АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

И. И. Артоболевский, А. Н. Боголюбов

Леонид Владимирович АССУР

(1878—1920)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1971

Монография посвящена Л. В. Ассуру (1878—1920) — русскому ученому-машиноведу. Его труды в области теории механизмов и машин послужили одной из теоретических основ, на которых развивалась советская школа теории механизмов и машин. Главными направлениями научно-технического творчества ученого являлись динамика машин, кинематика, учение о структуре механизмов, кинетостатика. Авторы монографии, помимо освещения биографии Л. В. Ассура, подробно анализируют его научное наследие. Рассматривая труды ученого, авторы совершают обширные исторические экскурсы, показывают генезис его идей, их развитие и связь с современными научными представлениями.

Книга адресуется лицам, интересующимся историей отечественной науки.

2-4-1
56—70 НПЛ

Введение

Между историей науки и историей техники, рассматриваемыми на конкретных примерах или в более общем плане, существует одно и притом весьма существенное различие.

Основной тенденцией развивающейся науки всегда было чувство универсальности, международности. Греческие философы путешествовали по странам Средиземноморской Ойкумены, чтобы приблизиться к познанию всего сущего. В столетия ожесточенной борьбы между исламом и христианством, когда лозунги священных войн, обусловленные, впрочем, весьма человеческими интересами, возбуждали взаимную ненависть между арабами и франками, в Багдаде ученые изучали языческую премудрость индийцев и греков; в княжествах Северной Испании, напрягавших все силы, чтобы не поддаться мощи испано-арабских халифов, переводились творения великого хорезмийца Мухаммеда ал-Хорезми, само имя которого стало одним из терминов новой математики. Влияние старых русских мыслителей чувствуется в тех фресках соборов, где наряду с пророками, апостолами и отцами церкви появляются изображения Омира, Платона, Аристотеля. Наконец, вплоть до XIX века ученые владеют общим языком — латинским, на котором объясняются друг с другом, пишут письма, читают лекции в университетах, публикуют мемуары и книги. Англичанин Роджер Бэкон читает в Сорбонне, математик и врач Юрий из Дрогобыча, выученик Краковского университета, становится ректором в Болонье, Декарт пишет свои труды и публикуется в Голландии, Гюйгенс становится французским академиком, швейцарец Эйлер составляет славу русской науки.

Не то с техникой. Уже по самому своему характеру одного из вида искусств (хотя бы лишь до середины XVIII века), причем искусства, связанного с материальными ценностями (и военным делом), техника издревле национальна. Как и «изящные» искусства, технические искусства всеми своими корнями связаны с той страной, где они возникают. Техники владеют весьма полезными «секретами» и поэтому их отпускают за границу без особой охоты. Россия начала учить своих техников в XVIII веке: до этого она не слишком успешно пыталась заполучить их из Западной Европы. Сейчас некоторые страны накладывают запрет на экспорт определенных видов промышленной продукции, но уже в конце XVIII века вывоз машин Уатта из Англии разрешался лишь по правительственным указаниям. Причина этого ясна: ведь до XIX века наука следовала за техникой, разрабатывая, поясняя и обобщая ее результаты. Были, правда, гениальные заделы Галилея, Ньютона, Декарта, Торричелли, Паскаля, Лейбница, Эйлера, но они настолько оторвались от современной им техники, что полученные ими результаты сразу же стали всемирной собственностью ученых.

Положение меняется в XIX веке: наука и техника уже идут рядом; иногда забегают вперед ученые, иногда — инженеры, но уровень науки, хотя она уже начала говорить на национальных языках, все еще международен, а в технике возникают патенты и быстрыми темпами возрастает их роль. Мы знаем, что в наше время, во второй половине XX века, сама наука стала производительной силой: она уже обогнала технику, дает ей задания и в связи с этим становится национальной собственностью, имуществом и богатством государств, пусть с временными купонами, но по ним можно получить дальнейшие серии и рассчитывать на новые купоны.

Понятие технических наук является гибридным понятием и возникает лишь на определенной ступени развития техники, когда практических методов становится недостаточно и теоретическое переосмысление опыта и эксперимента делается необходимостью. В XVIII веке зарождаются учения о горном деле, металлургии, фортификации, маркшейдерское искусство, но они еще не потеряли связи с основными науками — с математикой, физикой, химией. Достаточно взять какой-либо из учебников прикладной механики XVIII столетия, например, «Начальные основания прикладной механики» Абрагама Готгельфа Кестнера (1719—1800), ординарного профессора математики и физики в Лейпциге и в Геттингене, опубликованные в Германии в середине века (русский перевод 1802—1803), или оставшуюся в рукописи «Прикладную механику» профессора Киевской академии Иринея Фальковского, чтобы получить понятие о содержании этого раздела математики в XVIII веке. Сейчас мы едва ли отнесли бы к математике даже незначительную часть содержания этих книг.

Если мы раскроем третий том «Истории математики» Монтюкля, изданный Лаландом в 1802 г., и остановимся на тех страницах прикладной механики, которые относятся к машинам, то обнаружим, что они относятся именно к развитию машин и ни в коей мере не к науке о машинах: ее еще не было, и ее заменяли механика и описание машин. Попытки в этом направлении Лейпольда в начале века, Эйлера в середине и Карно в конце века не пошли дальше некоторых элементарных определений и деклараций. Иного не могло и быть: для создания наук, соответствующих различным областям техники, в частности науки о машинах, еще не пришло время.

Науку о машинах начинают создавать в первом-втором десятилетиях XIX века, когда промышленный переворот уже вызвал к жизни производство машин при помощи машин, когда в различных областях техники возникло и непрерывно увеличивалось число фабрик и заводов, технологический процесс которых был основан на машинном производстве, и начали возникать новые транспортные средства с применением машин.

Итак, в самом начале XIX века машины становятся реальным фактом и мало-помалу проникают во все области производства и транспорта. Проникновение это идет не гладко: машина вытесняет ремесленников из тех областей производства, которые они считали своим родовым занятием, и вызывает к жизни новые отрасли производства, обогащает меньшинство и разоряет большинство, убыстряя рост резервной армии труда и стимулируя развитие безработицы.

Таким образом, машина как бы отрывается от своего творца — человека и приобретает самостоятельную жизнь жизнь существа с не совсем понятным поведением, иногда помогающего, но чаще враждебного человеку. Машины индивидуальны: каждую машину строят отдельно, изготовляют для нее детали, подгоняют их во время сборки, регулируют и выпускают. Правда, еще в середине XVIII века на Тульских оружейных заводах возникла нормализация деталей, но в общем машиностроении она не прижилась, вплоть до работ Витворта, который начал нормализацию с нарезки.

Наука о машинах, механика машин, выделяется из прикладной математики в начале XIX века и первое время развивается как теоретическая наука, без оглядки на практику и эксперимент, и поэтому вскоре результаты теоретиков и практиков расходятся в значительной степени. Такая наука для практического инженера дает слишком мало.

Коррективы к развитию науки о машинах проявляются в трудах немецких ученых-машиноведов Вейсбаха (1806—1861) и Редтенбахера (1809—1863). Из одной крайности наука о машинах переходит к другой крайности: теоретическое учение о машинах и механизмах становится практическим учением о частях машин и о их составлении; от изучения схемы переходят к изучению реальной машины, впрочем, без достаточного для этого основания.

Но машины середины XIX века — это уже не машины конца XVIII или начала XIX веков. Правда, они не так далеко ушли от последних, ибо темпы развития еще продолжают оставаться медленными, но все же они изменились сами и изменили ту систему производства, которая стимулирует их убыстряющийся количественный и качественный рост. В конце XVIII века паровые машины в континентальной Европе, которая в этом отношении значительно отстала от Англии, насчитывались единицами, а основу энергетики составляли гидравлические установки. Сейчас уже можно говорить о полной победе паровой машины как универсального промышленного двигателя. Далее, ремесленное изготовление машин ушло в область предания, машины изготовляются при помощи машин, и в связи с этим возникает новая, очень важная для заводской практики проблема: на смену изобретательству приходит заводское проектирование и конструирование машин. Чтобы успешно бороться с конкуренцией других промышленных фирм, нужно создавать новые машины, удовлетворяющие требованиям заказчика,— такие машины, модели которых могут возникнуть лишь в мозгу заводского конструктора. А для того, чтобы сделать этот процесс возможным, надо вооружить конструктора соответствующим количеством знаний: наука о машинах должна стать в его руках действенным инструментом.

Итак, мы в XIX веке. Промышленный переворот в Англии и развитых европейских странах — Франции, Германии, Италии уже давно закончился. В России он оканчивается лишь во второй половине века: индустрия здесь еще очень отсталая, мало машиностроительных заводов, лишь недавно открыты два технологических института — Петербургский и Московское техническое училище, поэтому инженеров-механиков можно пересчитать по пальцам, и не все промышленники их берут на работу: одни удовлетворяются доморощенными приказчиками и мастерами, а другие, связанные с иностранным капиталом, хотят иметь на заводах инженеров заграничной выучки.

И в то же самое время русская наука середины века отнюдь не уступает по своей весомости науке западноевропейской: русские математики занимаются теми проблемами, которые являются важными для развития мировой математики, и глава Петербургской математической школы П. Л. Чебышев закладывает основы новых направлений математических исследований.

Парадоксальное несоответствие, которое отмечается в России середины XIX века,— очень невысокий уровень техники и мощная наука, в особенности ее теоретические направления, возложило на русских теоретиков, в первую очередь на математиков, очень серьезную и ответственную обязанность: именно математикам пришлось развивать теорию технических наук, так как техники сами еще не были достаточно подготовлены для выполнения этой задачи.

Основы русской науки о машинах были заложены П. Л. Чебышевым, который не только создал для этого новое математическое направление — теорию полиномов, наименее отклоняющихся от нуля, но, более того, вообще был первым ученым, применившим математические методы к задачам механики машин. В Петербурге исследования в области механики машин были продолжены П. О. Сомовым, Н. Б. Делоне. В Одессе в Новороссийском университете школу кинематики механизмов создал В. Н. Лигин и его ученики: Х. И. Гохман, Д. Н. Зейлигер, И. М. Занчевский. В Киевском университете вопросы прикладной механики развивали Н. А. Дьяченко, И. И. Рахманинов.

Все это были математики, и вопросы механики машин они исследовали, если так можно выразиться, в рамках математических университетских кафедр.

Несколько особняком стоит Московский университет. Здесь после организации Московского технического училища, в которой принял самое деятельное участие профессор университета А. С. Ершов, стало традицией, что кафедры в этих высших школах занимали одни и те же профессора. После А. С. Ершова прикладной механикой занимался Ф. Е. Орлов, после него — Н. Е. Жуковский. Известны основополагающие работы Н. Е. Жуковского в области аэродинамики, благодаря которым он получил заслуженное имя «отца русской авиации». Менее известно, что диапазон вопросов прикладной механики, которыми занимался Н. Е. Жуковский, не ограничивался указанным направлением, а был весьма широк. Он занимался вопросами аналитической механики, теории механизмов, теории регулирования, задачами динамики машин и сооружений, задачами деталей машин и другими. Создавая свою школу в области прикладной механики, он полагал, что исследователи в этом направлении должны иметь глубокое математическое и кроме того инженерное образование. Поэтому его ученики — Н. И. Мерцалов, В. П. Горячкин, А. И. Сидоров, Д. С. Зернов, Д. П. Рузский — после окончания математического отделения университета шли на механическое отделение Московского технического училища или Петербургского технологического института, где и завершали свое образование.

Таков был и путь одного из основателей современного учения о механизмах Леонида Владимировича Ассура.

История науки и техники знает таких ученых, вся жизнь которых посвящена изучению какой-либо идеи. Она так наполняет их жизнь, так тесно переплетается с ней, что иногда бывает трудно установить, есть ли какие-либо пределы этому — беззаветной, полной, всеобъемлющей самоотдаче любимому делу. Проследить такую жизнь можно лишь по техническим журналам и по монографиям. Архивные материалы дают слишком мало и могут пополнить облик ученого лишь формально: немногие факты личной жизни подавляются результатами научного творчества. Такой была и жизнь Л. В. Ассура. При изучении его трудов постоянно тревожит мысль, что он знал или чувствовал свою недолговечность и спешил высказать свои мысли, идеи. Он выискивает для себя труднейшие вопросы из науки о машинах, решает их, иногда рассуждает о дальнейших возможностях развития, исследует самые общие случаи, пробует применить к их решению различные методы — и при всем этом спешит.

Л. В. Ассур является одним из основателей учения о структуре, кинематике и кинетостатике плоских механизмов, которое явилось фундаментом при создании советской школы теории механизмов и машин. Кроме этого, им были решены некоторые частные вопросы теории и высказано много глубоких мыслей, к которым еще не один раз вернутся машиноведы.

Если не считать ряда статей о жизни и творчестве Л. В. Ассура, написанных одним из авторов данной книги (И. И. Артоболевским), то настоящая монография является первой работой, в которой достаточно подробно исследуются жизнь и научная деятельность Л. В. Ассура. Авторы считают своим долгом выразить искреннюю благодарность профессору А. П. Иванову и доценту Е. Л. Ассур, сообщившим ряд фактов из жизни Л. В. Ассура и оказавшим помощь в подборе иллюстративных материалов. Авторы не могут также не отметить вклада покойного Е. Ф. Шульмана, выяснившего ряд существенных фактов из жизни ученого.

I

Детство, гимназия, университет, Московское техническое училище

Леонид Владимирович Ассур родился 31 марта 1878 г. в городе Рыбинске в семье служащего Управления железной дороги Владимира Федоровича Ассура. Семья Ассуров в начале XIX века переселилась в Россию из Германии; по-видимому, постоянным занятием ее представителей была техника или ремесла, связанные с горным делом или с обработкой камней. Владимир Федорович Ассур окончил реальное училище: высшего образования, по недостатку в семье средств, получить он не смог, но на всю жизнь сохранил интерес к технике. Да и служить ему пришлось на тех должностях, которые требовали некоторых технических познаний и необязательно связывались со званием инженера.

Леонид Владимирович был в семье старшим сыном. В 1881 г. родился второй сын — Андрей, а в 1883 г. — Владимир. Вскоре после рождения младшего сына жена Владимира Федоровича — Людмила Андреевна — заболела чахоткой и умерла, оставив трех малолетних детей (самому старшему из которых было семь лет) на руках отца.

В 1884 г. Владимир Федорович оставил Рыбинск и переехал в Гродненскую губернию, где устроился чиновником в акцизном управлении, что несколько улучшило его материальное положение. Старшего сына он отправил на воспитание в город Везенберг Ревельской губернии (Эстония) к своей тетке, с которой жила также его старшая сестра Адель Федоровна Ассур.

Из пыльного приволжского купеческого Рыбинска мальчик попал в совершенно другой мир. Небольшой городок Везенберг — старинное эстонское поселение, в котором в первой половине XIII века был построен орденский замок Реквере — опорный пункт немецкой колонизации на эстонской земле. Хозяева замка все время менялись — немцы, датчане, затем опять немцы, шведы. Затем замок рассыпался и к концу XIX века от него остались лишь живописные развалины. В 1870 г. мимо городка прошла железная дорога, и население его увеличилось тысяч до восьми. Около городка — большая дубовая роща, дальше — сосновый лес, а километрах в двадцати — каменистое побережье Финского залива.

Здесь мальчику предстояло прожить следующие семь лет своей жизни.

Адель Федоровна Ассур была образованной женщиной. Прекрасно владела русским, немецким, французским и эстонским языками. Она занималась на дому с учениками старших классов местной гимназии, однако своего племянника решила в гимназию не отдавать, а выполнить с ним программу первых классов дома. Леонид стал любимцем двух одиноких женщин, но любовь эта была эгоистичной: из дому его никуда не пускали, товарищей у него не было. Летом Адель Федоровна ежедневно водила Леонида в дубовую рощу, учила его собирать гербарий, наблюдать за жизнью животных, птиц, насекомых. Любовь к природе сохранилась у него на всю жизнь. Но в то же время результатом везенбергского воспитания явились замкнутость, углубленная внутренняя жизнь. Вероятно, тогда же возникла в нем и любовь к музыке.

В 1892 г. Леонида отправили в Варшаву, где он был принят в четвертый класс гимназии. Из тихого эстонского городка он попал в столицу «Привислянского края», бывшую столицу Польского королевства, из тесного семейного круга — в круг школьной молодежи. Однако условия обучения в варшавской гимназии отнюдь не способствовали развитию характера мальчика в противоположном направлении. 80—90-е годы были периодом безудержной русификации Польши. Все предметы преподавались на русском языке, состав преподавателей был по своему качеству значительно ниже, чем в других городах Российской империи: хорошие преподаватели часто не соглашались выполнять политику русификации, проводимую царизмом, и не шли служить в западные губернии. Национальная рознь, существовавшая между гимназистами, отсутствие чувства товарищества между отдельными группами учеников — все это содействовало тому, что замкнутость характера у Леонида не только не уменьшилась, а наоборот, развилась в еще большей степени.

В Варшаве Леонид жил у дальних родственников. Здесь он окончил четвертый, пятый и шестой классы гимназии «с отличными успехами».

Осенью 1895 г. отец забрал Леонида из Варшавы и перевел его в седьмой класс Гродненской гимназии. Здесь опять новое место, новые впечатления, новые условия, но Леониду уже 17 лет, он отличается большими способностями, редким трудолюбием и усидчивостью, но характер его уже не изменится.

Гродно — старинный русский город на стыке белорусских, литовских и польских земель. Он бывал и столицей русского княжества, и столицей Витовта, здесь была резиденция Стефана Батория и последняя столица польского короля Станислава Понятовского. В 1793 г. здесь состоялся «немой» сейм, «утвердивший» второй раздел Польши. От торжественно печальной истории Гродно остались лишь чудесные памятники архитектуры, где воедино слились белорусские, польские и литовские мотивы. С 1795 г., после третьего раздела Польши, Гродно вошел в качестве губернского города в состав Российской империи. Очень смешанное население, четверть которого составляли белорусы и русские, четверть — литовцы и поляки и половину — евреи; сильный центр русификации, Гродно в некоторой степени повторял те же противоречия, которые были характерны для Варшавы. Национальный вопрос и здесь играл весьма существенную роль.

Гродненскую гимназию, в которой также учились оба его младших брата, Леонид закончил в 1897 г. 7 июня он получил аттестат об окончании гимназии с золотой медалью; в аттестате говорилось: «поведения — отличного, исправность в посещении и приготовлении уроков, а также в исполнении письменных работ — примерная, прилежание — отличное и любознательность весьма похвальная». По окончании гимназии Леонид уже хорошо владел четырьмя языками — латинским, греческим, французским и немецким. Позже он овладел еще английским языком. Семья Ассуров отличалась музыкальностью: отец играл на виолончели, мать на рояле; все дети унаследовали музыкальные способности, и Леонид Владимирович не только проводил свой отдых за роялем, но даже сочинял музыку.

С окончанием гимназии закончилось детство и отрочество; наступила юность. Осенью 1897 г. Леонид Владимирович был зачислен студентом математического отделения физико-математического факультета Московского университета.

По уставу 1884 г. в составе физико-математического факультета Московского университета были следующие кафедры: чистой математики, теоретической и практической механики, астрономии и геофизики, физики и физической географии, химии, минералогии и геологии, ботаники, зоологии, технологии и технической химии, агрономии. Таким образом, основная часть подготовки по математической специальности приходилась на долю двух первых кафедр.

В 1890 г. был утвержден список предметов, изучение которых являлось обязательным для студентов, занимавшихся по математической специальности. Сюда относились: элементарная математика с упражнениями, введение в анализ, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, высшая алгебра, введение в теорию чисел, вариационное исчисление, теория вероятностей, дифференциальные уравнения и ряд спецкурсов, аналитическая и прикладная механика.

Старейшим из профессоров-математиков университета был Н. В. Бугаев (1837—1903), ученик Зернова, Брашмана, Давидова по Московскому университету, слушавший также лекции Остроградского в Николаевской инженерной академии. Он был членом-корреспондентом Петербургской академии наук и президентом Московского математического общества. Работал он в области теории чисел и анализа.

Ряд математических курсов, в частности дифференциальные уравнения и теорию вероятностей, читал ученик Бугаева — П. А. Некрасов (1858—1924), бывший длительное время ректором университета и получивший печальную известность как автор некоторых реакционных положений, которые он пытался «доказать» при помощи теории вероятностей.

Аналитическую и проективную геометрию и высшую алгебру читал В. Я. Цингер (1836—1907). Его собственные работы относились к математической физике, механике и к развитию синтетических методов в геометрии, неутомимым пропагандистом которых он был.

Дифференциальную геометрию в Московском университете читал ученик Цингера, один из основателей московской школы дифференциальной геометрии Б. К. Млодзеевский (1858—1923). В области дифференциальной же геометрии начинал тогда работать в университете Д. Ф. Егоров (1869—1931), в те годы бывший приват-доцентом. Ряд математических курсов читал также Л. К. Лахтин (1863—1927), только что вернувшийся в Москву из Юрьевского университета (Дерпт, Тарту).

Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров и И. И. Жегалкин (1869—1917) впервые стали читать курсы, относящиеся к новым отраслям математики, и излагать старые ее отрасли, исходя из новых положений. Б. К. Млодзеевский продолжил основанное в Москве К. М. Петерсоном (1828—1881) направление в области дифференциальной геометрии, относящееся к теории изгибания поверхностей. Кроме этого, он проводил исследования в области алгебраической геометрии, проективной геометрии, занимался вопросами приложений геометрических методов к астрономии, к аэрофотосъемке и т. п., некоторыми вопросами анализа, механики. Млодзеевский был прекрасным лектором и пользовался среди студентов большим уважением.

Д. Ф. Егоров, кроме дифференциальной геометрии, занимался также различными вопросами анализа. Он впервые прочел серьезные курсы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений. Вместе с Млодзеевским он явился зачинателем московского направления метрической теории функций действительного переменного, которое несколько позже трудами ученика Егорова Н. Н. Лузина (1883—1950) и его учеников явилось основой, на которой были созданы мощные исследовательские направления Московской математической школы.

И. И. Жегалкин поставил в Московском университете преподавание абстрактной теории множеств.

Направление проективной геометрии было создано в Московском университете трудами А. К. Власова (1868—1922). В. Я. Цингер также читал курс лекций по высшей проективной геометрии.

Владимир Федорович Ассур

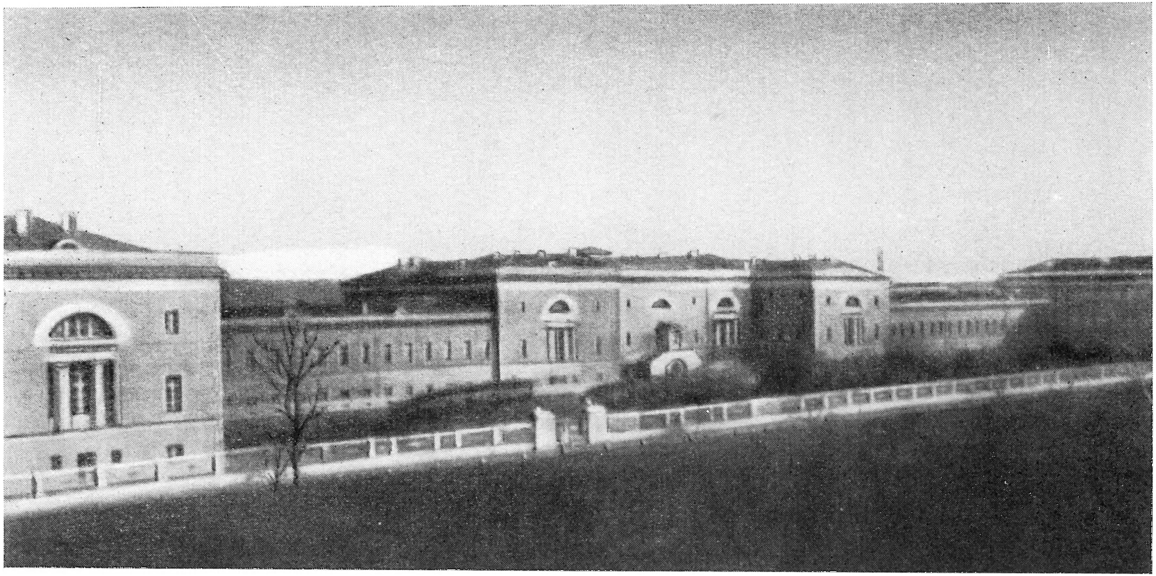
Людмила Андреевна Ассур

Л. В. Ассур в детстве

Леонид Владимирович со своей теткой Аделью Федоровной

Л. В. Ассур — студент

Елена Михайловна Ассур
(Миндлина)



Московское техническое училище

Механика в Московском университете была поставлена выдающимся педагогом Н. Д. Брашманом (1796—1866), занимавшим в университете кафедру прикладной механики и развившим в ней ту тенденцию связи теоретических вопросов механики с их инженерными применениями, которая была характерна для Московского университета второй половины XIX — начала XX веков. Создатель Петербургской математической школы — самого влиятельного в России математического направления — П. Л. Чебышев (1821—1894) был учеником Брашмана. Ученики Брашмана А. С. Ершов и Ф. Е. Орлов установили связь университета с Московским техническим училищем, которая стала традиционной.

С 1886 г. профессором механики в университете стал Н. Е. Жуковский (1847—1921), учеником которого был Л. В. Ассур. Леонид Владимирович уже не застал в университете близкого друга Жуковского Ф. Е. Орлова (1843—1892), хотя несомненно был знаком с его идеями в области теории механизмов.

Наибольшее влияние оказал на Ассура Жуковский.

Н. Е. Жуковский мечтал об инженерном образовании и поэтому в Московский университет на математическое отделение поступил не особенно охотно. Здесь, по его словам, наибольшее влияние на него оказал В. Я. Цингер, у которого он слушал теоретическую механику, и Жуковский заинтересовался вопросами прикладной механики.

В 1868 г. Жуковский окончил университет со степенью кандидата и поступил в качестве преподавателя в Московское техническое училище. В 1876 г. он защитил диссертацию на степень магистра прикладной математики «Кинематика жидкого тела»; в 1882 г. он защитил следующую диссертацию «О прочности движения» и получил степень доктора прикладной математики.

Объединив преподавание в университете (с 1886 г.) с преподаванием в высшей технической школе, Жуковский развернул интенсивную педагогическую и исследовательскую деятельность. Выше мы отмечали ширину его научного диапазона, и вопросы практической математики в его интересах занимали не последнее место.

Вспоминая деятельность Ф. Е. Орлова в Московском университете, Жуковский писал: «В Московском университете преподавание практической механики было поставлено Ф. Е. на ту высоту, на которой оно не стоит ни в одном из русских университетов. Я помню, как одобрительно отозвался председатель экзаменационной комиссии В. Е. Имшенецкий, встретив в ответах студентов по специальным курсам практической механики такие обширные знания, которые можно было ожидать только от воспитанников специальных технических школ. Ф. Е. поощрял студентов заниматься его предметом. Он устроил в университете прекрасный механический кабинет, завел классы черчения и проектирования. Он всегда охотно сообщал занимавшимся у него студентам сведения для писания кандидатских сочинений, наделял их даже книгами из своей библиотеки. Можно сказать, что почти половина кандидатских сочинений писалась в университете по практической механике»[1].

Это направление Ф. Е. Орлова было продолжено самим Жуковским. В его научное творчество органически вошли и вопросы теории механизмов, которыми он занимался уже с начала 80-х годов. Особенно интересовался Жуковский шарнирными механизмами. Начиная с 1883 г., когда была опубликована его работа «Приложение теории центров ускорений высших порядков к направляющему механизму Чебышева», последовали работы, посвященные шарнирным механизмам для решения уравнений высших порядков, механизмам для выражения определенных математических зависимостей, и ряд других.

Во всей исследовательской работе Жуковского вопросы теории и вопросы инженерные тесно переплетались между собой, образуя единое целое. Так же, как П. Л. Чебышев, создавший и применивший новые математические методы для решения существенно прикладных задач теории шарнирных механизмов, Н. Е. Жуковский широко пользовался математическим аппаратом, возводя направления прикладных знаний на высшую ступень — создавая технические науки. В 1892 г. он унаследовал от Ф. Е. Орлова руководство механическим кабинетом университета. Этот кабинет, пополненный самим Жуковским собранием разнообразных механических приборов

[1] *Н. Е. Жуковский*. Некролог и очерк деятельности Ф. Е. Орлова как профессора Московского университета.— В кн.: *Ф. Е. Орлов*. Дневник заграничной командировки 1869—1872 гг. М., 1898, стр. 338.

и демонстрационных приспособлений, стал прообразом научно-исследовательской лаборатории, в которой студенты под его руководством проводили экспериментальные исследования.

С конца 80-х годов Жуковский все больше и больше внимания начинает уделять аэродинамике. С 1889 г. в кабинете прикладной механики он ставит экспериментальные исследования по вопросам воздухоплавания. Кабинет пополняется богатейшей коллекцией моделей летательных аппаратов и приспособлений, здесь проводились испытания этих моделей и строились небольшие летательные аппараты.

В 1891 г. Жуковский опубликовал работу «О парении птиц», в которой исследовал планирующий полет птиц в различных условиях движения воздуха и выяснил возможные криволинейные траектории полета. Таким образом, за 12 лет до создания аппаратов тяжелее воздуха Жуковский теоретически обосновал возможность совершения фигур высшего пилотажа. Теория начала вести за собой практику.

С 1893 г. в Московском университете начал работать в качестве приват-доцента ученик Жуковского С. А. Чаплыгин (1869—1942). В своих первых работах, также значительно опередивших технику, он разработал ряд вопросов газовой динамики, впоследствии использованных при создании скоростной авиации.

Таким было математическое отделение Московского университета, в которое пришел Л. В. Ассур в 1897 г. Следует отметить, что время было трудное. Университетский устав 1884 г. лишил университеты внутренней автономии, подчинив их министру народного просвещения и попечителю учебного округа. Для поступления в университет недостаточно было аттестата об образовании: требовалось еще полицейское свидетельство о благонадежности.

Жизнь в Москве также оказалась нелегкой. Пособие, которое выдавал университет, было очень небольшим, на помощь отца рассчитывать не приходилось. Для того чтобы кое-как свести концы с концами, надо было бегать по частным урокам; летом в каникулярный период Л. В. Ассур также обычно устраивался в качестве домашнего учителя и репетировал отстающих учеников.

Время на уроки сокращало те часы, которые надо было использовать для занятий. Поэтому Леонид Владимирович установил для себя жесткий распорядок дня, которого и придерживался. Лекции, записанные утром, прочитывались и прорабатывались обязательно в тот же день: никакая отсрочка, никакое послабление в этом отношении не допускалось. Университетские занятия никогда не пропускались. В свободные часы Леонид Владимирович занимался в университетской библиотеке, дополняя материал прослушанных лекций чтением учебников, специальных монографий и журнальных статей. Знание иностранных языков оказалось здесь весьма полезным: оно открыло перед Леонидом Владимировичем большие возможности, так как в те годы периодическая литература, особенно по техническим наукам, находилась в России в зачаточном состоянии.

Уже на втором курсе жизненный уклад Леонида Владимировича изменился. Вместе с ним на том же отделении учился Лаврентий Михайлович Колесников, с которым он близко сошелся. Серьезный и очень самоуглубленный Ассур, время которого распределялось между университетом, занятиями и работой, начал интересоваться делами, не имевшими к этому никакого отношения: у него появилась личная жизнь. Вместе с Колесниковым он стал бывать в семье Ольги Гавриловны Миндлиной, у которой было две дочери — Агафья Михайловна и Елена Михайловна. Свободных вечеров стало меньше, они уже проходили в семействе Миндлиных.

Вскоре Л. М. Колесников женился на А. М. Миндлиной. И в этой новой семье, и у О. Г. Миндлиной Ассур продолжал бывать уже как свой, но он считал, что сам сможет жениться лишь после окончания учебы, которая, однако, затягивалась.

В 1901 г. Леонид Владимирович окончил Московский университет со званием кандидата и последовал по тому пути, который рекомендовал всем своим ученикам Н. Е. Жуковский: он подал заявление о приеме его в Московское техническое училище. Как окончивший университет, Леонид Владимирович сразу был принят на второй курс механического отделения училища.

Московское техническое училище, второе по времени возникновения технологическое учебное заведение в России, было преобразовано из Московского ремесленного учебного заведения в 1868 г. Совпало это по времени с окончанием промышленного переворота в России. Последовавший затем быстрый рост промышленности, развитие машиностроения и металлургии, железнодорожное строительство — все это потребовало и увеличения числа инженеров и улучшения их профессиональной подготовки. В 1885 г. из 22 322 руководителей промышленных предприятий только 1608 человек имели высшее или среднее техническое образование. Этого было мало, и в том же 1885 г. основывается Технологический институт в одном из крупнейших промышленных центров Юга России — в Харькове. В следующем году в Петербурге было открыто Техническое училище почтово-телеграфного ведомства, позже преобразованное в Электротехнический институт, открываются политехнические институты в Риге, Варшаве и Киеве (в 1898 г.). В 1902 г. основывается Петербургский политехнический институт, в 1900 г.— Томский технологический институт, в 1907 г.— Донской политехнический институт. Мы отмечаем здесь лишь те институты, которые готовили инженеров в основном (за исключением Электротехнического института) для промышленности.

Начиная с 80-х годов вопросы качества обучения техников и инженеров поднимаются. Они обсуждаются на 1 съезде русских деятелей по техническому и профессиональному обучению в 1889—1890 гг., на 2 съезде в 1895—1896 гг. В 1901 г. советы высших учебных заведений получили от министра народного просвещения ряд вопросов на тему о реформе высшей школы.

«Московское техническое училище, пользуясь этим случаем, развернуло широкую программу реформ высшей технической школы России.

Оно отметило, что учебный строй технической школы должен допускать непрерывное приспособление к изменяющимся запросам жизни, должен развивать связь школы с жизнью, дать ей возможность чутко следить за запросами жизни и дать ей средства для всех подготовительных работ, обеспечивающих постепенность и своевременность приспособления.

Приведя ряд соображений, училище доказывало, что единственно целесообразным строем высшей технической школы, обеспечивающим возможность ее творческого развития, выработки и сохранения индивидуальности, установления единства преподавания, является коллегиальный строй. Расширенные полномочия школы должны быть переданы коллегии профессоров, Совету, который явится главным и ответственным руководителем всей жизни школы.

Учебные планы того времени во всех русских высших технических школах устанавливали единое общеобязательное энциклопедическое преподавание. Развитие техники и науки имело отражение в учебном процессе, но оно влекло к чрезмерной перегрузке учебных планов. Учитывая это обстоятельство, а также потребности промышленности в специалистах определенной области, училище выдвинуло предложение о введении специализации на старших курсах, при солидной общенаучной и общетехнической подготовке на младших и средних курсах» [2].

Эта тенденция постоянного совершенствования учебного процесса при сохранении высокого научного уровня его и индивидуальности сделала Московское техническое училище передовым учебным заведением. Пожалуй, без особого преувеличения можно сказать, что к началу XX века училище стало настоящим техническим университетом. Этому способствовала и постоянная связь с Московским университетом, многие питомцы которого стали профессорами училища, и возникновение и развитие в нем новых научных направлений в области техники, и хорошая лабораторная и производственная базы.

Л. В. Ассур во время своей учебы в училище соприкасался главным образом с кафедрами теоретической механики, прикладной механики и машиностроения, механической технологии металлов и дерева и инженерно-строительного искусства.

Кафедру теоретической механики организовал в 1878 г. Н. Е. Жуковский и с того времени руководил ею. Таким образом, связи между Жуковским и его учениками по Московскому университету, перешедшими в Техническое училище, не прерывались; влияние его чувствовалось также на важнейшей кафедре механического факультета — кафедре прикладной механики и машиностроения. На ней работали П. К. Худяков, А. И. Сидоров, В. И. Гриневецкий, К. В. Кирш, А. П. Гавриленко,

В. И. Прокофьев. Московское высшее техническое училище. Машгиз, 1955, стр. 76.

Н. И. Мерцалов и еще шестнадцать преподавателей. Кафедра была многопредметной, здесь читались курсы прикладной механики (теории механизмов), сопротивления материалов, деталей машин, термодинамики, гидравлики.

Ближе всего по своим дальнейшим работам Л. В. Ассур стоял к Н. Е. Жуковскому и к Н. И. Мерцалову, А. И. Сидорову, Л. П. Смирнову.

Н. Е. Жуковский в своем лице соединял математика, механика и инженера. Такие сочетания бывают не часто: в этом случае результатом стало зарождение нового научного и инженерного направления — авиации. Однако большая заинтересованность Н. Е. Жуковского вопросами конкретного машиностроения не удалила его от вопросов общей науки о машинах, где им были получены весьма существенные, в определенной степени даже основополагающие результаты.

В теории механизмов и машин последней четверти XIX века самой главной «чебышевской» задачей стала проблема шарнирных механизмов. К решению этой задачи Жуковский подошел по-новому: он нашел не только непосредственное решение конкретной задачи, но и общее, «генеральное» решение, пригодное для любых механизмов и для любых их положений. Так возникла теорема о жестком рычаге Жуковского, которая впоследствии стала исходным пунктом для многих размышлений Ассура.

Учитель оказал большое влияние на ученика: в сущности исследования Ассура являются обобщениями идей Жуковского, исходя из которых, Ассур пришел к постановке своих топологических задач. Были мысли, но для их воспроизведения в металле не хватало знаний. Начинается погоня за знаниями.

А в эти годы МТУ было не занимать талантливых преподавателей. Мерцалов, Смирнов, Сидоров — каждый из них мог бы составить гордость любого высшего учебного заведения.

Н. И. Мерцалов по окончании Технического училища некоторое время обучался в Германии и работал в качестве рабочего на одном из машиностроительных заводов. Это наложило существенный оттенок на его последующую научную и педагогическую работу. Подобно другим ученикам Н. Е. Жуковского он одновременно работал и в университете, и в Техническом училище; в последнем он занимал должность адъюнкт-профессора по кафедре прикладной механики.

Одним из первых трудов Н. И. Мерцалова, выполненных им в Техническом училище, было создание курса прикладной механики. Работать над ним он начал с первых лет своей деятельности в училище; в 1904 г. было опубликовано первое (стеклографированное) издание этого курса. Издание курса (скорее даже трактовка) явилось событием в области теории механизмов и машин для отечественной и иностранной науки.

Мерцалов впервые создал логически строгий и очень содержательный курс теории машин. Правда, основой его по-прежнему оставалась динамика поршневого двигателя, но изучена она была весьма подробно. Личные интересы Мерцалова лежали в области теории шарнирных механизмов: этот раздел кинематики механизмов он изложил, применяя теорию Рело и переработанные механиками второй половины XIX века (в том числе и русскими) классификационные принципы Виллиса (лекции которого по теории машин в частности слушал К. Маркс).

Курсы Н. И. Мерцалова, вместе с другими студентами, слушал и Л. В. Ассур, и они оказали несомненное влияние на него как на потенциального ученого: он начинает заниматься задачами динамики машин, от которых вскоре перешел к исследованию проблем кинематики (и кинетостатики) шарнирных механизмов.

Одновременно с Н. И. Мерцаловым в 1897 г. адъюнкт-профессором Московского технического училища был избран А. И. Сидоров (1866—1931).

Курс деталей машин и проектирование деталей выделяется из общего курса прикладной механики в последней четверти XIX века. В МТУ этот курс был разработан и поставлен П. К. Худяковым, который составил и атлас по деталям машин.

А. И. Сидоров окончил Московское техническое училище в 1891 г. и был оставлен преподавателем сопротивления материалов и деталей машин. В 1895 г. П. К. Худяков поручил Сидорову чтение курса деталей машин, а затем передал ему и переработку, и переиздание своих пособий по этому курсу: «Курса деталей машин» и «Атласа конструктивных чертежей деталей машин». Вместе с тем Сидоров занимался и общими вопросами машиноведения. В Московском техническом училище он начал читать для механиков вводный курс, нечто вроде энциклопедии машиностроения, дававший общие понятия о курсах теории механизмов и машин, о машиноведении, о применении механики упругого тела к расчету деталей машин, об общих принципах проектирования машин и их частей. Сидорову свойственна была в самой высокой степени историчность изложения. Ему принадлежали не только очерки по истории техники (изданные значительно позднее), но и во всех его работах изобиловали отдельные замечания, справки и экскурсы из истории техники.

Л. П. Смирнов (1877—1954) по окончании в 1897 г. училища по рекомендации Н. И. Мерцалова был оставлен на кафедре. Его научная деятельность связана с исследованиями механики паровых машин и ряда вопросов кинематики и динамики машин. Одной из первых его работ в стенах МТУ было предпринятое им исследование шарнирных механизмов. «Кинематическое и динамическое исследование многозвенных шарнирных механизмов» имело по его словам целью «...в своей первой части дать самый общий графический метод нахождения скоростей каких угодно точек многозвенных шарнирных механизмов, а в своей второй части — использовать этот метод для исследования сил трения в шарнирах направляющих; третья часть будет посвящена динамическому исследованию механизмов того же рода» [3].

В 1901 г. в Московском техническом училище был поставлен спецкурс по теории регулирования хода машин; до того времени отдельно читалась теория махового колеса и отдельно — элементарная статическая теория регуляторов. Этот курс, в основу которого были положены классические работы И. А. Вышнеградского, разрабатывался в МТУ уже с конца XIX века: в 1895 г. А. И. Сидоров опубликовал книгу «Плоские регуляторы быстроходных машин», снабдив ее историческим очерком.

К 1907 г. Н. Е. Жуковский разработал курс теории регулирования хода машин, в чем ему детально помогал Л. П. Смирнов, выполнивший исследование регуляторов и впоследствии продолживший развитие теории прямого регулирования. Однако Министерство народного просвещения решило не вводить этот курс как обязатель-

[3] Бюллетени политехнического общества, состоящего при Императорском техническом училище, 1908, № 8, стр. 40.

ный из-за недостаточной разработки предмета, и он читался на правах факультативного. В 1909 г. курс Жуковского был издан по студенческим запискам.

Таким образом, во время учебы Л. В. Ассура в Московском техническом училище основными вопросами, которые интересовали специалистов в области теории механизмов и машин, были теория шарнирных механизмов и некоторые вопросы динамики машин. Как мы увидим ниже, в том же направлении пошел в своей исследовательской работе и Ассур.

Основным универсальным двигателем как фабрично-заводским, так и транспортным на протяжении всего XIX века была паровая машина. Естественно, что ее совершенствованию и было посвящено развитие динамики на протяжении всего века. Значительное влияние оказала паровая машина и на развитие отдельных разделов кинематики. Как указывает В. В. Голубев, «конструкции тогдашних паровых машин, теория направляющих механизмов в них, так называемых прямил, были исходным пунктом... исследований [П. Л. Чебышева] чисто математических об аппроксимации функций, о функциях, наименее отклоняющихся от нуля; а с другой стороны, они повели к чисто механическим исследованиям П. Л. Чебышева, которые положили начало разработке в СССР вопросов кинематики и динамики машин блестящими современными нам теоретиками» [4].

То, что говорит В. В. Голубев применительно к творчеству Чебышева, в равной степени относится и к другим исследованиям, выполненным как в России, так и за границей. Основной импульс для этих работ давала паровая машина, габариты которой росли, а скорости увеличивались. В то же время в конце XIX — начале XX века большое значение приобретает новый тип энергетических машин с той же самой кинематикой основного механизма — двигатели внутреннего сгорания. Но они не заменяют паровой машины, и их роль в некоторой степени можно назвать второстепенной; они обслуживают новые средства транспорта и мелкие полукустарные и кустарные мастерские; основное место остается

[4] *В. В. Голубев*. Русские работы по механике и влияние их на развитие мировой науки.— В кн.: Ученые записки МГУ, вып. 91. Изд-во Московского университета, 1947, стр. 100.

за паровыми машинами. А увеличение мощностей и повышение оборотов последних влечет за собой неприятности, связанные с возникновением сил инерции: с теорией не все еще в порядке.

Исследования Портера и Радингера в области динамики кривошипно-ползунного механизма открыли новую страницу в области динамики машин. К концу столетия резко повысились скорости машин, и вопрос о силах инерции стал одним из основных вопросов теории.

Портер, а затем Радингер предложили учитывать, кроме сил давления пара на поршень, еще силы инерции поршня, поршневого штока и ползуна. Использовав исследования Лешателье и Вильярсо, а также идеи Портера, Радингер решил задачу о графическом расчете сил, действующих в кривошипно-ползунном механизме.

Радингер учел также работу Шлика об уравновешивании поступательно движущихся масс. Задача об уравновешивании, весьма актуальная для практических расчетов того времени, в особенности в практике построения судовых двигателей, была успешно разрешена американским инженером Тейлором. Шлик, по-видимому, самостоятельно, пришел к таким же результатам. Шлик, как и Радингер, предполагал, что длина шатуна двигателя бесконечно велика.

Однако Радингер допустил в своем решении значительную ошибку: он полагал, что в качестве возвратно-поступательной массы можно считать сумму массы кривошипа, отнесенной к его пальцу, шатуна, штока и ползуна. Дальнейшие исследования Молье (1903) и Энслина (1907), развивавшие идеи Дженкина, высказанные значительно раньше (1876), выяснили, что при некоторых средних соотношениях веса, положения центра тяжести и величины момента инерции шатуна влияние шатуна на величину расчетной силы инерции поступательно движущихся масс с достаточной степенью точности может быть выражено приведением некоторой доли массы шатуна к пальцу ползуна.

В начале XX века задача о расчете кривошипно-ползунного механизма была одной из наиболее интересных и многообещающих проблем, которыми мог заниматься молодой техник, решивший посвятить себя теоретическим изысканиям в области механики машин.

Она привлекла внимание и Л. В. Ассура.

II

Первые исследования

22 августа 1906 г. Л. В. Ассур закончил курс Московского технического училища и получил звание инженера-механика. Сначала у него было предположение остаться в училище в качестве преподавателя, но не оказалось вакансий. Найти какую-либо работу в Москве было трудно, число тех предприятий, где мог потребоваться инженер-механик, было ограниченным, и все места были заняты. Промышленность России в годы, предшествующие революции 1905 г. и в последующие за ней, переживала полосу депрессии. Резкое сокращение военных заказов после окончания русско-японской войны повлекло за собой резкое снижение производства как в металлургической, так и в машиностроительной промышленности. Эта депрессия, а вместе с ней и безработица, продолжались приблизительно до 1909 г. Естественно, что спад занятости был и на рынке предложения инженерного труда. Поэтому пришлось переезжать в Петербург, где возможность устройства на службу была большей, чем в Москве, поскольку там было больше предприятий и учреждений. Работа же Л. В. Ассуру была тем более необходима, что в апреле 1906 г. он женился на Елене Михайловне Миндлиной.

Перед отъездом Л. В. Ассур отдал директору Технического училища А. П. Гавриленко, одновременно исполнявшему обязанности редактора «Бюллетеней Политехнического общества, состоящего при Императорском техническом училище», статью, явившуюся результатом его исследований в лаборатории училища, проведенных в течение последнего года учебы. Статья эта была напечатана в восьмом номере «Бюллетеней» за 1906 г.

Выше мы уже отметили ту основную задачу, которая встала перед конструкторами в результате повышения быстроходности паровых машин. Возникла проблема учета сил инерции, которая с течением времени из малосущественной и второстепенной стала одной из наиболее значительных и даже во многих случаях определяющей.

Исследования динамики машин начались еще в XVIII веке. Наблюдения над работой энергетических машин — водяных колес и ветряных мельниц — показали, что исследовать их надо не в состоянии покоя, а в состоянии движения. К такому именно выводу пришел Эйлер в своих мемуарах «О машинах вообще» и «Принципы теории машин», однако, набрасывая здесь основания новой науки о машинах, он скорее дает прогноз науки, чем ее систему: еще очень мало фактов имеется в распоряжении механиков, чтобы можно было создавать науку.

Положение меняется вместе с созданием паровой машины. Если водяные и ветряные колеса вращались более или менее равномерно, то в пароатмосферной машине Ньюкомена трудно было обеспечить даже определенное количество ходов в единицу времени. Очень рано, еще до изобретения Ньюкомена, пробовали преобразовать поступательное движение поршня во вращательное движение какого-либо звена, однако безуспешно.

В 1779 г. бристольский инженер Мэтью Уозброу предложил использовать для такого преобразования храповой механизм, а для обеспечения равномерности вращения насадил на ось храпового колеса маховик. Храповик очень быстро исчез из конструкции передаточного механизма, а маховик остался: в 1780 г. он впервые был насажен на ось кривошипа кривошипно-ползунного механизма. Правда, шатун соединял кривошип не с поршнем, а с концом коромысла; на втором конце коромысла был подвешен шток поршня.

В 1784 г. Джеймс Уатт построил в Сохо свою первую машину, которая отличалась двумя существенными усовершенствованиями: преобразование поступательного движения во вращательное при помощи планетарного механизма и центробежный регулятор. Уатт заклинивал маховик не на валу кривошипа, а на втулке зубчатого колеса, свободно надетой на вал кривошипа; поэтому маховик вращался примерно в два раза быстрее кривошипа. После 1800 г. кривошипно-ползунный механизм становится единственным способом передачи и преобразования движения в паровой машине, однако еще ряд лет маховик заклинивался не на валу кривошипа, а на валу зубчатого колеса, находившегося в зацеплении с колесом, заклиненным на валу кривошипа.

Возникновение и развитие паровой машины и входящих в ее состав механизмов и звеньев — кривошипно-ползунного механизма, планетарного механизма, маховика, центробежного регулятора, а также параллелограмма Уатта, служившего для спрямления движения конца коромысла, дали импульс к созданию науки о силах, действующих на части машины в процессе ее движения,— динамики машин.

Вопрос о силах инерции был ясен уже Даламберу и Эйлеру, общее аналитическое решение его было дано Лагранжем. Карно в своей замечательной книге «Основные принципы равновесия и движения»[1], явившейся в сущности первым сочинением по динамике машин, следующим образом определяет силы инерции: «Количество движения, которое каждое из тел передает другому, когда то изменяет движение первого, называется силой инерции этого первого. Подобное происходит и тогда, когда дело идет о системе тел. Тогда будем называть силой инерции каждого из них в каждое мгновение то сопротивление, коим оно противится изменению своего состояния, т. е. реакцию, которую оно производит на систему других тел, побуждающих его перейти от покоя к движению, от движения к покою, или от одного движения к иному движению: иными словами, силу, равную и противоположную той, которую следует приложить к этому подвижному телу, чтобы заставить его перейти из того состояния, в котором оно находилось, в то состояние, в котором оно окажется через мгновение»[2].

Если не считать уравнения движения машины, предложенного Л. Карно в форме уравнения живых сил, то первой задачей динамики машин, вставшей перед механиками, оказалась задача о маховом колесе. О ней рассуждает Гениво, а Навье в своих дополнениях к «Гидрав-

[1] *L. Carnot.* Essai sur les machines en général. Paris, 1783, 2 de éd, Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Paris, 1803.

[2] *L. Carnot.* Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Paris, an III—1803, p. 68—69.

лической архитектуре» Белидора [3] приводит исследование движения махового колеса и предлагает метод его расчета. Несколько позже Понселе ввел понятие коэффициента неравномерности [4].

Навье первым ввел предположение о бесконечной длине шатуна. Через десять лет Кориолис при исследовании паровой машины воспользовался графическим методом. Он построил при этом первую диаграмму прикладной механики — диаграмму касательных усилий, за которой последовали диаграмма работ и диаграмма переменных приведенных масс звеньев кривошипно-ползунного механизма, без учета массы шатуна.

Следующий существенный шаг в направлении динамического расчета механизма паровой машины был сделан Мореном. В своем курсе прикладной механики один из творцов теории трения Морен предложил новый способ построения диаграммы касательных усилий и метод приближенного расчета махового колеса [5]. Однако Морен упустил вопрос о влиянии поступательно движущихся масс на вращательное движение машины и тем самым задержал развитие идей Кориолиса и Понселе. Что касается диаграммы касательных усилий, то он заимствовал ее из сочинений Кориолиса и приспособил к расчету обода маховика, значительно упростив ее в теоретическом отношении. Но, пренебрегая динамическим расчетом Кориолиса, Морен сделал и одно весьма существенное улучшение — он впервые учитывает конечность длины шатуна.

Курс Морена вышел в 1846 г. и отражал состояние техники первой трети XIX века, когда скорость поршня паровой машины редко достигала величины, равной 1 м/сек. Уже во второй половине века средние скорости поршня превысили 7 м/сек. и пренебрегать массой возвратно-поступательных масс машины стало невозможным. Поэтому работы Портера, а затем и Радингера, в сущности не представлявшие особенной новизны по сравнению

[3] *Belidor*. Architecture Hydraulique, Nouvelle édition avec des note et additions par M. Navier, Première partie, t. I. Paris, 1819, p. 388—393.

[4] *Poncelet*. Traité de mécanique appliquée aux machines, I, 1845, p. 131.

[5] *Morin*. Leçons de mècanique practique, p. 3. Paris, 1846, p. 312—368.

с исследованиями Понселе, получили значительное распространение среди машиноведов и были восторженно поддержаны последними. В работе, опубликованной в 1868 г., Портер предложил учитывать силы инерции поступательно движущихся масс; им были разработаны диаграммы давлений, передаваемых от поступательно движущихся масс на шатун, с учетом возникающих при этом сил инерции.

Что касается самих сил инерции, то Понселе указал на необходимость их учета во время движения машины. В середине XIX века Луи Лешателье [6] и астроном Ивон Вильярсо [7] разработали вопрос об учете сил инерции. Первый из этих ученых дал элементарную теорию сил инерции в форме, достаточной для технических применений, и сам воспользовался ею при расчете устойчивости локомотивов в движении. Вильярсо, работая в том же направлении, определил силы инерции механизма паровой машины локомотива.

