному исчислению?

Великий австрийский ученый Людвиг Больцман (1844–1906) экспериментально подтвердил справедливость теории Фарадея–Максвелла, в частности он доказал, что диэлектрическая постоянная равна квадрату показателя преломления – соотношение, следовавшее из уравнений Максвелла; Больцман перевел на немецкий язык и издал статью Максвелла "О фарадеевских силовых линиях", прочитал курс лекций по максвелловой теории электричества и света и издал их в двух томах (1891–1893 гг.), но язык максвелловой теории он считал "парадоксальным", введенным искусственно ради "максимально возможной свободы гипотез". Если просто перелистать, бегло просмотреть "Трактат" Максвелла и "Лекции" Больцмана, то сразу же станет ясно, что эти труды написаны на разных математических языках.

Зато Больцман высоко ценил в теории Максвелла ее механическую основу!! Именно этим он начинает свои "Лекции": "Первая гипотеза. Механическая природа электрического тока". По свидетельству его ученика П. Эренфеста, "больцмановское представление теории Максвелла исходит в первую очередь как раз из этих механических аналогий... Аналогии с циклическими системами могли бы служить в качестве исходной (и достаточно общей) точки. Поэтому их подробное обсуждение составляет ядро больцмановских лекций по электромагнетизму, накладывая специфический отпечаток на всю их структуру" [11, с. 199].

Другую сторону работ Максвелла ценил Герц (1857–1894): «На вопрос "что такое максвеллова теория?" я не знаю ответа короче и определеннее, чем: максвеллова теория – это система максвелловых уравнений..." В другом докладе Герц сказал: "Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, как будто в математических формулах есть самостоятельная жизнь, как будто они умнее нас, умнее даже своего автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них вложено".

Герц начал исследования в области физики в 1878 г. под рyводством Гельмгольца. Вначале все симпатии Гельмгольца были на стороне "дуалистической теории электричества", т.е. теории двух жидкостей Вебера. Он предложил Герцу провести опыты, которые "позволили бы высказаться за ту или другую из различных возможных теорий". В 1889 г. Герц окончательно установил электромагнитную теорию света, доказав справедливость гипотезы Максвелла. "Значение опытов Герца для теории Максвелла окажется еще более важным, если учесть, что Герц с самого начала исходил вовсе не из того, чтобы утвердить теорию Максвелла" (Н. Бор, см.: [11, с. 421]).

В статьях Герца нет и следов векторных методов Максвелла, изложение ведется в традициях аналитической механики –

оперируют с "компонентами электрической силы по координатам x, y, z", правда, у Герца встречаются слова "направленная величина". Несмотря на то что Герц использует понятие силовой линии (и однажды слово "поле"), в работах отсутствуют "электрическое поле", "магнитное поле", "векторное поле" – ни определений, ни названий. Вместо них Герц употребляет такое описание: "Для того чтобы определить распределение силы в остальных участках пространства, воспользуемся графическим представлением..." Герц не использовал ни векторные методы Максвелла, ни их модификацию – методы Хевисайда; Герц был знаком с работами Хевисайда, ссылался на них и отмечал приоритет Хевисайда в ряде случаев.

Итак, признанные последователи Максвелла – Больцман, Герц и Хевисайд развили и продолжили его идеи по разным направлениям. Из них только Хевисайд взял теорию в таком виде, как она вышла из рук ее создателя, – на векторном языке. Значение, которое работа Максвелла имела для развития векторного исчисления, невозможно переоценить. Благодаря ей, векторы, отвергаемые вместе с теорией кватернионов, вошли в физику. Гиббс и Хевисайд, начавшие развивать свои собственные системы после изучения "Трактата об электричестве и магнетизме", создали исчисления, отличающиеся лишь деталями.

5. Детище двух убежденных холостяков

Имя Уилларда Дж. Гиббса (1839–1903) в науке связано с термодинамикой и статистической механикой. Известный американский физик Р. Милликен (1868–1953) писал: "Гиббс живет потому, что, будучи глубоким, не имеющим себе равных ученым-аналитиком, он сделал для статистической механики и термодинамики то, что для небесной механики сделал Лаплас, а для термодинамики – Максвелл, а именно – он сделал свою область науки почти законченным теоретическим построением" [160, с. 125].

Работы Гиббса по векторному анализу[11] несоизмеримы по своему масштабу с монументальными трудами по термодинамике, статистической механике – это две статьи, напечатанные и рассылаемые частным образом (они были опубликованы только после смерти Гиббса в Собрании его трудов, 1906 г.), три короткие заметки (или доклады) и статьи в дискуссии с кватернионистами. Но он сыграл ведущую роль в создании современного векторного анализа и в отделении его от теории кватернионов.

---

[11] Чтобы отличать некватернионное векторное исчисление от того, которое было частью теории кватернионов, будем называть его "векторным анализом" – как называли его создатели.

Вся жизнь Гиббса (за исключением трех лет учебы в Париже, Берлине и Гейдельберге) прошла в тихом городке Нью-Хейвене, где он жил сначала с родителями, а затем с семьей своей сестры. После возвращения из Европы Гиббс считанное число раз выезжал из Нью-Хейвена в ближайшие города с лекциями или докладами. В 1871 г. Гиббс был назначен "профессором математики и физики без жалования на факультет философии и изящных искусств Йельского университета". Гиббс начал заниматься термодинамикой, и первые же его статьи (1872–1873 гг.) содержали значительные результаты.

Работы Гиббса сложны, "математичны" и написаны очень сжато – А. Пуанкаре жаловался, что каждую строчку Гиббса приходится брать с боя. В 80-х годах прошлого века имя Гиббса приобрело мировую известность. Первым, кто отметил "весьма важный вклад в термодинамику... проф. Уилларда Гиббса из Йельского колледжа", был Максвелл. Он говорил об этом на заседании Английского химического общества, писал в четвертом издании своей "Теории теплоты" (1875 г.), в Британской энциклопедии (статья "Диффузия"), и даже темой его речи перед королевой Викторией при открытии Международной выставки научных приборов было блестящее исследование одного неизвестного молодого американца.

С 1877 г. Гиббс начал читать курс электричества и магнетизма, основанный на "Трактате" Максвелла, а с 1879 г. – курс векторного анализа. В 1880 г. он прочел курс аналитической механики в векторном изложении. В 1881 и 1884 гг. Гиббс написал две работы "Элементы векторного анализа". Краткое предисловие рекомендует векторный анализ как некую модификацию метода кватернионов, скорее как применение его определенной части, а не как нечто противоположное. Приведем это предисловие полностью:

«Основные принципы следующего ниже анализа – те же, что и у знакомых студентам кватернионов. Манера, в которой излагается предмет, кое в чем отлична от метода кватернионов, так как объект исследования не требует понятия кватерниона. Здесь просто дана подходящая система обозначений для тех соотношений между векторами или между векторами и скалярами, которые кажутся наиболее важными и которые легче всего поддаются аналитическим преобразованиям, а также объяснены некоторые из этих преобразований.

В качестве прецедента такого отступления от кватернионов можно назвать "Кинематику" Клиффорда. А также можно в связи с этим упомянуть имя Грассмана, к системе которого нижеследующий метод ближе в некоторых отношениях, чем к системе Гамильтона» [87, с. 17].

Гиббс разослал около 130 экземпляров статей ученым, для которых они могли быть интересными; среди адресатов Майкельсон, Томсон, Рэлей, Фицджеральд, Стокс, Дж.Дж. Томсон, Кэли, Тэт, Сильвестр, Дарвин, Хевисайд, Гельмгольц, Клаузиус, Кирхгоф, Лоренц, Клейн. В списке ученых, которым Гиббс рассылал оттиски работ, восемь имен из России.

В 1901г. были изданы отдельной книгой с предисловием Гиббса читанные им лекции, записанные и обработанные Э.Б. Уилсоном (1879–1964). Книга озаглавлена "Elements of vector analysis arranged for the use of students of mathematics and physics".

История перехода от кватернионов к векторному анализу изложена самим Гиббсом: он стал изучать теорию кватернионов для того, чтобы овладеть методами Максвелла. «В то же время я знал, что, хотя методы назывались кватернионными, идея кватерниона совершенно чужда предмету...

Мое знакомство с работой Грассмана также обязано Электричеству... Я увидел, что методы, которые я использовал, близкие к гамильтоновым, были почти точно те же, что у Грассмана... Я не думаю, чтобы труды Грассмана оказали особое влияние на мой "Векторный анализ". Хотя я с радостью укрылся во вводном параграфе за одним-двумя знаменитыми именами, вводя изменения и обозначения, которые, как я чувствовал, не будут приняты сторонниками кватернионного метода...».

Обратим внимание на то, как рано возникает вопрос об обозначениях, на то, что Гиббс указывает в качестве истоков своей системы кватернионы и никогда не упускает случая упомянуть о заслугах Грассмана.

Если попытаться дать краткую характеристику этим статьям Гиббса, то можно сказать, что это извлечение из теории кватернионов всего, что вошло в современный векторный анализ, с некоторой модернизацией метода и языка и со значительным развитием теории линейных операторов. Сочинение начинается определением:

"Если нечто (anything) имеет величину и направление, то его величина и направление, взятые совместно, составляют то, что называется *вектором*.

В отличие от векторов действительные (положительные или отрицательные) величины алгебры называются *скалярными*" [Там же, с. 17].

Это противопоставление вектору действительной величины – рудимент теории кватернионов, каких много в первом варианте векторного анализа. Гиббс внес минимальные изменения в векторное исчисление теории кватернионов. Он сохранил обозначение векторов греческими буквами и обозначение ортов через i, j, k, при этом i, j, k, названные "нормальной системой единичных векторов", имели теперь единственный смысл – это взаимно перпендикулярные векторы с $i^2 = j^2 = k^2 = +1$ и с раз навсегда установленной ориентацией.

Гиббс *вводит определением* разные виды произведений векторов. Скалярное произведение при этом называется "прямое или точечное произведение", соответственно оно обозначено $\alpha \cdot \beta$ и равно $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Векторное произведение названо "косым или крестовым", обозначено $\alpha \times \beta$ и выражено определителем, т.е. впервые появляется формула

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, Гиббс отошел от определения Гамильтона (может быть, именно для этого он и фиксирует ориентацию тройки i, j, k?). Это же определение повторено в книге Гиббса–Уилсона. Именно это определение Гиббса, как "не зависящее от системы координат" многократно воспроизводилось в курсах начала XX в.

Позднее Гиббс объяснил введение своей символики вместо принятых в теории кватернионов $S.\,\alpha\beta$ и $V.\,\alpha\beta$: "Кажется, мы получим наибольшую простоту и удобство, выразив обе функции знаком, объединяющим векторы и намекающим на умножение... чтобы держаться в рамках ресурсов обычной типографии, я использовал точку и крест, которые уже связаны с умножением". Гиббс рассматривал и другие виды произведений, в том числе – смешанное (triple).

Гиббс придал терминам Гамильтона "коллинеарный, компланарный" современный смысл (у Гамильтона термины относились к точкам). Терминология Максвелла – "atled", "curl" "grad" – сохранена без изменений, при этом Гиббс не вводит символический вектор $\nabla = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$, а дает *отдельные определения*:

"50... Если u – произвольная скалярная функция положения в пространстве (т.е. произвольная скалярная величина, принимающая значения, непрерывно меняющиеся в пространстве), то ∇u есть векторная функция положения в пространстве, которая в каждой точке имеет направление наибольшего роста функции u и по величине равна скорости этого возрастания на единицу длины... Мы можем принять также за определение ∇ любой из пунктов 51, 52, 53:

51. Если ρ – вектор, определяющий положение точки в прост-

ранстве, то $du = \nabla u \cdot d\rho$.

52. $\nabla u = i\dfrac{du}{dx} + j\dfrac{du}{dy} + k\dfrac{du}{dz}$.

53 $\dfrac{du}{dx} = i \cdot \nabla u, \quad \dfrac{du}{dy} = j \cdot \nabla u, \quad \dfrac{du}{dz} = k \cdot \nabla u.$

54. Если ω– вектор, имеющий непрерывно меняющуюся величину в пространстве, то

$$\nabla \cdot \omega = i \cdot \frac{d\omega}{dx} + j\frac{d\omega}{dy} + k \cdot \frac{d\omega}{dz} \tag{1}$$

и

$$\nabla \times \omega = i \times \frac{d\omega}{dx} + j \times \frac{d\omega}{dy} + k \times \frac{d\omega}{dz} \ldots \tag{2}$$

Если мы положим $\omega = Xi + Yj + Zk$, то подстановкой этого выражения мы получим

$$\nabla \cdot \omega = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

и

$$\nabla \times \omega = i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right),$$

которые также можно рассматривать как определения $\nabla \cdot \omega$ и $\nabla \times \omega$" [Там же, с. 31].

Конечно, отказ от вектора ∇ вызван соображениями математической строгости: так снимается необходимость обоснования кватернионных тождеств, определения опираются только на формулы дифференцирования скалярных функций. В книге Гиббса–Уилсона не столь последовательный подход: "... большие преимущества достигаются рассмотрением $\nabla = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$ как вектора. Это не настоящий вектор, так как коэффициенты его d/dx,... не настоящие скаляры" [88, с. 147]. При составлении книги Уилсон использовал не только статьи и лекции Гиббса, но и статьи Хевисайда, книгу А. Феппля "Einführung in die Maxwellsche Theorie" (1894 г.). Гиббс, занятый работой над "Статистической механикой", даже не просмотрел рукопись. Соединение нескольких источников ясно видно в определении ∇: "С некоторых точек зрения можно привести возражения против рассмотрения ∇ как символического вектора и введения $\nabla \cdot \mathbf{v}$ и $\nabla \times \mathbf{v}$ соответственно как символических скалярного и векторного произведений ∇ на $\mathbf{v}$[12]. Эти возражения можно снять, предположив по определению, что символы $\nabla\,\cdot$ и $\nabla\times$ (которые можно рассматривать как совершенно новые операторы, абсолютно отличные от ∇) будут означать

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v}=i\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Но для практических целей и как формулу для запоминания кажется целесообразным рассматривать $\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$ как символический вектор-дифференциатор. Этот символ подчиняется тем же законам, что и векторы, поскольку производные $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ подчиняются тем же законам, что и обычные скалярные величины" [Там же, с. 151].

Забегая вперед, скажем, что такой подход был приемлем для различных систем векторного анализа, но не для теории кватернионов. Отвести оператору ∇ роль мнемонической формулы кватернионисты не могли! Нотт горестно восклицал: "Формула для запоминания!.. трудно вообразить ум, находящий опору в таком произвольном исчислении, когда уже работы Гамильтона и Тэта дали способ построения эффективного векторного анализа[13], в котором ∇ был реальным вектором-дифференциатором".

По приведенным выше определениям видно, что стиль изложения Гиббса близок к стилю Ламе: вместо "скалярного, векторного поля" и в статьях Гиббса, и в книге Гиббса–Уилсона фигурирует соответствующая "функция точки", например: "Векторная функция положения в пространстве есть функция $\mathbf{w}$ (x, y, z), которая связывает с каждой точкой пространства определенный вектор".

