АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

В. И. Лысенко

Николай Иванович
ФУСС

1755—1826

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1975

В книге освещена жизнь, научная и педагогическая деятельность Николая Ивановича Фусса (1755—1826) — действительного члена Петербургской академии наук, ее непременного секретаря, сотрудника и ближайшего помощника знаменитого Леонарда Эйлера. Автором использованы материалы Архива Академии наук СССР и редкие печатные источники; дан обзор трудов Н. И. Фусса по математике, механике, астрономии, приведена обширная библиография.

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
А. П. ЮШКЕВИЧ

$\text{Л}\,\frac{20100-046}{052\,(02)-75}$ 70—75 НПЛ

От автора

Разносторонний ученый, академик, биограф знаменитого Леонарда Эйлера, непременный секретарь Петербургской академии наук — Николай Иванович Фусс занимает видное место в истории науки. Личная судьба Фусса тесно связана с жизнью Эйлера. Он долгое время был ближайшим помощником Эйлера и способствовал его успешной и очень продуктивной работе, одновременно учась у него.

Фусс рано получил известность и признание в среде ученых. Главной областью его научных занятий была математика. Именно здесь он достиг значительных результатов. Наряду с математикой Фусс занимался астрономией, механикой, физикой.

Благодаря обширным научным познаниям, литературным способностям и незаурядным личным качествам, пребывая более двадцати пяти лет в должности непременного секретаря, Фусс всячески способствовал успешной деятельности Петербургской академии наук и многое сделал для развития естественнонаучного образования и просвещения в России.

О всех важнейших сторонах деятельности Фусса в академии подробнее рассказано ниже.

При написании биографии Фусса использованы материалы, хранящиеся в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР, а также сведения, вошедшие в биографические словари и энциклопедии, прежде всего — наиболее полная статья о нем, напечатанная в редком ныне «Русском биографическом словаре». Дополнительный материал для описания деятельности Фусса дает его переписка и отзывы на изобретения и научные труды, поступавшие в академию от разных лиц. Отдельные сведения, касающиеся содержания некоторых математических работ Фусса, имеются в ряде книг по истории математики. Наконец, сами научные работы нередко содержат высказывания автора, проливающие некоторый свет на его отношение к тем или иным научным идеям, к оценке результатов, теориям и т. д. Все это добавляет новые факты к научной биографии ученого, а иногда и штрихи к его портрету как человека.

Заметно расширяет представление о круге научных интересов Н. И. Фусса найденный в Архиве АН СССР каталог сочинений и рукописей, составленный его сыном П. Н. Фуссом. О научно-популярных выступлениях Фусса в печати есть сведения в библиографическом указателе статей В. П. Шемиота.

В книге имеется библиография, состоящая из двух разделов: опубликованных и неопубликованных работ Н. И. Фусса и его сыновей Павла и Егора, основной литературы, послужившей нам в качестве источника информации о нем и его эпохе.

При ссылках на опубликованные работы Фусса в квадратных скобках ставится буква «Ф» перед порядковым номером работы, указанным в первом разделе библиографии, и, если надо, страницы; при ссылках на работы Павла и Егора Фуссов — соответственно [П.Ф.] и [Е.Ф.].

К каталогу неопубликованных рукописей Н. И. Фусса, составленному его сыном П. Н. Фуссом, читатель отсылается, например, так: [Каталог П. Фусса, III, 4].

Остальные ссылки даются с указанием в квадратных скобках порядкового номера по библиографии основной литературы.

Ввиду большого числа ссылок на работы Л. Эйлера они даются в тексте сразу же после упоминания работы (например, Mém., t. XI, 1830, p. 31—45), чаще всего без указания полного их названия (см. список сокращений).

Даты указаны по старому стилю (кроме случаев, когда приводятся обе). Письма из-за рубежа датированы по новому стилю.

Автор приносит искреннюю благодарность А. П. Юшкевичу, Б. А. Розенфельду, Ф. А. Медведеву и сотрудникам Архива Академии наук СССР за помощь в работе над книгой.

Из истории Петербургской академии наук второй половины XVIII—начала XIX в.

Существует обширная литература, посвященная истории Академии наук СССР со времени ее основания в Петербурге в 1724 г. до наших дней.

Мы рассмотрим некоторые ее страницы, чтобы напомнить важнейшие особенности формирования научной мысли и показать изменения в административном управлении академией в период деятельности Фусса и немного более ранний. Это позволит лучше понять условия его работы и характер отдельных действий.

Время, предшествовавшее появлению Фусса в академии, связано с именами Ломоносова и Эйлера. Деятельность великого русского ученого М. В. Ломоносова в академии была настолько значительной и всеобъемлющей, что составила целую эпоху в ее истории и во многом определила состояние научной жизни в России середины XVIII в. Молодые ученые страны во главе с Ломоносовым видели свой гражданский и общественный долг в борьбе за преодоление отсталости крепостнической России и утверждение национальной культуры. Традиции Ломоносова и его учеников были продолжены и развиты в дальнейшем многими выдающимися представителями передовой русской культуры и науки.

Во времена Ломоносова важную роль в жизни академии сыграло появление в ее составе русских ученых — С. П. Крашенинникова, Н. И. Попова, А. П. Протасова, С. Я. Румовского, В. К. Тредиаковского, М. Софронова, С. К. Котельникова, Г. В. Козицкого и др. Они занимали в академии прочное место и хорошо справлялись со своими обязанностями.

Среди членов академии тех лет было много приглашенных на работу иностранцев. Одни из них, отслужив обусловленный срок, возвращались к себе на родину, другие оставались в России вместе со своими семьями и добросовестно трудились в академии. К числу последних относился и Леонард Эйлер. Он связал свою судьбу с Петербургской академией и сделался ее славой и гордостью благодаря многочисленным научным трудам, снискавшим мировую известность. Эйлер, в научном отношении стоявший, как и Ломоносов, намного выше своих современников, понимал значение Ломоносова для России и высоко ценил его гений.

Влияние Ломоносова и Эйлера на развитие научной мысли было очень большим. Вокруг них формировались научные школы. Благодаря Эйлеру в конце 60-х годов в Петербургской академии возникла и развивалась математическая школа, к которой принадлежал и Фусс.

Правление академией в разные периоды ее истории осуществляли президенты, вице-президенты, директора, непременные секретари.

В 60-е годы XVIII в. президентом академии был граф К. Г. Разумовский, официально числившийся на этой должности с 1746 по 1798 г. Фактически он академией не руководил, так как жил за границей. Дела академии приходили в упадок. В октябре 1766 г. в Академию был назначен первый директор граф В. Г. Орлов, доверенное лицо царского двора. По сути, он и являлся президентом.

В 1766 г. в Петербург вернулся из Берлина Л. Эйлер, уехавший туда в 1741 г. после первого 14-летнего периода жизни в Петербурге. Он был сразу же избран в только что созданный административный комитет и активно участвовал в управлении академией.

Этот период характерен стремлением академиков обеспечить автономию академии. Был подготовлен новый проект устава академии в духе проекта Ломоносова, но Екатерина II его не утвердила.

С 1775 по 1782 г. директором был ставленник двора, властный чиновник С. Г. Домашнев. В 1780 г. он самовольно распустил комиссию из академиков и привел научную и учебную жизнь академии к полному развалу.

В апреле 1782 г. в академии произошло беспримерное событие: академики открыто заявили о своем нежелании подчиняться директору С. Г. Домашневу, который вел себя как грубый деспот. Дело началось с отстранения без всяких оснований С. К. Котельникова от должности заведовавшего Кунсткамерой. Академики выбрали депутацию из И. И. Лепехина, Н. И. Фусса, Н. Я. Озерецковского и И. А. Эйлера и поручили ей довести до сведения директора, что академия единогласно протестует против его деспотических действий и настаивает на отмене распоряжения об увольнении Котельникова.

О положении в академии, достигшем крайнего напряжения, стало известно Екатерине II, и та, увидев, что Домашнев перешел границы внушенных ему «предначертаний» и способен окончательно скомпрометировать «просвещенную» царицу в России и за границей, распорядилась расследовать дело, после чего Домашнев от должности был отстранен. Борьба академиков с Домашневым показала, что попытки правительства заставить академию беспрекословно подчиняться его распоряжениям не будут иметь успеха.

24 января 1783 г. на должность директора была назначена княгиня Е. Р. Дашкова. В том же году она возглавила и вновь созданную Российскую академию, сыгравшую большую роль в развитии русского языка и объединения литературных сил страны. Дашкова была энергичной женщиной и немало сделала для улучшения хозяйственного и финансового состояния академии, поощряла просветительскую и издательскую деятельность. Но руководить научной работой было ей не по силам.

В 80-е и особенно в начале 90-х годов в развитии академии наступила трудная полоса. Правительство Екатерины II, напуганное буржуазной революцией во Франции и крестьянскими восстаниями в России, провело ряд реакционных мер. Они затронули и академию. В 1792 г. Екатерина II велела исключить из числа почетных членов академии участника французской буржуазной революции, французского философа и математика Кондорсе, избранного в 1776 г. Была прекращена посылка академических студентов на учебу за границу.

В 1796 г., при Павле I, была совсем отстранена от должности Дашкова, которую уже два года замещал П. П. Бакунин. При последнем академия снова пришла в упадок. В 1798 г. Бакунин тоже получил отставку. Павел I не понимал действительного назначения академии и часто использовал академиков в качестве чиновников, ослабляя и без того малочисленное Академическое собрание (Конференцию). Была учреждена цензура, запрещен ввоз литературы из-за границы, а также введены другие ограничения, прервавшие на время международные связи академии, что снизило ее значение как одного из мировых центров науки.

С 1798 по 1803 г. президентом академии был барон А. Л. Николаи, в прошлом личный секретарь императрицы. Николаи привлек было академиков к подготовке нового устава, но подошла его отставка, и он бросил все и покинул академию. На его место Александром I был назначен один из членов его «негласного комитета» Н. Н. Новосильцов. Хотя он и числился до 1810 г. президентом, но фактически академией в это время руководил непременный секретарь Н. И. Фусс.

В годы деспотического правления Павла I (1796—1801) академия подвергалась грубому, мелочному, придирчивому надзору со стороны правительства и самого царя, присвоившего себе часть функций президента академии. Деятельность академии была затруднена цензурой и фактическим лишением связей с заграничными учеными. Академики ждали подходящего случая, чтобы вернуть свои права, предусмотренные уставом. Такая возможность представилась в первые годы царствования Александра I, старавшегося не походить на своего предшественника. Пришедший к власти в 1801 г. Александр I стал вести политику «заигрывания» с либерализмом. Началась работа по подготовке нового устава академии.

Новый устав был введен 25 июля 1803 г. Необходимость его давно признавалась всеми членами академии. Упразднены были академический университет (существовал фактически до 1766 г.), университетская гимназия (существовала до 1805 г.) и отошли от академии «художества», переводы и издание литературных произведений.

Академия наук определялась как первое ученое общество империи. Ее задачей было совершенствование наук и применение полученных результатов на практике. Переменилось название основного печатного органа «Nova Acta» (см. список сокращений). Он стал называться «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» («Мемуары Санкт-Петербургской академии наук»).

Предписывалось ежегодно издавать практически полезные записки на русском языке под названием «Технологического журнала» [1]. Согласно новому уставу в Академии появились новые отделения: истории, статистики, политэкономии, востоковедения. Было увеличено число ординарных академиков до 18, адъюнктов — до 20. Впервые академии было предоставлено право самой выбирать ученых в число своих членов путем баллотирования в Конференции. Был предусмотрен Административный комитет, куда избирались на два года по два академика, участвовавших в управлении академией. Требовалось всячески содействовать организации экспедиций и путешествий.

Вместо должности конференц-секретаря была введена должность непременного секретаря академии со значительным расширением функций.

В «Мемуарах» статьи делились на три раздела: раздел математических наук, включавший мемуары по чистой и прикладной математике, теоретической и практической астрономии; раздел физических наук, куда входили, кроме физических, также мемуары по метеорологии, геологии, ботанике, минералогии, химии, технологии, анатомии и философии; раздел политической экономии, включавший, кроме нее, статистику, историю, археологию, восточные языки. Статьи печатались на латинском и французском языках. В каждом томе «Nova Acta» и «Мемуаров» печаталась история академии за предыдущий год, составляемая непременным секретарем. Здесь находили отражение следующие стороны академической жизни.

1. Выдающиеся события в академии, торжественные собрания, посещение академии сановными лицами, публиковались обращения или письма министра просвещения к членам академии и т. п.

2. Происшедшие изменения в личном составе: об умерших членах академии, действительных, почетных, членах-корреспондентах (о некоторых есть некрологи), о вновь принятых, о награждениях и чествованиях, об избрании Административного комитета.

3. Приобретения для библиотеки, кабинетов, лабораторий, обсерватории, музеев (литература, приборы, экспонаты и т. п.).

---

[1] Кроме «Технологического журнала» через пять лет после принятия нового устава академия по инициативе С. Е. Гурьева начала издавать на русском языке научный сборник «Умозрительные исследования». Всего в период 1808—1819 гг. выпущено пять томов.

4. Перечень рукописей мемуаров и других трудов, представленных академии.

5. Сообщения о наблюдениях и опытах, проведенных за истекший период.

6. Отчеты академиков о порученных им заданиях (главным образом отзывы о мемуарах, проектах, изобретениях, направляемых в академию).

7. Объявлялись труды, опубликованные академией.

8. Премии, предложенные за решение определенных проблем.

9. Информация о научных экспедициях, предпринятых академией.

Все это дает богатый материал для изучения истории академии и деятельности отдельных ее членов.

Издания научных трудов Петербургской академии пользовались большим успехом и признанием среди зарубежных ученых. Академия имела связи со многими академиями, учеными обществами, университетами и отдельными учеными своей страны и многих зарубежных стран, вела с ними переписку, обмен литературой, научной информацией, наблюдениями и т. п. Для примера укажем, что библиотека академии получила книги и другие материалы следующих городов:

в 1809—1810 гг.— Москва, Лиссабон, Дерпт, Лондон, Берлин, Вена, Вильно, Париж, Краков, Казань, Тюбинген, Варшава, Женева, Упсала, Кенигсберг, Бостон (Сев. Америка), Падуя;

в 1811 г., кроме названных выше,— Стокгольм, Турин, Або, Мюнхен;

в 1815—1816 гг. добавились еще Копенгаген, Эдинбург, Геттинген, Лозанна, Брауншвейг, Харьков.

По этим данным можно проследить научные связи академии.

I. Жизненный путь

Глава 1

Фусс и Эйлер

Переезд из Базеля в Петербург. Начало работы в академии

Николай Иванович Фусс родился в г. Базеле (Швейцария) 19(30) января 1755 г. Шести лет от роду он поступил в гимназию родного города и, блестяще окончив ее, в в 1768 г. был принят в число студентов Базельского университета, изучавших математические науки.

В 1772 г. по ходатайству Л. Эйлера Фусс получил приглашение в Петербург. К тому времени академик Леонард Эйлер почти совсем потерял зрение, здоровье его ухудшилось. Иоганн Альбрехт, сын Л. Эйлера, в письме к математику Кестнеру 1(12) сентября 1769 г. сообщал о своем отце: «Здоровье его совсем слабое, хотя на вид он почти не изменился. Он пишет свои вычисления мелом на черной доске, а вот черного на белом различить не может. Адъюнкт Лексель каждый день приходит к нему и записывает его научные идеи, которые затем снабжает расчетами» [95, стр. 104].

Испытывая большие затруднения в работе, Л. Эйлер пожелал иметь постоянного помощника и обратился в 1772 г. к своему земляку и другу, жившему в Базеле,— математику Даниилу Бернулли, чтобы тот пригласил к нему по собственному выбору из числа своих учеников наиболее достойного молодого математика, способного помогать Эйлеру в его обширных и утомительных вычислениях. Бернулли рекомендовал молодого Фусса, с похвалой отозвавшись о его способностях и нравственных качествах. 8 июля 1772 г. 17-летний Николай Фусс прибыл в Петербург. Он был радушно принят в доме Эйлера и десять лет прожил в его семье.

Выбор был очень удачным, и уже 28 июня 1773 г. Даниил Бернулли мог написать бывшему ученику: «Г-н Иоганн Альбрехт Эйлер написал мне, что все они очень довольны Вами, особенно господин его отец, который Вас уже принял, по его словам, с большим расположением. Я желаю, чтобы этот благоприятный путь скорее привел бы Вас к прочному устройству в жизни, и если это будут двери Академии наук, я буду этим восхищен» [95, стр. 105].

Занимаясь ежедневно по 8—9 часов, Николай или писал под диктовку Эйлера, или делал вычисления по его указанию, или читал вслух математические сочинения, причем Эйлер разъяснял ему все, что при чтении было непонятно.

Ученик и помощник Леонарда Эйлера

История математики в России в середине и во второй половине XVIII в. неотделима от деятельности Леонарда Эйлера в Петербургской академии наук (1727—1741 и 1766—1783 гг.). Эйлер оказывал глубокое влияние на творчество своих прямых учеников, петербургских математиков второй половины XVIII в: С. К. Котельникова (1723—1806), С. Я. Румовского (1734—1812), А. И. Лекселя (1740—1784), Н. И. Фусса (1755—1826), М. Е. Головина (1756—1790), В. Л. Крафта (1743—1814), М. Софронова (1729—1760), И. А. Эйлера (1734—1800), П. Б. Иноходцева (1742—1806).

Подражая учителю, многие из упомянутых математиков стремились к разносторонним занятиям. Почти все они занимались с большим или меньшим успехом математикой, астрономией, механикой, физикой и другими науками.

О манере Эйлера работать с учениками Павел Фусс, по воспоминаниям отца, писал: «В кабинете Эйлера был большой стол, занимавший всю середину комнаты, покрытый сверху грифельной доской. Именно на этом столе он писал или, чаще всего, набрасывал в общих чертах свои вычисления, записывая их мелом.

Когда он вел занятия, что бывало регулярно в одно и и то же время, он имел привычку прохаживаться вокруг этого стола, скользя рукой вдоль его краев, чтобы не сбиться с пути; так как это происходило часто, края стола были вытертые и блестели как полированные.

Каждое утро его ученик являлся к нему, чтобы доложить либо об обширной переписке (ведение которой было целиком доверено ему), либо о новостях, либо побеседовать о каких-нибудь достойных внимания новых сочинениях на разные научные темы, и учитель в таких случаях с удовольствием всегда был готов устранить сомнения и разрешить трудности, с которыми ученик встретился в ходе своих занятий.

Когда стол оказывался исписан выкладками, что происходило часто, учитель поверял ученику свои только что возникшие замыслы и излагал ход своих мыслей и общий план редакции, предоставляя его заботам развитие вычислений, выбор примеров и доработку деталей; обычно ученик приносил ему на следующий день набросок мемуара, написанного на больших листах. Когда набросок бывал одобрен, текст редактировался начисто и тут же представлялся в академию» [76].

Таким образом, И. А. Эйлер, Лексель, Головин, Крафт, Фусс были не только секретарями, но и научными сотрудниками Л. Эйлера. Со слов учителя они записывали план его сочинения, идею и метод решения, основные математические выкладки, а затем брали на себя всю техническую работу и определенную долю работы творческой, связанной с окончательной подготовкой рукописи к изданию, способствуя тем самым резкому повышению работоспособности Эйлера в последние годы его жизни [30].

Эйлер чаще других привлекал к составлению своих научных статей — мемуаров, как их тогда называли, племянника Ломоносова Головина и Фусса. Они редактировали мемуары Эйлера, следуя схеме его вычислений. Доказывая специальным представлением Конференции свое право на должность академика, Фусс подчеркивал и ставил себе в заслугу то, что он уже почти десять лет занят их редактированием [44, т. III, стр. 640].

Л. Эйлер не раз отмечал прилежание Фусса. В архиве Академии наук СССР сохранилось его вторичное ходатайство перед комиссией, ведавшей финансовыми делами при академии, о вознаграждении Н. Фусса за прилежание, с которым тот ему помогает, если не званием адъюнкта, «чего ныне неудобно произвести» (так как Фусс тогда еще не имел печатных трудов), то денежной суммой [2].

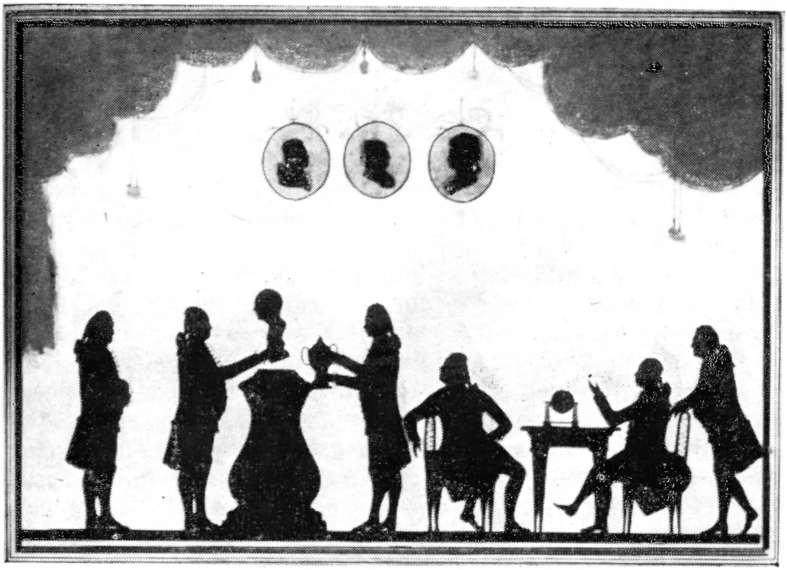
---

[2] ЛОААН, разряд V, оп. Ф — 19, № 7.

Вот выдержка из протокола заседания конференции Академии от 17 октября 1774 г.: «Г-н Эйлер-отец представил два следующих мемуара: 1. Determinatio omnium motuum, quos chorda tensa et uniformiter crassa recipere potest; 2. De motu oscillatorio pendulorum ex filo tenso dependentium, написанное г-ном Фуссом, который с большим прилежанием выполнил в них все вычисления и о способностях которого г-н Эйлер отозвался по этому поводу с большой похвалой, добавив, что он добился большого и быстрого прогресса в математике и что уже длительное время он писал все те мемуары, которые г-н Эйлер представлял в академию» [44, т. III, стр. 153].

В книге А. П. Юшкевича «История математики в России до 1917 года» читаем: «Среди математиков всех времен Эйлер выделяется не только гигантской продуктивностью, но и не слабеющей со временем активностью. Наоборот, литературная продукция его с годами росла. За 1725—1744 гг. он подготовил, считая по названиям, приблизительно 15% своих сочинений, за 1745—1764 гг. около 35%, а за 1765—1783 гг. приблизительно 50%. Когда ему было семьдесят лет, в 1777 г., Эйлер подготовил с помощью секретарей чуть ли не сотню статей, по две в неделю» [67, стр. 108].

Чтобы лучше понять и оценить объем литературной и издательской работы, выполненной Эйлером, а вместе с ним и его помощниками, приведем еще одно место из той же книги А. П. Юшкевича, где дается общая характеристика творчества Эйлера. «При жизни Эйлера было напечатано около 560 его трудов, из них около 400 в изданиях Петербургской академии. Эйлер как-то заметил в шутку, что оставит после себя столько статей, что их придется печатать еще в течение двадцати лет. На самом деле публикация его научного наследия, в подготовке которой участвовали Н. И. Фусс, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев и П. Н. Фусс, продолжалась в изданиях нашей академии до 1862 г.; некоторые работы были выявлены и позднее. Список трудов Эйлера, составленный в 1910—1913 гг. шведским историком математики Г. Энестремом, насчитывает более 850 названий, не считая 31 труда Иоганна Альбрехта, написанных под руководством отца; к этому следует добавить многие сотни чисто научных писем Л. Эйлера, нередко представлявших собой подлинно научные труды. Полное собрание сочинений Эйлера (без пере-



Группа академиков, устанавливающих бюст Леонарда Эйлера. Силуэты работы Ф. Антинга, 1780-е годы. Стоят (слева направо): А. И. Лексель, И. А. Эйлер, Н. И. Фусс

писки), «Leonhardi Euleri opera omnia», издающееся с 1911 г. Швейцарским обществом естествоиспытателей, должно содержать 72 больших тома[3]. Полностью завершена публикация только математической серии в 29 томах, из которых один в двух частях» [67, стр. 110—111].

О сочинениях Эйлера, записанных Н. Фуссом в те годы, имеются указания в аннотациях записей о Л. Эйлере в протоколах Академического собрания за 1727—1783 гг. (даты по старому стилю) [48, стр. 151—228]. Например, в аннотации 628 говорится: «1775, октября 26; ноября 20, 23. Л. Эйлер представил свое сочинение по теории чисел (Е. 598)[4]. Это — девяносто восьмое сочинение Л. Эйле-

---

[3] В апреле 1975 г. оставалось издать еще 7 томов: во II серии т. 16, 17, 24, 26, 27, 31; в III серии — т. 10. Началось издание IV серии (переписка, неопубликованные рукописи), она составит еще около 15 томов, из которых т. 1 будет напечатан в 1975 г.

[4] Е. 598 — порядковый номер публикации Эйлера по каталогу его сочинений, составленному Г. Энестремом.

ра, записанное его учеником Н. И. Фуссом». И это за три первых года пребывания Фусса в Академии (1772—1775), после чего Эйлер и Фусс сотрудничали еще 8 лет. За это время чуть ли не в каждом заседании Академического собрания (их было 20—30 ежегодно) Н. И. Фусс представлял сочинения Эйлера, иногда сразу по несколько (например, в 1781 г. 28 мая — 3, 4 июня — 3, 20 августа — 6, а 13 декабря — 17). Всего Фусс представил и прочитал более 160 работ Эйлера [48].

Метод работы Эйлера со своими учениками, о котором шла речь выше, позволял очень сильно влиять на их творчество.

Многие работы Фусса явились следствием попыток развития или уточнения результатов, полученных Эйлером, или детальной разработкой высказанных им идей.

Общность научной тематики и стиля, нашедшие отражение в сочинениях Н. И. Фусса, дают основания называть его одним из ближайших последователей Л. Эйлера.

Влияние учителя на ученика несомненно и естественно. Но у Фусса есть и свой почерк, иногда он по-своему понимает задачу и по-своему ее решает. А если он, хотя бы отчасти, и унаследовал то мастерство, которым отмечены почти все работы учителя, то это только хорошо.

Нельзя не согласиться с Павлом Фуссом, когда он пишет, что «признательности и восхищению, которые пробуждают в нас еще и сегодня мемуары Эйлера, мы обязаны отчасти тому, кто с безграничной и почти беспримерной преданностью посвятил десять прекрасных лет своей жизни служению своему несравненному учителю, вычислил и составил более одной трети его бессмертных трудов... Эта услуга, оказанная Николаем Фуссом геометрам своего времени и геометрам будущего, представляет собою памятник не менее нетленный, чем многочисленные работы, которыми позднее он сам обогатил эту область науки» [76, стр. XLII].

Первые научные работы

В 1774 г. 19-летний Фусс опубликовал свою первую научную работу, озаглавленную «Подробное наставление к изготовлению зрительных труб самых разных видов высшей степени совершенства и восприятия, извлеченное из диоптрической теории г-на Эйлера-отца и предназначенное г-ном Николаем Фуссом для всех тех, кто занимается этим делом. С описанием микроскопа, который можно изготовить лучшим образом в своем роде и который способен дать какие угодно увеличения» [Ф.1].

Работа открывалась предисловием Эйлера, где давался исторический обзор развития теоретических принципов конструктирования зрительных труб и перечислялись важнейшие астрономические открытия, сделанные с их помощью.

О первой печатной работе Фусса Д. Бернулли писал: «Я поздравляю Вас с выходом труда по диоптрике; лучшего вступления в круг ученых нельзя было и пожелать» [9э, стр. 105]. Эта публикация Фусса и его напряженная деятельность по написанию и подготовке к изданию сочинений, предлагаемых академии Эйлером, дала повод последнему возбудить ходатайство о поощрении своего помощника и избрании его адъюнктом академии.

В «Протоколах заседаний Конференции императорской Академии наук» (СПб., 1900, т. III, стр. 162) по поводу заседания от 31 октября 1774 г. читаем: «Академик Эйлер, воздав заслуженную похвалу усердию двух своих учеников Фусса и Головина и представив отчет о их быстрых успехах, которые они сделали в математике, просит его превосходительство (директора академии. — *В. Л.*) зачислить первого на службу в академию, а второго поощрить повышением оклада жалования».

В результате благосклонности Эйлера к своим способным ученикам оба они были избраны 15 января 1776 г. адъюнктами — Фусс по кафедре чистой математики, а Головин — по кафедре опытной физики. Подробности об их избрании можно прочитать в статье С. Н. Чернова [56].