Существенное затруднение в развитии теории сил инерции и их уравновешивания составило само наличие в составе паровой машины кривошипно-ползунного механизма. При этом вращение кривошипа совершается не с постоянной скоростью, а колеблется между некоторыми крайними значениями угловой скорости; следовательно, существует и угловое ускорение, правда, небольшое по абсолютной величине.

Таким образом, величина силы инерции поступательно движущихся масс зависит от положения механизма, от квадрата угловой скорости и от ускорения. Портер и Радингер предложили считать вращение кривошипа равномерным. При этом Радингер предложил считать возвратно-поступательной массой сумму масс поршня, крестовины, шатуна и массы кривошипа, отнесенной к его пальцу. Ошибка эта позже была исправлена Дженкинсом.

В 1872 г. Радингер разработал теорию уравновешивания сил инерции при помощи противовесов.

Значительную роль в развитии динамики машин сыграла также работа Шлика об уравновешивании

[6] Etudes sur la stabilité des machines locomotives en mouvement. Paris, 1849.

[7] Thèorie de la stabilité des machines locomotives en mouvement. Paris, 1852.

поступательно движущихся масс. Эта задача, актуальная для судовых двигателей, где неуравновешенность приводила к серьезным неприятностям, была теоретически решена американцем Тейлором. По-видимому, Шлик не знал о существовании решения Тейлора, выполненного за три года до него; он образцово решил задачу, но опять-таки при предположении бесконечной длины шатуна.

К своеобразным выводам, значительно отличающимся от выводов Радингера, пришел Штрибек.

Таким было положение по вопросу об определении сил инерции поступательно движущихся масс паровой машины и об их уравновешивании к началу XX века. Первая работа Ассура также относится к той же группе вопросов. Как указывает Ассур, когда ему «...пришлось впервые познакомиться с диаметрально противоположными выводами Радингера и Штрибека по вопросу о плавности хода паровых машин, он был неприятно поражен неполнотой их исследования.

И тот, и другой рассматривают удар в крейцкопфном болте и пальце кривошипа как результат перемены давления под углом в 180°. Между тем в действительности явление происходит совершенно иначе. На палец кривошипа и его крейцкопфный болт действуют не только одни параллельные оси цилиндра усилия, но и перпендикулярные к последней. Первым из них мы присвоим в дальнейшем название осевых давлений, вторым — поперечных...» [8].

Таким образом, в те моменты, когда происходит перемена знака, осевые усилия становятся равными нулю, а усилия, нормальные к направляющим («поперечные», как их называет Л. В. Ассур), приобретают важное значение.

Исследование Ассура, подобно и всем предшествующим, выполняется при том предположении, что шатун имеет бесконечную длину и, следовательно, все его точки имеют равные скорости и ускорения. В этом случае сила инерции приложена в центре тяжести шатуна; Ассур распределяет ее по двум точкам: на палец кривошипа

[8] *Л. Ассур*. В вопросу о плавности хода паровых машин.— Бюллетени политехнического общества, состоящего при Императорском техническом училище, 1906, № 8, стр. 341.

и на крейцкопф. Далее он переходит к шатуну конечной длины и определяет точку приложения силы инерции шатуна для этого случая.

Таково содержание вступительной главы статьи Ассура, названной «Соображения общего характера». Интересно, что уже здесь, в чисто динамической задаче, проявился интерес автора к кинематическим ее основаниям. Переход от нее к исследованию движений логичен и закономерен.

Вторая глава статьи посвящена построению сил инерции шатуна. Проведя достаточно подробное графическое исследование, Л. В. Ассур приходит к выводу, что «...в обыкновенном шатунном механизме всегда наблюдается удар в крейцкопфной головке, и избежать его вряд ли имеется возможность, не изменяя существенно конструктивных форм. Между тем в кривошипной головке представляется полная возможность дифференцировать удар и получить плавный поворот вектора полных давлений». И далее: «Сопоставляя последние выводы со сказанным в конце первой главы, мы придем к заключению, что наибольшей плавности хода мы достигнем, если перенесем неизбежный удар к крейцкопфной головке в мертвую точку, при этом удар в параллелях будет отсутствовать, а критический момент для кривошипной головки будет, по-видимому, достаточно далеко выдвинут за мертвую точку..., чтобы удар и здесь стал невозможен» [9].

И заключительным, несколько минорным аккордом у Ассура звучит признание, что все изложенное нужно проверить на практике паровозостроения.

Итак, в этом рассуждении, вызванном практическими нуждами конструирования и построения паровых машин, уже имеется предчувствие взаимосвязанности механических задач. От определения силы инерции, пропорциональной массе тела и квадрату ускорения, путь лежит теперь к поискам параметров движения твердого тела, а именно, от задачи чисто динамической к задаче чисто кинематической. Таким образом, мы переходим ко второй работе Ассура, опубликованной в 1907 г. в тех же Бюллетенях политехнического общества под заглавием:

[9] *Л. Ассур.* К вопросу о плавности хода паровых машин, стр. 351—352.

«Две теоремы механики твердого тела в применении к изучению движения плоских механизмов».

Содержание статьи несложно, посвящена она исследованию построения планов скоростей и ускорений для нескольких случаев. (Интересно, что в одном американском техническом журнале 50-х годов была помещена статья, в которой с торжеством приводится решение все тех же тривиальных случаев, в частности решенных Ассуром в 1907 г.,— по-видимому, сказывается отсутствие достаточно полной информации.) В самом начале статьи Ассур высказывает мысль, которую он впоследствии неоднократно повторит,— о существовании некоторого подобия между задачами кинематики и задачами статики. На этом основании Ассур и будет искать общие решения для кинематических задач. Здесь же он замечает, что построения планов, или картин скоростей и ускорений играют в кинематике стержневых механизмов роль, аналогичную той, которую планы Кремоны занимают в статике стержневых систем.

Свое исследование Ассур основывает на двух теоремах:

1. Проекции скоростей различных точек неизменной прямой на направление последней равны между собой.

2. Проекции полного ускорения двух точек неизменной прямой на направление этой прямой отличаются на величину центростремительного ускорения в относительном вращении одной точки относительно другой.

Что касается первой теоремы, то Ассур указывает на имеющиеся ее доказательства. Вторую теорему он доказывает. В дальнейшем она станет исходным пунктом его рассуждений об аналогах ускорений.

На основании обеих теорем Ассур излагает метод планов скоростей и ускорений. В те годы этот метод был еще мало известен, в учебники и учебные пособия он не вошел, и при определении кинематических параметров преподаватели пользовались главным образом методом, основанным на теореме Аронгольда — Кеннеди о мгновенных центрах вращения. Поэтому методическое значение статьи неоспоримо. Автор и не претендовал ни на что большее. Ссылаясь на приведенные им примеры, Ассур указывает на простоту идеи метода. «К достоинствам его,— пишет он,— надо отнести, что мы можем избежать необходимости пользоваться нередко удаляющимися далеко за пределы чертежа мгновенными центрами скоростей и ускорений, благодаря чему построение всегда можно сконцентрировать на небольшой площади, если только в самом механизме не допущены несоразмерно большие скорости и ускорения. При проектировании нового механизма план скоростей и ускорений наглядно показывает, какие соотношения требуют изменения для получения желаемого результата. Наконец, в то время, как планы ускорений дают возможность определить силы инерции (просим отметить связь с предыдущей статьей! — *Авт.*) в механизме, планы скоростей в связи с законом виртуальных скоростей дают нам в руки простейший метод, чтобы учесть влияние любой силы» [10].

Однако интерес статьи Ассура отнюдь не ограничивается ее методическим значением. Характерно, что при решении всех пяти задач Ассур пользуется группами Сильвестра [11]; иногда он наслаивает их на механизм, но иногда рассматривает и в качестве самостоятельных образований, допускающих аналитическое исследование. Можно сказать, что у него начинают в общих чертах появляться идеи того метода, который был разработан им позже; пока он на ощупь пытается найти то общее, что проявляется в совершенно разнородных (по мнению машиноведов того времени) задачах. Обратившись к кинематике, Ассур начинает исследовать предоставляемые ею возможности. Идея метода «аналогов ускорений» уже начинает выкристаллизовываться.

* * *

Итак, Л. В. Ассур переехал в Петербург. Здесь он рассчитывал получить место преподавателя в созданном недавно Политехническом институте или в каком-либо другом из петербургских высших технических учебных заведений. Дело в том, что до 1917 г. почти три четверти технических школ находилось в Петербурге. Здесь были Горный институт, Институт инженеров путей сооб-

[10] *Л. Ассур.* Две теоремы механики твердого тела в применении к изучению движения плоских механизмов.— Бюллетени политехнического общества, 1907, № 6, стр. 306.

[11] Группы Сильвестра — диады, или двухповодковые группы (два звена, соединенные между собой шарниром).

щения, Институт гражданских инженеров, Технологический институт, Электротехнический институт, Лесной институт, Сельскохозяйственный институт, Артиллерийская академия, Морская академия. Однако штаты везде были заполнены, и рассчитывать на получение педагогической работы ранее чем через год не приходилось.

Пришлось искать место инженера. Еще из Москвы Ассур списался с инженером Ф. Ф. Кнорре, который руководил Петербургскими городскими мостостроительными мастерскими. Он принял Леонида Владимировича в мастерские на должность своего помощника и помог устроиться с квартирой.

Мостостроительные мастерские были созданы в связи с новыми потребностями коммунального хозяйства города.

В 1860 г. в Петербурге инженер-полковник Домантович проложил первую конно-железную городскую дорогу, а в следующем 1861 г. «конка» впервые провезла пассажиров по Невскому проспекту, Садовой и по некоторым другим улицам города.

Последняя четверть XIX века характерна поисками новых видов транспорта и новых источников энергии для привода транспортных средств. Появление двигателя внутреннего сгорания вызвало к жизни автомобиль; создание электромотора обусловило изобретение трамвая.

В 1880 г. в Петербурге появляется новое средство городского транспорта — электрический трамвай, который постепенно начинает вытеснять конку. В связи с этим встал вопрос о перестройке мостов и были созданы городские общественные мостостроительные мастерские. К проектированию новых мостов, которые было решено возвести на месте старых, к экспертизе и для консультации были привлечены многие инженеры путей сообщения, а среди них такие известные мостостроители, как профессор Н. А. Белелюбский и др.

Л. В. Ассур ведал подготовкой строительства и материальным обеспечением постройки мостов: Аларчина, Пантелеймоновского (теперь — мост Пестеля), Михайловского (Садовый мост) и Введенского. Условия работы были очень тяжелые и работать приходилось много.

Все эти мосты были открыты для движения на протяжении 1907—1908 гг.

Осенью 1907 г. у Л. В. Ассура произошло два больших события: родилась дочь Ольга, и он был приглашен в Петербургский политехнический институт в качестве преподавателя машиностроительного черчения на механическое отделение института. С этого времени жизнь Ассура связана с этим учебным заведением.

Петербургский политехнический институт был четвертым из группы универсальных технических учебных заведений, вызванных к жизни нуждами развивающейся русской промышленности: Харьковский технологический институт (1885), Киевский политехнический институт (1898), Варшавский политехнический институт (1898), наконец, Петербургский политехнический институт(1902). Три из этих учебных заведений связаны с именем замечательного инженера-педагога В. Л. Кирпичева.

Виктор Львович Кирпичев (1845—1913) родился в семье преподавателя математики. В 1865 г. он поступил в Артиллерийскую академию, где, в частности, слушал лекции выдающегося механика И. А. Вышнеградского. Вышнеградский создал кружок ученых, работавших в области прикладной механики. Этот кружок, прозванный по числу его членов «пентагональным обществом», собирался еженедельно по очереди у каждого из участников. В числе последних были и ученики Вышнеградского В. Л. Кирпичев и Н. П. Петров.

В 1868 г. В. Л. Кирпичев окончил курс Артиллерийской академии и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Он получает заграничную командировку и в Гейдельбергском университете слушает лекции Кирхгофа по теоретической и экспериментальной физике.

В 1870 г. В. Л. Кирпичев начал преподавать в Петербургском практическом технологическом институте сперва на химическом, а затем и на механическом отделении. Читал он курс прикладной механики. В 1876 г. он был избран профессором по курсу сопротивления материалов; одновременно вел курсы деталей машин и подъемных машин, которые «унаследовал» от И. А. Вышнеградского. Лекции его по сопротивлению материалов были записаны студентами и изданы сначала в виде литографированного издания, а затем, после значительной авторской переработки,— в виде двухтомного курса (том 1-й вышел в 1898 г., том 2-й — в 1901 г.).

В 1885 г. В. Л. Кирпичев был назначен директором открывшегося тогда Харьковского технологического института, преподавательскую и научную работу в котором он сразу же сумел поставить на большую высоту.

В 1897 г. он был привлечен к разработке учебных планов запроектированных тогда политехнических институтов. Тогда же он был переведен на должность директора Киевского политехнического института.

В 1902 г. В. Л. Кирпичев принял активное участие в работе комиссии по преобразованию высших учебных заведений; летом 1903 г. он оставил Киев и переехал в Петербург для работы в качестве председателя строительной комиссии по завершению строительства Петербургского политехнического института; тогда же он был избран профессором прикладной и строительной механики на технических отделениях Политехнического института.

Как и Н. Е. Жуковский, В. Л. Кирпичев большое значение придавал теоретической подготовке студентов. Еще в Киеве он начал свои беседы о механике. В Петербурге продолжил их, проведя ряд бесед об эллиптических функциях, вариационном исчислении, номографии, оптическом изучении деформаций, уравновешивании машин, теории регуляторов и некоторые другие. Из этих бесед возникли его классические книги: «Беседы о механике», «Основания графической статики» и «Лишние неизвестные в строительной механике», вошедшие в золотой фонд русской научно-технической литературы.

Кирпичев был одним из тех профессоров, чей научный и нравственный авторитет немало значил для молодых преподавателей — здесь они получали и совет, и помощь, и научное направление.

Ректором Политехнического института и руководителем кафедры теоретической механики был замечательный русский механик, один из основоположников динамики тела переменной массы профессор И. В. Мещерский.

С января 1908 г. Л. В. Ассур начал вести практические занятия по курсу теоретической механики. Затем, осенью 1908 г. В. Л. Кирпичев поручил ему руководство занятиями по прикладной механике, как тогда назывался курс теории механизмов и машин.

Сам В. Л. Кирпичев читал курс прикладной механики. По воспоминаниям профессора А. П. Иванова, лекции его не представляли собой систематическое изложение курса по определенной программе, и в то же время в них давалось все самое существенное, касавшееся какого-либо конкретного вопроса.

Кирпичев был энтузиастом техники. В одной из своих речей он сказал, что «инженеры обязаны заботиться о красоте своих сооружений, а потому они должны получать и художественное образование... Это указывает состав инженерного образования: нужно начинать с чистой науки, но в то же время не оставлять без внимания и художества» [12]. И далее: «На многих одно слово машина производит самое удручающее впечатление. Она рассматривается как темная сила, с которой нельзя бороться, которой человек должен служить как идолу, требующему иногда человеческих жертв. Один автор, описывая завод, говорит: «Машины царили всюду, и около них жалкими казались эти угрюмые люди». Сделаем еще шаг по пути этих взглядов и придется вспомнить сказку, рассказанную у Рело, про дальнейшую будущность человеческого рода, а именно: усовершенствование машин дошло до того, что они взбунтовались против людей, поработили их и заставили служить себе.

Такие взгляды не могут разделяться инженерами, которые сами делают машины и другие сооружения, заводы, железные дороги, воплощая свои творческие мысли в формы, сделанные из железа и камней. Ведь мысль, превратившаяся в дело, в факт, не может производить удручающее впечатление, а напротив того, самое светлое и радостное. Инженер никогда не согласится считать машину или каменную постройку господином, которому должны служить люди как идолу, или допустить, что иногда необходимы жертвы этому чудовищу. Мы — господа, а машины — наши слуги, и кто сомневается в том, тем я посоветую посмотреть действие машины, называемой сервомотор, т. е. порабощенный двигатель» [13].

Выше мы видели, какое значение придавал В. Л. Кирпичев глубокой теоретической и в первую очередь математической подготовке будущих инженеров. «Я уже упоминал о том,— пишет Кирпичев,— что из всех наук наиболь-

[12] *В. Л. Кирпичев.* Vivat, Crescat, Floreat. Речь, произнесенная 31 августа 1898 г. — В кн.: Сборник материалов по истории возникновения Киевского политехнического института, Киев, 1914, стр. 29.

[13] Там же, стр. 31.

шая сила фантазии требуется в математике, и подтверждением этого служит тот факт, что среди математиков мы встречаем много изобретателей. Укажу на Архимеда, Кардана, Паскаля (гидравлический пресс, арифметическая машина), Роберваля, Дезарга, Лагира, Ивана Бернулли (ему принадлежит так называемый шпиль Бетанкура — изобретение, сделанное в 1741 г. в ответ на задачу об устранении недостатков кабестана, поставленную Парижской академией. Премия, обещанная за лучшее решение этой задачи, была разделена между 4 лицами, в числе их И. Бернулли), Эйлера (осевая турбина, зацепление по развертке круга), Сегира, Понселе, Клапейрона (опережение и перекрытие золотников), Поселье, Гарта, Сильвестра (плагиограф, изоклиностат) и, наконец, на нашего знаменитого математика П. Л. Чебышева с его множеством механических изобретений» [14].

Он пишет далее: «Очень интересно и поучительно изучать разнообразие тем и задач, которые стремятся разрешить изобретатели. Наш знаменитый ученый П. Л. Чебышев, говоря о темах и задачах, разрабатываемых математиками, высказывался следующим образом: в прежнее время задачи предлагали боги (он имеет в виду делийскую задачу об удвоении куба, которая по мифическому сказанию была предложена самим Аполлоном, и другие задачи, исходившие из храмов классической древности), потом задачи предлагали полубоги (здесь Чебышев подразумевает великих математиков 17—18 столетий, между которыми был распространен обычай задавать друг другу задачи). Теперь, продолжает Чебышев, задачи ставятся массой и ее нуждами» [15].

Иван Всеволодович Мещерский, второй из руководящих преподавателей-механиков Политехнического института, окончил Петербургский университет в 1882 г. и был оставлен при кафедре прикладной математики. В 1890 г. он начал преподавать в университете: читал курсы интегрирования уравнений механики и графостатику, руководил практическими занятиями по теоретической механике. Теоретическую механику он читал также на Высших

[14] *В. Л. Кирпичев*. Значение фантазии для инженеров.— В кн.: Известия Киевского политехнического института, кн. 3, 1903, стр. 15.
[15] Там же, стр. 16.

женских курсах и в Институте инженеров путей сообщения. В 1902 г. он был избран профессором теоретической механики в создаваемом тогда Политехническом институте. 3 октября 1902 г. в Политехническом институте была прочитана первая лекция — прочел ее И. В. Мещерский.

Педагогические идеи Мещерского в области методики преподавания теоретической механики заключались в следующем: курс теоретической механики должен быть связан с курсом прикладной механики и отображать все его разделы. Таким образом студент, слушающий теоретическую механику, знакомится с ее практическими приложениями и в дальнейшем, изучая курсы теории механизмов, сопротивления материалов, графостатики и пр., видит в них развитие тех начал, которые уже известны ему из прочитанного курса. В связи с этим и задачи по курсу теоретической механики должны иметь конкретное техническое содержание.

Изучив постановку преподавания механики в ряде высших технических школ Западной Европы, Мещерский пришел к убеждению, что для воспитания хорошего инженера прежде всего ему нужно сообщить определенную сумму теоретических знаний, что в значительной степени облегчит изучение специальных предметов. По его словам, «математика, механика, физика и химия в известном объеме, который может быть установлен, составляют основу всякого технического образования; приступая к изучению технической специальности, будущий инженер должен уже владеть этими предметами в указанном объеме» [16].

Отсюда вытекает и значение теоретической механики, являющейся связующей дисциплиной между общеобразовательными и специальными предметами, самой технической из теоретических дисциплин. Составляя основу значительной части техники, теоретическая механика имеет одной из своих задач создать у обучаемого понимание инженерной сущности задачи, показать ее практическую значимость и в то же время составить определенную сумму технических знаний. Теоретическая механика является как бы вводным курсом к прикладной механике, что отнюдь не уменьшает и ее самостоятельного значения.

[16] *И. В. Мещерский.* Преподавание механики и механические коллекции в некоторых высших учебных заведениях Италии, Франции, Швейцарии и Германии. СПб., 1895.

Такое понимание роли теоретической механики отразилось и в знаменитом «Задачнике» Мещерского, предназначенном для высших технических учебных заведений.

В 1907—1908 гг. И. В. Мещерский задумал составить сборник задач по курсу теоретической механики для студентов высших учебных заведений. К этой работе он привлек ряд своих сотрудников, в том числе Л. В. Ассура, И. И. Бентковского, А. А. Горева, К. М. Дубягу, В. Ф. Миткевича, Е. Л. Николаи, К. Э. Рериха, Д. Я. Тагеева, В. В. Таклинского, А. И. Тудоровского, Л. К. Федермана, В. Д. Шатрова. Сам Мещерский уделял задачнику много внимания: каждую задачу он вместе с ее автором проверял и обязательно решал. Член-корреспондент АН СССР А. И. Тудоровский рассказывал, что над предложенной им задачей о гальванометре Мещерский просидел вместе с ним около 4 часов, пока не были установлены все ее достоинства и не найдены все возможные способы ее решения.

В течение 1907—1910 гг. сборник задач несколько раз был издан литографским способом, а в 1914 г. вышло в свет первое полное типографское его издание. Следует отметить, что в те же годы во многих высших технических учебных заведениях издавались литографированные «решебники» к задачнику Мещерского.

Выше было упомянуто о научно-техническом кружке, объединявшем молодых преподавателей и руководимом В. Л. Кирпичевым. Л. В. Ассур с первых же дней своей работы в Политехническом институте стал постоянным членом этого кружка. Здесь он ознакомил членов кружка со своими исследованиями в области кинематики механизмов: 4 марта 1908 г. на заседании кружка прочитал доклад на тему «Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем». Полный текст работы под тем же заглавием был опубликован в 1908—1909 гг. в 9 и 10-м томах «Известий СПб политехнического института», а в 11-м томе, вышедшем в свет в 1909 г., было опубликовано второе его сочинение (мемуар) на ту же тему — «Основные свойства аналогов ускорений в аналитическом изложении».

Генетическая связь обоих мемуаров с разобранной выше статьей видна хотя бы из того, что первый раздел первого мемуара представляет собой не что иное, как повторение той статьи, пополненное некоторыми замечаниями. Ассуру самому стали совершенно ясны недостатки метода планов скоростей и ускорений в том виде, как его разработал О. Мор (о работах Смита Ассур не упоминает) [17]. Отметив достоинства метода, он продолжает: «Несмотря на столь серьезное преимущество метода Мора,... он не пользуется той популярностью, которой он справедливо заслуживает. Объясняется это, быть может, тем, что в основе предлагаемых построений нет того единого начала, того минимального количества однообразных приемов, которые могли бы превратить его в краткий прикладной рецепт.

... Ввиду этого думается, что предлагаемые ниже основы построения могут оказаться плодотворными; упомянуть о них здесь тем более уместно, что это составит естественное введение к изложенным в третьей главе построениям аналогов ускорений. Практическое значение последних заключается в том, что они содержат в себе, как частный случай, построение частных производных от скоростей точек системы по ее независимым координатным параметрам, когда при любом положении системы скорости ее точек будут по величине и направлению функциями одних лишь параметров» [18].

Таким образом, в своем методе Ассур моделирует задачу и сперва находит решение модели, а от него переходит к конкретной задаче. Здесь несомненна связь с методом динамических моделей, который развивал В. Л. Кирпичев в своих лекциях по механике, т. е. в сущности с той идеей, которая заложена в математическом направлении, известном под названием операционного исчисления. Кирпичев, рассматривая вопросы динамики, или математической физики, замечает, что часто совершенно различные по существу вопросы приводят к уравнениям, совершенно одинаковым по виду. «Аналитическая форма уравнений,— говорит Кирпичев,— оказывается одинаковой для двух и более вопросов, хотя буквы, входящие в члены уравне-

[17] Метод планов скоростей и ускорений был предложен немецким механиком О. Мором в ряде статей, опубликованных на протяжении 1879—1887 гг., и английским ученым Р. Смитом в 1885 г. Сущность метода заключается в построениях совокупностей фигур, стороны которых располагаются под определенным углом к сторонам схемы исходного механизма.

[18] *Л. В. Ассур.* Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем.— Известия СПб Политехнического института, 1908, т. 9, вып. 2, стр. 736.

ний, изображают в этих вопросах совершенно различные, часто неоднородные величины. Такое формальное сходство позволяет применять одинаковые математические приемы для интегрирования и разрешения уравнений; мы пользуемся решением, полученным для одного вопроса, и применяем его для других, изображающихся такими же уравнениями. Один вопрос служит моделью, или образцом, для нескольких других; мы можем прямо списать готовое уже решение, находя совершенно излишним вновь повторять все прежние приемы и выводы.

Такие случаи сходства довольно часты, и на это не всегда обращают внимание в курсах по прикладной механике. Вместо того, чтобы ограничиться ссылкой на давно известный образец и взять готовое решение, разбирают вопрос вновь и совершенно самостоятельно, без всякой связи с другими» [19].

Рассмотрим сперва сущность метода аналогов в кинематике. Пусть задано движение какого-либо механизма. Углы поворота и перемещения отдельных звеньев и точек этих звеньев можно задать в функции угла поворота φ или перемещения S ведущего звена. Скорости и ускорения звеньев и точек, принадлежащих этим звеньям, можно также выразить в функциях скоростей и ускорений ведущего звена. Так, угловую скорость ω_k некоторого звена k можно выразить в форме

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\omega_{k\varphi} = \omega i_{k\varphi},$$

где ω — угловая скорость ведущего звена, а $\omega_{k\varphi}$ — безразмерная угловая скорость k-го звена; $i_{k\varphi}$ равная $\omega_{k\varphi}$ величина передаточного отношения от звена k к ведущему звену.

Дифференцируя по времени полученное выражение, получаем выражение для углового ускорения того же звена:

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{\bar{d}}{dt}(\omega\omega_{k\varphi}) = \omega^2\varepsilon_{k\varphi} + \varepsilon\omega_{k\varphi} = \omega^2 i'_{k\varphi} + \varepsilon i_{k\varphi},$$

где

$$i'_{k\varphi} = \frac{di_{k\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\Phi_{k\varphi}}{d\varphi} = \varepsilon_{k\varphi}.$$

[19] *В. Л. Кирпичев.* Беседы о механике, изд 5-е. Гостеоретиздат, 1951, стр. 320.

Аналогично получаются выражения для скорости и ускорения какой-либо точки M, принадлежащей звену k, представленные в функциях обобщенной координаты φ. Такие выражения получаются в результате дифференцирования радиуса-вектора $\bar{r}_M$ точки M по времени.

Таким образом, для скорости $\bar{v}_M$ точки M получим:

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_M}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\bar{v}_{M\varphi}.$$

Здесь вектор $\bar{v}_{M\varphi}$ представляет собой геометрическую сумму векторов $\bar{v}_{M\varphi}^{\text{В}}$ и $\bar{v}_{M\varphi}^{\text{П}}$, определяющих изменение длины радиуса-вектора $\bar{r}_M$ и изменение его угла поворота. Эти векторы имеют размерность длины и их можно назвать аналогами скоростей.

Дифференцированием вектора $\bar{v}_M$ по времени получим ускорение $\bar{a}_M$ точки M:

$$\bar{a}_M = \frac{d}{dt}(\omega\bar{v}_{M\varphi}) = \omega\frac{d\bar{v}_{M\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \bar{v}_{M\varphi}\frac{d\omega}{dt} = \omega^2\bar{a}_{M\varphi} + \varepsilon\bar{v}_{M\varphi}.$$

Здесь вектор $\bar{a}_{M\varphi}$, имеющий размерность длины, может быть назван вектором аналога ускорения точки M. Он представляет собой геометрическую сумму аналогов нормального, тангенциального, относительного и поворотного ускорений.

Если ведущее звено входит в поступательную пару, то обобщенной координатой явится его перемещение S.

Итак, аналоги скоростей и ускорений зависят только от обобщенной координаты и не зависят от времени; следовательно, кинематическое исследование можно проводить чисто геометрическим путем. Для этого, если ведущее звено вращается вокруг некоторой точки, поворачивают его на угол φ, считая от некоторого положения, принятого за начальное, и определяют перемещения всех остальных звеньев. Далее, если требуется определить скорости и ускорения k-го звена и принадлежащей ему точки M, то находят аналоги скоростей и ускорений $\omega_{k\varphi}$, $\varepsilon_{k\varphi}$, $\bar{v}_{M\varphi}$, $\bar{a}_{M\varphi}$ и подставляют их значения в уравнения, приведенные выше: таким образом получаем значения истинных скоростей и ускорений.

В большинстве случаев предполагают, что ведущее звено вращается с постоянной угловой скоростью ω. В этом случае его угловое ускорение ε равно нулю, и мы получим следующие выражения для скоростей и ускорений k-го звена и его точки M:

$$\overset{0}{\omega}_k = \omega\omega_{k\varphi} = i_{k\varphi}\omega$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_k = \omega^2\varepsilon_{k\varphi}$$

$$\overset{0}{\bar{v}}_M = \omega\bar{v}_{M\varphi}$$

$$\overset{0}{\bar{a}}_M = \omega^2\bar{a}_{M\varphi}.$$

Движение, описываемое этими уравнениями, Н. Е. Жуковский назвал перманентным движением.

Если в уравнениях для истинных скоростей и ускорений приравнять угловую скорость ведущего звена ω нулю, то скорости ω_k и $\bar{v}_M$ также будут равны нулю и мы получим:

$$\overset{\text{н}}{\varepsilon}_k = \varepsilon\omega_{k\varphi}$$

$$\overset{\text{н}}{\bar{a}}_M = \varepsilon\bar{v}_{M\varphi}.$$

Движение ведущего звена, описываемое этими равенствами, носит название начального движения. В начальном движении, названном также Н. Е. Жуковским, угловая скорость ω ведущего звена равна нулю, а следовательно, его нормальные, относительные и кориолисовы ускорения также равны нулю. Таким образом, в начальном движении звенья и точки механизма имеют только угловые и тангенциальные ускорения, линии действия которых совпадают с линиями действия скоростей соответствующих точек звеньев.

Значит, истинное движение каждого механизма в общем случае можно рассматривать состоящим из перманентного и начального движений, а следовательно

$$\omega_k = \overset{0}{\omega}_k$$

$$\varepsilon_k = \overset{0}{\varepsilon}_k + \overset{\text{н}}{\varepsilon}_k$$

$$\bar{v}_M = \overset{0}{\bar{v}}_M$$

$$\bar{a}_M = \overset{0}{\bar{a}}_M + \overset{\text{н}}{\bar{a}}_M.$$

Производя исследование механизма в перманентном движении и пользуясь полученными величинами аналогов $\omega_{k\varphi}$ и $\bar{v}_{M\varphi}$, с помощью соотношений начального движения можно определить значения $\overset{\text{н}}{\varepsilon}_k$ и $\overset{\text{н}}{\bar{a}}_M$ и, подставив их в последние равенства, определить истинные скорости и ускорения звеньев механизма.

Возможность раздельного рассмотрения перманентного и начального движений механизма имеет весьма существенное значение при решении кинематических и динамических задач теории механизмов. Оно позволяет при кинематическом исследовании определять положения, скорости и ускорения звеньев в функции обобщенной координаты механизма, а не в функции времени. Истинный закон изменения обобщенной координаты от времени зависит от сил, действующих и возникающих в механизме, и может быть определен только после динамического исследования механизма. Определив в результате этого исследования закон изменения обобщенной координаты, например, угла поворота φ ведущего звена от времени, мы определим угловую скорость этого звена $\omega = \varphi' (t)$ и его угловое ускорение $\varepsilon = \varphi'' (t)$. После этого переходим к определению истинных скоростей и ускорений всех звеньев механизма.

Таким образом, решение распадается на два этапа: сперва производится определение с помощью аналогов скоростей и ускорений геометрической модели движения, его геометрического скелета, а затем с помощью кинематических и динамических данных движение механизма приводится к данному конкретному случаю. Из изложенного явствует, что импульсом к развитию теории аналогов ускорений для Ассура послужило как учение В. Л. Кирпичева о моделировании законов движений, так и предложенное Н. Е. Жуковским разложение движения механизма на перманентное и начальное движения. Однако Ассур поставил перед собой значительно дальше идущую цель и применил своеобразную методику решения задачи.

При изложении рассуждений Ассура мы воспользуемся его оригинальными обозначениями, которые несколько отличаются от принятых в настоящее время (и использованных выше) обозначений. Математическое выражение Ассур ищет для аналогов ускорений, которые ему нужны для решения кинетостатической задачи. При этом он исследует сперва движение с одной степенью свободы, находит математическое выражение для аналогов ускорений и распространяет затем полученные результаты на движение с несколькими степенями свободы.

Итак, пусть задано движение с одной степенью свободы. Обозначим скорость, тангенциальную составляющую ускорения и нормальную составляющую ускорения некоторой точки M соответственно v^m, t^m, n^m. Тогда, очевидно,

$$v^m = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{\partial\varphi}\varphi'; \quad t^m = \frac{dv^m}{dt}; \quad n^m = \frac{(v^m)^2}{\rho}.$$

Пусть закон движения задан в форме: $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$ (перманентное движение!). Соответствующие обозначения для скорости и составляющих ускорения точки M будут v^m_φ, t^m_φ, n^m_φ.

Следовательно,

$$v^m_\varphi = \frac{\partial s}{\partial\varphi}; \quad t^m_\varphi = \frac{\partial v^m_\varphi}{dt} = \frac{\partial v^m}{\partial\varphi}; \quad n^m_\varphi = \frac{(v^m_\varphi)^2}{\rho}.$$

Откуда получаем:

$$v^m = v^m_\varphi\varphi'; \, t^m = t^m_\varphi \cdot \varphi'^2 + v^m_\varphi\varphi''; \, n^m = n^m_\varphi\varphi'^2.$$

Рассматривая эти соотношения, Ассур приходит к выводу, что для определения скоростей и ускорений движения, происходящего по любому закону, достаточным будет построить один план скоростей и один план ускорений для движения по закону: $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$. Тогда все параметры любого другого закона движения можно будет определить при помощи простых арифметических действий.

Пусть задано движение по некоторой кривой и известно, что скорость в некоторой точке A этой кривой равна v_φ, а в следующей точке A_1 той же кривой — v'_φ. Перенесем начальные точки обоих векторов скоростей в одну точку и соединим конечные точки прямой линией. Рассмотрим полученный в результате этого треугольник (рис. 1). Его сторона Oa равна скорости $\vec{v_\varphi}$, а сторона Oa_2 — скорости v'_φ; следовательно, третья сторона aa_2 изображает собой ускорение. Опустим из точки a на сторону Oa_2 перпендикуляр aa_1. Ассур называет предельные выражения $\lim\frac{aa_2}{dt}$, $\lim\frac{aa_1}{dt}$, $\lim\frac{a_1a_2}{dt}$ полной, нормальной и количественной производными по времени от вектора скорости v_φ. Если движение системы совершается по закону $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$, то эти производные представляют полное ускорение точки, его нормальную и тангенциальную составляющие в действительном движении. Ассур обозначает их j^m_φ, n^m_φ, t^m_φ. Если же движение системы совершается по иному закону, то Ассур записывает этот последний в виде $\varphi_x' = 1$, $\varphi_x'' = 0$ и называет его законом возможного движения. Тогда производные по времени от элементов aa_2, aa_1, a_1a_2 будут отличны как от ускорений возможного движения, так и от ускорений движения действительного; обозначаются они через J_φ^m, N_φ^m, T_φ^m.

$$\text{Так как } n_\varphi^m = \lim \frac{aa_1}{dt} = v_\varphi \frac{d\alpha}{dt} = v_\varphi \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi},$$

$$\text{то } N_\varphi^m = v_\varphi \frac{d\alpha}{dt} = v_\varphi \frac{d\alpha}{\partial\varphi}\varphi' = n_\varphi^m \varphi',$$

$$T_\varphi^m = \frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\varphi' = t_\varphi^m \varphi'.$$

Векторы J_φ^m, N_φ^m, T_φ^m, являющиеся соответственно полной, нормальной и количественной производными по времени от вектора скорости возможного движения, Ассур и назвал аналогами соответствующих ускорений.

Таким образом, в случае, когда возможное движение становится действительным, аналоги ускорений по своему значению переходят в ускорения. Иначе говоря, аналоги ускорений тождественны с ускорениями при условии выполнения системой закона $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$. Аналоги угловых ускорений определяются подобным образом. Следует отметить, что в предыдущем определении в качестве закона возможного движения был принят некоторый частный случай. Определение можно обобщить, задавая движение законом $\varphi_x' = a$, $\varphi_x'' = b$, где a и b — произвольные постоянные величины, или же $\varphi_x' = f_1(\varphi')$, $\varphi_x'' = f_2(\varphi')$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Для этого последнего случая, наиболее общего, из которого предыдущие случаи вытекают как частные, получаем после несложных выкладок:

$$N^m = n_\varphi^m \varphi_x' \varphi'$$

$$T^m = t_\varphi^m \varphi_x' \varphi' + \lambda v_\varphi^m \varphi''$$

$$v_x^m = v_\varphi^m \varphi',$$

где

$$\lambda = \frac{\partial \varphi_x}{\partial \varphi'}.$$

Сопоставляя эти формулы с приведенными выше, видим, что в случае, когда возможное движение становится действительным ($\varphi_x' = \varphi'$; $\lambda = 1$), аналоги ускорений переходят в ускорения.

Итак, Ассур определяет аналоги ускорений для систем с одной степенью свободы, т. е. для таких систем, к которым относится подавляющее большинство механизмов. Но для последних вся совокупность движений определяется одним планом скоростей и одним планом ускорений и поэтому, по мнению самого Ассура, введение аналогов ускорений в расчет едва ли будет существенно полезным. Что же касается систем с несколькими степенями свободы, то в этом случае роль аналогов ускорений уже становится существенной, ибо для характеристики всевозможных движений системы ограниченного числа планов скоростей и ускорений недостаточно, и приходится строить планы аналогов ускорений. Рассмотрев далее случай движения с двумя степенями свободы, Ассур приходит к заключению, что в этом случае для определения скоростей всех возможных движений любой точки системы достаточно построить два плана скоростей, после чего определение необходимой скорости приводится к ряду элементарных операций. Что касается ускорений в системах с двумя степенями свободы, то их определение сводится к геометрическому сложению двух аналогов, соответствующих определенным законам возможных движений.

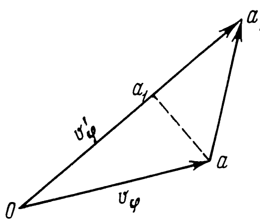


Рис. 1

Таким образом, понятие аналогов ускорений «основано на сравнении значений двух векторов скоростей заданного определенным образом (φ_x', η_x') возможного движения в двух смежных положениях системы при движении последней во времени по определенному закону (φ', η', φ'', η'') действительного движения» [20].

[20] *Л. В. Ассур.* Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем.— Известия СПб Политехнического института, т. 9, вып. 2, стр. 755.

Переходя от частных случаев к общему и исследуя в самом общем случае задачу движения с двумя степенями свободы, Ассур заключает, что в этом случае для определения полных ускорений системы «при помощи элементарных действий достаточно знать для каждой точки ее два вектора скоростей v_φ и v_η, два вектора полных ускорений j_φ и j_η и два вектора аналогов полных ускорений $j_{\varphi/\eta}$ и $\eta_{\eta/\varphi}$. Значения первых четырех получаются построением известных нам планов для законов движения: 1) $\varphi' = 1$, $\eta' = 0$; 2) $\varphi' = 0$, $\eta' = 1$, которые мы назовем основными планами скоростей и ускорений, два же остальных вектора получим, строя ... два основных плана аналогов ускорений. После этого рассмотрение всевозможных движений системы приведется уже к ряду элементарных действий» [21].

Итак, определение всех параметров движения системы с одной и двумя степенями свободы Ассур сводит к простым графическим операциям. Он утверждает далее, что метод аналогов ускорений применим и к системам с n степенями свободы, и приводит таблицы аналогов ускорений.

Для того, чтобы обосновать графическое построение векторов аналогов ускорений, Ассур доказывает две теоремы, которые мы приводим без доказательств.

«Теорема V. Проекции аналогов ускорений двух точек твердого звена стержневой системы на направлении прямой, определяемой этими точками, отличаются на величину аналога центростремительного ускорения в относительном вращении одной точки около другой. Последний по абсолютной величине равен произведению относительных скоростей возможного и действительного движений, деленному на расстояние обеих точек друг от друга. Направление его образует с направлением названного центростремительного ускорения угол 0° или 180°, равный углу между относительными скоростями обоих движений.

Теорема VI. Если в некоторый момент времени совпадают две точки различных твердых звеньев системы, то проекции аналогов ускорений этих двух точек на нормаль к относительной траектории, описываемой точкой одного тела внутри другого, отличаются на сумму трех векторов.

[21] *Л. В. Ассур.* Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем.— Известия СПб. Политехнического института, т. 9, вып. 2, стр. 763.

Первый из них есть аналог центростремительного ускорения в относительном движении и равен произведению относительных скоростей возможного и действительного движений, деленному на радиус кривизны относительной траектории. Второй — подобен добавочному ускорению в относительном движении и определяется по величине, если последнее разделить пополам и заменить в его выражении относительную скорость действительного движения такой же скоростью возможной. Третий — подобен добавочному ускорению возможного движения и определяется по величине, если последнее разделить пополам и заменить в его выражении относительную скорость возможного движения такою же скоростью действительного. Сумма второго и третьего векторов дает аналог добавочного ускорения Кориолиса. Направления всех трех векторов совпадают с направлениями сходных с ними векторов, если совпадают направления относительных скоростей обоих векторов, и образуют с ним угол в 180° в противном случае» [22].

С помощью этих двух теорем можно графически строить планы аналогов ускорений, если заданы условия действительного и возможного движений системы. Ассур указывает при этом, что аналоги ускорений могут найти еще одно применение: с их помощью можно графически определить значения частных производных от скоростей.

Таким образом, разрабатывая свою теорию аналогов ускорений, Ассур пришел к ряду очень интересных выводов о возможности применения этой теории. Очень существенно то, что он заложил основы графического исследования механизмов с несколькими степенями свободы. Эта задача имеет не только теоретический, но и практический интерес, и Ассуру принадлежит честь первой ее постановки и первого решения.

Четвертая глава мемуара посвящена динамическому исследованию движения стержневых систем с одной степенью свободы и расчету усилий в них.

Динамический расчет стержневых систем, или, как эта задача теперь называется в теории механизмов, кинетостатический расчет, привлекла в самом конце XIX и в

[22] *Л. В. Ассур*. Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем.— Известия СПб. Политехнического института, т. 10, вып. 1, стр. 44—45.

первом десятилетии XX века пристальное внимание исследователей. Основы аналитического исследования шарнирных механизмов, заложенные П. Л. Чебышевым и целой плеядой английских ученых, а также графоаналитический метод планов скоростей и ускорений, разработанный, как уже было сказано выше, Мором и Смитом, стимулировали попытки распространить эти исследования на определение реакций в связях механизмов, что было совершенно необходимо для возможности определения нагрузок на звенья механизмов. Несколько позже, уже в своей основной работе по этой теме, Ассур укажет на принципиальное родство между методами исследования ферм и механизмов, вытекающее из тождества их кинематической сущности. Но и в рассматриваемой работе он постоянно разыскивает подобие между обеими этими группами шарнирно-стержневых систем.

Еще в 1878 г. Прелль, воспользовавшись теоретическими построениями кинематической геометрии и применяя аналогию с методом Кульмана, положил основание статике механизмов. В своих графических построениях он вплотную подошел как к решению задачи плоской кинематики (метод планов скоростей и ускорений), так и к решению задачи об определении уравновешивающей силы механизма, находящегося в состоянии движения. Позже Хэйн рассмотрел вопрос об аналитическом решении этой задачи, а графическое решение ее было предложено Виттенбауэром. Наконец Н. Е. Жуковский создал мощный метод исследования кинетостатики механизмов своей теоремой о жестком рычаге.

Метод, предложенный Ассуром, представляет собой комбинацию аналитического исследования с помощью уравнений Лагранжа и некоторых графических построений: по ходу решения задачи он строит графики зависимости живой силы механизма от угла поворота ведущего звена, потенциальной энергии механизма от угла поворота ведущего звена, а также использует планы скоростей, ускорений и аналогов ускорений. Решение Ассура не легкое. Прежде всего он составляет уравнение живой силы и подставляет в него выражения для скоростей, взятые из плана скоростей, построенного для закона $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$. Вычислив ряд значений для живой силы при тех же условиях, которую он обозначает через $F(\varphi)$, он откладывает их по ординате; значения φ откладываются по абсциссе. Таким образом он получает некоторую кривую. Подобным образом он строит кривую потенциальной энергии. Этими кривыми он пользуется при решении уравнения Лагранжа. В результате преобразований последнего он получает выражения для определения φ' и t.

После этого Ассур переходит к определению давлений в шарнирах. Уничтожая связь и заменяя ее двумя равными и противоположно направленными силами, он опять пользуется уравнением живой силы в форме Лагранжа. Затем он определяет осевые усилия, а потом касательные; после этого он проводит исследование полученного решения и ищет возможности его упрощения. В процессе решения он пользуется основными планами ускорений, а также планами аналогов ускорений.

В процессе решения задачи возникает дополнительная трудность, заключающаяся в том, что каждому новому положению системы соответствуют новые значения скоростей ее точек, а так как масштабные единицы связаны с каждым положением системы, то в результате полное решение задачи получается в виде ряда планов, построенных в различных масштабах. Поэтому, чтобы одновременно можно было пользоваться всеми этими планами, нужно было учитывать соответствующий множитель в расчетной формуле для каждого плана.

Ассур сам видел чрезвычайную сложность своих построений и пробовал упростить решение, накладывая на условия задачи некоторые ограничения. Все же оно получалось чрезвычайно трудоемким: для каждого нового усилия по методу Ассура следует строить по одному новому плану скоростей и ускорений и по два плана аналогов ускорений. Несмотря на это, он все же считал, что развитый им метод имеет не только теоретическое, но и практическое значение, что и хотел показать впоследствии на ряде примеров. К сожалению, этой части работы он не опубликовал, и неизвестно, была ли она написана им или осталась в фрагментах.

Очень существенное значение имеет замечание, которым заканчивается статья. Ассур предполагал развить свое учение об аналогах ускорений в сторону исследования ускорений второго порядка и их аналогов. Ускорениями второго порядка в конце XIX века занимались Л. Бурместер и П. О. Сомов; несколько раньше ими заинтересовался О. И. Сомов. И в конце XIX, и в начале XX века вопрос этот имел исключительно теоретическое значение, поэтому Ассур намечает его рассмотрение в теоретическом плане: вопрос об ускорениях второго порядка и об их аналогах поможет разрешить неопределенность планов ускорений и их аналогов в особых случаях. Кроме того, частным случаем построения аналогов ускорений второго порядка является возможность построения частных производных второго порядка от скоростей по параметрам, а это и само по себе представляет известный интерес.

Таким образом, в этой работе Ассур развивает своеобразный способ кинетостатического исследования механизмов с одной степенью свободы, включающий как определение давлений в пáрах, так и нахождение усилий в стержнях. Генетическое сродство этого способа с исследованиями в области графостатики конца XIX века представляется ясным. Много мыслей, содержащихся в работе Ассура, не потеряли своего интереса и актуальности и в настоящее время, хотя путь, избранный автором, нелегок.

Л. В. Ассур еще раз вернулся к вопросу об аналогах ускорений в своей второй работе на эту тему: «Основные свойства аналогов ускорений в аналитическом изложении». Повторив все рассуждения, выполненные ранее графически в аналитической форме, Ассур приходит к заключению, что понятие аналогов есть общее понятие, из которого понятие ускорения вытекает как частный случай. Поэтому из всякой теоремы, выведенной для аналогов ускорений, следует соответствующая теорема для ускорений. Однако метод нелегкий, и автор пока не видит возможности упростить его. Далее он указывает на связь, установленную им, между аналогами ускорений, ускорениями и частными производными второго порядка, а также между скоростями и частными производными первого порядка. Отсюда следует, что аналоги ускорений подобно скоростям и ускорениям являются понятием кинематическим.

Исследование аналогов ускорений не было завершено Ассуром. Он развил его для системы с одной степенью свободы и объявил неинтересным. Затем он проводит исследование для системы с несколькими степенями свободы и, выполнив сложнейшую систему графических построений, оставляет ее: начинает искать решение в более общей форме. Вполне возможно, что проживи Ассур дольше, он опять вернулся бы к методу аналогов ускорений и посмотрел бы на него с иной точки зрения. Но жизнь ученого оказалась очень короткой...

В течение двух последующих лет Ассур работает главным образом над составлением пособий для студентов. За это время им были опубликованы три таких пособия: «Схемы построения некоторых кривых» (1910 г.), «Картины скоростей и ускорений точек плоских механизмов» (1911 г.), «Графические методы определения момента инерции маховиков» (1911 г.). В последнем пособии Ассуру принадлежит весь текст и приложение, посвященное измерению площадей плоских фигур, ограниченных криволинейным контуром. К этому пособию приложен очерк «Другой графический метод определения момента инерции маховика», написанный К. Э. Рерихом. Вопрос, разбираемый в последнем из перечисленных пособий, по-видимому, заинтересовал Ассура, так как в следующем, 1912 г. он опубликовал на немецком языке статью «Метод характеристических кривых в приложении к графическому исчислению кратных интегралов», в которой рассматриваются интегралы вида

$$\iint x^p y^q dx\, dy.$$

В статье исследуются кратные интегралы и их технические применения. Ассур предполагал распространить свое исследование и на тройные интегралы, но на это жизнь ему также не отпустила времени. Во всяком случае и в данной статье он ищет общее решение, которое можно применить, в частности, при определении моментов инерции тел вращения.

Заметим, кстати, что Ассур виртуозно владел техникой графических построений. Склонность к графическим методам решений проявляется буквально во всех его работах. Один из учеников Ассура профессор А. П. Иванов вспоминает, что тот приходил в аудиторию с целой коллекцией цветных мелков, и под его рукой на доске возникали сложные геометрические построения. Склонность к геометрическим решениям, по-видимому, иногда мешала Ассуру найти аналитическое решение задачи, которое в некоторых случаях могло оказаться более легким. Среди математиков встречаются аналитики и геометры — Ассур несомненно относился к последним. В этом была сильная сторона его творчества, но здесь же был и источник его слабостей.

III

Состояние теории шарнирно-рычажных механизмов до Ассура

Труд по теории аналогов ускорений остался незавершенным: глубокое исследование проблем кинематики и динамики, содержащееся в нем, показало, что, несмотря на все попытки, и кинематика, и динамика механизмов остаются лишь совокупностью большего или меньшего числа решенных задач. Для обобщения получаемых результатов нужна была такая идея, которая могла бы объединить разрозненные результаты в единое целое. Поиски такой идеи и привели Ассура к вопросам, связанным со структурой и классификацией механизмов.

Классическое произведение Ассура — «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации» — публиковалось на протяжении пяти лет. Если добавить сюда еще три года — срок, прошедший между последней публикацией «Аналогов ускорений» и первой публикацией «Исследования», то окажется, что для работы над последним у него было около восьми лет — немалое время для человека, прожившего короткую жизнь.

В статье В. О. Ключевского, посвященной памяти выдающегося русского историка С. М. Соловьева, есть такая фраза: «В жизни ученого и писателя главные биографические факты — книги, важнейшие события — мысли»[1]. Эти слова полностью можно отнести и к Ассуру. Его труды действительно являются главными фактами его несложной биографии, а история его научного творчества, история его мыслей, составляет основное содержание этой биографии.

[1] *В. О. Ключевский.* Сочинения, т. VII. М., 1959, стр. 143.

Как мы увидим ниже, в «Исследовании» Ассуром развиты три темы:

— учение о структуре и классификации механизмов;

— графический метод определения скоростей механизмов;

— графостатика механизмов.

В «Исследовании» Ассур поставил себе ряд ограничений. Во-первых, он исследует исключительно плоские механизмы, во-вторых, из всей совокупности плоских механизмов он отбирает исключительно стержневые (рычажно-шарнирные) механизмы; отсюда уже само собой вытекает и третье ограничение — в качестве связей, ограничивающих взаимную подвижность звеньев, выступают лишь низшие пары — шарнир и ползунок. Что касается отсутствия исследования ускорений в механизмах и кинетостатики механизмов, то это едва ли является сознательным ограничением темы: просто Ассур не успел закончить своей работы, и она не получила логического завершения.

Постараемся вкратце проследить истоки идей Ассура, прежде чем перейти к их изложению.

Шарнирные механизмы впервые появляются в Западной Европе в составе машин около XII века. Развиваются они очень медленно, так как изготовление шарниров для техники XII—XVIII столетий было делом весьма трудным. Декарт (1596—1650) в своей «Геометрии» (1637) исследует механически воспроизводимые кривые, которые делит на два класса. Он считает, что кривые первого класса можно выразить с помощью алгебраических уравнений, а начертить их можно при помощи инструментов, состоящих из связанных между собой звеньев. Эти инструменты мы отнесли бы сейчас к группе шарнирно-рычажных механизмов. Таким образом, устанавливая связь между шарнирными механизмами и алгебраическими кривыми, Декарт высказал некоторые идеи, которые впоследствии были развиты в теории шарнирных механизмов.