Изложение векторного анализа, проведенное Гиббсом, стало классическим – с тех пор эта схема переносится из одного учебника в другой. Впервые на чертежах появились стрелки, указывающие направление обхода контура, нормали к поверхности отмечают сторону поверхности, по которой берется интеграл. При этом выражения "сторона поверхности", "положительная сторона" еще настолько новы, что слово "сторона" и подчеркивается,

---

[12] Названия "скалярное и векторное произведения" тоже почерпнуты из статей Хевисайда.

[13] По тому, что Нотт употребляет "векторный анализ", можно понять, что эти слова написаны уже после победы векторного анализа.

и сопровождается смягчающим "так сказать". К этому времени Клейн уже опубликовал прием непрерывного перемещения основания нормали по поверхности (правда, совсем недавно – статья 1875 г.). В курсе Гиббса не было выражений "ориентированная поверхность", "противоположной ориентации"... – все соответствующие термины ввел в 1883 г. К. Стефанос (1857–1917), греческий математик, живший в Париже.

Глава, содержащая построенную по-новому теорию линейных операторов, озаглавлена по кватернионной традиции "Относительно линейной векторной функции". По единодушному мнению, "... его алгебра диад... является его самым оригинальным вкладом в векторный анализ" [87, т. 2, с. 129]. Даже Нотт в своей резко отрицательной рецензии на книгу Гиббса–Уилсона не мог не признать, что метод диад Гиббса "несомненно очень четкий (net) путь представления... линейной векторной функции и имеет свои достоинства". Ну, а как стало ясно позднее, благодаря трудам Гиббса получило самостоятельное развитие аффинорное исчисление (первые истоки которого, таким образом, также надо искать в теории кватернионов).

Исходным моментом, как уже было указано, явилось гамильтоново представление линейной векторной функции $\beta S.\,\alpha\rho + \beta' S.\,\alpha'\rho + \beta'' S\,\alpha''\rho$, от которой (совершенно в кватернионных традициях) Гиббс отделил оператор $\beta S.\alpha + \beta' S.\alpha' + \beta'' S.\alpha''$. Гиббс писал о родстве теории линейной и векторной функций и своей теории диад, но, с другой стороны, он отмечал и полную эквивалентность теории диад и теории матриц.

Вполне возможно, что нет задачи, которая решалась бы методом диад и не была бы доступна кватернионным методам. Но Гиббс развил совершенно новый метод, изменил тем самым "дух исчисления" и существенно приблизил исчисление к современной трактовке. Это изменение с наглядностью демонстрируется на каком-нибудь примере. Рассмотрим обращение линейной векторной функции: "Если Ф выражена в виде суммы девяти членов (nonnion form)

$$\begin{aligned} &a_{11}\, ii + a_{12}\, ij + a_{13}\, ik + \\ \Phi = +\ &a_{21}\, ji + a_{22}\, jj + a_{23}\, jk + \\ +\ &a_{31}\, ki + a_{32}\, kj + a_{33}\, kk, \end{aligned}$$

то сопряженная функция Φ_c имеет те же самые скалярные коэффициенты, но они расположены симметрично относительно главной диагонали..." [88, с. 315]. В этом уже можно узнать описание транспонированной матрицы. После двух страниц сравнительно легких преобразований получено выражение для обратного оператора

$$\Phi^{-1}=\frac{\begin{matrix}A_{11}ii+A_{21}ij+A_{31}ik+\\+A_{12}ji+A_{22}jj+A_{32}jk+\\+A_{13}ki+A_{23}kj+A_{33}kk\end{matrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}=\begin{matrix}\dfrac{A_{11}}{D}ii+\dfrac{A_{21}}{D}ij+\dfrac{A_{31}}{D}ik+\\+\dfrac{A_{12}}{D}ji+\dfrac{A_{22}}{D}jj+\dfrac{A_{32}}{D}jk+\\+\dfrac{A_{13}}{D}ki+\dfrac{A_{23}}{D}kj+\dfrac{A_{33}}{D}kk.\end{matrix}$$

В коэффициентах при диадах мы узнаем элементы обратной матрицы.

Более или менее аналогичное решение у Тэта выглядит так: "Пусть λ, μ – два произвольных вектора, таких, что $\Phi\rho = V.\lambda\mu$. Применяя ⟨к этому равенству операторы⟩ $S.\lambda$ и $S.\mu$, получим $S.\lambda\Phi\rho=0$, $S.\mu\Phi\rho=0$. Но если ввести сопряженную функцию Φ', эти соотношения превратятся в следующие: $S.\rho\Phi'\lambda=0$, $S.\rho\Phi'\mu=0$, что дает нам ρ в виде $m\rho=V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$, где m – скаляр, который, как мы сейчас увидим, не зависит от λ μ и ρ.

Но наше исходное выражение дает $\rho=\Phi^{-1}V.\lambda\mu$, отсюда мы имеем $m\Phi^{-1}V.\lambda\mu=V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$, и задача обращения Φ решена.

Остается только найти значение константы m и выразить вектор $V.\Phi'\lambda\Phi'$ через $V.\lambda\mu$" [155, с. 80].

Беглого взгляда на эти решения достаточно, чтобы увидеть, как далеко ушел Гиббс от теории кватернионов и как недалеко от его метода ушла современная теория.

К этому надо еще добавить, что Гиббс принял новый подход к задаче – он рассматривал не решение линейного уравнения, а задачу преобразования пространства: "$\mathbf{r}'=\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}$. Это уравнение можно рассматривать как определяющее преобразование точки P пространства, помещающейся в конце $\mathbf{r}$, в точку P', помещающуюся в конце $\mathbf{r}'$. Начало остается неизменным (fixed). Точки в определенной конечной области пространства остаются в конечной же области. Любая точка прямой линии $\mathbf{r}=\mathbf{b}+x\mathbf{a}$ становится точкой ⟨прямой⟩ $\mathbf{r}'=\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{b}+x\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{a}$. Отсюда следует, что прямые переходят в прямые и параллельные одной и той же прямой – в параллельные одной и той же прямой $\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{a}$. Аналогично плоскости переходят в плоскости и свойство параллельности есть инвариант" [88, с. 333].

Как отмечалось много раз, в книгах Гамильтона можно найти зародыши многих идей, получивших развитие в работах Гиббса. Возможно, Гиббс именно в таком свете хотел представить свою работу, посылая ее Тэту. Во всяком случае, кажется нелепым обвинять автора нового изложения в плагиате.

И собственные свидетельства Гиббса, и многочисленные примеры из его работ обнаруживают происхождение его векторного анализа из теории кватернионов. Приведем несколько примеров. Гиббс формулирует в "явном виде" теорему, которой в теории кватернионов пользовались как самоочевидной: вектор единственным образом раскладывается по трем некомпланарным; Гиббс доказывает ее чисто кватернионным путем.

Гиббс рассматривает обратные векторы ($\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$) и применяет операцию деления векторов, однако деление не играет той роли, что в теории кватернионов, в частности из $\alpha \times \beta = \gamma$ нельзя найти α. Так же, выражая коэффициенты разложения $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$, он только переписывает кватернионную формулу в своих собственных обозначениях

$$a = \frac{\rho \cdot \beta \times \gamma}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}, \qquad b = \frac{\rho \cdot \gamma \times \alpha}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}, \qquad c = \frac{\rho \cdot \alpha \times \beta}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}.$$

В теории кватернионов аналогичная формула – одна из самых употребительных; в статьях Гиббса она бездействует, хотя записана по традиции.

И при решении некоторых задач Гиббс применяет технические приемы теории кватернионов. Например, он находит вектор ρ из уравнения

$$\delta = \alpha(\lambda \cdot \rho) + \beta(\mu \cdot \rho) + \gamma(\nu \cdot \rho);$$

Гиббс умножает скалярно соотношение соответственно на $\beta \times \gamma, \gamma \times \alpha, \alpha \times \beta$, так получаются простые выражения $\beta \cdot \gamma \times \delta = (\beta \cdot \gamma \times \alpha)(\lambda \cdot \rho), \ldots$ Отсюда введением векторов, обратных α, β, γ или λ, μ, ν, находится ρ. Как видим, это обычный кватернионный путь.

Хотя Гиббс никогда не ставил цели избежать употребления координат, однако он часто подчеркивал, что та или иная формула, понятие не зависят от системы координат; в курсе Гиббса–Уилсона есть параграфы с названиями "Векторные соотношения не зависят от начала координат", "Исключение скаляров из векторных уравнений"... В 1881 г. Гиббс привел определение дивергенции как предела отношения потока через замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью, при $v \to 0$ (вместе с замечанием, что это определение не зависит от "используемой системы единичных векторов"). Это свойство можно вывести из пояснений Максвелла в соответствующем месте "Трактата", но только Гиббс сделал его основой определения. В дальнейшем в начале XX в. это определение послужило образцом для всевозможных определений, не зависящих от системы координат.

Широко известно, что труды Хевисайда способствовали признанию теории Максвелла. Гораздо меньше известен факт, что Хевисайд развил идеи Максвелла о применении исчисления векторов в теории электричества и магнетизма.

Знаменитый английский физик Оливер Хевисайд (1850–1925) родился в семье гравера по дереву. Один из его братьев был инженером-электриком, другой – музыкантом. По материнской линии Хевисайд состоял в родстве с Ч. Уитстоном (1802–1875), пионером телеграфии. Это обстоятельство, может быть, и определило в значительной степени выбор специальности, работу его и брата в телеграфной компании.

Хевисайд учился только в общеобразовательной школе; в 18 лет он поступил на службу телеграфистом-оператором. Он быстро начал глохнуть, отчасти из-за этого он оставил службу и с 1874 г. занимался исследованиями в собственной лаборатории. Ему принадлежат статьи по электромагнитной теории, по математической теории связи, о строении атома. Он предсказал (в 1902 г.) существование ионизированного слоя атмосферы, от которого должны отражаться электромагнитные волны, так называемого слоя Хевисайда. О Хейвисайде писали, что он иногда был математиком, иногда физиком, но всегда – телеграфистом.

До смерти родителей Хевисайд жил с ними; он никогда не женился. Эксцентричный, саркастический, протестующий против любых условностей и бюрократии, Хевисайд жил отшельником и последние 20 лет своей жизни ничего не публиковал. Слава и признание пришли к Хевисайду сравнительно поздно – в 1891 г. он был избран членом Королевского общества.

Новые математические методы, применяемые Хевисайдом, затрудняли понимание его работ. Он вел переписку со многими учеными, среди них были Фицджеральд, Лоренц, Гиббс, Лармор и др. Некоторые из них настаивали на издании его работ в облегченном варианте и с дополнительными пояснениями. Об этом же ему писал Томсон: "Сравнительно немного людей из интересующихся предметом могут читать и понимать такие математические работы, как Ваши. И это, без сомнения, есть главная причина того, что Ваш труд значительно менее известен и оценен, чем того заслуживает".

Статьи Хевисайда 1872–1892 гг. составили два тома "Electrical papers", его дальнейшие работы собраны в трех томах "Electromagnetic theory" (1893, 1899, 1912 гг.). В предисловии к первой книге он писал, что его работа в основном посвящена объяснению и развитию теории Максвелла и его *математических методов* (курсив наш. –*Н.А.*). Первые статьи Хевисайда по стилю и методам таковы же, как труд Максвелла, т.е. кватернионные. Но очень скоро Хевисайд пришел к созданию исчисления, принципиально отличного от теории кватернионов, хотя вначале казалось, что сделаны только незначительные изменения в определениях и обозначениях. Хевисайд развил свою систему в 1882–1885 гг. независимо от Гиббса. Однако после знакомства со статьями Гиббса он внес некоторые изменения в свою теорию, самое значительное – трактовка линейных операторов.

Хевисайд никогда не придавал значения строгому математическому обоснованию своих методов. Для него единственным критерием ценности математического аппарата была способность аппарата решать задачи (электромагнитной теории, вероятно), и притом быстро, легко. Таким "утилитарным подходом" к математике объясняется и позиция Хевисайда в дискуссии против кватернионистов; "Проф. Тэт прав? или осквернители ⟨чистоты теории⟩ правы? Могут быть разные мнения. Мое собственное – что ответ зависит от точки зрения. Если мы оставим в стороне практические приложения к физике и взглянем на кватернионы целиком с кватернионной точки зрения, то проф. Тэт совершенно прав и теория кватернионов доставляет единственно простой и естественный путь исследования *кватернионов*. Обратите внимание на подчеркивание" [97, с.76]. Эти слова показывают, что Хевисайд не хотел видеть никакой роли и никакой цели кватернионов, кроме служения физике.

История построения векторной системы Хевисайдом известна от него самого. Познакомившись с "Трактатом" Максвелла, он принял и его теорию, и векторное исчисление в виде части теории кватернионов: "Замечательная система, названная кватернионами, была изобретена сэром Гамильтоном, она может быть охарактеризована как исчисление векторов". В этом, кажется, единственном положительном отзыве Хевисайда о кватернионах (относящемся к 1882 г.) он так же сужает теорию до "доктрины векторов", как и Максвелл в свое время.

Хевисайд пошел по пути, указанному Максвеллом, – взял из теории кватернионов векторы и ту часть, которая содержит операции с ними. Как писал Хевисайд, векторное исчисление стало для него вопросом жизни около 1882 г. В первой же статье, использующей векторные методы (теории кватернионов), Хевисайд провозглашал неизбежную необходимость их в физике и объяснял, почему они дожны быть "некватернионными": "Против кватернионов... тот факт, что оперирование с ними встречает значительно бо́льшие трудности, чем соответствующие обычные вычисления... Пойдем на компромисс; посмотрим на привычные, но сложные скалярные уравнения и увидим за ними одно-единственное векторное, выражающее реальную вещь".

В 1885 г. Хевисайд публикует первое общее изложение своей векторной системы. Он настаивал на том, что предлагаемая им система является "упрощением теории кватернионов". Собственно говоря, он ввел два "упрощения" (или изменения):

1) Хевисайд положил $i^2 = j^2 = k^2 = +1$. Это он считал существенным и принципиальным достоинством, позволяющим увязать векторные методы с физикой и с "общепринятой скалярной математикой";

2) Хевисайд ввел определением два вида произведений векторов, которые мы с ним вместе называем "скалярным и векторным произведениями".

Эти изменения, внесенные Хевисайдом в векторную алгебру кватернионов, одновременно отличают его векторное исчисление от исчисления Максвелла. В разгар борьбы с кватернионистами Хевисайд писал: "Однако вопрос не заключается полностью в обозначениях. Я отбросил кватернионную основу векторного анализа... Я могу уверенно рекомендовать модификацию, сделанную мной, как практически работающую систему. Она имеет много преимуществ, и не последнее из них — тот факт, что кватернион вовсе в ней не появляется, а также что приняты обозначения, гармонично согласованные с декартовой математикой".