В 1776 г. появились вторая и третья печатные работы Фусса: «Проект всеобщего кредитного банка, где не только ссуды под определенные проценты могли бы выдаваться или приниматься, но могли одновременно находиться и другие связанные с ним учреждения, такие, как кассы по выплате пожизненных рент, страховые и вдовьи кассы» [Ф. 13] и «Разъяснения об учреждении общественных установлений в пользу вдов или на случай смерти, с описанием нового вида тонтин [5], благоприятных для публики и

---

[5] Тонтина — одна из форм государственного рентного займа, получивших большое развитие в XVII и первой половине XVIII в.

полезных для государства, вычисленных под руководством Леонарда Эйлера» [Ф. 2].

Это были основополагающие работы в России, посвященные теоретическим вопросам страхового дела. О содержании первой некоторое представление дает ее полное название. Почти наполовину она состоит из таблиц.

Вторая открывается обширной вводной частью с изложением вероятностных методов вычисления таблиц. Затем следуют сами таблицы. Приводится таблица смертности с вероятностями, вычисленными по демографическим данным Франции и Голландии, взятым из литературы. В первом разделе показано, как составлять таблицы, дающие, например, ответ на такой вопрос: какие суммы должен платить муж ежегодно, чтобы обеспечить жене после его смерти пенсию в размере 100 руб. в год в зависимости от разницы возрастов? Во втором разделе составлены таблицы, показывающие для лица каждого возраста, сколько денег ему надо внести сразу или платить постепенно, чтобы в случае его смерти родственники могли получить 100 руб. Третий раздел посвящен новому виду тонтины, где рассчитывается размер дохода на 1000 руб. рентного займа с изменением возраста вкладчика.

В. В. Паевский в статье «Демографические работы Эйлера» [31], вероятно, следуя каталогу Г. Энестрема, целиком приписывал это сочинение Эйлеру. Читаем у него: «Об общественных установлениях для вдов и на случай смерти»— наиболее обширное сочинение Эйлера в области страховой математики, состоящее из трех частей: 1) о вдовьих пенсиях, 2) о взаимном страховании на случай смерти и 3) о плане новой тонтины (особого порядка, где допускается непрерывный приток новых участников тонтины). Книга представляет собою обширный трактат по страхованию, объединяющий в себе многое из написанного Эйлером прежде, и снабжена большим количеством таблиц, не утративших интереса и в наше время» [31, стр. 108].

Первые работы Фусса были встречены в научных кругах с интересом. Уже можно было предсказать, что этот молодой ученый, работающий под руководством самого Эйлера, сделает большие успехи в науках. Действительно, далее последовал длинный ряд других статей, рефератов, учебников, печатавшихся почти исключительно в изданиях академии. В биографии Н. И. Фусса, написанной его сыном П. Фуссом, сказано: «Все сии сочинения, коих числом около 100, отпечатаны в трудах Академии» [6]. Составленный нами список насчитывает их 114.

Большая научная работа Фусса и его опыт по достоинству были оценены академией, и это признание заслуг перед русской наукой нашло отражение в избрании его 13 февраля 1783 г. действительным членом Петербургской академии наук, ординарным, т. е. штатным, академиком (в отличие от экстраординарного, сверхштатного).

7 сентября (ст. ст.) 1783 г. умер Леонард Эйлер. Потерю учителя и лишение опоры в научных делах Фусс пережил с глубокой душевной болью. Его память еще хранила подробности напряженных, полных творческих исканий дней, проведенных с учителем. Живо вспоминалась необыкновенная сила его математического ума, тонкость и глубина его мысли, неугасимая жажда научного творчества — все качества, способные служить достойным примером для подражания преданному ученику. Как один из наиболее близких сотрудников Эйлера, Фусс понимал, что он обязан рассказать миру возможно подробнее об этом гениальном ученом. И он выполнил эту миссию, оставив нам «Похвальную речь покойному Леонарду Эйлеру», прочитанную на заседании Академического собрания 23 октября 1783 г. и опубликованную позже в Петербурге (1783 г.— на французском языке, 1801 г. — на русском) и на родине Эйлера в г. Базеле (1783). Этим сочинением Фусса открывается Собрание сочинений Эйлера — одно из крупнейших изданий в мировой научной литературе.

Посвящая это сочинение своей родине, Фусс писал: «Прими этот дар, который один из твоих сыновей с берегов Невы из благодарности и любви к родине любезно преподносит в знак своей неизменной благосклонности и верности» [95, стр. 93, сноска 5]. Кажется, то было единственное сочинение, которое Фусс направил для публикации за границу, если не считать конкурсных работ. Кроме «Похвальной речи», Фусс имел к 1783 г. еще 14 опубликованных работ. Первые три мы уже назвали. К периоду сотрудничества с Эйлером относятся также все 6 его астрономических работ и две, посвященные специально теории вероятностей.

---

[6] ЛОААН, ф. 5, оп. 1, 1825, № 207, л. 3.

Вместе с Эйлером Фусс исследовал явление искусственного магнетизма [Ф. 4], остойчивость судов [Ф. 6], решил ряд математических задач.

После смерти Эйлера научная тематика работ Фусса почти не выходила за рамки математики и некоторых задач механики.

Глава 2

Педагогическая и административная деятельность. Семья Фусса

Педагогическая деятельность

В том же 1783 г. Фусс, по приглашению графа де Бальмена, оставаясь в академии, принял должность профессора математики в Сухопутном кадетском корпусе [7] и двадцать лет занимал ее, способствуя математическому образованию большого числа офицеров русской армии.

Чтобы облегчить преподавание математики, Фусс написал и издал «Начальные основания алгебры» [Ф. 109], «Начальные основания плоской тригонометрии» [Ф. 111], «Начальные основания высшей геометрии» [Ф. 110], «Начальные основания чистой математики» в трех частях [Ф. 112, 113, 114]. Эти руководства, переведенные на русский язык, использовались почти во всех учебных заведениях России того времени. Ниже мы остановимся подробнее на их характеристике.

В 1796 г. Фусс был назначен профессором математики Морского кадетского корпуса [8]. В литературе о кадетских корпусах упоминаний о Фуссе нет. Лишь в книге В.Е. Прудникова [45, стр. 161] приводится воспоминание Броневского: «Помню я добрых и ласковых академиков Фусса

---

[7] Сухопутный кадетский корпус был открыт 17 февраля 1732 г. (по указу Анны Иоанновны от 29 июля 1731 г.). Названия его менялись. С 1732 г. он назывался «Рыцарская академия»; с 1743 г.— «Сухопутный кадетский корпус»; с 1766 г.— «Императорский сухопутный шляхетский кадетский корпус»; с 1800 по 1863 г.— «Первый кадетский корпус» [3].

[8] Морской кадетский корпус открыт в 1752 г. на базе Морской академии. Ведет свое начало от учрежденной при Петре I 14 января 1701 г. Школы математических и навигацких наук [7].

и Крафта и несносного педанта, хотя очень ученого академика Гурьева...». Имеются в виду Н. И. Фусс, Логин Юрьевич Крафт и Семен Емельянович Гурьев, преподававшие в Морском кадетском корпусе. Давая в обоих корпусах по 20 уроков в неделю, Фусс, привыкший с юных лет к усиленному труду, продолжал в то же время и свои научные исследования, о чем свидетельствуют многочисленные статьи, напечатанные за те годы в изданиях академии.

В 1802 г. Фусс вместе с сенаторами Муравьевым и графом Потоцким был назначен членом Комитета для пересмотра уставов Академии наук и Академии художеств, Московского и Виленского университетов. После успешного выполнения этого поручения Фусс был награжден бриллиантовым перстнем и назначен членом Главного правления училищ.

Непременный секретарь Академии наук

Особое значение в биографии Фусса имела его административная деятельность в академии в качестве непременного секретаря.

В соответствии с первым уставом Академии —«Регламентом Санкт-Петербургской академии наук и художеств», утвержденным 24 июля 1747 г., была учреждена должность конференц-секретаря Академии наук. С 1769 до 1799 г. ее занимал И. А. Эйлер.

Приняв в 1799 г. русское подданство, Фусс получил право занимать высокие административные должности. 17 сентября следующего года он был избран конференц-секретарем Академии наук на место умершего И. А. Эйлера и секретарем Вольного экономического общества. В соответствии с новым уставом —«Регламентом императорской Академии наук», принятым в 1803 г., должность называлась «непременный секретарь академии». Его функции определены в главах IV (§§ 38—44), VIII (§§ 92, 93), IX (§ 108) «Регламента», которые воспроизводятся ниже (некоторые в сокращении).

Глава IV. О непременном секретаре

§ 38. Секретарь должен вести надлежащую корреспонденцию со всеми академиями и учеными обществами в Европе, с иностранными членами и в особенности с членами, получающими пенсион из академии, и корреспондентами.

§ 39. Из сего следует, что секретарь должен быть известен отличною ученостию, и для того он всегда будет избираем из числа академиков. При открывшейся вакансии избрание сие производится в полном Академическом собрании по большинству голосов.

§ 40. Секретарь как член Академического собрания имеет в оном свое место подле президента и во всех суждениях и выборах подает голос, как и другие академики.

§ 41. Секретарь ведет журнал академическим заседаниям, в случае отсутствия президента, по препоручению его, делает от его имени предложения; доносит собранию о предметах для суждения, между одним и другим заседанием представленных; читает письма, присланные в академию, также и ответы на оные, вследствие определения Академического собрания им учиненные.

§ 42. Секретарь имеет смотрение над печатанием Академических актов и пишет историю академии, помещаемую в начале каждого тома оных, коих экземпляры посылает он от имени академии во все ученые общества, с коими она имеет сношение, и которые взаимно сие наблюдают. Он заготовляет, по требованию академии, свидетельства и выписки из протоколов; также заготовляет и контросигнирует дипломы академии, которой большая и малая печать находится под его хранением.

§ 43. Секретарь имеет в ведении своем академический архив и смотрит, чтобы в нем наблюдаем был надлежащий порядок; ему не позволяется из оного ничего выдавать без расписок, даже и самим академикам.

§ 44. Он имеет при себе из воспитанников одного архивариуса и одного переводчика, избираемых Академическим собранием по большинству голосов, и двух писцов, которых он сам назначает.

Глава VIII. **О собраниях**

§ 92. Президент или секретарь открывает собрание приличною речью, в которой упоминается о трудах, академиею в прошедший год подъятых, секретарь возвещает имена ученых, получивших награждения, и предлагает сокращение из диссертаций ими представленных и академиею одобренных. Он также читает новые задачи, предложенные академиею на следующий год, и объявляет имена ученых, новопринятых в члены академии, присоединяя к тому исторические сведения о членах, смертию у нее похищенных.

Глава IX. **О воспитанниках**

§ 108. Они должны каждые три месяца, по крайней мере единожды, писать к секретарю конференции, извещать его об успехах своего путешествия, о употреблении своего времени и наблюдениях,

> ими сделанных. Каждый год они обязаны присылать разсуждение о каком-либо ученом предмете, дабы академия могла из того видеть, до какой степени оправдывают ее ожидание. Все сие непременный секретарь представляет собранию».

Фусс до конца жизни тщательно исполнял обязанности, предписанные уставом академии. Он вел обширную переписку, о которой мы еще будем говорить, писал историю академии с 1799 по 1825 г., опубликованную в ее периодических изданиях [9], представлял Академическому собранию работы, поступавшие в академию для печатания или на отзыв, руководил подготовкой работ к изданию, вел журнал заседаний, ведал архивом.

После 1810 г., когда в академии не было ни директора, ни президента, ни вице-президента, он фактически в течение 8 лет был директором [10].

Фусс управлял деятельностью академии в очень трудный для нее и для всей страны период Отечественной войны 1812—1814 гг. и первые послевоенные годы.

Несмотря на трудности того времени, академия не прекращала работу, продолжали выходить «Мемуары», «Технологический журнал», «Умозрительные исследования» и другие издания, разрабатывались новые теоретические и практические проблемы, работали экспедиции.

С 1800 г. Фусс был секретарем Вольного экономического общества — старейшего из ученых обществ России, учрежденного в 1765 г. Цель общества заключалась в распространении среди населения полезных и нужных для земледелия и домостроительства знаний, в изучении положения русского земледелия и условий хозяйственной жизни страны, а также состояния сельскохозяйственной техники в западноевропейских государствах. Обществу принадлежит почин по собиранию сведений об экономической жизни России. Оно издавало сочинения как оригинальные, так и переводные, касающиеся рационального ведения хозяйства, преимущественно сельского.

Периодически издавались «Труды Вольного экономического общества к поощрению в России земледелия и до-

---

[9] ЛОААН, ф. 5, оп. 1, 1825, № 207, л. 3.

[10] Последним директором был П. П. Бакунин — с 1794 до 1798 г. Президента в академии не было с 1810 г. (после Новосильцова) по 1818 г. (С. С. Уваров); вице-президента — с 1803 г. (после С. Я. Румовского) до 1830 г. (А. К. Шторх).

мостроительства», рассчитанные главным образом на читателя-землевладельца. По словам историка Общества А. И. Ходнева, в «Трудах» было собрано «все реальное знание конца XVIII в. со всеми его светлыми и темными сторонами». Подробнее об обществе и его «Трудах» см. [55], [25] [11].

Вольное экономическое общество было самым непосредственным образом связано с академией. В его организации приняли участие И. Тауберт, Г. Н. Теплов, И. Леман, будущий почетный член академии А. А. Нартов, избранный секретарем общества и позднее ставший его президентом, и другие. Некоторые академики выполняли различного рода поручения общества, печатали свои работы в «Трудах».

Благоприятную почву для научного сотрудничества академии и общества и для их организационной близости создавало то, что хозяйственные задачи, стоявшие перед обществом, смыкались с практическими вопросами, особенно занимавшими академию в рассматриваемый период.

Новые должности, сопряженные со многими трудами и заботами, заставили Фусса отказаться от дальнейших занятий в Сухопутном и Морском корпусах.

В течение 22 лет Фусс состоял членом Главного правления училищ. Главное правление училищ, названное в манифесте 8 сентября 1802 г. об учреждении министерств «Комиссией об училищах», согласно указу от 24 января 1803 г. состояло из попечителей университетов и их округов и других членов, назначаемых высшей властью, под председательством министра. Основными задачами правления были: принятие новых постановлений по разным предметам учебных заведений, учреждение вновь открываемых учебных заведений и ученых обществ, снабжение учебными руководствами. Главное правление училищ существовало до 1863 г., когда было переименовано в Совет министра народного просвещения.

Деятельность Фусса в Главном правлении училищ была весьма плодотворной. При частых переменах в составе правления он один из немногих довольно долго (с 1803 г.) оставался на своем месте и, пользуясь большим влиянием

---

[11] В «Энциклопедическом словаре» Брокгауза и Ефрона, т. 13, СПб., 1892 и т. 66, СПб., 1901, приведены ссылки на книги об обществе и указатели сочинений, напечатанных в его «Трудах».

среди членов правления, провел несколько мер, послуживших улучшению учебного дела в России. Он передал правлению безвозмездно свой «Курс чистой математики». Сын его Павел Николаевич в 1825 г. писал об этом: «Курс чистой математики в трех частях, написанный в пользу 1-го кадетского корпуса и уступленный сочинителем Главному правлению училищ без возмездия, отпечатан ныне четвертым тиснением и употребляется во всех училищах империи» [12].

В 1805 г. Фусс был назначен и членом Совета военных учебных заведений.

В 1819 и 1820 гг. он, ввиду отсутствия попечителя Санкт-Петербургского учебного округа С. С. Уварова, исполнял его должность.

Фусс сохранял работоспособность до последних дней жизни. Умер он 23 декабря 1825 г. (4 января 1826 г.) в Петербурге. Известие о его смерти напечатали газеты и журналы, сообщив читателям биографические справки и обзор сочинений покойного («Северная пчела», 1825 г., № 156; 1826, № 3 и № 6; «Библиографические листы» Кеппена, 1825, № 38; «Московские ведомости», 1826, № 6 и № 22).

На службе в академии наук Фусс состоял без малого 50 лет [13].

Признание научных заслуг

Фусс был избран действительным или почетным членом ряда академий, ученых обществ и университетов. В «Русском биографическом словаре» [47] о Фуссе сказано, что «он состоял членом академий Берлинской (1793), Стокгольмской (1797), Мюнхенской (1808), Бостонской (1812), Падуанской (1816), Туринской (1823) и многих ученых обществ. Был почетным членом университетов в Вильне (1802), Харькове (1811) и Москве (1819)». В «Московских ведомостях» № 6 за 1826 г., кроме тех же академий, упоминается еще Неаполитанская. Далее там же [14] читаем, что Фусс был «членом обществ: Копенгагенского наук, Великобританского земледелия, Потсдамского, Лейпцигского и Венского экономических, Берлинского естествоиспытателей, Упсальского, Американского Филадель-

---

[12] ЛОААН, ф. 5, оп. 1, 1825, № 207, л. 3.

[13] Там же, л. 4.

[14] ЛОААН, р. V, оп. Ф—19, № 6.

фийского и Итальянского в Модене». Его конкурсные работы [Ф. 29] и [Ф. 52] удостоены премий Парижской и Датской академий.

Статьи о Н. И. Фуссе помещены во многих крупнейших энциклопедиях мира.

О сыновьях Н. И. Фусса

Фусс женился в 1784 г. на Альбертине Эйлер — дочери И. А. Эйлера, внучке Л. Эйлера. В семье Фусса было 13 детей (9 дочерей и 4 сына). Трое из них — Павел, Егор (Георг) и Николай известны как ученые. Павел — был академиком и тоже непременным секретарем Петербургской академии, Егор — сперва астроном в Пулково, затем директор обсерватории в Вильно, Николай, о котором биографических сведений найти не удалось, помогал Павлу в издании переписки Эйлера и его оставшихся сочинений, жил в Петербурге и, вероятно, преподавал математику.

Павел Николаевич (Пауль Генрих) Фусс — академик, непременный секретарь Петербургской академии наук, известен главным образом тем, что подготовил и издал (вместе с братом Николаем) «Переписку» (1843) [П.Ф., 9] и два тома Собрания арифметических работ Эйлера, СПб., 1849.

П. Н. Фусс родился 21 мая 1798 г. в Петербурге, умер там же 10 января 1855 г. Получив образование в академической гимназии, он в 1814 г. был принят в число воспитанников академии. В соответствии с уставом академии воспитанников готовили к дальнейшей научной деятельности и пополнению рядов адъюнктов.

В 1816 г. Павел Фусс был назначен преподавателем математики в 1-й Сухопутный кадетский корпус и в том же году — корректором математических сочинений, печатавшихся в академической типографии.

В 1818 г. по предложению президента академии Уварова Павел Фусс был избран адъюнктом по математике, а затем, в 1823 г., — экстраординарным академиком. В 1824 г. он был назначен инспектором классов Воспитательного дома. Должность эту он занимал до 1826 г., когда состоялось его избрание ординарным академиком по математике и непременным секретарем Академии наук. С 1826 г. наряду с академической деятельностью Фусс на протяжении более 17 лет исполнял обязанности секретаря Вольного экономического общества, а в 1845 г. был назначен председателем учебного комитета при IV отделении собственной канцелярии царя.

Из его научных работ, которые печатались в академических изданиях, две уже упоминались. Следует особо упомянуть его годовые отчеты о деятельности академии, содержащие ценный материал по ее истории. Некоторые работы (см. ниже их список) были посвящены специальным математическим вопросам алгебры, геометрии, интегрального исчисления [П.Ф., 1—6], некоторые — разбору сочинений других авторов [П.Ф., 10, 12, 14], остальные — неизданным трудам Эйлера и вопросам истории науки. Наконец, отметим, что Фусс составил 22 отчета (I—XXII) о присуждении Демидовских премий в области науки (1832—1853), написал 4 опубликованных отчета о деятельности академии за 1823—1826, 1851, 1852 и 1853 гг. [93, II, стр. 399].

Научные заслуги Фусса были отмечены избранием его членом более 40 ученых учреждений и обществ [15].

Егор (Георг) Николаевич Фусс, директор академической обсерватории в Вильно, родился в Петербурге 13 декабря 1806 г., умер в Вильне 6 января 1854 г.

Принятый в число воспитанников Академии наук, он изучал астрономию под руководством академика В. Вишневского. Затем, чтобы усовершенствоваться в практической астрономии, продолжал свои занятия (1828—1829) в Дерптском (Юрьевском) университете у известного астронома В. Я. Струве. Когда в 1830 г. в Китай отправилась 11-я духовная миссия, Егор Фусс был прикомандирован к ней в качестве астронома. Результаты его научных исследований в Монголии и Китае изложены в напечатанных академией письмах и отчетах — «Предварительный отчет, представленный в академию, о путешествии в Китай» [16] и в труде, опубликованном в 1835 г. [Е.Ф., 1].

По возвращении в Россию Е. Фусс временно (1833—1834) читал астрономию в Петербургском университете, а в 1835 г. совершил большое путешествие по Германии,

---

[15] Источники к биографии: [47, 76, 90, 91], «Санкт-Петербургские ведомости», 1851, № 120.

[16] «Rapport préalable fait à l'Académie sur un voyage en Chine...», Recueil des actes, 1832, p. 36—75.

Франции и Англии для ознакомления с лучшими заграничными обсерваториями.

В 1836 г. он участвовал вместе с А. Н. Савичем и Е. Е. Саблером в экспедиции, снаряженной Академией наук для определения разности высот уровней Черного и Каспийского морей. Результаты своих исследований поместил в четырех статьях, вышедших в «Бюллетене Академии наук» за 1838 г. (тома IV и V).

В 1839 г. был назначен одним из помощников директора открытой в том же году Пулковской обсерватории и, занимая эту должность до 1847 г., в первые годы принимал деятельное участие в составлении каталогов всех звезд северного полушария до 7-й величины включительно, а с 1844 г. производил наблюдения большим пассажным инструментом, собирая данные для составления фундаментального каталога звезд.

Назначенный в 1848 г. директором академической обсерватории в Вильно, Фусс поставил себе главной задачей привести ее в такое состояние, которое давало бы возможность проводить там серьезные научные работы. Начатые затем наблюдения и кабинетные работы он, к сожалению, не смог довести до конца вследствие тяжелой болезни, которая явилась причиной его смерти на 48 году жизни[17].

Сын Е. Н. Фусса — Виктор Егорович Фусс (1840—1915) — вычислитель главной астрономической обсерватории в Пулково, астроном, геодезист, автор 34 научных работ. «В. Е. Фусс был достойным потомком знаменитых своих предков, оказавшим русской науке великие услуги»,— писал А. И. Вилькицкий, известный русский гидрограф-геодезист [4, стр. 8].

---

[17] Биографическая справка взята из «Русского биографического словаря» [47].

II. Научные труды

Опубликованные научные труды Н. И. Фусса можно распределить по областям науки так: алгебра — 4, анализ—33, геометрия — 38, теория вероятностей—2, механика — 17, физика — 2, астрономия — 6, картографические проекции — 1, фортификация — 1, демография — 2, биографии ученых — 2, учебники — 6. Всего — 114 (см. библиографию трудов Н. И. Фусса в конце книги).

К геометрическим трудам отнесены также два опубликованных отзыва геометрического содержания [Ф., 55 и и 59].

Принимая во внимание некоторую условность границ между группами работ по анализу и геометрии, мы все-таки получаем возможность видеть, на что преимущественно были направлены усилия Фусса.

О смене научных интересов Фусса можно проследить по списку трудов. Заметим тут же, что до 1783 г. (год смерти Л. Эйлера) Фусс написал все свои сочинения по физике, демографии, астрономии. После 1783 г. в тематике его работ стали преобладать геометрия и анализ. Геометрические работы составляют лучшую часть его вклада в математическую науку. На русский язык, кроме «Похвальной речи Л. Эйлеру», переведено 17 статей, в том числе 11 геометрических. Его статьи по другим разделам знаний большей частью неизвестны даже многим специалистам по истории науки.

Глава 1

Геометрия

О геометрической школе Эйлера

Общность научной тематики и методов, нашедших отражение в геометрических работах Эйлера и его последователей, позволяют говорить о геометрической школе Эйлера. Кроме Лекселя, Котельникова и Фусса, к ней, естественно, примыкают работавшие после Эйлера академики Ф. И. Шуберт (1758—1825) и С. Е. Гурьев (1766—1813), а также воспитанники академии Э. Д. Коллинс (1791—1840) и Павел Фусс (1798—1855).

Основными разделами геометрии, которыми занимались представители этой школы, были: полигонометрия (Лексель, Фусс, Котельников), сферическая геометрия и сферическая тригонометрия — сферика (Лексель, Фусс, Шуберт), исследование некоторых свойств кривых и поверхностей 2-го порядка (Фусс, Гурьев), кривые высших порядков и кривые, обладающие какими-нибудь заранее заданными свойствами (Фусс, Шуберт, Гурьев, Коллинс, П. Фусс), математическое обоснование некоторых картографических проекций (Фусс, Шуберт), элементарная геометрия, в частности решение некоторых классических задач Паппа и Аполлония (Лексель, Фусс, Шуберт, Гурьев). Подробнее см. [6, 25—30, 67, 72].

Новые результаты были получены Лекселем и Фуссом в полигонометрии. Лексель предложил общий тригонометрический метод решения многоугольников, Фусс решил ряд задач о многоугольниках и окружности. Поставленные ими проблемы позже привлекли внимание таких крупных математиков, как Люилье, Штейнер, Якоби.

Большое значение для расширения круга геометрических идей имели работы Лекселя, Фусса и Шуберта в области сферики. Развивая эти идеи, геометры следующего поколения пришли к аналитической геометрии на сфере и к собственно неевклидовым геометриям, являвшим собой один из поворотных этапов в развитии науки. В частности, работы Фусса, относящиеся к сферике, ныне можно рассматривать по существу как работы по одной из неевклидовых геометрий, а открытый им сферический эллипс — как кривую второго порядка эллиптической плоскости.

Представляют интерес также некоторые аналитико-геометрические в широком смысле слова работы школы Эйлера, пополнившие новыми результатами теорию кривых высших порядков и натуральную геометрию.

Познакомимся ближе с геометрическими сочинениями Фусса.

Полигонометрия

Большой интерес в научных кругах вызвали в свое время труды Фусса в области полигонометрии — учении о многоугольниках [26].

Фусс исследовал (1795), сколькими способами можно разбить n-угольник на m-угольники так, чтобы не осталось ни одного l-угольника, где $l < m < n$ [Ф. 41]. Другие его работы такого рода — это статьи о многоугольниках, вписанных в круг и описанных около него. Некоторые задачи для вписанных 4-угольников были решены Эйлером (1750 и 1786). Фуссу принадлежат три специальные статьи о многоугольнике и окружности.

В статье 1797 г. [Ф. 45] он впервые нашел зависимость между радиусами r и R вписанного и описанного кругов для 4-угольника и расстоянием d между их центрами:

$$d = R^2 + r^2 \pm r \sqrt{4R^2 + r^2},$$

где знак минус берется при $r < R$, знак плюс — при $r > R$ (случай вписания в продолжение сторон).

В другой статье Фусс обобщил задачу о зависимости между R, r и d на случай $n > 4$ и дал ее решения для 5-, 6-, 7- и 8-угольников с нерегулярной симметрией — многоугольников, симметричных относительно диаметра, проходящего через центры вписанного и описанного кругов [Ф. 54]. Попытка решить задачу для несимметричных многоугольников в общем виде Фуссу не удалась, так как тригонометрический метод, которым он пользовался, оказался недостаточным. Но проблема, поставленная Фуссом, привлекла внимание других выдающихся математиков.

Через 25 лет после Фусса аналогичные формулы получил Я. Штейнер, кроме формулы для 7-угольника (Журнал Крелле, т. 2, 1827). В 1828 г. К. Г. Якоби показал, что формулы Штейнера сводятся к формулам Фусса и что формулы Фусса, полученные для частного случая многоугольников, в действительности годятся для общего случая. Только слишком сложную формулу Штейнера для 8-угольника ему не удалось согласовать с более простой фуссовой. Якоби решил задачу о вписании и описании окружности и соотношениях между R, r, d как проблему замыкания (Журнал Крелле, т. 3, 1828), воспользовавшись эллиптическими функциями, разработанными незадолго до этого им самим. Суть проблемы замыкания состоит в следующем. Пусть круг O' целиком лежит в круге O. Возьмем на круге O произвольную точку A и проведем хорды AA', $A'A''$, $A''A'''$ и т. д., касательные к внутреннему кругу. Таким образом, получается многоугольник, вписанный в круг O и описанный около круга O'. Образующая его ломаная может сколько угодно раз обернуться в круге O, пока не станет замкнутой, но она может и не замкнуться. Требуется исследовать, при каких условиях многоугольник получится замкнутым. Для конических сечений проблему замыкания поставил и решил Ж. В. Понселе (1822).