Исключительное значение для теории и практики применения шарнирных механизмов имело изобретение механизма для приближенного воспроизведения прямой линии. Это изобретение было совершенно необходимо для техники построения паровых машин конца XVIII века. Дело в том, что общепринятым приводом пароатмосферных машин Ньюкомена (а затем и паровых машин Уатта) была передача через коромысло, качавшееся около некоторой точки закрепления. Один конец коромысла соединялся с рабочим органом (шахтный насос для машин Ньюкомена), а второй — со штоком поршня. Шток теоретически должен был двигаться по прямой линии, конец коромысла — по дуге окружности. До тех пор, пока в зазор между поршнем и цилиндром машины легко проходил большой палец руки (известный инженер конца XVIII века Смитон сообщил один раз, что ему удалось добиться при изготовлении паровых машин высокой точности: большой палец руки проходил в зазор между цилиндром и поршнем с трудом), особенного неудобства это не доставляло; повысившаяся точность изготовления и припасовки создала трудности с передачей движения. Изобретение Уаттом четырехзвенника, одна из шатунных точек которого приближенно описывала прямую линию, явилось удачным выходом из создавшегося положения. Недаром Уатт считал изобретение этого механизма одним из своих шедевров. Уже спустя много лет он говорил своему сыну: «Хотя я и не особенно интересуюсь славой, но все же я горжусь своим прямилом больше, чем каким-либо другим своим изобретением по механической части».

К концу XVIII века промышленный переворот уже в значительной степени преобразовал экономику Англии, где началась действительная эра машин. С трудом и со скрипом машины нового типа (новые рабочие машины, заменявшие руку человека, и новые энергетические машины — паровые) проникают и на Европейский континент, в первую очередь во Францию. На всю Францию имеется несколько паровых машин, так как вывоз их из Англии запрещен; две или три установлены в Париже, причем одна, двойного действия, сконструирована и построена замечательным испанским инженером Августином Бетанкуром, которому новая модель Уатта была показана на Альбионской мельнице, где она вся, за исключением привода, была упрятана в кирпичный кожух. По типу привода Бетанкур сумел спроектировать новую машину, изобрел своеобразный механизм распределения и предложил измененный вариант прямила.

В 1808 г. Бетанкур совместно со своим сотрудником по Мадридской школе мостов и дорог профессором математики Х. М. Ланцем написал руководство по курсу построения машин, которое в том же году было издано в Париже за счет Политехнической школы. В этой книге впервые была дана развернутая классификация механизмов, которые авторы, следуя Г. Монжу, называют «элементарными машинами». Основываясь на идеях Монжа о том, что основным назначением машины является передача и преобразование движения, Ланц и Бетанкур устанавливают 21 тип преобразований движения и затем подбирают «элементарные машины», при помощи которых могут быть выполнены такие преобразования. «Элементарные машины» содержат не только твердые, но и гибкие и жидкие звенья, и так как один из авторов интересовался шарнирными механизмами, последние довольно широко представлены в книге. Авторы не устанавливают различия между плоским и пространственным движением и соответствующими «элементарными машинами». На описании последних авторы останавливаются, не показывая, как затем из них собираются машины (или как машины делятся на «элементарные машины»).

Подобная классификация, основанная также на идеях Монжа, была создана его преемником по кафедре в Парижской политехнической школе Ж. Н. Ашеттом. Он сокращает число возможных преобразований движения до десяти, причем обращает внимание не только на тип преобразования движения, но и на конструктивные особенности соответствующей «элементарной машины». Так, он выделяет зубчатые и кулачковые механизмы и подвергает их отдельному анализу.

Первая серьезная попытка ввести другой принцип для классификации механизмов принадлежала Р. Виллису, который в 1841 г. опубликовал «Принципы механизмов», одно из самых замечательных сочинений в области науки о машинах. В сущности, Виллис впервые обосновал сам термин «механизм», заменив им неясный и плохо поддающийся определению термин «элементарная машина». Он ограничил также объект своего исследования, указав, что рассмотрению подлежат лишь «чистые» механизмы, имеющие жесткие звенья, исключив тем самым жидкие звенья из рассмотрения. Впрочем, гибкие звенья входят в систему классификации Виллиса, в которой соответствующие механизмы занимают отдельный раздел.

В основу своей классификации Виллис кладет принцип отношения скоростей, замененный им впоследствии принципом отношения направлений.

В зависимости от этих принципов Виллис делит все механизмы на три класса, из которых два относятся к механизмам с постоянным отношением скоростей, а третий — к механизмам с переменным отношением скоростей. В каждом классе Виллис выделяет пять отделов: соприкосновение качением, соприкосновение скольжением, гибкая передача, шарнирно-рычажные механизмы, сдвоенные механизмы (тали и полиспасты).

Таковы основные принципы классификации Виллиса. Нельзя сказать, чтобы она была особенно ясной, хотя в ней есть некоторые преимущества по сравнению с классификациями, развитыми на основании принципов Монжа. Кроме того, у Виллиса есть несколько уязвимых мест.

Классификация, предложенная им, не была достаточно полной, так как не охватывала всех механизмов, известных к тому времени. Тем более она не предусматривала возможности появления принципиально новых механизмов. В нее не были включены не только механизмы с жидкими звеньями, но и некоторые «чистые» механизмы, например, механизмы с несколькими степенями свободы.

Классификация Виллиса (как и классификации последователей Монжа) не давала возможности применить к исследованию механизмов какие-либо общие методы, так как механизмы конструктивно подобные оказывались в различных подразделениях классификации. Классификационный признак, принятый Виллисом, оказался, таким образом, не соответствующим сущности механизмов, а лишь внешним по отношению к их структуре.

С помощью классификации Виллиса нельзя установить подобия между отдельными группами механизмов. Если классификации Ланца — Бетанкура и Ашетта были приспособлены к применению в конструкторской практике при создании новых машин, то этого отнюдь нельзя сказать о классификации Виллиса.

Разложение на элементы, начатое Виллисом, не было им доведено до конца. В каждом механизме он видит в сущности лишь два звена — ведущее и ведомое. Остальные звенья и их поведение во время работы механизма выпадают из поля зрения исследователя. Таким образом, механизм Виллиса является в некотором отношении «черным ящиком», если использовать современную терминологию. Виллис не решил задачу, поставленную перед наукой о машинах практикой машиностроения,— найти сродство между различными группами механизмов и тем самым применить к подобным по своей структуре механизмам подобные методы исследования.

Однако в классификации Виллиса был и ряд преимуществ по сравнению с систематикой последователей Монжа. Отметим, между прочим, что в ней впервые в качестве отдельной группы рассматриваются шарнирные механизмы. Исследование Виллиса не оказалось в стороне от основной линии развития механики машин. Подобно тому, как школе Монжа принадлежит приоритет в разложении машины на составные части и в разработке принципа передачи и преобразования движений, подчеркнувшего кинематическую сущность машины, Виллису и его ученикам принадлежит честь изучения промежуточных механизмов — передач.

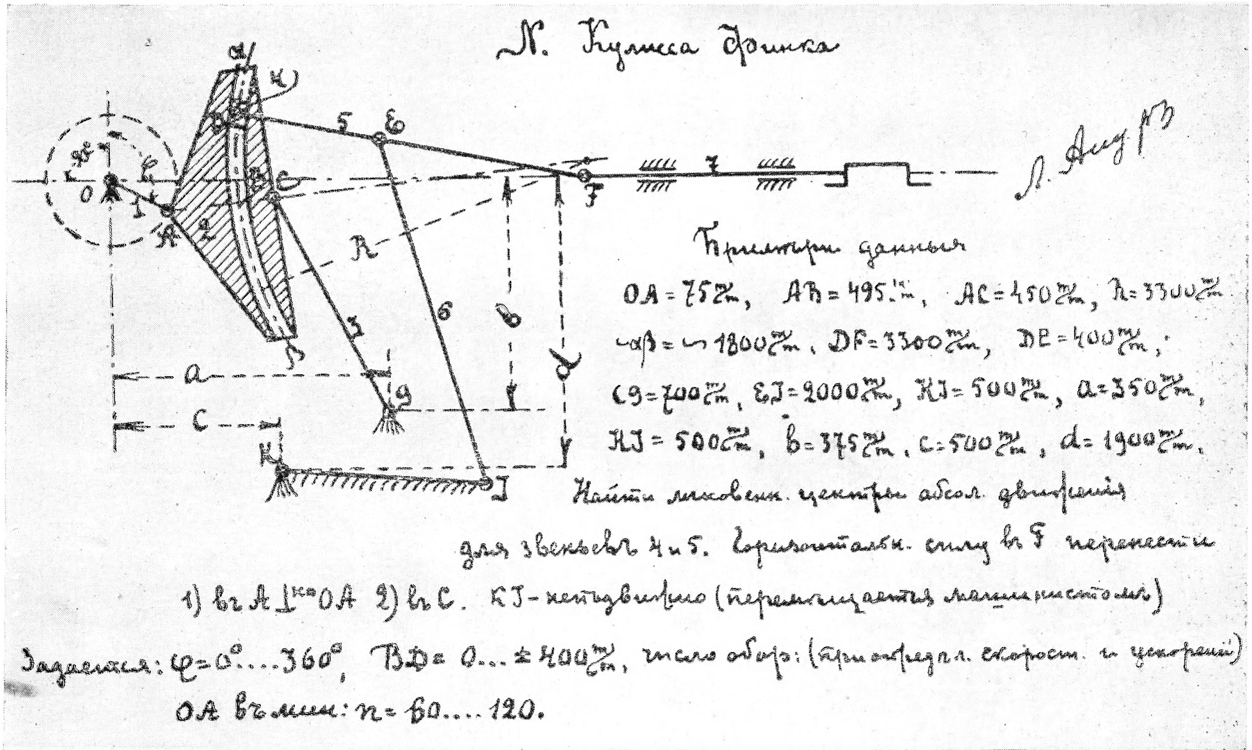
Идеи Виллиса с теми или иными видоизменениями определили развитие механики машин в течение очень длительного времени. Достаточно будет отметить, что среди его последователей можно назвать Т. Тэта, М. Ранкина, У. Фэйрберна в Англии, Ш. Лабулэ, Ш. Жиро, Ж.- Б. Беланже во Франции и многих других ученых. Итальянский ученый Карло Джулио сделал попытку объединить оба классификационных принципа в один, в то же время группируя механизмы по принципу подобия исследования. Таким образом терялась сама сущность классификации. Следует отметить, что у Джулио и у Лабулэ появляется новое кинематическое понятие — понятие пары как соприкосновения двух звеньев механизма, воздействующих одно на другое.

Характерной особенностью науки о механизмах первой половины XIX века является то, что она возникла как описательная наука и такою же продолжала оставаться. Математические методы в ней, за очень небольшим исключением, не применялись. Преобразование кинематики механизмов и создание на основании ее принципов расчетной науки было начато П. Л. Чебышевым. Исходной темой его исследований в этом направлении явилась теория шарнирных механизмов и, в частности, задача Уатта, к которой нам опять придется возвратиться.

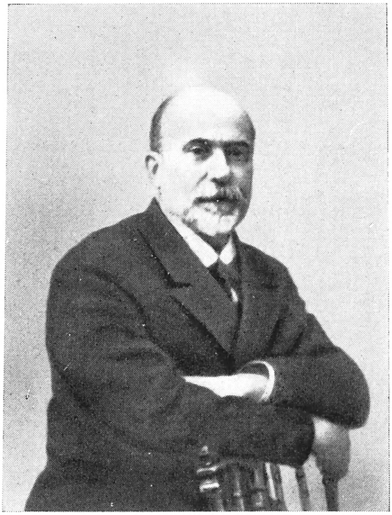
«Изыскивая различные средства извлекать из пара наиболее работы в том случае, когда нужно иметь вращательное движение, как это большей частью бывает,— пишет Чебышев,— Уатт изобрел особенный механизм для превращения прямолинейного движения поршня во вращательное коромысла — механизм, известный под названием параллелограмма. Из истории практической механики известно только, что на мысль о возможности подобного механизма великий преобразователь паровых машин и был наведен рассматриванием особенного снаряда, где через совокупление различных вращательных движений получились разнообразные кривые линии, некоторые близкие к прямой. Но мы не знаем, каким путем он дошел до наивыгоднейшей формы своего механизма и размера его элементов. Правила, которым следовал Уатт при устройстве параллелограммов, могли служить руководством для практики только до тех пор, пока не встретилась необходимость изменить форму его; с изменением формы этого механизма потребовались новые правила. Эти правила и практика, и современная теория извлекают из начала, которому, по-видимому, следовал Уатт при устройстве своих параллелограммов. Суждения, которые приводят в доказательство этого начала, очевидно, не могут выдержать никакой критики; даже на практике очень часто оказывается неудобным употреблять элементы параллелограмма, необходимые по этому началу, так что для поправки их понадобились особые таблицы. Из сказанного мною видно, до какой степени необходимо было параллелограмм Уатта и его видоизменения подвергнуть строгому анализу, заменив вышеупомянутое начало существенными свойствами этого механизма и условиями, которые встречаются на практике» [2].

Вопросами теории параллелограммов П. Л. Чебышев занимался еще до своей первой заграничной командировки, которая состоялась в 1852 г. По возвращении из-за границы он представил в Академию наук мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», в котором впервые была поставлена задача о нахождении размеров механизма из условия приближенного воспроизведения заданной зависимости и указан аналитический метод решения этой задачи на основании развитой автором теории наилучшего приближения функций. Тем самым были заложены основы аналитических методов приближенного синтеза механизмов.

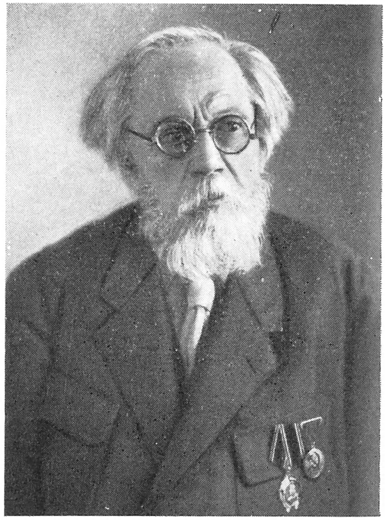
[2] *П. Л. Чебышев.* Отчет экстраординарного профессора С.-Петербургского университета Чебышева о путешествии за границу. Полн. собр. соч., т. V, стр. 249.



Кулиса Финка (задание на расчет)



Дмитрий Степанович Зернов



Николай Иванович Мерцалов

Александр Петрович Иванов

Вскоре началась также работа над теорией точного направляющего механизма. В 1864 г. военный инженер Поселье в письме на имя редактора математического журнала «Nouvelles Annales des Mathématiques» поставил вопрос о точном преобразовании прямолинейного движения в круговое, однако решения его не дал. В 1868 г. такое решение нашел ученик Чебышева Л. И. Липкин (1841—1875), который предложил для этого семизвенный механизм и в 1870 г. представил в Академию наук мемуар с описанием этого механизма. В своем отзыве на работу Липкина Чебышев указал на оригинальность этого изобретения. В 1873 г. изобретение Липкина повторил Поселье.

Изобретение Липкина — Поселье заинтересовало одного из крупнейших английских математиков того времени Джеймса Сильвестра (1814—1897), который по совету Чебышева занимался вопросами кинематики механизмов. Он исследовал вопрос о преобразовании подобных движений с помощью изобретенного им шарнирного механизма — пантографа, исследовал преобразования прямолинейного и кругового движений, провел теоретическое исследование инверсора Липкина — Поселье, предложил ряд схем иных инверсоров. При этом он обнаружил, что особую роль в шарнирных механизмах играет группа, состоящая из двух звеньев, соединенных шарниром. Таким образом Сильвестр заложил основы исследования структуры шарнирных механизмов. Двухповодковая группа, которая впоследствии получила особенное значение в исследованиях Ассура, носит название «диады Сильвестра».

По поводу инверсора Липкина — Поселье Сильвестр писал, что «точное параллельное движение Поселье выглядит настолько просто, а осуществляется так легко, что почти все, кто видел этот механизм в работе, удивляются, как это случилось, что он не был открыт уже давно. Но меня больше удивляет то, что он вообще был открыт и я совершенно не вижу причины, почему его могли открыть уже сотню лет назад. Ведь априори для этого изобретения не было никакого основания. Ведь оно не имеет даже отдаленной аналогии с прямилом Уатта или с его производными» [3]. Сильвестра заинтересовала математическая

[3] *Sylvester*. Recent Discoveries in Mechanical Conversion of Motion.— «Notices of the Proceedings, Royal Institute», v. 7, 1873—1875, p. 181.

сторона этой задачи и исследование ее дальнейших возможностей. С помощью значительного усложнения механизма инверсора он получил механизмы для извлечения квадратных и кубических корней, для деления угла на три части и иные. По его мнению, возможности инверсора в этом отношении почти неисчерпаемы.

Пример и авторитет Сильвестра вызвали в Англии интерес к теории шарнирных механизмов, и, в частности, к теории механизмов, служащих для воспроизведения определенных математических зависимостей. В 1874 г. появились первые публикации Г. Гарта, который создал новый тип инверсора на основе антипараллелограмма, составленный из шести звеньев. Ряд работ по теории механизмов для решения алгебраических уравнений написал А. Б. Кемпе. Вместе с Сильвестром он работал над созданием инверсора. Кемпе сформулировал и доказал теорему о возможности воспроизведения алгебраической кривой любого порядка кинематической цепью, образованной при помощи только низших кинематических пар. Эти кинематические цепи Кемпе рассматривает как совокупность кинематических цепей, каждая из которых воспроизводит элементарное геометрическое или алгебраическое действие.

В 1875 г. С. Робертс доказал теорему о трех шарнирных четырехзвенниках, воспроизводящих одну и ту же шатунную кривую. Независимо от Робертса ту же теорему доказал Чебышев. Занимался Робертс также приближенным воспроизведением прямой линии. Его инверсор представляет шарнирный четырехзвенник, шатун которого служит основанием жесткого равнобедренного треугольника; шатунная кривая, которую чертит вершина треугольника на некотором участке, приближенно совпадает с прямой линией.

В те же годы Чебышев продолжал свои исследования в области теории шарнирных механизмов. В 1869 г. была опубликована его работа «О параллелограммах», в которой он заложил основы структурного анализа механизмов. Он нашел, что «механизмы параллелограммов можно рассматривать как системы прямых линий, связанных шарнирами, что длины отрезков прямых в этом случае являются неизменными и что шарниры, соединяющие каждый по два отрезка, накладывают по два условия связи». Обозначая через m число звеньев, n — число шарниров, связывающих по два звена, v — число шарниров, связывающих звенья со стойкой, Чебышев получил условие принужденного движения механизма

$$3m - 2(n + v) = 1.$$

Таким образом было установлено условие существования механизмов, сыгравшее исключительно важную роль в развитии теории. В результате исследований Чебышева и Сильвестра учение о строении механизмов получило фундаментальную базу.

В 1872—1873 гг. в журнале «Civilingenieur» были опубликованы несколько статей Прелля, сведенных им впоследствии вместе в книгу под названием «Опыт графической динамики» (1874 г.) Используя работы Кульмана по графостатике, графическое решение, предложенное Цейнером, задачи о движении золотника и монографию о кинематической геометрии З. Аронгольда, опубликованную в 1872 г. (содержащую, в частности, теорему о трех мгновенных центрах вращения, известную под названием теоремы Аронгольда — Кеннеди), Прелль приходит к заключению, что задачи динамики, подобно задачам статики, могут иметь графическое решение. В качестве основания для своего исследования Прелль принимает принцип Даламбера. Интересно, что Прелль очень близко подошел к созданию метода планов скоростей и ускорений и к кинетостатическому методу, впоследствии разработанному Н. Е. Жуковским.

К концу третьей четверти XIX века кинематика механизмов оказалась в тупике. Несмотря на то, что в некоторых областях, в частности, в области теории зубчатых зацеплений и в области шарнирных механизмов были получены весьма существенные результаты, отсутствие общей методики сказывалось на развитии других областей и на науке в целом. Для каждой задачи приходилось искать своеобразное решение, некоторые задачи вообще считались неразрешимыми. Идеи Сильвестра и уравнение принужденного движения Чебышева относились только к шарнирно-рычажным механизмам: родство между различными группами механизмов было и проблематичным, и неясным.

В 1875 г. в Брауншвейге была опубликована одна из самых замечательных книг по механике машин — «Теоретическая кинематика» Франца Рело. Во введении к этой книге автор, разбирая труды своих предшественников, приходит к выводу, что в сущности кинематика как наука еще не создана. Каждая наука характеризуется определенной системой, и такая система должна не только пояснять, но и помогать создавать новое. В частности, в механике машин система должна облегчить создание новых механизмов, и все же ни одна из предложенных ранее систем не создала никаких новых механизмов. В связи с этим Рело посвящает одну из глав (12-ю) вопросам синтеза механизмов, однако дальше рассуждений он не пошел.

Существенным достижением Рело является найденный им метод структурного построения механизмов. Элементом механизма является не звено, а кинематическая пара, сочетание двух звеньев, ограничивающее их взаимную подвижность. От пары к кинематической цепи, к замкнутой кинематической цепи, к механизму как замкнутой кинематической цепи принужденного движения — таков путь структурных идей Рело.

Очень тщательно исследует Рело шарнирный четырехзвенник и его модификации. В сущности он считает шарнирный четырехзвенник исходным механизмом, из которого путем преобразований можно получить иные механизмы. Таким образом, теоретические рассуждения Рело проводятся на примере шарнирных механизмов, чем подчеркивается их особенно важная роль для теоретического машиностроения. Рело указывает также на различие между плоскими и пространственными шарнирными механизмами, но замечает сродство между плоскими и сферическими механизмами: он указывает, что если центр сферы уходит на бесконечность, то в предельном случае сфера переходит в плоскость. Преобразуя сферический четырехзвенник по аналогии с плоским механизмом, Рело получает 24 различных механизма, а учитывая также преобразования плоского четырехзвенника — 30 вариантов, которые он распределяет по 12 классам. Затем Рело исследует те преобразования механизмов, которые получаются при сокращении одного из звеньев (т. е. при замене звена и двух низших пар одной высшей парой), а также изучает вопрос об увеличении числа звеньев кинематической цепи.

Во второй половине 70-х годов число работ по вопросам теории шарнирных механизмов продолжает быстро увеличиваться. Профессор Новороссийского университета В. Н. Лигин (1846—1900) исследует шестизвенные шарнирные механизмы, П. Л. Чебышев продолжает работать над своим методом приближенного аналитического синтеза механизмов, в работах А. Маннгейма, Дж. Сильвестра, А. Кэйли, Лемуана, Г. Гарта развивается теория математических приборов. Следует указать также на малоизвестные работы профессора Львовского политехнического института Л. Жмурко, не только разработавшего теорию ряда математических приборов, но и создавшего такие приборы, которые давали возможность решения уравнений не выше четвертой степени. В 1877 г. Г. Гарт опубликовал свой метод решения алгебраических уравнений n-ой степени при помощи шарнирных механизмов.

Таким образом, познания в области шарнирных механизмов к началу 80-х годов оказываются уже весьма существенными. Выяснена их структура и их взаимозависимости с механизмами нулевой степени подвижности (т. е. с фермами), заложены основы аналитического синтеза этих механизмов (точного и приближенного), изучено много специальных случаев и вариантов шарнирных механизмов, заложены основы графической кинематики механизмов, их графической статики и графической динамики. Число работ, посвященных теории шарнирно-рычажных механизмов, непрерывно растет, и когда В. Н. Лигин публикует в 1883 г. их библиографию, в его списке уже учтено свыше 180 работ русских, французских, английских, немецких, бельгийских и голландских ученых. Интерес к шарнирным механизмам становится всеобщим, и в создании их теории начинают видеть ответ на различные вопросы общей теории механизмов.

Теория кинематических пар была продвинута в работах Ф. Грасгофа. Для определения пар он воспользовался понятием степеней свободы (что, впрочем, раньше него сделал П. Л. Чебышев). Выяснив, что кинематические пары полностью определяются своей формой и характером соприкосновения, он делит их на пары троякой, двоякой и ординарной (элементарные пары принужденного движения) подвижности. «Так как каждое элементарное движение, т. е. бесконечно малое движение твердого тела в определенном пространстве,— пишет Грасгоф,— может быть разложено на три переноса вдоль трех пересекающихся и не лежащих в одной плоскости осей и на три вращения вокруг последних, и поскольку эти шесть простых элементарных движений при свободно движущемся теле независимы между собой, то им можно при помощи выражения, предложенного В. Томсоном, приписать шесть степеней свободы; если тело имеет ограниченную подвижность, то в соответствии с видом ограничений, наложенных на его движения, только некоторые возможные движения остаются независимыми между собой» [4].

В определении механизма Грасгоф следует Рело: «Механизм есть принужденная замкнутая кинематическая цепь, у которой один член остановлен; сколько членов имеет цепь, столько механизмов можно получить из нее, причем механизмы эти вообще будут различными... Механизм называется приводом, когда одно из его подвижных звеньев принято в качестве начального звена, т. е. такого, которое непосредственно приводит механизм в движение в определенном смысле» [5]. Наконец, Грасгоф определяет понятие машины, указывая, что машина является механизмом, предназначенным для совершения определенной механической работы. Она состоит или из одного механизма, или из нескольких элементарных механизмов — приводов.

Исследование механизмов у Грасгофа начинается с простейших механизмов, звенья которых соединены низшими парами. При рассмотрении плоских шарнирных цепей он выводит теорему о возможности существования кривошипа в плоском шарнирном четырехзвеннике. «Четырехзвенная цепь, состоящая из вращающихся тел, может только тогда образовать кривошипно-коромысловый или двухкривошипный механизм, когда сумма наибольшего и наименьшего звеньев меньше суммы двух других звеньев. При закреплении наименьшего звена механизм будет двухкривошипным, а при закреплении одного из соседних с ним звеньев — кривошипно-коромысловым (причем наименьшее звено будет кривошипом); во всех иных случаях из цепи получаются двухкоромысловые механизмы» [6].

В 80-х годах в исследованиях ряда ученых были уточнены вопросы структуры шарнирно-рычажных механизмов. Работы Чебышева в кратком изложении были опубли-

[4] *F. Grashoff.* Theoretische Maschinenlehre, Bd. II. Berlin, 1883, S. 3.
[5] Там же, S. 7.
[6] Там же, S. 117.

кованы в Льеже (В. Двельсхауерс-Дари), а затем в Париже (Лабулэ). Несколько ранее О. Мор и независимо от него Морис Леви решили задачу о связи между числом стержней и числом шарниров для кинематических цепей нулевой подвижности (т. е. для ферм). В 1883 г. Мартин Грюблер опубликовал в «Civilingenieur» статью под названием «Общие свойства плоских кинематических цепей принужденного движения», в которой подвергнул этот вопрос глубокому и весьма тщательному, хотя и формальному, анализу. Для определения степени подвижности механизмов он несколько обобщил формулу Чебышева (на работу Чебышева Грюблер ссылается) и придал ей следующий вид:

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

где g — число всех шарниров, n — число всех звеньев механизма. Исходя из этой формулы, можно получить известные линейные неопределенные уравнения и, решая последние в целых числах, определить ряд многозвенных кинематических цепей, имеющих все признаки механизма. Таким образом была положена основа так называемого структурного синтеза механизмов.

Ряд исследований в том же направлении выполнили Таубелес, Т. Риттерсхауз и некоторые другие ученые. Наиболее значительной из этих работ было исследование ученика Чебышева П. О. Сомова (1852—1919), опубликованное в 1887 г. под названием «О степенях свободы кинематической цепи». Определение понятия механизма у Сомова несколько отличается от определения, данного Рело: «Мы будем называть механизмом,— пишет Сомов,— такую кинематическую цепь, в которой каждая точка описывает определенную траекторию, если один из членов цепи будет при этом закреплен неподвижно, т. е. в которой ни один из членов не имеет более одной степени свободы». Таким образом, механизм Сомова шире, чем замкнутая кинематическая цепь принужденного движения Рело, и принужденность движения у него не исключает возможности существования механизмов с числом степеней свободы, большим, чем одна. Сомов сам указывает, что «число степеней свободы какого-либо тела равно, как известно, числу тех независимых параметров, которыми определяется всякое перемещение этого тела. Поэтому, например, свободное неизменяемое тело трех измерений имеет, как известно, шесть степеней свободы, а двух измерений — три степени свободы; подобно изменяемая система имеет семь степеней свободы, потому что, кроме шести параметров перемещения неизменяемого тела, она имеет произвольный параметр, определяющий расширение системы; однородно-изменяемая система имеет двенадцать степеней свободы, из которых шесть соответствуют перемещению неизменяемой системы, три — удлинениям по осям координат и три — сдвиганиям в плоскостях координат; коллинеарно-изменяемая система имеет пятнадцать степеней свободы, так как к двенадцати параметрам перемещения однородно-изменяемой системы присоединяются три параметра, определяющие раздвигание» [7].

П. О. Сомов выводит в этой работе формулу, определяющую условие существования механизма. Полагая N —число всех членов сложной кинематической цепи, n — число членов простой кинематической цепи, принятой за основание, μ — число степеней свободы отдельных членов цепи, предполагаемое одинаковым для всех ее членов, ν—число ветвей, дополняющих основную цепь, m_1, $m_2, \ldots$, m_ν — числа этих отдельных цепей,

$$N = n + m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu.$$

«От введения всех дополнительных ветвей число степеней свободы основной цепи, которое, как мы знаем уже, равно n, уменьшится на

$$(\mu - m_1 - 1) + (\mu - m_2 - 1) + \ldots + (\mu - m_\nu - 1) = \\ = \nu_\mu - (m_1 + m_2 + \ldots m_\nu) - \nu$$

единиц. Данная цепь обратится в механизм, если по закреплении одного из ее членов неподвижно она сохранит одну степень свободы. Так как такое закрепление лишает цепь μ степеней свободы, то мы должны иметь

$$n - \nu_\mu + m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu - \nu - \mu = 1$$

или

$$N - (\mu - 1)(\nu + 1) = 2.$$

[7] *П. О. Сомов.* О степенях свободы кинематической цепи. СПб., 1887, стр. 3.

Эта формула выражает собой не только необходимое, но и достаточное условие для того, чтобы сложная кинематическая цепь была механизмом, потому что если это условие не будет выполнено, то данная цепь не будет иметь одну степень свободы. Она будет иметь неопределенное движение, если

$$N - (\mu - 1)(\nu + 1) > 2$$

и будет неизменяемой системой, если

$$N - (\mu - 1)(\nu + 1) < 2$$»[8].

Далее П. О. Сомов распространяет эту формулу на механизмы, имеющие звенья с избытком степеней свободы, с недостатком последних и с изменяющимся μ.

Как видим, в формулу Сомова число кинематических пар в явной форме не входит, чем она и отличается от формулы Чебышева — Грюблера.

Теоретическое значение работ Сомова велико — он глубоко исследовал структуру кинематических цепей, являясь в этом вопросе непосредственным предшественником Ассура.

Обратимся теперь к Новороссийскому университету (Одесса). Здесь в течение 25 лет кафедру механики занимал В. Н. Лигин (1846—1900). Последователь М. Шаля и Ф. Рело, он ряд работ посвятил кинематике механизмов. Исследования его в этом направлении были продолжены его учениками Х. И. Гохманом (1851—1916), И. М. Занчевским (1861—1928) и Д. Н. Зейлигером (1864—1936). Существенно продвинул теорию механизмов Х. И. Гохман, хотя основной его труд относился к специальному вопросу кинематики механизмов, к теории зубчатых зацеплений.

Особенное внимание Гохман обратил на структуру механизмов. «...С точки зрения цели, для которой предназначены механизмы,— пишет Гохман,— особенной важностью отличаются два члена; один подвижный, движение которого составляет главную и конечную цель механизма, и другой неподвижный, по отношению к которому или в котором происходит движение первого члена. Первый член мы будем называть орудием, второй — осно-

[8] Там же, стр. 30.

ванием. Все прочие члены механизма играют второстепенную роль вспомогательных органов, присутствие которых необходимо лишь постольку, поскольку это необходимо для принуждения орудия принимать предписанное ему движение по отношению к основанию» [9]. Таким образом, Гохман склоняется к мысли о том, что не все звенья механизма равноценны. С подобной мыслью, являющейся прообразом идеи «черного ящика» в применении к механизмам, мы уже встречались у Виллиса, но там утверждалась равноценность двух звеньев — ввода и вывода, т. е. ведущего и ведомого звеньев. Развивая эту мысль, Гохман приходит к заключению, что проблема механизма сводится только к одному звену — ведомому, ибо принципиально важен лишь искомый закон движения, а происхождение движения может быть произвольным.

В соответствии с таким умозаключением Гохман предлагает свое оригинальное определение механизма: «Механизмы есть такие искусственные сооружения, при помощи которых орудие (одно или несколько) принуждается двигаться вполне определенным и целесообразным движением по отношению к основанию»[10]. А отсюда сам по себе вытекает вывод Гохмана о тождестве понятия элементарного механизма и кинематической пары.

Гохман развивает теорию кинематических пар на основании подсчета числа степеней свободы. («Пару со стеснением n-ой степени мы будем называть парой n-го порядка. В паре n-го порядка остаются произвольные $(6 - n) = m$ элементов движений» [11]).

С точки зрения учета степеней свободы в кинематических парах Гохман более последователен, чем Грасгоф. Вместо неопределенных пар троякой, двоякой и ординарной подвижности Грасгофа у Гохмана получается пять порядков пар, из которых один порядок — пятый составляют пары определенные, с одной степенью свободы.

Структурные идеи Гохмана в отношении механизма являются логическим развитием его теории кинематических пар. Так как по Гохману элементарный механизм и кинематическая пара являются тождественными понятиями, то исследование всякого механизма заключается

[9] *Х. И. Гохман.* Кинематика машин, т. 1. Одесса, 1890, стр. 5.
[10] Там же.
[11] Там же, стр. 20.

в определении относительного движения неизменяемой системы, т. е. орудия по отношению к основанию. Изучать механизм можно как геометрическую систему: в этом случае безразлично, от какого звена следует движение. Таким образом, «геометрическое познавание механизмов» (по терминологии Гохмана) не зависит от ведущего звена, но зависит от звена ведомого и от основания, поэтому полное геометрическое решение вопроса о данном механизме, имеющем G звеньев, включает в себя $G\ (G - 1)$ задач.

Кинематическое исследование механизма включает изучение скоростей орудия. Поэтому здесь в качестве независимого принимается движение ведущего звена, а движение орудия выражается в функции от первого. При этом движение ведущего звена следует считать равномерным. Таким образом, полное кинематическое исследование G-звенного механизма состоит в решении $G\ (G - 1)\ (G - 2)$ вопросов.

Механическое исследование включает изучение ускорений ведомого звена. Здесь решаются те же $G\ (G - 1)\ (G - 2)$ задач, что и при кинематическом исследовании, однако движение ведущего звена принимается равномерным лишь в том случае, если оно действительно является таковым.

Гохманом была разработана весьма подробная система классификации механизмов. В отличие от системы Ассура эта классификация охватывала не только плоские механизмы, а была всеобъемлющей. В сущности говоря, это была первая классификация, основанная на некоторых объективных предположениях. Правда, она не получила дальнейшего развития в основном, пожалуй, по причине большой сложности. Однако работы Гохмана были хорошо известны русским машиноведам и ряд его идей (правда, значительно позже) был использован. Знакомство с некоторыми обобщающими мыслями Гохмана видно и в творчестве Ассура.

В большей части существующих механизмов — утверждает Гохман — движение звеньев как по отношению к неподвижному звену, так и между собой может состоять из некоторых только элементов, число которых $E < 6$. Соответствующий механизм Гохман называет механизмом E-го разряда. При этом он отмечает, что большинство существующих механизмов относится к третьему разряду, т. е. к плоским и сферическим механизмам. Таким образом, Гохман устанавливает принципиальное подобие между некоторыми группами механизмов; идея эта получила свое развитие значительно позже, уже в работах советских машиноведов.

Всякий кинематический организм состоит из нескольких кинематических цепей. Число μ этих цепей определяется наименьшим числом круговых путей, необходимых для того, чтобы обойти все звенья и все пары организма, каждый раз начиная от неподвижного звена и возвращаясь к нему же; каждые два пути должны отличаться между собой по крайней мере на одно звено.

Во всяком кинематическом организме существует зависимость между числом звеньев G, числом пар π и числом цепей μ:

$$G + \mu - \pi = 1.$$

Для того чтобы данный кинематический организм мог быть механизмом, необходимо и достаточно, чтобы существовала одна из следующих трех тождественных между собой зависимостей:

$$E(G - 1) - k_l = 1$$

$$L - \mu E = 1$$

$$E(\pi - \mu) - k_l = 1,$$

где k_l — сумма связей, налагаемых всеми парами, L — сумма степеней свободы тех же пар. Таким образом, приведенные выше уравнения являются условиями существования механизма или, как их называет Гохман, уравнениями механизма. Уравнения, определяющие k_l и L, суть:

$$k_l = \sum_{i=1}^{E-1} i\varphi_i = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + (E - 1)\, p_{E-1}$$

$$L = \sum_{j=1}^{E-1} jl_j = l_1 + 2l_2 + 3l_2 + \ldots + (E - 1)\, l_{E-1}.$$

Итак, если удовлетворяются уравнения механизма, то исследуемый кинематический организм является механизмом.

Если число звеньев больше или число стеснений меньше, чем это следует из уравнений, то в исследуемом кинематическом организме происходят неопределенные движения.

Наконец, если число звеньев меньше или число различных связей больше, чем это следует из данных уравнений, то все звенья лишены возможности двигаться, и кинематический организм переходит в неизменяемое тело.

Если ввести обозначение

$$R = E(G-1) - k_l = L - \mu E = E(\pi - \mu) - k_l,$$

то при $R = 1$ механизм существует, при $R > 1$ движения звеньев неопределенные, при $R < 1$ механизм становится фермой.

Система классификации механизмов, предложенная Гохманом, основана как раз на этих уравнениях, ибо, как говорит он сам, они «обусловливают существование механизмов, так сказать, решают их судьбу». Он делит все механизмы на шесть разрядов — по числу возможных переменных элементов движения. Тогда в первом разряде окажется всего три механизма, состоящие каждый из одной только пары — призматической, шарнира и винтовой.

Каждый разряд делится на классы по числу различных связей, или степеней свободы пар. Таким образом, например в четвертом разряде, возможны только пары первого, второго и третьего порядков; при составлении механизма, принадлежащего к этому разряду, надо, следовательно, брать комбинации этих пар — по одной, по две или все три.

Число классов N_l в разряде E равно числу различных сочетаний, которые можно составить из $(E-1)$ предметов, беря их по одному, по два и т. д., наконец, по $(E-1)$, т. е.

$$N_l = \sum_{b=1}^{E-1} \frac{(E-1)(E-2)\ldots(E-b)}{1 \cdot 2, \ldots b}.$$

Однако отсюда надо исключить те комбинации, которые не дают целых решений уравнения существования механизма. Следовательно, число классов в шести разрядах будет: в первом разряде возможен 1 класс, во втором разряде — 1 класс, в третьем — 3 класса, в четвертом — 6 классов, в пятом — 15 классов, в шестом разряде возможны 27 классов, и, следовательно, общее число классов составит 53. Гохман подчеркивает, что такого рода классификация является естественной, так как она зависит от уравнения существования механизма.

В самом конце столетия ряд идей в области классификации механизмов высказал французский механик Габриэль Кёнигс (1858—1931). По мнению Кёнигса, в XIX веке развитие кинематики было подчинено двум идеям. Первая заключалась в том, что при исследовании необходимо исходить из некоторой классификационной системы, а вторая составляла предположение, что механизм по своей сущности является средством для преобразования движения. Это определение сущности механизма, как известно, ведущее свое происхождение от Монжа, по мнению Кёнигса, является ошибочным. «В действительности же механизм является не чем иным, как некоторым состоянием связей между сопротивляющимися телами, и движение, которое может или не может возникнуть, зависит от приложенных сил. Следовательно, теория механизмов представляет собой исследование связей в машинах» [12]. Выясняя затем понятие машины, Кёнигс говорит, что «всякая машина состоит из некоторой совокупности материальных сопротивляющихся тел, подверженных взаимным связям, на которую понуждают действовать силы природы в целях получения желаемого эффекта; последний может быть состоянием покоя или состоянием движения.

Итак, следует отличать в составе машины два совершенно различных элемента. Это, во-первых, совокупность тел, которые ее составляют, а также система связей, установленных между ними; это то, что составляет механизм. Во-вторых, это силы, которые заставляют действовать на механизм. Природа и распределение этих сил в сущности и определяют машину таким образом, что один и тот же механизм может породить столько машин, сколько существует различных систем сил, которые можно к нему приложить» [13].

[12] *G. Koenigs*. Etude critique sur la théorie générale des mécanismes.— CR, t. 133, 1901, p. 330.
[13] Там же, p. 385.

Иначе подходит Кёнигс и к понятию пары: «Положения, которые могут принимать два твердых тела одно относительно другого, зависят от шести параметров. Если ограничить эти положения определенными условиями, то тем самым сузится поле изменения этих шести параметров; так определяется то, что мы называем бинарной системой.

Если выразить ограничительные условия при помощи $(6 - k)$ конечных уравнений между шестью параметрами, то относительные положения обоих тел будут зависеть только от k параметров; бинарная система имеет k степеней свободы.

Итак, концепция бинарной системы является чисто абстрактной; она не зависит от того способа, при помощи которого физически реализуется бинарная система, необходимая для создания привода. Если между двумя телами A и B создать кинематическую пару, то эти тела уже тем самым образуют бинарную систему. Но обратное неверно; только очень редко удается выразить бинарную систему при помощи простой пары элементов. Для этого необходимо выполнение трех условий.

1. Совокупность условий, аналитически представляющих бинарную систему, должна быть эквивалентной системе уравнений, выражающих контакт некоторых поверхностей S, S_1, S_2, ..., связанных с телом A, с другими поверхностями S', S_1', S_2', ..., связанными с телом B.

2. При выполнении этой совокупности условий указанные поверхности, физически выполненные, должны войти между собой в контакт, что не всегда возможно; например, если бы речь шла о контакте между гиперболоидом и плоскостью.

3. Наконец, если два первых условия удовлетворены и тела A и B установлены в относительном положении, причем между ними обеспечен требуемый контакт, система не должна получить никакого относительного движения, которое могло бы прекратить существующий контакт и разложить таким образом пару»[14].

При этом Кёнигс делает два замечания. Первое условие предполагает только геометрический контакт, и трение как возможная причина связи не рассматривается.

[14] *G. Koenigs*. Etude critique... Les systèmes binaires et les couples d'elements cinématiques..., p. 483.

Второе замечание относится к третьему условию. Оба тела, находящиеся в соприкосновении, могут иметь или бесконечно малые смещения в двух направлениях без уничтожения контакта, или смещения могут иметь место лишь в одном направлении, и контакт в этом случае прерывается. Для того чтобы не возникло противоречие с третьим условием, предполагается, что контакт остается и в этом случае. Так Кёнигс приходит к понятию силового замыкания кинематической пары.

Затем Кёнигс классифицирует кинетические цепи. Здесь он высказывает ряд интересных мыслей, однако не доводит своего исследования до конца. Часть его исследований, посвященная изучению кинематических пар, полностью перекрыта результатами Гохмана, который решил эту задачу значительно раньше.

Кроме Кёнигса во Франции вопросами теории шарнирных механизмов занимались также другие ученые. Применение шарнирных систем к решению уравнений изучал Сен-Лу. Лезан построил шарнирный механизм для трисекции угла. Леоте, решая одну практическую задачу, исследовал возможность воспроизведения заданной кривой с помощью шарнирного механизма с наилучшим возможным приближением, обобщая задачу Уатта и повторив таким образом решение Чебышева.

Теория шарнирных механизмов изучалась также Дарбу. Он заложил основы применения теории функций комплексного переменного к теории плоских механизмов.

Обратимся теперь к истории второго из основных вопросов, рассмотренных Ассуром в его труде,— к истории кинематического анализа шарнирных механизмов. Исследование кинематики шарнирных механизмов началось относительно поздно и было связано с разработкой некоторых принципиальных вопросов кинематической геометрии, относившихся к параметрам движения.

Большой вклад в создание кинематической геометрии принадлежит крупнейшему французскому геометру середины XIX века М. Шалю (1793—1880). Он получил фундаментальные результаты в области плоского движения, уточнил понятие мгновенного центра вращения и изучил поведение центроид.

В 1872 г. был опубликован труд Зигфрида Аронгольда (1819—1884) «Основания кинематической геометрии», в котором автор собрал воедино все опубликованные до того времени результаты этой области геометрии, включая и свои собственные исследования. Несколькими годами позже Рело в своей «Теоретической кинематике» посвящает целую главу вопросам кинематической геометрии. С 1873 г. начинает публиковать свои кинематические и кинематико-геометрические этюды Л. Бурместер (1840—1927). Двумя годами позже эти же вопросы попадают в круг интересов французского геометра Амеде Маннгейма (1831—1906). В своей обобщающей работе Маннгейм, исходя из результатов Шаля в области геометрии движения, исследовал поведение плоских и пространственных кривых, воспроизводимых некоторой точкой, связанной с механизмом, в частности, некоторые геометрические места. Ему же принадлежит и введение в обиход названия науки — «кинематическая геометрия».

Методы кинематической геометрии и графические методы статики ферм, которые разрабатывались примерно в те же самые годы, пробудили в машиноведах, в особенности тех, которые занимались теорией шарнирных механизмов, интерес к соответствующим исследованиям в этой области. Ясно выраженное родство между шарнирными механизмами и шарнирными статически определимыми фермами обусловило содержание целой серии работ, посвященных графическим определениям кинематических параметров. Наиболее простым и логически оправданным способом было приведение задачи к исследованию положений мгновенных центров вращения, достаточно разработанному к тому времени, и при помощи этого метода графическое определение величины и направления скоростей отдельных точек изучаемых механизмов. Однако такое решение, имевшее некоторые преимущества, не было лишено и недостатков, причем для чертежников того времени весьма ощутительных. Мгновенные центры вращения не всегда вели себя так, как этого хотелось бы непосредственным исполнителям расчетов: зачастую они уходили на самый край чертежной доски, а иногда вообще исчезали из поля зрения (и с поверхности доски).

Решение задачи оказалось совершенно необходимым для машиноведов, и она была решена почти одновременно О. Мором и Р. Смитом (если обращать внимание только на самые существенные, главные решения). Некоторые вопросы графической кинематики решил также Бурместер.

Научное творчество Мора в значительной степени связано с теорией стержневых систем. Его имя встречается в теоретических разработках вопросов сопротивления материалов, в строительной механике. В кинематике механизмов ему принадлежит значительная доля участия в авторстве одного из самых любопытных методов исследования механизмов — метода планов скоростей и ускорений. Он работал над созданием этого метода много лет — с 1879 по 1887 г. Одновременно с Мором английский механик Роберт Смит проводил исследования в том же направлении и пришел к совершенно аналогичным результатам. Его мемуар «Новый графический анализ кинематики механизмов» был опубликован в 1885 г.

Трудно сказать, кто из этих ученых должен получить приоритет. Дело в том, что решение этой задачи, как говорят, уже носилось в воздухе. Очень близко подошел к разработке подобного способа исследования механизмов Прелль. В 1877 г. для одного частного случая план скоростей построил Виллис. С 1880 г. в том же направлении работал, и отнюдь не безрезультатно, Бурместер. Дело лишь в том, что способ, разработанный Бурместером, несколько отличается от метода Мора — Смита: он основан на нахождении мгновенных центров вращения в относительном движении звеньев механизмов. При этом Бурместер при построении своего плана скоростей поворачивает все его составляющие на 90°.

Способ Бурместера подробно излагается в его «Учебнике кинематики» (1888). Этот учебник сыграл в истории кинематики механизмов исключительную роль: в нем впервые были систематизированы и математически точно изложены известные к тому времени методы практической кинематики. Мы уже видели, что предшественники Бурместера, включая Рело и Грасгофа, удовлетворялись в своих научных изысканиях главным образом описательными рассуждениями, стремясь как можно меньше и как можно реже прибегать к помощи математики. Такой литературно-журналистский метод был весьма распространен среди машиноведов, однако он ничего не мог дать для дальнейшего развития науки. Естественно, что геометр Бурместер не смог пойти таким путем: используя некоторые методы теоретической механики и кинематической геометрии и применив ряд приемов строительной механики, он разработал новую исследовательскую методику, учитывающую особенности учения о механизмах и машинах.

Труд Бурместера имеет еще одну особенность, отличающую его от прежних учебников по механике машин: он посвящен исключительно исследованию плоских механизмов. Сам Бурместер назвал его поэтому первым томом и обещал опубликовать в дальнейшем второй том, посвященный кинематике пространственных механизмов, чего, однако, не выполнил.

Как выше было упомянуто, Рело очень основательно исследовал шарнирные четырехзвенные механизмы. Продолжая это направление, Бурместер обратил свое внимание на шестизвенные шарнирные механизмы. При их исследовании он выделил две существенно различные цепи, которые назвал цепью Уатта и цепью Стефенсона. Первая из них полностью поддается исследованию при помощи графических методов, разработанных Бурместером; что же касается второй, то дело здесь оказывается значительно более сложным. Кинематическая цепь Стефенсона может быть исследована лишь при определенных закрепленных звеньях, в случае же исследования кулисы Стефенсона этих методов оказывается недостаточно.

Бурместер подошел также к исследованию восьмизвенных механизмов, среди которых обнаружил цепь, обладающую свойствами, подобными кулисе Стефенсона. Так была обнаружена трехповодковая группа, изученная одновременно в 1880 г. Бурместером и Риттерсгаузом. Результаты этих исследований были опубликованы в журнале «Civilingenieur».

Таким образом, к диаде Сильвестра, присутствие которой характеризует подавляющее большинство плоских механизмов, добавилась трехповодковая группа, сильно портившая настроение исследователей, которые старались избежать ее всеми возможными для них средствами — и в первую очередь игнорированием. Но оказалось, что структура плоских механизмов может включать и иные, более сложно составленные элементарные образования: в 1883 г. Мартин Грюблер обнаружил еще более сложную, чем трехповодковая,— четырехповодковую группу.

Развитие машиностроения, начиная со второй половины 80-х годов XIX века, выдвинуло на первый план динамические проблемы; одновременно значительно снизился интерес к проблемам кинематики. Объясняется это тем, что в течение первых трех четвертей века на кинематику смотрели как на панацею от всех бед, с которыми пришлось столкнуться практическому машиностроению. Но большие ожидания не оправдались: были решены лишь некоторые частные задачи, а теоретические изыскания пока еще не дали практических выходов. В то же самое время решение динамических проблем обещало большие прибыли немедленно, а игнорирование их грозило большими убытками. Поэтому машиноведы начали серьезно заниматься вопросами динамики и в первую очередь динамики кривошипно-ползунного механизма, механизма паровой машины, которая в те годы в качестве «универсального источника энергии» в промышленности и на транспорте переживала период своей «лебединой песни».

Конец столетия не принес для кинематики шарнирных механизмов ничего существенно нового.

Характерно, что вместе с графическими методами кинематики методы графической статики механизмов также оказались заброшенными: исследования же сил инерции в кривошипно-ползунном механизме повлекли за собой разработку графических методов динамики механизма паровой машины и теории махового колеса.

На рубеже XIX и XX столетий Ф. Рело еще раз сделал попытку отвоевать для кинематики утраченные ею позиции. В 1900 г. он опубликовал второй том своей «Теоретической кинематики», правда, под измененным названием («Учебник кинематики», т. 2). По существу в этой работе содержалось не развитие прежних идей автора, опубликованных им в 1875 г., а их новая трактовка. Рело своеобразно и очень детально развил теорию кинематических пар, перестроил аналитическую кинематику механизмов, а также попытался связать методы исследования механизмов с подобием в их построении. Он выделил шесть групп механизмов, служащих для передачи движения,— винтовые механизмы, механизмы шарнирно-звеньевые, колесные (фрикционные и зубчатые), кулачковые, стопорные и механизмы, в состав которых входят гибкие передачи. Подобной классификацией с теми или иными видоизменениями пользуются и в настоящее время. Рело сделал также попытку построить теорию рабочих машин с помощью теории кинематических пар, однако она не была замечена современниками и не получила дальнейшего развития.

Русские работы по теории шарнирных механизмов в последней четверти XIX века выполнялись или учениками Чебышева, или учениками Лигина. В конце века начинают появляться также работы в этом направлении Н. Е. Жуковского. Последний дал очень оригинальный и изящный вывод формул Чебышева для симметричного прямолинейно-направляющего механизма в предположении бесконечно малого хода. Жуковский определил центры ускорений различных порядков в среднем положении механизма, доказав затем, что точка шатуна, траектория которой имеет с прямой касание пятого порядка, найдется в центре ускорений первого порядка, если выбрать размеры механизма так, чтобы этот центр совпадал с центром ускорений третьего порядка [15]. Эта идея Жуковского была затем обобщена А. П. Котельниковым. Он дал также оригинальный вывод формул Чебышева для симметричного прямолинейно-направляющего механизма при условии касания пятого порядка. Общий элементарный вывод формул Чебышева для симметричного прямолинейно-направляющего механизма был выполнен Д. К. Бобылевым. Сам Н. Е. Жуковский не остановился на этих работах. Несмотря на то, что его научные интересы в основном относились к области гидроаэромеханики, он очень интересовался также и теорией шарнирных механизмов. Достаточно сказать, что его труды в этом направлении относятся к промежутку времени не меньше тридцати лет.

Жуковский очень серьезно относился также к делу популяризации науки. По теории шарнирных механизмов он читал лекции в Политехническом обществе, в физико-математической комиссии отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, а также в Московском математическом обществе. Темы его сообщений были: «О приборе Кемпа для решения числовых уравнений высших степеней», «Планиграф Дарбу», «О рычажном дубликаторе Делоне», «О механизме Ассура» и другие. Интересно, что в то время, как Ассур работал над теорией аналогов ускорений, те же вопросы заинтересовали и Жуковского. Его работа на

[15] *Н. Е. Жуковский*. Приложение теории центров ускорений высших порядков к направляющему механизму Чебышева. — Журнал Русского физико-химического общества, т. XV, 1883, стр. 134—141.