Хевисайд отказался от обозначения векторов греческими и готическими буквами. В 1886 г. он предложил отмечать векторы жирной печатью: "жирной" буквой обозначать вектор, той же буквой (нормальной печати) — длину этого вектора, через a_1, a_2, a_3 — проекции этого же вектора на оси координат. В статье от 1892 г. Хевисайд ввел термин "орт" — сокращение слова "orientation". Из терминологии теории кватернионов Хевисайд позаимствовал минимум — слова "скаляр", "вектор", "тензор" (вместо "длина"), "slope", "curl", "convergence" (очень скоро заменив это понятие дивергенцией).

О предложенных им обозначениях произведений векторов **ав** и V**ав** Хевисайд писал: "Я чрезвычайно тщательно выбрал обозначения, чтобы как можно гармоничнее связать их с обычными математическими идеями, процессами и обозначениями... чтобы было согласие с общей алгеброй, я обозначил скалярное произведение через **Fv**, оно вырождается в Fv, если векторы имеют одно и то же направление..."

В своих нескольких очерках векторной алгебры Хевисайд дает разные определения скалярного и векторного произведений, чаще всего он задает их формулой для вычисления.

В ноябре 1891 г. Хевисайд начал публиковать в журнале "Электрик" серию статей по векторному исчислению, эти 22 статьи составили впоследствии главу "Элементы векторной алгебры и анализа" в " Электромагнитной теории", эти публикации – первый напечатанный "курс" векторного анализа. Цель публикаций сформулирована автором так:"Максвелл в своем великом "Трактате об электричестве и магнетизме" обратил внимание на пригодность векторных методов в его предмете... Распространение векторного анализа, несомненно, по-моему, задержано отсутствием достаточно элементарных работ по этому предмету с установлением принципов ... и с удобными обозначениями. Читатель труда Максвелла, который хочет научиться работать с векторами, должен обратиться либо к тяжелым томам Гамильтона, либо к "Трактату" Тэта. О первом не может быть и речи для первоначального ознакомления, а последний чрезмерно труден... Трудности вырастают в значительной степени из кватернионной основы" [97, с.35].

В статьях Хевисайда вместо термина "поле" фигурируют слова "среда", "эфир", "скалярная функция положения"... однако ясно, что, по его мнению, электромагнитная теория есть теория векторного поля: "Замечательные экспериментальные работы... открыли новую эру в развитии теории эфира Максвелла–Фарадея, рассматриваемого как первоначальная среда для электрических явлений..."

В отличие от Гиббса Хевисайд ввел в теорию "гамильтонов вектор ∇, который появляется во всех исследованиях по математической физике... трактуемых векторно". Он восхищался фактом, "открытым проф. Тэтом, что три операции: curl, divergence, space-variation (т.е. градиент) – являются на самом деле только тремя различными формами одного и того же оператора, а результат изменяется с природой функции..."

В отдельный параграф Хевисайд вынес сравнение "декартова и векторного анализа". Здесь он, в частности, утверждал преимущества наглядности векторного исчисления в физике: "Алгебраическая или аналитическая геометрия в обычной декартовой форме хотя и имеет дело с векторами, не является векторной алгеброй. Она есть сведение к скалярной с помощью разложения вектора на три ортогональные компоненты, с которыми манипулируют как со склярами... Что это – глубоко искусственный процесс – очевидно, но часто это удобно... Если мы работаем непосредственно с векторами, мы фиксируем наше внимание на них и на соотношениях между ними, которые обычно появляются в четкой, компактной и выразительной форме, внутренний смысл которой очевиден с первого взгляда..." К этому тезису Хевисайд возвращается снова и снова, находя все новые слова: при переводе векторной формулы в координатный вид "читаемая с ходу формула в одну строчку, выраженная несколькими буквами и символами, иногда разбухает и занимает целую страницу.

Кроме того, в декартовом методе мы уходим от физических соотношений, которые так желательно иметь в виду, производя математические упражнения над компонентами. Математика становится слепой или имеет тенденцию к этому".

Заключительные слова ко всему циклу публикаций: «"Я надеюсь, что глава, которую я заканчиваю, может служить временной мерой до тех пор, пока не будут написаны регулярные векторные курсы для физиков, основанные на векторной трактовке векторов. Кватернионисты хотят сбросить "декартовы путы"... Это можно сделать для кватернионов, но для векторов это было бы смертельной ошибкой. Моя система далека от враждебности к декартовой системе и есть самая сущность ее» [Там же, с. 77].

Эти статьи Хевисайда написаны в разгар борьбы со сторонниками теории кватернионов; поэтому, несмотря на четкость и ясность изложения, статьи далеки от академического стиля и, пожалуй, представляют собой уникальное явление в математической и физической литературе. Даже в рецензиях, скорее недоброжелательных, признавали: "каждая строка книги важна, и книга полна интересных отступлений о предметах разного рода", так что она наводит на "сожаление, что писатели-ученые стремятся превзойти друг друга в тяжеловесной, скучной, сухой теологии". Для стиля Хевисайда рецензент изобрел красочную характеристику: "Работа щетинится юмором..." Объект юмора (вернее, сарказма) единственный – кватернионы. Книга заканчивается также атакой на них: "Проф. Тэт сообщает физику..., что это как раз то, чего он хочет... Известно также, что физики с большим упорством, старательно ничего не делают с кватернионами... Я верю, что система, которую я изложил, представляет то, что хочет физик; по крайней мере то, с чего надо начать".

Как Гиббс "обманул" Пеано

Интерес итальянских математиков к векторному исчислению возник, несомненно, благодаря Дж Пеано (1858–1932).

В 1888 г. была опубликована работа Пеано «Основы геометрического исчисления по "Ausdehnungslehre" Г. Грассмана с предварительно изложенными операциями дедуктивной логики»; в 1891 г. появился перевод части этого сочинения, именно "геометрического исчисления", на немецкий язык.

Вероятно, все читатели этой книги верили автору, который обещал изложение учения Грассмана. По крайней мере, современник (Пеано и Грассмана) Ю. Массо (1852–1909), который читал самого Грассмана, а после знакомства с сочинением Пеано создал курс механики в векторном изложении, с восхищением писал: ”Насколько темно и непонятно у Грассмана, настолько четко и ясно у Пеано”. В наши дни Кеннеди (написавший биографию Пеано) разделяет эту веру: «...Эта книга была результатом его переработки грассманова ”Ausdehnungslehre”. Пеано не претендует на оригинальность идей, содержащихся в ней, но не может быть никакого сомнения в том, что предельная ясность его изложения (по контрасту с пресловутой трудностью чтения труда Грассмана) помогла распространить грассмановы идеи и сделать их более популярными». Это мнение разделяет и Кроу [73, с. 235].

Если сравнить книгу Пеано (в названии которой стоит имя Грассмана) с ”Линейным учением о протяженности” Грассмана, то обнаруживается ничтожно мало общего между этими работами. Что же именно?

Те страницы, которые могли бы быть ”переводом” труда Грассмана, Пеано прямо приписывает Мебиусу: ”Понятия и обозначения этих параграфов принадлежат Мебиусу (Werke, Bd. 1, S. 41)”. Но тогда из ”Линейного учения о протяженности” взяты только обозначение $\times$ для скалярного произведения векторов и название для него – ”внутреннее произведение” (название, возможно, даже неудачное, поскольку ”внешнее произведение” отсутствует).

Возникают закономерные вопросы: почему Пеано считал, что излагает ”геометрическое исчисление по Грассману”? и что же он на самом деле излагал? каким работам он обязан знакомством с векторными методами?

Первоначальная версия (”Основы геометрического исчисления” тождественны ”Линейному учению о протяженности” Грассмана) по мере чтения работ Пеано вызывает все меньше доверия ввиду следующих соображений.

1. Естественный ход событий, казалось бы, должен быть таким: Пеано читает работы Грассмана, находится под впечатлением его мыслей, начинает размышлять, развивает свой вариант учения, отклоняется от источника идей, может быть, отходит совсем далеко... На самом деле все присходит как раз наоборот: в каждой новой статье Пеано появляются все новые детали из теории Грассмана, определения, понятия, свойственные ”Линейному учению...” и, наконец, в 1896 г., жалоба-признание на трудности чтения Грассмана.

2. В 1891 г. вышел в свет первый том собрания сочинений Г. Грассмана, Пеано написал рецензию на это издание. Естественно ожидать, что из этой рецензии мы узнаем взгляды Пеано на работы Грассмана, узнаем нечто о *личном* отношении Пеано...

Увы, рецензия обнаруживает только очень поверхностное знакомство автора с творчеством Грассмана – Пеано просто перевел первые абзацы из предисловия Энгеля к первому тому трудов Грассмана.

3. Обозначения и некоторые термины "Геометрического исчисления" Пеано (i, j, k, ∇, "вектор"...) свидетельствуют о том, что Пеано был знаком с работами кватернионной школы. Между тем многие замечания убедительно доказывают, что работ Гамильтона он не читал: он много раз писал о "простоте и ясности изложения", о "блестящей форме работ Гамильтона", тогда как современный исследователь творчества Гамильтона пишет о "нечитабельности" его работ. Ссылка же на Тэта появляется у Пеано только в связи с математической логикой (1891 г). Кроме того, теория Пеано совершенно оторвана от теории комплексной переменной и изложена на языке координат.

4. При второй дискуссии (1909–1913 гг.) ученики Пеано–Марколонго и Бурали-Форти – обмолвились, что школа итальянского векторного исчисления "многим обязана Гиббсу".

Все это наводит на мысль, что Пеано познакомился с векторным исчислением по "Элементам векторного анализа" Гиббса.

Известно, что Гиббс послал экземпляры своих статей в Турин, в числе адресатов был учитель Пеано – Бассо (Basso G., 1842–1895). Другой путь, каким Пеано мог бы получить неопубликованные статьи, более сложен, но вполне мыслим – через немецкого математика Люрота, с которым Пеано был дружен и которому Гиббс послал оттиски.

Кажется очень правдоподобным предположение, что Пеано был введен в заблуждение "Предисловием" Гиббса, который писал, что его труд ближе к идеям Грассмана, нежели к теории кватернионов. Видимо, Пеано решил, что "Элементы векторного анализа" – действительно изложение учения Грассмана. В качестве того подтверждения, что такое заблуждение возможно, напомним суждение Массо: человек, пытавшийся читать книги Грассмана и знакомый с ними настолько, что мог оценить трудности чтения, не заметил, что "Геометрическое исчисление" Пеано – нечто другое...

Если это так, то понятно, что, излагая "векторный анализ" Гиббса, т.е. развивая приложение векторных методов к аналитической геометрии, предлагая исчисление, в котором объектами являются "Геометрические сущности", Пеано называл его "геометрическим исчислением по Грассману". Можно еще добавить, что Пеано часто приводил историко-научные справки, в частности он писал об идеях геометрического исчисления Лейбница, отмечал операции непосредственно с геометрическими объектами у Мебиуса, Грассмана, но никогда он не назвал источника своих векторных методов, – может быть, потому, что не захотел объявить о своей ошибке, поняв, что он обманулся?

Все это вместе взятое заставляет думать, что Пеано был обязан трудам Грассмана главным образом толчком для размышления или направлением раздумий. В частности, попытки Грассмана построить геометрическое исчисление "в самой строгой, евклидовой форме" вылились у Пеано в аксиоматику линейных пространств. Может быть, следующие слова Пеано можно рассматривать как подтверждение высказанных соображений: «Причины... по которым работа Грассмана оставалась непонятой долгое время, по-моему, заключаются в туманной и метафизической форме, далекой от обычного языка математики, которая с самого начала отталкивает и охлаждает читателя вместо того, чтобы привлекать его. В самом деле, изучая эту работу, я открыл силу нового метода, только испытав его приложения, особенно те, которые опубликованы в его "Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre" (1845 г.). Начав с этих приложений, я изыскал возможность *реконструировать* (!) и дать определения вводимым понятиям, используя только элементарную геометрию». Эта цитата – единственная прямая ссылка (до 1890 г.) на конкретную работу Грассмана и свидетельство того, что Пеано "реконструировал" учение Грассмана и представил свою реконструкцию как истинную теорию Грассмана.

Общепринят взгляд, что "Линейное учение о протяженности" Грассмана оказало влияние на формирование современного векторного исчисления через Пеано. Однако оказывается, что и этот второй источник векторных методов восходит к теории кватернионов Гамильтона.

7. "Векторы против Кватернионов"

"Vectors versus Quaternions" – этой юридической формулой Хевисайд озаглавил свою полемическую статью. Разгоревшаяся в последнее десятилетие XIX в. дискуссия сыграла важную роль в распространении векторного исчисления [2].

К 1880 г. было уже 298 публикаций по теории кватернионов, из которых 18 – книги, а теория кватернионов была окружена целым "выводком" незаконных отпрысков: системы Клиффорда, Гиббса, Хевисайда, Макфарлана – в Англии и Америке; Грассмана – в Германии, Беллавитиса – в Италии; развивалась школа во Франции во главе с Резалем (в основном под влиянием Сен-Веннана и Грассмана), а также в Петербурге – О.И. Сомова и в Бельгии – Ю.Массо. Таково было общее положение, когда Гиббс написал в письме (1888 г.) : "Я думаю, что вот-вот начнется Борьба за Существование между различными методами и обозначениями в кратной алгебре, особенно между идеями Грассмана и Гамильтона".

Действительно, в предисловии к третьему изданию своего "Трактата" (1890 г.) Тэт написал, что прогресс теории кватернионов задерживает, в частности, проф. Гиббс, который создал род чудовища-гермафродита из обозначений Гамильтона и Грассмана. Второе его выступление – статья "О важности кватернионов в физике", где Тэт утверждал (помимо всего прочего), что теории кватернионов мешает еще и "крайне искусственный метод декартовых координат – одно из тех препятствий, которых можно полностью избежать и которые сегодня тормозят прогресс математической физики".

Так началась полемика. Гиббс принял вызов Тэта, направив в журнал "Nature" статью "О роли кватернионов в алгебре векторов"; в течение трех лет он опубликовал еще три статьи в этом журнале. Участие Хевисайда в дискуссии выразилось не только в двух статьях в журнале "Nature"; его научные публикации изобиловали выпадами совершенно ненаучного характера, вроде: "Кватернион, я думаю, был бы определен американской школьницей как древняя религиозная церемония. И это была бы грубая ошибка. Древние – в отличие от проф. Тэта – не знали кватернионов и не поклонялись им".

Одна из самых важных статей в дискуссии – статья Нотта "Недавние новшества в Векторной Теории". Тэт рекомендовал ее: "Статья д-ра Нотта интересна и поучительна – это полная экспозиция претензий и дефектов так называемой Векторной Системы". Во-первых, Нотт был, кажется, единственным кватернионистом, который читал работы по векторному анализу, пытался разобраться в них и приводил конкретные возражения. Тэт не стеснялся признаваться, что более четырех страниц статьи Хевисайда он не прочел и что с работами по "так называемому векторному анализу" он знаком по пересказу Нотта. Да и по статьям других авторов видно, что они не читали опровергаемых ими работ...