В третьей статье «Доказательство одной теоремы полигонометрии» (1810) [Ф. 97], умело используя некоторые тригонометрические суммы и произведения, Фусс доказал теорему: если из какой-либо точки P описанного около n-угольника $ABC\ldots N$ круга радиуса R провести прямые к вершинам его углов, то $PA^2 + PB^2 + \ldots + PN^2 = 2nR^2$

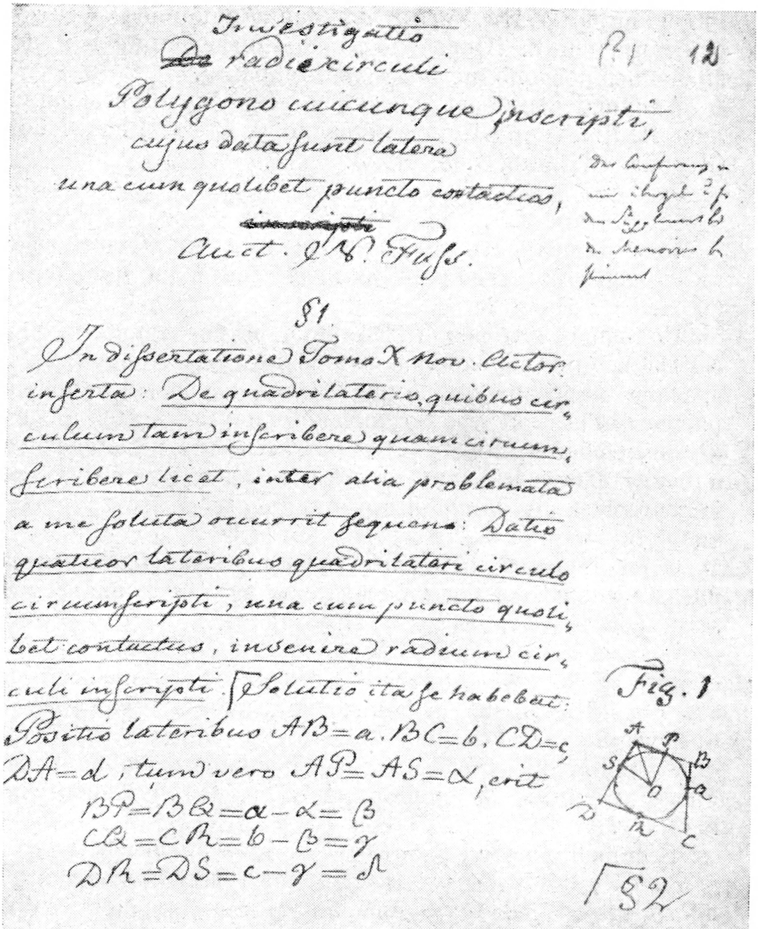
В Архиве Академии наук СССР (ф. 40, оп. 1, № 40) найдена неопубликованная рукопись Фусса, представленная в академию 18 августа 1824 г. и прочитанная на заседании Конференции академии 25 мая 1825 г. В ней дана следующая формула определения радиуса r окружности, вписанной в n-угольник

$$(1)r^{n-1} - (3)r^{n-3} + (5)r^{n-5} - (7)r^{n-7} + \ldots = 0,$$

где

$$(1) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad (3) = \sum_{\substack{i,k,l=1\\ i\neq k\neq l}}^{n} a_i a_k a_l \quad \text{и т. д.},$$

a_i, a_k, a_l, . . . — отрезки сторон от вершин до точек касания (i, k, l, . . . $= 1, 2, \ldots, n$). Работа написана была



Investigatio
~~De~~ radii circuli
Polygono cuicunque inscripti,
cujus data sunt latera
una cum quolibet puncto contactus,
~~circumscripti~~
Auct. N. Fuſs.

(1) 12

§ 1.

In diſsertatione Tomo X nov. Actor. inſerta: De quadrilateris, quibus circulum tam inſcribere quam circumſcribere licet, inter alia problemata a me ſoluta occurrit ſequens: Datis quatuor lateribus quadrilateri circulo circumſcripti, una cum puncto quolibet contactus, invenire radium circuli inſcripti. [Solutio ita ſe habebat: Positis lateribus $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, tum vero $AP = AS = \alpha$, erit

$$BP = BQ = a - \alpha = \beta$$
$$CQ = CR = b - \beta = \gamma$$
$$DR = DS = c - \gamma = \delta$$

Fig. 1

[§ 2

Первая страница неопубликованной рукописи Н. И. Фусса «Отыскание радиуса окружности, вписанной в многоугольник, стороны которого и одна из точек касания даны» в последние годы жизни Фусса, а после его смерти, по-видимому, затерялась в бумагах академии, так и не появившись в печати, хотя в черновике рукописи Фусс записал по-немецки: «Передано мною Конференции и предназначено для дополнения к «Мемуарам»».

Аналогичными задачами вскоре после Фусса занимались Я. Штейнер (Журнал Крелле, т. 2, 1827) и А. Мёбиус (Журнал Крелле, т. 3, 1828).

Сферика

Особую ценность имели работы Фусса в области сферики — учения о геометрических образах на поверхности шара.

Большой интерес к сферике в последней четверти XVIII в. был обусловлен как успехами астрономии, географии, картографии и навигации, так и имманентным развитием самой геометрической науки, стремившейся к новым обобщениям ввиду многих аналогий в свойствах плоских фигур и фигур на сфере. Ряд новых результатов был получен Л. Эйлером и его коллегой по Петербургской академии наук — А. И. Лекселем [28].

Существенный вклад в исследование проблем сферики внес Фусс. Его работы посвящены изучению экстремальных свойств сферических треугольников, поискам новых геометрических мест на сфере, имеющих свойства, аналогичные свойствам конических сечений на плоскости. Назовем их. Это «Решение некоторых задач сферики» [Ф. 26], представленная 11 июня 1786 г., и «О некоторых свойствах эллипсов, описанных на поверхности шара» [Ф. 27], представленная 25 октября 1787 г. Опубликованы обе в 1788 г.

В первой из этих работ Фусс решил следующие три задачи: на данном базисе, взятом на дуге большого круга, построить треугольники с вершинами на другой дуге большого круга, для которых бы:

1) угол при вершине был максимальный;
2) сумма сторон при вершине была минимальной;
3) площадь была максимальной.

Работа Фусса о сферическом эллипсе является непосредственным продолжением предыдущей, вторая задача которой привела его к мысли рассмотреть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек постоянна, и исследовать ее свойства.

Эта работа нашла живой отклик среди геометров того времени. Фусс перешагнул границы той части сферики, которая соответствовала планиметрии и, рассмотрев эллипс на поверхности шара, подал идею о создании аналитической геометрии сферы, разработанной позднее Х. Гудерманом (1830, 1835), Т. Девисом (1834) и др. Свойства сферического эллипса оказались во многом отличны от плоского. Так, например, если сумма расстояний от двух данных точек до точки сферического эллипса $2a$ равна дуге большого полукруга, то искомое геометрическое место всегда будет большим кругом, каким бы большим ни было «фокусное расстояние» $2c$. Оказалось также, как показал Л. И. Магнус [82], что сферический эллипс является линией пересечения шара с конусом второго порядка, вершина которого лежит в центре шара. Обе фокальные линии конуса определяют на шаре четыре фокуса сферического сечения. В зависимости от выбора двух из этих фокусов сумма или разность расстояний будет постоянной. Одно и то же сферическое коническое сечение, следовательно, можно рассматривать и как эллипс и как гиперболу. Нормаль в любой точке сферического эллипса или соответственно касательная в точке сферической гиперболы делят, как и на плоскости, пополам угол между двумя дугами больших кругов, проведенных из фокусов в точку кривой.

Я. Штейнер (Журнал Крелле, т. 2, 1827, стр. 45—63) нашел сферические асимптоты сферического конического сечения и доказал двойственное предложение: огибающая оснований треугольников, имеющих одинаковую поверхность и общий угол, есть сферический эллипс. Позже о конических сечениях на сфере писали М. Шаль (1830, 1831), Е. Штуди (1893), Б. Леви (1905).

20 августа 1817 г. Фусс представил работу «О циклоидах на поверхности шара описанных» [Ф. 88], которую сам считал продолжением статьи о циклоидах, эпициклоидах и гипоциклоидах на плоскости [Ф. 80], представленной раньше (14 августа 1814 г.). Циклоида на сфере определяется у Фусса как траектория некоторой точки малого круга, катящегося по другому малому кругу, параллельному экватору. Фусс вводит систему криволинейных координат, принимая дугу неподвижного малого круга за ось абсцисс, а один из меридианов — за ось ординат. Такую систему координат он применял еще в 1788 г. в работе о сфе-

рическом эллипсе. Ею пользовались потом Гудерман и Девис, независимо друг от друга разработавшие систематическую аналитическую геометрию сферы.

Задачи, которые при этом решил Фусс, были аналогичны задачам, решенным в 1782 г. А. И. Лекселем в статье на ту же тему. Были исследованы свойства сферической циклоиды, выражена длина дуги, кривизна, площадь эпициклоиды. Фусс нашел еще углы касательной к циклоиде в любой ее точке с осями координат. Вычисления у Лекселя и Фусса приводили, в частности, к эллиптическим интегралам (любопытная деталь, на которую обратили внимание снова лишь после работ Римана).

Главной геометрической задачей, возникающей при построении географических карт, является построение координатной сетки. Аналитически это сводится к отысканию связи между координатами точек на проектируемой поверхности и на поверхности проекции, т. е. пре образованию координат с учетом возможных искажений. В силу трудности соответствующего круга задач, картографическими проекциями, особенно с XVII в., стали заниматься многие крупные математики: Ламберт, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Чебышев и др.

В числе первых работ по математической картографии в России были три работы Эйлера 1778 г. [60].

Здесь будет уместно упомянуть работу Н. Фусса «О стереографической проекции земной поверхности» 1786 г. [Ф. 21], относящуюся к теории картографических проекций. Она представляет собой более подробное изложение и местами более простое аналитическое выражение тех общих сведений о стереографической проекции сферы, которые имелись в первых двух картографических работах Эйлера [60], а еще раньше (1772) — у Ламберта [29]. Вслед за Эйлером Фусс рассмотрел полярную экваториальную и косую стереографические проекции на касательную плоскость (так называемая равновеликая проекция Ламберта), упростил известные и вывел некоторые новые формулы, применив их к частным видам стереографической проекции — полярной и экваториальной, предложил таблицы с шагом в 1°, облегчающие вычерчивание карт в в этих проекциях.

Элементарная геометрия

Ведя активную преподавательскую работу, Фусс уделял много внимания вопросам элементарной математики, особенно геометрии. Он долгое время собирал интересные задачи и теоремы. В работе «Доказательства нескольких свойств круга» [Ф. 108] Фусс писал: «Всякий раз, когда геометр принимается за решение, пусть даже несложной задачи, ему представляется возможность открыть попутно геометрические истины, которых он не искал... Иногда какое-нибудь геометрическое свойство может явиться результатом отдельного размышления в часы досуга... Этот двойной источник геометрических истин постепенно заполняет портфель геометра значительным числом отдельных теорем... Из большого числа подобных разрозненных теорем, накопившихся в моем портфеле, я выбрал на сей раз только те, которые касаются свойств круга...»

Внимание Фусса привлекало несколько наиболее интересных задач древних геометров. Таковы, например, задача Паппа (III в.) о вписании в данную окружность треугольника, стороны которого проходили бы через три данные точки, лежащие на одной прямой, задача Аполлония (III в. до н. э.) о построении окружности, касательной к трем данным окружностям.

Геометрическое решение задачи Паппа, обобщенной в 1731 г. В. Симсоном на случай трех произвольно заданных точек, дал Д. Ф. Кастильон в «Мемуарах» Берлинской академии [1779], имя которого обобщенная задача и получила. «Задачу Кастильона» решали Лагранж [1779], Эйлер (1783), Фусс (1783) [Ф. 13] и др.

Первое известное решение задачи Аполлония принадлежит Паппу, позже ее решали Ф. Виет, ван Роумен, И. Ньютон, И. Г. Ламберт, Г. Голланд. Эйлер нашел аналитическое решение задачи в 1779 г. (NAASP, т. VI, 1790) для случая окружностей, а в другой работе — для случая сферы (опубликована в «Умозрит. исслед.», т. IV, 1815). Фусс решил задачу Аполлония для окружностей в том же 1779 г., но опубликовал лишь спустя 11 лет [Ф. 33], когда увидел, что его решение гораздо проще появившихся перед этим решений Ламберта и Голланда.

Не лишена интереса еще одна статья Фусса, относящаяся к геометрии треугольника и круга,—«Доказательство некоторых теорем геометрии» [Ф. 56], представленная 4 июля 1799 г. В ней речь идет о теореме, которую, по словам Фусса, ему сообщил без доказательства некий молодой француз, преподававший в Сухопутном кадетском корпусе. Этот француз учился в свое время в Королевской военной школе в Париже, где теорема имела известность и приписывалась Даламберу. По мнению Фусса, «она несомненно доставит удовольствие некоторым любителям геометрии и, может быть, даже некоторым геометрам по профессии» [Ф. 56, стр. 139].

Вот эта теорема: Если описать три окружности произвольных разных радиусов с центрами в вершинах некоторого треугольника и провести к ним попарно по две касательные, то точки пересечения этих трех пар касательных будут расположены на одной и той же прямой.

Аналогичная теорема доказывается дальше для трех шаров, вершины касательных конусов которых лежат на одной прямой.

Эти теоремы оказались частными случаями общей теоремы, сформулированной Фуссом. Пусть имеется n окружностей или n шаров, неодинаковых радиусов, центры которых расположены в одной плоскости. Если к каждой паре из них провести пару касательных прямых или, соответственно, касательных конусов, то получится C_n^2 точек пересечения касательных или вершин конусов, расположенных на C_n^3 различных прямых линиях, т. е. по три на одной и той же линии.

Строгого доказательства этой теоремы у Фусса не получилось. Справедливость ее подтверждается ссылками на первый и второй частные случаи.

М. Шаль в своем сочинении «Исторический очерк происхождения и развития геометрических методов» [53, примечание VI, стр. 31—32] хвалил Фусса за удачное использование теоремы Менелая о трансверсалях для доказательства упомянутого выше «прекрасного свойства» кругов.

Статья «О разбиении ромбоида на четыре равные части посредством двух прямых линий, пересекающихся под прямым углом» [Ф. 69] предназначалась Фуссом для «образованной части русской публики», среди которой имелось «значительное число любителей исследований по элементарной геометрии». Фусс имел в виду прежде всего преподавателей математики в различных учебных заведениях. Их запросы были ему известны и он был заранее уверен, что его статьи будут встречены с интересом.

В работе [Ф. 93] 1824 г., относящейся к диофантову анализу, нашли приложение некоторые идеи Эйлера о выражении элементов треугольника рациональными числами.

Высшая геометрия

Работая под руководством такого крупнейшего аналиста, каким был Эйлер, Фусс досконально овладел методами высшего анализа и умело использовал их в исследованиях, относящихся к аналитической и дифференциальной геометрии. Рассмотрим важнейшие работы этого направления.

Исследованием некоторых свойств конических сечений в академии занимались Эйлер, а затем и Фусс. Одна часть этих исследований была посвящена возникшим тогда задачам построения эллипса, имеющего наименьшую площадь и проходящего через 3 или 4 заданных точки, другая — поискам новых свойств конических сечений.

В одной из работ об описании эллипса наименьшей площади вокруг любого выпуклого 4-угольника (AASP, 1791, т. IX, 1795)[18] Эйлер получил условия для определения коэффициентов общего уравнения 2-го порядка. Причем для определения коэффициента B члена с произведением координат xy предлагалось кубическое уравнение

$$B^3 - \alpha B^2 + \beta B - \alpha = 0, \qquad (1)$$

где α, β — некоторые постоянные.

В 1798 г. появилась статья Фусса «Разъяснение геометрической задачи о наименьшем эллипсе, который требуется провести через данные четыре точки» [Ф. 47], где Фусс исследовал корни уравнения (1) и соответствующие им решения. Он показал, что это уравнение имеет три действительных корня. Но только один из них дает искомый эллипс, а два других — некоторую гиперболу. Оказалось, что все три корня являются решениями бо-

---

[18] При ссылках на периодические издания Петербургской академии наук первая дата показывает, за какой год составлен соответствующий том сборника научных статей, а вторая — год его выхода из печати.

лее общей задачи: среди всех кривых 2-го порядка, которые можно провести через четыре данные точки, найти те, для которых прямоугольник, построенный на их полуосях, имел бы наименьшую площадь.

Работа Фусса «Примечания на некоторый особенный эллипс» (1806) [Ф. 61] привлекает внимание многими интересными свойствами, обнаруженными у эллипса, который получается в результате сложения (с учетом знаков) ординат точек окружности радиуса r с соответствующими им абсциссами. Фусс обнаружил и доказал больше десятка свойств полученного эллипса

$$2x^2 + y^2 - 2xy - r^2 = 0$$

и соотношений между его элементами и элементами данной окружности. Вот наиболее интересные, на наш взгляд, соотношения (свойства 4, 5, 6, 11, по Фуссу):

— большая полуось эллипса равняется удвоенной апофеме правильного пятиугольника, а малая — стороне правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность;

— разность полуосей равняется радиусу окружности, а прямоугольник, построенный на полуосях, равен квадрату радиуса окружности;

— площадь эллипса равна площади круга, а площади луночек, заключенных между дугами окружности и эллипса, равны между собой;

— расстояние фокусов от оси абсцисс есть средняя пропорциональная между радиусом окружности и большой полуосью, а расстояние фокусов от оси ординат — средняя пропорциональная между радиусом и малой полуосью.

Есть у Фусса специальное исследование свойств каустики и катакаустики параболы [Ф. 38]. Каустикой отражения (катакаустикой) или преломления (диакаустикой) данной кривой называется огибающая семейства отраженных или преломленных этой кривой лучей, исходящих из одной точки или параллельных. Эти кривые важны в оптике.

Фусс исследовал катакаустику параболы $y^2 = 2px$ и получил уравнение

$$y = \pm\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}px},$$

из которого легко установить ее свойства. Она похожа на лист Декарта. Фусс определил ее экстремум, длину дуги, кривизну (общую и в особых точках), квадратуру.

Еще раз к «зажигательным кривым» (каустикам) Фусс вернулся в 1815 г. [Ф. 81].

Как утверждает Дж. Лория [80], Фусс впервые получил кривую, описанную им в статье «О спуске тяжести по дуге лемнискаты» (1824) [Ф. 91], решив следующую задачу. Даны две точки на прямой. Найти кривую, имеющую то свойство, что сумма и разность времени движения свободно падающей материальной точки по прямым, соединяющим точки этой кривой с двумя данными точками, есть величина постоянная. Кривая похожа на конхоиду и состоит из двух частей. Фусс нашел ее, занимаясь задачей о спуске и подъеме тяжести по дуге лемнискаты, которая привлекала внимание итальянских математиков Т. М. Бонатти (1780), Л. Маскерони (1781) и Д. Саладини (1806). Дальнейшим исследованием кривой Фусса занимался Ж. А. Серре, напечатавший в журнале Лиувилля (1844) специальную статью «О механическом свойстве лемнискаты, открытой Н. Фуссом».

| Исследованию отдельных свойств известных раньше кривых и поискам новых кривых, обладающих наперед заданными свойствами, в творчестве петербургских геометров уделялось много внимания. Заметим, что работы такого характера преобладают и во всех четырех геометрических томах полного собрания трудов Эйлера. Вслед за Эйлером аналогичными или теми же вопросами занимались его ученики. Среди них первое место по количеству и новым результатам приходилось на работы Н. И. Фусса.

Ранними его работами такого рода были «Аналитико-геометрическое исследование о кривой линии, обладающей особым свойством» [Ф. 16] и «Аналитико-геометрическое исследование о различных видах кривых линий, обладающих особым свойством» [Ф. 19] [19]. Обе опубликованы в 1784 г. Их объединяет типичное для задач того времени требование найти новые соотношения между длинами дуг неко-

---

[19] Впервые слова «геометрический анализ» появились в одной работе Я. Германа (CASP, т. VI, 1729, стр. 47). Термин «аналитическая геометрия» первыми употребили Хорслей (1779) для названия «Метода флюксий» в издании трудов Ньютона и Фусс — в рассматриваемых двух статьях 1784 г. (см. [70, стр. 216]).

торых кривых и касательными, подкасательными, нормалями, поднормалями и другими элементами тех же кривых.

Решалась следующая задача. Пусть O — точка нормали OA (рис. 1), E — точка касательной AE к некоторой кривой AB в ее точке A, $M(x, y)$ — точка пересечения OE с AB. Найти кривые, для которых имеет место равенство $AE = \smile{AM} = s$. Фусс нашел решение в таком виде:

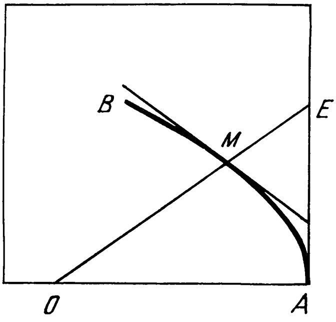


Рис. 1

$$x = s^2 \sin\varphi + s\cos\varphi,$$
$$y = 1 - s\sin\varphi - \cos\varphi,$$
$$s = \frac{1}{2\sqrt{\sin\varphi}}\int\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi, \qquad (2)$$

где φ — угол между касательными в точках A и M.

Бóльшую часть статьи Фусс отвел разложению в ряд интеграла $\int \sin^{\alpha}\varphi d\varphi$.

Для длины дуги s (а значит, и для определения x и y) он вывел ряд

$$s = \sin\varphi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7}\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11}\sin^4\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15}\sin^6\varphi + \ldots\right).$$

Фусс пытался решить эту же задачу в полярных координатах. Он обозначил полярный угол $AOM = \zeta$, радиус-вектор $OM = z$ (см. рис. 1). По условию задачи требуется, чтобы $\smile{AM} = AE$ или, что то же, $s = \operatorname{tg}\zeta$, откуда $ds = d\zeta/\cos^2\zeta$, и тогда

$$\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta} = \sqrt{dz^2 + z^2 d\zeta^2}\,. \qquad (3)$$

Это уравнение Фуссу не удалось тогда проинтегрировать. Попытки найти длину дуги искомой кривой приводили к формуле (2), где интеграл вычислялся лишь приближенно.

Спустя сорок лет Фусс вернулся к поставленной выше задаче в мемуаре «Решение геометрической задачи и одного очень трудного дифференциального уравнения» [Ф. 92].

Отправляясь от уравнения $s = \operatorname{tg} \zeta$, вытекающего из условия задачи, и приняв за переменную саму дугу s, Фусс решил уравнение (3) относительно dz и при помощи замены $z \cos^2 \zeta = v$ и равенств

$$1 + s^2 = \frac{1}{\cos^2 \zeta}, \quad \frac{ds}{d\zeta} = \frac{1}{\cos^2 \zeta}, \quad d\zeta = \frac{ds}{1 + s^2}$$

пришел к уравнению.

$$(1 + s^2)\, dv + 2vsds = ds \sqrt{1 - v^2}. \tag{4}$$

Положив $v = \frac{x}{\sqrt{1 + s^2}}$ и $\frac{dx}{ds} = q$, Фусс упростил уравнение (4) и привел его к виду [20]

$$qs + x = \sqrt{1 - q^2}. \tag{5}$$

Продифференцировав уравнение (5) и помня, что $dx = qds$, можно получить его в виде

$$sdq + 2qds + \frac{qds}{\sqrt{1 - q^2}} = 0.$$

Это уравнение, если разделить его на $\sqrt{q}$ и проинтегрировать, дает

$$2s\sqrt{q} + \int \frac{\sqrt{q}\, dq}{\sqrt{1 - q^2}} = C. \tag{6}$$

Таким путем, рассуждает Фусс, s можно представить как функцию одного переменного q. Если положить интеграл равным Q, то получим выражение дуги $s = \frac{C - Q}{2\sqrt{q}}$.

Сделав это, получим равенства

$$x = \sqrt{1 - q^2} - qs,$$

$$v = \frac{x}{\sqrt{1 + s^2}},$$

$$z = x(1 + s^2),$$

$$\zeta = \operatorname{arc\,tg} s,$$

определяющие искомые кривые.

---

[20] Последнее есть уравнение Лагранжа. Интегрирование таких уравнений приводит к параметрическому выражению семейства интегральных линий в виде $x = \varphi(q)$, $s = \psi(q)$.

Затруднение, однако, не устранено и в этом решении, поскольку интеграл в формуле (6) сводится все к тому же интегралу $\int \sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi$.

Вторая из упомянутых выше работ [Ф. 19], по сути дела, была обобщением только что рассмотренной задачи на тот случай, когда прямая AE (см. рис. 1) не является касательной к искомой кривой и проводится произвольно. И здесь решение связано с приближенным вычислением интеграла $\int \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

Этот интеграл представляется в виде суммы бесконечного ряда

$$\int \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi = -2\cos^{\frac{3}{2}}\varphi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7}\cos^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11}\cos^4\varphi + \ldots\right).$$

Две работы Фусса были посвящены изучению свойств кривых, заданных определенными соотношениями между радиусом кривизны, радиус-вектором и длиной дуги, отсчитываемой в определенном направлении от некоторой начальной точки. Эти работы близки к так называемой естественной геометрии[21], развитой позднее в трудах Э. Чезаро [73]. Начало этому направлению положил Эйлер своей работой «Изложение задачи, аналитическое решение которой очень затруднительно, а синтетическое является легким» (1777) (NAASP 1790, т. VIII, 1794). В ней решена задача — найти кривые, эволюты которых совпадали бы с данной окружностью. Такому условию удовлетворяют все эвольвенты данной окружности.

Фусс, занимавшийся подобными задачами, отправлялся от результатов, полученных Эйлером в его мемуаре «О кривых, радиусы кривизны которых пропорциональны квадрату расстояния от фиксированной точки, и об их удивительных свойствах» (представлена в 1781 г.) (Mém., т. IX, 1824). Надо было найти такие кривые, чтобы радиус их кривизны r был пропорционален квадрату ра-

---

[21] Естественная, или натуральная, геометрия плоских кривых изучает свойства кривых не по их уравнениям в декартовой системе координат, а по зависимостям, связывающим элементы, принадлежащие непосредственно самим кривым (например, длину дуги и радиус кривизны и т. п.).

диус-вектора z, т. е. $ar=z^2$. Кроме окружности радиуса a, этому требованию удовлетворяют еще другие кривые. Эйлер получил связь между φ, z в полярных координатах для таких кривых в виде

$$d\varphi = \frac{a \ln z dz}{\sqrt{z^2 - (a^2 \ln z)^2}}.$$

Так как интегрирование этого уравнения невыполнимо в элементарных функциях, Эйлер подверг его исследованию, надеясь хотя бы приблизительно получить представление о поведении искомых кривых. Здесь оказалось два существенно различных случая: 1) $a < e$ и 2) $a > e$, где e — основание натуральных логарифмов. В первом случае — это петлевидная кривая по форме напоминающая циклоиду.

Фуссу удалось показать, что задача Эйлера является лишь частным случаем более общей задачи, которую Фусс решил в своей работе «Решение задачи по методу, обратному методу касательных» (1789) [Ф. 31]. Фусс обнаружил тот парадоксальный факт, что все кривые, радиус кривизны которых равен радиусу-вектору, являются спрямляемыми[22], а окружность, принадлежащая к такому же типу кривых, неспрямляема (в указанном смысле).

Ответ на этот парадокс Фусс пытался получить, решая следующую задачу: найти все кривые, радиус кривизны которых является данной функцией Z радиус-вектора z[23].

Кроме полярных координат z, φ, Фусс ввел еще параметр t, равный длине нормали, опущенной из полюса на касательную, проведенную к произвольной точке кривой, и обозначил $dy/dx = p$. Дифференциально-геометрическими средствами выводятся соотношения

$$t = \int \frac{zdz}{Z} = \frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad (7)$$

$$d\varphi = \frac{tdz}{z\sqrt{z^2 - t^2}}. \qquad (8)$$

---

[22] Спрямляемыми в том смысле, что первообразную интеграла, определяющего длину дуги кривой, можно выразить в элементарных функциях, а саму длину дуги можно определить как величину конечную.

[23] Этой задачей занимался также Я. Риккати [80, стр. 530].

Если подставить в (8) вместо t его значение из (7), то решение задачи в общем виде приводится к выполнению двух квадратур.

Дальше Фусс рассмотрел два частных случая.

1. Радиус кривизны пропорционален радиус-вектору, т. е. $Z = nz$.