тему «Сведение механической задачи о кинематической цепи к задачам о рычаге», опубликованная в 1909 г., представляет собой классическое произведение, выполненное с большим изяществом и со свойственной Жуковскому экономией в изложении.

Жуковский рассматривает плоский шарнирный механизм, загруженный некоторой системой сил. Если построить в любом масштабе план скоростей этого механизма и, рассматривая его как жесткий рычаг, повернуть около полюса плана, принятого за точку опоры, на 90°, а затем приложить в точках плана, соответствующих точкам приложения сил механизма, те же самые силы, сохраняя их величину и направление, то в случае равновесия механизма рычаг также будет в равновесии.

Мы уже упоминали, что подобная идея промелькнула и у Прелля, который пробовал определять равновесие механизма с помощью уравнивания моментов, образованных произведениями сил на скорости, повернутые на 90°. Однако Прелль дает лишь частные решения и кроме того он не владел общим методом графического определения скоростей механизма. Решение же, предложенное Жуковским, при всей его простоте оказалось весьма общим. Действительно, пусть задан механизм, не находящийся в равновесии под действием некоторой системы сил, включающей и силы инерции. Тогда, пользуясь приведенной теоремой Жуковского о жестком рычаге, можно сделать полный кинетостатический расчет механизма, определить уравновешивающую силу, приложенную к ведущему звену механизма, определить приведенную к крайней точке ведущего звена массу механизма, определить живую силу механизма. Наконец, если жесткий рычаг Жуковского рассчитать как ферму, то усилие в каждом стержне рычага дает усилие в одноименном стержне механизма.

Напомним все же, что Жуковский рассматривает только механизмы с одной степенью свободы и считает, что план скоростей уже построен. Метод, предложенный Ассуром, был шире.

Жуковский воспитал большую группу ученых, работавших в области механики машин. Его учениками были В. П. Горячкин, Н. И. Мерцалов, Д. С. Зернов, А. И. Сидоров, Д. П. Рузский, Л. В. Ассур, Г. Ф. Проскура. Все они по окончании Московского университета прошли еще и техническую школу и благодаря такому сочетанию теоретической и специальной подготовки внесли новые идеи в практику высшей технической школы. Можно сказать, что Н. Е. Жуковским и его учениками были развиты те идеи, которые послужили отправным пунктом для советской научной школы в области механики машин и от которых эта школа, говоря языком древнего летописца, «начала быть». Обыкновенно, вспоминая Н. Е. Жуковского как ученого и как отца русской авиации, забывают эту сторону его деятельности — подготовку педагогов механиков и машиноведов для русской высшей технической школы. А ведь эта его заслуга перед технической школой буквально неоценима.

Выше уже говорилось о значении деятельности В. Л. Кирпичева как организатора русской высшей технической школы и крупнейшего педагога-механика, сумевшего сделать ясными самые трудные вопросы технической механики. Уже в последний период своей деятельности в Петербургском политехническом институте он опубликовал (правда, на стеклографе) два пособия для студентов высшей технической школы — «Построение путей (траекторий), описываемых точками плоского механизма» и «Построение картины скоростей и ускорений для плоского механизма». Если вторая из этих книг имеет лишь методическое значение, то первая является настоящим научным мемуаром, одним из первых на эту тему. Интересно, что машиноведы 80-х годов, которые глубоко разработали вопрос о графическом и графо-аналитическом определении кинематических параметров движения механизма, очень мало внимания уделяли вопросу определения положений, являющемуся в сущности исходным для всякого инженерного расчета. Таким образом, В. Л. Кирпичеву принадлежит весьма существенный и важный вклад в теорию шарнирных механизмов.

Русская школа теории механизмов и машин создавалась силами большой группы ученых-техников с глубоким математическим образованием. Русские математики буквально с первых лет возникновения науки о механизмах и машинах (Д. С. Чижов, А. С. Ершов, Н. Д. Брашман) внесли в ее создание большой вклад, определивший лицо школы и дальнейшие пути ее развития. Характерно, что основатель первой и самой значительной дореволюционной математической школы — петербургской — П. Л.

Чебышев, ученик Брашмана по Московскому университету, в то же время является основателем и русской школы теории механизмов и машин, и вообще, применения математических методов к вопросам механики машин. В первые два десятилетия XX века, когда на помощь ученикам и преемникам Чебышева и Лигина пришел мощный отряд учеников Жуковского, русская школа в области теории механизмов и машин смогла собрать такое богатство идей, научная переработка которого растянулась еще на несколько десятилетий. Таким образом, советская научная школа в области механики машин унаследовала идеи Н. Е. Жуковского, П. О. Сомова, Л. В. Ассура, А. П. Котельникова, Х. И. Гохмана, И. М. Занчевского, Д. Н. Зейлигера, В. Л. Кирпичева, механизмы П. Л. Чебышева, Л. И. Липкина и Н. Б. Делоне, исследования динамики В. П. Горячкина и Н. И. Мерцалова, учебные курсы Д. С. Зернова, Д. П. Рузского, А. И. Сидорова, Н. И. Мерцалова и, конечно, самого Жуковского.

В те же годы над вопросами кинетостатики и графической динамики работал замечательный немецкий ученый Фердинанд Виттенбауэр (1857—1922). Виттенбауэр учился в Граце и в Веке, а затем в Берлинском университете, где слушал лекции Кирхгофа и Вейерштрасса. С 1880 г. Виттенбауэр работал в Высшей технической школе в Граце. Степень доктора технических наук honoris causa была присвоена ему в 1917 г. в Праге.

В 1912 г. Виттенбауэр был избран ректором Высшей технической школы в Граце и произнес при этом речь на тему «Будущее и цели технической механики». Рассмотрев вкратце историю развития проблем механики машин за первое десятилетие XX века, он отметил как негативный факт начавшееся с конца XIX века отчуждение между теоретиками и техниками, свойственное в особенности немецкой высшей школе. При этом техники настаивали на сокращении часов, отведенных для теоретических дисциплин, сведя их к очень сжатому минимуму. Слова не расходились с делом, разлад между математическими исследованиями и работами техников в немецкой высшей технической школе становился все больше, интерес к теоретическим работам в инженерных кругах упал и, как отмечает Виттенбауэр, редакции технических журналов начали отказываться от публикации статей с математическим содержанием.

Таким было положение исследований в области динамики машин в немецкой школе теории механизмов и машин (Германия, Австрия, Чехословакия, Швейцария). В конце 60-х годов возникла наука о графическом расчете механизмов нулевой подвижности — ферм — графостатика. Были развиты весьма мощные графические методы, которые тогда же пытались применить к исследованию механизмов, однако без особого результата. С половины 70-х годов началось быстрое развитие кинематики. Но уже через какие-нибудь пятнадцать лет наступило разочарование: от кинематики ожидали очень многого, но стать основной наукой машиностроения она не смогла. Тогда обратили внимание на динамику, получили ряд весьма интересных результатов, однако дальнейшие работы натолкнулись на серьезные расхождения между теоретическими исследованиями и инженерной практикой, и началось общее охлаждение к проблемам технической механики.

Однако и скептическому отношению к теории механизмов были определенные пределы. И в области технической кинематики и кинематической геометрии, и в области кинетостатики и динамики продолжались поиски. Сам Виттенбауэр, так пессимистически охарактеризовавший положение с технической механикой, упорно занимался приложением графических методов к вопросам динамики механизмов. И в графической динамике и в кинетостатике он получил фундаментальные результаты, которые решил объединить в одной монографии. «Графическая динамика» Виттенбауэра вышла в свет в 1922 г. — уже после смерти автора.

Все же первое десятилетие XX века и в этом отношении не было безрезультатным. В России в 1904 г. вышло стеклографированное издание учебника Н. И. Мерцалова — первая обобщающая работа по динамике машин. Были заложены основы кинетостатического расчета механизмов. Здесь основное затруднение заключалось в том, что силы, действующие между звеньями механизма, являются внутренними по отношению к последнему и поэтому взаимно уничтожаются, если вести расчет всего механизма в целом. Надо было найти такой метод, при помощи которого внутренние силы не исключались бы. При этом такой метод должен был также учитывать и те силы, которые возникали в процессе движения звеньев механизма и которые по своей величине могли превзойти все прочие действующие на механизм силы — силы инерции. Этот вопрос был освещен в работах Мора и Виттенбауэра. О. Мор посвятил кинетостатике вторую часть своей монографии «Движение плоских механизмов» [16]. Он определяет силы, действующие на звенья механизма во время его движения, давления в парах без учета сил трения, давления в парах с учетом сил трения, а также условия существования механизма. В работе «Графическая динамика механизмов» (1904) Виттенбауэр обращает внимание на распределение масс и на определение статических моментов и моментов инерции звеньев механизма.

Тогда же возник вопрос об общем методе кинетостатических исследований. С этой целью машиноведы пробовали применить не только принцип Даламбера, но и уравнение Лагранжа — однако безрезультатно. Как пишет Лоренц, «все... динамические операции основывались на последовательном применении принципа потерянных сил Даламбера, который обеспечивал рассчитывающему и конструирующему инженеру преимущество непрерывной обозримости всех действий, что также сделало основы динамики особенно удобными для преподавания в высшей школе. Это следует подчеркнуть в особенности, ибо в последнее время стремятся приспособить для этого заимствованные из аналитической механики уравнения Лагранжа для каждой степени свободы движения... Основываясь на собственном опыте, я сомневаюсь, чтобы этот весьма значительный в науке метод пришелся по вкусу большинству инженеров» [17].

Итак, сделаем попытку подытожить актив механики машин в теории шарнирных механизмов, которым овладели к концу первого десятилетия XX века. По вопросам структуры механизмов был сделан большой задел, не объединенный общей мыслью. В сущности лишь теория кинематических пар была поставлена на прочное основание. Были заложены основы синтеза механизмов, однако отсутствовала теория, которая связала бы все шарнирные механизмы в единую систему по некоторым объектив-

[16] *O. Mohr*. Abhandlungen etc., Abh. IV. Die Bewegung der ebenen Getriebe 2-te Teil. Die Kinetik ebener Getriebe, S. 104—106.
[17] *H. Lorenz*. Die Mechanik in ihrer Bedeutung für die Maschinenbau. Zeitschrift des VDI, Bd. L, 1906, S. 654.

ным признакам сродства. Было предложено много способов решения задач кинематики, статики, кинетостатики и динамики шарнирных механизмов, но решения эти также не были объединены общей мыслью и зачастую для каждой частной задачи требовалась новая методика ее решения. Не было также ясности во взаимоотношениях между шарнирными механизмами и механизмами, включающими в свой состав высшие пары.

В 1874 г. Дж. Сильвестр в одной из своих статей, озаглавленной «Преобразования движения по кругу в движение прямолинейное», высказал мысль о том, что учение о структуре механизмов следовало бы строить на основании особой теории соединений, по своей природе родственной методам кристаллографии, теории многогранников, теории расположения атомных решеток и пр. Поэтому перед машиноведами вставала задача о разработке своеобразной геометрической теории, в которой не должны иметь существенного значения ни величины геометрических линий, ни их взаимное положение. Однако до середины второго десятилетия XX века подобной теории создано не было.

Теперь в этом направлении начал работать Л. В. Ассур.

IV

Исследование структуры механизмов

1909 год принес семье Ассура большое горе: летом в результате несчастного случая погибла двухлетняя Оля. Для жены Леонида Владимировича — Елены Михайловны потеря единственной дочери была тяжелым ударом, она сама тяжело заболела, и по рекомендации врачей Леонид Владимирович увез ее за границу. По возвращении они сменили квартиру и поселились поближе к Политехническому институту, в Лесном, на Английском проспекте.

Наконец изменилось и положение Ассура в Политехническом институте. Уже два года он работал в качестве преподавателя по вольному найму; 5 мая 1910 г. Совет института избрал его штатным преподавателем. Летом того же года Ассур получил заграничную командировку и смог ознакомиться с постановкой преподавания прикладной механики в немецких высших технических школах и университетах. С этой целью он посетил Берлин, Мюнхен и ряд других городов. Мало по малу зарубцевались и семейные раны: в октябре 1910 г. у Ассуров родился сын Всеволод, а в феврале 1913 г. — дочь Елена.

Все эти годы Ассур работает с большим напряжением, он как бы «наращивает темпы» и спешит высказать на бумаге поглощающие его идеи. Он живет между преподавательской кафедрой и письменным столом и трудно восстановить его личную жизнь, которой, по-видимому, уделялись немногие свободные минуты. В течение 1909—1911 гг. он выпускает три литографированных пособия для студентов, разрабатывает и читает новые курсы, начинает писать свою основную работу.

Приблизительно в эти годы, как мы видели выше, возникает новое направление в теории машин — теория регулирования машин как предмет преподавания, сперва как факультативный курс. По рекомендации Н. Е. Жуковского в Политехническом институте чтение этого курса поручают Ассуру.

Здесь следует сделать некоторое отступление.

После реформ 1905 г. в высших технических учебных заведениях была в корне изменена система преподавания. Вместо курсовой системы была введена предметная, которая дала возможность предъявлять к студентам более высокие требования и вместе с тем расширить преподавание и повысить его научный уровень. Это обстоятельство, с одной стороны, благоприятно повлияло на качество подготовки студентов, с другой же — очень тяжело отразилось на их успеваемости: не только средние студенты, но даже лучшие не могли выполнить в срок все требуемые программой курсов работы.

Для повышения успеваемости по основным предметам были введены репетиции, от которых отказались еще в XIX веке. При этом средняя годовая отметка определялась как полусумма средней по репетициям и экзаменам.

Для репетиций потребовалось дополнительное количество преподавателей: оказались свободные места не только для новых лиц, но сплошь и рядом преподаватели брали педагогическую нагрузку уже не в одном, а в нескольких институтах. Это, как мы видели, отразилось и на положении Ассура, который теперь мог уделить своей научной работе значительно больше времени, чем раньше.

Десятые годы были временем разгула реакции. Царское правительство постепенно начало отнимать и те небольшие «свободы», которые оно вынуждено было дать в результате революции 1905 г. Государственные думы становились все реакционнее, но и с ними правительство вело неустанную борьбу. Осенью 1910 г. министром народного просвещения был назначен пресловутый Л. А. Кассо.

Студенты ответили на реакционные мероприятия правительства волнениями и забастовками, вскоре охватившими все высшие учебные заведения столицы. В связи с этим совет министров издал постановление, предписывающее не допускать в стенах высших учебных заведений студенческих собраний, не имеющих научного характера. Учебное начальство должно было запрещать подобного рода сходки и прибегать для этого к помощи полиции. Полицейским чинам предписывалось «принимать быстрые и решительные меры к прекращению сходки и выяснению личности ее участников».

Наметилось расслоение и среди профессорско-преподавательского состава высших учебных заведений. Ряд профессоров не сочли для себя возможным работать в условиях нарастающей реакции и в знак протеста ушли с работы. Так поступили некоторые профессора Московского университета, Киевского политехнического института, в 1912 г. ушел директор Петербургского технологического института Д. С. Зернов.

Ассур, бывший в то время младшим преподавателем Политехнического института, не был в рядах революционных деятелей, но не имел никакого отношения также и к реакционной профессуре. Позже он одним из первых перешел на сторону Советской власти.

Уже тогда он поставил перед собой задачу исключительной сложности, занимавшую у него все свободное время: в 1911 г. он начал сдавать экзамены и приступил к написанию диссертации, которая начала публиковаться в «Известиях» политехнического института в 1913 г. Таким образом, Ассур начал размышлять над вопросами структуры механизмов, еще не окончив своего исследования об аналогах ускорений. Возможно, он и прервал работу над ними, чтобы уяснить самому себе детали построения механизмов, без которых многие выводы теории аналогов не имели непосредственного практического применения и были трудны для понимания.

Основной идеей, разработке которой Ассур посвятил свое знаменитое сочинение, явилась идея единообразия строения механизмов и вытекающая из нее проблема подобия методов их исследования. Мы видели, что кинематика шарнирных механизмов к началу второго десятилетия XX века представляла собой некую совокупность более или менее остроумно решенных задач, не связанных единой темой. Совокупность знаний о структуре механизмов была не особенно большой. Знали, что в составе шарнирных механизмов можно обнаружить двух-, трех- и четырехповодковые группы. Рело выяснил принципиальное родство между плоскими механизмами с шарниром и механизмами с ползунком и показал, каким образом они могут преобразовываться и менять характер, сохраняя свое строение. Большинство известных механизмов имело в своем составе двухповодковые группы, или диады

Сильвестра; рассчитывать такие механизмы умели, используя методику Мора — Смита. Что же касается трех- и четырехповодковых групп, то они появлялись в составе механизмов «случайно» и нарушали весь порядок расчета.

Чтобы разложить механизм на элементарные составляющие, следовало решить вопрос, какую структуру надо считать элементарным механизмом, какую форму должен иметь элементарный механизм, можно ли изменять его форму и каким образом производить это последнее действие. Очевидно, теория кинематических пар Рело хотя и явилась крупнейшим подспорьем при решении этого вопроса, все же не смогла дать на него ответа, ибо кинематическая пара была только иным выражением математического понятия связи и, хотя определялась сочетанием двух материальных тел, сама не представляла собой материального тела. Это понял и сам Рело, принявший в качестве элементарного механизма шарнирный четырехзвенник; в этом за ним последовал и Бурместер. Рело доказал также, что кривошипно-ползунный механизм является частным случаем шарнирного четырехзвенника и получается из него в том случае, если длина коромысла бесконечно увеличивается. Однако методика, предложенная Рело, не могла дать какой-либо рецепт для созидания новых механизмов: можно было лишь с бóльшим или меньшим искусством разыскивать разнообразнейшие варианты все того же четырехзвенника.

Несомненно, что генезис структурных идей Ассура связан с анализом четырехзвенника, но дело заключается в том, что Ассур увидел здесь то, чего не видели его предшественники: двухповодковую группу как основной структурный элемент исследуемого механизма. Логически развивая эту мысль, он пришел к выводу, что такая двухповодковая группа пригодна также для построения новых механизмов. Следовательно, найден и элемент структуры, и тождественно равный ему элемент созидания.

Итак, двухповодковая группа имеет совершенно определенную форму, но эта форма меняется, так как если шарнирный четырехзвенник в пределе становится кривошипно-ползунным механизмом, то и простейшая кинематическая пара — шарнир, — характеризующая собой сочетание двух звеньев, движущихся в одной плоскости, может принять форму ползунка, если только бесконечно увеличивать диаметр шарнира. С этой точки зрения ползунок будет не чем иным, как элементом одной из двух сопряженных поверхностей шарнира бесконечно большого диаметра. Таким образом, диада может существовать в нескольких модификациях, которые получаются при замене одного или двух шарниров ползунком. Однако трех шарниров заменить ползунками уже нельзя: при удалении на бесконечность всех трех центров они окажутся расположенными на одной и той же бесконечно удаленной прямой и при закреплении двух из них система будет иметь конечную подвижность.

Если взять двухповодковую группу в одной из ее возможных модификаций и закрепить две крайние пары на одном из звеньев механизма, или на неподвижной плоскости, то группа образует жесткий треугольник нулевой подвижности. Рассуждая по аналогии, Ассур приходит к следующему утверждению: «Если имеется какая-нибудь группа соединенных между собой шарнирами звеньев, которая по прикреплении n ее точек в основе дает начало жесткому статически определимому соединению, то это показывает, что, дав определенные и независимые между собой значения $2n$ координатам этих точек, мы определим координаты всех остальных. Вот почему, если те же точки прикрепить к точкам данного механизма, получится снова система с одной степенью свободы, или механизм» [1].

Поэтому совершенно не обязательно присоединять исследуемую группу к механизму; достаточно будет присоединить ее к неподвижной плоскости, и если она образует тогда жесткую систему, то мы можем считать ее пригодной для образования механизмов.

Значительно сложнее обстоит дело с механизмами, имеющими в своем составе трехповодковые группы. Сам Л. В. Ассур указывает, что на занятиях по прикладной механике, которые он проводил в первый год своей работы в Политехническом институте, он делил упражнения на две группы, в зависимости от того, содержат ли соответствующие механизмы трехповодковую группу или нет. Методы, применяемые при исследовании таких механизмов, существенно отличаются от тех, которыми поль-

[1] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 21—22.

зуются при механизмах, включающих в свой состав только двухповодковые группы. Это знали и до Ассура, но роль группы в структуре механизма не была ясной, и поэтому такие механизмы рассматривались лишь как конкретные образования без какого-либо обобщения.

Некоторые подобные механизмы, включающие трехповодковые группы, были рассмотрены Риттерсхаузом. В своем учебнике кинематики Бурместер также обнаружил механизм, названный им цепью Стефенсона, исследовать который методами, разработанными Бурместером, не представлялось возможным. Он также включал трехповодковую группу. Бурместер указал также на некоторые восьмизвенные цепи. Грюблер указал механизм, содержащий четырехповодковую группу. Однако все эти примеры не могли способствовать созданию общей теории, пока не был найден общий способ построения механизмов.

Ассур начинает исследование трехповодковой группы после анализа механизмов, включающих лишь диады. Если трехповодковую группу прикрепить всеми свободными шарнирами к неподвижной плоскости, то она образует жесткую систему (рис. 2). Действительно, применяя формулу Чебышева,

$$3n - 2p - k = 0,$$

где n — число подвижных звеньев, равное в нашем случае 4, p — число шарниров, равное 6, k — число высших пар, которые в этом случае отсутствуют. Тогда результат оказывается равен нулю, и мы получаем замкнутую кинематическую цепь нулевой подвижности. Ассур получает трехповодковую группу из двухповодковой методом, названным им методом развития поводка. Один из поводков диады развивается при этом в жесткий треугольник с шарнирами при вершинах. Затем к каждому свободному шарниру присоединяется поводок (рис. 3).

Итак, присоединенная свободными шарнирами к жесткому звену трехповодковая группа образует жесткую систему (ферму). Если же свободные шарниры присоединить к звеньям механизма принужденного движения, или, в частном случае, одним свободным шарниром к звену, вращающемуся около некоторого центра, связанного с жестким звеном, а прочими свободными шарнирами —

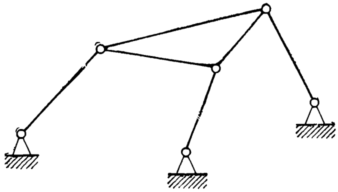


Рис. 2

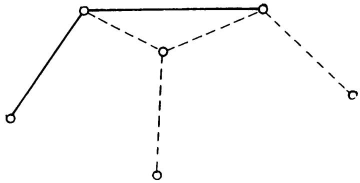


Рис. 3

к жесткому звену, то получим механизм с одной степенью свободы (рис. 4).

«Последовательным многократным присоединением трехповодковой группы можно образовать новые механизмы из уже существующих» [2].

Метод развития поводка можно продолжить. Развивая подобным описанному образом один из поводков трехповодковой группы, получим четырехповодковую группу, а из четырехповодковой — пятиповодковую. Эта операция изобретена самим Ассуром: ни Бурместер, ни Грюблер ничего не говорят о происхождении трех- и четырехповодковой групп.

Однако пятиповодковая группа уже имеет особенность, которой она отличается от двух-, трех-, и четырехповодковой групп. Последние все симметричны и с равным правом допускают развитие любого поводка. Пятиповодковая же группа имеет в своем составе три жестких треугольника, из которых два имеют по два поводка, а средний — один поводок. Следовательно, результаты развития поводков не будут идентичными.

Будем сперва постоянно развивать один из поводков, присоединенных к крайнему жесткому треугольнику. Такое развитие производят цепи, которые Ассур назвал открытыми простыми цепями нормального типа (рис. 5 — пятиповодковая и семиповодковая цепи).

Все цепи этого типа, если присоединить их свободными шарнирами поводков к неподвижному основанию, образуют жесткую систему нулевой подвижности, что можно доказать при помощи формулы Чебышева. Следовательно, присоединенные к механизму, они порождают новый механизм более сложного по сравнению с первоначальным строения.

[2] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 23.

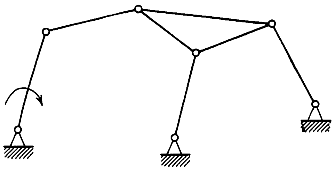


Рис. 4

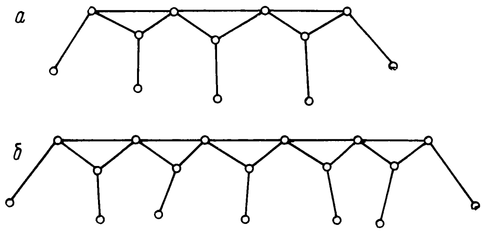


Рис. 5

Далее Ассур анализирует полученные цепи (группы), перенося поводки с крайних звеньев на средние, и наоборот, и доказывает, что при всех возможных вариантах таких переносов первоначальная цепь или распадается на цепи такого же типа, или же в этом случае образуются цепи нового типа с избыточными или недостающими поводками, которые Ассур, однако, не рассматривает, считая, что «в общей теории выгодно рассматривать механизмы как образованные из одних только нормальных цепей. С точки зрения классификационной в этом есть даже настоятельная необходимость, так как двоякого рода рассмотрение неминуемо ввело бы двойственность или даже полную неопределенность в классификацию» [3].

Таким образом, некоторые цепи выпадают из исследования. Ниже мы постараемся проследить последовательность рассуждений Ассура о возможности дальнейшего развития его теории.

В качестве метода образования новых механизмов Ассур разработал способ наслоения, основанный на предыдущих рассуждениях и заключающийся в последовательном присоединении к некоторому механизму, принятому за основной, ряда цепей. Поэтому принципиально возможным было бы рассмотрение и механизмов, полученных присоединением цепей с недостающими или избыточными поводками. Однако, поскольку по утверждению Ассура любой механизм можно при помощи отбрасывания цепей нормального типа упростить до кривошипа (который и служит основным «механизмом»), такое исследование может представить интерес лишь в частных случаях.

[3] Там же, стр. 35.

Все механизмы, которые образуются из простого кривошипа при помощи последовательного наслоения простых многоповодковых цепей нормального типа, Ассур называет механизмами первого класса. При этом наиболее сложная группа, входящая в состав механизма, определяет следующее подразделение класса — порядок. Так, кривошипу (ведущему звену) присваивается первый порядок, механизмам, составленным из двухповодковых групп, — второй порядок, механизмам, в состав которых входит хотя бы одна трехповодковая группа, — третий порядок и т. д. Таким образом, подавляющее большинство применяемых в технике механизмов относится к первому классу, второму порядку. К первому классу, третьему порядку относятся немногие механизмы, например, кулиса Стефенсона (где трехповодковая группа встречается один раз), кулиса Гуча (где эта группа встречается дважды) и немногие другие. К первому классу, четвертому порядку относится кулиса Гейзингера.

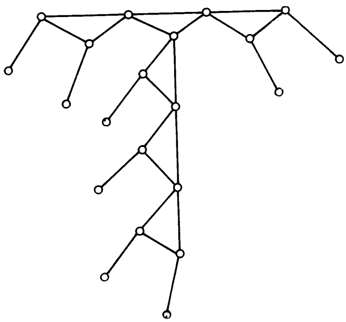


Рис. 6

Вернемся теперь к нормальной пятиповодковой цепи и вместо одного из крайних поводков разовьем единственный поводок среднего треугольного жесткого звена (рис. 6). Повторим эту операцию три раза. В результате получим незамкнутую кинематическую цепь, состоящую из жестких треугольников и шарнирно присоединенных к ним поводков. При этом звено, выпускающее разветвление, совершенно лишено поводков, соседние с ним средние звенья имеют по одному поводку и крайние звенья сохраняют по два поводка. При дальнейшем повторении той же операции каждое среднее звено могло бы развить свой единственный поводок в новое ответвление.

Цепи, полученные в результате описанных операций, Ассур называет сложными открытыми многоповодковыми цепями нормального типа. Такая цепь, присоединенная всеми свободными шарнирами поводков к жесткому звену и лишенная затем одного поводка, или же присоединенная одним из свободных шарниров к кривошипу, а всеми прочими — к жесткому звену, дает начало механизму.

Ассур подвергает сложную открытую многоповодковую цепь весьма тщательному анализу, в результате которого приходит к заключению, что любая ее часть эквивалентна поводку, иными словами, каждую часть такой цепи можно от нее отделить и заменить поводком, причем вновь получится открытая цепь нормального вида.

Механизмы, которые содержат в своем составе сложные многоповодковые цепи нормального вида, Ассур называет механизмами второго класса. Разряд механизма определяется количеством бесповодковых звеньев, входящих в состав цепи. Так как любая цепь первого класса не имеет жестких бесповодковых звеньев, то, исходя из этого принципа, можно было бы назвать ее цепью второго класса нулевого разряда.

Одним из наиболее существенных свойств сложной открытой цепи нормального вида является то, что при перемещении одного поводка она распадается на несколько открытых цепей нормального типа.

Итак, сложная открытая многоповодковая цепь нормального типа является характерным образованием, ясно отличимым от цепей иного вида; она может быть выделена из состава механизма в качестве одной из тех групп, на которые он распадается.

Ассур не остановился в своих рассуждениях на тех положениях, которые были изложены выше. Уже в 1915 г., публикуя вторую часть своей работы, он одновременно развивает идею о многоповодковых открытых цепях нормальных типов и в том же 1915 г. публикует «Дополнения ко второй главе первой части». Здесь он вносит некоторые изменения в терминологию и приводит недостающие доказательства отдельных положений. Так, нормальные многоповодковые цепи он начинает называть первообразными нормальными цепями, чтобы иметь возможность расширить круг тех цепей, которые попадают под понятие нормальных. Последним термином будут тогда обозначаться такие цепи, которые после подсоединения свободными шарнирами поводков к неподвижному основанию дают начало статически определимой системе. Следовательно, нормальные цепи могут быть первообразными и составными: последние распадаются на совокупность первообразных цепей.

Первообразные цепи могут входить в соединения различным образом. Может быть последовательное соединение цепей, когда первая первообразная цепь подсоединена к основанию всеми поводками, вторая — некоторыми поводками к ней, другими — к основанию, и т. д. Иным способом соединения будет параллельное присоединение нескольких цепей.

Ассур доказывает два признака, характеризующих составную цепь:

«Признак I. Для того чтобы нормальная цепь оказалась составной, необходимо и достаточно, чтобы в ней имелась одна первообразная нормальная цепь, всеми поводками прикрепленная к основе.

... Признак II. Для того чтобы нормальная цепь оказалась составной, необходимо и достаточно, чтобы в ней имелась какая-либо первообразная нормальная цепь, соединенная с остальным образованием только концами своих поводков»[4].

Существенное значение в теории Ассура имеет доказательство единственности типов первообразных цепей первого и второго классов. Действительно, метод развития поводка приводит к таким первообразным нормальным цепям второго класса, в которых к узловым звеньям присоединяется по три соседних звена. Попробуем теперь предположить, что к каждому узловому звену можно подсоединить не три, а любое количество звеньев.

С этой целью отвлечемся от поводков и рассмотрим бесповодковые цепи второго класса. Очевидно, единственным признаком цепи второго класса будет лишь отсутствие замкнутых контуров из звеньев. Следовательно, от одного звена к другому ведет лишь один путь, и по разъединении какого-либо шарнира цепь распадается на две уже не связанные между собой части.

Однако те же признаки присущи и цепям первого класса. Различие между теми и другими заключается только в том, что в цепях второго класса имеются узловые звенья, к которым непосредственно примыкают более двух соседних звеньев; подобные звенья отсутствуют в цепях первого класса.

[4] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 69—71.

«Очевидно, что, снабжая звенья бесповодковой цепи поводками, получим многоповодковую цепь того же класса, что и бесповодковая, так как при определении класса цепи поводки во внимание не принимаются. При этом общие свойства бесповодковой цепи сохраняются и для многоповодковой. Если в нормальной первообразной цепи второго класса исследованного нами типа отбросим поводки, то убедимся, что в ней имеются только узловые звенья третьего порядка. Поставим же вопрос о том, нельзя ли образовать сначала бесповодковую цепь второго класса, в которой имелись бы узловые звенья более высокого порядка, и нельзя ли, присоединив к ней поводки, превратить ее в нормальную цепь. Очевидно, что это можно»[5].

Представим себе, что в бесповодковой цепи, содержащей n звеньев, имеется n_1 звеньев первого порядка, n_2 звеньев второго порядка,... n_k звеньев k-го порядка. Если разъединить все связывающие их шарниры, то все звенья будут в сумме иметь σ степеней свободы. Для определения числа степеней свободы цепи из этой суммы следует вычесть удвоенное число шарниров. Тогда

$$\sigma = 3n - [n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + (k-1)_{k-1} + kn_k].$$

Но так как

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{k-1} + n_k,$$

то

$$\sigma = 2n_1 + n_2 - [n_4 + 2n_5 + \ldots + (k-4)n_{k-1} + (k-3)\,n_k].$$

И для бесповодковых цепей, в которых имеются лишь трехшарнирные узловые звенья, эта формула приобретает вид:

$$\sigma = 2n_1 + n_2.$$

Если мы свяжем звенья цепи с неподвижным основанием при помощи поводков, то тем самым можем лишить цепь этого числа степеней свободы и получить ферму. Так как каждый поводок осуществляет одну связь, то число поводков должно быть не меньше σ. Оно могло бы быть и больше σ, так как не всякая связь уменьшает

[5] Там же, стр. 73—74.

число степеней свободы системы: связь, являющаяся следствием иных связей, не влияет на число степеней свободы. Нормальная многоповодковая цепь не должна содержать такого типа «избыточных» поводков, так как осуществление связи, вытекающей из иных связей, характеризует статически неопределимую систему, а соединение нормальной цепи с основанием должно быть и жестким, и статически определимым. Следовательно, число поводков должно быть равным σ. При этом распределение поводков не может быть произвольным, а должно соответствовать определенному закону.

Ассур доказывает затем, что при помощи изложенного метода нельзя прийти к нормальным цепям второго порядка с узловыми звеньями выше третьего порядка, с другой стороны, эти цепи могут быть только составными. Далее он возвращается опять к исследованию первообразной цепи и приходит к заключению, что для такой нормальной цепи конечные звенья могут быть только двухповодковыми, а промежуточные звенья — одноповодковыми.

На этом в сущности и заканчивается анализ нормальных цепей первого и второго класса. Ассур очень детально исследует все возможные образования и приходит к заключению, что предложенная им система является универсальной. Он возвращается теперь к своему методу образования цепей — к методу развития поводка.

Весьма существенное значение имеет в этом отношении выдвинутое им положение о равнозначности поводка и цепи (положение IV): «Если в какой бы то ни было многоповодковой цепи, пристегнутой к неизменяемой основе, заменить поводок нормальной концевою цепью, то число степеней свободы относительно основы не изменится; равным образом не изменится число избыточных поводков, если последние вообще имелись» [6]. Это положение открывает дальнейшие возможности не только для самого метода: дальнейшее усложнение цепей потребовало введения символического обозначения звеньев и групп — обычный способ оказался для этой цели недостаточно эффективным; таким образом, дальнейшая схематизация могла привести к новым плодотворным результатам. В этом существенное значение IV положения.

[6] *Л.В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 84

Очень важна постоянная проверка, которую проводит Ассур: кинематические цепи он проверяет при условиях их прикрепления к неподвижному основанию. Таким образом с самого начала исследования устанавливается принципиальное единство между всеми соединениями звеньев — подвижными (механизмами) и неподвижными (фермами). А это дало возможность применить к задачам кинематики хорошо разработанные методы строительной механики. Позже на том же основании кинематические методы исследования вошли как интегральная составляющая графостатики. Это единство структуры выявило и единство методов исследования. Как мы увидим несколько дальше, прикладные выводы метода Ассура не ограничились и этим: их теоретическая сущность оказалась значительно более глубокой.

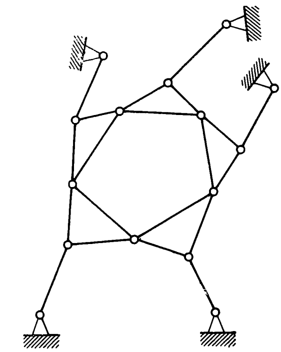


Рис. 7

Вернемся к задаче о построении кинематических цепей. Исчерпав возможности построения цепей первого и второго классов, Ассур переходит к дальнейшему развитию своего метода. Усложнение построения кинематических цепей мыслится ему следующим образом: пусть задана некоторая открытая простая нормальная цепь, всеми своими поводками прикрепленная к основанию и представляющая собой поэтому жесткую систему. Если устранить из этой системы два крайних поводка, то она приобретает тем самым две степени свободы. Если же соединить освобожденные таким образом элементы шарниров вместе, получится опять жесткая система, но совершенно иной конфигурации. Полученную в результате этого процесса цепь, состоящую из связанных вместе жестких одноповодковых звеньев (рис. 7), Ассур назвал простой замкнутой цепью нормального типа с однообразным распределением поводков.

«Однако,— говорит Ассур,— рассмотренный сейчас тип не будет единственным нормальным, так как в противоположность открытым цепям перенос поводка не вызывает распадения замкнутой цепи на простейшие, многократное же его повторение может дать начало новым формам, которые тоже приходится признать за типы нормальные» [7]. С другой стороны, исходя из самого принципа образования подобных замкнутых цепей, разъединение одного из шарниров может породить лишь открытую цепь, а следовательно, простая замкнутая цепь может распасться только на ряд простых открытых цепей.

Все же, что весьма существенно для теории структуры, развиваемой Ассуром, это правило не полностью характеризует нормальные цепи. Последние в структурном смысле являются элементарными, неделимыми образованиями, а поэтому дробление нормальной цепи никогда не смогло бы дать нормальных цепей. Вследствие этого Ассур определяет в качестве нормальной цепи такую простую замкнутую цепь, которая не может быть разложена на открытые цепи нормального типа. Отсюда следует, что прежде чем переходить к дальнейшему усложнению структуры механизмов, надо изучить цепи нормальных типов.

Исследуя таким образом замкнутые нормальные цепи и произведя всевозможные перестановки поводков, Ассур приходит к выводу, что подобные цепи могут быть лишь двух типов: «кроме нормального типа с однообразным распределением поводков возможен только один нормальный тип со смешанным их расположением. Тип этот отличается тем, что в нем число звеньев двухповодковых равно числу звеньев бесповодковых, причем те и другие чередуются между собой, будучи отделены (не обязательно) только цепью одноповодковых звеньев» [8]. Интересно, что двухповодковые звенья можно присоединять к жесткому звену (или к звеньям первоначального механизма) не только с помощью свободных шарниров поводков, но и непосредственно одним из шарниров соответствующего жесткого звена, предварительно отсоединив оба поводка. Относительная подвижность цепи при этом не изменится. В качестве примера можно привести кулису Савельева, в состав которой входит замкнутая нормальная цепь со смешанным расположением поводков, содержащая вместо двухповодковых шарнирно-закрепляемые звенья.

Возьмем какую-либо замкнутую простую нормальную цепь и применим к ней метод развития поводка. Так как

[7] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов.., стр. 96.

[8] Там же, стр. 105.

цепь обладала до своего развития несколькими звеньями, образовывавшими замкнутую систему, то, следовательно, полученные усложненные системы можно различать как по числу звеньев простой замкнутой цепи с простыми поводками, явившейся основой развития, так и по сложности развития поводков. В соответствии с этим Ассур относит все цепи подобного вида, а также содержащие их механизмы, к третьему классу. Число концевых звеньев простой замкнутой цепи с развитыми поводками определяет разряд цепи, а число жестких звеньев с простыми поводками — ее порядок. Тогда простая замкнутая цепь, состоящая из шести жестких звеньев с простыми поводками, будет цепью третьего класса нулевого разряда шестого порядка. Очевидно, что низшим порядком цепей третьего класса может быть лишь третий, так как три звена, соединенные шарнирами, уже составляют жесткую систему.

«Итак, если теория многоповодковых цепей и метод образования механизмов наслоением таких цепей могут привести к единству взглядов на структуру механизмов и к определенной, однозначной классификации, из этой структуры вытекающей, то мы только в том случае достигли бы этой цели для всех рассматриваемых нами механизмов, если бы оказалось возможным любой мыслимый механизм разбить на совокупность таких групп, и только в этом случае» [9].

Будем исходить из жесткого соединения простой замкнутой цепи с основой, т. е. из фермы. Если удалить из такого образования один поводок, то ферма превращается в механизм. Структура подобного механизма проста: он состоит из кривошипа и простой замкнутой нормальной цепи, содержащей количество звеньев, равное количеству звеньев первоначальной цепи.

Но возникает вопрос, какое звено считать кривошипом. В простейших случаях ответ уясняется из конфигурации звеньев механизма, но в более сложных структурах нахождение кривошипа не всегда бывает простым, и это может привести (и действительно приводит) к многозначности решения. Ссылка самого Ассура на звено, «которое вводит движение» [10], ничего не поясняет, ибо само

[9] Там же, стр. 121.
[10] Там же, стр. 122.

это звено является зачастую условным. Благодаря этому одно и то же структурное отображение можно расчленить на нетождественные элементарные цепи, а следовательно, и исследовать его различными способами.

«Удаление поводка в цепи со смешанным распределением поводков, если за кривошип приходится считать поводок двухповодкового звена, дает всегда начало механизму, в котором присоединенная к кривошипу замкнутая цепь распадается на простейшие. В этом легко убедиться, заменяя шарнирное присоединение к кривошипу двумя поводками; тогда эта цепь будет содержать трехповодковое звено, а такая цепь... всегда распадается на открытые цепи. В результате такого распадения будет, однако, стоять на месте упомянутой трехповодковой группы двухповодковая, в которую первая переходит вследствие замены двух ее поводков шарниром» [11].

Если теперь применить метод развития поводка к простой замкнутой цепи, то результат получится различным в зависимости от того, какой поводок развивается — крайнего звена или среднего. В первом случае получается простая концевая цепь, во втором — сложная концевая цепь, тождественная по своему составу тем цепям, которые получаются из сложной открытой цепи разъединением в ней шарнира. Таким образом, этот метод существенно не меняет цепи, и первоначальная цепь своей структуры не меняет. Следовательно, класс образования не меняется и остается третьим.

Простая замкнутая цепь нормального вида может произвести следующую по сложности кинематическую цепь. Если мы отъединим поводки у двух жестких звеньев многоугольника, то тем самым увеличим число степеней свободы на две. Если же вслед за тем освободившиеся шарниры соединим вместе, то будут отняты две степени свободы. Таким образом можно прийти к новой группе цепей, характерной особенностью которых является совокупность двух или большего числа многоугольников, образованных жесткими звеньями. Цепи эти Ассур объединил под общим названием сложных замкнутых цепей. Последние могут быть образованы из любых цепей третьего класса, любого разряда и любого порядка. Однако, чтобы можно было разобраться в получающемся

[11] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 122.

многообразии цепей, Ассур суживает задачу, предполагая, что операция дробления начального многоугольника производится над цепями третьего класса нулевого разряда с однообразным распределением поводков, над группой простейших цепей изучаемого вида.

Итак, пусть будет задана простая замкнутая цепь третьего класса, нулевого разряда, девятого порядка. Отъединим поводки от первого и второго звеньев и свяжем их между собой общим шарниром (рис. 8). Совокупность двух трехшарнирных звеньев, связанных общим шарниром (I и II), называется замком, а каждое звено, входящее в состав последнего,— замковым звеном. Во вновь образованной цепи первоначальный внутренний многоугольник разбит на две части: два многоугольника, имеющих два общих (замковых) звена. Больше общих звеньев у многоугольника не будет.

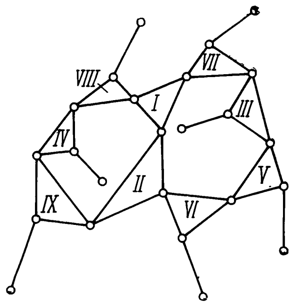


Рис. 8

Эту операцию замыкания двух звеньев в замок можно неоднократно повторять, получая в итоге разбитие первоначального многоугольника на несколько вторичных. Могут быть два типа решения этой задачи. Можно, например, связать звенья VI и VII — в этом случае замки будут параллельными и полигоны не накладываются друг на друга. Но можно, кроме I и II звеньев, связать в замок звенья IV и V — в этом случае получим перекрестное замыкание. Так как количество трехшарнирных звеньев могло быть очень большим и, следовательно, из первоначального многоугольника можно получить путем расчленения его параллельными и перекрещивающимися замками значительное число многоугольников, то, казалось бы, будет трудно разобраться во всей совокупности этих вторичных многоугольников, образующих кинематическую цепь. Однако дело обстоит не так. Ассур указывает, что «какова бы ни была сложность замкнутой цепи, всегда можно, начиная от любого ее звена, обойти последовательно и без повторений все ее звенья и таким образом вернуться к исходному звену.

Указанное положение почти очевидно, потому что сложная цепь образовалась из простой замкнутой, этим свойством обладающей; ни один из шарниров последней не подвергся уничтожению, равно как остались и все ее звенья; прибавились лишь замковые шарниры»[12]. Поэтому можно было бы восстановить первоначальный многоугольник, разъединив все замковые шарниры. Но можно избежать разъединения, обходя последовательно все трехшарнирные звенья. При этом при прохождении через замковые звенья следует оставлять в стороне замковый шарнир.

Как мы видели выше, в эту группу кинематических цепей входят системы, образованные трехшарнирными звеньями двух видов —с одним поводком и бесповодковые. Отличительным свойством бесповодковых звеньев является то, что они входят исключительно в состав замков. Но оказывается, может быть и иной способ образования сложных замкнутых цепей. Вместо только что описанных цепей можно получить цепи общего вида, в которых замковые звенья соединяются между собой не замыканием шарниров, а цепями, образованными одноповодковыми звеньями. Эти цепи могут и отсутствовать, а замыкание может осуществляться с помощью шарниров, как и прежде. Цепи одноповодковых звеньев, осуществляющие поперечное соединение трехшарнирных звеньев, Ассур называет внутренними соединительными, или диагональными цепями. Подобно замкам диагональные цепи могут быть параллельными и пересекающимися.

Так как все метрические соотношения, а равно и форма отдельных звеньев не играют никакой роли в ассуровом анализе структуры кинетических цепей, то изображение последних можно сделать предельно простым. Сам Ассур предложил применять в структурных схемах такую символику: бесповодковые звенья обозначать кружками, поводковые соединительные цепи — прямыми линиями, а замки — пунктиром, одноповодковые звенья, а также группы их, примыкающие к бесповодковым звеньям,— кривыми линиями. Тогда замкнутую цепь любого типа можно будет изобразить в виде кружков, соединенных между собой системами линий.

[12] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 137.

Для исследования подобных образований, которые могут представлять собой весьма сложные схемы, прежде всего следует установить возможность обхода всех звеньев по одному разу с возвращением к первоначальному звену. Для этого, предположив гибкость и растяжимость соединительных отрезков, будем деформировать нашу схему, не нарушая взаимного расположения ее составляющих, чтобы все узловые точки (кружки, бесповодковые звенья) расположились по окружности, которую составят отрезки, соединяющие между собой соседние звенья.

Последняя операция сама по себе представляет достаточно сложную проблему. Пусть, например, задана цепь произвольного расположения, включающая только трехшарнирные звенья, одноповодковые и трехповодковые. При этом к каждому бесповодковому звену примыкают три одноповодковых звена (в схеме это обозначается так: к каждому кружку примыкают три криволинейных отрезка). Кружки Ассур называет узловыми точками.

Задача в этом случае ставится следующим образом: можно ли деформировать весь контур так, чтобы все узловые точки расположились по окружности и чтобы они вместе с соединяющими их по окружности отрезками составили замкнутый контур.

Очевидно, что число узловых точек n должно быть четным, ибо в каждой точке сходится три узловых отрезка, т. е. число всех отрезков равно $3n/2$, а это возможно лишь при четном n. Число диагоналей (диагональных цепей) равно $n/2$.

Значит, если цепь можно деформировать так, чтобы все узловые точки расположились по окружности, то, отбросив все диагональные отрезки, мы получим в конце концов цепь, состоящую из узловых точек и связывающих их звеньев, которая и является простой замкнутой цепью, лежащей в основе всего образования. Однако в этом случае можно было бы и не деформировать исходной цепи, а непосредственно на ней найти диагональные цепи, изъять их и получить простую замкнутую цепь. «Когда это будет сделано, то признаком простой замкнутости явится то обстоятельство, что можно будет пройти узловые точки, из которых ни одна не уничтожена, и уцелевшие n отрезков все по одному разу вернутся к исходной нашей точке.

К сожалению, не так-то просто выбросить надлежащим образом лишние отрезки; если же выбросить их, руководствуясь только тем, чтобы было выброшено $n/2$ отрезков и в каждой точке осталось их только по два, что сделать сравнительно легко, то в большинстве случаев мы разобьем наш контур на отдельные простые контуры, не имеющие между собою связи, но не получим одного замкнутого контура...

Не следует думать, что любая сложная цепь, схематически изображаемая узловыми точками, в которых сходятся по три отрезка в каждой, может быть развернута так, чтобы узловые точки расположились по окружности» [13]. Ассур приводит пример схем, для которых такой обход невозможен.

Таким образом, дважды применив к описанию структуры механизмов процесс схематизации, Ассур приходит к некоторым образованиям, являющимся схемами каких-то конкретных механизмов, но над которыми можно производить некоторые формальные операции. Количественные и качественные соотношения, заложенные в методе построения механизмов Ассура, привели к двум следствиям. Первое — что все существующие механизмы укладываются в весьма небольшое количество структурных образований и только изредка попадают в образования иного типа. Это означает, что свободное созидание машин (и механизмов), не ограниченное никакими условиями, само по себе замкнулось в очень тесном кругу возможных вариантов и поиски новых механизмов происходили лишь среди известных и хорошо изученных структурных комбинаций. Показавши все возможное богатство кинематических цепей, которое можно получить путем усложнения их структуры, происходящего по определенному закону, Ассур тем самым расширил горизонты науки о механизмах и машинах и выявил далеко идущие возможности, хотя в определенной степени формально. Этот формализм привел его к математическому направлению, с которым, как он указывает, он прежде знаком не был. Дело идет о топологии, которая прежде некоторыми ее творцами (например, Пуанкаре) называлась «analysis situs».

«Всякое преобразование геометрической фигуры, при котором не разрушаются отношения прикосновения раз-

[13] *Л. В. Ассур*. Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 152—153.

личных частей фигуры, называются *непрерывным*; если прикосновения не только не разрушаются, но и не возникают вновь, то преобразование называется *топологическим*. Следовательно, при топологическом преобразовании какой-либо фигуры части этой фигуры, находящиеся в соприкосновении, остаются соприкасающимися, а части, не соприкасавшиеся, не могут стать соприкасающимися; короче говоря, при топологическом преобразовании не происходит ни разрывов, ни склеиваний... Поэтому топологическое преобразование всякой геометрической фигуры, рассматриваемой как множество образующих ее точек, есть преобразование не только непрерывное, но и взаимно однозначное: каждые две различные точки фигуры преобразуются в две различные точки. Таким образом, топологические преобразования являются взаимно однозначными и взаимно непрерывными» [14].

Топология возникла совсем недавно. Если отдельные мысли и положения, которые мы сейчас отнесли бы к топологии, можно проследить еще в античной геометрии, среди идей Леонардо да Винчи, у Декарта и конечно у Эйлера, то формироваться и приобретать собственные очертания «геометрия положения» начала еще позже, чем учение о механизмах и машинах. В 1858 г. астроном одной из небольших немецких обсерваторий А. Ф. Мёбиус (1790—1868) представил Парижской академии наук мемуар об односторонних поверхностях. Несколько раньше, в 1847 г., независимо от Мёбиуса гёттингенский астроном И. Листинг (1808—1882) под влиянием Гаусса опубликовал «Введение в топологию». В то же самое время подобные идеи начал исследовать Бернгард Риман (1826—1866), который в них нашел соответствие с возникавшей тогда теорией функций комплексного переменного. Оказалось, что изучение топологических свойств некоторых поверхностей, получивших название римановых, эквивалентно изучению аналитических функций комплексного переменного. Дальнейшее развитие этих идей было выполнено в трудах выдающегося французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912) и в Геттингене Феликсом Клейном (1849—1925).

[14] *П. С. Александров*. Топология.—В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, стр. 182. М., Изд-во АН СССР, 1956.

Это в сущности было все, что имела топология ко времени исследований Ассура. Замечательно, что Ассур самостоятельно пришел к постановке топологической задачи и уже позже ознакомился с литературой вопроса.

Ассур ставит задачу о числе обходов любого комплекса первого порядка, в частности независимо от того, равно ли оно нулю или нет. Для ее решения он предлагает следующий прием: пусть задан комплекс, «дерево», соответствующий схеме сложной открытой цепи и характеризующийся тем, что от одной его точки к другой существует только один путь. Если от некоторой узловой точки a комплекса, содержащего n точек, можно дойти до иной точки b того же комплекса двумя различными путями, и эти два пути не имеют никаких общих точек, кроме a и b, и если число пройденных отрезков в обоих путях в сумме равно n, то совокупность обоих путей образует искомый замкнутый контур.

Возвращаясь к механизмам четвертого класса, Ассур указывает, что к ним он будет относить лишь те механизмы, в которых присоединяемая сложная замкнутая многоповодковая цепь допускает полный обход всех узловых точек. Для этого надо найти хотя бы один обход; нахождение всех обходов, а равно доказательство, что обхода не существует, представляет в общем случае достаточно сложную задачу.

Таким образом, задача структурного анализа механизмов оказывается задачей топологической, на что, впрочем, указывает и сам автор. Системы, даже в упрощенных схемах, могут оказаться значительной сложности, и «распутать» их обычными способами представляется весьма затруднительным и не всегда возможным делом. А причиной постановки данной задачи является необходимость выяснить возможность полного обхода всех узловых точек в заданной сложной замкнутой многоповодковой цепи. Если такой обход возможен, тогда соответствующие кинематические цепи и построенные из них механизмы Ассур относит к четвертому классу.