Во-вторых, экспозиция действительно была "полной", вследствие чего в дальнейшем и обвинения, предъявляемые Гиббсу и Хевисайду, и "уничтожавшая" их аргументация были вариациями на темы статьи Нотта – аргументы были исчерпаны и просто повторялись.

Нотт закончил статью словами: "Итак, главные аргументы статьи могут быть кратко сформулированы так:

а) кватернион столь же фундаментальное геометрическое понятие, как и любое, названное проф. Гибсом;

б) в каждом векторном анализе, развитом до сих пор, явно или неявно сохраняется верзорный характер векторов в произведениях;

в) если это так, то отсюда следует *естественное* заключение, что квадрат единичного вектора равен -1;

г) предположение, что квадрат единичного вектора равен $+1$, приводит к алгебре неассоциативного характера, в которой ∇ не является реальной наблой теории кватернионов;

д) изобретение новых названий и новых обозначений практически не добавляет ничего существенного к тому, что мы уже знаем из теории кватернионов".

Пункт (д) является прямым обвинением в плагиате, что повторялось и десятилетие спустя: "Нам становится ясно, что проф. Гиббс умышленно выставляет напоказ систему, свободную от воображаемых недостатков кватернионов и все-таки... если мы находим при тщательном сравнении, что *практически* диадическая система есть простая модификация кватернионных методов, вообще говоря, отличающаяся только обозначениями, мы не можем найти удовлетворительных причин для того, чтобы человек способностей проф. Гиббса мог покинуть кватернионный путь ради изобретения новых названий для старых вещей..."

Ни горечь, ни непримиримость не ослабевали и не смягчались со временем — и это несмотря на то, что и Гиббс, и Хевисайд прямо указывали, что источником векторного анализа была теория кватернионов, правда, Хевисайд это говорил в своей манере: после того как он "весь был в кватернионных струпьях, но сделал усилие и излечился", он начал развивать алгебру векторов и усовершенствовать обозначения.

Остальные пункты тесно связаны: вопрос о квадрате вектора неразрывно связан с трактовкой единичного вектора как верзора и с "корнями" теории кватернионов — с комплексными числами: кватернионисты не хотели терять связи с алгеброй и ТФКП. Другая сторона проблемы — мнение физиков и использование декартовых координат: "Как может быть квадрат отрицательным? Кватернионы в своих векторных аспектах антифизичны и не гармонируют с общей математикой", — эти слова могли быть написаны и Хевисайдом, и Максвеллом.

Гиббс писал об этом спокойнее, но также доказывал, что "система векторного анализа не требует никакой поддержки от понятия кватерниона или от... мнимости алгебры" и одновременно что внимание к этой стороне теории наносит ущерб собственно векторам и поэтому векторный анализ оказывается второстепенным предметом в теории кватернионов.

Очевидно, что вопрос о знаке квадрата вектора органически связан с тем, что вектор является одновременно и верзором, поэтому для Нотта чрезвычайно важно обнаружить "верзорный характер векторов в умножении" в векторном анализе и уличить таким образом Гиббса и Хевисайда в непоследовательности, что он и делает, имея в виду векторное произведение: здесь $i \times j = k$ —первый сомножитель, i, "вращает" второй, j, на прямой угол, т.е. действует как верзор.

Ну а что писал по этому поводу Тэт? Ведь еще в 1878 г. знак квадрата вектора "вызывал беспокойство" Максвелла! Нотт сожалеет, что ответное письмо Тэта утеряно, Нотт уверен, что существовал убедительный ответ. По-видимому, решение Тэта было отказаться от всей "координатной математики". Он видел тенденцию векторного анализа использовать аппарат теории определителей, матриц и не одобрял эту тенденцию (нет необходимости писать, что обозначения матриц и определителей он находил громоздкими и искусственными).

Что этот пункт разногласий — основной (или один из основных) —понимали все. К обсуждению квадрата вектора постоянно возвращался Хевисайд. Приведем еще одно его высказывание, потому что оно как будто списано у Максвелла: "В практическом анализе физики предположение $i^2 = -1$ практически непригодно, будучи навязчивым камнем преткновения... налицо недостаток гармонии со скалярными исследованиями и трудности в быстром переходе от декартовой системы к векторам и наоборот" [97, с. 35].

Наряду с допущением $i^2 = +1$ с самого начала дискуссии и до конца дней спорящих ожесточенной критике подвергался отказ от полного кватернионного произведения, введение определением различных видов произведений векторов. Тэт писал: «Проф. Гиббс, кажется, забыл о специальном заглавии "arranged for the use of students in physics". Векторный анализ... включает в себя опасное отклонение от обычной алгебры ввиду того, что $\alpha\beta$ рассматривается не как произведение, но просто как вид произведения. Это, вероятно, специально, чтобы запутать обыкновенного студента и, несомненно, в высшей степени искусственно».

Нотт и через десять лет написал об этом весьма эмоционально: "Подстановка $\alpha \cdot \beta$ вместо $-S.\alpha\beta$ и $\alpha \times \beta$ вместо $V.\alpha\beta$ — пустяк, для которого нельзя найти никакого извинения, если не утверждать, что они базируются на более фундаментальных принципах, чем все, что появляется в кватернионном векторном анализе... Раздел о произведениях начинается, как обычно, с произвольных определений и, нам кажется, предъявляет серьезные требования к способности студента к запоминанию. Ценность этого раздела не очень ясна".

Примеры обвинений в "совершенно произвольных", "догматических определениях" можно приводить без конца. Критика по существу принадлежала только Нотту: "С самого начала существует серьезное возражение против такой формы произведения векторов. Не существует частного... Совершенно нецелесообразно (чтобы выразиться как можно мягче) использовать систему обозначений, живо напоминающих обозначения для умножения обычных алгебраических величин, но не имеющую аналогов процессов, с помощью которых множитель может быть найден делением..."

В самом деле, теория кватернионов – ассоциативная алгебра без делителей нуля. Операции же векторного анализа потеряли алгебраический характер, но это обстоятельство не казалось существенным ни Гиббсу, ни тем более Хевисайду, для которых основным было "...приспособить наши обозначения к требованиям физики. Это очень важно. Большая часть вычислений есть и всегда будет скалярной..." [97, с. 77].

Много раз в дискуссии возвращались к обсуждению обозначений; с обозначениями тесно связаны все проблемы дискуссии. Почти невозможно определить, где кончается вопрос об обозначениях скалярного и векторного произведений и где начинается вопрос о структуре исчисления – что является фундаментальным понятием: кватернион и полное кватернионное произведение или вектор и разные виды произведений? С обозначениями связаны и обвинения в плагиате: "Некоторые предложенные проф. Гиббсом обозначения очень остроумны и весьма пригодны для сокращения вывода различных уже известных результатов...". С обозначениями же связаны стремления Тэта "сбросить декартовы путы" и предупреждения Хевисайда не совершать "этой смертельной ошибки". Из-за нежелания "выучивать новую и неуклюжую пародию... на знакомые обозначения" Тэт просто не вникал в доводы и аргументы Гиббса и Хевисайда. Полемика ведь и началась с критики Тэтом обозначений. Правда, Гиббс с самого начала дискуссии отделил вопрос об обозначениях как второстепенный: "Критика относится, в частности, к обозначениям, но я полагаю, что под этим скрывается более глубокий вопрос о понятиях..." Хевисайд также считал этот вопрос "не жизненно важным": "Что касается единообразия обозначений... то я отважусь сказать, что оно придет со временем. Пока предложения поспешны. Мы первыми заставили людей изучить дело и думать о нем".

Когда переходили к сравнению операций и преобразований с целью показать, что именно кватернионные (векторные) понятия удобны на практике, то доходили до подсчета знаков, индексов, скобок в той или иной формуле. Здесь стороны также не смогли убедить друг друга. Кватернионисты превозносили лаконичность и удобство своего метода, а Гиббс категорически подытожил: "Существует мало формул, в которых достигается выигрыш в компактности при использовании кватернионов, но и этот выигрыш очень скромный и за счет ясности..."

В статье "Координаты против Кватернионов" вопрос об обозначениях рассматривал Кэли. Он сравнил компактную кватернионную формулу с карманным атласом: чтобы пользоваться им, надо его раскрыть; точно так же, чтобы понять кватернионную формулу, ее надо перевести в координатный вид. По мнению Кэли, чем сложнее задача, тем больше выигрыш в краткости, но тем нужнее развернутая координатная форма. Для того чтобы оценить Кэли, поясним, что уравнение кривой или поверхности второго порядка в теории кватернионов записывалось как $\rho\Phi\rho=-1$. Эта запись эквивалентна современной $(x, Ax) = 1$ или $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') = 1$. Но формулу $\rho\Phi\rho=-1$ противопоставляют не записи вида $(\mathrm{x}, A\mathrm{x}) = 1$, а развернутому выражению $Ax^2 + Bx + Cxy + Dy^2 + Ey + F=0$.

В полемике затрагивались и другие вопросы. Хевисайд неоднократно подчеркивал неоднозначность понятий в теории кватернионов (о чем еще Максвелл писал в письмах Тэту): когда "вектор рассматривается как вырожденный кватернион, то он и ведет себя как кватернион, т.е. в одном и том же уравнении один вектор является вектором, а второй – верзором. Или наоборот – один и тот же вектор может быть вектором в одном месте и кватернионом – в другом" [Там же, с.76].

Второй пример. Промелькнул и практически не обсуждался вопрос о распространении исчисления на пространство n измерений; Гиббс считал существенным преимуществом системы Грассмана и векторного анализа возможность легкого перехода к n-мерному случаю. Причем этот вопрос не стоял особняком, а был органически связан с определениями произведений: "Насколько функции $\mathrm{S}.\,\alpha\beta$ и $\mathrm{V}.\,\alpha\beta$ глубже проникают в природу вещей, чем любая другая функция от кватерниона, становится ясно при попытке распространить наши формулы на пространство четырех или более измерений... понятие кватерниона неприложимо к такому пространству... Но векторы в таком пространстве существуют, и должен быть векторный анализ для таких пространств". Введение пространства Гильберта через десять лет блестяще подтвердило правоту Гиббса. Но в то время Тэт недоумевал: «Примечательно, что возражения проф. Гиббса вызывает то в кватернионах, что я всегда считал их главным достоинством (после их совершенной естественности), а именно: что они "приспособлены для евклидова пространства". Что будут делать студенты-физики как таковые в пространстве более трех измерений?»

Для Гиббса, который ввел понятие фазового пространства, этот вопрос был важен, а кватернионисты писали, что обсуждать эту проблему все равно что начинать решение ирландского вопроса дебатами "Есть ли жизнь на Марсе?".

Время, когда разгорелась дискуссия, было благоприятным для векторного анализа. Экспериментальные работы Л. Больцмана и Г. Герца изменили отношение физиков к теории Максвелла: Герц в 1889 г. подтвердил электромагнитную природу света, предсказанную Максвеллом, установив, что электромагнитные волны распространяются с конечной скоростью, и доказав тем самым справедливость гипотез Фарадея и Максвелла, эксперименты Герца означали победу теории Фарадея–Максвелла.

Когда прокладывался трансатлантический кабель, вопросы телефонной связи из области научных абстракций перешли в самую злободневную реальность. Томсон, рассматривавший передачу сигнала как распространение тепла, пришел к выводу о том, что телефонная связь на далеких расстояниях невозможна, так как сигнал должен "расплываться". Хевисайд на основании электромагнитной теории получил противоположное заключение и указал, как улучшить передачу сигнала. В 1889 г. Томсон в речи в Институте инженеров-электриков признал правоту Хевисайда. Сохранилось письмо Томсона к Хевисайду: "Я очень рад узнать, что Вам было приятно мое упоминание Вашей работы. Я думаю, что не все понимают, с какой полнотой Вы применяете Ваши результаты к важным практическим задачам..."

Если Больцман и Герц не приняли векторного исчисления, то исследования Хевисайда по электромагнитной теории продемонстрировали эффективность векторных методов, удобство этого языка для физических исследований. Хевисайд оказал неоценимые услуги для распространения векторного анализа.

Непосредственно после дискуссии (в 1899 г.) Гиббса попросили написать статью в "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften". Он отказался, сославшись на неотложную работу над книгой по статистической механике; статья была написана М. Абрагамом (1875–1922), за этой статьей последовали еще публикации в этой же энциклопедии, книги Фёппля, Фёппля–Абрагама, книга Гиббса–Уилсона и "Элементы векторного анализа" Гиббса в собрании его трудов (1906 г.). Началось наступление векторного анализа на теорию кватернионов и предсказанное Хевисайдом проникновение векторов в физику и геометрию. Признанием важности векторного исчисления был и тот факт, что IV Международный математический конгресс в Риме (апрель 1909 г.) постановил создать комиссию для изучения вопроса унификации векторных обозначений. Комиссия была сформирована к октябрю 1909 г. В нее вошли Абрагам, Болл, Адамар, Ланжевен, Лори, Марколонго, Прандтль, Стеклов, Уайтхед, Уилсон.

На заключительном заседании V математического конгресса (Лондон, 1912 г.) было доложено, что предварительные обсуждения еще не закончены, комиссия не готова представить рекомендации, но надеется осуществить это на следующем конгрессе. Обещание осталось невыполненным из-за мировой войны.

"Предварительные обсуждения" были развернуты на страницах математических журналов, в частности в L'Enseignement mathématique" (1909–1912 гг). В серии публикаций обсуждались предложения итальянских математиков Ч. Бурали-Форти (1861–1931) и Р. Марколонго (1862–1943) об установлении новой символики – "простой и абсолютной". Эти предложения были доложены на конгрессе в Риме и опубликованы в 1909 г. Обозначения выработаны, по-видимому, под сильнейшим влиянием Пеано, увлеченного в это время и созданием международных языков, и втискиванием преподавания математики в прокрустово ложе "математических формул".

Публикация Бурали-Форти и Марколонго представляет собой таблицу и несколько строк введения: "В момент, когда векторное исчисление все больше и больше проникает в прикладные науки, необходимость иметь единообразные обозначения становится все более настоятельной..."

Таблица, озаглавленная "Рациональные обозначения для минимальной векторной системы, предложенные профессорами Ч. Бурали-Форти и Р. Марколонго", содержала сводку следующих "анкетных данных": 1) название понятия; 2) обозначение, предлагаемое для употребления; 3) фамилия автора, впервые использовавшего именно это обозначение; 4) обозначения, осужденные на исключение; 5) главные причины отклонения этих последних обозначений.

Позиции авторов видны из нескольких примеров.

Вектор, направленный из точки A в точку B, предложено обозначать через $B-A$, как это делал Грассман. Обозначения AB и $\overline{AB}$ должны быть отброшены, так как: 1) это обозначение надо сохранить для произведения точек в теории Грассмана и 2) так как исчисление, возникающее при таком обозначении векторов, не имеет аналогий с алгеброй. Авторы допускали обозначение векторов жирной печатью.