В этом случае получено

$$z = \frac{a}{1 + n\cos 2\psi}, \tag{9}$$

$$\varphi = \int \frac{2d\psi}{1 + n\cos 2\psi} - 2\psi + C, \tag{10}$$

где 2ψ — угол между касательной в произвольной точке кривой и перпендикуляром, восстановленным в этой точке на радиус-векторе, a и C — постоянные интегрирования, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$. Длина дуги определяется формулой

$$s = \frac{n^2 a \sin 2\psi}{(1 - n^2)(1 + n\cos 2\psi)} + \frac{na}{1 - n^2}(\varphi + 2\psi - C). \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что искомые кривые спрямляемы. Интеграл (10) принимает различные формы, в зависимости от того, будет ли $n = 1$, $n < 1$, $n > 1$, а именно:

для $n = 1$ $\quad \varphi = C - 2\psi + \operatorname{tg}\psi;$

для $n < 1$ $\quad \varphi = C - 2\psi + \dfrac{2}{\sqrt{1 - n^2}} \times$

$$\times \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\operatorname{tg}\psi\right);$$

для $n > 1$, $\quad \varphi = C - 2\psi + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \times$

$$\times \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\operatorname{tg}\psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\operatorname{tg}\psi}.$$

Самым интересным оказывается первый случай, поскольку сюда относится и окружность. Получается кривая, которая является второй эвольвентой окружности радиуса a. Если описать окружность радиуса a с центром в точке O, построить ее эвольвенту AB (рис. 2), начиная с точки A, отложить на касательной к первой эвольвенте отрезок $AC = a/2$ и построить эвольвенту CD первой эвольвенты, то она и будет искомой кривой. Фусс, как и Эйлер, не учел, что кривая будет симметричной относительно оси. Отсутствующие части на рисунке Фусса здесь

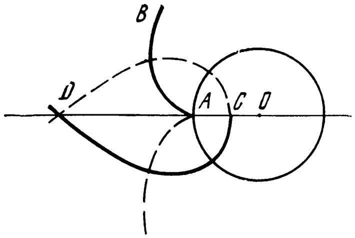


Рис. 2

нанесены пунктиром. Длина дуги в этом случае получается такой:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2az - a^2} + \frac{(2az - a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a^2},$$

т. е. вторая эвольвента окружности является спрямляемой кривой.

Решение парадокса Фусс видит в том, что для $z = a$ выражение линейного элемента дуги $ds = \frac{zdz}{\sqrt{2az - a^2}}$ принимает неопределенную форму 0/0.

После того как были рассмотрены случаи для $n < 1$ и $n > 1$, Фусс исследовал второй частный случай кривых, являющийся обобщением задачи Эйлера на произвольные степени радиус-вектора.

2. $r = Z = nz^m$. В этом случае получается

$$t = \frac{z^{2-m}}{n(2-m)},$$

$$z = \frac{a}{\sqrt[m-1]{\cos(m-1)\varphi}}.$$

Исследованы кривые при натуральных m. Случай $m = 1$ приводит к задачам 1-го типа. Случай $m = 2$ был рассмотрен Эйлером в упомянутой выше работе 1777 г. Случай $m = 3$ приводит к равносторонней гиперболе, обладающей тем свойством, что радиус кривизны в любой ее точке пропорционален кубу ее расстояния от центра гиперболы. Для случая $m = 4$ получается кривая третьего порядка

$$z = \frac{a}{\sqrt[3]{\cos 3\varphi}}$$

или

$$x^3 - 3xy^2 = a^3.$$

Шесть ветвей этой асимптотической кривой заключены между сторонами каждого угла, равного 60°.

Заметим, что решение Эйлера для трудного случая $m = 2$ Фусс обнаружил среди неизданных его мемуаров, когда написал уже почти половину своей статьи.

Добавим еще, что Ф. И. Шуберт в статье «Решение парадокса о спрямлении кривых» (NAASP 1791, т. IX, 1795) пытался показать источник парадокса о «неспрямляемости» окружности. Он утверждал следующее: парадокс устраняется, если показать, что само вычисление исключает окружность. Невозможность вычислить дугу окружности употреблением общего метода, т. е. невозможность представить длину ее дуги в виде алгебраической функции, Шуберт предлагал считать доказательством того, что она вообще не спрямляема. Это замечание тем более интересно, что строгое доказательство этого факта, как теперь известно, было весьма затруднительно вплоть до 1882 г., когда Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π.

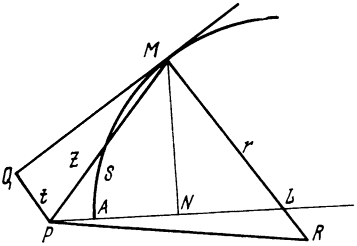


Рис. 3

В работе «Десять геометрических задач...» (1809) [Ф. 63] Фусс еще раз обратился к исследованию зависимостей между радиусом кривизны r кривой и длиной дуги s (рис. 3), радиус-вектором z, отрезком PR, соединяющим полюс с центром кривизны R, расстоянием t полюса от касательной.

Он решил 10 задач, в которых требуется найти кривые, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $z = r$,
2) $\frac{r}{PL} = \frac{1}{n}$,
3) $r - z = a$,
4) $\frac{r}{PR} = \frac{1}{n}$,
5) $\frac{r}{MQ} = \frac{1}{n}$,
6) $\frac{r}{s} = \frac{MQ}{t}$,
7) $r^2 + s^2 = \frac{z^2}{n^2}$,
8) $m^2r^2 + n^2s^2 = z^2$,
9) $m^2r^2 + n^2s^2 = a^2$,
10) $m^2s^2 - n^2r^2 = c^2$.

Здесь m, n — данные числа, a, c — данные отрезки. В «Дополнении» к этой работе, представленном 13 октября 1802 г. [Ф. 64], Фусс находил кривую, удовлетворяющую условию $m^2r^2 - n^2s^2 = z^2$.

Последнюю работу, примыкающую к предыдущим, Фусс представил 20 августа 1823 г. Она называлась «Об алгебраических кривых, отдельные дуги которых равны дугам окружности» [Ф. 102] (опубликована в 1830 г.).

Решалась прямая задача.

Найти кривую AZ, отнесенную к точке O так, что если из точки O провести перпендикуляр OT на касательную TZ и положить $OZ = z$, а $OT = p$, то чтобы выполнялось равенство $p = z(a - z)$, где $a = \text{const}$.

Обратная задача.

Найти алгебраическую кривую, отнесенную к точке O, дуга s которой выражалась бы через дугу окружности. Такие кривые, как показал Фусс после решения соответствующих дифференциальных уравнений, имеют параметрическое уравнение

$$s = \sqrt{b^2 + (1 - a)^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,t,$$

$$z = \frac{a + bt + t^2}{1 + t^2},$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t - \frac{2(a + 1)}{\sqrt{4a - b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t\sqrt{4a - b^2}}{2a + bt},$$

где a, b — постоянные, t - параметр.

В применении аналитических методов Фусс проявлял большую изобретательность. Тематика его геометрических работ охватывала весьма широкий круг проблем, часть которых была успешно решена.

Глава 2

Алгебра и анализ

Среди работ Фусса по алгебре и анализу лишь немногие содержат оригинальные задачи и новые результаты. О них мы и расскажем. Остальные работы — это в той или иной мере подражания Эйлеру или подробные комментарии его результатов.

Алгебра

Первой из четырех работ Фусса по алгебре была статья «Сообщение о разложении дроби $\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}$ на простые дроби, где вместе с тем представляется возможность доказательства важной теоремы арифметики» (1778) [Ф. 5].

Фусс положил

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)\ldots}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\ldots \qquad (12)$$

Умножая теперь почленно на $x-a$ и приняв $x=a$, можно получить $\alpha=\frac{a^m}{(a-b)(a-c)\ldots}$. Аналогичным путем можно получить β, γ, . . . Если умножить обе части (12) на x и перейти к пределу при $x\to\infty$, то получится либо

$$1=\alpha+\beta+\ldots,\qquad \text{если}\quad m+1=n,$$

либо

$$0=\alpha+\beta+\ldots,\qquad \text{если}\quad m+1<n,$$

где n — степень многочлена в знаменателе дроби.

Последняя формула и содержит означенное в названии статьи арифметическое предложение.

Работа Фусса несколько предварила новый метод разложения дробей, предложенный Эйлером в сочинении, опубликованном в (AASP 1780, ч. I, 1783, стр. 32—46). Подробнее о методе Эйлера сказано в статье Ф. Кеджори [72, стр. 90].

Неудачную попытку рассмотреть вопрос о представлении мнимых величин предпринял Фусс в статье 1785 г. [Ф. 20]. Статья как по постановке задачи, так и по решению содержала много неясностей. Ее анализ можно найти в книге А. И. Маркушевича [33, стр. 12] и в статье Ф. Кеджори [72, стр. 311].

Решения некоторых задач диофантова анализа опубликованы были в 1824 г. [Ф. 93]. Требовалось найти значения x, y такие, чтобы следующие пары выражений оказались полными квадратами:

$$
\begin{array}{lll}
1) & x^2+2axy+y^2, & x^2+2bxy+y^2; \\
2) & x^2+2nxy+y^2, & x^2-2nxy+y^2; \\
3) & x^2+(n+2)xy+y^2, & x^2+(n-2)xy+y^2.
\end{array}
$$

Наконец, в заметке [Ф. 94], представленной 13 сентября 1809 г. (напечатана в 1826 г.), доказана теорема: Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — некоторые положительные числа. Если обозначить

$$
\begin{aligned}
A_1 &= x_1(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_n), \\
A_2 &= x_2(x_2+x_3)(x_2+x_3+x_4)\ldots(x_2+x_3+\ldots+x_n), \\
A_3 &= x_3(x_3+x_4)(x_3+x_4+x_5)\ldots(x_3+x_4+\ldots+x_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= x_n
\end{aligned}
$$

и аналогично

$$
\begin{aligned}
B_1 &= x_1, \\
B_2 &= x_2(x_2+x_1), \\
B_3 &= x_3(x_3+x_2)(x_3+x_2+x_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_n &= x_n(x_n+x_{n-1})(x_n+x_{n-1}+x_{n-2})\ldots \\
&\quad\ldots(x_n+x_{n-1}+\ldots+x_1),
\end{aligned}
$$

то всегда будет иметь место тождество

$$
\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2B_1}+\frac{1}{A_3B_2}-\frac{1}{A_4B_3}+\ldots(-1)^{n+1}\frac{1}{B_n}=0.
$$

Упомянем здесь о двух работах [Ф. 12] и [Ф. 20] по теории вероятностей. В них Фусс вновь обратился к старой задаче о справедливом разделе ставки игроков, прекращающих игру до ее окончания, и дополнил ее анализ, данный в 1713 г. Яковом Бернулли в «Ars conjectandi» («Искусство предположения»).

Интегральное исчисление

Приведем несколько основных результатов, полученных Фуссом в интегральном исчислении.

В статье «Об интегрировании некоторых выражений, содержащих дифференциалы углов» [Ф. 65], Фусс пишет, что в разное время при решении задач геометрии и механики он пришел к дифференциальным выражениям, интегрирование которых ему не сразу удавалось. Со временем он находил решения, обобщал их и собирал. Таким образом, были получены следующие интегралы:

$$\text{I.}\quad \int \frac{(a \sin m\varphi + b \cos m\varphi)\, d\varphi}{(\sin n\varphi)^{\frac{2n-m}{n}}} = \frac{a \sin (n-m)\varphi - b \cos (n-m)\varphi}{(n-m)(\sin n\varphi)^{\frac{n-m}{n}}} + C.$$

К этому интегралу он пришел, вычисляя длину дуги одной алгебраической кривой. «Интегрирование тем более достойно внимания, что выполнено подстановкой мнимых величин»,— замечает Фусс.

$$\text{II.}\quad \int \frac{(a + b \cos \varphi)\, d\varphi}{\sin \varphi \sqrt{h^2 \sin^2 \varphi - (b + a \cos \varphi)^2}} = \arccos \frac{b + a \cos \varphi}{h \sin \varphi} + C.$$

Интеграл встретился Фуссу при решении задачи механики о вращательном движении.

$$\text{III.}\quad \int \frac{(a + b \cos \varphi)\, d\varphi}{f^2 \cos^2 \varphi + g^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a}{fg} \operatorname{arctg} \left(\frac{g}{f} \operatorname{tg} \varphi\right) + \frac{b}{2fh} \ln \left| \frac{f + \sqrt{f^2 - g^2} \sin \varphi}{f - \sqrt{f^2 - g^2} \sin \varphi} \right| + C.$$

Эта формула получилась в результате обобщения другой, имеющейся в работе «Десять геометрических задач» [Ф. 63, стр. 113].

$$\text{IV.}\quad \int \frac{(a + b \cos \varphi)\, d\varphi}{f^2 \cos^2 \varphi + f \sqrt{f^2 - g^2} \cos \zeta \cos \varphi + g^2 \sin^2 \varphi} = \frac{b\alpha - a\beta}{2\gamma k^2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta \cos \varphi + \gamma \sin \varphi}{\alpha + \beta \cos \varphi - \gamma \sin \varphi} \right| + \frac{a\alpha - b\beta}{ck} \operatorname{arctg} \frac{c \sin \varphi}{\beta + \alpha \cos \varphi} + C,$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{f^2 + k^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{f^2 - k^2}{2}},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{h^2 - g^2 + k^2}{2}}, \quad k^2 = f\sqrt{f^2 - h^2\cos^2\zeta},$$

$$c = \sqrt{\frac{g^2 - h^2 + k^2}{2}}.$$

А это — обобщение предыдущей формулы. Рассмотрен случай, когда $\zeta \neq 90°$. В интегралах I — IV a, b, f, g, h, ζ — постоянные.

В статье «Доказательства нескольких формул интегрального исчисления» [Ф. 72] решено более десятка задач неопределенного и определенного интегрирования. Например:

Задача I. Найти такие значения m, n, α, чтобы дробь $\dfrac{\int e^{\alpha\varphi}\sin^{n-2}\varphi d\varphi}{\int e^{\alpha\varphi}\sin^{m-2}\varphi d\varphi}$ выражалась в виде следующего бесконечного произведения

$$\frac{m(m-1)(\alpha^2+n^2)}{n(n-1)(\alpha^2+m^2)}\,\frac{(m+2)(m+1)[\alpha^2+(n+2)^2]}{(n+2)(n+1)[\alpha^2+(m+2)^2]} \times$$

$$\times \frac{(m+4)(m+3)[\alpha^2+(n+4)^2]}{(n+4)(n+3)[\alpha^2+(m+4)^2]}\cdots$$

Задача VI. Какие значения должно принимать n, чтобы

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\int\limits_0^\pi e^{\alpha\varphi}d\varphi \sin^n\varphi\,(\ln\sin\varphi)^\gamma}{\int\limits_0^\pi e^{-\alpha\varphi}\,d\varphi \sin^n\varphi\,(\ln\sin\varphi)^\gamma} = e^{\alpha\pi}$$

или

$$\frac{I_1}{I_2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\,?$$

Задача IX. Найти такую функцию Φ, чтобы

$$\frac{\int\limits_0^\pi \Phi\sin\alpha\varphi d\varphi}{\int\limits_0^\pi \Phi\cos\alpha\varphi d\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Два метода вычисления посредством рядов произведения

$$\int_0^\pi \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{b}{n}}} \quad \int_0^\pi \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{\beta}{n}}}$$

изложил Фусс в работе 1781 г. [Ф. 10]. Поводом к этому исследованию мог послужить результат, полученный Эйлером: при любом натуральном n будет

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n}.$$

Статья [Ф. 96] посвящена вычислению иным способом, чем у Эйлера, двух определенных интегралов, найденных ранее Эйлером [61, стр. 138—140], а статья [Ф. 105] — применению двойных интегралов к вычислению объемов тел вращения.

В статье 1830 г. [Ф. 107] интегралы приведенного ниже типа сводятся к интегралам от рациональной функции методом замены переменной. Например, интеграл

$$\int \frac{x^{im-1}(\alpha+\beta x^{\varepsilon in})^r\,dx}{(f+gx^{\delta in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}},$$

где i — целое или дробное число, m, n, r, ε, δ, λ — целые положительные, в результате подстановки

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a+bx^{in}}} = y, \quad \frac{x^{im-1}dx}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}dy}{i(1-by^n)}$$

преобразуется в интеграл от рациональной функции.

В 1822 г. Фусс доказал [Ф. 101] теорему: произведение интегралов

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{n-\alpha}\,dx \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{n-\alpha-\beta}\,dx \times$$
$$\times \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{n-\alpha-\beta-\gamma}dx \ldots$$

всегда сохраняет одно и то же значение, как бы ни переставляли числа α, β, γ, . . .

Дифференциальные уравнения

Несколько отдельных статей Фусс посвятил интегрированию дифференциальных уравнений (некоторые виды уравнений он решил в работах по геометрии, механике, теории рядов).

Две его ранние работы упоминаются в обзорной статье Валльнера, помещенной в IV томе известных «Лекций по истории математики» М. Кантора [72, стр. 937 и 1020]. Валльнер сообщает, что в статье Фусса [Ф. 14] интегрировались уравнения вида $Az + BP = 0$, $Az + BP + CQ = 0$, $Az + BP + CQ + DR = 0$ и т. д., где A, B, C, ... — постоянные, P, Q, R, ... — первый, второй, третий и т. д. полные дифференциалы функции двух переменных $z = f(x, y)$. А в статье [Ф. 22, стр. 107] Фусс писал об уравнении

$$t(1+4t)\frac{d^2s}{dt^2} - [(4n-6)t+n]\frac{ds}{dt} + n(n-1)s = 0,$$

представляющем собой частный случай уравнения Гаусса [34, стр. 192, уравн. 24]. Фусс раскладывал s в ряд по степеням t и выводил из исходного уравнения путем преобразований различные новые уравнения.

Еще две статьи Фусса [Ф. 36] и [Ф. 70] содержат подробные решения с помощью интегрирующих множителей дифференциальных уравнений, ранее решенных Эйлером в «Интегральном исчислении» [61, стр. 248—255] и [61, стр. 289—295]. Фусс писал, что вторая из этих статей «явилась результатом продолжения разъяснений, которые, я надеюсь, представят интерес для академии как своего рода дополнения к третьей главе второго раздела «Интегрального исчисления» [Ф. 70, стр. 76]. Это замечание Фусса объясняет, почему он занимался ранее решенными Эйлером уравнениями.

Эйлер в «Интегральном исчислении», т. I показал, как можно решать уравнения $ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ [61, стр. 407] и $ydx - xdy = a\sqrt[3]{dx^3 + dy^3}$ [61, стр. 410]. Причем он обращал внимание на трудности, с которыми сопряжено решение этих уравнений [61, стр. 407—408]. Следуя методу Эйлера, Фусс нашел решение более общего уравнения $ydx - xdy = a\sqrt[n]{dx^n + dy^n}$ [Ф. 103].

В статье [Ф. 76] Фусс решил следующую задачу: найти такие функции p и r, зависящие от t и φ, чтобы оказались интегрируемыми уравнений

$$dx = pd\varphi + rdt\cos\varphi,$$

$$dy = rd\varphi - pdt\cos\varphi.$$

Рассмотрены случаи, когда $p = T\Phi$, $r = T_1\Phi_1$, где T, T_1 зависят от t, а Φ, Φ_1 зависят от φ. Найдены возможные виды этих функций.

Ряды

К теории рядов относится 14 работ Фусса. В первой из них [Ф. 23] имеется предложение Фусса, которое опирается на следующее рассуждение. Пусть, $A, B, C, \ldots$ $\ldots, X, \ldots$ — некоторые значения функции X при $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Пусть далее ΔA, ΔB, ΔC, ... — их первые, $\Delta^2 A$, $\Delta^2 B$, $\Delta^2 C$, ... — вторые, $\Delta^3 A$, $\Delta^3 B$, $\Delta^3 C$, ... — третьи и т. д. конечные разности, тогда, как известно, можно составить ряд

$$X = A + \Delta A x + \Delta^2 A \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \\ + \Delta^3 A \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Причем если $x \to 0$, то $X \to A$.

Отсюда следует ряд

$$\lim_{x\to 0} \frac{X-A}{x} = \Delta A - \frac{1}{2}\Delta^2 A + \frac{1}{3}\Delta^3 A - \frac{1}{4}\Delta^4 A + \ldots$$

Левая часть выступает при этом в форме 0 : 0. Если удастся определить истинное значение предела этой дроби, то получим сумму ряда, стоящего в правой части.

Так, например, Фусс нашел, что если $X = \ln(1 + x)$, то

$$A = \ln 1, \Delta A = \ln 2, \Delta^2 A = \ln \frac{1\cdot 3}{2^2}, \Delta^3 A = \ln \frac{2^2\cdot 4}{1\cdot 3^2} \text{ и т. д.}$$

и тогда

$$\ln(1 + x) = \ln 1 + \ln 2x + \ln \frac{1\cdot 3}{2^2} \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \\ + \ln \frac{2^2\cdot 4}{1\cdot 3^3} \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Если разделить почленно на x и перейти к пределу при $x \to 0$, получается примечательный ряд

$$\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1\cdot 3}{2^2} + \frac{1}{3}\ln\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3} - \ldots = 1.$$

Положив $X = \sin(1 + 2x)\varphi$, Фусс получил, действуя аналогичным образом, сумму еще одного примечательного ряда

$$\begin{aligned}2\varphi\cos\varphi = 2\sin\varphi\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot 2^2\sin^2\varphi\sin 3\varphi -\\ - \frac{1}{3}\cdot 2^3\sin^3\varphi\cos 4\varphi - \frac{1}{4}\cdot 2^4\sin^4\varphi\sin 5\varphi +\\ + \frac{1}{5}\cdot 2^5\sin^5\varphi\cos 6\varphi + \ldots\end{aligned}$$

Суммирование этих рядов «было предложено мне одним известным геометром»,— пишет Фусс.

По мнению Е. Нетто [72, стр. 279], эта работа некоторым образом примыкает к работе Эйлера, опубликованной в AASP (т. IV, 1781, ч. II стр. 45) о превращении гармонического ряда

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} + \ldots = C + \ln x + \frac{1}{2x} -\\ - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{L}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \ldots,\end{aligned}$$

где $C = 0{,}5772156649\ldots$ — «постоянная Эйлера», $\mathfrak{A} = {}^1/_6$, $\mathfrak{B} = {}^1/_{30}$, $\mathfrak{L} = {}^1/_{42}$, $\mathfrak{D} = {}^1/_{30}$ и т. д.

Рассмотрим две работы Фусса о тригонометрических рядах. Это — «Рассуждение о рядах, которыми можно выразить синус и косинус кратных углов» [Ф. 42] и продолжение исследования на ту же тему [Ф. 46]. Они были вызваны работой Эйлера о тригонометрических рядах (NAASP, т. IX, 1791, стр. 54).

Эйлер обратил внимание на следующий факт. Если положить $2\cos\varphi = x$, то для всех $n \geqslant 2$ будет иметь место соотношение

$$\begin{aligned}2\cos n\varphi = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4} -\\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6} +\\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8} - \ldots\end{aligned}$$

Но для $n = 0$ и $n = 1$, n отрицательных и дробных эта формула неверна. Как это объяснить?

Эйлер обозначал $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$ через z, а $\cos n\varphi$ или $\sin n\varphi$ соответственно через s. Тогда окажется верным, как показал Эйлер, уравнение

$$\frac{d^2s}{dz^2}(1-z^2) - z\frac{ds}{dz} + n^2s = 0. \qquad (13)$$

Его интегрирование дает

$$s = f(z+\sqrt{z^2-1})^n + g(z-\sqrt{z^2-1})^n,$$

где f и g — произвольные постоянные. Значения этих постоянных, соответствующие условию задачи, находятся специальным образом путем разложения в ряды. Получается общая формула

$$s = \left(z^n - \frac{n}{1}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}z^{n-4} - \ldots\right) +$$
$$+ \left(z^{-n} + \frac{n}{1}z^{-n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}z^{-n-4} + \ldots\right),$$

верная для всех действительных показателей. Для положительных $n > 2$ степени с отрицательными показателями сами по себе отпадают.

Фусс предпринял свое исследование [Ф. 42], в котором он вывел эйлерову формулу посредством разложения

$$(z+\sqrt{z^2-1})^n = (z+v)^n = z^n + C_n^1 z^{n-1}v + C_n^2 z^{n-2}v^2 + \ldots$$

Далее он раскладывает в биномиальный ряд нечетные степени v, v^3, v^5, . . . Получается ряд вида

$$(z+v)^n = Az^n - Bz^{n-2} + Cz^{n-4} - Dz^{n-6} + \ldots,$$

где A, B, C, D, . . . вычисляются исключительно средствами комбинаторного анализа. Аналогичный ряд получается при разложении $(z - v)^n$. Объединяя оба, Фусс пришел к формуле Эйлера.

Это исследование Фусс продолжил в другой статье [Ф. 46], где речь шла о разложении $\cos n\varphi = s$ по степеням $\cos \varphi = z$, а для $\sin n\varphi = v\sqrt{1-z^2}$ — о разложении v по степеням z. Фусс брал уравнение (13) Эйлера и интегрировал его методом неопределенных коэффициентов в виде ряда, упорядоченного по возрастающим степеням вместо ряда по убывающим степеням, как это было у Эйлера. При этом появление исключений устраняется.

Приемы сложения тригонометрических рядов

$$\sin\alpha + a\sin(\alpha+\varphi) + a^2\sin(\alpha+2\varphi) + \ldots,$$

$$\cos\alpha + a\cos(\alpha+\varphi) + a^2\cos(\alpha+2\varphi) + \ldots$$

и некоторых других Фусс изложил в работе [Ф. 49].

Изучение рядов, составленных из последовательных произведений (по два, по три, по четыре и т. д.) членов данного ряда и выражение членов таких рядов разными способами, мы находим в работах [Ф. 79 и Ф. 86].

В 1812 г. Королевским научным обществом в Копенгагене предлагалась на конкурс такая задача: найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \ldots \tag{14}$$

Найти общее выражение суммы ряда

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \ldots \tag{15}$$

После этого показать, каким образом можно улучшить сходимость этих рядов.

Фусс показал [Ф. 85], что первый ряд имеет сумму $\pi/8$.

Сделал он это так. Обозначив сумму данного ряда (14) через s и введя два вспомогательных ряда

$$t = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots,$$

$$u = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \ldots,$$

он показал, что $t - u = 2s$. Заметив, далее, что если разложить в степенные ряды $\frac{1}{1-x^4}$ и $\frac{x^2}{1-x^4}$, а затем почленно проинтегрировать эти ряды от 0 до 1, то получим

$$2s = t - u = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^4} - \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1-x^4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда сумма ряда $\pi/8$.

Ускорить сходимость ряда (14) Фусс предложил следующим образом. Поскольку

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

то, умножив почленно на x^4 и проинтегрировав от 0 до 1, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4dx}{1+x^2} = \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \ldots,$$

откуда следует, что сумму ряда (14) можно представить так:

$$s = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4dx}{1+x^2}.$$

А поскольку

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1 - \frac{1}{2}(1-x^2)\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^3 + \ldots\right],$$

то

$$\int_0^1 \frac{x^4dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx\left[1 + \frac{1}{2}(1-x^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^3 + \ldots\right].$$

Почленное интегрирование правой части этого равенства дает

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{2\cdot 5},$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 x^4dx\,(1-x^2) = \frac{1}{4}\,\frac{2}{5\cdot 7} = \frac{2}{2\cdot 7}\,P_1,$$

$$\frac{1}{8}\int_0^1 x^4\,(1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{8}\,\frac{8}{5\cdot 7\cdot 9} = \frac{4}{2\cdot 9}\,P_2$$

и т. д. А это приводит к ряду

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{2}{2\cdot 7}P_1 + \frac{4}{2\cdot 9}P_2 + \frac{6}{2\cdot 11}P_3 + \ldots\right), \tag{16}$$

где

$$P_k = \int_0^1 x^4 (1 - x^2)^{k-1}\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Восемь членов ряда (16) дают значение $\pi/8$ с ошибкой 0,0000038, в то время как восемь членов ряда (14) — с ошибкой 0,0078051.

Для ряда (15) Фусс нашел выражение суммы

$$S = \frac{a}{d} \int_0^1 \frac{x^{b-1}dx}{1 + x^d}.$$

Используя тот же прием ускорения сходимости, что и для ряда (14), Фусс показал затем, как можно значительно улучшить сходимость ряда (15). При этом получается ряд

$$\frac{a}{d}\left[\frac{1}{2b} + \frac{d}{2(b+d)} P_1 + \frac{2d}{2(b+2d)} P_2 + \ldots\right],$$

где

$$P_k = \int_0^1 x^{b-1} (1 - x^d)^{k-1}\,dx.$$

Таким образом, пишет он, все требования конкурсной задачи были удовлетворены, и он собирался уже отослать работу в Копенгаген, но этому помешали военные события 1812—1813 гг. А так как обусловленный срок представления конкурсных работ был упущен, Фусс 12 июня 1816 г. представил работу Петербургской академии, и она была напечатана в «Мемуарах» (1820).

В истории математики известен научный спор, возникший по поводу того, что Эйлер (CASP, 1737, т. IX, 1744, стр. 188) предложил равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots = \ln\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right),$$

которое итальянский математик Г. Фонтана подверг критике (1784).

Фусс защищал Эйлера в своей работе «Аналитическое доказательство одной теоремы» (1794) [Ф. 39], назвав сумму слева квазилогарифмом суммы членов гармонического ряда.

Суммированием треугольных, квадратных и т. д. m-угольных чисел методами конечных разностей Фусс занимался в одной из последних работ по теории рядов [Ф. 100]. Задача ставилась так: даны n m-угольных чисел. Зная закон образования этих чисел и их количество, найти их n-й член a_n и сумму s_n всех n чисел как элементов прогрессии. Фусс нашел, что

$$a_n = a_1 + C_{n-1}^1 \Delta a + C_{n-1}^2 \Delta^2 a + C_{n-1}^3 \Delta^3 a + \dots,$$

$$s_n = C_n^1 a_1 + C_n^2 \Delta a + C_n^3 \Delta^2 a + C_n^4 \Delta^3 a + \dots,$$

где a_1 — первый член, Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... — первые, вторые, третьи и т. д. разности.