Однако при дальнейшем анализе подобных цепей возникает целый ряд затруднений. Так как одним из основных способов исследования цепи у Ассура является метод переноса поводка с одного звена на другое, то он пробует применить его и здесь. В результате получаются звенья, содержащие больше трех шарниров, звенья с несколькоми замковыми шарнирами и очень сложные системы с многошарнирными звеньями. Поэтому в качестве основных элементов, характеризующих цепи четвертого класса, Ассур изучает замковые соединения (изображаемые хордами) и их возможные перестановки, а также способы замены замков цепями одноповодковых звеньев. При этом он доказывает теорему о том, что соединение двух каких-либо звеньев некоторой сочлененной системы простой цепью одноповодковых звеньев, пристегнутых к основе, эквивалентно устройству шарнира между этими или какими-нибудь другими двумя звеньями системы, ибо лишает систему двух степеней свободы [15]. Однако при этом накладывается обязательное условие взаимной независимости связей, иначе в противном случае цепь может породить статически неопределимую систему.

Исследуя таким образом цепи четвертого класса, Ассур приходит к определению нормальной цепи этого класса. Таковой является любая цепь как с замковыми соединениями, так и без них, если число поводков цепи больше трех и если не встречается звеньев, соединенных между собой более, чем одним шарниром.

Итак, мы познакомились с кинематическими цепями, относимыми Ассуром к четырем классам. Строение их, за исключением, быть может, четвертого класса, достаточно ясно, и каждая нормальная цепь, будучи соединена всеми свободными шарнирами с жестким основанием, дает в результате жесткую конструкцию. Каждую нормальную цепь и любые группы цепей можно использовать для созидания новых механизмов (ибо, как мы видели, почти все известные механизмы относятся по классификации Ассура к первому классу). Но Ассур пытается и дальше исследовать возможности своего метода.

Все цепи, относящиеся к рассмотренным четырем классам, Ассур объединяет в одну большую группу, которую называет первым семейством.

Дальнейшее развитие кинематических цепей Ассур мыслит себе следующим образом. В качестве исходной единицы такого развития он принимает группу звеньев, которая допускает обход всех бесповодковых звеньев, и называет ее звеном второго рода. «Можно представить себе цепи открытые и замкнутые, простые и сложные,

[15] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 166.

образованные из звеньев второго рода. Если такая цепь образует с основой жесткое, статически определимое соединение (отдельные жесткие звенья ее при этом будут связаны с основой поводками, так как шарнирное соединение с основой будет заменяться двумя поводками) и при этом не распадается на простейшие нормальные, то это будет один из нормальных типов цепей высшего семейства» [16].

Кинематические цепи второго семейства аналогичны цепям первого семейства, но обладают бо́льшим разнообразием форм. Если в первом семействе звенья соединяются между собой шарнирами, то во втором звенья второго рода могут соединяться и шарнирами (внешние замки), и сложными открытыми цепями. При этом принципиально возможно многократное соединение двух звеньев второго рода между собой. Однако во втором семействе нет образований, аналогичных двухповодковой и трехповодковой группам первого семейства.

Первый класс второго семейства образует открытые цепи, состоящие из двух, трех и n звеньев второго рода. Количество поводков при этом может быть весьма большим и разнообразным, поэтому подсчет числа поводков теряет свой смысл. Второй класс образуют цепи, состоящие из звеньев второго рода и построенные наподобие сложных открытых цепей. Третий класс составляют цепи, образованные замыканием простых цепей. При этом существует лишь один обход замкнутой цепи. «Если в такой цепи имеются концевые цепи, то они могут оказаться не только цепями первого рода, но и второго; последние получаются второго рода методом развития поводка, состоящим в том, что на место поводка становится цепь, отличающаяся от нормальной замкнутой цепи первого порядка отсутствием одного поводка.

Все поводки звеньев первого рода концевой цепи прикрепляются к основе, чтобы получить с ней жесткое соединение. Применив обратный прием, можно концевую цепь второго рода заменить поводком некоторого звена. Сделав эту замену для всех концевых цепей, независимо от того, содержат ли они звенья первого или второго рода или даже комбинацию тех или других, мы в случае цепи третьего класса должны прийти к образованию, допускаю-

[16] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., тр. 211.

щему обход всех звеньев и не содержащему при этом узловых звеньев.

При наличии цепи четвертого класса второго семейства замена поводком таких концевых цепей приведет к сложной замкнутой цепи, не содержащей концевых цепей, но не устранит всех узловых звеньев; однако узловые звенья должны при этом допускать обход.

Если же не имеющая концевых цепей сложная замкнутая цепь не допускает обхода всех узловых звеньев, то узловые звенья второго рода разбиваются на группы, из которых каждая допускает такой обход. Это соображение указывает на наличие цепей третьего семейства, образованных из звеньев третьего рода, где каждое звено образуется из замкнутой цепи второго семейства. Как во втором семействе отмечено четыре класса, так и в третьем семействе отметим их четыре и, пользуясь признаком обходности, придем к цепям четвертого семейства, каждое звено которых образовано из замкнутой цепи третьего семейства, и т. д. до бесконечности» [17].

Такова в общих чертах классификация кинематических цепей, разработанная Ассуром. Как мы видели, она полностью и весьма подробно исследована лишь для первых трех классов нормальных цепей первого семейства. Исследование цепей четвертого класса неполное, в частности, мы не находим в нем элементов подразделения класса на разряды и порядки. Что же касается исследования цепей второго и высших семейств, то оно только намечено в общих чертах.

Нормальные цепи и группы нормальных цепей разных семейств и классов, шарнирно соединенные с основой и с кривошипом, образуют механизм. Семейство и класс механизма определяются семейством и классом наиболее сложной из нормальных цепей, входящих в его состав.

Если же нормальную цепь любого семейства и класса всеми свободными шарнирами соединить с основной, то образуется сложная жесткая система — ферма,— и Ассур видит в этом выход своей классификации в статику сооружений. Среди ферм можно найти примеры цепей очень высоких классов. Ассур указывает, в частности, на стропильную ферму, образованную соединением с основой нормальной цепи первого класса второго семейства. Та-

[17] Там же, стр. 212—213.

ким образом, если исследование Ассура в части его применимости к исследованию механизмов является проблематичным, ибо все известные механизмы укладываются в два-три подразделения классификации, то применение его к решению задач графостатики не вызывает сомнения.

Но дело не только в относительной применимости теоретических исследований Ассура к решению тех или иных практических задач. На протяжении всей работы Ассур делает много замечаний о возможности дальнейшего развития излагаемых идей в ту или иную сторону. Замечания эти одновременно составляют и сильную, и слабую стороны исследования, так как читателю не всегда ясно, отказывается ли автор от развития некоторых идей по недостатку времени или же он сам сомневается в целесообразности такого развития. Следует все же отметить (подробно мы остановимся на этом несколько ниже, где будет идти речь о развитии идей Ассура учеными советской школы теории механизмов и машин), что именно некоторые из этих замечаний породили весьма важные теоретические (и практические) изыскания.

Но в сочинении весьма строго выдержана внутренняя логика исследования. Может быть, иногда в ущерб действительному положению вещей Ассур рассматривает только нормальные кинематические цепи. При образовании и усложнении последних он пользуется тремя методами — методом перестановки поводков, методом развития поводка и методом обхода звеньев или систем звеньев. В качестве элементов кинематической цепи, звеньев первого рода, у него выступают почти исключительно трехшарнирные звенья (жесткие треугольники), весьма характерные для его концепций, и поводки, которыми начинается исследование и от которых он в конце исследования почти отказывается.

Выше мы приводили мысль Сильвестра о принципах построения теории структуры механизмов. Ассур довольно близко подошел в своем решении этой задачи к идеям Сильвестра. Уже при исследовании цепей четвертого класса он обращается к методам топологии, а несколько дальше проводит мысль о том, что изучение сложных шарнирных образований не только само по себе представляет интерес для геометров, но может и послужить основой для дальнейшего развития топологии.

Метрические соотношения не играют роли в исследовании Ассура, и поэтому он исключает из исследования некоторые частные случаи образования изучаемых им цепей, например, случай особого расположения точек прикрепления цепи к основе, когда система может вследствие этого получить бесконечно малую подвижность.

Очень важным упрощением, вводимым Ассуром в исследование, является несомненно использование в качестве кинематической пары только шарнира. То, что это упрощение в определенной степени суживает общность исследования, Ассур прекрасно понимает, тем более, что, как он замечает [18], им получены некоторые результаты, относящиеся к построению кинематических цепей с поступательно движущимися парами. К сожалению, эти результаты остались неопубликованными.

Кроме механизмов, образованных наслоением цепей нормального вида, могут быть и действительно встречаются механизмы, образованные цепями с избыточными или недостающими поводками. Эти механизмы выпадают из исследования, так как изучение подобных цепей усложнило бы классификацию и, как говорит Ассур, внесло бы в нее полную неопределенность [19].

Интересно, что к цепям с недостающими и избыточными поводками Ассур обращается неоднократно. Исследуя многоповодковую замкнутую цепь третьего класса, он даже анализирует построение механизма из цепей с ненормальным числом поводков и делает вывод, что оно приведет к многозначности в системе классификации.

Но тогда возникает вопрос, будет ли классификация Ассура всеобъемлющей и единственной. По словам самого Ассура, «... об определенной структуре можно говорить только для тех механизмов, которые построены присоединением цепей нормальных типов, если условиться не основывать структуры их на комбинациях цепей типов ненормальных. В самом деле, если мы образовали механизм последовательным присоединением цепей нормальных типов, то отделить последовательно можно только эти цепи. Каждая из них на простейшие нормальных типов не развивается, иначе мы бы ее не приняли нормальной при образовании механизма; она бы отличалась от нормальной расположением поводков. Совокупность нескольких

[18] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 22.
[19] Там же, стр. 35, 67, 118—120.

таких цепей тоже не могла бы считаться за нормальную по той же причине. Последовательное отделение можно было бы довести только однообразно, т. е. отделять только то и только в последовательности обратной, что было последовательно присоединено при образовании механизма; двух взглядов на структуру такого механизма при указанных условиях не могло бы быть» [20].

Однако даже при применении условий Ассура относительно построения механизмов только из нормальных цепей нельзя полностью избавиться от многозначности. Действительно, иногда анализ механизма зависит от того, какое звено мы примем за кривошип (на это обстоятельство обратил внимание в своей рецензии Н. Е. Жуковский). Правда, Ассур сам хочет избавиться от многозначности [21], ссылаясь на одно замечание Рело о звеньях, вводящих движение, т. е. о кривошипах. Но звеньев, удовлетворяющих условию существования кривошипа, может быть не одно, а несколько, и многозначность появляется вновь.

Полностью отказываясь от введения в исследование каких-либо метрических характеристик и развивая теорию нормальных цепей, Ассур иногда стремится свести их к некоторым геометрическим элементам, причем последними оказываются уже не первичные элементы — поводки и трехшарнирные звенья, а цепи. И он предлагает построить чисто математическую теорию таких элементов уже совершенно лишенную всякого оттенка механического их происхождения. Рассматривая топологическую сущность задачи, он неоднократно проводит эту мысль. Еще более определенно он подчеркивает ее, указывая в одном месте своей работы, что «над элементами, которые лежат в основе образования механизмов и которые до сих пор ускользали от наблюдателя, т. е. над нормальными многоповодковыми цепями, можно производить ряд действий. Действия эти носят, хотя и геометрический, но в то же время весьма своеобразный характер и, знакомясь к этими элементами, нужно, чтобы успешно владеть ими, научиться над ними оперировать. Строя наши доказательства на ряде таких операций, мы, во всяком случае, этой последней цели способствуем» [22].

[20] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 120.
[21] Там же, стр. 122, прим.; стр. 219—220.
[22] Там же, стр. 195.

Это замечание, подобно многим другим, является одним из «ответвлений» идей Ассура, одной из задач, поставленных перед собой автором, но выполнить которую ему не удалось. Ведь даже цепи четвертого класса первого семейства исследованы были далеко не полностью. Но нужно сказать, что программа возможного исследования сообщается везде. Ассур был прочитан не сразу. Он был основательно забыт лет на десять. Но зато когда его вновь открыли и начали читать, то увидели, как тщательно он обдумывает каждый вопрос и как, беседуя сам с собой, иногда даже противореча самому себе, ставит вопросы, чтобы оспорить их, наметить дальнейшее развитие идей и вновь вернуться к прерванной мысли.

Вернемся еще раз к вопросу о геометризации задачи Ассура. Сам он начинает искать родство задачи с проблемами analysis situs, лишь встретившись в своем исследовании с необходимостью ввести изучение обходов в цепях второго класса. Тут выявляется особенное значение бесповодковых трехшарнирных звеньев и, следовательно, теряется значение поводков, которыми собственно и отличаются цепи нормальные от цепей ненормальных. И Ассур приходит к выводу, правда не полностью обоснованному, что не только нормальные цепи, но вообще все цепи укладываются в его классификацию нормальных цепей.

Вот это обобщение задачи, обусловленное полным выхолащиванием ее механической сущности, опять приводит Ассура к понятию о цепях как о линейных комплексах. При этом возникает вопрос об обходности узловых точек, и он рекомендует геометрам продолжить это его исследование. Остаются неразрешенными еще некоторые теоретические вопросы о возможных типах цепей высших классов и о распадении цепей на простейшие; вопросы эти следует решать иными методами.

Ассур неоднократно возвращается к поставленной им топологической задаче. Здесь он видит не только метод решения интересующего его вопроса, но также и базу для развития математической теории. «Быть может,— говорит он,— предложенные здесь вопросы и другие, которые могут возникнуть при дальнейших исследованиях, повлияют оплодотворяющим образом не развитие analysis situs в реальных измерениях, так как, по-видимому, этот отдел науки ушел совершенно в изыскание соотношений в пространстве n измерений, пренебрегая реальными измерениями, ограничившись в этом отношении разбором некоторых игр. Знакомиться с ним в реальных измерениях почти что приходится из книжек, имеющих целью забаву подрастающего поколения. Если в этом отношении будет достигнут плодотворный результат, то, ограничившись в дальнейшем изображением некоторых представляющихся взору перспектив и попытавшись приложить изученное к установлению приемов исследования движения механизмов, автор не будет считать свой труд затраченным бесполезно» [23].

Выше указывались уже некоторые рассуждения Ассура относительно построения механизма из кривошипа и ряда наслоений цепей нормальных типов. В конце исследования он опять возвращается к этому вопросу.

Действительно, каждый механизм представляет кинематическую цепь, пристегнутую некоторым числом шарниров к неподвижному основанию. Следовательно, принципиально рассуждая, механизм может иметь столько кривошипов, сколько звеньев непосредственно связано с основанием (вопрос о механизме с несколькими степенями свободы, т. е. с числом одновременно существующих кривошипов больше одного, Ассур не разбирает). Ассур вводит условность: кривошипом он считает во всех случаях, где от этого будет зависеть результат классификации (или, точнее, ее однозначность), то звено, которое может совершить полный оборот.

Предположим теперь, что механизм представляет статически определимую систему. Следовательно, под действием уравновешенной системы сил можно определить напряжения во всех его звеньях. Соединим кривошип с основанием при помощи стержня: напряжение этого стержня будет равно нулю, так как равновесие существовало и в его отсутствии, а напряжения во всех других звеньях останутся прежними. Систему сил, действующую на механизм, «можно выбрать какой угодно, уравновесив ее только силой, приложенной в точке кривошипа. Следовательно, вся система остальных звеньев, кроме кривошипа, если связь с кривошипом заменить связью с основой, окажется статически определимой, ибо напряжения стержней определяются, если считать стержни жесткими,

[23] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 207—208.

т. е. не учитывать их деформацию» [24]. Следовательно, соединение системы всех звеньев без кривошипа с основанием дает жесткую статически определимую систему.

Итак, существует родство между задачами кинематики механизмов и статики сооружений, ибо и та и другая наука в сущности трактуют одни и те же образования, только с разной степенью подвижности. Конечно, и это подчеркивает Ассур, речь идет лишь о теоретической сущности, а никак не об исполнении механизмов и ферм в реальных формах и в действительном материале. Но теоретическая сущность явилась в этом случае решающей: не только в учении о структуре, но и в учении о движении и о покое механизмов Ассур использует теории графостатики.

Существует еще одна идея, затронутая Ассуром в первой части его труда,— это идея синтеза механизмов. В самом начале своего исследования он делает по этому поводу весьма любопытное замечание.

«Нельзя думать,— пишет он,— что все другие механизмы, со строением которых нам предстоит познакомиться, а также механизмы уже указанного нами класса (первого), но порядка выше четвертого не могли оказаться полезными в приложении. Скорее следует предполагать, что к этим более сложным образованиям не удалось дойти путем эмпиризма, а систематический путь, основанный на совершенном знании законов строения механизмов, до сих пор еще не был известен. Но согласится ли читатель с нашим мнением в этом отношении или нет, все же наше исследование должно быть продолжено, потому что пути научного мышления должны вести к исчерпывающему обозрению всех скрытых возможностей; практика покажет, найдутся ли среди этих возможностей пригодные для ее целей, т. е. практичные; автор в этом не сомневается» [25].

Вслед за разработкой системы классификации механизмов Ассур переходит к практическому использованию ее результатов и начинает разработку расчетных методов, предназначенных для исследования механизмов.

[24] Там же, стр. 222—223.

[25] Там же, стр. 40. В примечании к этому абзацу Ассур указывает на паровозную кулису Савельева, которая относится к шестому порядку третьего класса по его классификации.

V

Кинематика механизмов

Вторая часть труда Ассура названа «Приложение учения о многоповодковых нормальных цепях к общей теории механизмов». Задумана она была очень широко: Ассур перечисляет тот цикл вопросов, которым он намеревался посвятить свое исследование. Сюда должны были относиться:

— построение картины бесконечно малых перемещений точек механизма, или картины скоростей его точек;

— распределение давлений в шарнирных сочленениях механизма под действием уравновешенной системы сил;

— построение картин ускорений точек механизма;

— построение картин конечных перемещений точек механизма, или построение траекторий его точек.

Таким образом, первоначальная программа исследования охватывала полностью кинематику и динамику шарнирных механизмов и должна была составить полное учение о плоских шарнирных механизмах. Однако программа эта так и осталась неоконченной: в диссертацию, представленную Ассуром Совету Петроградского политехнического института, вошли кроме теории структуры кинематических цепей лишь два вопроса — построение планов скоростей и основы кинетостатики.

Целью всего сочинения была разработка системы кинематического и кинетостатического анализа механизмов, притом настолько общего, чтобы результаты его можно было бы использовать при исследовании механизмов любого строения. Выше мы показали, что такой постановки вопроса до Ассура не было: и в кинематике, и в кинетостатике были решены лишь отдельные задачи.

Принципы построения планов скоростей для различных механизмов интересовали Ассура с самого начала его научной деятельности. С большой степенью вероятности можно предположить, что они-то и явились исходным пунктом его размышлений о теории плоских шарнирных механизмов. Действительно, в первом десятилетии века, когда учился Ассур и когда он начал свою исследовательскую работу, наиболее распространенным и признанным методом исследования механизмов был метод мгновенных центров вращения, а метод планов еще только начинал проникать в высшую техническую школу. В России сторонниками этого метода выступили В. Л. Кирпичев, Н. Е. Жуковский и их ученики, в том числе и Л. В. Ассур. Мы видели, что вторая московская работа Ассура была посвящена именно построению планов скоростей и ускорений для некоторых специальных случаев, и естественно, что разрабатывая общий метод построения механизмов и теорию кинематических цепей, он решил увязать последнюю с решением задач кинематики механизмов, иначе говоря, довести свои теоретические изыскания до практических результатов.

Метод планов скоростей, или метод Мора, как его называет Ассур, заключается в следующем: от некоторой предварительно выбранной точки, называемой полюсом плана скоростей, проводится вектор, изображающий скорость одной точки звена механизма, принятого за ведущее. Из конца этого вектора проводится прямая линия в направлении относительной скорости точки, принадлежащей соседнему звену механизма. Полная скорость этой точки проводится из полюса плана. Пересечение обеих линий и определяет искомую точку плана. Таким образом, эта графическая операция приводит к изображению фигур, стороны которых перпендикулярны сторонам схемы механизма (в том числе перпендикулярны к бесконечно большим радиусам); она соответствует решению двух векторных уравнений, каждое из которых определяет направление некоторой прямой. Варианты этого построения, очевидно, не имели принципиального значения.

Мы ничего не говорили о масштабе построения. Определение его является уже второстепенным, так как оно вытекает из соотношения подобия, существующего между конфигурацией механизма в данном мгновенном положении и картиной плана скоростей. В некоторых случаях, например, при использовании плана скоростей для решения кинетостатической задачи методом жесткого рычага Жуковского масштаб вообще оказывается ненужным.

Вот при решении задачи об определении скоростей точек механизма для его мгновенного положения и вводится методика Ассура. Перефразируя одно известное выражение, можно сказать, что построение планов (или картин, как их обычно называет Ассур) скоростей является пробным камнем для его теоретических изысканий. В самом деле, механизмы первого класса второго порядка, по классификации Ассура, для которых фактически был разработан этот метод и которые составляют абсолютное большинство всех известных до настоящего времени механизмов, образуются наслоением на кривошип сильвестровых диад, т. е. двухповодковых групп. Следовательно, положение каждой новой точки механизма зависит от положения тех двух звеньев, которые соединяются в искомой точке. Сами же звенья определяются в своих положениях своими связями с известными точками механизма, в том числе с точками неподвижного основания.

Таким образом, определение неизвестной скорости некоторой точки механизма действительно оказывается тождественным с графическим решением двух векторных уравнений, и метод планов скоростей органически соответствует структуре механизмов, относящихся к указанному подразделению классификации Ассура.

Соотношения подобия, существующие между элементами плана скоростей и соответствующими элементами схемы механизма, дают возможность решить и обратную задачу — определить положения интересующих нас точек механизма (или связанных с механизмом).

Бурместер предложил иной метод определения скоростей точек механизма: он поворачивает вектор скорости ведущего звена на прямой угол. Вследствие этого построение скоростей всех иных точек механизма сводится к проведению системы прямых линий, параллельных соответствующим звеньям механизма. Однако существенный недостаток способа Бурместера заключается в том, что он предусматривает графическое определение лишь абсолютных скоростей. Поэтому для определения относительных скоростей, которые в планах скоростей получаются как необходимый элемент построения, приходится искать дополнительное графическое решение.

Бурместер определяет мгновенный центр вращения звена как точку пересечения повернутых на 90° скоростей двух его точек; в плане же скоростей полюс одновременно служит и исходной точкой построения и изображением мгновенных центров вращения в абсолютном движении всех звеньев механизма.

Н. Е. Жуковский использовал преимущества обоих методов графоаналитического определения скоростей механизма. В способе, предложенном им, скорость ведущего звена изображается вектором, перпендикулярным к ее действительному направлению. При этом план скоростей механизма изображается совокупностью линий, проведенных параллельно звеньям механизма.

При помощи такого типа построений можно определить скорости точек любого механизма, составленного из наслоений на кривошип одних только двухповодковых групп.

Таким образом, то, что можно было назвать общими методами, или общими решениями, относилось лишь к механизмам второго порядка первого класса (по терминологии Ассура). Решения более сложных задач были только для очень небольшого числа частных случаев. Однако, что весьма существенно, ясности в этом вопросе не было: отсутствие достаточно всеобъемлющей классификации механизмов давало себя знать, и даже такой крупный ученый, как Виттенбауэр, под названием общего метода решения кинематических задач предлагал все тот же метод, относящийся исключительно к механизмам, образованным наслоением диад.

Это обстоятельство не прошло незамеченным. Один из авторов метода планов скоростей и ускорений О. Мор наметил разработку универсального приема определения кинематических параметров для механизмов произвольной структуры. Однако этот прием, основанный на преобразовании механизма в систему с несколькими степенями свободы путем изъятия из его структурной схемы нескольких стержней и комбинированием различных возможных движений полученной системы, приводил к решению системы уравнений; графического решения Мор предложить не смог.

Как указал Ассур, вопрос о том, какие стержни нужно выкинуть, какие движения комбинировать, не мог быть решен Мором, потому что ответ на эти вопросы связан теснейшим образом со структурой данного механизма, а она не была изучена.

Очень существенным является то обстоятельство, что построение планов скоростей и ускорений механизмов отнюдь не является самоцелью: с этим тесно связана возможность решения задач статики и динамики механизмов.

Действительно, для того чтобы построить механизм в его реальных формах, необходимо, чтобы он и все его части удовлетворяли определенным, наперед заданным условиям. Одним из наиболее существенных условий является длительность работы механизма, которая, в свою очередь, влечет за собой требование достаточной прочности составляющих его звеньев.

Таким образом, мы приходим к вопросу об определении давлений в парах механизма, от которого зависит уже определение напряжений в звеньях, которое решается средствами учения о деталях машин. Но для определения давлений необходимо предварительно определить все силы, действующие на соответствующие звенья, в частности силы инерции. А для этой последней цели нужно предварительно построить планы скоростей и планы ускорений механизмов.

Так как нам нужно найти максимальные значения сил, действующих на интересующий нас механизм, и, следовательно, максимальные значения ускорений его точек, то все указанные построения необходимо выполнить не для одного, а для целого ряда положений механизма. Тогда с помощью некоторых дополнительных графических построений (построения годографов скоростей и ускорений), а также решения некоторых систем уравнений удается определить опасные значения напряжений и методами теории механизмов и машин изменить в нужном направлении создавшееся положение.

В 1911 г. Ассур опубликовал в издании Кассы взаимопомощи студентов Политехнического института руководство к решению задач под названием «Картины скоростей точек плоского механизма». Здесь он весьма подробно и полно изложил правила построения планов скоростей и ускорений точек механизмов, содержащих двух- и трехповодковую группу. Таким образом, еще до начала работ над классификацией механизмов Ассур разработал приемы решения этой задачи для трехповодковой группы. До того времени были известны два приема, принадлежавшие Бурместеру и Мору.

Метод, предложенный Бурместером, основан на геометрическом подобии двух треугольников: треугольника, образованного пересечением направлений трех поводков группы в заданном положении, и треугольника, образованного пересечением направлений трех скоростей конечных точек поводков, повернутых на прямой угол, также в трех точках. Вследствие подобия этих треугольников три прямые, проходящие через сходственные вершины, пересекаются в одной точке, которая и будет полюсом построения. Можно доказать, что через тот же полюс пройдут и другие три линии, направление которых определяется соответственными вершинами жесткого треугольника и треугольника, образованного окончаниями их искомых скоростей.

Это построение, хотя принципиально и несложное, обладает тем неудобством, что пять точек — две вершины вспомогательных треугольников и полюс — могут оказаться вне чертежа. Таким образом, если более двух точек окажутся вне чертежа, построение выполнить не удастся.

Построение Мора значительно проще и основано на применении метода геометрических мест и ложного положения.

Решение задачи также приводится к построению треугольника, подобного данному, три вершины которого лежат на трех данных прямых, а направление сторон известно. Мор поворачивает скорости концов поводков на прямой угол, откладывает их от некоторого положения и замечает, что изображения вершин жесткого треугольника должны лежать на трех прямых, проходящих через крайние точки изображений повернутых скоростей и параллельных направлениям поводков, стороны же изображающего треугольника должны быть параллельны сторонам жесткого. После этого действительное изображение треугольника производится методом ложного положения.

Метод, предложенный Ассуром для решения той же задачи, основан на поисках некоторой аналогии с методом, примененным при построении плана скоростей механизмов первого класса второго порядка. В то же самое время он удачно использовал способ Риттера, применяемый в графостатике при расчете статически определимых ферм. Вспомним, что Ассур особо останавливается на установлении принципиальной тождественности между плоскими шарнирными механизмами и статически определимыми фермами.

Пусть задана плоская статически определимая ферма. Разделим ее произвольным сечением на две части.

Способ Риттера применим в тех случаях, когда мы при такого рода сечении перережем три стержня. Будем рассматривать равновесие левой части фермы под действием внешних нагрузок и искомых напряжений x, y, z. Для нахождения последних составных при уравнениях равновесия Риттер рекомендует составлять эти три уравнения для трех точек, которые получили название точек Риттера. Для получения неизвестной x берется точка пересечения неизвестных y и z; для получения y разыскиваем точку пересечения x и z и, наконец, для определения z берем точку пересечения x и y. Теперь если мы возьмем уравнения моментов относительно трех выбранных нами точек, то по две неизвестные исключаются и получаются три уравнения с одной неизвестной.

Вот этот способ и натолкнул Ассура на предложенный им метод особых точек. Правда, аналогия здесь формальная, тем более, что дело идет об определении кинематических, а не динамических параметров, но родство идей — несомненно.

Схема рассуждений Ассура следующая: пусть задано жесткое звено ABC и известны скорости трех его поводков (рис. 9) в концевых точках $Д$, E, F. Требуется определить скорости вершин жесткого звена. Определим сперва проекции скоростей точек $Д$, E, F на направления соответствующих поводков. Если направления двух поводков, например, 1-го и 3-го, пересекаются в точке S, то для этой точки, принадлежащей жесткому звену, по двум известным проекциям скорости определится полная скорость. Проектируя затем скорость точки S на направление SC, определим проекцию скорости точки C. Следовательно, можно по двум проекциям определить скорость точки C и, наконец, по известным двум скоростям точек S и C можно определить скорости точек A и B жесткой фигуры.

Как говорит Ассур, «указанными здесь построениями исчерпывается все, что до сих пор было известно о чисто графических приемах построения скоростей точек механизма. Мы видим, что в этом вопросе, как и во всех остальных общих вопросах теории механизмов, последняя исчерпала лишь то, что относится к механизмам, составленным наслоением двух- и трехповодковых групп. За этим идет «девственная почва» [1].

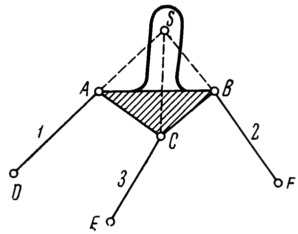


Рис. 9

Приступая к исследованию построений для определения скоростей механизмов высших классов и порядков, Ассур постоянно стремится пользоваться аналогичными, максимально подобными методами, будучи в этом вопросе весьма экономным.

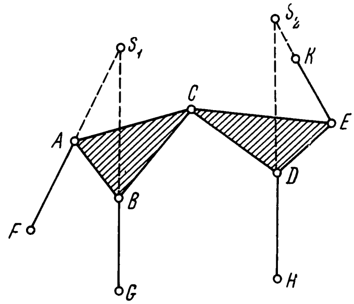


Рис. 10

Так, метод решения задачи для группы первого класса четвертого порядка совершенно подобен только что изложенному. Действительно, задается группа, состоящая из двух жестких звеньев и четырех поводков (рис. 10). Если известны скорости точек F, G, H, K, то проектируя их на направления поводков и определив точки пересечения этих направлений S_1 и S_2, можем найти скорости точек S_1 и S_2, принадлежащих жестким звеньям. Затем определяем скорость общей точки C обоих жестких звеньев по ее проекциям на направления S_1C и S_2C. Таким образом, графически определяются скорости двух точек каждого жесткого звена; остается определить скорости точек, с которыми шарнирно сочленены поводки.

Исследуя варианты построений, возможные при решении задачи, Ассур останавливается на особых случаях. Внимательное изучение каждого особого случая вообще очень характерно для всего научного и педагогического творчества Ассура.

[1] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 249.

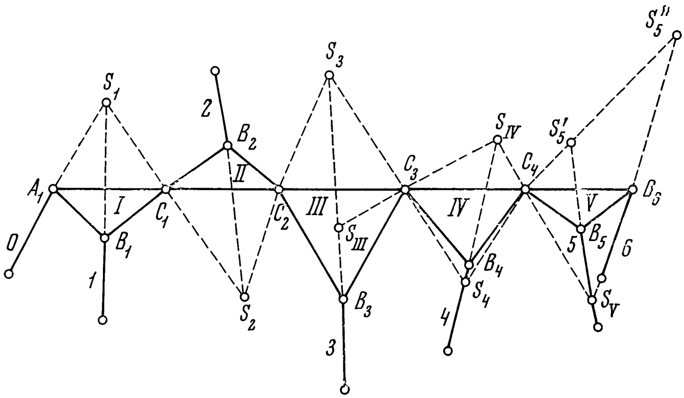


Рис. 11

Следующей задачей является построение скоростей для общего случая цепи второго класса. Ассур проводит рассуждения для случая цепи седьмого порядка (при пяти трехшарнирных жестких звеньях), так как дальнейшее увеличение числа звеньев и поводков не вносит ничего принципиально нового в решение задачи. Проследим ход рассуждения Ассура. Пусть задана цепь седьмого порядка (рис. 11). Цепь состоит из пяти жестких звеньев, обозначенных римскими цифрами, и из семи поводков. Скорости конечных точек всех поводков заданы. Тогда скорость точки S_1 пересечения поводков 0 и 1 определится по двум проекциям. Также определяются скорости точек S_2, S_3 и S_4, принадлежащих соответственно II, III и IV звеньям. Что касается последнего, V звена, то линия S_4C_4 пересекается с направлениями обоих поводков звена в двух точках; следовательно, можно определить скорости двух точек звена и его можно считать полностью определенным.

Переходя затем последовательно к IV, III, II и I звеньям, определяем все интересующие нас скорости точек этих звеньев.

Ассур показывает также возможность применения к решению задач первого класса метода ложных положений. Для этого надо построить повернутый на прямой угол план скоростей (по методу Мора, который применил его для исследования механизмов с трехповодковыми группами). Проведем через конечные точки изображений скоростей линии, параллельные направлению поводков. После этого разыскиваем методом ложных положений фигуры, подобные жестким звеньям; эти фигуры и будут изображать конечные точки искомых скоростей.

С помощью описанных построений полностью решаются все задачи по определению скоростей механизмов первого класса по классификации Ассура. «Следует только отметить,— говорит он,— что если концы некоторых поводков закреплены в устое и, следовательно, неподвижны, то вместо того, чтобы пользоваться равенством нулю проекции скоростей точек поводка на его направление, можно просто утверждать, что известно направление этих скоростей; вектор скорости точки прикрепления поводка к звену тогда определится по направлению одной проекции» [2].

Способ определения скоростей всех точек кинематической цепи второго класса по заданным скоростям концевых точек всех поводков Ассур исследует в общем виде. При этом он использует следующие выводы из приемов построения скоростей для случая простой цепи:

1. Если известна скорость одной точки какого-нибудь звена, то можно построить скорость одной точки каждого звена простой цепи одноповодковых звеньев, примыкающей к исходному звену, по данным скоростям свободных концов ее поводков;

2. Если известны скорости точек некоторого звена и скорость одной точки каждого звена простой цепи звеньев, примыкающей к первому, то определяется скорость всех точек звеньев этой цепи.

Кроме того Ассур использует положение: в нормальной цепи второго класса непременно имеются также бесповодковые звенья, к которым примыкает пара простых концевых цепей.

Принцип построения плана скоростей заключается в следующем: исходя из того, что нормальная цепь второго класса содержит некоторое количество концевых цепей, а каждая концевая цепь заканчивается звеном с двумя поводками, скорости которых известны, можно определить скорость одной точки каждого конечного звена. Продолжаем эту операцию так же, как мы делали

[2] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 257.

с цепями первого класса, до тех пор, пока не дойдем до бесповодкового звена, скорость одной точки которого будет определена. В результате, после прохождения всех концевых цепей, мы придем к исходной простой цепи, у которой мы сможем определить скорости всех точек. Идя затем в обратном направлении, определяем все недостающие скорости звеньев концевых цепей. Как видим, принцип решения основан на неоднократно сформулированном утверждении Ассура о возможности замены некоторой развитой цепи поводком, подобно тому, как развитие поводка дает в общем случае цепь.

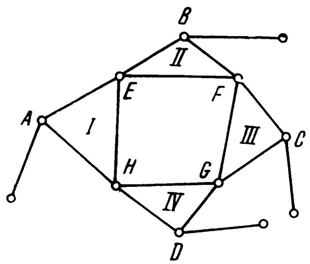


Рис. 12

Следовательно, задача определения скоростей всех точек механизма второго класса решается теми же методами, что и аналогичная задача для механизмов первого класса [3].

Переходим к механизмам третьего класса с однообразным распределением поводков. Ассур указывает, что существенно новым по сравнению с предыдущими случаями будет то обстоятельство, что каждое звено имеет лишь по одному поводку и, таким образом, метод особых точек здесь не применим. Поэтому он применяет для решения этой задачи метод ложных положений.

Ассур предлагает два приема этого метода. Первый прием таков: задается некоторая группа четвертого класса (рис. 12). Скорости конечных точек поводков считаются известными, требуется определить скорости всех прочих точек цепи.

Предположим, что шарнир H разъединен, в таком случае замкнутая цепь превращается в простую, а точка H будет иметь два изображения, зависящие от звеньев I и IV. Проведем прямую, параллельную поводку, закрепленному в точке A, и выберем на этой прямой первое ложное положение изображения скорости точки A. Прямая,

[3] Ассур решает ее также и методом ложных положений (см. там же, стр. 262—265).

на которой окажется изображение скорости точки H_1, должна проходить через точку, изображающую скорость A, параллельную линии AH. Наметим на этой прямой ложное положение скорости H. Но положение самой прямой является ложным, ибо она проходит через ложное положение изображения исходной точки A.

Проводим затем линии, параллельные поводкам B, C и D, на которых должны будут расположиться изображения самих точек прикрепления поводков. Задаемся ложным положением изображения точки B, определяем ложное положение точки F и строим треугольник II. Затем строим все прочие треугольники и в результате приходим к иному изображению точки H, не совпадающему с первым.

Выполним второе ложное построение всей цепи при той же точке, изображающей скорость A, но выбрав иное изображение для B. Получим второе ложное построение, где опять не совпадут изображения точки H.

Так как изображение точки A все время оставалось на одном месте, а изображение точки B и, соответственно, изображение точки H передвигалось по соответственным прямым, то и второе положение точки H будет также передвигаться по некоторой прямой. Обе прямые, на которых находятся изображения точки H, пересекутся.

Выберем затем второе ложное изображение для точки A и, повторяя два раза те же построения, получим вторую точку пересечения прямых, определяющих изображения точки H. Два положения этой точки пересечения определяют некоторую прямую, которая и будет геометрическим местом действительного положения изображения точки H.

После нахождения этой прямой ведем построение так, как если бы мы имели дело с цепью первого класса.

В результате решение задачи получается лишь после шести последовательных ложных изображений каждого треугольника, составляющего цепь. Ассур выбрал для своего доказательства простейший случай, но и при нем построение оказалось весьма сложным и запутанным, не дающим полного графического решения. Естественно, что такое решение для практических целей едва ли могло быть использовано.

Второй прием приложения метода ложных положений, разработанный Ассуром для решения той же задачи, имеет принципиальное отличие от первого. Тогда как первый прием основан на поисках ложных положений системы, отличающейся от заданной двумя степенями свободы вследствие разъединения шарнира H, второй прием основан на исследовании системы, отличающейся от первоначальной лишь на одну степень свободы. При этом производится выбрасывание в одном из трехшарнирных звеньев стороны треугольника и преобразование таким образом жесткого звена в диаду. Впрочем, данный прием требует также построения трех ложных положений.

Механизм третьего класса впервые был образован Ассуром и поэтому носит название механизма Ассура. Однако оба способа решения задачи о построении плана скорости этого механизма, разработанные им, как мы видим, не являются легкими и требуют большого количества достаточно сложных построений. Это было замечено сразу же после опубликования работы Ассура.

28 марта 1916 г. Н. Е. Жуковский прочитал в Московском математическом обществе сообщение «О механизме Ассура»[4], в котором предложил иной метод построения плана скоростей.

Способ Жуковского основывается на теореме о равенстве проекций скоростей концов неизменной прямой на ее направление, причем теорема эта остается верной и в предположении, что прямая делится шарниром, связывающим два звена, на две части и, следовательно, пронизывает два соседних звена. Теоремой этой, как указывает Жуковский, Ассур пользуется при определении скоростей в открытых цепях, но отступает от нее при переходе к цепям замкнутым.

Рассмотрим теперь случай кинематической цепи третьего класса со смешанным расположением поводков. В подобной цепи бесповодковые и двухповодковые звенья чередуются или путем непосредственной связи шарниром, или при помощи цепи одноповодковых звеньев. Выделим из состава цепи ряд, состоящий из бесповодкового звена и примыкающих к нему с обеих сторон звеньев, оканчивающихся двухповодковым звеном (рис. 13). «Очевидно,

[4] Опубликовано в «Математическом сборнике», 1916, т. XXX, вып. 3; *Н. Е. Жуковский.* Собрание сочинений, т. III, стр. 388—391. М.— Л., 1949.

что предполагая скорости свободных концов поводков известными, мы получим в картине скоростей прямые A, B, C, D, E, F, G, H, на которых тогда должны лежать изображения одноименных с ними точек. Но тогда с помощью двух ложных построений удается определить прямые, на которых лежат изображения шарнирных точек I, K, L, M, N, P, которыми связываются между собой звенья цепи. В самом деле, для звена I известны прямые, на которых должны находиться изображения точек

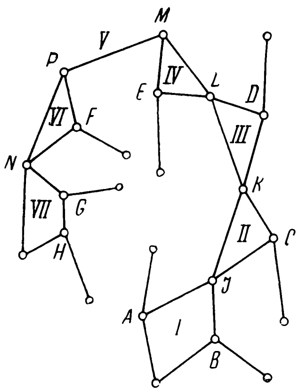


Рис. 13

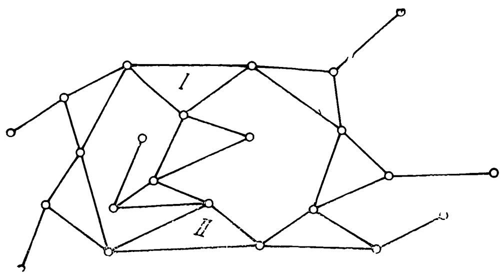


Рис. 14

A и B, и пара ложных построений определит нам прямую I. Теперь, для звена II, кроме этой прямой, известна C, и определится прямая K; кроме нее, для звена III известна прямая D, и поэтому определится прямая L; прямые L и E, на которых должны лежать изображения одноименных с ними точек звена IV, дадут возможность определить прямую, на которой должно лежать изображение точки M бесповодкового звена V.

После этого надо начинать с другого двухповодкового звена VII и получить прямые, на которых лежат изображения точек N и P. Очевидно, что проделав указанный ряд действий для каждого бесповодкового звена данной цепи третьего класса, мы найдем по одной прямой для изображения каждой из шарнирных точек, соединяющих между собой два соседних звена цепи. Совокупность этих точек и отрезков прямых, соединяющих каждые две точки, принадлежащие одному звену, образует замкнутый многоугольник; часть его периметра у нас будет $NPMLKI$.

Задача сводится к тому, чтобы построить замкнутый многоугольник со сторонами, параллельными сторонам данного, вершины которого лежат на данных прямых. Характер задачи не изменяется и для того случая, если бы оказалось в цепи только одно двухповодковое и одно бесповодковое звено, потому что от первого из них мы можем идти в двух направлениях и с двух сторон подойти к бесповодковому [5].

Как видим, принцип построения скоростей точек замкнутой кинематической цепи со смешанным расположением поводков проще предыдущего случая и требует лишь четырех ложных положений: двух для определения прямых, на которых лежат изображения вершин многоугольника, образованного звеньями замкнутой цепи, а также двух — для определения положения изображений на этих прямых.

Что касается третьего, наиболее общего случая замкнутой цепи третьего класса с развитыми концевыми цепями, то задача определения скоростей сводится к ряду построений для цепей первого или второго классов, в зависимости от характера концевой цепи, и построений для самой замкнутой цепи (для полигона) в соответствии с разработанными сейчас основными случаями.

Самыми сложными являются графические построения для определения скоростей механизмов четвертого класса, как это, впрочем, ясно и из предыдущих рассуждений. Так как Ассур не довел исследование этих механизмов до конца и не выявил логическое подразделение цепей четвертого класса на разряды, порядки или другие элементарные образования класса, а также не выяснил принципиальных оснований для таких подразделений, то, естественно, не может быть выдержан и принцип доказательства от n до $n + 1$. Поэтому Ассур подвергает рассмотрению лишь случаи, изученные в первой части его работы и характеризующиеся диагональными связями и их перестановками.

Исследование начинается со случая замкнутой цепи с одной диагональной цепью (рис. 14). Выделим в этой

[5] *Л. В. Ассур*. Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 294—295.

цепи какой-либо замкнутый контур, например, отсоединивший два левых звена. Тогда получим фигуру, подобную контурам третьего класса, но звенья I и II не имеют поводков, отсюда на картине скоростей нет направлений для ориентировки соответствующих изображений скоростей. Для пополнения недостающих данных приходится дать ложные направления относительно всей цепи.

Ассур дает весьма сложный метод построения для этого случая, доказывая основные положения, и сообщает метод проверки полученного результата [6]. В частности, этот метод содержит разъединение одного из шарниров замкнутого контура и поиски геометрического места ложных положений изображений скорости этой точки, считаемой дважды: с одного и с другого конца разъединенной цепи.

Подобные построения применяются и для цепей четвертого класса с параллельными диагоналями. Применяя тот же метод разъединения шарнира, Ассур высказывает ряд положений, являющихся его основой, и отмечает, что теоретически этот метод можно применить к любой системе, для которой эти положения являются справедливыми.

«Положение I. Когда одно из ложных изображений двух точек на заданных прямых неподвижно, а другое движется, то оба изображения разъединенного шарнира H описывают каждое прямолинейный ряд точек, подобный ряду, описываемому независимо движущимся изображением. Такие же ряды описывают и изображения остальных точек цепи.

Положение II. Четырем возможным парным комбинациям из двух независимо намечаемых изображений одной точки и двух таких же другой соответствуют четыре изображения каждой из двух точек, получаемых разъединением шарнира, расположенные в вершинах параллелограмма. Также располагаются изображения остальных точек цепи.

Положение III. Различным положениям одного из произвольно намечаемых изображений сопряжен пучок параллельных лучей, описываемых изображениями некоторой точки цепи. Для каждой изображаемой точки получается свой пучок, и все пучки, сопряженные произ-

[6] Там же, стр. 300—325.

вольно намечаемым изображением одной из точек, подобны между собой»[7].

В сущности следующие рассуждения Ассура основаны на лемме (IV): «Если в какой бы то ни было системе точек положение любой точки системы определяется независимо данными положениями n точек, то геометрической сумме перемещений в картине скоростей изображения одной из указанных n точек сопряжено перемещение изображения любой другой точки системы, равное геометрической сумме перемещений ее изображения, сопряженных составляющим перемещениям изображения первой»[8].

Доказательство леммы основано на нахождении взаимоотношений между координатами некоторой системы

$$x = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$
$$y = f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

где $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — координаты заданных точек системы, и координатами изображающих точек системы

$$x' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial F_1}{\partial y_i} y_i'\right).$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial F_2}{\partial y_i} y_i'\right)$$

Произведя далее перемещения положений системы, исследуем перемещение изображений некоторой точки $x_k y_k$, что и приводит к доказательству леммы.

Если условия IV леммы удовлетворены и если изображения одной из точек (и только одной), определяющих положение системы, размещаются в вершинах параллелограмма, то сопряженные им изображения любой другой точки системы также расположены в вершинах параллелограмма (лемма V). В следующем положении (лемма VI) Ассур опять при тех же условиях доказывает, что если изображение одной из подобных точек описывает прямолинейный ряд, то подобный ряд описывает и изображение любой другой точки системы. Далее (в лемме VII) указывается, что для того же случая перемещение изображения

[7] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов... стр. 327—328.
[8] Там же, стр. 328—329.

любой точки системы, сопряженное совокупности перемещений изображений некоторых из точек, положения которых могут задаваться независимо, равно геометрической сумме перемещений, сопряженных порознь перемещениям тех же точек, каждой в отдельности. Обобщением леммы VI является лемма VIII, в соответствии с которой при тех же условиях, если изображения нескольких точек системы, положения которых задаются независимо, описывают прямолинейные ряды, между собой подобные, в то время как изображения остальных точек — неподвижны, то ряд, подобный им, описывает изображение любой другой точки системы.

Наконец, IX лемма утверждает, что при тех же условиях, если изображения нескольких точек, положения которых могут задаваться независимо, размещаются в сходственных вершинах параллелограммов, в то время как изображения остальных точек системы — неподвижны, то четыре сопряженных изображения любой точки системы тоже размещаются в вершинах параллелограмма.

Все выводы этих лемм можно применить к случаю нормальных многоповодковых цепей, ибо некоторые точки последних, в частности точки, совпадающие с концами поводков, определяют положение остальных точек цепи. Однако те же леммы можно применить и к любому образованию, распадающемуся на нормальные цепи.

Некоторое усложнение расположения диагоналей в цепях четвертого класса влечет за собой дальнейшее усложнение всей системы графических построений. Однако, отмечает Ассур, это усложнение не влечет за собой теоретического усложнения решения задачи. Принципиально метод остается тем же, и в этом заключается основное преимущество теоретических построений Ассура. Как указывает Ассур, в результате развитой им теории «мы получили возможность трактовать вопросы общей теории механизмов в весьма общем виде. Мы имеем ряд общих положений, ряд общих приемов, позволяющих вести общие рассуждения, не прибегая к выполнению построений в каждом отдельном случае» [9].

Таким образом, на основании своей классификации системы Ассур создает весьма стройную и принципиально однородную кинематическую теорию. Правда, он рас-

[9] Там же, стр. 349.

сматривает лишь один из вопросов кинематики механизмов — графическое определение скоростей различных точек кинематической цепи, но его рассуждения могли послужить и послужили основой для развития методов решения и других вопросов кинематики на плоскости, а также дали некоторое направление исследованию задач кинематики пространственных механизмов.

Ассур сам считает своим особенным достижением то, что в его системе более сложные вопросы логически вытекают из более простых, а поэтому сложные случаи включают элементарные в качестве частных. Поэтому те построения, которые Ассур разрабатывает для наиболее общего вида замкнутой цепи четвертого класса (многокольцевой), включают в себя и решение задачи для однокольцевой цепи четвертого класса и для цепи третьего класса. Связь между решениями общих и частных задач рисуется Ассуру в виде лестницы: для того чтобы подняться на высшую ступень, необходимо пройти первые две. «Важно, однако, — утверждает он,— что эта лестница существует, что ступени ее известны, что систематический путь открыт, приемы, с помощью которых можно двигаться по этому пути, в основной своей части намечены. Как и всякая другая цепь научных истин, и эта лестница уходит в бесконечность, но важно знать, где она находится, важно пройти хоть ближайшие к нам первые ступени ее. Каждая новая глава покажет нам, что на этом пути легко переходить от простейшего к более сложному, что этот путь в трактуемой области — кратчайший» [10].

Ассур разработал также метод, применимый для графического определения скоростей сложных нормальных цепей, названный им методом полюса аффинности. Метод заключается в следующем: совершенно произвольно задается группа изображений одной из точек системы; что касается остальных точек, то произвольно задаются лишь три изображения каждой точки, так как система, аффинная данной, определяется, если известны три ее точки, сопряженные трем определенным точкам данной.

Метод полюса аффинности основан на следующей лемме: «Если в какой бы то ни было системе точек положение любой точки системы определяется независимо дан-

[10] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 350.

ными положениями n точек, если притом изображения части этих последних, состоящей из l точек ($l \leqslant n$), в картине скоростей при неподвижности изображений остальных помещаются в сопряженных (гомологичных) точках l аффинных между собой систем, то сопряженные им изображения любой точки системы образуют систему, аффинную l предыдущим»[11].

Итак, пусть независимо заданы несколько изображений точки A и по три изображения точек B и C, сопряженных с соответственными изображениями точки A (рис. 15). Сопряженные изображения отмечены одинаковыми индексами. Изображения, соответствующие следующему, четвертому изображению точки A, находятся в соответствии с общей теорией аффинных систем. Соединим точку a_4 с одной из вершин треугольника, образованного тремя первыми изображениями точки A и отметим точку α — точку пересечения этой прямой и противолежащей стороны треугольника. Исходя из соответствия прямолинейных рядов точек в аффинных системах, определяем точки β и γ, сопряженные с точкой α, с помощью пропорционального деления отрезков b_2b_3 и c_2c_3 в том же отношении, в котором точка α делит отрезок a_2a_3.

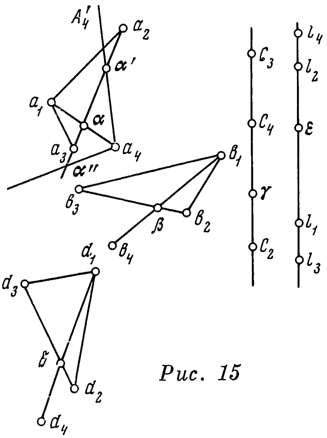


Рис. 15

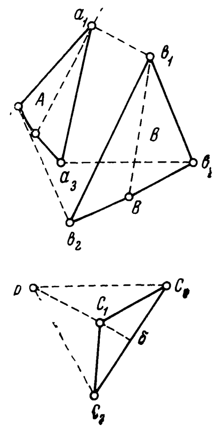


Рис. 16

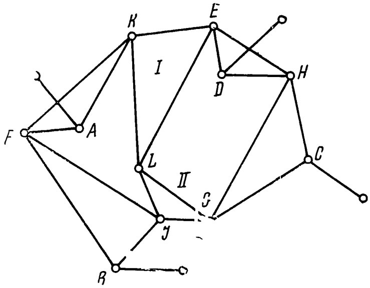


Рис. 17

[11] Там же, стр. 350.