Длину вектора, по мнению Бурали-Форти и Марколонго, нужно называть "величина или модуль" и обозначать mod a. Первые авторы, использовавшие такие обозначения – Арган и Коши. Обозначения длины вектора $|a|$, введенное в 1903 г. Лоренцем и напоминавшее о связи векторов с комплексными числами, нужно исключить по следующим причинам: "mod *символ функции*, который подчиняется всем алгебрическим законам, поэтому его надо писать *перед* переменной. В обозначении же $|a|$ символ функции есть знак ||, который стоит по обе стороны от переменной. В исчислении Грассмана этот символ вызовет путаницу с обозначением | – *индексом*, символом функции, который стоит перед вектором..."

Бурали-Форти и Марколонго отклонили все обозначения векторного произведения $V.ab$, $V(a, b)$, $[a \cdot b]$, $[a, b]$, $a \times b$ и предложили собственное $a \wedge b$. Также отвергнуты обозначения $-S.ab$, $S(a, b)$, (a, b), ab для скалярного произведения векторов. Предпочтение отдано обозначению $a \times b$ для скалярного произведения, которое использовали Грассман, Резаль, О.И. Сомов. Обоснование: символ *операции* должен стоять *между* переменными. По этой причине отброшены $S.ab$ и $V.ab$ и их модификации. По другим соображениям отклонены обозначения операций через (ab), $[a.b]$: "В обозначениях $(a.b)$, $[a, b]$ *форма* скобок должна характеризовать две функции, тогда как в алгебре форма скобок *случайна;* обозначения (a, b), $[ab]$ противоречат общим законам"... и т.д.

Далее авторы предлагают ввести три функции: градиент u, дивергенция u, ротор u и обозначения для них – grad u (Максвелл, Риман-Вебер), div u (Клиффорд), rot u (Лоренц) и исключить из употребления ∇. "Этот символ, приспособленный к кватернионам, неприложим в минимальной векторной системе". Авторы поясняют: основной принцип в математической логике – равенство $x = y$ означает, что "все свойства x суть также свойства y", а символ ∇ значит в одном случае одни операции, а в другом – совсем другие. "Допустимо ли в математике одно и то же название, один и тот же знак для обозначения различных вещей?.. Мы не должны следовать этим путем, который приводит к неминуемой путанице". Иначе говоря, то, что казалось достоинством в теории кватернионов и Хевисайду в векторном анализе, с точки зрения специалистов по математической логике – иероглиф.

Реплика самого Пеано об обозначениях имела "общематематическое" значение: "Чтобы иметь ясные и строгие обозначения без двусмысленностей, необходимо, чтобы каждый символ выражал одну-единственную идею и каждая идея выражалась бы одним-единственным символом. Скобки введены в арифметике для того, чтобы группировать символы; следовательно, недопустимо, чтобы они имели другое значение... Нельзя использовать скобки для указания функции; нельзя обозначать через (ab) и $[ab]$ произведения... В формуле $f(x)$ нельзя в скобках указывать аргумент; нужно вернуться к обозначению Лагранжа fx.

Корень представляет собой и знак радикала, и скобки; надо исключить его, записывая $\surd\,(a+b)$ вместо $\sqrt{a+b}$; предлагаемая запись имеет также и известные типографские преимущества".

Предложения вызвали оживленное обсуждение. Принявшие участие в обсуждении вопроса расходились между собой в частностях, но были единодушно против mod a и за сохранение знака $||$ и символа ∇.. Безоговорочного одобрения предложения не нашли ни в одной из школ. Самыми резкими были отзывы кватернионистов, которых возглавлял Нотт. Итогом его критики было: "В системе векторного анализа, представленной Бурали-Форти и Марколонго, я не вижу единого метода. Их обозначения имеют различные истоки, и во всех случаях им не хватает выразительности. Система... нелогична в основе и не имеет никаких прав называться рациональной".

Наиболее примирительную позицию, как и в предыдущей дискуссии, занял Макфарлан: "... Предложения Бурали-Форти и Марколонго не кажутся много вносящими в решение проблемы унификации обозначений; более того, эти предложения... содержат дефекты в некоторых пунктах и вводят новый символ $\wedge$. Зачем увеличивать уже существующую анархию в обозначениях вместо того, чтобы уменьшать ее?.. Нужно достигнуть унификации или примирения принципов кватернионов с векторным анализом, прежде чем фиксировать обозначения. Мне кажется, что первым шагом должна быть логическая унификация теории кватернионов и векторного анализа между собой и со скалярным анализом".

В систематических ответах на критические замечания и предложения Бурали-Форти и Марколонго "воевали на два фронта" – против теории кватернионов и против векторного анализа: "Для Нотта спасение только в кватернионах, для Уилсона – только в системе Гиббса. Мы показали, что кватернионы несостоятельны и что система Гиббса, вообще говоря, ложна; мы берем от обеих сторон то хорошее, что в них есть, и строим систему, которая может либо существовать сама по себе, либо целиком быть выведенной из обширной системы Грассмана–Пеано". Итак, отмечая "пристрастность" различных школ и нежелание поступиться чем-нибудь из привычных понятий и обозначений в первой половине цитаты, авторы впадают в тот же грех во второй половине. Более того, среди последователей Грассмана также не было единства терминологии и символики, как и в системах Гиббса, Хевисайда, Макфарлана: вероятно, это положение естественно для периода формирования исчисления, однако можно заметить, что, как только нужно было "зарезервировать" какой-нибудь символ для учения Грассмана, отступали здравый смысл и "демократия" при обсуждении.

Мировая война прервала обсуждение вопроса, проблема унификации обозначений в векторном исчислении осталась (и остается в известном смысле) нерешенной. В послевоенные времена встречались высказывания, в некотором смысле противоположные "экстремистским" требованиям навести порядок в исчислении, — о том, что не так уж много разнобоя и после первых же страниц ясно, каким обозначениям следует автор, что в некоторых отношениях даже полезно сличать разные обозначения и смотреть с разных точек зрения на предмет...

Интересно проследить, как менялось отношение сторонников теории кватернионов к векторному анализу. В 1893 г. Тэт писал о "так называемом Векторном Анализе". Через десять лет Нотт уже употребляет название без иронии, доказывая, что "в двух великих трудах Гамильтона содержится полная система векторного анализа, развитая до высокого уровня". К следующей дискуссии (1911 г.) Нотт писал так, будто Гиббс и Хевисайд — признанные последователи Гамильтона: "Теперь, однако, ранние надежды Гамильтона и Тэта реализованы в растущем использовании векторных методов и символизма, особенно в их физических приложениях". Эта же эволюция взглядов видна и в следующих двух высказываниях Нотта. В первой дискуссии Нотт утверждал: "У Гиббса нет ничего, чего не было бы у Гамильтона"; во второй дискуссии он же: "В омографии Бурали-Форти и Марколонго нет ничего, чего не было бы у Гиббса".

Закончившаяся как бы вничью дискуссия разбилась затем на множество мелких ручейков. Так, например, Вин в Германии не упускал случая в своих публикациях протестовать против "векторной стенографии", в России академик А.Н. Крылов говорил, что векторные методы экономят бумагу, но не помогают мышлению. Когда в середине 30-х годов обсуждался вопрос, вводить ли векторное исчисление в преподавание в вузах СССР, почти единодушным было решение "нет". "За векторы" из крупных ученых высказывались только Н.С. Кошляков и Н.И. Идельсон. Вскоре пионеры преподавания векторного анализа в СССР были арестованы. Это В.С. Игнатовский, Я.Н. Шпильрейн, И.Н. Бронштейн. Надо упомянуть, что книга Игнатовского "Die Vektoranalysis und uhre Anvendung in der Theoretischen Physik" (1909 г.) оказала значительное влияние на "инвариантное" построение теории векторного исчисления. Его определения буквально повторены во многих руководствах начала века (например, в переизданиях книги Р. Ганса и др.).

8. Кватернион умер, да здравствует Кватернион!

Хотя теория кватернионов и не стала универсальной, всеохватывающей наукой, она связана многочисленными нитями с несколькими математическими и физическими науками, она доставила им важные идеи и стимулировала исследования по важнейшим направлениям. Кроме линейной алгебры (многие понятия которой развивались не из линейных уравнений, а из теории кватернионов) и векторного анализа, назовем теорию гиперкомплексных чисел и теорию ассоциативных алгебр.

Уникальное место исчисления кватернионов определено теоремой Фробениуса (1878 г.). Единственными ассоциативными алгебрами над полем действительных чисел, в которых произведение равно нулю только при равенстве нулю хотя бы одного множителя, являются поле действительных чисел, поле обыкновенных комплексных чисел и алгебра действительных кватернионов.

Ассоциативные алгебры исследованы американскими математиками – отцом и сыном – Б. Пирсом и Ч.С. Пирсом; последний доказал, что все линейные ассоциативные алгебры могут быть выражены в матричной форме. В частности, теория кватернионов с единицами $1, i, j, k$ тождественна матричной алгебре с матрицами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одно из направлений исследований по системам комплексных чисел восходит к "Предварительному очерку бикватернионов" (1873 г.) Клиффорда (1845–1879). Основополагающими трудами здесь являются "Теория винтов" Болла и работы А.П. Котельникова (1865–1944) по винтовому исчислению. Многие из важных результатов Котельникова переоткрыты Штуди, который связал исчисление с теорией групп.

После того как вместе с теорией Максвелла векторные методы вошли в физику, векторное исчисление заняло бесспорное место в математике. К этому же времени относится и замечательное распространение языка и аппарата векторного исчисления на функциональный анализ и теорию интегральных уравнений. Когда в 1905 г. Э. Шмидт (1876–1959) перенес геометрический язык на гильбертово пространство, то новым был, по существу, только один момент: результаты Пинкерле и Фреше излагались посредством векторного анализа – его понятия, язык и методы, видоизмененные подходящим образом, сразу же стали рабочим инструментом теории интегральных уравнений.

В течение XX в. время от времени предпринимались попытки сделать теорию кватернионов языком современной физики. Так, шведский ученый О. Фишер написал две книги (1951 и 1957 гг.), в которых он излагает большую часть физики в терминах кватернионов Гамильтона. Тот факт, что матрицы, которым эквивалентны единицы $1, i, j, k$, совпадают с матрицами Паули, является источником новых и новых надежд приложить теорию кватернионов к физическим наукам. В статье, написанной к столетнему юбилею теории кватернионов, который отмечался в Англии в 1945 г., Дирак устанавливает связь между кватернионом $\bar{q}$ и вектором ξ в пространстве-времени таким образом, чтобы перенести в теорию относительности аппарат исчисления кватернионов. Оказалось, что уравнения Максвелла, записанные в кватернионной форме, являются аналогом условий Коши—Римана, т.е. условиями кватернионной аналитичности. Исследование ее роли в физике еще не завершено.

В последние годы частичный возврат от векторов к кватернионам происходит в таких разделах физики, как квантовая электродинамика, теория элементарных частиц, теория твердого тела, теория калибровочных полей, которая является обобщением теории Максвелла. В диссертации Ю.А. Курочкина "Кватернионы и некоторые приложения их в физике" (1976 г.) рассмотрены возможные приложения кватернионов и дан обзор таких работ.

В самое последнее время развиваются новые и тонкие методы для изучения геометрических свойств пространства-времени физического мира. Одним из создателей таких методов является американский физик Рожер Пенроуз. Он ввел в рассмотрение модель на основе четырехмерного комплексного векторного пространства. Его книга "Structure of space time" (N. Y., 1968) переведена на русский язык (1972 г.) и уже породила обширную литературу, в частности, с ней связаны статьи Ю.И. Манина "Калибровочные поля и голоморфная геометрия", С.Г. Гиндикина и Г.М. Хенкина "Преобразование Пенроуза и комплексная интегральная геометрия" (Итоги науки. Современные проблемы математики, 1981. Т. 17).

Отметим, что, во-первых, эти исследования охватывают широчайший круг проблем: космологических (доказано необходимое существование сингулярностей пространства-времени, связанных с наличием "черных дыр", и т.д.), квантовомеханических (туннельный переход) и теории элементарных частиц, а во-вторых, что эти исследования потребовали разработки тонких и сложных математических методов и, в частности, использования теории кватернионов.

Заключение

Уильям Роуэн Гамильтон... Недаром говорят, что Ирландия – страна Джонатана Свифта и Уильяма Гамильтона. Все, кто получил то или иное естественно-научное или техническое образование, знают, что такое гамильтониан (прежде всего в задачах механики, физики и техники). О самом же Гамильтоне, придумавшем функцию, которую назвали гамильтонианом, знают очень мало или совсем ничего не знают. А ведь он не только создал гамильтонову динамику, но и теоретически предсказал внешнюю и внутреннюю коническую рефракцию света, создал исчисление кватернионов. Все эти открытия важны и принципиальны не только по своему содержанию, но и по масштабу того влияния, которое они оказали на развитие самых различных наук.

Своеобразной и внутренне противоречивой личностью был королевский астроном Ирландии, профессор астрономии (никогда, кстати, не занимавшийся по-настоящему астрономией), крупнейший ученый, поэт, оратор, полиглот, математик. Он буквально всю сознательную жизнь не выпускал пера из рук, заполняя вычислениями огромные тома рукописей. О нем по праву можно сказать то, что было сказано по поводу кончины великого Эйлера: он прекратил жить и вычислять. И в то же время интенсивная эмоциональная жизнь – любовь, болезненная тяга к алкоголю, личное одиночество и непрерывное творческое горение. Он бывал в Англии, но никогда не пересекал Ламанш и не был в континентальной Европе, где находились крупнейшие математические школы.

Что же создал этот ученый и человек, что дало ему бесспорное право быть классиком науки, быть бессмертным в памяти людей?

По всей вероятности, каждый читатель нашей книги знает, что Леверье и Адамс в результате поистине грандиозных вычислений "на кончике пера" открыли ранее неизвестную планету. Это в некотором смысле слова доказало не только мощь математики как орудия познания, но и математически выразимую структуру Вселенной. Однако, к сожалению, это замечательное открытие отодвинуло далеко в тень выполненную ранее не менее в принципе великую работу Гамильтона, который также без каких-либо дополнительных гипотез, а только с помощью гро-

Бюст Гамильтона в Ирландской академии наук

моздких утомительных расчетов[1] предсказал существование ранее неизвестных эффектов внутренней и внешней конической рефракции света. Они были обнаружены Х. Ллойдом экспериментально на основе прямого указания Гамильтона, и характер их таков, что вряд ли они были бы найдены без математического предвидения. Гамильтон не только сделал это, но и понял внутреннее единство природы в ее "математической структуре", дав великолепный пример этого в своей замечательной оптико-механической аналогии (оказавшейся столь продуктивной в процессе создания квантовой механики, и не только в этом).

Исключительно велика роль Гамильтона в развитии механики, где им созданы основы гамильтоновой динамики. Великое достижение классической динамики состоит в том, что все свойства и движение динамической системы полностью определены и ее законы удалось выразить через одну величину H (функция Гамильтона). Языку динамики присущи непротиворечивость и

[1] В настоящее время эти работы переведены на русский язык и опубликованы в книге: *Гамильтон У.Р.* Избр. труды. Сер. "Классики науки". М.: Наука, 1991.