Глава 3

Физика, механика, астрономия

Физика

Работы по физике — о зрительных трубах [Ф. 1] и об искусственных магнитах [Ф. 4] принадлежат, как уже отмечалось, к числу первых научных трудов Фусса. В их написании участвовал Л. Эйлер как экспериментатор и научный руководитель. Г. Энестрем нашел нужным поместить первую из них в «Каталог сочинений Л. Эйлера» [45, стр. 369; Е. 446].

«Подробное наставление о зрительных трубах и микроскопах», вышедшее отдельной книгой, открывалось предисловием Эйлера и содержало описание конструкций оптических систем зрительных труб для морских, полевых и астрономических наблюдений с количеством линз от двух до пяти. Последние были рассчитаны на увеличение в 256 и 324 раза.

Для каждой конструкции объективов были приведены характеристики составляющих линз, расстояние между объективом и окуляром, поле зрения, длина трубы.

Во второй части книги даны описания объективов и окуляров микроскопов, таблицы оптических характеристик предлагаемых конструкций. Диапазон изменения характеристик в таблицах такой: увеличение от 25 до 3000 раз; расстояние между объективом и первым окуляром 0,781 — 93,750 дюйма; степень яркости изображения 0,800 — 0,007, причем за единицу яркости принята яркость при не более чем 20-кратном увеличении; диаметр видимой частицы 0,115 — 0,001, за норму взята видимость предмета с расстояния 8 дюймов.

Ко времени появления книги Фусса Эйлер глубоко исследовал явление ахроматизма оптических систем. Его исследования нашли завершение в фундаментальной трехтомной «Диоптрике», печатавшейся с 1769 до 1771 г.

Среди таблиц Фусса содержатся и характеристики ахроматического микроскопа.

В 1784 г., вскоре после смерти Эйлера, в Петербурге академиком Эпинусом при участии И. П. Кулибина и И. И. Беляева был действительно изготовлен первый в мире ахроматический микроскоп, хранящийся теперь в академии. Этот микроскоп был длиною в 3 фута и с увеличением в 70 раз. Не приходится удивляться длине микроскопа. В «Заметках» Ломоносова записано, например: «Микроскоп сделать в сажень, горизонтальный» [31, стр. 37—38].

В книге «Наблюдения и опыты над искусственными магнитами» [Ф.4] Фусс рассказал о давнем внимании ученых к явлению магнетизма, дал описание искусственного магнетизма и назвал имена ученых, предложивших методы намагничивания: Найт, Мичелл, Ле Мер, Кантон и др. Он напомнил, что Парижская академия наук дважды объявляла премию за лучшую работу о магнетизме, а в 1758 г. Петербургская академия объявила премию за лучший способ создания искусственных магнитов. Ее удостоен был д'Антольм, предложивший новый способ, имеющий много преимуществ перед известными ранее. Фусс делает экскурс в описание способов намагничивания, предложенных Гримальди еще в XVI в., потом Гассенди и де Лаиром, Рого, Дю Феем, Мичеллом и Кантоном. Наконец, он описал опыты, которые они выполнили вдвоем с Л. Эйлером, используя искусственные магниты из коллекции, подаренной академии де Кроузе. Опыты эти не нашли заметного отклика в литературе по истории физики.

Механика

Рассмотрим наиболее интересные из работ Фусса по механике — работы о двойном маятнике: «Определение движения двойного маятника, выведенное из первых начал механики» [Ф. 24] и «Аналитическое добавление к предыдущей работе» [Ф. 25]. Представим себе две нити длиною 275 линий (66 *см*) каждая. На одной закреплена тяжесть весом 10, а на другой 9 полуунций (около 150 и 134 *г*). Подвесим первый маятник за конец нити и привяжем конец нити другого маятника к первому маятнику. Получим двойной маятник. Если отклонить в сторону от положения равновесия верхний маятник так, чтобы нижний свободно висел, и отпустить верхний маятник, то он начнет качаться, и его движение сообщится нижнему. Причем нижний маятник будет делать один размах, в то время как верхний — два. Фусс исследует зависимость периодов от амплитуды, составляет таблицы этих зависимостей. Он напоминает о работе Д. Бернулли на эту тему «О неиспытанных еще различных взаимных движениях в двойных маятниках» (NCASP, t. XIX, 1775).

Бернулли нашел условие существования нерасстроенных качаний в сложных маятниках. Фусс хотел проверить, нельзя ли без помощи условия Бернулли определить законы этих замечательных движений, исходя лишь из начал механики. И он вывел все решение задачи из четырех дифференциальных уравнений второго порядка, которые дают связь между ускорениями и побуждающими силами. Следствия этого решения вполне согласуются со следствиями решения Бернулли.

В «Аналитическом добавлении» [Ф. 25] решены такие три задачи:

1. По данной длине нитей a, b найти такое значение тяжестей A, B, чтобы длины простых изохронных (равновременных) маятников находились в заданном отношении $\alpha : \beta$.

2. Для данных тяжестей A, B найти такие длины нитей a, b, чтобы длины простых изохронных маятников находились в данном отношении $\alpha : \beta$.

3. Определить условие, при котором бы отношение длин нитей простого изохронного маятника было рационально.

Отправным моментом для написания работы Фусса «Об одной довольно известной задаче статики» [Ф. 35] послужило знакомство с неудачным решением так называемой задачи Лопиталя о висячих мостах, предложенным в 1788 г. венским преподавателем военной школы Г. Вега. Речь шла о следующей задаче статики. Через точку A перекинута нить с прикрепленными к ее концам грузами *M* и *m*, скользящими по разным кривым. Кривая *AM* дана. Найти кривую *Am* такую, чтобы в любой ее точке оба груза находились в равновесии. Фусс нашел общее решение, из которого, в частности, следовало, что если *AM* — прямая, то *Am* — дуга либо гиперболы, либо эллипса, а если *AM* — дуга окружности, то *Am* — дуга эпициклоиды.

Весьма любопытным по замыслу оказалось «Решение механической задачи, относящейся к полету птиц» [Ф. 62]. Фусс формулировал задачу так: Даны вид и величина крыла, мышечная сила крыла, угол, который крыло описывает в воздухе. Найти скорость крыла, время его движения, движущую силу. Составив и решив соответствующие дифференциальные уравнения, Фусс нашел движущую силу, время ее действия, скорость восхождения. Понимая трудность задачи, Фусс заключает: «Я признаюсь, что только слегка коснулся сего обширного и трудного предмета, и оставляю другим, меня искуснейшим, войти во все подробности оного. Между тем я почту, что не втуне употреблено мною время на сии исследования, если, положив начало в материи новой, многотрудной и достойной занять ум геометра, я возбужу желание в ком-нибудь искуснейшем меня основать более совершенную и полную теорию летания птиц» (стр. 147).

Фусс упоминает достойное уважения, но содержащее ряд явных ошибок сочинение Г. Зильбершлага на ту же тему, вышедшее в Берлине (1781) и возбудившее интерес к теории летания птиц.

Следующая работа — «О сопротивлении, причиняемом дорогами повозкам четырех- и двухколесным» [Ф.52]. История ее появления такова. В № 113 «Геттингенских ученых ведомостей» 1796 г. была предложена конкурсная задача, суть которой видна из названия работы Фусса. Требовалось, исходя из начал механики, определить выражение для движущей силы, приложенной к четырех- и двухколесным телегам, с учетом трения и других сопротивлений, мешающих движению, так, чтобы можно было определить, какой из двух типов повозок выгоднее использовать.

Фусс писал работу в период двухмесячного отпуска 1798 г.

Он разделил дороги на три типа: с твердой гладкой поверхностью, твердой негладкой поверхностью, рыхлой гладкой поверхностью и показал, что на всех выгоднее четырехколесные повозки.

Отдельно идет речь о сопротивлении при особых препятствиях, где бывают выгоднее либо двухколесные, либо четырехколесные повозки.

У Павла Фусса есть указание, что эта работа получила премию Датского королевского общества (см. [Ф. 52], пометка П. Фусса).

Назовем отдельные задачи механики, решенные Фуссом: о движении по наклонной плоскости круглого диска, вес которого возрастает [Ф. 32]; о поступательном и вращательном движении цилиндрического тела [Ф. 40]; о падении стержня, опирающегося концами о две взаимно перпендикулярные плоскости [Ф. 34]; о спуске тела по наклонной плоскости, один из краев которой имеет гибкую опору [Ф. 43], два из краев которой имеют гибкую опору [Ф. 44]; о движении вниз стержня по наклонной плоскости [Ф. 51]; о некоторых случаях равновесия гибких нитей [Ф. 50]; о геометрических минимумах, найденных с помощью статики [Ф. 48]; об истечении жидкостей из цилиндрических сосудов [Ф. 87].

Астрономия

«Размышления о спутниках звезд», опубликованные в 1780 г. [Ф. 7], интересны тем, что в них Фусс, полемизируя с немецким астрономом Хр. Майером (1719—1783), высказывает и отстаивает мысль о наличии планетизма во Вселенной, подразумевая наличие планет и комет у других звезд, подобно тому, как они есть у Солнца. Хотя прямого доказательства нет, как он заявляет, но вероятность наличия планетизма от этого не уменьшается. Получить прямые доказательства по возмущениям движения других звезд не представляется возможным, поскольку мы не знаем точно ни их величин, ни направления движения. В качестве примера Фусс привел разноречивые сведения о годовом смещении звезды Арктур по данным некоторых астрономов: 1″,80 (Кассини), 2″,20 (Монье), 1″,10 (Галлей и Майер), 2″,01 (Маскелайн). То же можно сказать об аберрации, ускорении, межзвездных расстояниях.

Как правило, астрономические работы позволяют коечто узнать о мировоззрении автора. Данная работа в этом смысле не является исключением и заслуживает более пристального внимания.

Высказывания Фусса о планетизме во Вселенной в конечном счете можно отнести к сумме фактов, послуживших позже в пользу доказательства известного тезиса Энгельса о том, что «вся природа движется в вечном потоке и круговороте». Этим тезисом Энгельс характеризовал новое воззрение на природу, возникшее в конце XVIII — начале XIX столетия.

После признания планетизма развитие астрономии пошло еще дальше в этом направлении. Энгельс пишет: «Астрономия оказывается все более и более вынужденной признать существование в нашей звездной системе темных, не только планетных, тел, следовательно потухших солнц (Медлер); с другой стороны (согласно Секки), часть газообразных туманных пятен принадлежит, в качестве еще неготовых солнц, к нашей звездной системе, что не исключает того, что другие туманности, как утверждает Медлер, являются далекими самостоятельными мировыми островами...» [62, стр. 61].

Рассуждениям об основных методах улучшения видимых расстояний от Луны до звезды с учетом эффектов рефракции и параллакса посвящалась еще одна статья Фусса 1782 г. [Ф. 8].

В статье «Новые исследования неравномерностей в движении Земли, обусловленных действием Венеры» (1783) [Ф. 11], Фусс рассчитал таблицу поправок к траектории Земли, измененной возмущающим действием Венеры, и сопоставил ее с аналогичными таблицами де Лакайля и А. И. Лекселя, опубликованными ранее. Хотя Фусс вычислял иным способом, чем упомянутые астрономы, его таблица хорошо совпадает с двумя другими, и это служит подтверждением правильности всех вычислений.

Содержание статьи «О движении кометы, определяемом по трем наблюдениям» (1784) [Ф. 18], Фусс сам характеризовал так: «Все это исследование сводится к тому, что по любым трем достаточно близким наблюдениям можно узнать как положение оси, так и расстояние перигелия кометы» [Ф. 18, стр. 335].

Продолжая размышлять о траекториях движения комет, Фусс заметил их уклонения от расчетных координат под действием близких планет и в 1785 г. опубликовал «Исследование о расстройстве движения кометы, проходящей вблизи планеты» [Ф. 29], получившее в 1778 г. премию Парижской академии наук.

В астрономических эфемеридах академика Боде, издававшихся ежегодно в Берлине, в книге на 1789 г. (стр. 191) имеется описание предложенного Клюгелем метода определения эксцентрической аномалии ν через среднюю аномалию ω.

Фусс [Ф. 30] нашел метод Клюгеля громоздким и обратил внимание на совсем забытый простой метод Эйлера (CASP 1740, т. XII, 1750), состоящий в вычислении с нужной точностью по формуле

$$\nu = \omega - e \sin (\omega - e \sin (\omega - e \sin (\omega - \ldots),$$

где e — эксцентриситет.

Глава 4

Учебники

Первый учебник Н. И. Фусса, который был издан в 1783 г., это «Уроки алгебры» [Ф. 109]. Основой для его написания послужила «Универсальная арифметика» Л. Эйлера в двух томах, изданная в Петербурге в 1768—1769 гг. сначала в русском переводе студентов П. Б. Иноходцева [24] и И. Юдина, а через два года — на немецком языке.

Фусс сократил объем учебника Эйлера, опустив отдел, посвященный решению в целых числах неопределенных уравнений (диофантов анализ), главы IV, VI, XX первого отдела, главу VIII второго, в остальном следуя отбору и расположению, данному Эйлером, но переработав текст учебника и большинство примеров.

В учебнике рассматриваются основные понятия и операции алгебры многочленов и развивается соответствующее исчисление; он содержит также соединения и бином Ньютона, пропорции, проценты и прогрессии, в том числе бесконечную геометрическую, десятичные дроби и логарифмы, уравнения до 4-й степени включительно, приближенное вычисление квадратных и кубических корней.

---

[24] Петр Борисович Иноходцев (1742—1806) позднее был избран академиком по кафедре астрономии.

На русском языке учебник Фусса под названием «Начальные основания алгебры» (СПб., 1798 и 1821) был напечатан как первая часть математического курса «Начальные основания чистой математики», предназначенного для учащихся кадетского корпуса.

В 1796 г. Фусс написал «Геометрию»— учебник, переведенный впоследствии с французского на русский и изданный как вторая часть «Начальных оснований чистой математики» под заглавием «Начальные основания геометрии» (СПб., 1811 и 1823 [Ф. 113]).

О «Геометрии» Фусса известный геометр В. Ф. Каган писал, что «на ней лежит явный отпечаток влияния Безу и не без пользы для дела» [18, стр. 134].

Учебник Фусса делится на два отдела — планиметрию и стереометрию. Планиметрия начинается главой «Определения, аксиомы и предварительные изъяснения». Геометрия определяется как «наука, которая показывает нам свойства протяженности и научает нас измерять все то, что имеет протяжение» (Определение 1, § 1, стр. 3). Желая подчеркнуть абстрактный характер геометрии, Фусс добавляет, что «и невещественное пространство, пределы имеющее, по определению 1, есть предмет геометрии» (там же, стр. 3—4), т. е. что геометрия изучает пространственные формы, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Для сопоставления этого определения геометрии с имевшимися в русской учебной литературе ранее, заметим, что С. Я. Румовский в «Словаре Академии Российской» (т. II, СПб., 1790, стр. 33) дал следующее определение геометрии: «Геометрия — наука, имеющая предметом все то, что измеряемо быть может в длину, ширину и вышину, и служит основанием другим частям математики».

Как видим, в определении Фусса уже нет указаний на первичность геометрии.

Далее Фусс пишет, что все математические науки, исключая свойственные им аксиомы, основываются еще на следующих общих аксиомах:

1. Целое больше своей части.
2. Целое равно всем своим частям вместе взятым.
3. Величины, равные порознь другой величине, равны между собой.
4. Если к равным прибавить равные, то и суммы их будут равные.

5. Если от равных отнять равные, то и остатки их будут равные.

6. Если несколько величин содержат, каждая порознь, одинаковое число раз другую величину, то они равны между собой.

7. Если несколько величин содержатся, каждая порознь, одинаковое число раз в другой величине, то они равны между собой.

Аксиомы 1, 3, 4, 5 совпадают по содержанию с аксиомами 1-й книги «Начал» Евклида, касающимися теории величин вообще.

Геометрические аксиомы, принятые Фуссом, такие:

Аксиома 1. Если при наложении двух отрезков прямых их концы совпадают, то отрезки равны между собой, и обратно.

В современной аксиоматике ей соответствует аксиома 1 группы аксиом конгруэнтности.

Аксиома 2. Две прямые имеют не более одной общей точки.

В современной геометрии она доказывается как теорема [25]. Доказательство вытекает из аксиомы 2 связи.

Аксиома 3. Стороны равных углов при наложении совпадают.

Это — аксиома конгруэнтности углов, только в современных курсах она формулируется иначе.

Аксиома 4. Фигуры, которые при наложении покрывают одна другую, равны между собой. Обратное утверждение неверно, что фигуры, которые взаимно одна другую не покрывают, не равны между собой.

Эту аксиому тоже можно отнести к группе аксиом конгруэнтности. Таким образом, три из четырех аксиом Фусса относятся к этой группе. Объяснить такой подбор аксиом можно тем, что аксиомы группы конгруэнтности позволяют определить движение. На понятии движения основана система Евклида. У Евклида движение принято в качестве наглядно ясного понятия, которое не обосновано никакими аксиомами. Совмещающиеся фигуры считаются равными. Следовательно, в системе Евклида движение есть понятие основное, а конгруэнтность —

---

[25] *Н. В. Ефимов.* Высшая геометрия, изд. 4. М., 1961, стр. 43, теорема 1.

производное. Фусс отобрал аксиомы так, чтобы обеспечить конгруэнтность фигур, хотя определения понятия конгруэнтности у него и нет.

Переходя к понятию параллельности прямых, Фусс вводит последовательно такие определения: прямолинейного угла; смежных углов; тупых и острых углов; прямых углов, как равных смежных; перпендикулярной прямой; единственности перпендикуляра, проведенного к данной прямой в данной точке; расстояния от данной точки до данной прямой; параллельных прямых как непересекающихся прямых на одной плоскости.

Аксиома о параллельных явно не формулируется. Вводится несколько равносильных ей доказуемых предложений, например теорема 11 (§ 105, стр. 62): если из двух прямых одна пересекает третью под прямым углом, а другая под острым, то две эти прямые, при достаточном продолжении, пересекутся. Теоремами об условиях пересечения двух прямых, пересекаемых третьей, заканчивается первая глава учебника.

В главах 2—4 содержатся сведения об отрезках, углах и сторонах прямолинейных фигур, о круге, вписанных в него и описанных около него фигурах, о пропорциональности линий и подобии фигур, о сравнении и измерении фигур (признаки равенства плоских фигур), о превращении и делении фигур (о равновеликих фигурах и их построении). К последним относятся, например, задачи такого типа: превратить данный параллелограмм в равновеликий квадрат; данный треугольник разделить на три равновеликие части линиями, проведенными из вершин всех трех углов.

По такой же схеме, как планиметрия, построена и стереометрия. Аксиом четыре: 1) прямая и плоскость пересекаются только в одной точке; 2) три точки, не лежащие на одной и той же прямой, определяют только одну плоскость: 3) всякое тело не может быть ограничено меньше, чем четырьмя плоскостями; 4) плоскость, перпендикулярная к радиусу сферы в конце его N, касается поверхности сферы в одной только точке N.

Затем идут главы: о взаимном положении плоскостей, а также прямой и плоскости; о поверхности тел (правила вычисления поверхностей параллелепипеда, призмы, пирамиды, конуса, цилиндра); о сравнении тел (признаки равенства объемов и сравнительные размеры некоторых тел, соотношение сечений и т. п., например, доказывается теорема о том, что объем шара относится к объему цилиндра, около этого шара описанного, как 2 : 3); об объемах тел; о правильных многогранниках.

Чередуясь с теоремами и их доказательствами, приводятся многие задачи, в частности, задачи на построение. Преследуется цель научить учащихся пользоваться простыми чертежными приборами: линейкой, циркулем, транспортиром.

Третья часть «Начальных оснований чистой математики» [Ф. 114] состоит из четырех разделов: приложения алгебры к геометрии, плоской тригонометрии, конических сечений, оснований дифференциального и интегрального исчисления.

Четыре главы первого раздела посвящены соответственно решению геометрических задач, ведущих к уравнениям 1, 2, 3 и 4-й степени.

Второй раздел включает в точности такие же сведения о плоской тригонометрии, как и вышедшие отдельной книжкой в 1804 г. «Начальные основания плоской тригонометрии». Плоская тригонометрия определяется как «наука, имеющая предметом из трех данных и числами изображенных частей прямолинейного треугольника определять три прочие его части» (§ 1, стр. 1). Ни понятие, ни термин «тригонометрические функции» ни разу не употребляется, а пишется «тригонометрические линии». Тригонометрические линии вводятся на круге единичного радиуса, нигде, впрочем, не обозначаются явно как соотношения сторон в прямоугольном треугольнике. Известно, что Эйлер тоже нигде не определял тригонометрические функции явно как отношения сторон прямоугольного треугольника, но всегда рассматривал их именно так [9, стр. 335].

В главе 3 рассматриваются знаки функций во всех четвертях, выводятся основные тригонометрические тождества, доказываются теоремы синусов, тангенсов, косинусов.

Глава 4 посвящена решению прямоугольных и косоугольных треугольников (с логарифмированием и вычислениями до седьмого десятичного знака).

Особое внимание уделяется решению задач практической геометрии: измерение недоступных на местности расстояний и высот (глава 5).

В последнюю главу «Дальнейшее распространение тригонометрических формул» вошли выражения тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов, выражения для представления произведений двух тригонометрических функций и ряд других, не привившихся в современной тригонометрии.

Третий раздел «Начальных оснований чистой математики» содержит те же главы, что и учебник «Начальные основания высшей геометрии» (1804) [Ф. 110] и состоит из шести глав. Изложению предмета предшествует следующее характерное для своего времени обращение к учащимся:

«Благородные воспитанники! Милостивые государи! Предшественники ваши не имели у себя сей учебной книжки, а потому и находились принужденными все то, что в ней содержится, списывать. Но сколько таковое списывание похищало у них времени? Сколько повреждало цветущее их здравие? Да и самые списки-то их сколько досад и недоумений причиняли им своими ошибками, описками и другими погрешностями? Вы, имея теперь сию книжку, от всего того свободны. Итак, пользуйтесь ею со тщанием, успевая в тех важных и необходимо нужных для вас науках, кои в ней заключаются. Сие начертать здесь осмелился один из споспешествовавших к изданию сей преполезной книжки, а именно: ваш покорнейший слуга *Матвей Резанов*».

Как видим, потребность в издании учебной литературы на русском языке была очень велика и удовлетворение ее вызывало понятную радость издателей.

Перейдем, однако, к содержанию третьего раздела. В первой главе дается определение кривых второго порядка как конических сечений. Во второй главе вводится прямоугольная система координат. С методической точки зрения такая структура начала учебника могла быть целесообразной, так как давала учащимся наглядную картину возникновения и самих кривых и их названия «конические сечения». Странно, однако, что совершенно отсутствуют сведения о прямой, которые были уже во французских учебниках, например, у Лакруа («Начала геометрии», Париж, 1794).

Следующие четыре главы содержат только вывод канонических уравнений и указания основных свойств, соответственно, окружности, эллипса, параболы и гиперболы, а также решения задач. Например, в главе IV об эллипсе, кроме вывода уравнения эллипса в прямоугольных координатах и объяснения некоторых его свойств, рассматривается 10 задач с решениями. Причем часть из них (задачи 8—10) решаются не аналитически, а чисто графически, как задачи на построение. *Задача 8.* Найти центр данного эллипса. *Задача 9.* В данном эллипсе провести оси. *Задача 10.* По данной большой оси и данному центру эллипса найти его фокусы.

Необходимость научить решать такого рода основные задачи без рассмотрения уравнения прямой и уравнения касательной к кривой 2-го порядка не останавливала автора перед смешением аналитического и чисто геометрического методов в подходе к решению задач, включаемых в учебник. Более строгий подход к этому вопросу начал проявляться в русских геометрических учебниках лишь в середине XIX в.

Наконец, четвертый раздел третьей части «Начальных оснований чистой математики» Фусса по содержанию совпадает с вышедшими в 1804 г. «Начальными основаниями дифференциального и интегрального исчисления» и содержит приложения исчисления бесконечно малых к решению задач.

Чтобы современный читатель мог получить представление о теоретическом уровне трактовки основных вопросов, рассказывая о содержании раздела, приведем несколько определений, имеющихся в первой главе «Определения и предварительные изъяснения».

Определение 1: «Всякая величина, содержащаяся в пределах, называется *величиною конечною*; напротив же того называются величинами бесконечно великими и бесконечно малыми все те, кои предполагаются увеличивающимися или уменьшающимися далее всякого предела».

Затем речь идет о бесконечно малых величинах в следующих выражениях. «Хотя и сказано, что $\frac{1}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$ или $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{b^\infty}$ суть величины бесконечно малыя, или ничтожества, однако ж оне имеют между собою определенное содержание, так $\frac{1}{\infty}:\frac{a}{\infty}=1:a$, $\frac{1}{\infty}:\frac{1}{b^\infty}=b:1$.

Следовательно, между величинами бесконечно малыми, или ничтожествами, есть определенное содержание, и изыскивание оного составляет предмет того вычисления, коего начала предложены в следующей главе». «Содержание» означало отношение.

Далее излагаются: понятие о сравнении бесконечно малых, деление функций на алгебраические и транцендентные (определения тех и других весьма туманны), понятия постоянной и переменной величины.

Важное понятие функции определяется так: «Функциею переменной величины называется выражение, состоящее из сей переменной, соединенной с постоянными величинами...». Рассматриваются также функции двух и трех независимых переменных.

Вводится понятие *приращения* переменной величины, «сии-то безконечно малые приращения или уменьшения называются началами или дифференциалами переменяющейся величины, для означения которых употребляют литеру d, поставляя ее перед переменной величиной».

«Если в какой-нибудь функции $F(x, y, z, \ldots)$ вместо $x, y, z, \ldots$ подставить $x \pm dx$, $y \pm dy$, $z \pm dz$ и т. д. и обозначить полученную при этом разность $F \pm dF = F'$, то, взяв разность $F' - F$, получится *дифференциал* данной функции F. От сего действия брать разности произошло вычисление, названное дифференциальным, а брать или употреблять дифференциалы — значит искать или употреблять разности» (differentio, лат. — разность).

Далее выводятся правила дифференцирования. Из приложений дифференциального исчисления интересно отметить наличие следующих: о нахождении нормали, поднормали, касательной, подкасательной, радиуса кривизны плоской кривой; о дифференциалах высших порядков, где приводятся примеры вторых дифференциалов; о точках перегиба и возврата, где рассмотрены условия выпуклости и вогнутости дуги плоской кривой, условия перегиба и возврата кривой; экстремум функции одной независимой переменной (необходимое условие $dy/dx = 0$ или ∞, достаточное $ddy/dx^2 \gtrless 0$).

Интегральное исчисление открывается следующим определением интеграла: «Ясно, что сумма всех приращений F, то есть сумма dF, которую означают через SdF, должна быть равна функции F или $SdF = F$. И как сие значит из суммы всех приращений dF составлять или находить целое, то и говорится, что $SdF = F$ есть интеграл dF

(integrum, *лат.* — целый). И от сего то вычисление, которое учит находить F, когда dF дано, называется *интегральным*; а употребление оного есть способ сыскивать интегралы, знак же S, притом употребляемый, есть знак интеграла».

Рассмотрен вопрос о том, что два интеграла одного и того же дифференциала отличаются на постоянную величину. Дается таблица интегралов (21 формула). Последующие главы содержат: непосредственное интегрирование; метод подстановки; вычисление длины дуги плоской кривой — циклоиды (в параметрической форме), циссоиды, окружности (с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд); вычисление площадей криволинейных фигур (параболического и гиперболического сегментов, эллипса, циклоиды); вычисление поверхностей и объемов тел вращения (коноидов), причем вычисление доводится до разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования.

Последняя глава посвящена приложениям интегрального исчисления к задачам так называемого обратного способа тангенсов. В § 146 говорится:

«*Обратным способом тангенсов* называется способ определять кривые линии по данным свойствам их тангенсов (т. е. касательных. — *В. Л.*) или прочих линий, от них происходящих, как то субтангенсов, нормалей, субнормалей, радиусов кривизны и пр., а из сего видно, что оный способ противополагается *способу прямому*, научающему находить тангенсы, субтангенсы и пр. по данным свойствам кривых линий» (стр. 89).

Поскольку задачи прямого способа касательных приводят к дифференциальному исчислению, то задачи обратного способа касательных приводят к интегральному исчислению.

Заканчивая обзор опубликованных учебных пособий, подведем итоги.

1) Все разрозненно изданные учебники Фусса были впоследствии сведены в общий курс, составивший три книги «Начальных оснований чистой математики».

2) Лучшим из пособий была «Алгебра», весьма близкая по содержанию к упоминавшемуся учебнику Эйлера.