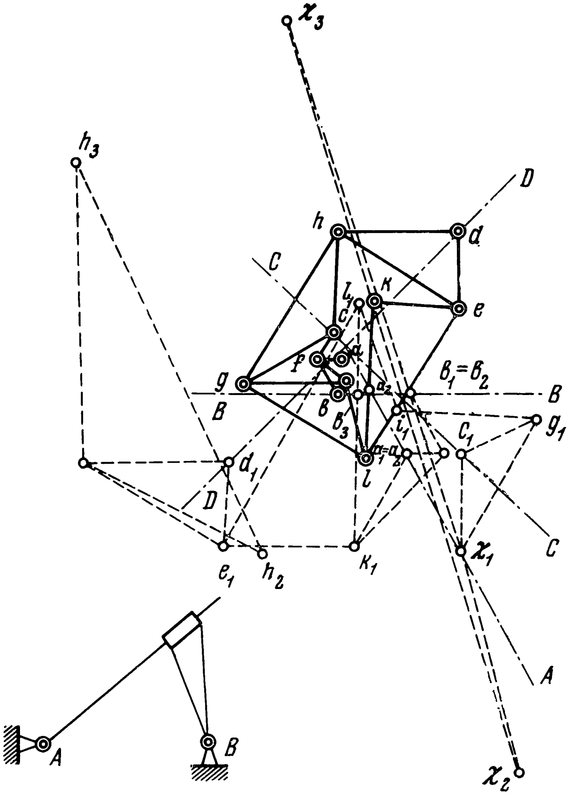


Рис. 18

Полюс аффинности двух аффинных систем определяется следующим образом: пусть заданы две системы тремя парами сопряженных точек a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Будем рассматривать отрезки a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 как векторы конечных перемещений трех точек некоторой аффинно-изменяемой системы. Выберем некоторую точку P и отложим от нее векторы по величине и направлению. Тогда конечные точки векторов c_1, c_2, c_3 образуют систему C, аффинную каждой из фаз первичной системы A и B, а полюс аффинности Q определяется построением в одной из систем A или B точки, сопряженной точке P (рис. 16)[12].

[12] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 351—354; *L. Burmester.* Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, 1888, S. 342—343.

Графическое определение скоростей замкнутой цепи с помощью метода полюса аффинности Ассур показывает на примере цепи четвертого класса с одним замком (рис. 17).

Проекции скоростей конечных точек поводков определяют четыре прямые A, B, C, D (рис. 18), на которых и должны лежать изображения скоростей искомых точек. Произвольно задаемся на прямой A изображением a_1, а на прямой B изображением b_1. На основании этих изображений строим первую ложную картину скоростей всех точек. Аналогично строим вторую и третью ложные картины скоростей, соответствующие заданным изображениям a_2b_2 и a_3b_3. Если наша кинематическая цепь была предварительно разомкнута в шарнире H, то мы получим два ряда изображений этой точки, ряд изображений от точки E — h_1, h_2, h_3 и ряд изображений при подходе от точки C — χ_1, χ_2, χ_3.

Изображения a_1 и b_2 приняты совмещенными, то же самое относится к изображениям a_2 и a_3.

Построение полюса аффинности h треугольников $h_1h_2h_3$ и $\chi_1\chi_2\chi_3$ на чертеже не показано. Полюс аффинности и будет истинным изображением точки H. Истинное изображение остальных точек находится построением четвертой картины скоростей, если исходить из известного изображения точки H.

Но тип цепи с параллельными диагоналями не есть единственный: его характеризует то, что в нем имеется только две пары бесповодковых звеньев, между которыми проходит по паре цепей одноповодковых звеньев. Могут быть и иные типы цепей, в частности, многокольцевая цепь, в которой периферийные бесповодковые звенья связываются не пересекающимися, но и не параллельными цепями. Здесь можно применить смешанный прием — с помощью аффинного соответствия найти изображение только некоторых точек, и затем строить истинный план скоростей, не прибегая уже к помощи аффинности. Использование двух приемов в одном построении в этом случае будет зависеть от искусства исследователя.

Наконец, может быть смешанная цепь, представляющая собой комбинацию диагональной и многокольцевой цепи, в которой связи между бесповодковыми звеньями осуществляются обоими способами. Здесь также можно применить метод полюса аффинности.

Переходим теперь к построению скоростей цепей четвертого класса с перекрестными диагоналями. Для этих цепей Ассур предложил общий прием, пригодный и для цепей с параллельным замыканием, однако значительно более сложный.

Общая идея метода такова: если до сих пор предполагался разъединенным один шарнир и по трем ложным положениям определялось геометрическое место изображений скорости разъединенного шарнира или же непосредственно истинное положение этой точки, характеризующей скорость (метод полюса аффинности), то для более сложных цепей приходится разъединять не один шарнир, а несколько. Поэтому будет и бо́льшим число ложных данных; в общем случае произвольно задается число изображений, вдвое большее числа разъединяемых шарниров.

Пользуясь предыдущими методами, приводим в совпадение один из разъединенных шарниров. Построим три картины скоростей, в которых изображения одного из шарниров будут приведены в совпадение. С помощью этих картин приведем в совпадение второй шарнир, применив четвертый раз один из соответствующих методов. Построив три картины скоростей, в которых приведено в совпадение два шарнира, можно ими воспользоваться для построения картины скоростей, в которой приведены в совпадение изображения трех шарниров, и т. д. Таким образом, при разъединении n шарниров один из методов следует применить число раз

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Как видим, количество необходимых операций при усложнении цепей растет весьма быстро, а вместе с тем растет и неточность построения. При этом достижимый предел относительной точности выполнения весьма недалек. Ассур приводит пример замкнутой цепи четвертого класса с двумя пересекающимися диагоналями, на построение картины скоростей которой методом геометрического места было затрачено 40 часов, и результат получился с неувязкой в 15 мм. С помощью же метода аффинности так и не удалось получить результата, хотя на его выполнение и было затрачено около 150 часов. Поэтому приходится прибегать к дополнительным проверкам и вычислениям.

На примере построения картины скоростей механизма четвертого класса с двумя пересекающимися диагоналями Ассур весьма тщательно исследует достоинства и недостатки обоих методов и приходит к выводу, что в сущности оба они являются графическими вариантами одного и того же метода, поэтому можно в одном построении пользоваться элементами того и другого. При этом он разбирает также причины возникающих ошибок и указывает на возможные способы их преодоления. Исследовав указанный случай построения, Ассур говорит: «Сопоставляя все сказанное по поводу построения картины скоростей [указанной] цепи, придем к заключению, что для случая цепи четвертого класса, в которой приходится мыслить разъединенными два шарнира одновременно, построение картины скоростей представляет уже исключительные трудности, но еще выполнимые, если подвергнуть каждое построение строгому контролю и обходить сомнительные построения. Но если требуется разъединить большее число шарниров, то, помимо огромной затраты времени на построение картины скоростей, вряд ли удастся прийти к надежному результату. Поэтому мы и ограничиваемся сделанными до сих пор указаниями» [13].

Вторая часть труда Ассура заключается построением планов скоростей механизмов кулис Гейзингера и Савельева.

Итак, из кинематики шарнирных механизмов Ассуром выполнено лишь исследование графических методов построения планов скоростей механизмов нормальных цепей по его классификации. При этом он исходит из построения планов скоростей по способам Мора и Бурместера для цепей первого класса второго порядка, т. е. составленных при помощи наслоения двухповодковых групп. Затем он переходит к трехповодковым группам и полученную при этом методику распространяет на цепи первого класса всех порядков.

После этого он переходит к механизмам второго класса, методика исследования которых оказывается такой же, что и при исследовании механизмов первого класса.

[13] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 386.

Заметим, что эта причина послужила для И. И. Артоболевского основанием для пересмотра классификации Ассура по этим подразделениям и для отнесения ассуровых цепей первого и второго классов к одному классу.

После детального исследования механизмов третьего класса Ассур переходит к исследованию четвертого, на котором задерживается дольше всего. Причин для этого обстоятельства несколько. Это и недостаточная разработанность и ясность классификации в отношении цепей, принадлежащих к этому классу, и неопределенность поставленной задачи, и стремление свести все расчеты исключительно к выполнению графических операций, совершенно игнорируя возможность выполнения части расчетов аналитическим способом. Поэтому исследование механизмов четвертого класса в этой части и кончается несколько меланхолическим признанием недостаточности графических средств для полного решения любой задачи теории механизмов.

Однако в само́й этой ограниченности решения задачи и, пожалуй, ее незавершенности есть своя положительная сторона.

Вспомним, какими графическими методами пользуется Ассур на протяжении всего этого исследования. В сущности все они являются вариантами двух методов — метода особых точек, разработанного самим Ассуром, и метода ложных положений, идею которого он заимствовал у Мора, но развил и наполнил совершенно новым содержанием. Виртуозное владение графическими методами расчета позволило Ассуру не только выяснить до конца все их возможности, но и бросить мимоходом ряд весьма существенных замечаний, могущих быть использованными и действительно использованных при дальнейшем развитии теории.

Семьсот лет тому назад великий ученый раннего средне вековья Роджер Бэкон создал гениальную картину развития техники.

Теоретические рассуждения Ассура в какой-то степени напоминают предвидения Бэкона. В своем структурном и кинематическом анализе Ассур не только углубился в сущность механизмов, но и значительно раздвинул их границы, тем самым создавая задел для будущего. И во времена Ассура, и в настоящее время большинство механизмов укладывается в границы первого класса по его терминологии и лишь немногие механизмы относятся к высшим классам. Устанавливая сродство между механизмами и фермами, Ассур тем самым расширяет возможность применения методов решения задач, разработанных для обоих видов механических систем.

И очень существенно, что Ассур отдавал себе полный отчет в том, что он работает не для настоящего, а для будущего. Создавая свой прогноз развития шарнирных механизмов, он долгие часы просиживал над построением сложнейших геометрических схем, сущность которых его современникам была мало понятна.

Для этого нужно было иметь настойчивость, целеустремленность, очень ясную голову и мужество. Всего этого отнять у Ассура нельзя.

VI

Статика и кинетостатика механизмов

Применение графических приемов для исследования сооружений и механизмов имеет достаточно долгую историю. В этих областях механики геометрические методы исследования весьма логичны — они соответствуют самой сущности задач, тем более, что для упрощения построения машин созидатели их издавна пользовались наименее сложными, «геометрическими» формами.

Во второй книге своей «Геометрии», посвященной изучению кривых линий, Декарт делит все кривые на два класса. К первому классу, названному им геометрическим, он относит те линии, которые «описаны непрерывным движением или же несколькими такими же последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими». Ко второму классу механических кривых относятся такие линии, отдельные движения, необходимые для описания которых, между собой независимы.

Оба эти класса кривых, по предположению Декарта, воспроизводимы при помощи механических средств. Таким образом, устанавливается некоторое, правда, пока еще совершенно неопределенное соответствие между механизмами и фигурами (кривыми), изображаемыми с их помощью. Метод аналитической геометрии Декарта был в сущности первым методом графического изображения некоторых соотношений.

Геометрический метод Ньютона, хотя и несколько тяжеловесный в качестве аппарата аналитического исследования, оказался необычайно плодотворным в деле создания механики. Ньютон дал доказательство правила параллелограмма сил, хотя последнее было известно до него Стевину и Галилею, если не считать древних. В 1687 г. Вариньон вывел соответствующее графическое построение, а также предложил построение, известное под названием многоугольника Вариньона.

Большой вклад в создание строительной механики принадлежит ученым, работавшим в Петербургском институте инженеров путей сообщения, основанном в 1809 г. В 1820 г. сюда были приглашены в качестве профессоров Габриэль Ламэ (1795—1870) и Бенуа Поль Клапейрон (1799—1864). К этому времени относится ряд их мемуаров о цепных мостах, в которых содержалось ряд положений, примененных к различным задачам статики.

В 1858 г. выдающийся шотландский инженер Маккуорн Ренкин, профессор университета в Глазго, получивший особенную известность благодаря своим работам в области термодинамики, но занимавшийся также вопросами строительной механики и механики машин, высказал идею расчета статически определимых ферм. Для этого он применил теорему Вариньона о веревочном многоугольнике. В 1862 г. он опубликовал эту идею в своем «Руководстве для инженеров-строителей». Сущность приема Ренкина заключалась в том, что он строил график, отрезки которого должны быть параллельны стержням фермы. Способ Ренкина отличается от позже предложенного способа Кремоны тем, что в диаграммах последнего соблюдается принцип взаимности: каждому узлу фермы соответствует многоугольник диаграммы; графики Ренкина этим свойством не обладают.

В 1862 г. вышла в свет книга Августа Риттера «Элементарная теория и расчет железных стропильных и мостовых ферм», в которой, в частности, изложен предложенный им метод моментных точек, носящих его имя.

В 1862 г. знаменитый английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) опубликовал свой первый мемуар о взаимных фигурах. Он показал, что построения графической статики дают взаимные фигуры, что является частным случаем его же теоремы о проекциях взаимных многогранников. В 1870 г. Максвелл опубликовал в «Сообщениях Эдинбургского королевского общества» большой мемуар, в котором дал полное решение вопроса о взаимных фигурах графической статики.

В 1866 г. была опубликована «Графическая статика» цюрихского профессора Кульмана, в которой было собрано все, что до того времени было известно по этому предмету. Самому Кульману принадлежало много самостоятельных исследований в области графостатики, в частности, метод расчета статически определенных ферм путем рассечения фермы на две части и определения равновесия одной из двух частей.

Работа итальянского ученого Кремоны «Взаимные фигуры в графической статике» вышла в свет в 1872 г. В этой работе развиваются те же идеи, что и в трудах Максвелла (хотя сам Кремона не был знаком с работами Максвелла), а также учение об изображающих диаграммах.

Значительное усовершенствование методы графостатики получили в трудах Мора, Винклера, Мюллера — Бреслау, Френкеля и некоторых других ученых.

Немного позже начинают появляться работы, в которых предлагаются методы графического исследования вопросов кинематики механизмов. Профессору Берлинской высшей технической школы Зигфриду Аронгольду и английскому ученому Александру Кеннеди принадлежит известная теорема о трех мгновенных центрах вращения. На основании этой теоремы был разработан графический метод определения скоростей механизмов. Метод построения планов скоростей и ускорений, разработанный Мором и Смитом, в своей сущности связан с геометрическими рассуждениями Максвелла о взаимных фигурах.

Впервые графические методы исследования были применены к решению задачи динамики в мемуаре Кориолиса «О влиянии момента инерции балансира паровой машины и ее средней скорости на регулярность вращательного движения, сообщаемого маховику возвратнопоступательным движением поршня» (1832). В отношении расчета маховика исследование Кориолиса (построившего диаграмму касательных усилий, диаграмму работ и диаграмму переменных приведенных масс поршня и коромысла) было продолжено Мореном, Портером, Радингером и Виттенбауэром. О работах по графической статике и графической динамике Прелля, Жуковского и Виттенбауэра упоминалось выше.

В Петроградском политехническом институте над вопросами графического расчета механизмов работали В. Л. Кирпичев, К. Э. Рерих и Л. В. Ассур. По-видимому, значительное влияние в этом направлении было оказано также И. В. Мещерским. Во втором десятилетии XX века этими учеными выполнена целая серия работ по графическим методам — исследовательских, монографий и учебных пособий. Кирпичев и Рерих работают над вопросами определения путей точек плоского механизма, Ассуром Рерихом и Кирпичевым написаны руководства по построению планов скоростей и ускорений механизмов, Ассур и Рерих работают над созданием пособий по графическим методам изучения статики и динамики механизмов. В 1911 г. они совместно издали (литографским способом) пособие по графическим методам определения момента инерции маховиков. Нельзя забывать также серии книг Кирпичева по механике, в которых с большой полнотой и ясностью изложены графические методы исследования механизмов и сооружений.

Итак, к середине второго десятилетия графические методы в статике и кинетостатике механизмов были уже значительно продвинуты вперед. Существенную роль при этом играло развитие графических методов вообще и, в частности, их геометрического (и вообще математического) основания.

Мы видели, что в своем исследовании Ассур постоянно указывает на существенное родство между механизмами и сооружениями. В связи с этим расширяется и понятие кинематической цепи. В свое время Рело ввел понятие десмодромной кинематической цепи, чем свел учение о механизмах к учению о цепях с одной степенью свободы. Такое понимание было чересчур узким даже в последней четверти XIX века, ибо и Рело, и другим машиноведам были хорошо известны механизмы с двумя степенями свободы. В 1887 г. доцент Пражского политехникума Таубелес ввел новый термин — степень изменяемости цепи. «Если ввести в терминологию степень изменяемости,— рассуждает по этому поводу Ассур,— то можно обобщить термин кинематической цепи и говорить о кинематических цепях разных степеней изменяемости. С этой точки зрения различие между фермой и механизмом только в степени изменяемости, лежащей в основе их кинематической цепи. То, что называют обычно свободной фермой, представляет собой кинематическую цепь с нулевой или отрицательной степенью изменяемости, смотря по тому, образуется ли при неподвижном укреплении одного звена такой цепи ферма, статически определимая или статически неопределимая. Мы будем говорить лишь о фермах статически определимых, и потому достаточно будет указывать, что лежащая в основе их цепь неизменяема» [1].

Задача статического исследования механизма заключается в определении условий равновесия механизма и сил взаимодействия между его звеньями, а также сил, действующих на отдельные звенья. Если мы применим принцип Даламбера, то можем задачу о движении механизма под действием некоторой системы сил свести к задаче о его равновесии: таким образом возникает задача кинетостатики механизма.

Первой из задач статики механизмов является задача об уравновешивании сил, приложенных к данной системе, одной силой заданного направления. Ассур указывает на три пути решения этого вопроса — при помощи определения равновесия каждого звена, путем определения мгновенных центров вращения в абсолютном и в относительных движениях звеньев механизма и применяя способ жесткого рычага Жуковского.

Что касается первого из указанных путей, то он сводится к определению всех связей между всеми же звеньями. Ассур указывает, что этот путь длинен, так как он значительно шире задачи: кроме уравновешивающей силы здесь определяются также давления в парах, т. е. практически полностью решается задача кинетостатики.

В таком виде задача эта была решена Н. Г. Бруевичем, которому принадлежит ставшая классической работа по этому вопросу. Однако решение было выполнено через пятнадцать с лишком лет после того, как над ним думал Ассур.

Второй путь, основанный на законе виртуальных перемещений, требовал значительной графической работы по определению мгновенных центров вращения. Путь этот был развит одним из авторов теоремы о трех мгновенных центрах вращения Александром Кеннеди.

Пользуясь этим методом, мы определяем целый ряд уравновешивающих сил для всей системы, затем суммируем эти частные уравновешивающие и находим уравновешивающую всех сил системы.

Сам процесс нахождения уравновешивающих требует построения трех параллелограммов сил для каждой из сил

[1] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 420.

системы. Однако здесь играет роль само расположение этих параллелограммов и их размеры. Неудобства, возникающие при этом, можно обойти, перенося начальные точки параллелограммов сил в другую точку по направлению линии действия конкретных разлагаемых сил.

«Желая как-нибудь обойти те неточности в задаче об нахождении уравновешивающей данной системы сил,— пишет Ассур,— которые вызваны неточным определением положения мгновенных центров, я на объяснительных лекциях, касающихся исполнения студенческих работ по прикладной механике в нашем институте, предлагал определять сомнительные мгновенные центры не с помощью разработанного Бурместером метода Аронгольда, а пользуясь картиной скоростей механизма, в которой полюс является изображающей точкой мгновенного центра каждого из звеньев механизма, или даже пользоваться только картиной скоростей, вовсе не определяя мгновенных центров, но прибегая зато к вычислениям. Последнее естественно, раз уже картину скоростей приходится строить, и, если этого недостаточно, чтобы найти уравновешивающую» [2].

Закон виртуальных скоростей для находящейся в равновесии под действием $(n+1)$-й силы системы выражается суммой:

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i v_i \cos(p_i v_i) = 0,$$

где p — сила, v — скорость, а каждый член суммы представляет собой геометрическое произведение силы и виртуальной скорости точки ее приложения.

Каждая из такого рода сил может считаться уравновешивающей всех остальных сил. Если в качестве такой уравновешивающей принять $(n+1)$-ю силу, обозначив ее Q, а виртуальную скорость точки ее приложения v, то окажется, что уравновешивающая системы сил должна удовлетворять условию:

$$Q = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i \cos(p_i v_i)}{v \cos(Q, v)}.$$

[2] Там же, стр. 407.

Если затем мы зададимся произвольной величиной скорости одной из точек механизма, направление которой известно, то сможем вычертить план виртуальных скоростей механизма. Произвольность выбора величины скорости отвечает независимости выбора бесконечно малого элемента времени интересующего нас виртуального перемещения; по этой скорости определяем величины всех остальных. После этого проектируем вектор, изображающий скорость на направление силы или наоборот, и затем перемножаем соответствующие числовые величины.

Таким образом, выражается каждый из членов, находящихся под знаком суммы в выражении для Q. Учитывая затем знак между направлениями Q и v, определяем сторону, в которую направлена сила Q.

Третьим из отмечаемых Ассуром методов определения уравновешивающей силы является метод жесткого рычага, предложенный Н. Е. Жуковским в 1909 г.

Метод этот требует, как известно, изображения плана скоростей исследуемого механизма, вычерченного в произвольном масштабе, к которому в соответствующих точках прилагаются все действующие на механизм силы. Метод является графоаналитическим и требует для своего завершения дополнительных аналитических рассуждений. Поэтому были попытки создать на его основе чисто графический метод.

Ассур хочет убедить читателей, а в первую очередь самого себя, в практической применимости своих классификационных идей. Разработав один пример, он опять возвращается к той же теме: «Ниже мы увидим, насколько решенная здесь задача близко связана с вопросами статики механизмов. Вообще изучение свойств кинематических цепей с одной степенью изменяемости и неизменяемости настолько тесно связано, что остается только удивляться, что учебники так резко разделяют эти дисциплины. Невозможно в полноте изучить одну из них, не зная в совершенстве другую, но странно излагать дважды самостоятельно вопросы, которые являются общими в обеих дисциплинах» [3].

Ассур возвращается к двум основным задачам статики механизмов. Это — определение условий равновесия ме-

[3] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 424.

ханизмов и определение сил взаимодействия между звеньями механизмов. Первая задача может быть решена, исходя из условий равновесия каждого отдельного звена. При этом следует ввести все силы взаимодействия между звеньями. Таким образом, этот путь будет универсальным, так как он даст сразу ответ на оба вопроса статики, и в то же время труднейшим, так как зависит от числа звеньев, которое может быть достаточно большим.

Второй способ решения первой задачи был разработан английским ученым, последователем Рело, Александром Кеннеди; он требует определения мгновенных центров вращения — задача, уже сама по себе вносящая в решение дополнительную неточность. Последней можно избежать при помощи метода плана скоростей.

Применение повернутого плана скоростей для определения центров вращения уже очень близко подводит к методу жесткого рычага Жуковского. Мы видели, что один из первых ученых, занявшихся решением задач кинетостатики, Прелль очень близко подошел к нахождению этого метода, однако не сделал нужных выводов. За несколько лет до опубликования своей диссертации Ассур при разработке теории аналогов ускорений также очень близко стоял к тому же выводу, но прошел мимо, не обратив на него особенного внимания. Интересно, что и в разбираемом нами труде Ассур придерживается того же мнения, утверждая, что метод жесткого рычага, будучи сочетанием работы чертежной и работы вычислительной, т. е. в сущности типичным графоаналитическим методом, не представляет каких-либо выгод сравнительно с использованием плана скоростей для определения уравновешивающей силы. Поэтому, пользуясь советом В. Л. Кирпичева, он видоизменяет идею жесткого рычага для разработки чисто графического приема.

Для этой цели можно применить два приема. Первый прием основан на замене данной системы сил системой сил параллельных. Дело в том, что в любой системе с одной степенью свободы прямая, параллельная нормали к траектории в точке приложения силы и проведенная через конец вектора этой силы, является геометрическим местом концов векторов, изображающих силы, эквивалентные данной и приложенные в той же точке. В случае жесткого рычага концы векторов эквивалентных сил, имеющих общую точку приложения, будут лежать на прямой, параллельной радиусу-вектору точки их приложения.

Вариант этого приема был разработан В. Л. Кирпичевым в его «Графической статике». Он поворачивает не только силы, но и плечи этих сил.

Второй прием, названный Ассуром методом приводящей окружности, заключается в следующем: проводим окружность произвольным радиусом, с центром в полюсе жесткого рычага. Затем через конечные точки сил, приложенных к рычагу, проводим линии, параллельные их радиусам-векторам, до пересечения с окружностью. Линии, соединяющие начальные точки векторов с найденными точками на окружности, являются эквивалентными силами; проектируем их на касательные к тем же точкам на окружности. При таком двойном проектировании сил результирующая сила определяется простым графическим построением.

Применением того или иного способа, ориентированного на знание плана скоростей, можно определить уравновешивающую силу. Из предыдущей главы мы знаем, что построить план скоростей принципиально возможно для всех механизмов первых трех классов и для многих механизмов четвертого класса. А так как различие между механизмом и фермой зависит лишь от степени подвижности той или иной стержневой системы, то, следовательно, с равным правом можно применить метод жесткого рычага и к определению напряжений в стержнях ферм. Сделать это можно, сочетая его с «кинематическим методом» Мора. Суть последнего заключается в том, что из жесткой стержневой системы выбрасывается одно звено, напряжение в котором является искомым. При этом кинематическая цепь приобретает одну степень свободы и, следовательно, для двух точек, ограничивающих изъятый стержень, можно задаться произвольно их скоростями. Это и приводит к применению метода жесткого рычага.

Однако Ассур делает одно весьма существенное замечание: «Очевидно, что закон виртуальных перемещений не только для системы с одной степенью свободы, но и для систем с бо́льшим числом степеней свободы приводит к заключению, что вспомогательный рычаг будет находиться в равновесии под действием сил, приложенных указанным образом в изображающих точках. Разница будет состоять лишь в том, что для системы с одной степенью свободы можно построить только один вспомогательный рычаг, если считать подобные между собой картины скоростей тождественными, благодаря возможности соответственным образом изменить масштаб чертежа. Для систем же с бо́льшим числом степеней свободы их может быть построено несколько различных, и все различные вспомогательные рычаги должны находиться в равновесии под действием сил, приложенных указанным образом. Таким образом, условия равновесия систем с несколькими степенями свободы могли бы быть выведены, если пользоваться несколькими различными вспомогательными рычагами» [4].

Это замечание переносит нас опять к механизмам с несколькими степенями свободы, исследованию которых был посвящен трактат об аналогах ускорений. С достаточной степенью вероятия можно предположить, что Ассур думал не только разрабатывать кинематику стержневых систем на основе своей классификации, но и вернуться затем к продолжению исследования своей старой задачи, которую он оставил, не исчерпав до конца, Замечание это есть одно из тех «заделов на будущее», которыми так богат трактат Ассура.

Второй и наиболее важной задачей статики механизмов является задача о нахождении внешних сил, действующих на каждое звено механизма. Задача эта тесно связана с расчетом звеньев (деталей) на прочность и сводится к определению давлений в парах с учетом также и силы трения.

При определении давлений в парах механизма Ассур, как и в кинематическом анализе, пользуется своей системой структуры кинематических цепей. Тогда задача сводится к определению таких давлений между звеньями нормальной цепи, соединенной с кривошипом и с основанием и нагруженной силами. Если механизм состоит из наслоения таких цепей, то надо расчет начинать от последней цепи. Определив давления элементов последней цепи на элементы оставшихся цепей, отсоединяем последнюю цепь и переходим к следующей. Продолжаем наше исследование таким образом до тех пор, пока не дойдем до кривошипа.

[4] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 421—422.

Наиболее элементарной из групп наслоения механизмов первого класса является двухповодковая группа, с которой Ассур и начинает свое исследование. Здесь опять он вспоминает тесную связь, существующую между механизмами и фермами. «Если нам удастся... решить вопрос о равновесии определенных классов механизмов, то этим же будет решен и вопрос об определении напряжений в стержнях соответствующих ферм. Ведь с нашей точки зрения ферма отличается от механизма лишь тем, что последний состоит из устоя, кривошипа и наслоения нормальных цепей, а в ферме кривошип опущен. Но фермы представляют и ряд особенностей. В то время как в механизмах редко встречаются шарниры, в которых сходится три звена, то в фермах сплошь и рядом в одном шарнире сходится большое число звеньев. Наиболее обычные типы ферм устраиваются из двухшарнирных стержней и, разбирая их по общему способу, приходится рассматривать шарнир в данном случае как результат слияния многих шарниров» [5].

Это положение, которое, заметим мимоходом, также впоследствии было использовано в практике теории механизмов и машин, указало Ассуру на возможный исходный пункт исследования — использование разработок уже принятых практикой статики ферм. Но, с другой стороны, отказ от специфичности, присущей механизмам, повлек за собой некоторую тяжеловесность кинетостатических построений Ассура. Он оговаривается, правда, что было бы нецелесообразно применять выработанные им способы к каждой ферме, так как существуют специальные способы исследования для сложных ферм. Однако существуют фермы, структура которых полностью соответствует структуре механизмов и которые легче всего поддаются исследованию, если рассматривать их как структуры, образованные наслоением нормальных кинематических цепей.

Так или иначе, но в качестве исходного приема для элементарной кинематической группы — двухподводковой — Ассур пользуется одним из тех, которые были разработаны Мором. Он рассматривает двухповодковую группу ABC (центральный шарнир — C), находящуюся под действием двух внешних сил. На направлениях сил

[5] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 428.

он выбирает две произвольные точки a и b и раскладывает первую силу по направлениям aA и aC, а вторую — по направлениям bB и bC. Затем он строит многоугольник равновесия сил и получает таким образом силы, действующие в стержнях по величине и по направлению. После этого отбрасывает рассчитанную уже двухповодковую группу, заменив ее действием соответствующих сил на следующую по порядку группу, и так далее — вплоть до кривошипа. Затем Ассур приводит видоизменение того же приема для случая, когда один из шарниров группы (крайний) заменен ползуном.

Переходя к определению усилий в трехповодковой группе (рис. 19), предполагаем, что силы, действующие на группу, приведены к четырем: на трехшарнирное звено действует сила P_{I}, а на поводки — соответственно P_1, P_2, P_3. Раскладываем силу P_{I} по двум каким-либо шарнирам, например G и F. В соответствии с этим строим диаграмму сил, причем придерживаемся такого порядка, чтобы сила P_{I} помещалась между силами P_1 и P_2, составляющие которых будут приложены в тех же точках F и G. В результате получится ломаная линия, обозначенная цифрами 01234 (рис. 20). Предполагая, что каждая из сил P приложена к какой-то из точек a, b, c, d, взятых на линии действия силы, складываем затем силы P по шарнирам, образующим с точками a, b, c, d треугольники, и определяем напряжения в поводках по методу Кульмана путем построения веревочного многоугольника. На рис. 20 напряжения в поводках обозначены буквами S_1, S_2, S_3.

Обозначим теперь искомые давления в шарнирах через A, B и C. А так как геометрические суммы сил A и A_1, B и B_1, C и C_1 соответственно должны быть равны S_1, S_2 и S_3, то искомые давления получатся на чертеже в виде отрезков 3—12, 4—14, 13—0. Остается теперь определить давления в шарнирах E, F и G. Геометрические суммы сил S_1, G_1 и G; S_2, E_2 и E; S_3, F_3 и F равняются нулю, поэтому давления в этих шарнирах изображаются отрезками 12—2, 14—3, 1—13.

Таким образом, построение давлений для трехповодковой группы в принципе аналогично с такой же задачей для диады. Разница заключается в относительно большей трудности исполнения. В том и в другом случае Ассур пользуется методами Мора и поэтому напряжения, по-

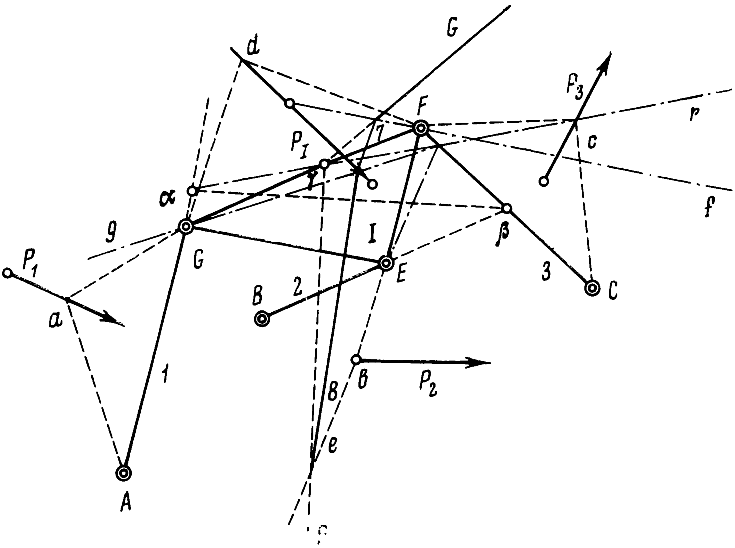

G
d
F
P3
r
c
P1
f
α
β
g
I
P1
G
E
3
C
B
2
a
B
P2
1
B
e
A

Рис. 19

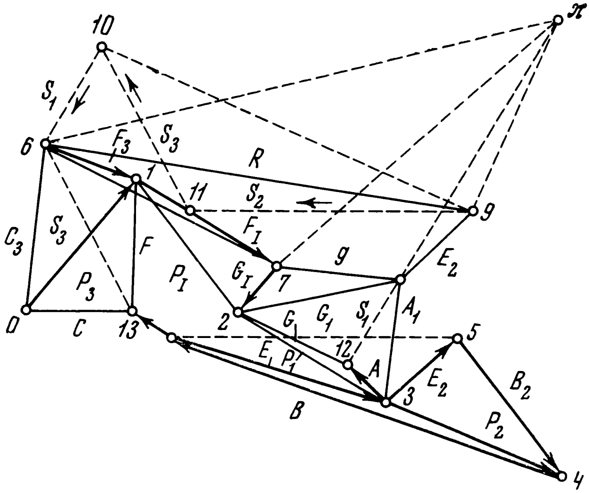

10
π
S1
6
F3
S3
R
1
11
S2
9
C3
S3
F
F1
P3
PI
GI
g
E2
7
0
C
13
2
G1
S1
A1
5
12
E1
P1
A
E2
B2
B
3
P2
4

Рис. 20

лученные в звеньях по этому способу, называет «моровскими» напряжениями.

Кинематическим методом Мора можно определить «моровские» напряжения в цепях первых трех классов и в части цепей четвертого класса. Ассур подчеркивает при этом, что ввиду недостаточной исследованности цепей четвертого класса среди них могут в дальнейшем оказаться и такие, которые не поддаются исследованию кинематическим методом.

В конце главы Ассур определяет свое исследование как приложение к расчету нормальных кинематических цепей «двух великих принципов: принципа возможных перемещений и принципа взаимных многогранников Максвелла». Примером применения первого из этих принципов была теория «моровских» напряжений.

Перейдем теперь к способам использования в кинетостатике Ассура построений Максвелла. Применение взаимных многогранников к расчету жестких кинематических цепей основано на следующем: две фигуры в плоскости можно рассматривать как ортогональные проекции двух взаимных многогранников с плоскими гранями. Если одна из этих фигур представляет собой плоскую кинематическую цепь, то вторая будет связной диаграммой напряжений в стержнях цепи. При этом ребра многогранника проектируются или как стержни, составляющие плоскую кинематическую цепь, или как направления приложенных сил.

Рассматривая фермы с устраненными стержнями, действие которых заменено силами, Ассур приходит к выводу, что к таким фермам, т. е. к системам изменяемым, также можно применить закон взаимных многогранников. Более того, «если мы просмотрим доказательства закона взаимности,— говорит Ассур,— то в этих доказательствах нигде не требуется упоминания о том, что ферма представляет собой жесткую стержневую систему, и поэтому доказательство может быть отнесено к любой плоской стержневой системе. А так как всякая такая система может быть рассматриваема как проекция некоторой пространственной, т. е. такой, которую принято называть многогранником, в общем случае с неплоскими гранями, то нет решительно никаких оснований думать, что к изменяемым стержневым системам закон взаимных диаграмм не имеет применения. Наша основная задача будет состоять в том, чтобы применить его к нормальным многоповодковым цепям»[6].

Пользуясь изложенным закочом, Ассур начинает исследование с кинетостатики цепи первого класса четвертого порядка. Исследование Ассур ведет весьма детально, рассматривая также и специальные случаи, что, впрочем, является его постоянным правилом. Остальных случаев цепей первого класса он не рассматривает, так как они являются лишь усложненным повторением рассмотренного.

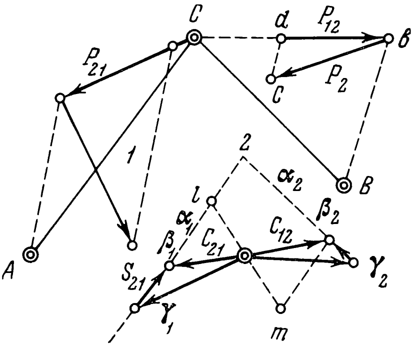


Рис. 21

Применяя способ взаимных многогранников, Ассур в то же время придерживается идей Мора, ссылаясь на то, что они известны большинству инженеров и вместе с тем приводят к весьма ясным диаграммам. Однако, указывая на усложнение способа, разработанного для расчета ферм, при применении его к расчетам механизмов, он приходит к несколько пессимистическому выводу: «к сожалению, более короткого пути к определению шарнирных давлений, по-видимому, не существует». К счастью, этот грустный прогноз не оправдался.

Однако иногда (в качестве вспомогательного) приходится прибегать к кинематическому методу определения давлений в шарнирах механизмов. Метод этот в интерпретации Ассура заключается в следующем. Пусть задана двухповодковая группа ACB (рис. 21). Разъединим шарнир в точке C, общей для обоих поводков. Тогда давление поводка 1 в шарнире C на поводок 2 обозначим через C_{12}; обратное давление обозначим C_{21}. Пусть, далее, сила C_{12} разложена на две составляющие P_{12} и S_{12}, причем первая проходит через точку b приложения силы P_2, действующей извне на звено 2, а вторая совпадает с направлением оси

[6] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 453.

поводка 2. Момент P_{12} относительно точки B равен моменту силы P_2, а момент S_{12} относительно той же точки равен 0. Отсюда находим силу p_{12} и совершенно аналогично — силу p_{21}.

Для определения сил S_{12} и S_{21} поступаем следующим образом: выбираем полюс P_c и откладываем от него силы p_{12} и p_{21}; через конечные точки этих сил γ_2 и γ_1 проводим прямые α_2 и α_1, параллельные осям поводков. На оси α_1 берем произвольную точку l и проводим через точку P_c прямую, причем $P_c m = P_c l$. Проводим затем через точку m прямую, параллельную α_1 до пересечения с линией α_2. Так как точка P_c делит пополам отрезки всех прямых, проходящих через нее и заключенных между прямыми α_1 и $m\beta_2$, то отрезки $P_c\beta_1$ и $P_c\beta_2$ и дадут нам величину искомых составляющих S_1, S_2; таким образом, отрезки C_{12} и C_{21} будут полными давлениями в точке C.

В более общем случае, когда в результате разрушения шарнира нормальная цепь с жестким закреплением концов всех поводков распадается на два механизма, что имеет место для всех подобных цепей первого и второго классов, Ассур предлагает вариант этого же метода. Предполагая, что обе части механизма находятся в равновесии, он раскладывает уравновешивающую силу на две составляющие, одна из которых имеет произвольное направление, а вторая — перпендикулярна к скорости разъединенного шарнира на одном из механизмов. Тогда графическое решение задачи проводится с помощью построения жестких рычагов, изображающих планы скоростей механизмов. Ассур приводит в качестве примера определение давления в шарнире разъема для четырех поводковой цепи первого класса.

Таким образом, в случае для цепей первого и второго классов можно использовать идентичные построения. Разница заключается лишь в том, что поводки приходится заменить жесткими рычагами. Ассур указывает при этом, что для цепей первого класса этот метод не дает особенных преимуществ по сравнению с «моровским». Что же касается цепей второго класса, то для них кинематический метод может дать уже существенное облегчение графических построений.

Структура цепей третьего класса сложнее структуры образований первого и второго классов, и поэтому возникают специфические трудности в построении картины скоростей для механизмов этого класса. Ассур рекомендует для исследования цепей третьего класса применять кинематический метод исследования в некотором изменении, преобразуя цепь, жестко закрепленную на основе, в систему с двумя степенями свободы. «Мы упоминали уже раньше,— пишет он,— что теория вспомогательного рычага применима для определения условий равновесия систем со сколькими угодно степенями свободы. Для случая системы с двумя степенями свободы дело сведется опять к довольно простым графическим построениям»[7].

Разработав методику исследования кинетостатики цепей третьего класса, Ассур рекомендует применить ее и к нормальным цепям четвертого класса. Так как теория вспомогательного рычага в значительной степени облегчает решение поставленной задачи, то ее методикой можно пользоваться вообще при исследовании механизмов с двумя степенями свободы. «Но раз задача об определении условий равновесия системы с двумя степенями свободы может совершаться с удобством при помощи теории вспомогательного рычага, что почему бы не попытаться, вместо последовательного отбрасывания двух поводков, сделать это одновременно. Ведь и в этом случае, принимая скорости свободных концов остальных поводков равными нулю, получим систему с двумя степенями свободы. Искомыми явятся «моровские» напряжения двух отброшенных поводков, так что данную систему сил придется уравновесить двумя силами, точки приложения и направления которых даны.

Решение вопроса может быть сведено к решению двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого строим два различных, в указанном нами смысле, вспомогательных рычага для полученной отбрасыванием двух поводков системы с двумя степенями свободы, наносим на каждый рычаг данные силы и прямые действия искомых. Расстояния последних от полюса рычага равны плечам искомых сил. Написав затем равенство нулю суммы моментов сил относительно полюса каждого из вспомогательных рычагов, в каждом из этих уравнений будем иметь два неизвестных усилия, так как плечи всех сил известны»[8].

[7] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 506.
[8] Там же, стр. 513—514.

Итак, механизмы, составленные из нормальных цепей третьего и из изученных цепей четвертого классов, поддаются вполне кинетостатическому исследованию.

В качестве заключающего примера Ассур подвергает исследованию мостовое сооружение, состоящее из трех фермочек. Каждая из крайних фермочек имеет по три шарнира, соединяющих их с соседними звеньями цепи; средняя имеет четыре шарнира. Две крайние опоры являются подвижными, а из средних, соединенных с фермочками поводками и двойными шарнирами, одна опора неподвижна, а вторая подвижна. Кинематически данная конструкция равнозначна цепи, образующей жесткое и статически определимое образование с устоем при помощи пяти поводков. Таким образом, данная цепь весьма подобна нормальной трехзвенной цепи первого класса, но представляет совершенно новое образование, не изученное Ассуром. Однако теоретические изыскания, проведенные им, дают возможность полностью разрешить и эту задачу.

Почему же Ассур выбрал в качестве примера цепь, не укладывающуюся в его систематику? Ответ дает он сам. Еще и еще раз он хочет утвердить читателя, да и самого себя в мысли о том, что проведенные исследования не оторваны от практики, как кажется на первый взгляд, а отображают реальную действительность, дают решение задачам не только завтрашнего дня, но и текущим. «Быть может читателю, имевшему терпение пройти весь путь наших длинных изысканий, показалось, что автор забрался уже в слишком отвлеченную от практических приложений область, что говорить и столь подробно изучать такие разветвленные цепи, какими являются цепи второго и четвертого класса, пожалуй, и не стоило бы. Приведенный пример с убедительностью показывает, что не в том следует упрекнуть автора, что он зашел в слишком дальние и отвлеченные области, а уж, скорее, в том, что он слишком рано остановился. Ведь вот же перед глазами читателя вовсе не такое уже сложное мостовое сооружение, всего только три отдельных фермочки, два быка, два береговых устоя, и уже это — тип, лежащий за пределами исследованной области» [9].

[9] Там же, стр. 564.

Теперь подытожим результаты исследования статики кинематических цепей, выполненного Ассуром. На основании структурного анализа, проведенного им, были выяснены основные типы нормальных цепей. Он провел предварительно кинематическое исследование, но лишь в той мере, в какой это нужно для кинетостатики. Исследование статики этих цепей он проводит, исходя из двух основных принципов: принципа возможных перемещений (которым он пользуется, применяя методику Мора) и принципа взаимных многогранников Максвелла. Следует добавить к этому, что на протяжении всего исследования Ассур прибегает также к видоизмененной методике жесткого рычага Жуковского (как известно, разработанной Жуковским, но к которой весьма близко подошел и сам Ассур). Методика эта, называемая Ассуром «кинематической», обычно является вспомогательной, так как при исследовании он в основном применяет «моровскую» теорию. Если не считать немногих мест, где Ассур указывает на аналитические методы как вспомогательные к чисто графическим построениям, то почти везде он оказывает графическим методам явное предпочтение. Однако они зачастую оказываются очень трудными, утомительными в исполнении, теряют в точности и, что самое главное, в наглядности. А ведь наглядность является основным преимуществом графических методов по сравнению с аналитическими.

Мы видели, что основной смысл исследования Ассура об аналогах ускорений заключается в том, что в этой работе впервые изучены механизмы с несколькими степенями свободы, хотя там исследование не было доведено до конца. В трактате Ассур также в ряде мест указывает на применимость разрабатываемых им методов к исследованию механизмов с двумя степенями свободы.

Мы видели выше, что первым событием в научной жизни Ассура была работа «К вопросу о плавности хода паровых машин», в которой он поднял вопрос о необходимости точного учета сил инерции шатуна и ползуна. По-видимому, эта работа и явилась первопричиной его интересов к шарнирным механизмам. И, казалось бы, исследуя кинетостатику шарнирных механизмов, он сделает упор на силах инерции и на их графическом расчете. Однако этого не случилось. Если силы инерции и присутствуют в его графостатических расчетах, то в завуалированном виде в общих суммах внешних нагрузок. Почему? Ответом на это может быть лишь неоконченность сочинения. Мы уже останавливались на предположительной программе работы. Ассур не отказался от ее выполнения. Но он полностью не успел закончить и тех глав, которые вошли в канонический текст сочинения.

В последней главе, как и в предыдущих, разбросаны заметки, свидетельствующие о намеченных «ответвлениях» от центральной темы исследования. Так, применяя метод Мора для последовательных наслоений кинематических цепей, он ставит себе вопрос, можно ли построить общую диаграмму распределения сил, давлений и напряжений в том случае, если группы в механизме соединены независимо друг от друга (параллельно) [10]. В последней главе Ассур говорит о трактовке построения ускорений в механизмах первых четырех классов как о чем-то продуманном и подлежащем исполнению в самом ближайшем будущем. И вместе с тем неоднократно встречаются замечания о необходимости ограничить тему, чтобы сконцентрировать внимание читателя (и автора) на наиболее существенных фактах теории механизмов. Так, Ассур пишет: «Если автор ограничил область своих исследований, то думается, что причины на это были достаточно уважительные. Почти невероятным должно показаться, что в отрасли науки, которой не так уже мало занимались в XX веке, оказалась область, к которой близко подходили, но которая все же оставалась неведомой, запечатанной как бы семью печатями. Найдя ключ к этой области в крайне простой мысли о развитии поводка, автор оказался перед огромной задачей. Как человек, вступивший в первобытный лес, он должен был хозяйничать в ней совершенно самовластно и самостоятельно; он не нашел здесь ни проложенных дорог, ни протоптанных тропинок, которые привели его лишь на границу этой области. Но область эта весьма широкая, для успешного изучения ее во всей полноте мало того ключа, идеи развития поводка, которая раскрыла эту область перед глазами наблюдателя, позволила определить ее содержание, разбить ее на участки, подлежащие исследованию. Последних оказалось много, очень много, материала для исследований с избытком достаточно на целую человеческую жизнь.

[10] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 433.

Но, вероятно, имеются к отдельным участкам и другие, более удобные подступы, ключ к которым еще не найден. Быть может, найти его суждено и другому поколению людей» [11].

Вот таким научным завещанием заканчивает Ассур свое многотрудное исследование. Мы знаем теперь, что его призыв к следующим поколениям не остался втуне. Труды Ассура уже вошли в золотой фонд идей советской школы машин и механизмов, и можно надеяться, что еще не раз они будут прочитаны учеными, ищущими и находящими ключи к проблемам основной науки о машинах — механики машин.

[11] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов..., стр. 565—566.

VII

Последние годы жизни

Последние годы жизни Ассура связаны с тремя высшими техническими школами Петрограда, где он работал: Политехническим, Лесным и Технологическим институтами. Последние месяцы жизни Л. В. Ассур провел в Воронеже.

Петербургский политехнический институт был открыт в составе четырех отделений: экономического, электромеханического, кораблестроительного и металлургического. В 1909 г. дополнительно были открыты механические и инженерно-строительное отделения. В 1911 г. на базе воздухоплавательных курсов кораблестроительного отделения Политехнического института были организованы теоретические курсы авиации отдела воздушного флота им. В. В. Захарова, на которых получали теоретическую подготовку офицеры летных частей.

К середине второго десятилетия Политехнический институт стал одним из самых больших учебных заведений страны. На конец 1914 г. здесь училось 5907 студентов, ежегодно принимали до 1000 человек. Правда, кончать институт удавалось немногим: в 1912 г. было выпущено всего 199 инженеров, в 1913 г.— 293, в 1914 г.— 226. Особенно мало студентов оканчивали новые отделения института. Так, механическое отделение в 1913 г. окончил 21 человек, а в 1914 — 27. Еще меньше были выпуски инженеров-строителей: в те же годы они составили соответственно 3 и 5 человек!

К 1914 г. Политехнический институт обладал большим педагогическим коллективом. Здесь преподавали 46 профессоров (в том числе 30 ординарных), 2 доцента, 21 штатный преподаватель, 121 преподаватель по вольному найму, 69 лаборантов [1].

[1] *М. Н. Потехин, Т. А. Ильющенко.* Общественно-политическая жизнь института в годы нового революционного подъема и первой мировой войны. Труды ЛПИ, 1957, № 190, стр. 78.

В научном отношении Политехнический институт также стоял очень высоко. Здесь под руководством В. Л. Кирпичева и И. В. Мещерского собрался талантливый коллектив ученых, занимавшихся исследованиями в области теоретической и прикладной механики. Физику читал А. Ф. Иоффе, организовавший при Институте научный семинар, в котором принимали участие, в частности, П. Л. Капица, Н. Н. Семенов, Я. И. Френкель, П. И. Лукирский и др. Директором Института ряд лет был А. Г. Гагарин, имя которого связано с изобретенным им прессом для испытания материалов.

Работа в таком коллективе давала начинающему преподавателю многое, и несомненно научная среда Института значительно повлияла на Л. В. Ассура как на ученого.

Осенью 1914 г. началась первая мировая война. Война не могла не отразиться и на высшей технической школе. Если в предвоенные годы число студентов неуклонно увеличивалось и выпуски инженеров начали возрастать, то первые же месяцы войны показали значительный спад: на фронт были призваны многие преподаватели и студенты. С другой стороны, студенты, обучавшиеся в различных учебных заведениях заграницей, главным образом в Германии, Австрии, Франции и Швейцарии, начали возвращаться на родину, однако это лишь в незначительной степени смогло пополнить убыль в личном составе высших школ.

Еще до войны министерство народного просвещения ввело в высших технических школах обязательные репетиции по ряду предметов. Эти репетиции, официальным назначением которых было улучшение качества преподавания, а неофициальным — отсеивание нежелательных студентов, бойкотировались студентами. Теперь министерство вынуждено было в этом вопросе пойти на уступки: репетиции, правда, были оставлены, но для их сдачи не устанавливались жесткие сроки. Кроме того, окончательной отметкой признавалась та, которая была получена в результате экзамена.

12 августа 1915 г. были введены новые правила оценки знаний студентов: вместо прежней системы оценки баллами была введена словесная оценка: весьма удовлетворительно, удовлетворительно, неудовлетворительно.

В годы войны и людские резервы Политехнического института, и его научные силы, и материальная база в значительной степени использовались для нужд фронта. В распоряжении Военного ведомства были переданы мастерские Института вместе со всем персоналом. Здесь изготовлялись запасные части для самолетов, ремонтировались автомобильные и авиационные двигатели. Только в 1916 г. в механических мастерских было изготовлено 700 магнето для авиационных двигателей «Гном». Здесь же изготавливались стрелки для метания с аэропланов (стрелки, сброшенные сверху на пехоту противника, производили в 1914—1915 гг. впечатление, вероятно, равное тому, которое производили в 1941 г. авиабомбы). В 1915 г. учеными Института была создана новая модель микротелефонного аппарата с фоническим вызовом. В 1916—1917 гг. мастерскими Института было изготовлено по заказу Северного фронта 4000 таких аппаратов.

Кафедры и отделения Института вели по заказам Военного ведомства большие экспериментальные и исследовательские работы. Проводились исследования конструкций электрических проволочных заграждений, испытывались и регулировались радиотелеграфные приборы и аппараты, отдельные части аэропланов, двигателей и пр. За годы войны не только Военное ведомство, но и отдельные технические части обращались в Институт за научными консультациями, с просьбами изготовить приборы, машины, аппараты. Была создана комиссия, ведающая изготовлением медикаментов. При Институте был открыт госпиталь сначала на 900 коек, а в 1915 г. он был увеличен до 1400 коек. Таким образом, в годы первой мировой войны Институт оказался одним из важнейших центров помощи фронту.

Институт также готовил кадры для специальных и технических частей. Теоретические авиационные курсы были увеличены и начали выпускать военных летчиков и мотористов. В 1916 г. при электромеханическом отделении были открыты курсы для подготовки электромонтеров для военных частей. На всех военных курсах занятия вели преподаватели Института.

Призыв студентов в действующую армию все время возрастал: только за 1915—1916 гг. было мобилизовано 1615 студентов. Число студентов в связи с этим к началу 1916/1917 учебного года снизилось приблизительно до одной трети по сравнению с январем 1914 г. Право оканчивать высшее учебное заведение предоставлялось лишь студентам последних курсов, а студенты младших курсов должны были поступать в военные училища и пополнять редеющие ряды офицеров. Уменьшилось соответственно и число абитуриентов.