полнота. Структура динамики и поныне поражает наше воображение. Канонические уравнения Гамильтона, задающие временные изменения q_i и p_i через производные гамильтониана, содержат в себе общие свойства всех динамических изменений. Гамильтонов формализм – несомненный триумф математизации естествознания.

Вариационный принцип Гамильтона выражает в простой и инвариантной форме уравнения движения и уравнения полей, заключает в себе синтез дискретного и континуального аспектов движения и является выражением обобщенного принципа причинности в физике мироздания. Зная гамильтониан, мы можем (хотя бы в принципе) решать все возникающие динамические задачи. Многие ученые XIX и XX вв. справедливо отмечали, что гамильтонова формулировка динамики является одним из величайших достижений в истории науки (и притом не только физико-математических наук). В дальнейшем развитии возникли замечательные по глубине проблемы: интегральные инварианты, неинтегрируемые системы, канонические преобразования, теорема Нетер, теорема возврата.

Создание исчисления кватернионов – еще одно научное достижение Гамильтона; он замыслил исчисление как объединение всех ветвей математики – теории комплексных переменных, алгебры, анализа, геометрии, сферической тригонометрии и т.д. Применение кватернионов в физике приобретает реальные очертания в связи с открытием квантовой механики, значение же векторного исчисления, рожденного из теории кватернионов, невозможно переоценить.

Гамильтон, кроме того, написал много стихотворений (он примыкал по духу своей лирики к так называемой "озерной школе"), открыл ряд частных теорем в алгебре, теории рядов и т.д.

В эволюции человеческого познания труды Гамильтона сделали его имя бессмертным:

> Гордись не тем, что блещет полмгновенья,
> Но тем, что недоступно для забвенья.
>
> Эдмунд Спенсер[2]

[2] *Спенсер Э.* Английский сонет XI–XIX веков. М.: Радуга, 1990. с. 87.

Основные даты жизни и деятельности У.Р. Гамильтона

3–4 августа 1805 – ночью с 3 на 4 августа в Дублине родился Уильям Роуэн Гамильтон.

1823 – поступил в Тринити-колледж.

1824 – знакомство и дружба с Вордсвортом и М. Эджуорт.

– первая научная работа "О каустиках".

1827 – окончил Тринити-колледж.

1825–1832 – работа над "Теорией систем лучей" и частичная публикация.

1827 – начало многолетней переписки с Августом де Морганом.

– избран профессором астрономии, королевским астрономом и директором Обсерватории Ирландской академии наук в Дансинке.

– избран членом Ирландской академии наук.

1830 – начало занятий алгеброй.

1832 – предсказание эффекта внутренней и внешней конической рефракции света, подтвержденное экспериментальным открытием Х. Ллойда.

1833 – женитьба на Е. Бейли.

1834 – публикуются в "Philosophical Transactions" две основные работы по динамике.

– сформулирован вариационный принцип (Гамильтона).

1835 – за работы по геометрической оптике получил золотую медаль Королевского общества и медаль Кэннингема Ирландской академии наук.

– возведен в рыцарское достоинство.

1837 – избран президентом Ирландской академии наук.

1838 – избрание членом-корреспондентом Российской академии наук.

1839 – создание "скотодинамики" – динамики темноты.

16 октября 1843 – открытие некоммутативности умножения, кватернионов.

1843 – 1865 – работы по исчислению кватернионов и его приложениям.

1846 – отставка с поста президента Ирландской академии наук.

1848 – чтение лекций об исчислении кватернионов в Эдинбургском университете.

1853 – издание "Лекций о кватернионах".

1854 – начало переписки с П.Г. Тэтом.

1865 – избран иностранным членом Американской академии наук.

5 августа 1865 – смерть Уильяма Роуэна Гамильтона.

1866 – выход в свет не законченных при жизни Гамильтона "Elements of quaternions".

Библиография

Список трудов У.Р. Гамильтона

1. Review of two scientific memoirs of James MacCullagh B.A. // Nat. Mag. Dublin, 1830. Vol. 1. P. 145–149.
2. Theory of systems of rays (1827) // Trans. Roy. Irish Acad. 1828. Vol. 15. P. 69–174; 1830. Vol. 16, pt 1. P. 4–62. 1831. Vol. 16, pt 2. P. 93–125; 1837. Vol. 17. P. 1–144.
3. On the error of a received principle of analysis, respecting functions which vanish with their variables // Ibid. 1830. Vol. 16, pt 1. P. 63–64; 1831. Vol. 16, pt 2. P. 129–130.
4. On a view of mathematical opties // Brit. Assoc. Rep. 1831–1832. P. 545.
5. Introductory lecture on astronomy // Dublin Univ. Rev., 1833. Jan. P. 72.
6. Review of Arago's work ''The comet'', translated by colonel Charles Goold. L., 1833 // Ibid. Apr. P. 365; Two slight contributions entitled: The comet will be found // Dublin Penny J. 1832. Dec. P. 207–208. Jan. P. 223–224.
7. On some results of the views of characteristic function in opties // Brit. Assoc. Rep. 1833. P. 360–370.
8. On a new method of investigating the relations of surfaces to their normals, with results respecting the curvatures of ellipsoids // Dublin Univ. Rev. 1833. July. P. 653.
9. On the effect of aberration in prismatic interference // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 191–194. – Idem // Poggendorff's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29, S. 316–318.
10. On the undalatory time of passage of light through a prism // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 284–287. – Idem // Poggendorff's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29. S. 323–327.
11. Note on Mr Potter's reply [respecting his experiment of prismatic interference] // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 371. – Idem // Poggendorff's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29. S. 328–329.
12. On a general method of expressing the paths of light and of the planets, by the coefficients of a characteristic functions // Dublin Univ. Rev. 1833. Oct. P. 795–826.
13. On the application to the dynamics of a general mathematical method previously applied to optics // Brit. Assoc. Rep. 1834. P. 513–518.
14. On conjugate functions, or algebraic couples, as tending to illustrate generally the doctrine of imaginery quantities and as confirming the results of Mr [J.T.] Graves respecting the existence of two independent integers in the complete expression of an imaginary logarithm // Ibid. P. 519–523.
15. On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of the one central relation or characteristic function // Philos. Trans. Roy. Soc. 1834. Pt 2. P. 247–308. – Idem // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 69–80, 200–211.
16. Remarques sur un mémoir de M. Plana // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 27–30.
17. Address as Secretary of the Dublin meeting of the British Association // Brit. Assoc. Rep. 1835. P. XLI–LVI. – Idem // Philip. Dixon Hardy's Proc. Fifth Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci. Dublin, 1835. P. 28–34.
18. On a new theory of logologues. On a new theory of varying orbits // Brit. Assoc. Rep. 1835. Pt 2. P. 7.
19. Second essay on a general method in dynamics // Philos. Trans. Roy. Soc. 1835. Pt 1. P. 95–114.

20. Inquiry into the validity of a method recenhly proposed by G.B. Jerard / Esq. for transforming and resolving equations of elevated degrees // Brit. Assoc. Rep. 1836. P. 295–348.
21. Calculus of principal relations // Ibid. 1837. Pt 2. P. 41–44.
22. Theorem connected with question of resolving in finite terms the equation of the fifth degree // Philos. Mag. 1836. Vol. 8. P. 538–543; Vol. 9. P. 28–32.
23. On differences and differential of function of zero (1831) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17. P. 235–236. – Idem // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 235–237.
24. Exposition of the argument of Abel // Brit. Assoc. Rep. 1837. Pt 2. P. 1
25. New applications of the calculus of principal relations; and exposition of Mr Turner's theorem of odd numbers. etc. // Ibid. Pt 4. P. 1.
26. Theory of conjugate functions or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time (1835) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17. P. 193–422.
27. On the propagation of light *in vacuo* // Brit. Assoc. Rep. 1838. Pt 2. P. 2–6.
28. On the propagation of light in crystals // Ibid. P. 6.
29. On the argument of Abel. respecting the impossibility of expressing a root of any general equation above the fourth degree, by any finite combination of radicals and rational functions (1837) // Trans. Roy. Irish Acad. 1839. Vol. 18. P. 171–259.
30. Investigations respecting equations of the fifth degree (1837) // Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 76–80.
31. Inaugural address as president of the Royal Irish Academy (Jan. 8, 1830) // Ibid. P. 107–121.
32. Address as President of the Royal Irish Academy on Professor MacCullagh's paper on the laws of crystalline reflexion and refraction (June 25, 1838) // Ibid. P. 212–221.
33. On the dynamics of light (Jan. 14 and Febr. 11, 1839) // Ibid. P. 245, 267–270.
34. Notice of a singular appearance of the clouds observed on the 16th of December, 1838 (Jan. 14, 1839) // Ibid. P. 249.
35. Address as President of the Royal Irish Academy on Dr. Apjohn's researches on the specific heats of gases (Febr. 25, 1839) //Ibid. P. 276–284.
36. Researches respecting vibration connected with the theory of light (June 24, 1839) // Ibid. P. 341–349.
37. Address as President of the Royal Irish Academy on Mr Petrie's on the history and antiquities of Tara Hill (June 24. 1839) // Ibid. P. 350–354.
38. On fluctuating function (June 22, 1840) // Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 475–477. – Idem // Trans. Roy. Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 264–321.
39. On a mode of deducing the equation of Fresnel's wave // Philos. Mag. 1841. Vol. 19. P. 381–383.
40. New demonstration of Fourier's theorem (June 28, 1841) // Ibid. Roy. Irish Acad. 1844. Vol. 2. P. 129.
41. On the focal lengths and aberrations of a thin lens of uniaxial crystal. bounded by surfaces which are of revolution about its axis // Philos. Mag. 1841. Vol. 19. P. 289–294.
42. On certain discontinuous integrals connected with the development of the radical which represents the reciprocal of the distance between two points // Ibid. 1842. Vol. 20. P. 288–294.
43. On a mode of expressing fluctuating or arbitrary functions by mathematical formulae // Brit. Assoc. Rep. 1842. Pt. 2. P. 10.
44. On a theorem in the calculus of differences // Ibid. 1843. P. 2–3.

45. On some investigations connected with the calculus of probabilities // Ibid. P. 3–4.
46. On equations of the fifth degree: and especially on a certain system of expressions connected with those equations which Professor Badano has recently proposed (1842) // Trans. Roy. Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 329–376.
47. On an expression for the numbers of Bernoulli by means of a definite integral, and on some connected processes of summation and integration // Philos. Mag. 1843. Vol. 23. P. 360–377.
48. On the composition of forces (Nov. 8, 1841) // Proc. Roy. Irish Acad. 1844. Vol. 2. P. 166–170.
49. On the day of the vernal equinox at the time of the Council of Nice (May 9, 1842) // Ibid. P. 249–250.
50. On Dr. Robinson's table of mean refractions (May 22, 1843) // Ibid. P. 400–401.
51. Address as President of the Royal Irish Academy on Dr. Kane's researches on the nature of ammonia (June 26, 1843) // Ibid. P. 420–422.
52. On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions (Nov. 13, 1843) // Ibid. P. 424–434.
53. On approximating to the Calculation of Exlipses (May 27, 1844) // Ibid. P. 597.
54. On quaternions (Nov. 11, 1844) // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 1–16.
55. On Quaternions (June 23, 1845) // Ibid. P. 109.
56. On Quaternions (Jule 20, 1846) // Ibid. P. 273–292.
57. On Quaternions // Philos. Mag. 1844. Vol. 25. P. 10–13, 241–246, 489–495; 1845. Vol. 26. P. 220–224; 1846. Vol. 29. P. 26–31, 113–122, 326–328; 1847. Vol. 30. P. 458–461; Vol. 31. P. 214–219, 278–293, 511–519; 1848. Vol. 32. P. 367–374; Vol. 33. P. 58–60; 1849. Vol. 34. P. 294–297, 340–343, 425–439; Vol. 35. P. 133–137, 200–204; 1850. Vol. 36. P. 305–306.
58. On Quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1844. Pt. 2. P. 2; 1845. Pt 2. P. 3.
59. Exercises on quaternions // Cambridge and Dublin Math. J. 1849. Vol. 4. P. 161–168.
60. Researches respecting quaternions. First. Ser. // Trans. Roy. Irish Acad. 1848. Vol. 21. P. 199–296.
61. Sur les quaternions // Nouv. ann. math. 1853. T. 12. P. 275–283.
62. On symbolical geometry // Cambridge and Dublin Math. J. 1846. Vol. 1. P. 45–67, 137–154, 256–263; 1847. Vol. 2. P. 47–52, 130–133, 204–209; 1848. Vol. 3. P. 68–84, 220–225; 1849. Vol. 4. P. 84–89, 105–118.
63. On theorems of central forces (Nov. 30, 1846) // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 308–309.
64. A new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction: (The law of circular hodograph, Des. 14, 1846) // Ibid. P. 344–353.
65. On a theorem of hodographic isochronism (Mar.16, 1847 and May 10, 1847) // Ibid. P. 417, 465, 466.
66. On the application of the calculus of quaternions to the theory of the Moon (June 14, 1847) // Ibid. P. 507–520.
67. Illustrations from geometry of the theory of algebraic quaternions (Febr. 10, 1845) // Ibid. App. P. XXXII–XXXVI.
68. On the application of the method of quaternions to some dynamical questions (July 14 and 21, 1845) // Ibid. P. XXXVI–L.
69. Additional applications of the theiry of algebraic quaternions (Des. 8, 1845) // Ibid. P. LI–LX.