3) Учебники Фусса были не свободны от недостатков; в частности, учебники геометрии были недостаточно строгими даже для требований того времени. В. Ф. Каган

считал поэтому, что последние «не соответствовали научному авторитету автора-академика» [18, стр. 134].

С точки зрения современных требований, В. Ф. Каган в оценке геометрических учебников Фусса был прав. Однако, если вспомнить дефицит учебной литературы того времени, а также разнообразие предметов, по которым нужно было написать учебники в сравнительно короткий срок, то можно признать, что Фусс выполнил эту большую и необходимую работу удовлетворительно. Несмотря на их несовершенство, учебники Фусса были в употреблении до 30-х годов XIX в. Это объясняется наличием в них большого числа удачно подобранных сведений практического характера, связи геометрии с алгеброй и анализом, доступности изложения, что удовлетворяло в то время учащихся, для которых учебники предназначались.

Не все учебные руководства, написанные Фуссом, были опубликованы. Среди неопубликованных рукописей Фусса, хранящихся в Архиве Академии наук, есть, например, «Введение в сферическую тригонометрию» (рукопись на немецком языке) [26]. На первом листе рукописи сделана следующая запись: «В протоколе от 23 декабря 1784 г. отмечено: Г-н профессор Фусс представил работу по элементарной математике, озаглавленную «Руководство по сферической тригонометрии», которую он предложил в издательство академии для печати, когда будет свободен печатный станок. Эта работа была помещена временно в Архив Конференции». Почему-то она так и не была напечатана.

Там же сохранилось по несколько вариантов рукописей учебников геометрии и тригонометрии, составленных Фуссом. Имеется 17 законченных или незаконченных рукописей учебных пособий по планиметрии, стереометрии, плоской и сферической тригонометрии и аналитической геометрии. Вот некоторые из них: «Начала стереометрии и сферической тригонометрии» (на латинском языке, 35 л.); «Начальные основания плоской тригонометрии» (рукопись на русском языке, 18 л.); то же на французском языке; «Курс плоской тригонометрии» (на русском языке, 26 л.); то же на французском языке; «Начала конических сечений» (56 л.) и др. [27]

---

[26] ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 35.

[27] Там же, №№ 35, 44, 46—49, 51—все рукописи не датированы.

Кроме того, есть 10 рукописей, содержащих геометрические и тригонометрические задачи и заметки по их решению, общим объемом 600 листов архивных единиц хранения [28].

Глава 5

Переписка

Научная переписка

Петербургские математики вели переписку со многими зарубежными учеными. Если не считать огромной переписки Л. Эйлера, то в рассматриваемый период интересной по содержанию и ценности для истории науки была переписка Н. И. Фусса и Ф. И. Шуберта. Это легко объяснить тем, что первый из них был непременным секретарем академии, а второй заведовал академической библиотекой. Переписка эта хранится в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР (фонд 1, опись 3).

Письма Даниила Бернулли Н. И. Фуссу известны по «Переписке» Павла Фусса [76]. Интересны 8 писем (1802—1807) К. Ф. Гаусса к Фуссу, они были опубликованы в 1934 г. академиком А. Н. Крыловым [23]. Гаусс состоял в переписке одновременно и с Шубертом. Письма Гаусса к Шуберту тоже напечатаны с хорошими комментариями в 1948 г. [14]. Они представляют интерес для истории математики и проливают свет на отношения Гаусса к петербургским ученым.

Основным содержанием писем Гаусса, написанных в 1802—1807 гг., была информация о проведенных им вычислениях элементов орбит малых планет Цереры и Паллады, а также его размышления о сделанном ему в 1802 г. предложении переехать в Петербург для работы в академии и о нетвердом намерении принять это предложение. Из писем Гаусса видно, что он с большим уважением относился к Фуссу и Шуберту и считал за честь приглашение в Петербургскую академию. Но после того, как герцог Брауншвейгский значительно улучшил условия работы и материально обеспечил Гаусса, который к тому времени обзавелся семьей, Гаусс решил остаться

---

[28] ЛОААН, ф. 40, оп. 1, №№ 50, 55—60, 98, 104, 105.

пока в Германии. Зная о колебаниях Гаусса, Фусс писал ему: «...Не забывайте, что у Вас в Петербурге имеются друзья, ожидающие лишь намека, чтобы возобновить свои предложения» [23, стр. 228].

В Архиве Академии наук СССР имеются и неопубликованные письма. Они не содержат какой-либо значительной научной информации. В большинстве своем это сообщения, касающиеся обмена той или иной литературой или приборами. Среди них 14 писем Н. И. Фусса к Ф. П. Аделунгу 1803—1823 гг. — преимущественно об обмене литературой [29].

12 октября 1808 г. читано на заседании Академического собрания письмо [30] князя Куракина с приложением описания падения метеорита в десятом часу вечера 6 августа 1808 г. в районе сел Демшино и Врублевцы в сопредельных местах Каменецкого и Утицкого поветов Подольской губернии близ Днестра. Прилагается подробное описание явления со свидетельств очевидцев, сделанное коллежским асессором Мышковским, и его попытка объяснить физическую суть этого явления и некоторых электрических явлений в природе. Объяснение в целом получило одобрение Фусса.

9 декабря 1807 г. и 20 августа 1808 г. Фусс писал профессору Х. М. Френу в Казань о том, как идут дела с изготовлением оттисков редких куфических монет из собрания монетного кабинета академии.

9 апреля 1808 г. послан ответ [31] Фусса академику Клапроту в Тифлис с одобрением плана путешествия и указаниями следовать в Баку, собирая минералы и описывая достопримечательности. Рекомендуется активно привлекать к делу прикомандированного к экспедиции воспитанника академии Бобринцова.

23 января 1817 г. Фусс послал Френу выражение благодарности от имени Академического собрания за сооб-

---

[29] ЛОААН, ф. 89, оп. 2, № 115. Аделунг Фридрих (Федор Павлович) (1768—1843) — лингвист, археограф, источниковед. Родился в Штеттине, учился в Лейпцигском университете. В 1795 г. переехал в Петербург и поступил на службу. С 1818 г. служил в Министерстве иностранных дел и управлял с 1824 г. Восточным институтом. Написал сводный труд «Обозрение путешествий по России» (русский перевод 1864 г.). Умер в Петербурге.

[30] ЛОААН, ф. 1, оп. 2, 1803, § 382.

[31] Там же, 1808, № 9, § 107.

щение очень древних болгарских чисел [32]. В письме от 16 ноября 1815 г. содержались некоторые критические замечания о труде А. Х. Лерберга по истории России. 28 июля 1821 г. отправлено письмо академику Ф. И. Кругу с просьбой прислать отзыв на сочинение бывшего директора училищ Минской губернии Цейса о могильной плите X в. с надписью на славянском языке. Фусс просит Круга представить академии свое личное мнение о надписи на плите [33].

29 мая 1811 г. — письмо к академику Лербергу по поводу его рецензии на сочинение профессора Ромелля об истории народов Кавказа [34].

Научная переписка Н. Фусса свидетельствует о признании его как крупного ученого своего времени всеми коллегами и о глубоком уважении, с которым те к нему относились.

Отзывы и рецензии

Кроме прямых обязанностей по службе, Фусс выполнял особые поручения президента академии, академического собрания и комитета. Чаще всего требовалось подвергнуть экспертизе изобретение или дать отзыв на сочинение, представляемое в академию, а иногда и в другие учреждения. Рецензирование и экспертиза во все времена были и остаются важными формами деятельности каждого крупного ученого, имеющими большое значение, поскольку они, в конечном счете, стимулируют научный и технический прогресс и способствуют воспитанию молодых ученых.

В академию поступало на отзыв ежегодно много сочинений, проектов и изобретений самого разнообразного характера — от нереальных предложений решения задачи о трисекции угла и проектов вечного двигателя до изобретения арочного моста, гидравлического насоса и других реальных проектов.

Все это направлялось на отзыв кому-нибудь из академиков или адъюнктов (реже группе академиков) и подчас вовсе не соответствовало их компетенции. Но ведь ученых было еще так мало! Приходилось разбираться и давать

---

[32] ЛОААН, ф. 778, оп. 2, № 337.

[33] Там же, ф. 88, оп. 1, № 59, § 49.

[34] Там же, ф. 149, оп. 1, № 24.

отзывы, тем более что иногда повеление дать отзыв исходило от царского двора.

В Архиве Академии наук СССР имеется много отзывов и заключений Н. И. Фусса, Ф. И. Шуберта, С. Е. Гурьева, Э. Д. Коллинса, В. И. Висковатова и других по различным вопросам, в том числе и по математике, относящихся ко времени жизни Фусса. Сохранилось несколько десятков его отзывов. Только небольшая часть их относится к вопросам математики.

Часть отзывов публиковалась в том разделе «Мемуаров» Петербургской академии наук, который назывался «История Академии» и составлялся Фуссом.

Рассмотрим отзывы Фусса. Это даст возможность лучше увидеть круг проблем, которыми ему приходилось заниматься, и узнать больше об их авторе.

22 февраля 1776 г. директор Академии наук Домашнев распорядился, чтобы академики осмотрели модель моста через Неву, который сконструировал капитан Сухопутного шляхетского корпуса Рибас. Для осмотра модели и представления письменного заключения были назначены академики Л. Эйлер, С. К. Котельников, И. А. Эйлер, С. Я. Румовский. К ним присоединили двух адъюнктов — Н. И. Фусса и М. Е. Головина, обязав их рассмотреть затем также чертеж, описание и расчеты другого моста, спроектированного русским изобретателем И. П. Кулибиным. Это было, по-видимому, первое участие Фусса в экспертном деле, за которым последовали многие другие.

Известный математик Симон Люилье в 1787 г. представил Петербургской академии статью, касающуюся вопросов вписания плоских прямолинейных фигур наименьшего периметра в одноименные прямолинейные фигуры [35]. Хотя Фусс дал о ней положительный отзыв [36], статья так и не была напечатана в академических научных журналах, возможно из-за большого объема.

В январе 1797 г. адъюнкт академии С. Е. Гурьев обратился к Академической конференции с просьбой назначить ему жалованье, одинаковое с недавно избранным в академики-астрономы, по желанию и представлению директора академии П. П. Бакунина, аббатом Анри и уровнять с ним в звании. Для решения вопроса было

---

[35] ЛОААН, р. 1, оп. 90, № 11. Представлена академии 23 апреля 1787 г. (42 стр.).

[36] Там же, ф. 40, оп. 1, № 107.

признано необходимым подробно обсудить представленную Гурьевым работу «Опыт о постановлении математики на твердых основаниях». Рукопись этой работы была дана на отзыв Румовскому и Фуссу. Оба они выразили несогласие с имевшимися в ней критическими замечаниями Гурьева в адрес Эйлера и потребовали их исключения. Причем Румовский ограничился изложением содержания работы и выражением общих сомнений в правоте Гурьева и в том, что он достиг своей цели — освобождения анализа от рассмотрения бесконечно малых и отношения нулей [37]. А Фусс в своем отзыве от 16 марта и замечаниях, представленных 27 марта 1797 г., взял на себя критику конкретных положений работы Гурьева [38]. Однако, как отметил А. П. Юшкевич, «в своей критике Гурьева Фусс обнаружил плохое понимание различия между переменным бесконечно малым, которое имелось в рассуждениях сторонников метода пределов, и застывшим ничтожным бесконечно малым, которое имел в виду он сам» [63, стр. 246]. Подробно критика отзыва Фусса дана А. П. Юшкевичем в работах [63] и [67, стр. 204—206].

Академическая конференция приняла тогда компромиссное решение, одобряющее в общем работу Гурьева, указав при этом, что после некоторых сокращений и изменений работа заслуживает опубликования. Вскоре Гурьев издал ее в сокращенном виде под заглавием «Опыт о усовершении элементов геометрии» (СПб., 1798). 31 января 1798 г., не без затруднений, он был утвержден в звании академика.

13 сентября 1798 г. Фусс представил президенту академии А. Л. Николаи свой сравнительный анализ [39] двух паровых машин, установленных в мельницах землевладельцев Берда и Пойдебарда.

В сентябре-октябре 1798 г. был написан отрицательный отзыв [40] на две работы Тредерна — 20-летнего французского морского офицера, в которых тот пытался найти некоторые условия исключения неизвестных в уравнениях.

Имеется пространный отзыв [41] о книге Фонтена «Энциклопедический элементарный курс математики и физи-

---

[37] ЛОААН, дело Гурьева, ф. 1, оп. 2 (1797), § 84.

[38] Там же, §§ 76 и 85.

[39] Там же, ф. 40, оп. 1, № 116; каталог П. Фусса, II, 10, 16.

[40] Там же, ф. 40, оп. 1, № 118.

[41] Там же, ф. 40, оп. 1, № 119.

ки», опубликованный в Вене (1799 и 1800 гг.) в 8 томах. Фусс подробно пишет о содержании этих книг и похвально отзывается о работе в целом, считая ее классической. Как явствует из текста, отзыв предназначался для передачи царю.

В рукописи «Отзыв о работе проф. Резанова [42] «Самократчайшее расстояние — прибор для черчения некоторых кривых»[43], которая поступила на отзыв Фуссу от президента Академии наук Н. Н. Новосильцова 13 июля 1809 г., Фусс обсуждал затронутый там вопрос о конхоиде. Похвально отозвавшись о занятиях Резанова со студентами, Фусс перешел дальше к характеристике его работы. Так, он пишет, что она не является образцом проникновения в суть вопроса, что большинство из полученных Резановым кривых не являются новыми, а известны геометрам с давних времен под названием конхоидальных. Затем более простым и легким способом, чем у Резанова, Фусс решил задачу отыскания координат конхоиды, указав особенности разных конхоид и литературу о конхоидах таких авторов, как Эйлер, де Лаир, Кастильон, Крамер, Карре, Клюгель, Роберваль, а также заметил, что во «Всеобщей арифметике» Ньютона можно найти приложение конхоид к трисекции угла и решению уравнений 3-й и 4-й степени.

20 февраля 1811 г. Академическому собранию было представлено донесение [44] о рассмотрении второй модели насоса, изобретенного Ковальским. Авторы отзыва Н. Фусс, С. Гурьев, В. Висковатов, В. Петров отмечают, что насос, изготовленный в натуральную величину, потребует для приведения в действие слишком больших усилий и покажет действие слабее того, какое показывает модель.

Среди работ, представленных академии в 1816 г., была рукопись Алексея Маюрова [45] «Геометрия в пространствах или приложение алгебраического анализа к начертательной геометрии». Фусс дал о ней похвальный отзыв. Из содержания рукописи, кратко сообщаемого Фуссом,

---

[42] Матвей Резанов — ординарный профессор Петербургского педагогического института.

[43] ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 132.

[44] Там же, ф. 1, оп. 2, 1811, § 89.

[45] Алексей Иванович Маюров (Маиров) (1780—1848) — математик, астроном, член-корреспондент Петербургской академии наук с 23 августа 1815 г.

видно, что она включала некоторые важные разделы — такие, как преобразование координат на плоскости и в пространстве, изложение свойств кривых и поверхностей 2-го порядка. Ничего общего с тем, что мы сейчас понимаем под начертательной геометрией, в этой работе, конечно, не было.

Фусс пишет, что хотя сведения, содержащиеся в работе Маюрова, и не представляют собой чего-либо нового ни по содержанию, ни по способу изложения, все же они до сих пор не были собраны ни в одном сочинении на русском языке, и с этой точки зрения изыскание автора «заслуживает одобрения, а его работа достойна похвалы» (Mém., т. VII, 1820, стр. 36). «Геометрия» Маюрова была напечатана в 1817 г.

В VIII томе «Мемуаров» есть отзывы Фусса на две рукописи, представленные академии 6 мая 1818 г. преподавателем Института путей сообщения Пьером Базеном [46]. Одна из рукописей имела геометрическое содержание, другая была элементарным учебником дифференциального исчисления. В первой работе Базен рассмотрел аналитические способы, применение которых дает возможность сводить решение задач о гиперболоиде вращения и конусе к задачам геометрии на плоскости. «Многие из этих решений, — пишет Фусс (Mém., т. VIII, 1822, стр. 58),— замечательны превосходными построениями, которые автор сумел вывести из своих интересных предложений». Работа Базена опубликована в изданиях академии (Mém., т. VII, 1820, стр. 255—285).

Отзыв Фусса на вторую рукопись Базена тоже был положительным. Фусс считал Базена «знающим автором», а его рукопись учебника «достойной внимания геометров» и отвечающей той цели, для которой она составлена.

Очень хорошие отзывы в академии получила представленная туда рукопись учебника Я. Севастьянова «Начальные основания аналитической геометрии».

Один из первых отзывов на учебник Севастьянова принадлежит Фуссу. Он писал: «С тех пор как Эйлер первым применил анализ к геометрии линий и кривых поверхностей всех порядков, то, что называют аналитической гео-

---

[46] Пьер Доминик Базен (1786—1838), генерал-майор на русской службе с 1810 г., профессор высшего анализа и механики, позднее также директор Института путей сообщения, член Петербургской академии наук.

метрией во Франции, стало предметом преподавания, в особенности все, относящееся к линиям и поверхностям 2-го порядка». Фуссу казалось, что за образец своей книги Севастьянов взял аналогичное сочинение Био. Фусс признает, что подобной работы, предназначенной для «наших заведений... которая бы содержала элементы аналитической геометрии как систематическую основу науки», на русском языке нет. Работа Севастьянова «достойным похвалы образом восполняет этот пробел». Фусс считал, что издание этой работы имело бы заслуженный успех.

В том же 1819 г. учебник Севастьянова был напечатан. На титульном листе значилось: «Академией наук принято с отличным одобрением». Учебник действительно имел большой успех.

Н. И. Фусс давал заключение об учебнике «Основания алгебры» (СПб., 1820) В. С. Себржинского. Он написан, по мнению Фусса, в стиле учебника Эйлера по алгебре и может быть рекомендован к употреблению в духовных семинариях, для которых и предназначался. Позже, уже после смерти Фусса, вдова академика Гурьева обвинила Себржинского в плагиате, доказывая, что «Основания алгебры» — сочинение ее мужа. Академик Э. Коллинс, занимавшийся рассмотрением этой жалобы по поручению академии, признал ее совершенно обоснованной [47].

Есть у Фусса и резко отрицательные отзывы. Так, например, в разделе «История академии за 1809—1810 гг.» (Mém., т. III, 1811) есть сообщение о прочтении членами Академической конференции письма профессора математики в Ричмонде (штат Виргиния) Вуда, сообщавшего принципы новой теории суточного движения Земли, основанной на свойствах эпициклоиды, и отрицательном отзыве Фусса об этой теории.

В этом же томе «Мемуаров» сообщается, что по повелению царя Александра I на отзыв в академию была направлена работа конректора Потсдамского лицея Бауэра «Об общем методе нахождения всех возможных корней числовых алгебраических уравнений любой степени по новой формуле».

---

[47] В. Е. Прудников [45, стр. 150]; со ссылкой на книгу Н. Барсукова «Жизнь и труды М. П. Погодина», т. III. СПб., 1890, стр. 361—362.

В заключении академиков Фусса, Шуберта и Гурьева сказано, что метод, предложенный Бауэром для решения числовых уравнений, принадлежит Виету, математику XVI в., причем в изложении Бауэра он длиннее и труднее; работа Бауэра смутная, неясная и наполнена ложными утверждениями.

Копия заключения была подписана тремя академиками и отправлена министру просвещения для передачи царю.

В том же третьем томе «Мемуаров» сообщается об отрицательном отзыве Фусса на проект одного анонима, претендовавшего на изобретение вечного двигателя.

Попытки решить классические задачи древности о трисекции угла, квадратуре круга и удвоении куба, равно как и попытки создания вечного двигателя, не прекращались даже после того, как в конце XVIII в. Парижская академия наук приняла специальное постановление не принимать на отзыв такие решения и проекты. Несколько таких решений и проектов поступило и в Петербургскую академию.

10 декабря 1795 г. Петербургская академия наук получила от аббата Пиццати из Венеции мемуар под названием «Трактат о трисекции угла или дуги в плоской геометрии...». Фусс дал отрицательный отзыв об этом трактате и указал ошибки в построении (NAASP, т. XIII, 1802, стр. 37—38).

19 сентября 1796 г. академия получила еще одно решение той же задачи. Его прислал некий лейтенант Тышкевич, претендуя на будто бы обещанную премию.

4 декабря 1797 г. некто Ж. Н. Ревей из Вены прислал трисекцию угла и квадратуру круга, которые Фусс решительно отверг (NAASP 1797—1798, т. XIV, 1805, стр. 49—52).

В 1811 г. Фусс проверил квадратуру круга, присланную неким Лоси, инженером из Тарнова (Галиция). Он указал, что автор квадратуры нашел отношение диаметра к длине окружности равным 1:3,0454748. Оно ложно, как это сразу видно, ибо уже периметр правильного вписанного 8-угольника больший, чем эта длина окружности. Дальше Фусс терпеливо объясняет, в чем кроется источник ошибки автора (Mém., т. IV, 1813).

Особый интерес в связи с деятельностью Н. И. Фусса представляет его отзыв на учебное руководство Н. И. Лобачевского «Геометрия».

Нас, соотечественников великого русского математика Н. И. Лобачевского, знающих теперь полную цену его научного наследия, до сих пор огорчает запоздалое признание его открытия неевклидовой геометрии и все пережитые им неудачи. А их на его долю выпало немало. В том числе и такая.

Летом 1823 г. попечитель Казанского учебного округа Л. М. Магницкий, за которым в истории просвещения закрепилась нелестная репутация реакционера и плута, направил на отзыв академику Н. И. Фуссу рукопись написанного Н. И. Лобачевским курса геометрии, сопроводив его следующим письмом:

«Милостивый государь мой, Николай Иванович! Один из наставников Казанского округа написал курс геометрии, представил его ко мне и просит дозволения напечатать оный на казенный счет как учебную книгу. Препровождая у сего означенную геометрию, я покорнейше прошу Ваше превосходительство сказать мне о ней Ваше мнение предварительно».

Рассмотрев рукопись, Фусс дал о ней весьма неблагоприятный отзыв, который полностью приводится в книге В. Ф. Кагана «Лобачевский» [18, стр. 112—114].

В. Ф. Каган подробно прокомментировал этот отзыв в упомянутом сочинении [18, стр. 114—120]. Там же он дает справку читателю и об академике Н. И. Фуссе. Он пишет, в частности: «При недюжинных дарованиях и в постоянной работе под руководством Эйлера Фусс очень скоро опубликовал работы, обратившие на себя внимание в Европе. Первые из этих работ относились главным образом к астрономии. В дальнейшем математические интересы Фусса настолько углубились, что трудно даже указать область анализа того времени, в которой Фусс не имел бы более или менее значительных работ» [18, стр. 115].

После столь лестной научной характеристики Фусса В. Ф. Каган остановился на его общественно-политических взглядах, отмечая, что «Фусс принимал активное участие в делах министерства народного просвещения. К числу безудержных реакционеров того времени, к группе Голицына, он не принадлежал. Напротив, вот что он писал: «Кровью обливается мое сердце, когда я сравниваю настоящее положение наших высших учебных заведений с теми ожиданиями, которые питал тринадцать лет назад, под влиянием свежей жизненной струи, излившейся во все сферы русского просветительского дела» (*Н. П. Загоскин.* История Казанского университета, т. III, Казань, 1904, стр. 258).

Под «свежей жизненной струей» Фусс, надо полагать, имел в виду реформы Александра I, оказавшиеся лишь временной игрой в либерализм и не приведшие к исполнению многих обещаний, которые должны были способствовать истинному улучшению просветительского дела.

Далее В. Ф. Каган ищет ответ на вопрос, что же побудило Фусса дать о работе Лобачевского резко отрицательный отзыв? По его мнению, некоторую роль сыграл политический момент: у Фусса почему-то вызвало недовольство употребление Лобачевским в своем учебнике метра в качестве единицы меры длины и центезимального деления угла (за единицу меры угла принималась сотая доля прямого угла). Оппозиция Фусса этим единицам измерения не делает ему чести. Он писал: «...Сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожать все, прежде бывшее, распространилось даже до календаря и деления круга; но сия новина нигде принята не была и в самой Франции уже оставлена по причине очевидных неудобств». Фуссу следовало бы знать, что идея центезимального деления угла возникла задолго до французской революции, и что предложение о создании десятичной системы мер и весов исходило от самых выдающихся математиков и физиков. «Эти строки, — пишет В. Ф. Каган, — производят, конечно, очень тяжелое впечатление; но все же нельзя думать, что этот политический момент сыграл решающую роль при осуждении «Геометрии» [18, стр. 116].

Из приведенного выше письма Магницкого Фусс должен был заключить, что книга составлена рядовым «наставником» Казанского учебного округа, так как Магницкий скрыл, что ее автор — магистр, профессор Казанского университета.

Фусс, не зная этого, все же усмотрел в ней новые методологические рассуждения, заслуживающие опубликования: «Сочинение... содержит в себе разные геометрические рассуждения и исследования, которые... по надлежащем] выправлении ошибочного и выпущении бесполезного или уже известного, могли бы быть представлены Вашему превосходительству», — пишет он в отзыве, адресованном Магницкому. Он требует исправления ошибочного, но остается неясным, что именно он считал ошибочным. Лобачевский был обижен отказом и исправлять книгу не стал. Тем более, что его мысли занимали уже новые идеи и творческие замыслы, оставившие далеко позади сложившиеся каноны написания учебников геометрии, столь близкие стареющему Фуссу.

В. Ф. Каган замечает далее, что у Фусса были основания требовать исправления книги Лобачевского. «Нужно признать, что достаточно тщательной обработкой книга вообще не отличается. Более чем вероятно, что Лобачевский выправил бы эти погрешности, если бы дело действительно дошло до печатания» [18, стр. 117].

Лобачевский в своей книге давал обзор только наиболее важного, существенного, принципиального, не стремясь охватить всю полноту геометрических истин, избегая подробностей, «которые — как он отмечал, — должны быть слушателям давно известны». Фусс это замечание автора проглядел и упрекает его в том, что он не имеет «точного понятия... о необходимости точных и ясных определений всех понятий ..., о неупустительной и, по возможности, чисто геометрической строгости доказательств» и т. д. В этом он, конечно, неправ. Ведь речь шла фактически об учебном пособии для студентов, где излагались основные идеи элементарной геометрии с точки зрения высшей. Причем Лобачевский все время пользуется понятием бесконечно малых. Фусс, полагая, что он рецензирует учебник геометрии для гимназий и училищ, упрекал автора в том, что ему не удалось избежать употребления бесконечно малых.

«Фусс, несомненно, видел, — пишет В. Ф. Каган, — что книга написана незаурядным автором. Но он не знал, он не ощутил, может быть, и не мог еще почувствовать, что автор — геометр первого ранга, что он имеет право и возможность подойти критически к традиционной системе Евклида и искать при изложении начал геометрии других путей, что его установки заслуживают большего внимания, чем может с первого взгляда показаться» [18, стр. 118—119].

Мы рассмотрели не все отзывы Фусса. Еще некоторые есть в «Мемуарах» академии, ряд отзывов упоминается в Каталоге П. Фусса, среди них, например, отзыв о сочинении Платцмана по поводу решения уравнений 3-й степени, о машине Кошкина, спроектированной для фабрики, о соффитах для церкви в Казани, спроектированных архитектором Воронихиным, и др. (см.: «Каталог П. Фусса», II, 1—16, 34—39).

Сказанного достаточно, чтобы представить, сколь обширной была эта сторона деятельности Н. И. Фусса.

Собранные воедино разрозненные сведения об академике Н. И. Фуссе показывают, что он был видной фигурой в научном мире своей эпохи. Круг проблем, которыми он занимался, как по широте охвата, так и по глубине решения, соответствовал академическим масштабам. Его полувековая служба в академии, заметный вклад в науку и заслуги перед Россией в области просвещения и в наше время вызывают уважение и признание.

Информацию о творческой активности и тематической направленности научных занятий Фусса завершает самый полный из пока что опубликованных списков его трудов.

Библиография

Опубликованные труды Н. И. Фусса

1. Instruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les différentes espèces au plus haut degré de perfection dont elles sont susceptibles, tirée de la Théorie dioptrique de mr. Euler le père et mise à la portée de tous les ouvriers en ce genre par mr. Nicolas Fuss. Avec la description d'un microscope qui peut passer pour le plus parfait dans son espèce et qui est propre à produire tous les grossissements qu'on voudra. St.-Pétersbourg, Impr. de l'Acad. imper. des sciences, 1774 (83 p.).
2. Entwurf einer allgemeinen Leihe-Bank, wo nicht nur Kapitalien zu gewissen Zinsen sowohl ausgelehnt als angenommen, sondern auch zugleich andere verschiedene Anstalten als Leibrenten, Sterbe- und Witwen-Kassen damit verbunden werden können. Berechnet durch N. Fuss. St.-Petersbourg, gedr. bei der Keiserl. Akad. der Wissenschaften, 1776 (154 p.).
3. Éclaircissemens sur les établissemens publics, en faveur tant des veuves que des morts, avec la déscription d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Léonard Euler. St.-Pétersbourg, Impr. de l'Acad. imper. des sciences, 1776 (72 p.).
4. Observation et expériences sur les aimants artificiels principalement sur la meilleure manière de les faire. Lues à l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg le jour de son assemblée publique de l'année 1778. Par Nicolas Fuss. St.-Pétersbourg, Impr. de l'Acad. imper. des sciences, 1778 (38 p.).
5. Meditationes circa resolutionem fractionis

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}$$

in fractiones simplices, ubi simul demonstratio insignis theorematis arithmetici occurrit. AASP 1777, pars I, 1778, p. 91—104.