В 1915 г. Л. В. Ассур был избран руководителем упражнений по теоретической и прикладной механике Петербургского технологического института; здесь на кафедре механики работали почти все те же преподаватели, что и в Политехническом институте. Следует отметить, что в мае 1913 г. был уволен в отставку заведующий кафедрой механики и бывший директор Технологического института Д. С. Зернов. Министерство не могло простить ему постоянной борьбы с реакцией в стенах института и вне его и, воспользовавшись формальным предлогом окончания 25-летней службы его по ведомству, уволило в отставку, несмотря на то, что Ученым советом он был избран и на следующее пятилетие. Это был едва ли не единственный случай отказа утвердить решение Совета по подобному поводу.

Весь 1914, а также первую половину 1915 г. Ассур очень напряженно работает над своей диссертацией. Во второй половине 1915 г. он приступил к оформлению рукописи и в конце года поехал в Москву, чтобы показать завершенную диссертацию своему учителю Н. И. Мерцалову. Мерцалов одобрил работу и посоветовал Ассуру обратиться к Н. Е. Жуковскому и просить его быть оппонентом на защите диссертации.

5 февраля 1916 г. состоялось заседание Ученого совета Политехнического института, на котором профессор А. А. Радциг доложил отзыв комиссии, ранее выделенной Советом для рассмотрения диссертации Ассура «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации». Совет постановил допустить ее к защите на ученую степень адъюнкта. До 1917 г. в России право присвоения ученых степеней магистра или доктора имели лишь университеты. При этом ученых степеней по техническим наукам не присваивалось и единственное ученое звание, которое можно было защитить на ученом совете технического учебного заведения, было звание адъюнкта, что давало право на замещение должности адъюнкт-профессора и открывало доступ к ученому званию профессора. Как правило, диссертация имела значимость

лишь в пределах того учебного заведения, в котором она была защищена.

Оппонентами по диссертации Л. В. Ассура были назначены профессора Н. Е. Жуковский, Д. Н. Зейлигер и А. А. Радциг — крупнейшие ученые, занимавшиеся при том самыми различными вопросами прикладной механики.

Громадный авторитет Н. Е. Жуковского как крупнейшего русского механика был неоспорим. Его основополагающие работы по теории воздухоплавания были известны далеко за пределами России. Но кроме того он занимался и иными вопросами прикладной механики, в частности, шарнирными механизмами. Выше были упомянуты некоторые работы Жуковского в этой области. Здесь, как и в других вопросах прикладной механики, он умел находить новые решения, высокие по своей точности и неожиданно простые. В 1909 г. он опубликовал работу «Сведение механической задачи о кинематической цепи к задачам о рычаге», содержание которой свидетельствует о том, что его идеи в этом направлении совпадали с идеями, развитыми позже Ассуром.

В своем отзыве на работу Ассура Н. Е. Жуковский, отмечая недостатки, к которым он в первую очередь относил неясность и растянутость изложения, сложность отдельных доказательств и их недостаточность, одновременно писал: «Идею установить структуру механизма помощью указания его образования последовательно наращаемыми цепями надо считать весьма ценной, так как установление этой структуры сейчас же дает нам кинематические и динамические свойства механизма» [2].

Таким образом, Н. Е. Жуковский считает наиболее ценным в работе не отдельные методы исследования различных кинематических цепей, а принцип образования механизмов путем последовательного наращения кинематических цепей, получивших впоследствии название «групп Ассура». Н. Е. Жуковский отмечает также, что анализ структуры механизма открывает путь к его кинематическому и динамическому исследованиям.

Ученик В. Н. Лигина по Новороссийскому университету, профессор Казанского университета Д. Н. Зейлигер занимался исследованиями в области тех разделов гео-

[2] *Н. Е. Жуковский.* Полное собрание сочинений, т. VII, 1950, стр. 291.

метрии, которые имели больше всего точек соприкосновения с теорией механизмов. Ему принадлежит ряд работ в области кинематической геометрии, он является одним из создателей так называемого винтового исчисления, явившегося мощным математическим орудием при исследовании пространственных стержневых механизмов.

Бывший декан механического отделения Киевского политехнического института профессор А. А. Радциг преподавал в Петербургском политехническом институте с 1909 г. Здесь он был избран на кафедру прикладной механики и одновременно деканом механического отделения (в 1917—1918 гг. А. А. Радциг был выборным ректором Института).

Инженер-механик высокой культуры и очень широких познаний, Радциг занимался различными областями науки о машинах и неоднократно как в Киеве, так и в Петербурге читал курс теории механизмов, хотя предпочтение оказывал теплотехнике. Разработанный им краткий курс прикладной механики несколько раз переиздавался и в течение многих лет служил учебником в высшей технической школе. По кинематике механизмов Радциг давал лишь самые необходимые сведения: основы теории кинематических пар, кинематической цепи, преобразования шарнирного четырехзвенника, кривошипно-шатунный механизм, теорию инверсора Поселье — Липкина. Значительно подробнее он излагал динамику машин — здесь сыграли роль его научные интересы.

Публичная защита диссертации Ассуром состоялась на заседании Ученого совета 13 февраля 1916 г. Совет принял решение: признать защиту диссертации вполне удовлетворительной, а диссертанта — достойным присвоения ему степени адъюнкта по кафедре прикладной механики.

А после защиты диссертации жизнь потекла обычным порядком. Возвращался Ассур с работы поздно, да и работы у него прибавилось, с весны 1915 г. он начал читать специальный курс прикладной механики, теории регулирования машин и теории регуляторов для студентов-механиков. В том же году он начинает вести преподавание по курсам теоретической и прикладной механики в Петроградском технологическом институте.

Единственным отдыхом для Леонида Владимировича была игра на пианино, но и это удавалось редко — не было времени. Старался помочь жене в воспитании детей, но и на это нужно было время, по-настоящему он мог уделять детям лишь дни каникул.

Один из учеников Леонида Владимировича, профессор А. П. Иванов вспоминает: «У меня в памяти перед глазами встает стройная тонкая фигура Леонида Владимировича, его внешне строгое лицо со светло-рыжими волосами и такими же усами, закрученными «в стрелку». Очень сосредоточенный, с большой внутренней жизнью, задумчивый, очень замкнутый и вечно занятый, он старался, как будто, успеть выполнить свои большие планы».

Хотя главное направление творческой деятельности Леонида Владимировича было связано с прикладной механикой, он не отрывался и от практической деятельности. Во время войны он активно участвовал в работе Петроградского военно-промышленного комитета по оказанию помощи фронту. С конца мая 1916 г. он был там заведующим чертежно-калькуляционным подотделом Петроградского городского комитета снабжения армии (Пекоснарма). Эта организация в те годы была связующим звеном между промышленностью и армией и должна была помогать материально-техническому обеспечению фронта. К работе привлекались инженеры очень высокой квалификации. Через Пекоснарм проходили заказы почти на весь ассортимент боевых огневых средств и различного армейского оборудования. Л. В. Ассур пользовался этой организацией для оказания помощи нуждающимся студентам. Многие его ученики работали в чертежной мастерской этой организации над проектированием различных систем армейского имущества. Очень характерный штрих: в 1916 г. под руководством Ассура составлялись проекты походных кухонь и артиллерийских повозок. Все чертежи на кальке составлялись в натуральную величину (иначе генерал, которому была подчинена организация, отказывался подписывать), а поскольку платили за работу в зависимости от формата чертежа, то исполнители не протестовали.

Летом 1917 г. семья Ассура уехала из Петрограда в Воронеж к матери Елены Михайловны. Леонид Владимирович остался один. Во второй половине 1917 г. он упорно работал, заканчивая диссертацию. Жить становилось все труднее. Плохое питание совершенно расстроило его здоровье; все чаще и чаще болела голова, начались боли в области желудка. Сначала он старался не замечать их, потом стало невмоготу, а главное, это мешало работе.

С победой Великой Октябрьской социалистической революции началась новая эра в истории человечества. Власть в России взял в свои руки рабочий класс. Национализация банков и промышленности сразу же подорвала экономическую мощь буржуазии. Тем самым молодое Советское государство овладело командными позициями в народном хозяйстве.

Но вопрос о народном хозяйствовании сразу же вызвал к жизни и следующий важнейший вопрос о кадрах для промышленности и для всего народного хозяйства. Многие специалисты перешли на сторону Советской власти, но были и такие, кто занимался явным или тайным саботажем. Это обстоятельство заставило обратить самое пристальное внимание на высшую техническую школу и заняться ее преобразованием.

Система профессионального образования, унаследованная от царской России, имела много недостатков. Высшие технические школы были сконцентрированы в столицах и в нескольких городах России, наибольшее их число приходилось на Петроград, по социальному составу студенчество представляло лишь обеспеченное меньшинство населения.

2 августа 1918 г. В. И. Ленин подписал декрет, предоставлявший всем трудящимся право поступления в любые высшие учебные заведения независимо от предварительного образовательного ценза. Мероприятие это было вынужденным: оно было вызвано необходимостью создать в высшей школе пролетарскую прослойку. В феврале 1919 г. в Московском коммерческом институте по инициативе группы студентов-коммунистов был открыт рабочий факультет. В течение нескольких лет такие факультеты были открыты во всех учебных заведениях страны.

Но перестройка высшей школы состояла не только в этом. В программе партии, принятой в 1919 г. на VIII съезде РКП(б), перед высшей школой были поставлены следующие задачи: «Открытие широкого доступа в аудитории высшей школы для всех желающих учиться и в первую очередь для рабочих; привлечение к преподавательской деятельности в высшей школе всех, могущих там учить; устранение всех и всяческих искусственных преград между свежими научными силами и кафедрой; материальное обеспечение учащихся с целью дать фактическую возможность пролетариям и крестьянам воспользоваться высшей школой»[3].

Революция в корне изменила отношение к высшей технической школе как к учебно-научному институту. Русская техническая школа, несмотря на свой высокий уровень, все же во многом отставала от запросов техники, что в свою очередь отрицательно влияло на развитие технических наук. В высших технических школах не хватало лабораторий, учебных мастерских, оборудование в подавляющем большинстве случаев было устаревшим. Не хватало преподавателей и обслуживающего персонала. Прогрессивные деятели русской технической школы давно ставили вопрос об усовершенствовании методов преподавания и материально-технического обеспечения, но решение их упиралось в косность властей.

Уже в самые первые дни после победы Октябрьской революции, 30 ноября 1917 г., группой профессоров под руководством и по инициативе А. Ф. Иоффе был поставлен вопрос об организации в составе Политехнического института физико-математического факультета. Это мероприятие показывает, с одной стороны, резко возросшие возможности профессорско-преподавательского коллектива, а с другой,— глубокое понимание начинающегося процесса бурного развития техники и необходимости создания для этого кадров инженеров-исследователей, обладавших глубокой научной подготовкой.

Через год, 27 ноября 1918 г., был завершен план факультета и А. Ф. Иоффе от имени инициативной группы сделал соответствующее представление в Ученый совет института. 1 марта 1919 г. в составе института был открыт такой факультет под названием физико-механического.

Вся эта работа проводилась в очень тяжелых материальных условиях. Гражданская война и иностранная интервенция ухудшили и без того подорванное длительной войной состояние снабжения продовольствием и предметами первой необходимости. Особенно это чувствовалось в Петрограде, дальше других городов отстоявшего

[3] «КПСС в резолюциях и решениях съездов, конференций и пленумов ЦК», ч. I. М., 1954, стр. 420.

от продовольственных районов страны и кроме того находившегося в непосредственной близости к фронту. В связи с этим уже начиная с 1918 г. многие преподаватели институтов, не будучи в состоянии выдержать все усиливавшиеся материальные лишения, оставляли Петроград и уезжали на юг страны, где условия были лучше (несколько улучшилось положение работников высшей школы только после организации Комиссии по улучшению быта ученых).

Во многих институтах Петрограда начала ощущаться нехватка преподавателей, оставшиеся брали на себя нагрузку в нескольких учебных заведениях. Это, с одной стороны, облегчало их материальное положение, а с другой — давало возможность высшим школам продолжать занятия.

Л. В. Ассур в это время начал вести педагогическую работу в Лесном институте. Лесной институт, одно из старейших высших учебных заведений России, возник в 1803 г. в Царском селе как среднее учебное заведение — лесная школа. В 1811 г. лесная школа была переведена в Петербург, а с 1829 г. начала называться Лесным институтом. В 1830 г. Лесной институт был переведен в специально построенное для него помещение в окрестностях Петербурга. В 1848 г. после ряда преобразований Лесной институт получил права высшего учебного заведения.

В конце января 1918 г. Лесной институт объявил конкурс на замещение должности экстраординарного профессора по кафедре прикладной механики и основ математики. Ассур подал заявление и к своему удивлению получил наибольшее число голосов из числа трех лиц, претендовавших на замещение этой вакансии. В том же году Леонид Владимирович ушел из Военно-промышленного комитета.

С осени 1918 г. он приступил к чтению лекций в Лесном институте, одновременно продолжая занятия в Политехническом. Год был тяжелый. Занимались в плохо отапливаемых аудиториях с небольшими группами студентов. Многие студенты разъехались по домам, часть студентов и преподавателей ушли на фронты гражданской войны.

Работая в двух институтах, Ассур имел очень большую педагогическую нагрузку. Нередко приходилось в Лесной институт ходить из дому пешком, около 3 верст, что было тяжело для истощенного организма.

Несмотря на большие трудности, Л. В. Ассур не бросает научной работы. Приблизительно в это время он закончил и выпустил в свет последнюю из опубликованных им частей своей основной работы «Дополнение к первой главе второй части». Исследование свое он продолжал и дальше, но к несчастью бумаги его пропали и в настоящее время нет даже возможности установить хотя бы приблизительно их тематику.

Весной 1919 г. ректор Лесного института сообщил Леониду Владимировичу, что в связи с перестройкой учебных планов цикл предметов, относившихся к занимаемой им в то время кафедре, будет разделен между двумя кафедрами, из которых к одной отойдут все курсы, относящиеся к прикладной механике и машиноведению, а вторая займется исключительно математическими дисциплинами.

8 июня 1919 г. Ассур ответил ректору Лесного института письмом, в котором между прочим говорилось: «Считая, что одна из кафедр будет просто кафедрой математики прошу объявить конкурс на эту кафедру по нижеследующим соображениям: ученая степень, которой я обладаю, есть степень адъюнкта «прикладной механики». Здесь я специализировался в области кинематики и динамики машин; в области кинематики машин лежит и центр тяжести моих научных трудов. В области математики я не имею законченного научного стажа, который считал бы для себя необходимым, чтобы занимать специальную кафедру математики.

Хотя анализом в широком значении слова мне придется овладеть для выполнения ряда намеченных научных работ в области своей специальности, но в данный момент есть области математики, в которых у меня нет надлежащей эрудиции.

Между тем деятельность профессора математики должна, по моему мнению, обнимать не только обучение студентов, но и деятельную помощь членам коллегии в приложениях, для чего требуется не случайная, а весьма законченная эрудиция. Что же касается кафедры «Прикладной механики и машиноведения», то предметы ее почти всецело лежат в области моей научной подготовки. В цикле предметов этой кафедры меня затрудняет несколько предмет «машиноведение» с точки зрения организации его преподавания по двум причинам:

1) я себе не совсем ясно представляю в данный момент потребности института в этом направлении и специфический характер, который ему надлежит придать, тем более, что специальные машины, как будто, представлены другими кафедрами. В условиях мирного времени недочет этот легко было бы пополнить изучением дела в местах разработки, что теперь ввиду затруднительных разъездов и питания сильно осложнено;

2) хозяйственно-экономическая точка зрения на применение машин не составляет предмета моего научного интереса, и нужно будет некоторое усилие с моей стороны, чтобы ею заняться, в особенности в то время, когда все старые основания поколеблены хозяйственной разрухой, а новые еще не сложились.

Заключение: учитывая все вышеприведенные соображения, я все же склоняюсь к тому, чтобы сохранить за собой кафедру прикладной механики и машиноведения, но никоим образом не считаю Совет и его Комиссию связанными данным мне обещанием права выбора. Прошу лишь учесть приведенные мною соображения наравне с возможными другими».

В этом письме полностью отразились свойственные Леониду Владимировичу высокое чувство ответственности и честность ученого, которые он пронес через всю свою жизнь.

Приблизительно одновременно с написанием приведенного документа Леонид Владимирович обратился с ходатайством о предоставлении ему научной командировки в Москву и Воронеж для ознакомления с постановкой в местных сельскохозяйственных институтах преподавания прикладной механики и математики. Одновременно он просил такую же командировку и в Политехническом институте.

Командировка была разрешена на вакационное время, и в середине июня 1919 г. Леонид Владимирович выехал в Воронеж, где жила его семья, с которой он не виделся уже два года.

Однако приехать в Воронеж оказалось делом более легким, чем возвратиться обратно. 1919 год для молодой Советской республики был трудным. Страна была опоясана кольцом воинских соединений иностранных интервентов и отечественной контрреволюции. В середине июня шли бои за Петроград, с юга наступал Деникин. Тихий провинциальный Воронеж стал фронтовым городом, железнодорожное сообщение было перерезано во многих местах. В Воронеже хозяйничали белогвардейцы и лишь 24 октября 1919 г. город был освобожден конным корпусом Буденного.

Высшее образование в Воронеже делало в то время свои первые шаги. В 1918 г. решением Советского правительства на базе эвакуированного Юрьевского (Тартуского) университета был создан Воронежский университет. В процессе становления находился также Воронежский сельскохозяйственный институт.

В 1919 г. часть преподавателей университета вернулась в Тарту, часть разъехалась по университетским городам России и Украины и нехватка преподавателей в Воронеже стала весьма ощутительной. Поэтому уже вскоре по приезде в Воронеж Леонид Владимирович смог получить место профессора в обоих воронежских высших учебных заведениях.

Но Ассур чересчур тесно был связан с Петроградом, чтобы навсегда порвать с ним. Несмотря на тяжелое состояние здоровья (у него была обнаружена язва желудка), он написал в Петроград ректору Лесного института письмо, где сообщал, что оказался в очень затруднительном положении в связи со своей болезнью и с тяжелым материальным положением семьи.

В январе 1920 г. Леонида Владимировича неожиданно вызвали в Губернский отдел народного образования и сообщили, что отдел получил из Москвы из Наркомпроса распоряжение об оказании содействия Л. В. Ассуру в отношении устройства его дел и возвращения в Петроград. При этом ему были вручены 3 тыс. рублей. Решение Наркомпроса явилось результатом энергичных шагов, предпринятых ректором Лесного института и товарищами Ассура по работе. Леонид Владимирович тронут был таким вниманием и заботой, проявленной по отношению к нему и его семье, и начал готовиться к отъезду.

Но здоровье не улучшалось, и он лег в клинику, где ему предложили оперироваться по поводу язвы двенадцатиперстной кишки. 19 мая 1920 г. была сделана операция, но состояние больного все время ухудшалось.

Врачи решились на повторную операцию, которую Леонид Владимирович уже не пережил: он умер не приходя в сознание.

После смерти мужа Елена Михайловна поступила на работу. Она воспитала детей, пережив мужа на 40 лет. Сын Леонида Владимировича окончил геодезический факультет Воронежского сельскохозяйственного института, работал в геодезических экспедициях. В настоящее время — преподаватель Московского геодезического техникума. Дочь окончила физико-механический факультет Ленинградского политехнического института. Сейчас кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта им. академика Образцова.

Бумаги и рукописи Леонида Владимировича, оставшиеся в Петербурге, до сих пор не найдены.

VIII

Развитие идей Ассура

Леонид Владимирович Ассур не завершил ни одного из своих главных трудов. Исследования были задуманы им очень широко и он рассчитывал выполнить их, однако работа была прервана безвременной смертью.

Первый существенный вклад в теорию шарнирных механизмов, сделанный после смерти Ассура, принадлежит В. Виттенбауэру. В «Графической динамике» целая глава посвящена вопросам структуры механизмов и принужденности движения кинематической цепи, где Виттенбауэр определяет степень ее подвижности. Приведем ход его рассуждений. Так как жесткое тело в плоскости имеет три степени свободы, то замкнутая кинематическая цепь принужденного движения имеет $3 + 1 = 4$ степени свободы. Если мы зададимся в плоскости какой-либо фермой, то при удалении из нее f внутренних звеньев число степеней свободы x составит $x = 3 + f$. Пусть далее p — число жестких полигонов (многоугольников), не перекрывающих друг друга. Если обозначить через s число сторон, то $s = 2p + 1$ или $s - 2p = 1$. Следовательно, $f = s - 2p - 1$, или $x = s - 2p + 2$, что для принужденного движения при $x = 4$ и $f = 1$ переходит в $s = 2\,(p + 1)$.

В самом общем случае кинематическая цепь состоит из звеньев, в том числе пересекающихся, и жестких треугольников. Пересекающиеся звенья следует удалить. Обозначив буквой n число всех остающихся членов, k — число удаленных членов, π — число изменяющихся полигонов, очевидно, будем иметь следующее равенство:

$$x + k = n - 2\pi + 2.$$

Если цепь имеет в своем составе лишь поступательные пары, то, обозначив через π_s число изменяющихся полигонов, получим

$$x = n - \pi_s + 2,$$

или, положив $x = 4$ для принужденного движения, получим

$$n = \pi_s + 2.$$

Для кинематических цепей, в состав которых входят и вращательные и поступательные пары, В. Виттенбауэр совместно с К. Кризо предложил следующий критерий принужденности движения:

$$n - k = 2\pi + \pi_s + 2.$$

Виттенбауэр не был знаком с работами Ассура и в своих исследованиях структуры кинематических цепей основывался, по-видимому, лишь на работах Чебышева, Грюбера, Мора и Сомова. Поэтому несмотря на то, что он близко подошел к пониманию строения механизма как системы наращиваемых элементарных групп, сделать окончательного вывода он не смог. В результате его графическая динамика с ее богатством идей представляет лишь совокупность задач, не объединенных общей идеей.

В нашей стране в 20-х годах помнили об Ассуре, иногда упоминали его главное исследование, но читали мало, если читали вообще. Труды Ассура, напечатанные в журнале Политехнического института, выходившем незначительным тиражом и бывшем лишь в ограниченном числе библиотек, были мало доступны. В 1926 г. В. Прегер в работе «Кинематика механизмов как орудие динамики механизмов» опубликовал систему классификации механизмов мюнхенского профессора Вильгельма Линена и применил ее для решения некоторых задач механики механизмов. Вслед за Прегером этой системой начали пользоваться некоторые немецкие и советские ученые (например, А. О. Рейн, С. В. Вяхирев), хотя в распоряжении последних была значительно более разработанная и более общая классификация Ассура.

В 1923 г. профессор Томского технологического института А. П. Малышев опубликовал две работы, содержавшие некоторый задел в теории структуры механизмов,— «Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры» и «Прикладная механика» (выпуск 1. Структура и синтез механизмов). Малышев распространил структурный анализ на пространственные механизмы. Однако роль групп в построении механизмов он не исследует. Подобно П. О. Сомову он разрабатывает свой анализ на выяснении роли условий связи в механизмах.

В пространственных механизмах возможностей для образования кинематических пар значительно больше, чем в плоских механизмах, и они могут налагать на относительное движение звеньев от одного до пяти условий связи, что убедительно показал еще Х. И. Гохман. Если обозначить через m_5 число пар пятого класса, через m_4 — число пар четвертого класса и т. д., после незначительных преобразований придем к уравнению

$$6(n-1) = 5m_5 + 4m_4 + 3m_3 + 2m_2 + m_1 + 1,$$

где n — число всех звеньев пространственного механизма.

Это уравнение в несколько измененном виде называется теперь формулой Сомова — Малышева.

Ассур был «открыт» советскими учеными-машиноведами лишь в 30-х годах, и с этого времени начинается вторая жизнь его замечательного исследования.

В эти годы произошел резкий поворот, позволяющий говорить о зарождении нового оригинального направления в науке о механизмах. Это совпадает со значительно возросшими требованиями к теории со стороны практического машиностроения. От периода только копирования заграничных образцов советское машиностроение переходит к созданию новых типов машин и механизмов. Очевидно, поставленные практическим машиностроением задачи не могли быть удовлетворены тем арсеналом методов, которыми обладала теория механизмов и машин к 30-м годам нашего столетия.

В качестве примера отсутствия научного метода можно указать на случай, имевший место в указанный период в области сельскохозяйственного машиностроения. Проектируя механизм сенного пресса, конструкторы встретились с необходимостью запроектировать рычажно-эпициклический механизм. Их обращение к ряду ученых специалистов с просьбой указать метод кинематического и кинетостатического анализа этого типа механизма долгое время не было удовлетворено из-за отсутствия такового. Контрукторам могли предложить только приближенный метод расчета. Н. И. Мерцалов, заинтересовавшись этим механизмом, предложил весьма остроумный и точный способ решения, основанный на методе обращения движения. Но полученное решение было только частным, оно не указывало путей для общего метода решения подобных задач [1].

Таким образом, в 30-х годах поиски общих методов решения задач кинематики механизмов опять получили существенное значение, найдя себе поддержку в нетерпящих отлагательства задачах практического машиностроения. Эти поиски и обратили внимание советских ученых на сочинение Ассура.

В начале 30-х годов ссылки на работу Ассура начинают попадать в учебную литературу по кинематике механизмов. Так, в учебнике, изданном А. П. Малышевым в 1933 г., автор, рассуждая о работах Рело и об их применимости к новым видам механизмов, говорит: «Нужны более общие пути исследования механизмов, и в этом направлении должны быть отмечены труды наших русских ученых. В сочинениях П. О. Сомова: «О степенях свободы кинематической цепи», 1887; «Кинематика подобно изменяемой системы», 1900 и др.; в трудах Л. Ассура: «Исследование плоских стержневых механизмов с точки зрения их структуры и классификации», 1914 и др. определенно намечаются новые пути к изучению механизмов» [2]. Ссылки на работу Ассура имеются и в других местах книги.

Ссылки на работу Ассура имеются также в «Прикладной механике» А. П. Иванова и в наиболее распространенном учебнике первой половины 30-х годов — «Кинематике механизмов» Л. Б. Левенсона. Последний указывает на классификацию Ассура как на строго научную, но носящую чересчур отвлеченный характер и неудобную поэтому для практического использования. И действительно, ни один из авторов классификацией Ассура не пользуется.

Впервые в советской технической литературе вопросом исследования сложных кинематических цепей за-

[1] *И. И. Артоболевский.* Русская школа по теории машин и механизмов. Из доклада на Общем собрании отделения технических наук АН СССР от 17/XI 1942 г.— Известия АН СССР, ОТН, 1943, № 7, стр. 8—9.

[2] *А. П. Малышев.* Кинематика механизмов. М., Гизлегпром, 1933, стр. 8.

нялся И. М. Рабинович в своей интересной работе, посвященной применению кинематического метода в графостатике [3]. Высказанные им в этой книге мысли частично повторяют идеи Ассура.

Мы видели уже, что Ассур неоднократно указывает на родство задач кинематики и кинетостатики и на принципиальную применимость теории кинематических цепей, разработанную им, для решения задач статики ферм. Подобную же мысль проводит в своем исследовании и И. М. Рабинович. Однако характерным отличием работы последнего является ее практическая направленность — это то, что у Ассура отсутствует.

Первым научным исследованием в области кинематики механизмов, в котором были использованы методы Ассура и которые явились, таким образом, средством ознакомления специалистов с его классификационными принципами, была работа Н. Г. Бруевича, посвященная разработанному им методу решения кинематических задач при помощи векторных уравнений [4]. Исследование Н. Г. Бруевича, показавшее огромные преимущества теории кинематических цепей, развитой Ассуром, привлекло внимание ученых. В ближайшие два-три года методы Ассура были в достаточной степени разработаны и приспособлены для преподавания в высшей школе, так что уже в 1937 г. в программы курса теории механизмов высших технических учебных заведений включается структурная классификация плоских механизмов по Ассуру. Кинематический и кинетостатический анализ механизмов строятся в соответствии с этой классификацией.

В 1937 г. доцент Московского авиационного института С. Н. Кожевников прочел в Московском институте повышения квалификации инженеров курс по структурному, кинематическому и кинетостатическому анализу плоских механизмов, который несколько позже был издан на стеклографе. Кожевников указывает, что «отличие данного конспекта от целого ряда книг по теории механизмов, излагающих вопросы кинематического анализа, заключается в том, что здесь излагаются общие методы кине-

[3] *И. М. Рабинович.* Кинематический метод в строительной механике. М., 1928.

[4] *Н. Г. Бруевич.* Применение векторных уравнений в кинематике плоских механизмов.— Труды ВВА им. Жуковского за 1934 г. М., 1935, стр. 52—98.

матики, применяемые к частным механизмам, в то время как в большинстве книг акцентируются частные механизмы и игнорируются общие методы» [5]. При составлении этого пособия он использовал работы преподавателей кафедры теории механизмов Московского авиационного института, а также свои исследования. Между прочим, С. Н. Кожевников отводит значительное место не только расчету механизмов, образованных наслоением двухповодковых групп, но рассматривает также и механизмы, относящиеся к третьему порядку первого класса по квалификации Ассура.

Если в деле развития теории механизмов в дореволюционные годы особенно большую роль сыграли ученые, связанные в своей деятельности с Московским университетом, Московским высшим техническим училищем и Петербургским политехническим институтом, то в 20—30-х годах развитие теории механизмов и машин было делом ученых, работавших в Тимирязевской сельскохозяйственной академии, в Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского и в Московском авиационном институте, где были заложены основы советской научной школы механики машин. Мы отметили начало работ над внедрением методов Ассура в развитие кинематики механизмов. В те же годы начались и исследования в области кинетостатики. В 1935 г. были опубликованы работы Г. Г. Баранова и Н. Г. Бруевича, посвященные статике механизмов [6]. В частности, в это время Н. Г. Бруевичем был разработан изящный метод кинестатического исследования механизмов, вошедший затем в практику советской высшей технической школы и основанный на принципах классификации Ассура. В 1937 г. В. В. Добровольский выполнил и опубликовал в Трудах ВВА исследование плоских механизмов с поступательными парами, развив одну из идей, намеченных Ассуром.

Исследования по систематизации, углублению и логическому продолжению идей Ассура были выполнены И. И. Артоболевским, пришедшим к теории плоских механизмов от пространственных механизмов, разработ-

[5] *С. Н. Кожевников.* Структурный и кинематический анализ механизмов. Изд. МАИ. М., 1938, стр. 68—83.

[6] *Г. Г. Баранов.* Статика плоских кинематических цепей.— Вестник инженера и техника, 1935, № 2; *Н. Г. Бруевич.* Кинетостатика плоских механизмов.— Труды ВВА, 1935, № 10.

ке теории которых посвящены его основные работы приблизительно до середины 30-х годов. Работы эти систематизированы в монографии, опубликованной в 1937 г. [7], в которой изложены основы учения о кинематических парах в пространстве и учение о структуре и кинематике пространственных механизмов с низшими парами. И. И. Артоболевский классифицирует пространственные механизмы, исходя из количества возможных для механизма пучков лучей, характеризующих его оси вращения. В самом общем случае пространственный механизм может иметь семь пучков лучей, проходящих через семь центров: соответствующие механизмы он относит к седьмому классу. В таком случае механизмы, оси которых образуют один пучок лучей, проходящих через одну общую точку, относятся к первому классу. Следовательно, первый класс составляет очень распространенная группа сферических механизмов. Исследуя последние и составляя формулу однократной изменяемости для таких механизмов, И. И. Артоболевский отмечает полную тождественность между ними и плоскими механизмами [8] и ищет аналогию также в структуре обеих групп механизмов.

Здесь мы впервые встречаемся с попыткой использовать идеи Ассура в теории пространственных механизмов [9]. По аналогии с группами Ассура, отнесенными им к первому классу, И. И. Артоболевский развивает теорию трехосных, шестиосных, девятиосных и прочих групп в пространстве. Далее он составляет из групп различные кинематические цепи принужденного движения сферических механизмов. Он называет простейший сферический механизм, состоящий из одного подвижного и одного неподвижного звеньев, механизмом первого класса первого порядка, а механизмы, образованные путем присоединения трехосных групп,— механизмами первого класса второго порядка. При этом он делает замечание о возможности обратного влияния классификации пространственных механизмов на классификацию плоских [10].

[7] *И. И. Артоболевский*. Теория пространственных механизмов, ч. 1. М.— Л., ОНТИ, 1937.

[8] См. *И. И. Артоболевский*. Направляющие сферические механизмы. М., 1926.

[9] *И. И. Артоболевский*. Теория пространственных механизмов, стр. 129.

[10] Там же, стр. 130.

Далее определяется структура высших порядков первого класса. Механизмы третьего порядка образуются путем присоединения шестиосной группы, механизмы четвертого порядка — с помощью присоединения девятиосной группы и т. д. Группы, наращиваемые на сферический механизм, имеют только вращательные пары, центры групп должны совпадать с центром основного механизма и присоединение следует производить к различным звеньям последнего. При этом используется методика Ассура: образование всех вышеуказанных сферических групп производится путем развития поводков. Очевидно, что, так же как и в плоских механизмах, можно получать группы, имеющие замкнутые контуры, или же группы, в состав которых входят звенья без поводков. В плоских механизмах эти группы образуют механизмы высших классов.

Таким образом, здесь мы встречаемся с мыслью о том, что классификация плоских механизмов должна войти в более общую классификацию пространственных механизмов в качестве одного частного случая. Эта плодотворная идея была впоследствии положена в основу исследований в области теории механизмов и машин, предпринятых советской школой.

В начале 1939 г. И. И. Артоболевский опубликовал монографию, посвященную исследованию плоских механизмов [11]. В ней дано дальнейшее развитие теории Ассура. Так, рассматривая цепи четвертого класса, И. И. Артоболевский систематизирует их по числу входящих в группу поводков. При этом он относит к четвертому классу только группы с двумя замкнутыми контурами. Соответственно он называет механизмами пятого, шестого, седьмого и т. д. классов механизмы, в состав которых входят группы с тремя, четырьмя и т. д. замкнутыми контурами. Кроме того, он включает в систему классификации механизмы с одними поступательными парами и механизмы с высшими парами. Такое обобщение позволило объединить в классификацию Ассура практически любые плоские механизмы.

В этой работе идеи Ассура получили свое дальнейшее развитие. Кроме учения о структуре, здесь изучен

[11] *И. И. Артоболевский*. Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. М.— Л., ОНТИ, 1939.

весьма важный для дальнейшего развития теории вопрос об определении положений групп, отсутствующий у Ассура. При исследовании кинематики механизмов разобраны не только вопросы, связанные с определением скоростей, но и вопросы определения ускорений. Графические методы Ассура, в основном метод особых точек, комбинируются с аналитическим методом векторных уравнений, над которым советские ученые работали с начала 30-х годов. В результате был выработан графоаналитический метод исследования; при этом отпали трудности бесконечных графических построений Ассура и значительно повысилась точность расчетов. Мы уже упоминали о распространении идей Ассура на механизмы с поступательными и высшими парами. В равной мере это относится и к кинематическому исследованию механизмов, в результате чего была выработана универсальная методика, пригодная для исследования любых плоских механизмов, за исключением отдельных специальных случаев.

Кинетостатика механизмов также получила развитие по сравнению с работой Ассура. Были исследованы следующие основные задачи кинетостатики: задача об определении динамических давлений в парах; задача об определении усилий, действующих на различные звенья механизма, и задача об определении давлений на раму и фундамент. При этом в качестве исходного принципа была принята теорема Даламбера: «Если ко всем внешним реально действующим на точки звена механизма силам условно приложить фиктивные силы инерции, то под действием всех этих сил звено может рассматриваться как находящееся в равновесии». Отсюда следует, что первым элементом кинетостатического расчета является определение сил инерции для всех звеньев исследуемого механизма и для определенного положения (для заданных условий).

Кинетостатическое исследование здесь доведено до цепей третьего класса высших порядков. Следует отметить, что в монографии И. И. Артоболевского подытожены не только труды советских ученых, но и исследования зарубежных ученых, в первую очередь Виттенбауэра. Этой книгой завершался первый этап работы над развитием наследия Ассура — его методы были изучены и распространены, в результате чего исключительно трудная для чтения работа Ассура получила широкий выход в свет. Эта монография была как бы подробным комментарием к диссертации Ассура, в значительной степени повысившем ее доступность.

Следующим этапом работы над наследием Ассура было развитие его идей и методов в новых направлениях. Почти одновременно с выходом в свет исследования И. И. Артоболевского в Трудах Московского станкоинструментального института была опубликована статья В. В. Добровольского «Новый метод исследования механизмов», в которой автор дает схему новой классификации механизмов, охватывающей все возможные механизмы, плоские и пространственные. В. В. Добровольский делит все механизмы на пять родов в зависимости от количества общих условий связи, наложенных на систему. Им выведена структурная формула, являющаяся в некоторой степени обобщением формулы Чебышева: если обозначить m — число степеней свободы, n — число звеньев, обладающих подвижностью, n — число степеней свободы механизма, k — род пар в составе механизма, p_n — соответствующее число пар, тогда

$$w = mn - \sum_{k=1}^{k=m-1} (m-k)\, p_k.$$

Эти идеи впоследствии были развиты В. В. Добровольским.

В 1939 г. была опубликована совместная работа И. И. Артоболевского и В. В. Добровольского «Структура и классификация механизмов». Добровольскому принадлежал там первый очерк «Основные принципы рациональной классификации механизмов». После обстоятельного исследования истории вопроса автор излагает принципы классификации Ассура, а затем переходит к основаниям собственной классификации, впоследствии развитой им [12]. Принцип построения классификации тот же, что и у Ассура — единство методов исследования, — но Добровольский распространил его на механизмы всех пяти родов. Двухзвенные механизмы как существующие самостоятельно, так и входящие в состав каждого меха-

[12] См. Основы построения единой системы механизмов. Труды МСИИ, 1940, № 9; Система механизмов. Машгиз, 1943; Теория механизмов, изд. 1946, 1951, 1953 гг.

низма и, следовательно, играющие в классификации ту же роль, что и кривошипы в классификации Ассура, Добровольский относит к особой, нулевой группе.

При образовании нового механизма на двухзвенный механизм наслаиваются последовательные группы звеньев, которые Добровольский называет цепями наслоения. Эти цепи называются ассуровыми в том случае, если они при своем присоединении к первоначальному механизму не изменяют его первоначального числа степеней свободы. Таким образом, Добровольский распространил принцип построения цепей, выработанный Ассуром для плоских механизмов, на любые пространственные механизмы. Остальные цепи, которые, будучи присоединены к основному механизму, изменяют число степеней свободы, Добровольский называет неассуровыми и делит на порядки положительные и отрицательные в зависимости от того, увеличивают они или уменьшают число степеней свободы и на сколько единиц. С этой точки зрения ассуровы цепи могут быть названы цепями нулевого порядка.

Автор классификации указывает, однако, что основными составляющими механизмов являются ассуровы группы ввиду их кинематической и статической определимости. Поэтому кинематика и кинетостатика механизмов в сущности являются исследованиями ассуровых цепей. «Неассуровы цепи,— утверждает Добровольский,— бывает также целесообразно вводить при исследовании механизмов; они уже фактически и вводятся в некоторых исследованиях. Преимущественное значение имеют цепи отрицательных порядков, потому что они могут соединять несколько механизмов с независимыми движениями в один и, таким образом, служить средством передачи движения между ними»[13].

Цепи каждого рода подразделяются на виды. Так, плоские кинематические цепи составляют один из видов второго рода по классификации Добровольского. Сферические цепи составляют другой вид того же рода. Новые механизмы могут образовываться, по Добровольскому, путем наслоения цепей, относящихся не только к одному и тому же роду и виду, но и к разным классификационным подразделениям — в этом случае они будут называться комбинированными. Однако это не влияет на ис-

[13] *В. В. Добровольский.* Теория механизмов. Машгиз, 1953, стр. 64.

следование соответствующего механизма, так как оно слагается из исследования отдельных цепей, а последнее ведется по особым свойственным им методам.

Применяя далее методику Ассура, Добровольский находит и изучает группы каждого вида в порядке нарастания их сложности. В частности, при исследовании плоских механизмов, он, кроме ассуровского метода развития поводка, пользуется также разработанным им самим методом «разложения шарнира», принцип которого основан на методе особых точек, который Ассур применяет при кинематическом исследовании механизмов, начиная с третьего порядка первого класса.

Мы уже упоминали о совместной работе В. В. Добровольского и И. И. Артоболевского по классификации механизмов. Развивая те идеи, которые были уже высказаны в монографиях по пространственным и плоским механизмам, И. И. Артоболевский поставил в качестве цели исследования опыт создания единой теории структуры кинематических цепей. «В учении об элементах, из которых составляются механизмы,— говорит он,— почти не делалось попыток установить связь и преемственность методов структурного анализа с методами кинематического и динамического анализа. Отсутствие подобной преемственности методов нам кажется существенным недостатком. Структурный анализ, кроме самостоятельных целей, имеет задачей дать исчерпывающий ответ на вопрос о наиболее рациональных методах кинематического и динамического анализа механизмов. Если подходить к вопросам структурного анализа с этой точки зрения, то необходимо пересмотреть и уточнить некоторые основные понятия и определения, относящиеся к теории структуры кинематических цепей» [14]. Поэтому свое исследование И. И. Артоболевский начинает с вопроса о структуре и классификации кинематических пар, затем изучает кинематические цепи и только после этого переходит к вопросу о структуре и классификации механизмов. При этом, пользуясь в качестве исходной точки трудами Ассура, И. И. Артоболевский в то же время вводит в исследование классические идеи Чебышева, Ассура, Гохмана и опыт, приобретенный уже советскими

[14] *В. В. Добровольский* и *И. И. Артоболевский*. Структура и классификация механизмов. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1939, стр. 49.

учеными-машиноведами, в том числе и свой. В результате этого им была предложена система классификации механизмов, которая нашла признание не только у советских, но и у многих иностранных ученых.

Но следует еще раз подчеркнуть, что центральными идеями новой классификации все же остались идеи Ассура.

Развивая теорию кинематических пар и исходя из количества связей, накладываемых на относительное движение звеньев, Артоболевский различает кинематические пары от первого до пятого класса. При этом любая простая пара может быть заменена кинематической цепью, состоящей из ряда звеньев, входящих только в пары пятого класса. На этом основании можно свести исследование структуры цепей, образованных простыми парами, к исследованию цепей с парами только пятого класса. Замечание это вводит единство в исследование механизмов и теоретически обосновывает возможность исследования структуры механизмов в единообразных схемах. Несомненно, замечание это отображает мысль, идентичную той, которая была высказана Сильвестром и впоследствии Ассуром.

Переходя к исследованию структуры кинематических цепей, Артоболевский в зависимости от общих условий связи, накладываемых на цепь, и исходя из условия Сомова — Малышева, различает пять семейств. Это подразделение и обоснование его совершенно аналогично тому, которое было предложено В. В. Добровольским, с тем, однако, исключением, что вместо родов, определяемых числом степеней свободы, структурные подразделения у Артоболевского носят название семейств. Структурная формула механизма, не имеющего никаких общих связей, такова:

$$w = 6n - 5p_5 - \ldots - p_1.$$

Соответствующее семейство называется нулевым; если заменить все пары парами пятого класса (накладывающими пять связей), то формула принимает вид:

$$w = 6n - 5p_5.$$

Итак, механизмы, образуемые при помощи наслоения кинематических цепей, подразделяются на семейства по признаку наиболее сложной из цепей, входящих в их состав. Каждое семейство имеет свои характерные методы анализа механизмов и методы, разработанные для какого-либо одного подразделения семейства. Они могут быть по аналогии распространены на иные подразделения того же семейства. Мы уже видели, что ранее И. И. Артоболевский распространил методы исследования плоских механизмов на сферические механизмы, относящиеся к тому же семейству.

В качестве примера И. И. Артоболевский анализирует особенности структуры кинематических цепей открытого типа. Здесь дается также точное определение одному из основных понятий теории структуры — группе. Группой называется такая кинематическая цепь, которая после ее присоединения крайними свободными элементами пар к стойке будет обладать нулевой степенью подвижности и которая не может быть расчленена на самостоятельные кинематические цепи нулевой степени подвижности. Напомним, что Ассур не различает понятий группы и цепи, одинаково пользуясь ими обоими.

По приведении всех пар к парам пятого класса из формулы Сомова — Малышева для групп третьего семейства следует

$$3n - 2p_5 = 0,$$

откуда $n = \frac{2}{3} p_5$ и, полагая $p_5 = 3, 6, 9\ldots$, получим для числа звеньев $n = 2, 4, 6\ldots$, т. е. двухповодковую, трехповодковую и т. д. группы.

Совершенно идентично получаются исходные равенства для групп нулевого семейства $6n - 5p_5 = 0$, первого семейства $5n - 4p_5 = 0$, второго $4n - 3p_5 = 0$, четвертого $2n - p_5 = 0$, откуда непосредственно получаем все параметры исходных групп, наслаиваемых на механизмы.

В качестве ведущей идеи классификации И. И. Артоболевский обосновывает принцип последовательного вырождения цепей путем наложения на них некоторых общих связей. Принцип этот в равной степени распространим и на методы кинематического анализа. В соответствии с этим цепи нулевого семейства исследуются наиболее общими методами, частными случаями которых являются методы анализа механизмов всех прочих семейств.

Механизмы, в состав которых входят замкнутые контуры, классифицируются аналогичными методами.

Впоследствии структурные идеи Ассура были развиты И. И. Артоболевским в ряде работ и введены в учебные программы и учебную литературу [15].

При образовании кинематических групп различных семейств И. И. Артоболевский пользуется единым принципом, названным методом «развития контура». Метод заключается в следующем. Всякая достаточно развитая группа может состоять из одного или нескольких контуров, образующих каждый в отдельности замкнутую кинематическую цепь и несколько незамкнутых цепей, которыми звенья контура могут присоединяться к звеньям первичного механизма. Таким образом, деление всех кинематических цепей на два вида — цепи разомкнутые и цепи с замкнутым контуром,— которое было разработано в предыдущем варианте классификации, снимается и вводится единая классификация групп. Незамкнутые цепи, состоящие из одного лишь звена, называются поводками. Цепи, состоящие из нескольких звеньев, носят название развитых поводков, или ветвей. В качестве основной структурной составляющей группы Артоболевский принимает замкнутый контур. Этот последний может быть жестким или же обеспечивать своим звеньям взаимную подвижность. В самом развитом семействе — нулевом — подвижной контур должен содержать не менее семи пар пятого класса, в первом семействе не менее шести пар того же класса и т. д. Поэтому контур, обладающий пятью или четырьмя парами пятого класса, будет в цепях нулевого и первого семейства жестким, а в цепях третьего и четвертого семейства его звенья будут иметь взаимную подвижность.

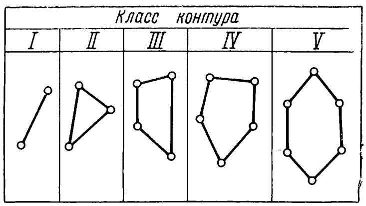


Рис. 22

Вводится следующая классификация контуров (рис. 22): поводок, выступающий как кривошип или ведущее

[15] *И. И. Артоболевский.* Опыт единой классификации механизмов.— Известия АН СССР, ОТН, 1939, № 10; Теория механизмов и машин. М., 1953.

звено, получает условное наименование контура I класса, трехшарнирное звено называется контуром II класса; шарнирному шестизвеннику присваивается название контура V класса.

Класс контура определяет количество его степеней свободы. Поэтому соединение контура с поводками должно образовывать группы по определенному закону, чтобы группы имели предписанное число степеней свободы. Н. Е. Жуковский в своем «Отзыве о сочинении Л. В. Ассура» указал, что основной идеей труда является рассмотрение трехшарнирных звеньев, прикрепляемых к трем точкам механизма тремя поводками. Тогда прикрепление звена концами поводков к неподвижной основе представит собой жесткое соединение [16]. Вот эту идею Ассура и развил И. И. Артоболевский в построении общей классификации механизмов.

Мы видели, что для цепей нулевого семейства с парами только пятого класса группы должны удовлетворять равенству

$$6n - 5p_5 = 0,$$

откуда $p_5 = \frac{6}{5}n$.

Подстановкой значений $n = 5, 10, 15\ldots$ получим для p_5 значения 6, 12, 18... Первая пара этих значений соответствует группе второго класса второго порядка. Присоединяя ее концевыми шарнирами к ведущему звену (группе первого класса) и к стойке, получим семизвенный шарнирный пространственный механизм нулевого семейства второго класса второго порядка. Путем замены звеньев и пар пятого класса парами, обладающими большей подвижностью, получим механизмы с меньшим числом звеньев, относимые к тому же семейству, классу и порядку.

Механизмы второго класса других семейств образуются аналогичным образом. Механизмы третьего класса всех семейств, соответствующие второй паре решений равенств, определяющих группы, уже будут включать в свой состав жесткие контуры.

Рассмотрим более подробно структурную классификацию плоских механизмов, входящих в систему общей

[16] *Л. В. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации, стр. 572 (прилож.).

классификации и получившую в научно-технической литературе название классификации Ассура — Артоболевского.

Согласно изложенному выше, ведущее звено, входящее со стойкой в пару пятого класса, образует механизм первого класса (название условное). Уравнение для групп третьего семейства записывается так: $3n - 2p_5 = 0$, откуда $p_5 = \frac{3}{2}n$ и числам звеньев $n = 2, 4, 6, 8, \ldots.$ соответствуют числа пар пятого класса $p_5 = 3, 6, 9, 12\ldots.$

Первой паре значений n и p_5 удовлетворяет двухповодковая группа. Эта группа называется группой второго класса второго порядка; вместе с тем, все механизмы, образованные наращиванием двухповодковых звеньев, относятся к тому же классу и порядку. Отсюда следует, что второй класс имеет в своем составе лишь один порядок.

Одна или две вращательные пары двухповодковой группы могут быть заменены поступательными парами. При этом различаются пять видов двухповодковой группы: первый, в котором все три пары являются шарнирами; второй и третий, в которых заменено по одной паре (крайняя или средняя); четвертый и пятый, образующиеся путем замены двух пар в каждой группе (двух крайних или одной крайней и одной средней).

Замена всех трех шарниров поступательными парами преобразует группу третьего семейства в механизм четвертого семейства.

Второе сочетание чисел звеньев и пар пятого класса $n = 4$ и $p_5 = 6$ соответствует трехповодковой группе. По числу поводков эта группа называется группой третьего класса третьего порядка, а следовательно, и механизмы, в которых эта группа встречается хотя бы один раз, также относятся к механизмам третьего класса третьего порядка. Развитием поводка в базисное (трехшарнирное) звено мы получим группу третьего класса четвертого порядка.

Как мы видим, классы по классификации Ассура и Ассура — Артоболевского не совпадают. Более того, в третий класс классификации Ассура — Артоболевского попадает не один, а два класса классификации Ассура — первый и второй. В то же время из первого класса классификации Ассура выделены в особый класс механизмы, образованные наслоениями двухповодковых групп. Сделано это для того, чтобы строго выдержать принцип единства методов исследования. Действительно, выше мы видели, что методы исследования двух-и трехповодковых групп не идентичны; в то же время исследование простых и сложных нормальных цепей с базисными звеньями не составляет существенного различия и проводится одними и теми же способами.

Вторая возможная цепь из четырех звеньев и шести пар представляет собой шарнирный четырехзвенник (с одной степенью подвижности), образованный двумя трехшарнирными звеньями, связанными попарно двумя же двухшарнирными звеньями; свободные элементы пар у вершин треугольников служат местами соединения группы с ведущим звеном и со стойкой. Поэтому группа называется группой четвертого класса второго порядка. Механизмы, в состав которых входят замкнутые контуры однократной изменяемости, называются механизмами четвертого класса.

Продолжая ту же операцию, мы можем прийти к механизмам, в составе которых будут контуры двухкратной изменяемости (механизмы пятого класса) и контуры трехкратной изменяемости (механизмы шестого класса). По определению И. И. Артоболевского, класс контура зависит от количества пар, в которые входят образующие его звенья. Класс группы определяется классом наивысшего по классу контура, входящего в ее состав. Порядок же группы определяется количеством элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к основному механизму.

В последующие годы появился ряд работ, развивающих вопросы структуры плоских и пространственных механизмов. Не претендуя на подробный анализ, укажем только, что в основе этих работ лежат идеи Ассура, но даны интересные их интерпретации. Так, Н. И. Колчин [17] вводит дополнительно в структурную формулу Малышева — Сомова член, характеризующий число избыточ-

[17] *Н. И. Колчин.* Опыт построения расширенной структурной классификации механизмов и основанной на ней структурной таблицы механизмов. Труды Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и синтез механизмов. Машгиз, 1960.

ных связей пропорционально числу замкнутых контуров, образующих механизм. Это позволило ему составить расширенную таблицу механизмов — некоторые из них образуют новые разновидности, не укладывающиеся в деление механизмов по семействам. Эти идеи получили свое развитие в работах О. Г. Озола [18] и ряда зарубежных исследователей. Из работ, являющихся непосредственным продолжением идей Ассура, необходимо отметить работы румынского ученого Н. И. Манолеску [19]. Здесь мы делаем ссылку на последнюю его работу, представляющую собой как бы обобщение всех ранее опубликованных им работ.

Теория структуры механизмов развивалась в работах очень многих советских и зарубежных ученых не только на базе идей Ассура. Многие использовали структурные уравнения Грюблера, Кутцбаха, Альта и др. Применяли для исследования структуры и кинематики механизмов теорию графов, матрично — тензорные методы, теорию винтов, методы комплексных переменных, методы проективной геометрии и, наконец, векторное исчисление и т. д. Однако рассмотрение этих работ не входит в задачи данной книги: здесь дается обзор только тех работ, которые в качестве своего научного кредо имеют принципы и идеи, заложенные Ассуром. Авторами сделана попытка обозрения тех основных направлений в развитии теории структуры, анализа и синтеза механизмов, которые, базируясь на идеях Ассура, значительно вышли за рамки его работ и обогатили теорию механизмов новыми методами анализа и синтеза механизмов.