70. On an isoperimetrical problem treated by the calculus of quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1847. Pt. 2. P. 4.
71. On some applications of the calculus of the quaternions to the theory of Moon // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 507–520.
72. On additional applications of quaternions to surfaces of the second order (Now. 30, 1847) // Proc. Roy. Irish Acad. 1850. Vol. 4. P. 14–19.
73. On quaternions and the rotation of a solid body (Jan. 10, 1848) // Ibid. P. 38–56.
74. On quaternions and the determination of the distances of any recently discovered comet or planet. (Febr. 28, 1848) // Ibid. P. 75.
75. On the double mode of generation of an ellipsoid (May 22, 1848) // Ibid. P. 173.
76. Additional theorems respecting certain reciprocal surfaces (June 26, 1848) // Ibid. P. 192–193.
77. On quaternions applied to problems respecting the construction of a circle touching three given circles on a sphere, and a sphere touching four given spheres (Dec. 11, 1848) // Ibid. P. 255.
78. On theorems relating to surfaces, obtained by the method of quaternions (Febr. 26. 1849) // Ibid. P. 306–308.
79. On an equation of the ellipsoid (Apr. 9, 1849) // Ibid. P. 324–325.
80. On the inscription of certain "gauche" polygons in surfaces of the second degree (Apr. 9, 1849) // Ibid. P. 325–326.
81. On the construction of the ellipsoid by two sliding spheres (Apr. 23, 1849) // Ibid. P. 341–342.
82. On a theorems respecting ellipsoids, obtained by the method of quaternions (May 28, 1849) // Ibid. P. 349–350.
83. On some results obtained by the quaternion analysis respecting the inscription of "gauche" polygons in surfaces of the second order (June 25, 1849) //Ibid. P. 380–387.
84. On the some new applications of quaternions to geometry // Brit. Assoc. Rep. 1849. Pt. 2. P. 1.
85. On "gauche" polygons in central surfaces of the second order (May 13, 1850) // Proc. Roy. Irish Acad. 1850. Vol. 4. P. 541–557.
86. On polygons inscribed on a surface of the second order // Brit. Assoc. Rep. 1850. Pt. 2. P. 2.
87. On continued fractions in quaternions // Philos. Mag. 1852. Vol. 3. P. 371–373; 1852. Vol. 4. P. 303; 1853. Vol. 5. P. 117–118, 236–238, 321–326.
88. On a proof from quaternions of the celebrated theorem of Joachimsthal (Jan. 27, 1851) // Proc. Roy. Irish Acad. 1853. Vol. 5. P. 71.
89. A generalization of Pascal's theorem (Mar. 16, 1851) // Ibid. P. 100–101.
90. On the nature and properties the aconic function of six vectors (June 23, 1851) // Ibid. P. 177–186.
91. On the connexion of quaternions with continued fractions, and quadratic equations (Dec. 8. 1851 and May 24, 1852) // Ibid. P. 219–221, 299–301.
92. On biquaternions // Brit. Assoc. Rep. 1852. Pt. 2. P. 2.
93. On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions (Febr. 28, 1853) // Proc. Roy. Irish Acad. 1853. Vol. 5. P. 388–390.
94. On the geometrical demonstration of some theorems obtained by means of the quaternion analysis (Apr. 11, 1853) // Ibid. P. 407–415.
95. Theorem concerning polygonic syngraphy (Jyne 13, 1853) // Ibid. P. 474–475.
96. Lectures on quaternions. Dublin, 1853. LXXII. 736 p.

97. On the integrations of sertain equations (Febr. 27, 1854) // Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 62–63.
98. On the celebrated theorem of Dupin (May 3, 1854) // Ibid. P. 86–88.
99. On some extensions of quaternions (June 26, 1854) Ibid. P. 114–115.
100. On some extensions of quaternions // Philos. Mag. 1854. Vol. 1. P. 492–499; Vol. 8. P. 125–137, 261–269; 1855. Vol. 9. P. 46–51, 280–290.
101. On an extention of quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1854. Pt 2. P. 1.
102. On the solution of the equation of Laplace's functions (Febr. 26, 1855) // Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 181–185.
103. Symbolical extensions of quaternions and geometrical applications of quaternions (June 11, 1855) // Ibid. P. 250, 360, 311.
104. On the conception of the anharmonic quaternion, and on its application to the theory of involution in space // Brit. Assoc. Rep. 1855. Pt 2. P. 7.
105. Memorandum respecting a new system of roots of unity: The icosian calculus // Philos. Mag. 1856. Vol. 12. P. 446.
106. Account of the icosian calculus (Nov. 10, 1856 and Febr. 9, 1857) Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 415–416; P. 462.
107. On a general expression by quaternions for cones of the third order (May 11 and 25, 1857) // Ibid. P. 506; P. 512.
108. On a certain harmonic property of the envelope of the chord connecting two corresponding points of the Hessian of a cubic cone (June 22, 1857) // Ibid. P. 524.
109. On some applications of quaternions to cones of the third degree // Brit. Assoc. Rep. 1857. Pt 2. P. 3.
110. On the icosian calculus // Ibid. P. 5.
111. On the calculation of the numerical values of a certain class of multiple and definite integrals // Philos. Mag. 1857. Vol. 14. P. 375–382.
112. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave-surface for biaxial crystals (Febr. 28 and May 9, 1859) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 122–124, 163.
113. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave-surface for biaxal crystals // Brit. Assoc. Rep. 1859. Pt 2. P. 248.
114. On some quaternion equation connected with Fresnel's wave-surface for biaxal crystals // Nat. Hist. Rev. 1859. Vol. 6. P. 240–242, 365.
115. On anharmonic coordinates (Apr. 9; May 28; May 25, 1860) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 286–289, 329, 350–354.
116. On anharmonic coordinates // Nat. Hist. Rev. 1860. Vol. 7. P. 242–246, 325–327, 506–509.
117. On geometrical nets in space (June 24, 1861) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 532–582.
118. On geometrical nets in space // Brit. Assoc. Rep. 1861. Pt 2. P. 4.
119. Quaternion proof a of theorem of reciprocity of curves in space // Ibid. 1862. Pt 2. P. 4.
120. Elementary proof that eight perimeters of the regular inscribed polygon of twenty sides exceed twenty five diameters of the circle // Philos. Mag. 1862. Vol. 23. P. 267–269.
121. On a new and general method of inverting a linear and quaternion function (June 9, 1862) // Proc. Roy. Irish Acad. 1864. Vol. 8. P. 182–183.
122. On the existence of a symbolic and biquadratic equation, which is satisfied by the symbol of linear operations in quaternions (June 23, 1862) // Ibid. P. 190–191.
123. On the existence of a symbolic and biquadratic equation which is satisfied by the symbol of linear or distribute operation on a quaternion // Philos. Mag. 1862. Vol. 24. P. 127–128.

124. On "gauch" curves of the third degree (Apr. 27, 1863) // Proc. Roy. Irish Acad. 1864. Vol. 8. P. 331–334.
125. On a general centre of applied forces (May 25, 1863) // Ibid. P. 394.
126. On the locus of the osculating circle to a curve in space (June 22, 1863) // Ibid. P. 395.
127. On the eight imaginary umbilical generatrices of a central surface of the second order (Jan. 11, 1854) // Ibid. P. 471.
128. On Röber's construction of the heptagon // Philos. Mag. Ser. 4. 1864. Vol. 27. P. 124–132.
129. Note, appended to a paper by the rev. Charles Graves; On a theorem relating to the binomial coefficients (June 26, 1865) // Proc. Roy. Irish Acad. 1867. Vol. 9. P. 297–302.
130. On a new system of two general equations of curvature, including as easy consequences a new from of the joint differential equation of the two lines of curvature, with a new proof of their general rectangularity; and also a new quadric for the joint determination of the two radii of curvature: all deduced by Gauss's second method, for discussing generally the properties of a surface; and the latter being verified by comparison of expressions for what is called by him the measure of curvature (June 26, 1865) // Ibid. P. 302–305.

Посмертные публикации

1. Elements of quaternions. L.: Longsmans and Green, 1866, in 8°.
2. Elements der Quaternion: In 2 Bd. Leipzig: Bath, 1882–1884. Bd. 1. LXXIII+436 S.; Bd. 2. XXIV+746 S.
3. On the elementary conceptions of mathematics: Seven letters to Viscount Adare (Mar. and Apr. 1835) // Hermathena. 1883. Vol. 3. P. 469–489.
4. Remarks, chiefly astronomical, on what is known as the problem of Hipparchus (1855) // Ibid. Vol. 4. P. 480–506.
5. On caustics. Pt 1 (1824) // Hamilton. The mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1931. Vol. 1. P. 345–363.
6. Optical investigations (1831) // Ibid. P. 364–367.
7. The auxillary function T for a telescope, when the axes of eyepiece is not coincident with, but parallel to, that of object glass (1833) // Ibid. P. 367–368.
8. The auxilliary function T for two thin lenses close together in vacuo, and for a single thin lebs in vacuo (1833) // Ibid. P. 369–375.
9. The aberration of an optical instrument of revolution (1833?) // Ibid. P. 376–382.
10. Two letters to Professor Philips on the construction of object glasses (1843, 1844) // Ibid. P. 383–386.
11. On improvement of the double achromatic object glass (1844) // Ibid. P. 387–460.
12. Theory of systems of rays. Pt 2 // Ibid. P. 88–106.
13. Problem of three bodies by my characteristic function (1833) // Ibid. Vol. 2, Dynamics, 1940. P. 1–102.
14. On nearly circular orbits (1836) // Ibid. P. 217–237.
15. Theory of the Moon (1837) // Ibid. P. 238–248.
16. Correspondence with J.W. Lubbocck (1837) // Ibid. P. 249–283.
17. Calculus of principal relations (1836) // Ibid. P. 297–331.
18. Calculus of principal relations (1836) // Ibid. P. 332–357.
19. Calculus of principal relations. A new series of investigations (1836) // ibid. P. 358–390.

20. Integration of partial differential equations by the calculus of variations (1836) // Ibid. P. 391–407.
21. On the propagation of light in crystals (1835–1838) // Ibid. P.413–445.
22. Researches respecting vibration connected with the theory of light (1839) // Ibid. P. 451–526.
23. Propagation of motion in elastic medium – discrete molecules (1839) // Ibid. P. 527–575.
24. Correspondence (1835–1839) // Ibid. P. 583–608.

Рукописи, хранящиеся в библиотеке Тринити-колледжа (Дублин)

1. A criticism of the work by Scheffler, entitled: Der Situations-Kalkul, 1856.
2. An extension by means of quaternions of some propositions laid down, by Gauss in his Disquisitiones Arithmeticae. 1856.
3. Two letters to Professor De Morgan on multiple and definite integrals, 1856. 96 f. p.
4. Letters (with postscript) to Andrew S. Hart, LL. D., S.F.T.C.D., on anharmonic coordinates, 1864. 280 f. p.
5. Lines of curvature and curvatures of surfaces, partly by quaternions, partly by methods of Monge and Dupin, 1864. 38 p., 130 art.
6. Gauss's measure of curvature of a surface, 1864. 2 p., 11 art.
7. Intersections of normales to quadrics, 1864. 74 p., 262 art.
8. Locus of the vertex of a quadric cone having six-point contact with a curve in space, 48 p., 224 art.

Использованная литература

1. *Александрова Н.В.* Формирование основных понятий векторного исчисления // Историко-математические исследования. М.: Наука. 1982. Вып. 26. С. 205–235.
2. *Александрова Н.В.* Векторы против Кватернионов // История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ. 1980. Вып. 25. С.45–56.
3. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков. геометров / Пер. Д.М. Перевощикова. 1861. Т. 3. 312 с.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука.1974. 431 с.
5. *Афанасьев П.Ф.* История Ирландии. Спб., 1907. 235 с.
6. *Байрон Дж.* Сочинения. Спб.: Изд-во Брокгауз–Ефрон, 1904. Т. 3. 680 с.
7. *Байрон Дж. Г.* Дневники, письма. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 440 с.
8. *Бернулли И.* Избранные сочинения по механике. М.; Л.: Гостехтеоризлат, 1937. 297 с.
9. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: ОГИЗ ГТТИ, 1941. 320 с.
10. *Больцман Л.* Избранные труды / Под ред. Л.С. Полака. Сер. "Классики науки". М.: Наука", 1984. 589 с.
11. *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука. 1970. 405 с.
12. *Борн М.* Атомная физика. М.: Мир, 1965. 483 с.
13. *Бэкон Ф.* Новый органон: Собр. соч. / Пер. Бибикова. Спб.,1874. Т. 2. 282 с.

14. Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. М : Физматгиз, 1958. 932 с.
15. *Величкина Т.С., Васильева О.И., Израиленко Н.Н., Яковлева И.А.* Методические заметки. Демонстрация явлений конической рефракции // УФН. 1980. Т. 130, вып. 2. С. 357.
16. *Визгин В.П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972. 240 с.
17. *Галилей Г.* Сочинения. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. Т.1. 405 с.
18. *Ганкель Г.* Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием. Казань, 1912. 242 с.
19. *Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.* Современная квантовая механика. М.: ОНТИ, 1934. 74 с.
20. *Гнеденко Б.В.* Остроградский М.В. М.: Гостехтеориздат, 1952. 25 с.
21. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
22. *Гюйгенс Х.* Трактат о свете / Пер. под ред. В.К. Фредерикса. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1935. 172 с.
23. *Д' Аламбер Ж.* Динамика: Трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
24. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. С. 668–704.
25. *Дитчберн Р.* Физическая оптика. М.: Наука, 1985. 631 с.
26. *Елистратова А.А.* Наследие английского романтизма и современность. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 217 с.
27. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике. М.: ОГИЗ, 1934. 377 с.
28. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики XIX в.М.; Л.: ОНТИ, 1937. Т. 1. 430 с.
29. *Клейн Ф.* Об основаниях геометрии // Классические работы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехтеориздат, 1956. 537 с.
30. *Клейн Ф.* Вопросы элементарной и высшей математики. Изд-во Mathesis, 1912. Ч. 1. С. 133.
31. *Колмогоров А.Н.* О таблицах случайных чисел // ДАН СССР. 1959. Т. 98. 48 с.
32. *Крамар Ф.Д.* Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX в. // Историко-матем. исследования. 1963. Вып. 15. С. 225–280.
33. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика. 2-е изд. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1. 440 с.
34. *Ланге Ф.А.* История материализма / Пер. В. Соловьева. 1899. 747 с.
35. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
36. *Максвелл Дж. К.* Статьи и речи. М.: Наука, 1968. 422 с.
37. *Мах Э.* Механика / Пер. Котляра, 1909. 448 с.
38. *Мур Томас.* Восстань же с мечом на предателя, Эрин // Прекрасное пленяет навсегда. Из английской поэзии XVIII–XIX вв. М.: Московский рабочий. 1988.
39. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. А.Н. Крылова // Собр. тр. А.Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7. 696 с.
40. *Ньютон И.* Оптика / Пер. С.И. Вавилова, ГИЗ, 1927. 371 с.
41. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

42. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова: Гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 96.
43. *Полак Л.С.* В.Р. Гамильтон и принцип стационарного действия. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 272 с.
44. *Полак Л.С.* Оптико-механическая аналогия Шредингера // Арх. истории науки и техники АН СССР. 1936. № 8. С. 87.
45. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики // Вариационные принципы механики / Ред., послесл. и примеч. Л.С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. С. 780–879 (У.Р. Гамильтону и его исследованиям посвящены с. 804–825.)
46. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1961. 587 с.
47. *Полак Л.С.* История механики с древнейших времен до конца XVIII в. // Вариационные принципы механики. М.: Наука, 1971. Гл. 8. С. 191–223.
48. *Полак Л.С.* Людвиг Больцман. М.: Наука, 1987. 206 с.
49. *Ромер П.Э.* Основные начала методы кватернёнов. Киев, 1867. 146 с.
50. *Сабинин Е.Ф.* Остроградский М.В. // Зап. Новосиб. ун-та. 1881. Т. 33. 32 с.
51. *Синг Дж.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963. 448 с.
52. *Уиттекер Е.Г.* Аналитическая динамика. М.; Л.; Гостехтеориздат, 1937. 500 с.
53. *Шредингер Э.* Избранные труды / Ред. Л.С. Полака. Сер. "Классики науки". М.: Наука", 1979. 424 с.
54. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. 600 с.
55. *Эйлер Л.* Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, с французского языка на российский переведенные Степаном Румовским. Спб., 1768. Ч. 1; 1772. Ч. 2. 319 с.
56. *Якоби К.Г.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 271 с.
57. Académie des Sciences. Procés-Verboux des Séances. 1817. Vol. 6. 183 p.
58. *Bell E.T.* Men of mathematics. L.: Simon and Schuster, 1962. N 4. Ch. 19: An Irish tragedy. P. 340–361.
59. *Bernoulli I.* Discours sur les lois de la communication du mouvement // Opera omnia. Lausanne.; Geneve, 1742. Vol. 3. P. 346 et suit.
60. *Berry H.P.* A history of the Royal Dublin Society. L., 1915. 312.
61. *Bevan B., Baker E.I., Copton E.T.* The mathematical theory of Huygens' principle. 2nd ed. Oxford, 1950. 341 p.
62. *Bierkhof G.D.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 1931. Vol. 17. P. 156.
63. *Bolza O.* Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig, 1949. 705 S.
64. *Garathéodory C.* Variationsrechnung und die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig, 1935. 407 S.
65. *Carnot L.* Principes fondamentaux de l' équilibre et de mouvement. P., 1803. Vol. 1. 303 p.
66. *Cauchy A.* Mémoire sur l' integration des equations aux derivees partielles du premier ordre // Exer. Anal. et Phys. Math. P., 1841. Vol. 2. P. 187.
67. *Cayley A.* The collected mathematical papers. Cambridge; N.Y., 1891. 389 p.
68. *Cayley A.* Report on the recent progress of the theoretical dynamics // Rep. 27th Meeting Brit. Assoc. for Advanc. Sci. L.; J. Murray, 1857. P. 1–42.