6. Varia problemata circa statum aequilibrii trabium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides. AASP 1778, t. II, pars I, 1780, p. 194—216.
7. Réflexions sur les satellites des étoiles, présentées à l'Academie imperiale des sciences... St.-Pétersbourg, Impr. de l'Acad. imper. des sciences, 1780 (31 p.). AASP 1780, pt. II, 1784, Histoire, p. 16—51.
8. Réflexions sur les principales méthodes de corriger les distances apparentes de la lune à une étoile relativement aux effets de la réfraction et de la parallaxe. AASP 1779, pt. I, 1782, p. 310—339.
9. De integratione aequationis differentio-differentialis $\frac{ddz}{dt^2} + 2m\frac{dz}{dt} + nz = a\sin it + b\cos ct$ aliarumque eiusdem generis. AASP 1777, t. I, pars II, 1780, p. 89—106.
10. Gemina methodus investigandi valorem producti

$$\int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \cdot \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}},$$

dum ambo integralia a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extenduntur. AASP 1778, t. II, pars II, 1781, p. 111—134.

11. Nouvelles recherches sur les inégalités dans le mouvement de la Terre, causées par l'action de Venus. AASP 1780, pt. I, 1783, p. 381—398.
12. Recherches sur un problème du calcul des probabilités, proposé par Bernoulli. AASP 1779, t. III, pt. II, 1783, p. 81—92.
13. Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini. AASP 1780, t. IV, pars I, 1783, p. 97—104.
14. Integration d'une espèce remarquable d'equations différentiales dans l'analyse des fonctions à deux variables par l'introduction de nouvelles variables. AASP 1780, t. IV, pt. I, 1783, p. 76—90.
15. Éloge de monsieur Léonard Euler, lu à l'Academie imperiale des sciences, dans son assemblée du 23 octobre 1783 par Nicolas Fuss. Avec une liste complette des ouvrages de M. Euler. St.-Pétersbourg, 1783 (124 p.).

   Похвальная речь покойному Леонарду Эйлеру. СПб., 1801.
16. Exercitatio analytico-geometricae circa lineam curvam singulari proprietate praeditam. AASP 1780, t. IV, pars II, 1784, p. 49—69.
17. Supplément au mémoire sur une problème du calcul des probabilités inséré dans le VI-e volume des actes. AASP 1780, t. IV, pt. II, 1784, p. 91—96.

18. De motu cometarum ex tribus observationibus determinando. AASP 1780, pars II, 1784, p. 359—374.— Supplementum. AASP 1782, pars I, 1784, p. 325—335.
19. Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum. AASP 1781, t. V, pars. I, 1784, p. 127—146.
20. Tentamen demonstrationis quod omnis quantitatis imaginaria ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reduci possit. AASP 1781, t. V, pars II, 1785, p. 118—128.
21. De superficiei terrestris proiectione stereographica. AASP 1782, t. VI, pars II, 1786, p. 170—182.
22. Solutio problematis analytici, non parum curiosi. AASP 1782, t. VI, pars I, 1786, p. 104—114.
23. Serierum quarundam singularium summatio. AASP 1782, t. VI, pars II, 1786, p. 96—104.
24. Demonstratio motuum penduli compositi bifili ex primis mechanicae principiis petita. NAASP 1783, t. I, 1787, p. 184—202 (17. III.1785)[48]. Николая Фусса определение движения двойного отвеса, выведенное из первых начал механики.— Академические сочинения, выбранные из первого тома «Деяний Академии наук» под заглавием «Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae». СПб., 1801, ч. 1, стр. 26—31.
25. Additationes analyticae ad dissertationem de motu penduli bifili. NAASP 1783, t. I, 1787, p. 203—212 (7.IV 1785). Николая Фусса аналитические присовокупления к сочинению о движении двойного отвеса. Акад. соч., выбр. из первого тома «Деяний Акад. наук». СПб., 1801, ч. 1, стр. 31—33.
26. Problemata quorundam sphaericorum solutio. NAASP 1784, t. II, 1788, p. 67—80 (11.IV 1786).
27. De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. NAASP 1785, t. III, p. 90—99 (25.X 1787).
28. Précis de la vie de M. Lexell. NAASP 1784, t. II, 1788, Histoire, p. 12—15.
29. Recherches sur la dérengement d'une comète qui passe près d'une planète. Mém. de Math. et de Phys. presentés à l'Acad. R. des Sciences par divers savants et lus dans les assemblees, t. X. Paris, 1785. (Это сочинение в 1778 г. получило премию Парижской академии наук).
30. Remarque sur une nouveau méthode de trouver l'anomalie excéntrique par l'anomalie moyenne. NAASP 1785, t. III, 1788, p. 302—306 (5.V 1788).

---

[48] Здесь и ниже указывается по старому стилю дата представления работы в академию, если она известна.

31. Solutio problematis ex methodo tangentium inversa. NAASP 1786, t. IV, 1789, p. 104—128 (24.IV 1788).
32. Du mouvement d'une disque circulaire, qu'un poids fait monter sur un plan incliné. NAASP 1787, t. V, 1789, p. 176—196.
33. Solution du problème de trouver un cercle qui touche trois cercles donnés de grandeur et de position. NAASP 1788, t. VI, 1790, p. 102—113 (27.XI 1788).
   Решение вопроса о сыскании круга, касающегося к трем как величиною, так и положением данным кругам. «Умозрит. исслед.», т. IV, СПб., 1815, стр. 21—32.
34. Recherches sur un problème de méchanique. NAASP 1788, t. VI, 1790, p. 172—184 (19.I 1789).
35. Remarques sur un problème de statique assez connu. NAASP 1788, t. VI, 1790, p. 197—204 (19.I 1789).
36. Observationes variae circa integrationum aequationum homogenearum rationalium sine variabilium separatione perficiendam. NAASP 1789, t. VII, 1793, p. 162—174 (11.II 1790).
37. Enodatio difficultatis ab ill. Eulero in Dissertatione de integrationibus memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis geometris propositae. NAASP 1789, t. VII, 1793, p. 175—188 (18.XI 1790).
38. De novis quibusdam causticae parabolae proprietatibus. NAASP 1790, t. VIII, 1794, p. 182—200 (26.I 1792).
39. Demonstratio theorematum quorundam analyticorum. NAASP 1790, t. VIII, 1794, p. 201—226 (25.X 1790).
40. De motu singulari progressivo et rotatorio corporis cylindrici, filo flexili, ex cujus altero termino suspenditur, circumdati. NAASP 1790, t. VIIl, 1794, p. 256—266 (4.IV 1793).
41. Solutio questionis quot modis polygonum *n* laterum in polygona *m* laterum per diagonales resolvi queat. NAASP 1791, t. IX, 1795, p. 243—251 (9.IX 1793).
42. Observationes circa series, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimi solent. NAASP 1791, t. IX, 1795, p. 205—224 (17.XI 1791).
43. De la descente d'un corps sur un plan incliné, dont une extrémité est appuyée sur un fond élastique. NAASP 1791, t. IX, 1795, p. 252—267 (23.XII 1793).
44. De la descente d'un corps sur un plan incliné, dont les deux extrémités sont appuyées sur un fond élastique. NAASP 1792, t. X, 1797, p. 91—102 (27.I 1794).
45. De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet. NAASP 1792, t. X, 1797, p. 103—125 (14.VIII 1794).
   О четырехугольниках, около которых круг описать и в которых

круг вписать можно. «Умозрит. исслед.», т. IV, СПб., 1815, стр. 33—35.

46. Ulteriores disquisitiones circa series quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimuntur. NAASP 1793, t. XI, 1798, p. 155—171 (28.XI 1791).
47. Dilucidationes super problematae geometrico de ellipsi minima per data quattuor puncta ducenda. NAASP 1793, t. XI, 1798, p. 187—212 (31.VIII 1795).
48. De minimis quibusdam geometricis ope principii statici inventis. NAASP 1793, t. XI, 1798, p. 220—245 (25.II 1796).
49. Summatio plurium serierum ex sinubus vel cosinubus arcuum arithmetice progredientium formatarum. NAASP 1794, t. XII, 1801, p. 125—144 (11.I 1796).
50. Recherches sur quelques cas d'equilibre dans les fils parfaitement flexibles. NAASP 1794, t. XII, 1801, p. 145—164 (10.XI 1796).
51. De motu baculi super plano inclinato, cui insistit, descedentis. NAASP 1795—1796, t. XIII, 1802, p. 70—79 (23.II 1797).
52. Опыт теории о сопротивлении, причиняемом дорогами всякого рода четырехколесным и двухколесным повозкам с определением обстоятельств, при которых одне из сих повозок полезнее других. Акад. соч., выбр. из первого тома «Деяний Акад. наук», ч. 1. СПб., 1801, стр. 373—422.

    В Каталоге П. Фусса, IV (опубликованные работы) есть запись: Versuch einer Theorie des Widerstandes zwei- und vierrädrigen Fuhrwerke auf Fahrwegen jeder Art, mit Bestimmung der Umstände, unter welchen die einen vor den andern den Vorzug verdienen. Als eine Beantwortung der von den Königl. Dänischen Gesellschafte zu Kopenhagen für d. J. 1797 angegebenen Preisfrage, welche den ersten Preiserhalte hat. Kopenhagen, 1798.

    Пометка П. Фусса: «Отдельное сочинение, может быть как выдержка из Актов Королевского научного общества в Копенгагене» (ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 182).
53. Examen théorétique des revêtements à dos incliné et des revêtements à assises inclinées, proposés par quelques auteurs de fortification. NAASP 1795—1796, t. XIII, 1802, p. 80—100 (15.VI 1797).

    Теоретическое исследование о каменных одеждах. «Умозрит. исслед.», т. III. СПб., 1812, стр. 104—124.
54. De polygonis symmetrice irregularibus calculo simul inscriptis et circumscriptis. NAASP 1795—1796, t. XIII, 1802, p. 168—189 (19.IV 1798).

О симметрических неправильных многоугольниках, вписанных в круг и около круга описанных. «Умозрит. исслед.», т. IV. СПб., 1815, стр. 56—81.

55. Rapport sur la mémoire de Mr. l'Abbé Pizzati à Venise sous le titre: Dissertazione sulla trisezione dell'anglo, ossia del arco, colla piana geometrica etc. NAASP 1795—1796, t. XIII, 1802, Histoire, p. 36—37.
56. Démonstration de quelques théorèmes de géometrie. NAASP 1797—1798, t. XIV, 1805, p. 139—152 (4.VII 1799).
57. Recherches sur la sphère et le cylindre percés cylindriquement, et sur une infinité de manières de percer la sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable. NAASP 1797—1798, t. XIV, 1805, p. 213—231 (16.IV 1800).

    Исследования, относящиеся до шара и цилиндра, рассеченных цилиндрически, с показанием бесчисленного множества способов рассекать шар так, чтобы остаток его поверхности и толщины определялся геометрически. «Умозрит. исслед.», т. III• СПб., 1812, стр. 78—103.
58. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet. NAASP 1797—1798, t. XIV, 1805, p. 111—138.
59. Examen de l'ouvrage: Angulorum rectaque lineae trisectio et consectaria circuli quadratio, utrumque methodo planissima detexit J. N. Revay. NAASP 1797—1798, t. XIV, 1805, p. 49—52.
60. De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}dx\,(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem, ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur. NAASP 1799—1802, t. XV, 1806, p. 55—70 (24.VIII 1797).
61. Observationes circa ellipsin quadam prorsus singularem. NAASP 1799—1802, t. XV, 1806, p. 71—87 (19.IV 1798).

    Примечания на некоторый особенный эллипсис. «Умозрит. исслед.», т. I. СПб., 1808, стр. 101—117.
62. Solution d'un problème de mécanique relatif au vol des oiseaux. NAASP 1799—1802, t. XV, 1806, p. 88—115 (20.V 1799).

    Решение механического вопроса, относящегося до полета птиц. «Умозрит. исслед.», т. I. СПб., 1808, стр. 118—147.
63 Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium. Mém. 1803—1806, t. I, 1809, p. 88—117 (13.VI 1799).
64. Additamentum ad dissertationem, quam inscripsi: Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa, ra-

dium osculi spectantium. Mém. 1803—1806, t. I, 1809, p. 118—137 (13.X 1802).

65. Formularum quarundam differentialium angularum integratio. Mém. 1803—1806, t. I, 1809, p. 138—155 (9.I 1800).
66. De innumeris curvis circa punctum fixum describendis, a quibus quilibet angulus, in puncto illo formatus, aequales arcus abscindat. Mém. 1807—1808, t. II, 1810, p. 29—44 (11.III 1801).
67. Observationes nonullae circa resolutionem arcuum circularium. Mém. 1807—1808, t. II, 1810, p. 45—63 (2.V 1804).
68. De curvatura linearum in superficie sphaerica descriptarum. Mém. 1807—1808, t. II, 1810, p. 73—83 (21.I 1807).

    О кривизне кривых линий на поверхности шара описанных. «Умозрит. исслед.», т. II. СПб., 1810, стр. 3—14.
69. De la division d'un rhomboide en quatre parties égales par deux lignes droites qui se coupent à angles droites. Mém. 1809—1810, t. III, 1811, p. 65—74 (4.VII 1799).
70. Eclaircissement sur l'integration de l'equation differentielle $ydy + Pydx + Qdx = 0$, P et Q étant des fonctions de x. Mém. 1809—1810, t. III, 1811, p. 75—90 (8.III 1803).
71. Solution de quelques problèmes relatifs au développements des lignes courbes à double courbure. Mém. 1809—1810, t. III, 1811, p. 91—107 (15.VI 1804).

    Решение некоторых вопросов, относящихся до разверзания кривых линий двоякой кривизны. «Умозрит. исслед.», т. IV. СПб., 1815, стр. 82—96.
72. Demonstratio theorematum quorundam calculum integralium spectantium. Mém. 1811, t. IV, 1813, p. 205—220 (13.VIII 1806).
73. Speculationes analytico-geometricae. Mém. 1811, t. IV, 1813, p. 221—239 (27.I 1808).
74. Solutio problematis de inveniendis triangulis, quorum latera rectae bisecantes, perpendicula, ideoque et areae rationaliter exprimantur. Mém. 1811, t. IV, 1813, p. 240—252 (24.II 1808).
75. Disquisitiones novae de seriebus per cosinus angulorum multiplorum progredientibus. Mém. 1812, t. V, 1815, p. 115—147 (16.VIII 1809).
76. Solutio problematis calculum integralem spectantis. Mém. 1812, t. V, 1815, p. 177—186 (1.IV 1812).
77. De radio cruvedinis curvarum duplicis curvaturas, deque circulis osculantis positione facillime indagandis. Mém. 1813—1814, t. VI, 1818, p. 66—85 (2.V 1810)
78. Methodus facilior investigandi novas illas series, quibus Eulerus sinum et cosinum anguli multipli postremo exprimere docuit. Mém. 1813—1814, t. VI, 1818, p. 100—117 (11.VIII 1813).

79. Investigatio terminorum seriei ex datis productis quotcunque terminorum contiguorum. Mém. 1813—1814, t. VI, 1818, p. 118—132 (25.VIII 1813).
80. О циклоидах, эпициклоидах и гипоциклоидах и о других подобным образом рождающихся кривых линиях [49]. «Умозрит. исслед.», т. V. СПб., 1819, стр. 27—44 (14.VIII 1814).
81. О кривых линиях, зажигательными называемых. «Умозрит. исслед.», т. V. СПб., 1819, стр. 45—60 (4.I 1815).
82. Рассуждения о свойствах, отношении и употреблении гиперболических функций. «Умозрит. исслед.», т. V. СПб., 1819, стр. 61—72 (24.V 1815). Перев. с лат. П. Фусса.
De functionum hyperbolicarum origine, proprietatibus, relatione et usu. Mém., t. XI, 1830, p. 220—229 (16.V 1810).
83. Решение разных вопросов о состоянии равновесия обремененных связанных бревен, о силах состава и давлении на столбы, служащие подпорами. «Умозрит. исслед.», т. V. СПб., 1819, стр. 3—26 (11.X 1815), перевод с лат. П. Фусса.
84. De sphaeris osculantibus. Mém. 1815—1816, t. VII, 1820, p. 61—70 (9.VII 1806).
85. Recherches sur deux series dont la sommation a été proposée par la Société royale des sciences de Copenhague. Mém. 1815—1816, t. VII, 1820, p. 194—213 (12.VI 1816).
86. Supplementum ad dissertationem meam: Investigatio terminorum seriei ex datis productis terminorum contiguorum. Mém. 1815—1816, t. VII, 1820, p. 214—224 (30.X 1816).
87. Решение некоторых гидравлических вопросов касательно вытекания жидкостей из цилиндрических сосудов. «Труды АН», ч. 1. СПб., 1821, стр. 8—31 (24.IV 1816). Перев. с франц. и примеч. П. Фусса.
88. De cycloidibus in superficie sphaere descriptis. Mém. 1817—1818, t. VIII, 1822, p. 161—175 (20.VIII 1817). О циклоидах, на поверхности шара описанных. «Труды АН», ч. 1. СПб., 1821, стр. 32—50 (18.II 1818). Перев. с лат. П. Фусса.
89. Disquisitio statica super casu quodam aequilibrii. Mém. 1817—1818, t. VIII, 1822, p. 46—53 (27.IX 1809).
90. Problemata de curvis rectificabilibus algebraicis in superficie corporum rotundorum descriptis. Mém. 1817—1818, t. VIII, 1822, p. 198—206.
91. De descensu gravium super arcu lemniscatae. Mém. 1819—1820, t. IX, 1824, p. 91—100 (21.VI 1815).

---

[49] В оглавлении к V тому «Умозрительных исследований» пропущена.

92. Problematis geometricae nec non aequationum differentialis aliquot difficilliorum resolutio. Mém. 1819—1820, t. IX, 1824, p. 115—124 (4.XI. 1818).
93. Solutio problematis quorundam ad analysin Diophanteam spectantium. Mém. 1819—1820, t. IX, 1824, p. 151—160 (31.V 1820).
94. Demonstration de quelques théorèmes arithmétiques. Mém., t. X, 1826, p. 27—36 (13.IX 1809).
95. Summatio quorundam serierum. Mém. 1821—1822, t. X, 1826, p. 115—124 (7.III 1821).
96. De valore formularum $\int x^n dx e^{-\alpha x} \sin \beta x$ et $\int x^n dx e^{-\alpha x} \cos \beta x$, si integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ usque extendantur. Mém., t. XI, 1830, p. 238—245 (22.VIII 1810).
97. Demonstratio theorematum quorundam polygonometricorum. Mém., t. XI, 1830, p. 209—219 (28.XI 1810).
98. Summatio duarum serierum. Mém., t. XI, 1830, p. 230—237 (13.VIII 1817).
99. Resolutio duarum aequationum differentialium secundi gradus. Mém., t. XI, 1830, p. 258—267 (24.II 1819).
100. Expositio methodi concinnae inveniendi cujuscunque progressionis terminum tam generalem quam summatorium, per differentias continuas. Mém., t. XI, 1830, p. 246—257 (24.X 1821).
101. Demonstration d'un théorèm général relatif au calcul integral. Mém., t. XI, 1830, p. 268—273 (9.X 1822).
102. De curvis algebraicis quorum singuli arcus arcubus circularibus aequantur. Mém., t. XI, 1830, p. 274—279 (20.VIII 1823).
103. Integratio aequationum differentialium: $ydx - xdy = a\sqrt[n]{dx^n + dy^n}$ et $xy(dx^2 - dy^2) - dxdy(x^2 - y^2 + a^2) = 0$. Mém., t. XI, 1830, p. 280—286 (2.III 1825).
104. De integratione aequationis differentialis: $vdv + v(3y + f)dy + (y^3 + fy^2 + gy + h)dy = 0$. Mém., t. XI, 1830, p. 287—293 (23.VIII 1826).
105. Formularum quarundam integralium duplicatarum integratio. Mém., t. XI, 1830, p. 294—304 (23.VIII 1826).
106. Tentamen solutionis problematis geometrici maxime ardui. Mém., t. XI, 1830, p. 314—320 (23.VIII 1826).
107. Formularum integralium irrationalium reductio ad rationalitatem. Mém., t. XI, 1830, p. 305—313 (23.VIII 1826).
108. Démonstrations de quelques propriétés du cercle. ЛОААН СССР, ф. 40, оп. 1, № 52 (рукопись). **Доказательства нескольких свойств круга. «Математика в школе», № 5, 1965, стр. 59—66. Перев. с франц. и подготовил рукопись к изданию В. И. Лысенко.**

109. Начальные основания алгебры, выбранные из «Алгебры» знаменитого Эйлера Николаем Фуссом. В пользу воспитанников 1-го Кадетского корпуса. СПб., При оном же Корпусе, 1821 (317 с.). 1-е изд. на франц. яз. 1783 г., 1-е русск. изд. 1798 г.

110. Начальные основания высшей геометрии, в пользу благородных воспитанников 1-го Кадетского корпуса, сочиненные г. статским советником и кавалером Николаем Ивановичем Фуссом, Санктпетербургской императорской Академии наук, также Королевской Берлинской, Штокгольмской... членом. Перев. с француз. СПб., при 1-м Кадетском корпусе, 1804 (74 с.).

111. Начальные основания плоской тригонометрии, выбранные из тетрадей г. статского советника и кавалера Николая Ивановича Фусса, сообщавшего их благородным воспитанникам 1-го Кадетского корпуса в бытность его там профессором, и изданное в пользу оного Корпуса. СПб., при 1-м Кадетском корпусе, 1804 (66 с.).

112. Начальные основания чистой математики, сочиненные Николаем Фуссом. Ч. 1—3, СПб., 1810—1812 (3 т.). Часть 1, содержащая начальные основания алгебры, извлеченные из оснований «Алгебры» Эйлера; 1-е изд. 1810 г., 2-е изд. 1820 г.

113. Часть 2, содержащая начальные основания геометрии; 1-е изд. 1811 г., 2-е изд. 1819 г.

114. Часть 3, содержащая: 1) приложение алгебры к геометрии; 2) плоскую тригонометрию; 3) конические сечения; 4) основания дифференциального и интегрального исчисления; 1-е изд. 1812 г., 2-е изд. 1817 г. Все три части были переизданы еще раз в 1823 г.

Научно-популярные журнальные статьи и заметки Н. И. Фусса

1. Известие о девятой планете Палладе. «Прибавл. к Технолог. журн. Академией наук в 1806 г. изданному» (2 части, 1815), ч. I, 1815, стр. 16—19.
2. О поперечнике новой планеты, Церерою называемой. Там же, стр. 27—30.
3. О времени обращения новой планеты Цереры. Там же, стр. 30—32.
4. Соответственные наблюдения над воздушным явлением, называемым падающие звезды. Там же, стр. 36—39.
5. Продолжение известий о новых планетах. Там же, ч. II, 1815, стр. 276—279.

Для «Продолж. Технолог. журн.» Н. Фусс написал 24 статьи научно-популярного характера на разнообразные темы: Новый способ мыть белье. О стиральных машинах. Об опреснении морской воды. Новый способ очистки зараженного воздуха. О хлебопашестве и искусстве делать хлеб. О барометрах. О телескопах. О мелких поделках. Простой способ, чтобы свеча горела яснее. О выведении жирных пятен. О зельцерской воде. О длительном сохранении на море пресной воды свежею и чистою. О полировании и лакировании изделий из дерева и других материалов. О клее Девилля. О средстве пропорашивать всякие узоры на материях для вышивания. Об искусственных цветах из китовых усов и шляпах из ивовых прутьев. О несгораемом лаке. О лекарственных и пищевых свойствах целого ряда растений и др. (см. [23, т. II], раздел «Разные известия»).

Каталог неопубликованных рукописей Н. И. Фусса, составленный его сыном академиком П. Н. Фуссом в 1826 г.

(ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 182)

I. Неизданные работы

1—4 — изданы в 1830 г. (представлены 23.VIII 1826) [Ф. 105, 106, 107, 108].

5. De aequilibrio corporum perfecte flexibilium.
6. Demonstration facile d'une théorème important d'analyse.
7. Investigatio factorum trinomialium formulae $fe^x - 2g + he^{-x}$.
8. Teoria motus corporum flexibilium ad motum vibratorium chordarum applicata, ubi theoria Euleriana breviter et dilucide explicatur.
9. De equilibrio et motu laminarum elasticarum.
10. Démonstrations de quelques propriétés du cercle [издана в 1965 г., Ф. 108].
11. Démonstration des formules, que Mr Lambert a données dans ses remarques sur la force de la poudre et la resistance de l'aire dans les 10 dernieres paragraphes.
12. De proprietate quadam circuli ad alias curvas translata (ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 54).
13. Solutio problematum quorundam isoperimetricorum.
14. In dissertationem L. Euleri: Solutio trium problematum difficilliorum ad methodum tangentium inversam pertinentium (ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 43).

15. De viribus centripetis quibus corpus sollicitatum per datam lineam curvam promovetur.
16. De summatione serierum potestatum quemadmodum olim a Jacobo Bernoullio in Arte conjectandi pag. 97 singulari ratiocinio ex theoria combinationum est investigata, ubi origo numerorum Bernoullianorum indicabitur.
17. Démonstration de deux théorèmes de géomètrie (ЛОААН, ф. 40, оп. 1, № 45).
18. Integratio formulae $\frac{dx}{1-\ln x}$ ab $x=0$ ad $x=1$ extensa per seriem.
19. De figura vasis ex quo aqua eadem perpetuo celeritate effluat.
20. Constructions faciles de quelques problèmes de Viète.

II. Смесь (Mélanges)

1-й пакет

1. Remarques et examens de plusieurs méthodes de trisections et multisections de l'angle.
2. Mélanges mathématiques.
3. Examen critique et rapport sur un mémoire de concours: sur la pression des terres et sur la force des revêtements.
4. Résumé des méthodes employées par différents auteurs pour déterminer la poussée des terres contres les revêtements.
5. Eclaircissemens et expériences accoustiques sur le son des flutes.
6. Untersuchung der Umstände, unter welchen es vortheilhafter ist Erde, Steine, Kalk, Schütt, Torf, Dünger u. dgl. mit Wagen, als mit Schubkarren fahren zu lassen.
7. Examen d'un mémoire de Mr Platzmann: Nova solutio aequationnum tertii gradus.
8. Examen d'une machine projetée par la S^{r} Kochkine pour la fabrique d'Alexandroffka.
9. Versuch den Drück der Erde auf Füttermauern und die Kraft zu bestimmen mit welcher diese ihnem wiederstehen.
10. Calculs sur la force de la machine à feu de Mr Baird et sur la résistance des mécanismes qui agissent par cette machine.
11. Integrationes.
12. Examen d'un ouvrage du marchand Buikoff de Krementschouk.
13. Examen du modèle de la soffite projetée par l'architecte Woronikhine pour l'Eglise de Kazan.
14. Examen des inventions et mémoires du comte S. de Roumianzoff.
15. Calculs sur les aérostates.
16. Examen de l'effet de la grande roue hydraulique construite à Alexandrofka par Mr Poidebard.

17. Extrait de la correspondence physique et mathématique de L. Euler.

2-й пакет

18. Du dénombrement des boulets.
19. De aequatione sev correctione meridiei.
20. Problèmes de geométrie pratique.
21. Sur la découverte de la bousole et son époque.
22. Schèmes pour partager en deux également une quantité quelconque de fluide, moyennant trois vases dont aucun ne contient cette moitié.
23. Démonstration qu'il soit impossible de trouver des nombres dont la somme fasse 100 et dans les quels les 9 chiffres de notre système décadique ne se rencontrassent qu'une fois chacun.
24. Problèmes relatifs à la theorie des nombres, 2 cahiers.
25. Mélanges mathématiques.
26. Problèmes relatifs aux maxima et minima.
27. Geometrica 1.2.3.
28. Constructions de triangles de base et hauteur données avec certaines propriétés des autres côtés.
29. Problèmes de Viète.
30. Application de la trigonométrie sphérique à la géographie et à l'astronomie.
31. Application à la navigation et au pilotage.

3-й пакет

32. Du nivellement.
33. Essai d'une théorie de la résistence qu'eprouve la prouve d'un vaisseau dans son mouvement (pièce, qui a remporté la prix de l'acadéime de Paris).
34. Rapport sur une machine à feu.
35. Rapport sur un mémoire du C^{te} de Tredern.
36. Examen d'une hie nouvelement inventée.
37. Rapport fait à la Société libre économique.
38. Rapport sur des mémoires envoyés pour concourir au prix.
39. Autre rapport sur le même sujet.
40. Quatre cahiers de mélanges mathématiques.
41. Recherches sup la dérangement d'une comète qui passe près d'une planète (Cette pièce a remporté un prix).
42. Calcul relatifs à un projet de pensionner les directeurs, les inspecteurs et les maitres émérits des gymnases etc.
43. Mémoires concernants différents objets de dioptrique.
44. Mémoire sur les fractions continues.