69. *Coddington H.* An elementary treatise on optics. 2nd ed. Cambridge, 1825. 293 p.
70. *Coleridge S.T.* Table talk. L.: Routledge. 1884. 327 p.
71. *Courtivron G.* Recherches de statique et de dynamique ou l'on donné un nouveau principe general pour la consideration des corps animes // Mém. Acad. Sci. Paris, 1749. P. 21.
72. *Couturat L.* La logique de Leibniz d'après des document inedits. P., 1901. 608 p.
73. *Crowe M.* A history of vector analysis. L.: Ind. Univ. press, 1967. 270 p.
74. *D'Alembert J.L.* Cosmologie // Enc. ou Dictionnaire raisonné Sci., Arts et metier par une société de gens de lettres. 1754. Vol. 4. P. 294–297.
75. *D'Arcy.* Reflection sur le principe de la moindre action de M. Maupertuis // Mem. Acad. Sci. Paris, 1749. P. 17.
76. *Dodd G.* Wordsworth and Hamilton // Nature. 1970. Vol. 228. P. 137.
77. *O'Donoghie D.J.* Sir Walter Scott's tour in Ireland in 1825. Dublin, 1905. 82 p.
78. *Dupin Ch.* Application de géométrie. P., 1822. 374 p.
79. Encyclopaedia of Ireland. Dublin: Figgts. 1968.
80. *Euler L.* De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta magente // Comm. Acad. Petrop., III (1728),1732. P. 110–124.
81. *Euler L.* // Mém. Acad. Sci. Berlin, t. 7 (1751) 1753. P. 246–254.
82. *Euler L.* // Opuscula varie argumenti. B., 1746. Vol. 1. P. 277–286.
83. *Euler L.* Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forses // Mem. Acad. Sci. Berlin, t. 4 (1748) 1750. P. 149–189.
84. *Fackler H.V.* Wordsworth in Ireland, 1829: A survey of his tour, Eire / Ireland. 1971. Vol. 6. P. 19.
85. *Gauss C.F.* Werke. Berlin; Leipzig, 1900.
86. *Gergonne D.* Annales de mathematique. 1826. Vol. 66. P. 11.
87. *Gibbs J.W.* A scientific papers. N.Y.; L., 1906. Vol. 2. P. 17–90.
88. *Gibbs J.W., Wilson E.B.* Elements of vector analysis arranged for use of students of physics. N.Y., 1901. 436 p.
89. *Fermat P.* Oeuvres. P., 1891. Vol. 1. 440 p.
90. *Graves R.V.* Life of Sir William Rowan Hamilton, Andrews Professor of astronomy in the University of Dublin, and Royal astronomer of Ireland, including selection from his poems, correspondence and miscellaneous writings: In 3 vol. Dublin; Univ. press, 1882–1889.
91. *Hamel C.* Die Axiome der Mechanik // Handb. der Physik. B.: Springerverlag, 1927. Bd. 5.
92. *Hamilton W.R.* The mathematical papers: Vol. 1. Geometrical Optics, 534 p.; Vol. 2. Dynamics, 659 p.: Vol. 3. Algebra, 672 p. Gambridge: Univ. press, 1931–1967.
93. *Hamilton W.R.* On a view of mathematical optics // Rep. Brit. Assoc. Advans. Sci., 1831–1832. P. 545–547.
94. *Hamilton W.R.* Elements of quaternions. N.Y., 1969. 800 p.
95. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions. Dublin, 1853. 736 p.
96. *Hankins Th.* Sir William Rowan Hamilton. Baltimore; London: Hopkins Univ. press, 1980. 474 p.
97. *Heaviside O.* Electro-magnetic theory. L., 1952. 386 p.
98. *Hero Alexandrinus.* Opera. T. 2. Mechanica et catoptrica / Recensuerunt L. Nix et W. Schmidt. Lipsiae, 1900. 415 p.
99. *Jacobi C.* Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die

Integration eines einzigen Systems gewohnlichen Differentialgleichungen // Crelle J. 1837. Bd. 17, S. 97.
100. *Jacobi C.* // Crelles J. 1844. Vol. 27. P. 199–268.
101. *Jacobi C.* Gesammelte Werke. 1886. Bd. 4. S. 173.
102. *Jacobi C.* L'intégration d'equations de dynamique // Compt. rend. 1837. P. 61.
103. *Jammer M.* The conceptual development of quantum mechanics. L.: McGraw-Hill, 1968. N. 4. 379 p.
104. *Kargon R.* Michael Faraday, and revival of Boscivichean atomism // Amer. J. Phys. 1964. Vol. 32, N 10.
105. *Kargon R.* W.R. Hamilton and Boscovichean atomism // J. Hist. Ideas. 1965. Vol. 26.
106. *Kelland P.* Tait P.: Introduction to Quaternions. L., 1882. 227 p.
107. *Knott C.G.* Life and scientific work of Peter Guthrie Tait. Cambridge, 1911. 379 p.
108. *Kummer E.* Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlungssystem. // Crelle J. 1860. Bd. 57. S. 189.
109. *Lagrange J.* Second mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problemes de méchanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ses problèmes // Mem. Inst., 1809.
110. *Lagrange J.* Oeuvres. 1892. Vol. 14. P. 200.
111. *Lagrange J.* Oeuvres. 1882. Vol. 13. P. 368.
112. *Lanczoš C.* William Rowan Hamilton – an appreciation // Amer. Sci. June 1967. Vol. 55, N. 2. P. 63.
113. *Laplace P.* Oeuvres. P., 1885. Vol. 6. P. 205.
114. *Laplace P.* // Mém. Inst., 1809. P. 300.
115. *Larmor J.* Mathematical and physical papers. (Appendix), L., 1927. Vol. 1. P. 640.
116. *Leibniz.* Acta Eruditorum, 1751. P. 156.
117. *Leibniz G.* Mathematische Schriften. Halle, 1856. Bd. 3. S. 288.
118. *Lie S.* Gesammelte Abhandlung. Leipzig, 1922. Bd. 3. 790 S.
119. *Livens G.H.* On Hamilton's principle and the modified function in analytical dynamics // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1919. Vol. 39. P. 113.
120. *Lloyd H.* Treatise of light and vision. L., 1831. 429 p.
121. *Lloyd H.* On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals // Irish Acad. Trans. 1833. P. 31.
122. *Lloyd H.* Further experiments on the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals // Ibid. P. 42.
123. *Malus E.* Traité d'optique // Mem. Inst. P., 1811. Vol. 2. P. 214–302.
124. *Malus E.* // J. Ecole Polytéchn. P., 1808. Vol. 7. P. 1–44, 84–129.
125. Maupertuis Lettres // Oeuvres. Lyon, 1768. Lettre 11. P. 281.
126. *Maupertuis P.* Accord de differentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles // Mém. Acad. Sci. Paris, 1744. P. 571.
127. *Maupertuis P.* Oeuvres. Lyon, 1756. Vol. 4. 478 p.
128. *Maupertuis P.* La loi de repos // Mém. Acad. Sci. Paris, 1740. P. 244.
129. *Maupertuis P.* Essai de Cosmologie // Oeuvres. Lyon, 1756. T. 1. P. 44.
130. *Maxwell J.C.* (?) Quaternions // Nature. 1873. Vol. 9. P. 137–138.
131. *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. 1st ed. Oxford, 1873. Vol. 1. 506 p.; Vol. 2. 500 p.
132. *Maxwell C.* A history of Trinity College, Dublin, 1591–1892. Dublin: Univ. press, 1946. 299 p.
133. *Mayer A.* Über die Abstellung der Differentialgleichungen der Bewegung // Leipz. Ber. 1899. S. 117.
134. Nature. 3. V., 1883. Vol. 28. P. 1–4.

135. *Neumann J. von* // Ztschr. Phys. 1929. Bd. 57.
136. *Nordheim L.* Die principien der Dynamik // Handb. der Phys. 1927. Bd. 5.
137. *Poincaré H.* Sur la théorie cinétique des gas // Rev. Gen. Sci. 1894. Vol. 5. P. 67.
138. *Poisson S.D.* Mémoire sur la variation de constantes arbitraires dans les questions de Mechanique // J. Ecole Polytechn. P., 1809. Vol. 8. P. 266–344.
139. *Poisson S.D.* Traité de méchanique. P., Vol. 1. 447 p.
140. *Pressence de F.* L'Irlande et l'Angleterre depuis l'année d'Union jusqu'a nos joures. 1800–1888. P., 1889.
141. *Quetelet A.* Correspondance mathématique et physique. 1825. Vol. 1.
142. *Rayleigh J.W.* Theory of sound. 1945. Vol. 1, N 4. 182 p.
143. *Rayleigh J.W.* On progressive waves // Proc. London Math. Ser. 1877. Vol. 9. P. 19.
144. *Rebiere Al.* Mathématique et mathématiciens. P., 1898. 566 p.
145. *Riez V.* // Comm. Math. Helv. 1945. Vol. 17. P. 74.
146. Saorstat Eireann (Irish Free State): Official Handbook. Dublin, 1932. 473 p.
147. *Sarton J.* Discovery of conical refraction by W.R. Hamilton and H. Lloyd (1833) // Isis. 1932. Vol. 17, N 52. P. 60.
148. *Scott Bar E.* Anniversaries in 1965 of interest to physics // Amer. J. Phys. 1965. Vol. 33, N 2. P. 87.
149. *Shelley P.B.* The poetical works. L.: Macmillan, 1901. 572 p.
150. *Stack J.* A short system of optics. 3nd ed. Dublin, 1820. 312 p.
151. *Stokes G.G.* Mathematical and physical papers. Cambridge: Univ. press, 1883. Vol. 2. 370 p.
152. *Stubbs J.W.* The history of university of Dublin from its foundations to the end of XVIII century. 1889. 437 p.
153. *Sylvester J.* Collected works. Cambridge, 1901. Vol. 1.
154. *Synge J.L.* Classical dynamics // Handb. der Physik. B.: Springer, 1960. Bd 8, H. 1. 448 p.
155. *Tait P.G.* An élementary treatise on quaternions. L., 1875. 295 p.
156. *Tait P.G.* Traité élémentaire des quaternions. P., 1882–1884. 618 p.
157. *Timmermans A.* // Correspondance maht. et phys. 1825. Vol. 1. P. 91.
158. *de Vere White Terence.* The parents of Oscar Wilde. Sir William and lady Wilde. Dublin: Hodder, 1967. 249 p.
159. *Voss A.E.* Über die Principien von Hamilton und Maupertuis // Nachr. Königl. Ges. Naturwiss. Göttingen, 1900. S. 32–327.
160. *Wheeler J.* Josiah Willard Gibbs. New Haven, 1951. 270 p.
161. *Whittaker E.* A history of theories of the aether and electricity. L., 1960. Vol. 1. Ch. 4, 5.
162. *Williams L.P.* The physical sciences in the first half of the nineteenth century // Problems and sources history of science. Cambridge, 1962. Vol. 1. P. 1–15.
163. *Wood J.* The elements of optics: Designed for the use of students in university. 2nd ed. Cambridge. 1801. 247 p.
164. *Young Th.* Miscellaneous works. L., 1855. Vol. 1. P. 220.
165. *Yourgrau W., Mandelstam S.* Variational principles in dynamics and quantum theory. 3 ed. L.: Pitman, 1968. 201 p.

Указатель имен

Оглавление

Contents

Научное издание

Полак Лев Соломонович

Уильям Гамильтон
1805–1865

Утверждено к печати
Редколлегией серии
"Научно-биографическая литература" **РАН**

Редактор издательства **У.С. Павлинова**
Художник **А.Г. Кобрин**
Художественный редактор **И.В. Монастырская**
Технические редакторы **О.В. Аредова, Г.И. Астахова**
Корректор **Н.Л. Голубцова**

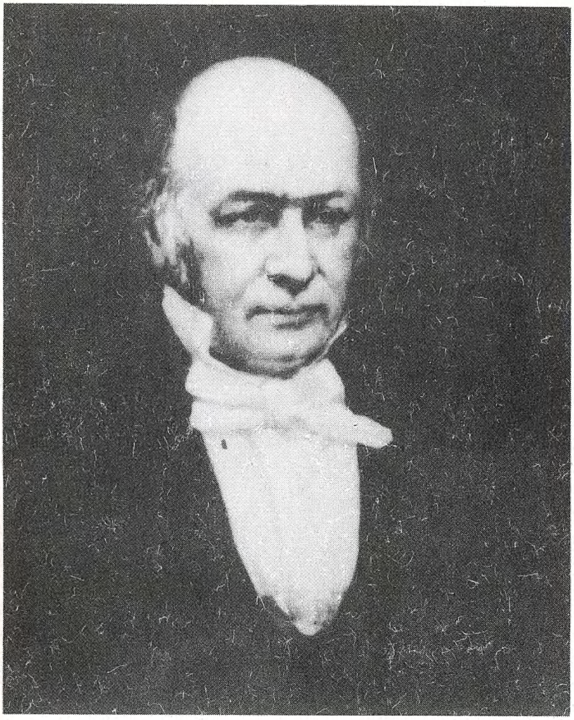
Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 48442

Подписано к печати 01.10.91. Формат 84 X 108 1/32
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 14,3. Усл.кр.-отт. 14,6
Уч.-изд.л. 16,5. Тираж 560 экз. Тип. зак. 203

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12



Л.С.Полак

Уильям ГАМИЛЬТОН

Л.С.Полак Уильям ГАМИЛЬТОН

90-00