4-й пакет

45. Problèmes de tactique.
46. Sur le mouvement des planètes et de comètes.
47. Problèmes de la méthode inverse des tangentes.
48. Problèmes de haute géométrie.
49. Eléments de sections coniques (imprimés in Russe).
50. Eléments de calcul differentiel et integral (imprimés ln Russe).
51. Trigonométrie.
52. Плоская тригонометрия.

III. Неизданные лекции

1. Cours d'architecture.
2. Elements de méchanique.
3. Mechanica.
4. Trigonométrie sphérique.
5. La même en latin.
6. La même en ' allemand.
7. Hydrostatique et hydrodynamique.
8. Cours d'artillerie.
9. Cours de fortification.

IV. Пакет представленных и по большей части напечатанных мемуаров

V. Пакет примеров для занятий по алгебре

VI. Каталог рукописей Эйлера (26 названий)

Неопубликованные рукописи Н. И. Фусса, не включенные П. Н. Фуссом в каталог

1. Essai sur les principales propriétes des lignes courbes les plus remarquables, leur histoire et de leur generation. ЛОААН СССР, ф. 40, оп. 1, № 34, 14 л. Представлена в ноябре 1780 г.
2. Investigatio radii circuli polygono cuicunque inscripti, cujus data sunt latera unacumquolibet puncto contactus. ЛОААН СССР, ф. 40, оп. 1, № 40, 21 л. Представлена 18 августа 1824 г. и прочитана на заседании Конференции 25 мая 1825 г.

Список трудов П. Н. Фусса

1. Примечания и дополнения к XII главе 2-го тома «Алгебры» Эйлера касательно решения уравнений третьей степени. «Труды АН», ч. I, 1821, стр. 51—63 (30.X 1816).

2. De curva quadam transcendente einsque proprietatibus. Mém. 1817—1818, t. VIII, 1822, p. 147—160 (читано 23. IV 1817).
3. О параболах высших порядков. «Труды АН», ч. III, 1823, стр. 40—55.
4. Quam differat longitudo arcus curvae ab asymtota, utraque in infinitum usque protensa inquiritur. Mém. 1819—1820, t. IX, 1824, p. 175—189 (25.X 1820).
5. Solution problematum aliquot ex geometria sublimiori. Mém. 1821—1822, t. X, 1826, p. 37—44 (30.IX 1818).
6. Solution de quelques problèmes, relatifs à la méthode inverse des tangentes. Mém. 1821—1822, t. X, 1826, p. 130—150 (11.XII 1822).
7. [*Fuss P.*, *Collins Ed.* Notice biographique. Avec 1 portr.] Recueil des actes de la seance publique de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, tenu le 29 decembre 1840. St.-Pétersbourg, 1841, p. 3—12.
8. Coup d'oeil historique sur le dernier quart de siècle, de l'existence de l'Académie imperiale des sciences de St.-Pétersbourg. Discours prononcé dans la séance solennelle de cette Académie, tenue en l'honneur de son Président le 12 (24) janvier 1843. St.-Pétersbourg, 1843 (28 p.).
9. Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-ème siècle. Préc. d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits... Par P.-H. Fuss. T. 1—2. St.-Pétersbourg, 1843.
10. [*Фусс П.*, *Буняковский В.*]. Разбор сочинения г. Татаринова под заглавием: «Начальные основания геометрии», составленный гг. академиками Фуссом и Буняковским. XII присужд. учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1843 г. СПб., 1843, стр. 105—127.
11. Notice sur la décuverte d'ouvrages inédits d'Euler.— Bull. de la cl. phys.-math. de l'Acad. des Sc., t. III, 1845, N 5, Notes, col. 74—79 (читано 8.III 1844).
12. [*Фусс П.*, *Буняковский В.*]. Мнение гг. академиков Фусса и Буняковского об арифметической машине, изобретенной Г. З. Слонимским. XIV присужд. учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1845 г. СПб., 1845, стр. 77—85.
13. Registre alphabétique des noms des auteurs, dont les pièces sont insérées dans les différents recueils publiés par l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg depuis sa fondation jusqu'à l'an 1846. St.-Pétersbourg, 1846 (80 p.).
14. [*Фусс П.*, *Буняковский В.*]. Разбор сочинения г. профессора Г. Бруна, под заглавием «Руководство к политической арифме-

тике», составленный гг. академиками Фуссом и Буняковским. XV присужд. учрежденных П. Н. Демидовым наград. СПб., 1846, р. 121—128.

15. Nachricht über Sammlung uncditer Handschriften Leonhard Euler's und über die von der Academie begonnene Gesamtsausgabe seiner kleineren Schriften (zugleich als Vorrede zu L. Euleri Commentationes arithmeticae collectae).— Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sci., t. VII, 1849, Notes, N 22, 23, col. 337—368 (читано 15.XII 1848).
16. Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae. Petropoli, 1849, t. I et II.
17. Supplément à notre rapport relatif à la succession littéraire d Léonard Euler.— Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sci., t. IX, 1851, N 22, Notes, col. 337—346 (читано 27.VI 1851).
18. Compte rendu de l'Academie imperiale des sciences de St.-Pétersbourg...[50] St.-Pétersbourg, 1856.

Работы Е. Н. Фусса

1. Geographische, magnetische und hypsometrische Bestimmungen, abgeleitet aus Beobachtungen auf eine Reise, die in den Jahren 1830, 1831 und 1832 nach Sibirien und dem Chinesischen Reiche, auf Kosten der Keiserl. Academie der Wissenschaften unternommen wurde. Mém., VI Sér., 1-re partie, sc. math. et phys., t. I (III), livr. 1, 1835, p. 59—128.
2 Ueber eine Gleichung Biot's für die Refractionsdifferenz bei gegenseitigen Zenithdistanz-Beobachtungen. Bulletin scientifique..., t. IV, 1838, p. 273—277 (читано 7.IX 1838).
3 Bestimmung der Refraction und Höhe zweier und mehrerer unbekannter Berggipfel durch Beobachtungen von zwei Standpunkten aus, deren relative Erhebung bekannt ist. Bulletin scientifique, t. V, 1839, p. 104—108 (7.XII 1838).
4. Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere mit allerhochster Genehmigung auf Veranstaltung der Keiserlichen Akademie der Wissenschaften in den Jahren 1836 und 1837... St.-Petersburg, 1849.

---

[50] Составил 22 отчета (I—XXII) о присуждении Демидовских премий (1832—1853). Написал четыре опубликованных отчета о деятельности академии за 1823 —1826, 1851, 1852 и 1853 гг. (см. [93, II, стр. 399]).

Литература

1. «Академическая типография. 1728—1928». Л., 1928.
2. «Академия наук СССР. Очерки по истории Академии наук. Физико-математические науки». М. — Л., 1945.
3. *Антонов А. Н.* Первый кадетский корпус. Изд. 2. СПб., 1906.
4. *Ахматов В. В.* Виктор Егорович Фусс. Типогр. Морского министерства. Пг., 1916.
5. «Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов», т. I, Л., 1933; т. II, М. — Л., 1946.
6. *Бобынин В. В.* Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века. «Журнал Министерства народного просвещения», ч. XII, СПб., 1907, стр. 53—113; ч. XIII, СПб., 1908, стр. 1—50.
7. *Веселаго Ф.* Очерки истории Морского кадетского корпуса. СПб., 1852.
8. *Веселовский К. С.* Историческое обозрение трудов Академии наук. СПб., 1865.
9. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. Перев. с нем. под ред. А. П. Юшкевича. М., 1960.
10. *Гнеденко Б. В.* Михаил Васильевич Остроградский. М., 1952.
11. *Граве Д. А.* Об основных задачах математической геории построения географических карт. СПб., 1896.
12. *Григорьян А. Т.* Леонард Эйлер. «Труды Ин-та истории естествознания и техники», т. 17. М., Изд-во АН СССР, 1957.
13. *Динзе О. В.* и *Шафрановский К. И.* Математика в изданиях Академии наук, 1728—1935 гг.. М.—Л., 1936.
14. *Идельсон Н. И.* Из переписки П. С. Лапласа, К. Ф. Гаусса, Ф. В. Бесселя и других с академиком Ф. И. Шубертом. «Научное наследство», т. I. М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 771—831.
15. «История математики (Математика XVIII столетия)», т. 3. М., «Наука», 1972.
16. «История Академии наук СССР», т. I (1724—1803). М. — Л., 1958.
17. *Каврайский В. В.* Математическая картография. М. — Л., 1934.
18. *Каган В. Ф.* Лобачевский (1792—1856). М.— Л., 1948.
19. *Ключевский В. О.* Курс русской истории, т. IV—V. М., 1958.
20. *Князев Г. А.* Краткий курс истории Академии наук СССР. М. — Л., 1945.
21. *Кольман Э.* Вклад Эйлера в развитие математики в России. «Вопросы истории естествознания и техники», 1957, вып. 4, стр. 15—25.
22. [*Крылов А. Н.*]. Леонард Эйлер. Доклад акад. А. Н. Крылова, прочтенный на торжественном заседании АН СССР 5 октября 1933 г. Л., 1933.
23. [*Крылов А. Н.*]. Письма К. Ф. Гаусса в С.-Петербургскую Академию наук. «Архив истории науки и техники», вып. III. Л., Изд-во АН СССР, 1934, стр. 209—238.
24. [*Кубасов И. А.*]. Каталог изданий императорской Академии наук. Ч. I. Периодические издания, сборники, отчеты и серии. На русском и иностранных языках. С 1726 по 1 июня 1912 г. СПб., 1912; ч. III. Отдельные издания на иностранных языках.

С 1726 по 1 марта 1916 г. Пг., 1916; ч. II. Отдельные издания на русском языке. С 1726 г. по 1 июня 1915 г. Пг., 1915.

25. *Ливотов С. Н.* Оглавления сочинений, заключающихся в 63 книгах под названием «Труды Вольного экономического общества». СПб., 1812.
26. *Лысенко В. И.* Работы по полигонометрии в России XVIII в. Историко-матем. исслед., вып. 12. М., 1959, стр. 161—178.
27. *Лысенко В. И.* О неопубликованных рукописях по геометрии академиков А. И. Лекселя и Н. И. Фусса. «Вопросы истории естествознания и техники», вып. 9. М., Изд-во АН СССР, 1960, стр. 116—120.
28. *Лысенко В. И.* О работах петербургских академиков А. И. Лекселя, Н. И. Фусса и Ф. И. Шуберта по сферической геометрии и сферической тригонометрии. «Труды Ин-та истории естествознания и техн.», т. 34. М., Изд-во АН СССР, 1960, стр. 384—414.
29. *Лысенко В. И.* О работах академиков Н. И. Фусса и Ф. И. Шуберта по математической картографии. «Вопросы истории естествознания и техники», вып. 11. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 75—78.
30. *Лысенко В. И.* Из истории первой петербургской математической школы. «Труды Ин-та истории естествознания и техники», т. 43. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 182—205.
31. «Леонард Эйлер (1707—1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти». М.— Л., Изд-во АН СССР,1935.
32. «Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения». М., Изд-во АН СССР, 1958.
33. *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. М. — Л., 1951.
34. *Маркушевич А. И.* Работы Гаусса по математическому анализу.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс. (Сборник статей к 100-летию со дня смерти). М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 145—216.
35. *Модзалевский Б. Л.* Список членов императорской Академии наук (1725—1907). СПб., 1908.
36. *Модзалевский Б. Л.* Сорок шесть литографированных портретов членов императорской Российской академии. СПб., 1911.
37. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или Книга об арифметическом синтезе и анализе. М., 1948. Перев. статьи и коммент. А. П. Юшкевича.
38. *Орбек М. А.* Задача Кастильона. М., 1913.
39. *Отрадных Ф. П.* Математика XVIII в. и академик Леонард Эйлер. Л., 1954.
40. *Пекарский П. П.* История императорской Академии наук в Петербурге, тт. 1—2. СПб., 1870—1873.
41. *Петров П. Ф.* Столетие военного министерства, т. X. Гл. упр. воен.-учеб. завед., ч. I и II, 1902.
42. *Попов Г. Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. Изд. 2. М. — Л., 1938.
43. *Порецкий П. С.* Исторический очерк развития сферической тригонометрии. Казань, 1887.
44. «Протоколы заседаний конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 г.», тт. 1—4. СПб., 1897—1911.
45. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. М., 1956.

46. *Розенфельд Б. А.* Геометрические преобразования в работах Эйлера. «Историко-матем. исслед.», вып. 10. М., 1957, стр. 371—422.
47. «Русский биографический словарь», т. 21 (Фабер — Цявловский). СПб., 1901.
48. «Рукописные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР», т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962.
49. *Смирнов В. И.* Леонард Эйлер. «Вестник АН СССР», т. 112, № 6, 1957.
50. *Старостин Ф. А.* Роль русских и советских ученых в развитии математической картографии. «Вопросы географии», сб. 22. М., 1950.
51. *Сухомлинов М. И.* История Российской академии, вып. 1—8. СПб., 1874—1888; вып. 2, 1875, IV, стр. 3—157; вып. 3, 1876, II, стр. 2—65, 287—316, 264—286, 434—453.
52. «Ученая корреспонденция Академии наук XVIII века. Научное описание». Под общей ред. Д. С. Рождественского. Сост. И. И. Любименко. М. — Л., 1937.
53. *Фель С. Е.* Картография России XVIII в. (докт. дисс.). М.,1951.
54. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, изд. 4. М., 1959.
55. *Ходнев А. И.* История императорского Вольного экономического общества с 1765 до 1865 г. СПб., 1865.
56. *Чернов С. Н.* Леонард Эйлер и Академия наук.— В кн.: Леонард Эйлер. (Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти). М. — Л., 1935, стр. 163—238.
57. *Шемиот В. П.* Систематический методический указатель статей..., ч. II. СПб., 1875.
58. *Шаль М.* Исторический очерк происхождения и развития геометрических методов, т. I—II. М., 1883.
59. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых, т. I. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1936.
60. *Эйлер Л.* Избранные картографические статьи. Перев. Н. Ф. Булаевского, под ред. Г. В. Багратуни. М., 1959.
61. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление, т. I. Перев. с лат. С. Я.Лурье и М. Я. Выгодского. М., 1956; т. II, перев. с лат. И. Б. Погребысского. М., 1957.
62. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. М., 1955.
63. *Юшкевич А. П.* Академик С. Гурьев и его роль в развитии русской науки. «Труды Ин-та истории естествознания», т. 1. М., 1947, стр. 219—268.
64. *Юшкевич А. П.* Эйлер и русская математика в XVIII в. (Из истории первой петербургской математической школы). «Труды Ин-та истории естествознания», т. 3. М., 1949, стр. 45—116.
65. *Юшкевич А. П.* Математика и ее преподавание в России в XVII—XIX вв. «Математика в школе», № 1—6, 1947; № 1, № 3, 1949.
66. *Юшкевич А. П.* Главы по математике.— В кн.: «История естествознания в России», т. 1, ч. 1. М., 1957, стр. 26—48, 215—272; т. 1, ч. 2. М., 1957, стр. 33—89.
67. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 г. М., «Наука», 1968.
68. *Baltzer R.* Die Elemente der Mathematik, T. II. 4 Aufl. Leipzig, 1874.

69. *Bochow K.* Eine einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke. Magdeburg, 1895—1896.
70. *Boyer C. B.* History of Analytic Geometry. New York, 1956.
71. *Braunmühl A.* Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, T. 2. Leipzig, 1903.
72. *Cantor M.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. T. IV. Leipzig, 1908.
73. *Cesaro E.* Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig, 1901.
74. «Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, herausgegeben von naturforschenden Gesellschaft in Basel», T. 1. Basel, 1955.
75. *Fueter R.* Leonard Euler. Basel, 1948.
76. *Fuss P. H.* Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-ème siècle, t. I—II. St.-Pétersbourg, 1843.
77. *Gudermann Ch.* Analytische Sphärik. Köln, 1830.
78. *Heger R.* Analytische Geometrie auf der Kugel. Leipzig, 1908.
79. *Lambert J. H.* Deutscher Gelehrten Briefwechsel, Bd. IV. Abth. 2. Berlin, 1784.
80. *Loria G.* Specielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Leipzig, 1902.
81. *L' Huilier S.* Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilignes..., Paris, 1789.
82. *Magnus L. J.* Théorèmes sur l'hyperboloide à une nappe et sur la surface conique de seconde ordre. «Ann. math. pures et appl.», t. XVI, 1825—1826, p. 33—39.
83. *Möbius A. F.* Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Leipzig, 1846.
84. *Müller F.* Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigkeit der historisch wichtigen Schriften. Leipzig — Berlin, 1909.
85. *Pasquier L. G.* Léonard Euler et ses amis. Paris, 1927.
86. *Poggendorff J. G.* J. C. Poggendorff's bibliographisch-litterarisches Handwörterbuch..., Berlin, Bd. I, II, 1863.
87. *Rudio F.* Die Eulerausgabe. «Vierteljahresschr. naturforsch. Ges.», 52—71. Zürich, 1907—1926.
88. *Rudio F.* Leonhardi Euleri opera omnia. Ser. 1, T. I, Vorwort, Leipzig — Berlin, 1911; Ser. 1, T. 2, Vorwort, Leipzig — Berlin, 1915.
89. *Speiser A.* Leonhardi Euleri opera omnia. Ser. 1, T. 26—29, Vorwort, Lausanne, 1953—1956.
90. *Spiess O.* Leonhard Euler. Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des XVIII Jahrhunderts. Frauenfeld—Leipzig, 1929.
91. *Strube O.* Éloge de P. H. Fuss. St.-Pétersbourg, 1857.
92. *Suter H.* Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 2. Teile. Zürich, 1873.
93. «Tableau général méthodique et alphabétique...», t. 1, St.-Pétersbourg, 1872 (составил В. П. Шемиот).
94. *Wileitner H.* Spezielle ebene Kurven. Leipzig, 1908.
95. *Wolf R.* Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz, t. IV. Zürich, 1862.
96. *Zacharias M.* Elementargeometrie und elementare nicht-euclidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschlüss ihre Anwendungen. Bd. 3, Teil 1, Häfte 2, Hefte 5—6, S. 862—1162. Leipzig, 1914—1931.

Список сокращений

CASP — «Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae».

NCASP — «Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae».

AASP — «Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae».

NAASP — «Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae».

Mém. — «Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg».

«Умозрит. исслед.» — «Умозрительные исследования императорской Санктпетербургской академии наук».

«Прибавл. к Технолог. журн.» — «Прибавление к Технологическому журналу, Академией наук в 1806 г. изданному». 2 части, 1815.

«Продолж. Технолог. журн.» — «Продолжение Технологического журнала, состоящее из ученых известий, имеющих предметом приложение учиненных в науках открытий к практическому употреблению». 11 томов, 1806—1826.

«Труды АН»—«Труды Санкт-Петербургской императорской академии наук».

Журнал Крелле.—«Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin.

ЛОААН — Архив Академии наук СССР, Ленинградское отделение.

Основные даты жизни Н. И. Фусса

19(30) января 1755 г.	Родился Н. И. Фусс.
1772 г.	Окончил университет в Базеле
8 июля 1772 г.	Переехал в Петербург.
15 января 1774 г.	Опубликовал первую научную работу
15 января 1776 г.	Избран адъюнктом Петербургской академии наук.
13 февраля 1783 г.	Избран действительным членом Петербургской академии наук
30 октября 1783 г.	Прочитал «Похвальную речь покойному Леонарду Эйлеру».
1783 г.	Начал преподавать в Сухопутном кадетском корпусе (преподавал до 1803 г.)
1793 г.	Избран почетным членом Берлинской академии наук.
1796 г.	Начал преподавать в Морском кадетском корпусе (преподавал до 1803 г.).
1797 г.	Избран почетным членом Стокгольмской академии наук.
1799 г.	Принял русское подданство.
17 сентября 1800 г.	Избран конференц-секретарем Петербургской академии наук (с 1803 г. должность эта называлась «непременный секретарь»; он занимал ее до конца жизни).
1800 г.	Избран секретарем Вольного экономического общества.
1802 г.	Назначен членом комитета по пересмотру уставов Академии наук и Академии художеств.
1802 г.	Избран почетным членом Виленского университета.
1803 г.	Назначен членом Главного правления училищ.
1805 г.	Назначен членом Совета военных учебных заведений.
1808 г.	Избран почетным членом Мюнхенской (Баварской) академии.
1811 г.	Избран почетным членом Харьковского университета.
1812 г.	Избран почетным членом Бостонской академии.
1816 г.	Избран почетным членом Падуанской академии.
1819 г.	Избран почетным членом Московского университета.
1823 г.	Избран почетным членом Туринской академии.
23 декабря 1825 г. (4 января 1826 г.)	Умер в Петербурге.

Указатель имен

Аделунг Ф. П. 81
Александр I 10, 87, 90
Анна Иоанновна 22
Анри 83
Антинг Ф. 17
Аполлоний 32, 39

Базен П. 86
Бакунин П. П. 9, 25, 83
Бальмен де 22
Барсуков Н. 87
Бауэр 87, 88
Безу 71
Беляев И. И. 65
Берд 84
Бернулли Д. 13, 14, 19, 66, 80
Бернулли Я. 53
Бобринцов 81
Боде 70
Бонатти Т. М. 43
Брауншвейгский, герцог 80
Брокгауз Ф. А. 26
Броневский 22
Буняковский В. Я. 16

Валльнер 57
Вега Г. 66
Виет Ф. 39, 88
Вилькицкий А. И. 30
Висковатов В. И. 83, 85
Вишневский В. 29
Воронихин А. Н. 92
Вуд 87

Галлей 68
Гассенди П. 65
Гаусс К. 38, 57, 80, 81
Герман Я. 43
Голицын 89
Голланд Г. 39
Головин М. Е. 14, 15, 19, 83
Гримальди Ф. М. 65
Гудерман Х. 37, 38
Гурьев С. Е. 11, 23, 32, 83—85, 87, 88

Даламбер 40
д'Антольм 65
Дашкова Е. Р. 9
Девис Т. 37, 38
Декарт Р. 43
Домашнев С. Г. 8, 9, 83
Дю Фей 65

Евклид 72, 91
Екатерина II 8, 9
Ефимов Н. В. 72
Ефрон И. А. 26

Загоскин Н. П. 90
Зильбершлаг Г. 67

Иноходцев П. Б. 14, 70

Каган В. Ф. 71, 78, 79, 89—91
Кантон 65
Кантор М. 57
Карре 85
Кассини 68
Кастильон Д. Ф. 39, 85
Кеджори Ф. 52, 53
Кеппен 27
Кестнер 13
Клапрот 81
Клюгель 70, 85
Ковальский 85
Козицкий Г. В. 7
Коллинс Э. Д. 32, 83, 87
Кондорсе 9
Котельников С. К. 7—9, 14, 32, 83
Кошкин 92

Крамер 85
Крафт В. Л. 14, 15, 23
Крашенинников С. П. 7
Крелле 33, 36, 37
Кроузе де 65
Круг Ф. И. 82
Крылов А. Н. 80
Кулибин И. П. 65, 83
Куракин 81

Лагранж 38, 39, 45
Лаир де 65, 85
Лакайль де 69
Лакруа 75
Ламберт И. Г. 38, 39
Леви Б. 37
Лексель А. И. 13—15, 17, 32, 36, 38, 69
Леман И. 26
Ле Мер 65
Лепехин И. И. 9
Лерберг А. Х. 82
Линдеман Ф. 50
Лиувилль 43
Лобачевский Н. И. 88—91
Ломоносов М. В. 7, 8, 15, 65
Лопиталь 66
Лория Дж. 43
Лоси 88
Люилье С. 32, 83

Магницкий Л. М. 89—91
Магнус Л. И. 37
Майер Хр. 68
Маркушевич А. И. 53
Маскелайн 68
Маскерони Л. 43
Маюров (Маиоров) А. И. 85, 86
Мёбиус А. 36
Медлер 69
Менелай 40
Мичелл 65
Монье 68
Муравьев 23
Мышковский 81

Найт 65
Нартов А. А. 26
Нетто Е. 59
Николаи А. Л. 10, 84
Новосильцов Н. Н. 10, 25, 85
Ньютон И. 39, 43, 70, 85

Озерецковский Н. Я. 9
Орлов В. Г. 8

Павел I 9, 10
Паевский В. В. 20
Папп 32, 39
Петр I 22
Петров В. 85
Пиццати 88
Платцман 91
Погодин М. П. 87
Пойдебард 84
Понселе Ж. В. 34
Попов Н. И. 7
Потоцкий 23
Протасов А. П. 7
Прудников В. Е. 22, 87

Разумовский К. Г. 8
Ревей Ж. Н. 88
Резанов М. 75, 85
Рибас 83
Риккати Я. 47
Риман 38
Роберваль 85
Рого 65
Роммель 82
Роумен А. ван 39
Румовский С. Я. 7, 14, 25, 71, 83, 84

Саблер Е. Е. 30
Савич А. Н. 30
Саладини Д. 43
Себржинский В. С. 87
Севастьянов Я. 86, 87
Секки 69
Серре Ж. А. 43
Симсон В. 39
Софронов М. 7, 14
Струве В. Я. 29

Тауберт И. 26
Теплов Г. Н. 26
Тредерн 84
Тредиаковский В. К. 7
Тышкевич 88

Уваров С. С. 25, 27

Фонтан Г. 63
Фонтен 84

Френ Х. М. 81
Фусс В. Е. 30
Фусс Е. Н. 6, 28—30, 108
Фусс Н. Н. 28
Фусс П. Н. 6, 14—16, 18, 21, 27—29, 32, 68, 80, 84, 92, 103, 106, 107

Ходнев А. И. 26
Хорслей 43

Цейс 82

Чебышев П. Л. 16, 38
Чезаро Э. 46
Чернов С. Н. 19

Шаль М. 37, 40
Шемиот В. П. 6
Штейнер Я. 32—34, 36, 37
Шторх А. К. 25
Штуди Э. 37
Шуберт Ф. И. 32, 50, 80, 83, 88

Эйлер Альбертина 28
Эйлер И. А. 9, 13—17, 23, 28, 83
Эйлер Л. 5—7, 13—22, 28, 29, 31—33, 36, 39, 41, 43, 46, 47, 49, 50, 52, 56, 57, 59, 60, 63—65, 70, 74, 78, 80, 83—87, 89
Энгельс Ф. 69
Энестрем Г. 16, 17, 20, 64
Эпинус 65

Юдин И. 70
Юшкевич А. П. 6, 16, 84

Якоби К. Г. 32, 33

Оглавление

От автора 5

Из истории Петербургской академии наук второй половины XVIII — начала XIX в. . . 7

I. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ

Глава 1

Фусс и Эйлер 13

Переезд из Базеля в Петербург. Начало работы в академии 13
Ученик и помощник Леонарда Эйлера . . . 14
Первые научные работы 18

Глава 2

Педагогическая и административная деятельность. Семья Фусса 22

Педагогическая деятельность 22
Непременный секретарь Академии наук . . 23
Признание научных заслуг 27
О сыновьях Н. И. Фусса 28

II. НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

Глава 1

Геометрия 32

О геометрической школе Эйлера 32
Полигонометрия 33
Сферика 36
Элементарная геометрия 39
Высшая геометрия 41

Глава 2

Алгебра и анализ 52

Алгебра 52
Интегральное исчисление 54
Дифференциальные уравнения 57
Ряды 58

Глава 3

Физика, механика, астрономия

Физика, механика, астрономия 64
Физика 64
Механика 65
Астрономия 68

Глава 4
Учебники 70

Глава 5
Переписка 80
Научная переписка 80
Отзывы и рецензии 82

БИБЛИОГРАФИЯ

Опубликованные труды Н. И. Фусса 93
Научно-популярные журнальные статьи и заметки Н. И. Фусса 102
Каталог неопубликованных рукописей Н. И. Фусса, составленный его сыном академиком П. Н. Фуссом в 1826 г. 103
Неопубликованные рукописи Н. И. Фусса, не включенные П. Н. Фуссом в каталог 106
Список трудов П. Н. Фусса 106
Работы Е. Н. Фусса 108
Литература 109

Список сокращений 113

Основные даты жизни Н. И. Фусса 114

Указатель имен 115

Валентин Иванович Лысенко

Николай Иванович Фусс

Утверждено к печати
редколлегией серии научно-популярных изданий
Академии наук СССР

Редактор издательства *Е. М. Кляус*
Художественный редактор *Т. П. Поленова*
Технический редактор *Е. Н. Евтянова*

Сдано в набор 12/VI 1975 г. Подписано к печати 22/X 1975 г.
Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2.
Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 9800.
Т-16369 Тип. зак. 2484. Цена 39 коп.

Издательство «Наука».
103717 ГСП. Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Николай Иванович
ФУСС

Цена 39 коп.