Основным принципом в теории образования механизмов Ассур считал принцип последовательного наслоения кинематических цепей (групп) к основным ведущим звеньям, входящим со стойкой в кинематические пары V класса. Так можно образовать механизмы с одной или несколькими степенями подвижности. В качестве примера

[18] *О. Г. Озол.* О новой структурной формуле механизмов. «Машиностроение», 1963, № 2.

[19] *N. J. Manolescu.* For a United Point of View in the Study of the Structural Analisis of Kinematic Chains and Mechanisms. «Journal of Mechanisms», 1968, vol. 3, N 3.

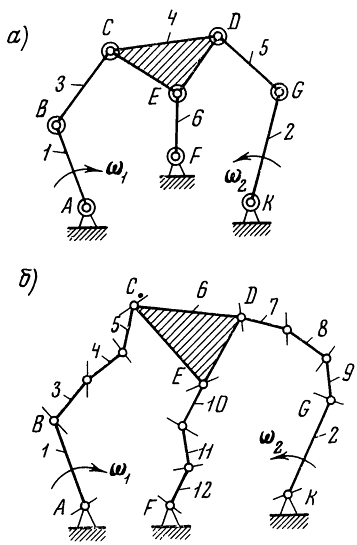


Рис. 23

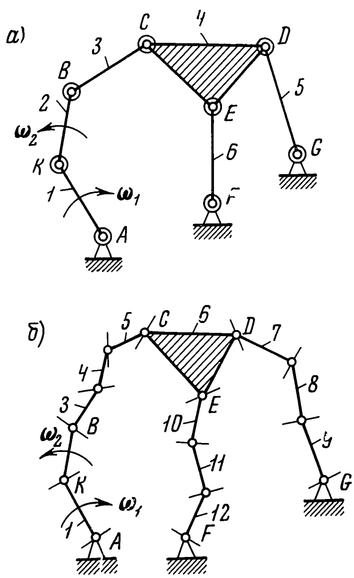


Рис. 24

на рис. 23 показаны два механизма: плоский механизм третьего семейства (рис. 23, *а*) с двумя степенями подвижности, образованный парами V класса, и пространственный механизм нулевого семейства (рис. 23, *б*), образованный парами V класса также с двумя степенями подвижности. На рис. 23, *а* к ведущим звеньям *1* и *2*, или двум механизмам I класса, присоединена группа III класса третьего семейства, состоящая из одного жесткого контура *CDE* и трех поводков *3*, *5* и *6*, входящих в пары V класса *B* и *G* с ведущими звеньями *1* и *2* и пару со стойкой. На рис. *23*, *б* к ведущим звеньям *1* и *2* присоединена пространственная группа, состоящая из одного жесткого контура *CDE* и трех ветвей, состоящих каждая из трех звеньев: *3*, *4*, *5*; *7*, *8*, *9* и *10*, *11*, *12*, входящих в пары V класса *B* и *G* с ведущими звеньями *1* и *2* и пару *F* со стойкой.

На рис. 24 показано образование плоского механизма третьего семейства с двумя степенями подвижности (рис. 24, *а*) присоединением той же группы, но к одному механизму, представляющему собой открытую кинематическую цепь *AKB*, образованную двумя подвижными звеньями *1* и *2* и стойкой, которая обладает двумя степенями подвижности и определенность движения которой определяется заданными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 звеньев *1* и *2*. На рис. 24, *б* показано образование аналогичным образом механизма нулевого семейства с двумя степенями подвижности. Процесс образования механизмов, используя принцип наслоения групп, становится сложнее, если ведущие звенья входят со стойкой или друг с другом в пары не V, а других классов. На рис. 25, *а* звено *1* третьего семейства входит со стойкой в двухподвижную пару IV класса. Если скорость скольжения v звена *1* функционально связана с угловой скоростью ω того же звена, то двухподвижная пара *A* превращается в одноподвижную и тогда, если звено *1* является ведущим, то к нему может быть присоединена любая группа — в нашем примере группа III класса — и мы получаем механизм III класса.

Если скорость v и ω не связаны никакой функциональной зависимостью, то пара *A* будет двухподвижной, и для образования механизма III класса достаточно присоединить кинематическую цепь, состоящую из звеньев *3*, *4* и *5*, т. е. как бы исключить из группы III класса звено *2*, совместив пары *B* и *C*. Цепь, образованная звеньями *3*, *4* и *5* (рис. 25, *б*), будет уже

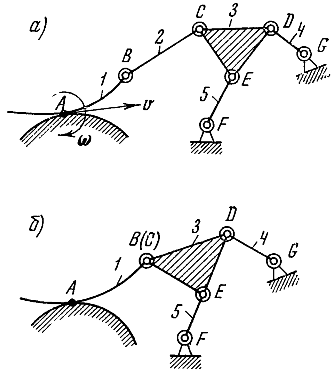


Рис. 25

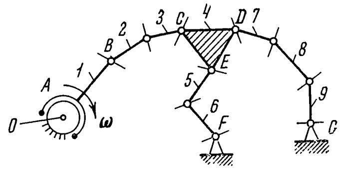


Рис. 26

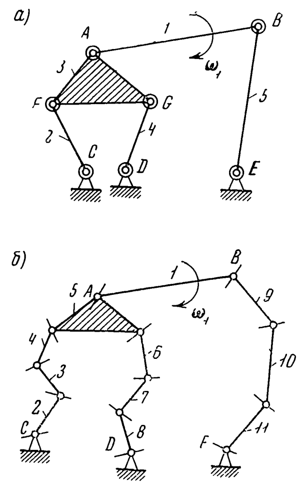


Рис. 27

не группой, т. е. не кинематической цепью со степенью подвижности $w_{\text{гр}} = 0$, а цепью со степенью подвижности $w = -1$.

На рис. 26 показан пространственный механизм нулевого семейства III класса, у которого ведущее звено *1* входит в сферическую пару со стойкой. Если нет никаких функциональных зависимостей между тремя вращениями звена *1* вокруг трех осей, проходящих через точку C, то пара A будет трехподвижной парой и для получения механизма с одной степенью подвижности $w = 1$ необходимо присоединить кинематическую цепь со степенью подвижности $w = -2$. Такая цепь III класса, состоящая из звеньев *2—9*, входящих только в пары V класса, входит звеном *2* в пару B с ведущим звеном *1* и парами F и G со стойкой.

Из рассмотренных примеров следует, что метод образования механизмов наслоением только групп Ассура не является достаточно общим даже в том случае, когда ведущие звенья входят в кинематические пары со стойкой. Принцип образования механизмов последовательным наслоением групп Ассура не применим для тех случаев, когда ведущим является звено, не входящее в кинематическую пару со стойкой. Кстати сказать, такие механизмы довольно широко используются в некоторых конструкциях авиационных шасси, гидроприводах и т. п.

На рис. 27, *а* показан плоский механизм третьего семейства, у которого ведущим является звено *1*, обладающее тремя степенями свободы и не входящее в кинематические пары со стойкой. Для образования механизма с одной степенью подвижности необходимо присоединить к звену *1* две кинематических цепи со степенями подвижности $w = -1$. В качестве таких цепей на рис. 27, *а* показана цепь, состоящая из звеньев *2*, *3* и *4*, входящих в пары V класса, и цепь, состоящая из звена *5*. Первая цепь, имеющая степень подвижности $w = -1$, входит в кинематическую пару A со звеном *1* и кинематические пары C и D со стойкой. Вторая цепь, имеющая также степень подвижности $w = -1$, входит в кинематическую пару B со звеном *1* и в кинематическую пару E со стойкой.

На рис. 27, *б* показан пространственный механизм нулевого семейства, у которого ведущим является звено *1*, обладающее шестью степенями свободы и не входящее в кинематические пары со стойкой. Для образования механизма с одной степенью подвижности необходимо присоединить к звену *1* от двух до пяти кинематических цепей, которые в совокупности наложат пять условий связи на движение звена *1*. Нетрудно видеть, что если присоединить две цепи, то это должны быть цепи со степенями подвижности $w_1 = -1$ и $w_2 = -2$ или $w_1 = -4$ и $w_2 = -1$. На рис. 27, *б* первая цепь, состоящая из звеньев *2—8*, входящих в пары V класса, имеет степень подвижности $w = -3$ и входит в кинематическую пару A со звеном *1* и в кинематические пары C и D со стойкой. Вторая цепь, состоящая из звеньев *9—11*, входящих в пары V класса, имеет степень подвижности $w = -2$ и входит в кинематическую пару B со звеном *1* и кинематическую пару E со стойкой. При присоединении к звену *1* трех цепей их степени подвижности могут быть равными: $w_1 = -3$, $w_2 = -1$ и $w_3 = -1$; или $w_1 = -2$, $w_2 = -2$ и $w_3 = -1$. При присоединении к звену четырех цепей возможны только следующие степени их подвижности: $w_1 = -2$, $w_2 = -1$, $w_3 = -1$, $w_4 = -1$ и, наконец, при присоединении пяти цепей возможны только степени подвижности, равные $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = -1$.

Необходимо отметить, что в тех случаях, когда при присоединении цепей, накладывающих связи на ведущее звено, хотя бы одна концевая пара (C, D или E на рис. 27) входит в пару V класса со стойкой, можно переменой ведущего звена *1* на одно из звеньев (*2*, *4* или *5* на рис. 27, *а* или *2*, *8* или *11* на рис. 27, *б*) свести процесс образования механизма к кинематическому принципу Ассура наслоения групп со степенью подвижности $w = 0$. Этот процесс становится невозможным, если нет концевых пар, входящих со стойкой в пары V класса.

Таким образом, принцип наслоения групп не является универсальным. Поэтому еще в 1939 г. была сделана попытка, сохраняя принцип образования механизмов путем последовательного наслоения групп, показать, что сами группы можно рассматривать как совокупности цепей, имеющих различные степени свободы и степени подвижности в зависимости от того, к какому семейству механизмов относится образуемая группа [20]. Как это было

[20] См. *И. И. Артоболевский*. Опыт структурного анализа механизмов. М., Изд-во АН СССР, 1939; К вопросу о структуре классифи-

рассмотрено на примерах образования механизмов рис. 25, 26 и 27, эти цепи накладывают на ведущие звенья механизма то или иное требуемое число связей. Такой принцип образования механизмов назван принципом наложения связей. Нетрудно показать, что принцип наложения связей может быть использован и при структурном синтезе групп любой сложности. Так как кинематические цепи могут быть только простыми и сложными, открытыми и простыми, и сложными замкнутыми, то целесообразно в основу образования групп использованием принципа наложения связей положить метод развития контура, где под контуром понимается простая замкнутая кинематическая цепь с n звеньями.

Класс группы будем устанавливать по числу звеньев, входящих в замкнутый контур группы. Так как число звеньев контура равняется числу кинематических пар, образующих этот контур, то класс группы также определяется числом пар, входящих в состав замкнутого контура группы. Таким образом, рассматриваемые контуры являются простыми замкнутыми цепями.

Нетрудно проследить закономерность образования групп замкнутыми контурами для всех пяти семейств. Из структурных уравнений для групп следует, что для групп нулевого семейства звенья замкнутого контура имеют относительную подвижность при $n \geqslant 7$, для групп первого семейства — при $n \geqslant 6$, второго — при $n \geqslant 5$, третьего — при $n \geqslant 4$, четвертого — при $n \geqslant 3$. При $n < 7$ в группах нулевого класса звенья замкнутого контура теряют относительную подвижность и контур переходит в ферму, образующую одно жесткое звено.

В группах, в начале для общности, будем предполагать, что все кинематические пары, входящие в состав групп, приведены известными приемами к парам V класса. В группах нулевого семейства замкнутый контур теряет относительную подвижность при $n < 7$, в группах первого семейства при $n < 6$, второго — при $n < 5$, третьего — при $n < 4$, четвертого — при $n < 3$. Тогда замкнутые контуры групп различных семейств могут быть сведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что контуры, по-

кации кинематических цепей с замкнутым контуром.— Известия АН СССР, ОТН, 1939, № 4; Основы единой классификации механизмов.— Известия АН СССР, ОТН, 1939, № 10.

казанные на фиг. 2—16, обладают нулевой степенью подвижности, т. е. для них $w = 0$; контуры на фиг. 17—21 имеют $w = 1$; для контуров на фиг. 22—26 $w = 2$; контуры, показанные на фиг. 27—30, обладают степенью подвижности $w = 3$ и т. д.

Далее из рассмотрения табл. 1 следует, что жесткие замкнутые контуры с $w = 0$ (фиг. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15) могут входить в группы первых четырех семейств (с нулевого до третьего включительно). В четвертом семействе замкнутый жесткий контур образован быть не может, так как при числе звеньев $n = 3$ контур получает относительную подвижность. Весь первый столбец таблицы, относящийся ко II классу, можно рассматривать как предел, к которому стремятся контуры в процессе своего вырождения.

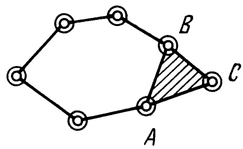


Рис. 28

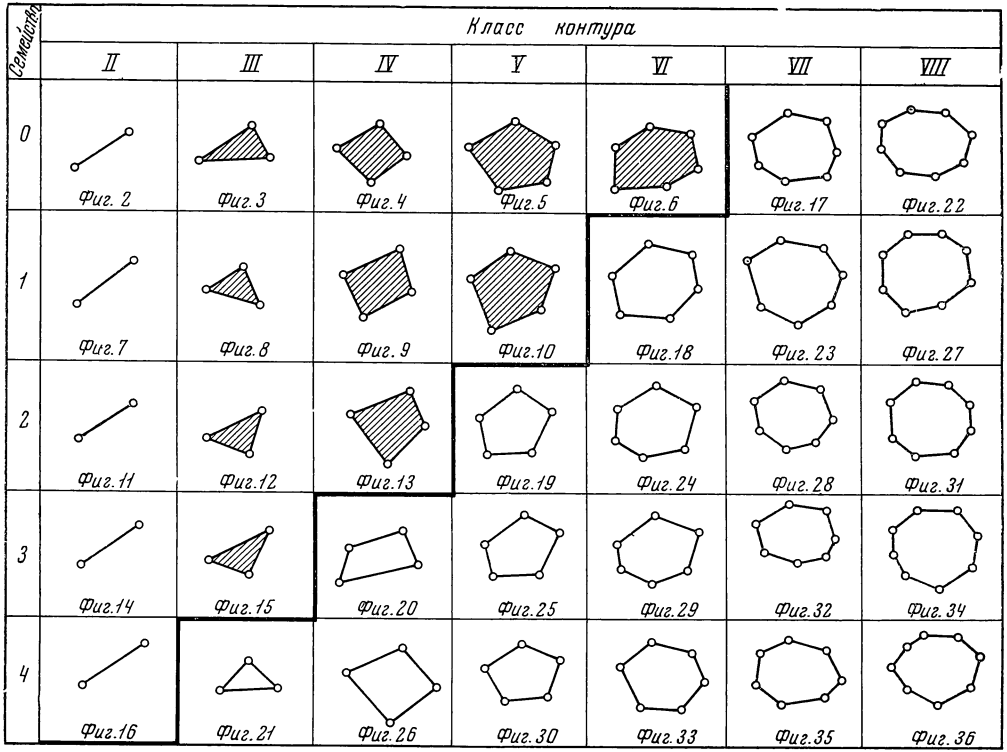
Установив закономерности развития замкнутых контуров, можно перейти к рассмотрению закономерностей в образовании самих групп. Вначале рассмотрим образование групп присоединением к звеньям основного контура простых незамкнутых цепей II класса.

Образование группы из контура можно представить следующим образом. Пусть одно из звеньев, входящих в контур VI класса, третьего семейства (табл. 1, фиг. 24) развивается в базисное звено ABC (рис. 28)[21]. Своим свободным элементом кинематическая пара C может входить в простую открытую цепь I класса, степень подвижности w которой должна быть всегда меньше нуля, т. е. та цепь, которая может быть присоединена к базисному звену ABC, должна иметь $w < 0$.

Это положение следует непосредственно из условия, что группа всегда обладает степенью подвижности, равной нулю, и, следовательно, если к одному из базисных звеньев основного контура была бы присоединена цепь, имеющая степень подвижности, равную или бóльшую нуля, то основная цепь, к которой происходит присоединение,

[21] Чтобы не загружать показанные в таблицах фигуры лишними построениями, все пары V класса вне зависимости от их семейства обозначаются двумя прямыми, соединяемыми кружками.

Таблица 1



Семейство	Класс контура II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	Фиг. 2	Фиг. 3	Фиг. 4	Фиг. 5	Фиг. 6	Фиг. 17	Фиг. 22
1	Фиг. 7	Фиг. 8	Фиг. 9	Фиг. 10	Фиг. 18	Фиг. 23	Фиг. 27
2	Фиг. 11	Фиг. 12	Фиг. 13	Фиг. 19	Фиг. 24	Фиг. 28	Фиг. 31
3	Фиг. 14	Фиг. 15	Фиг. 20	Фиг. 25	Фиг. 29	Фиг. 32	Фиг. 34
4	Фиг. 16	Фиг. 21	Фиг. 26	Фиг. 30	Фиг. 33	Фиг. 35	Фиг. 36

должна иметь соответственно степень подвижности, равную или меньшую нуля. В первом случае основная цепь будет сама представлять отдельную группу, во втором случае основная цепь будет жесткой неизменяемой системой.

Нетрудно теперь показать, что степень подвижности w присоединяемой к базисному звену цепи должна быть больше $k - 6$, где k — номер семейства. В самом деле, степень свободы звена кинематической цепи k-го семейства равна $w_{зв} = 6 - k$.

Присоединяя к базисному звену основного контура какую-либо дополнительную цепь, мы накладываем на движение этого звена дополнительные связи, количество которых не может быть бóльшим или равным числу степеней свободы базисного звена, так как уже при равенстве числа условий связи числу степеней свободы базисного звена оно теряет свою подвижность. Следовательно, степень подвижности w присоединенной цепи должна быть равной

$$w < 6 - k,$$

откуда

$$w > k - 6.$$

Таким образом, степень подвижности w цепи, присоединяемой к базисному звену контура, изменяется в пределах

$$0 > w > k - 6.$$

Тогда очевидно, что в нулевом семействе это будет цепь со степенями подвижности $w = -5$, или $w = -4$, или $w = -3$, или $w = -2$, или $w = -1$; в первом семействе — цепи со степенями подвижности $w = -4$, или $w = -3$, или $w = -2$, или $w = -1$; во втором — $w = -3$, или $w = -2$, или $w = -1$; в третьем — $w = -2$, или $w = -1$; в четвертом — $w = -1$.

Цепи, удовлетворяющие указанным условиям, могут быть различными. Рассмотрим первоначально простые незамкнутые цепи II класса. Так как мы для общности рассматриваем группы, образованные только парами V класса, то уравнение для определения числа p_5 этих пар будет иметь вид:

$$p_5 = \frac{(6 - k)\, n - w}{5 - k}, \tag{1}$$

где w меняется от -1 до -5 в зависимости от числа связей, которые должны быть наложены на движение базисных звеньев. Тогда получаем, что цепи нулевого семейства будут иметь числа звеньев и пар соответственно равные:

$$
\begin{array}{llll}
\text{для цепи с} & w=-1 & p_5=5, & n=4 \\
 & w=-2 & p_5=4, & n=3, \\
 & w=-3 & p_5=3, & n=2, \\
 & w=-4 & p_5=2, & n=1, \\
 & w=-5 & p_5=1, & n=0.
\end{array}
$$

В последнем случае присоединяемая цепь вырождается в элементарную кинематическую пару.

В первом семействе присоединяемые цепи должны удовлетворять условию

$$p_5=\frac{5n-w}{4}, \qquad (2)$$

где w меняется от -1 до -4. Числа пар и звеньев будут соответственно равны:

$$
\begin{array}{llll}
\text{для цепи с} & w=-1 & p_5=4, & n=3, \\
 & w=-2 & p_5=3, & n=2, \\
 & w=-3 & p_5=2, & n=1, \\
 & w=-4 & p_5=1, & n=0.
\end{array}
$$

Во втором семействе присоединяемые цепи должны удовлетворять условию

$$p_5=\frac{4n-w}{3}, \qquad (3)$$

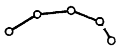
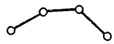
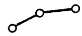
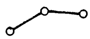
где w меняется от -1 до -3. Числа пар и звеньев будут соответственно равны:

$$
\begin{array}{llll}
\text{для цепи с} & w=-1 & p_5=3, & n=2, \\
 & w=-2 & p_5=2, & n=1, \\
 & w=-3 & p_5=1, & n=0.
\end{array}
$$

В третьем семействе присоединяемые цепи должны удовлетворять условию:

$$p_5=\frac{3n-w}{2}, \qquad (4)$$

Таблица 2

Семейство	Степень подвижности				
	$w=-1$	$w=-2$	$w=-3$	$w=-4$	$w=-5$
0	$n=4$ $p_5=5$  Фиг. 123	$n=3$ $p_5=4$ 	$n=2$ $p_5=3$ 	$n=1$ $p_5=2$ 	$n=0$ $p_5=1$  Фиг. 113
1	$n=3$ $p_5=4$  Фиг. 37	$n=2$ $p_5=3$ 	$n=1$ $p_5=2$ 	$n=0$ $p_5=1$  Фиг. 114	—
2	$n=2$ $p_5=3$  Фиг. 38	$n=1$ $p_5=2$ 	$n=0$ $p_5=1$ Фиг. 115	—	—
3	$n=1$ $p_5=2$ 	$n=0$ $p_5=1$ Фиг. 116	—	—	—
4	$n=0$ $p_5=1$  Фиг. 39	—	—	—	—

где w меняется от -1 до -2. Числа пар и звеньев будут соответственно равны:

$$\text{для цепи с}\quad w=-1\quad p_5=2,\quad n=1,$$
$$w=-2\quad p_5=1,\quad n=0.$$

Наконец, в четвертом семействе присоединяемые цепи должны удовлетворять условию

$$p_5=\frac{2n-w}{1}, \tag{5}$$

где $w=-1$. Число звеньев такой цепи будет равно нулю, а число пар будет равно единице, т. е. $p_5=1$ и $n=0$.

Все рассмотренные цепи сведены в табл. 2.

Таким образом, образование группы можно представить как присоединение к базисным звеньям контура (см. рис. 28) соответствующих цепей, показанных в табл. 2.

Рассмотрим первоначально те группы, в которых каждое звено замкнутого контура входит в кинематическую пару с цепью, удовлетворяющей условиям: уравнению (1) и что то же (1)—(5). Это будут наиболее развитые группы. Если каждое звено замкнутого контура входит в кинематическую пару с цепью, удовлетворяющей условиям (1)—(5), то степень подвижности этих цепей должна быть равной $w = -1$. Следовательно, базисные звенья этих контуров будут входить в кинематические пары с цепями, показанными в первом столбце табл. 2. Действительно, так как число степеней подвижности подвижного контура равно числу образующих его звеньев, то чтобы получить группу, надо наложить число условий связи, равное числу звеньев контура, т. е. присоединить к каждому звену цепь, обладающую числом степеней подвижности, равным $w = -1$.

В результате получим группы, показанные на фиг. 40—58 табл. 3. Они представляют собой наиболее развитые случаи групп с подвижными контурами. В табл. 3 показаны группы до VIII класса включительно. Группы последующих классов образуются аналогичными приемами.

На фиг. 59—68 табл. 3 показаны наиболее развитые случаи групп с жесткими контурами. В этих цепях сам жесткий контур входит в кинематические пары с соответствующими цепями, показанными в табл. 2.

Кроме рассмотренных наиболее развитых групп, могут быть получены и более простые группы тех же классов. Эти группы можно получить, предположив, что некоторые из звеньев замкнутого контура не будут развиваться в базисные звенья и, следовательно, на остальные звенья контура наложено большее, чем — 1, число связей. Тогда очевидно, что, кроме цепей, указанных в первом столбце табл. 2, базисные звенья будут входить в кинематические пары с цепями, показанными и в других столбцах табл. 2.

Процесс получения подобных групп и таблицы этих групп были показаны в работе, посвященной цепям с одним замкнутым контуром [22]. В качестве примера приве-

[22] *И. И. Артоболевский.* К вопросу о структуре и классификации кинематических цепей с замкнутым контуром.— Известия АН СССР, ОТН, 1939, № 4.

дем из этой работы таблицу групп для VII класса (табл. 4, фиг. 74—95). Как видно из таблицы, все группы могут быть получены путем упрощения структуры наиболее развитой группы нулевого семейства, показанной на фиг. 74. Наиболее развитая группа первого семейства получается путем вхождения каждого звена, образующего контур, в кинематическую пару с цепью, обладающей $w = -1$, показанной во втором ряду табл. 2 (фиг. 37).

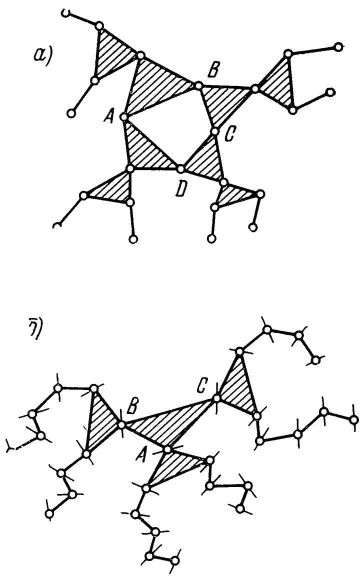


Рис. 29

Наиболее развитая группа второго семейства получается путем вхождения каждого звена, образующего контур, в кинематическую пару с цепью, обладающей $w = -1$, показанной в третьем ряду табл. 2 (фиг. 38) и т. п. Иначе говоря, наиболее развитые группы всех семейств табл. 4 (фиг. 80, 86, 91 и 95) получаются из групп нулевого семейства (фиг. 74) путем уменьшения присоединяемых цепей на одно звено и один элемент кинематической пары.

Последующие группы любого семейства получаются путем последовательного уменьшения числа базисных звеньев и замены присоединяемых цепей с $w = -1$ на цепи с $w = -2$, $w = -3$, $w = -4$, $w = -5$, показанные во втором, третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 2.

Мы рассмотрели процесс образования групп присоединением к контурам, являющимся простыми замкнутыми цепями, простых незамкнутых цепей, накладывающих различное число условий связи; нетрудно показать, что более сложные группы могут быть образованы путем присоединения к замкнутым контурам сложных и незамкнутых цепей.

Используя уравнение (1), можно получить простейшие сложные незамкнутые кинематические цепи III класса

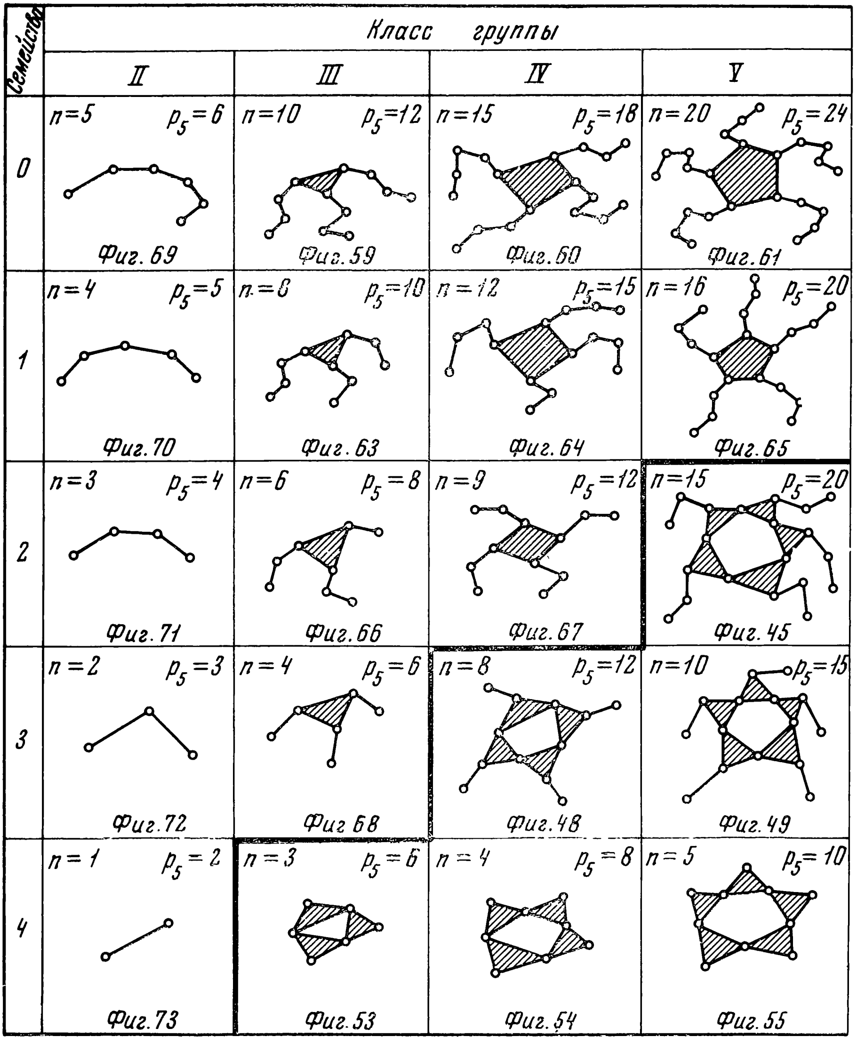
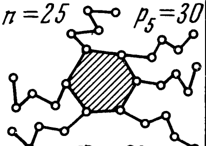
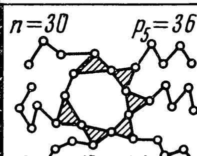
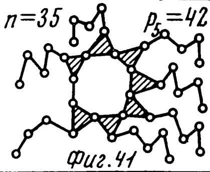
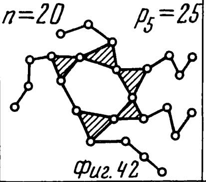
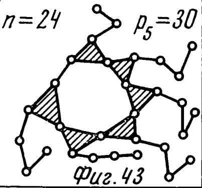
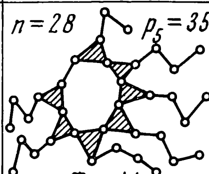
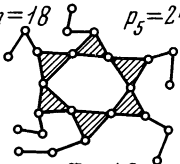
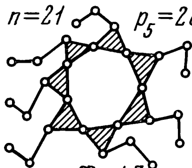
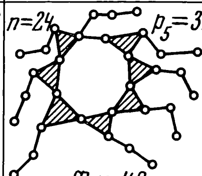
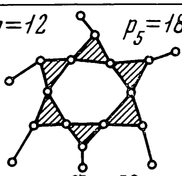
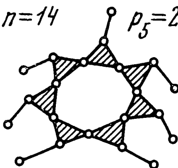
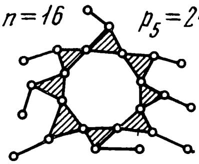
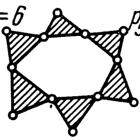
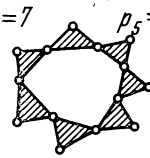
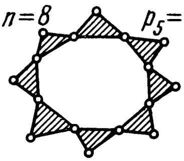
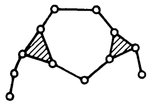
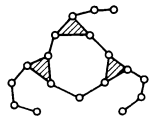
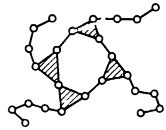
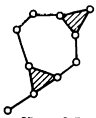
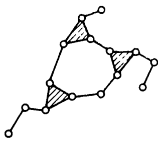
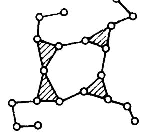
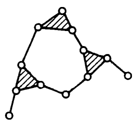
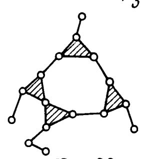
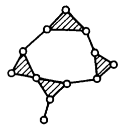
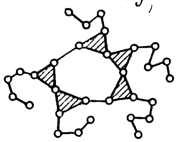
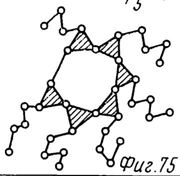
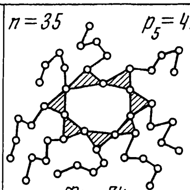
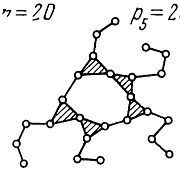
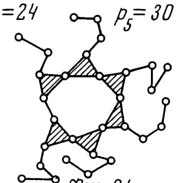
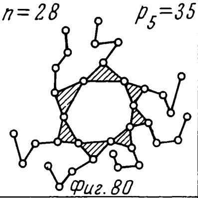
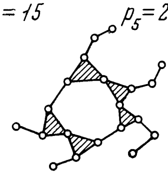
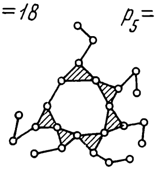
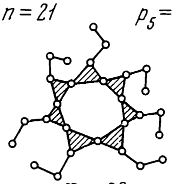
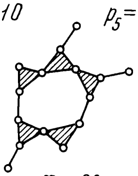
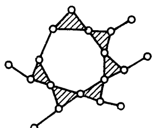
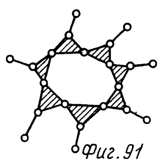
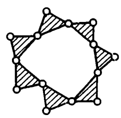
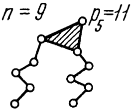
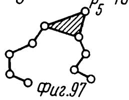
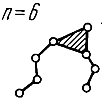
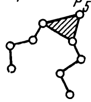
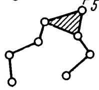
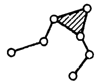
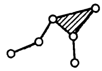
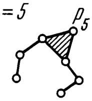
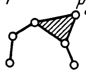
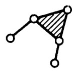
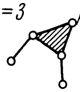

Семейство
Класс группы
II
III
IV
V
0
n=5 p_5=6
Фиг. 69
n=10 p_5=12
Фиг. 59
n=15 p_5=18
Фиг. 60
n=20 p_5=24
Фиг. 61
1
n=4 p_5=5
Фиг. 70
n=8 p_5=10
Фиг. 63
n=12 p_5=15
Фиг. 64
n=16 p_5=20
Фиг. 65
2
n=3 p_5=4
Фиг. 71
n=6 p_5=8
Фиг. 66
n=9 p_5=12
Фиг. 67
n=15 p_5=20
Фиг. 45
3
n=2 p_5=3
Фиг. 72
n=4 p_5=6
Фиг 68
n=8 p_5=12
Фиг. 48
n=10 p_5=15
Фиг. 49
4
n=1 p_5=2
Фиг. 73
n=3 p_5=6
Фиг. 53
n=4 p_5=8
Фиг. 54
n=5 p_5=10
Фиг. 55

Таблица 3

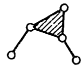
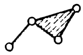
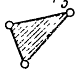
Класс группы		
VI	VII	VIII
$n=25$ $p_5=30$  Фиг. 62	$n=30$ $p_5=36$  Фиг. 40	$n=35$ $p_5=42$  Фиг. 41
$n=20$ $p_5=25$  Фиг. 42	$n=24$ $p_5=30$  Фиг. 43	$n=28$ $p_5=35$  Фиг. 44
$n=18$ $p_5=24$  Фиг. 46	$n=21$ $p_5=28$  Фиг. 47	$n=24$ $p_5=32$  Фиг. 48
$n=12$ $p_5=18$  Фиг. 50	$n=14$ $p_5=21$  Фиг. 51	$n=16$ $p_5=24$  Фиг. 52
$n=6$ $p_5=12$  Фиг. 56	$n=7$ $p_5=14$  Фиг. 57	$n=8$ $p_5=16$  Фиг. 58

Семейство	Группы XII класса		
0	$n=10$ $p_5=12$  Фиг. 79	$n=15$ $p_5=18$  Фиг. 78	$n=20$ $p_5=24$  Фиг. 77
1	$n=8$ $p_5=10$  Фиг. 85	$n=12$ $p_5=15$  Фиг. 84	$n=16$ $p_5=20$  Фиг. 83
2	$n=6$ $p_5=8$ —	$n=9$ $p_5=12$  Фиг. 90	$n=12$ $p_5=16$  Фиг. 89
3	$n=4$ $p_5=6$ —	$n=6$ $p_5=8$ —	$n=8$ $p_5=12$  Фиг. 94
4	$n=2$ $p_5=4$ —	$n=3$ $p_5=6$ —	$n=4$ $p_5=8$ —

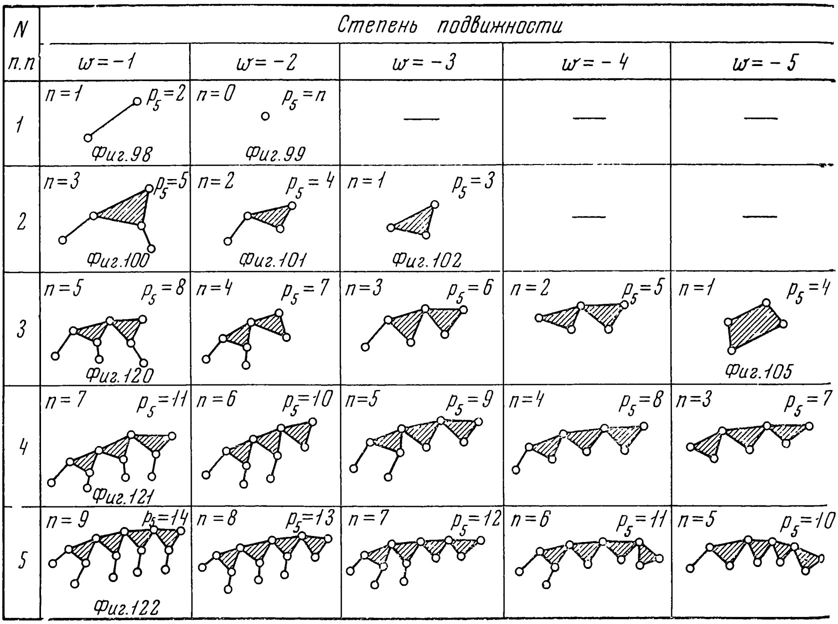
Группы VII класса		
$n=25$ $p_5=30$  Фиг. 76	$n=30$ $p_5=36$  Фиг. 75	$n=35$ $p_5=42$  Фиг. 74
$n=20$ $p_5=25$  Фиг. 82	$n=24$ $p_5=30$  Фиг. 81	$n=28$ $p_5=35$  Фиг. 80
$n=15$ $p_5=20$  Фиг. 88	$n=18$ $p_5=24$  Фиг. 87	$n=21$ $p_5=28$  Фиг. 86
$n=10$ $p_5=15$  Фиг. 93	$n=12$ $p_5=18$  Фиг. 92	$n=14$ $p_5=21$  Фиг. 91
$n=5$ $p_5=10$ —	$n=6$ $p_5=12$ —	$n=7$ $p_5=14$  Фиг. 95

Семейство	Степень подвижности			
	$w=-1$	$w=-2$	$w=-3$	$w=-4$
0	$n=9$ $p_5=11$ 	$n=8$ $p_5=10$  Фиг. 97	$n=7$ $p_5=9$ 	$n=6$ $p_5=8$ 
1	$n=7$ $p_5=9$ 	$n=6$ $p_5=8$ 	$n=5$ $p_5=7$ 	$n=4$ $p_5=6$ 
2	$n=5$ $p_5=7$ 	$n=4$ $p_5=6$ 	$n=3$ $p_5=5$ 	$n=2$ $p_5=4$ 
3	$n=3$ $p_5=5$  Фиг. 96	$n=2$ $p_5=4$  Фиг. 103	$n=1$ $p_5=3$  Фиг. 104	—
4	$n=1$ $p_5=3$ 	—	—	—

любых семейств. Эти цепи показаны в табл. 5. Нетрудно видеть, что цепи более низких семейств могут быть получены как частные случаи цепей нулевого семейства, т. е. мы имеем тот же процесс упрощения цепей при переходе от нулевого семейства к последующим семействам, как это было для простых незамкнутых цепей (табл. 2). Процесс образования групп с помощью рассматриваемых цепей будет аналогичным тому, который мы применяли ранее (табл. 3). В качестве примера на рис. 29, *а* показана плоская группа третьего семейства, в основе которой лежит подвижный контур $ABCD$ вида, показанного на фиг. 20 табл. 1, к звеньям которого присоединены четыре цепи вида, показанного на фиг. 96 табл. 5, накладывающие каждая по одной связи, т. е. имеющая каждая степень подвижности $w = -1$. На рис. 29, *б* показана про-

Степень подвижности				
$w=-5$	$w=-6$	$w=-7$	$w=-8$	$w=-9$
$n=5$ $p_5=7$ 	$n=4$ $p_5=6$ 	$n=3$ $p_5=5$ 	$n=2$ $p_5=4$ 	$n=1$ $p_5=3$ 
$n=3$ $p_5=5$ 	$n=2$ $p_5=4$ 	$n=1$ $p_5=3$ 	—	—
$n=1$ $p_5=3$ 	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

странственная группа нулевого семейства. В основе этой группы лежит жесткий контур ABC вида, показанного на фиг. 3 табл. 1. К звеньям этого контура присоединены три цепи вида, показанного на фиг. 97 табл. 5, накладывающие каждая по две связи, т. е. имеющие каждая степень подвижности $w = -2$. Как это видно из табл. 5, сложные открытые цепи III класса могут накладывать большее число связей, чем открытые простые цепи II класса. Так, цепи нулевого семейства имеют степени подвижности от $w = -1$ до $w = -9$. Цепи первого семейства имеют степени подвижности от $w = -1$ до $w = -7$ и т. д. Нетрудно видеть, что наибольшее число степеней подвижности w, которым обладает цепь, равняется числу звеньев той цепи, которая обладает степенью подвижности $w = -1$.

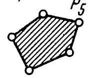
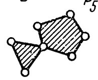
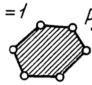


N п.п	Степень подвижности				
	$w=-1$	$w=-2$	$w=-3$	$w=-4$	$w=-5$
1	$n=1$ $p_5=2$ Фиг. 98	$n=0$ $p_5=n$ Фиг. 99	—	—	—
2	$n=3$ $p_5=5$ Фиг. 100	$n=2$ $p_5=4$ Фиг. 101	$n=1$ $p_5=3$ Фиг. 102	—	—
3	$n=5$ $p_5=8$ Фиг. 120	$n=4$ $p_5=7$	$n=3$ $p_5=6$	$n=2$ $p_5=5$	$n=1$ $p_5=4$ Фиг. 105
4	$n=7$ $p_5=11$ Фиг. 121	$n=6$ $p_5=10$	$n=5$ $p_5=9$	$n=4$ $p_5=8$	$n=3$ $p_5=7$
5	$n=9$ $p_5=14$ Фиг. 122	$n=8$ $p_5=13$	$n=7$ $p_5=12$	$n=6$ $p_5=11$	$n=5$ $p_5=10$

В табл. 5 рассмотрены сложные открытые цепи III класса с одним базисным звеном. Нетрудно показать, что могут существовать цепи того же вида и класса, но имеющие несколько базисных звеньев. Так, в сводной табл. 6 показаны сложные, открытые цепи третьего семейства. В первом ряду (фиг. 98 и 99) показаны уже рассмотренные нами цепи II класса третьего семейства (см. табл. 2). Во втором ряду (фиг. 100—102) показаны цепи, также рассмотренные выше (см. фиг. 96, 103, 104 табл. 5.). Далее в табл. 6 рассмотрены цепи с двумя, тремя и более базисными звеньями. Цепи, показанные на фиг. 102, 105, 106 и 107, надо рассматривать как условные, полученные путем вырождения цепи в единичные звенья, так же как это имело место для цепей II класса (фиг. 99 табл. 6 или фиг. 38, 113, 114, 115 и 116 табл. 2).

Переходим к рассмотрению последнего вида цепей — сложных замкнутых цепей IV и более высших классов. В качестве примера рассмотрим некоторые простейшие

Таблица 6

Степень подвижности			
$w = -6$	$w = -7$	$w = -8$	$w = -9$
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
$n = 2$ $p_3 = 6$  Фиг. 113	$n = 1$ $p_5 = 5$  Фиг. 106	—	—
$n = 4$ $p_5 = 9$ 	$n = 3$ $p_5 = 8$ 	$n = 2$ $p_5 = 7$ 	$n = 1$ $p_5 = 6$  Фиг. 107

цепи третьего семейства. Покажем, что при образовании таких цепей мы можем использовать все тот же принцип наложения связей. На рис. 30, *а* взят простейший замкнутый контур *ABCD*. Если присоединить к звеньям *1*, *2* и *3* три цепи вида, показанного на фиг 98 табл. 6, а к звену *4* одну пару вида, показанного на фиг. 99 табл. 6, то мы получим цепь IV класса, степень подвижности w которой будет равна $w = -1$. Вторая цепь с той же степенью подвижности показана на рис. 30, *б*. Других цепей IV класса с одним замкнутым контуром со степенью подвижности $w = -1$ получить нельзя. На рис. 31 показаны две возможные цепи IV класса со степенями подвижности $w = -2$. На рис. 32 и 33 — цепи со степенью подвижности, соответственно равной $w = -3$ и $w = -4$.

Группы видов, показанных в табл. 3 и 4, назовем основными группами. Кроме этих основных групп могут быть получены варианты групп, которые мы будем называть производными. Производные группы можно полу-

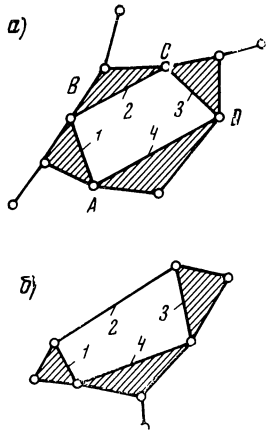


Рис. 30

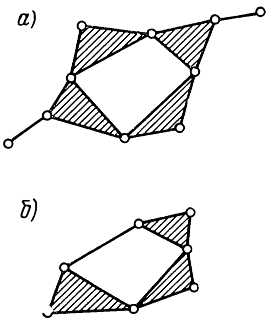


Рис. 31

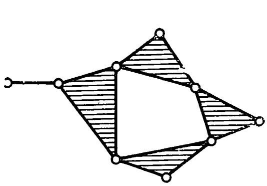


Рис. 32

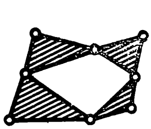


Рис. 33

чить из основных различными способами, например, переносом одной из присоединяемых цепей на другое базисное звено. На рис. 34 показана группа, полученная из группы (фиг. 75, табл. 4) путем переноса одной присоединяемой цепи на базисное звено $ABCD$. Далее можно получить производную группу путем изменения числа звеньев, входящих в присоединяемые цепи. Например, на рис. 35 показана производная группа, полученная на основной группе фиг. 79 табл. 4 путем отсоединения звена, входящего в кинематическую пару со звеном BCD, и присоединения его к цепи EFC. Производные цепи могут быть также получены путем изменения порядка чередования базисных и небазисных звеньев. Пример такой группы показан на рис. 36. Эта группа получена из группы фиг. 77 табл. 4. Производные группы могут быть также получены путем вхождения двух звеньев присоединяемых цепей в кинематическую пару или вхождением одной цепи в кинематические пары с двумя базисными звеньями и т. д.

При получении производных групп необходимо, чтобы вновь полученная цепь не распалась на простейшие группы или не образовалась сама в простейшую. Так, например, если в группе нулевого семейства III класса, показанной на фиг. 59 табл. 3, перенести звено *3*

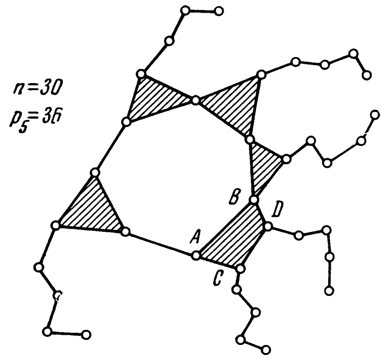


Рис. 34

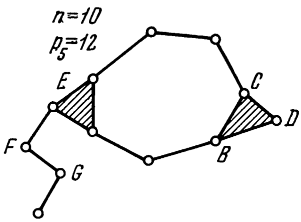


Рис. 35

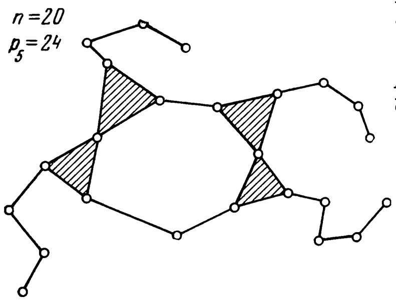


Рис. 36

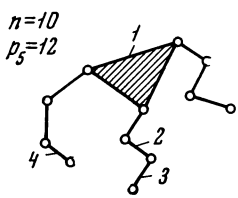


Рис. 37

(рис. 37) и присоединить его к звену *4* (рис. 38), то мы получим одну из производных цепей. Если далее звено *2* (рис. 38) ввести в кинематическую пару со звеном *7* цепи $BCDE$, то получим группу, показанную на рис. 39. Из рассмотрения полученной группы следует, что контур $BCDEFK$ будет жестким и, следовательно, звенья *1*, *5*, *6*, *7*, *2* и *8* будут образовывать одно общее звено и вся полученная группа будет уже группой II класса, показанной на фиг. 69 табл. 3, т. е. класс группы уменьшился.

Все рассмотренные в табл. 3 и 4 группы были основными и одноконтурными. Более сложные, в том числе и многоконтурные цепи, могут быть получены различными путями. Воспользуемся для этого уравнениями (1)—(5). Для случая $n = 9$ и $p_5 = 11$ степень подвижности $w = -1$. Нетрудно показать, что сочетание звеньев и пар образует цепь, показанную на рис. 40, или цепь, показанную на рис. 41. Эти цепи могут быть получены из ранее рассмотренных.

В самом деле, если, например, взять цепь, показанную на фиг. 59 табл. 3), и отсоединить от нее одно звено и один элемент кинематической пары, то получим цепь, показанную на рис. 40, удовлетворяющую поставленному условию. Вторая цепь, удовлетворяющая тому же условию, может быть

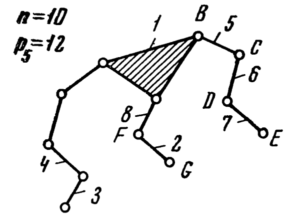


Рис. 38

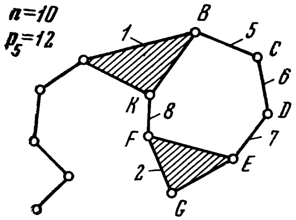


Рис. 39

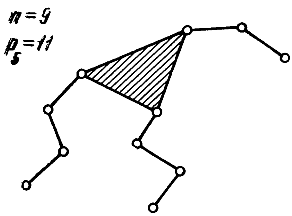


Рис. 40

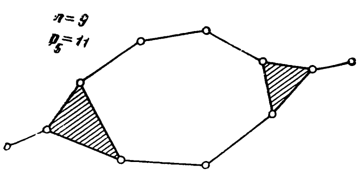


Рис. 41

получена из цепи, показанной на фиг. 79 табл. 4, тем же самым приемом. Эта цепь изображена на рис. 41. Тогда образование группы можно представить как присоединение к одному или нескольким звеньям замкнутого контура цепей, показанных на рис. 40 и 41, вместо тех цепей II класса, которые присоединялись при образовании групп, показанных в табл. 3. Примером группы VII класса, у которой одна из присоединяемых цепей представляет собой цепь, показанную на рис. 40, может служить группа рис. 42. На рис. 43 показана также группа VII класса, но с присоединенной к одному из звеньев цепью, показанной на рис. 41, и т. д.

Следующие цепи нулевого семейства, состоящие из сочетания звеньев и пар, указанных в табл. 5, должны иметь число пар $p_5 = 17$ и число звеньев $n = 14$. Эти цепи могут быть также получены, например, из групп, показанных на фиг. 60 табл. 3 и фиг. 78 табл. 4, если у этих групп отсоединить одно звено и один элемент кинематической пары. Кроме основных групп, указанных в табл. 3 и 4, могут быть использованы и все производные группы.

Цепи, обладающие степенями подвижности $w = -2$, $w = -3$ и т. д., могут быть получены из тех же групп, из которых были получены цепи с $w = -1$,

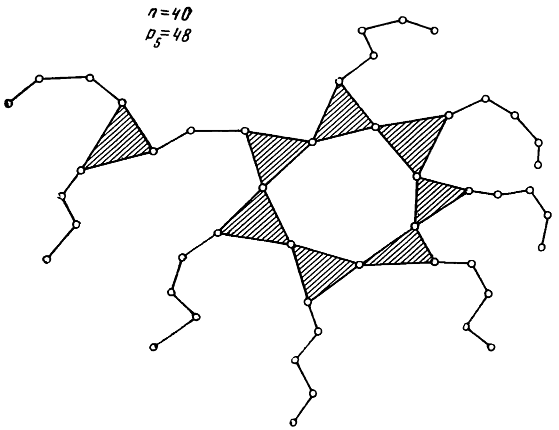


Рис. 42

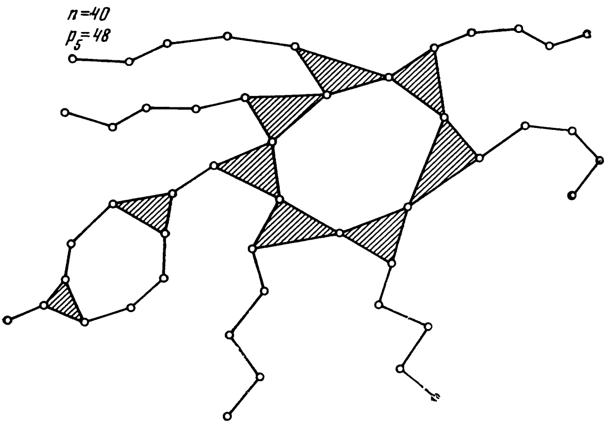


Рис. 43

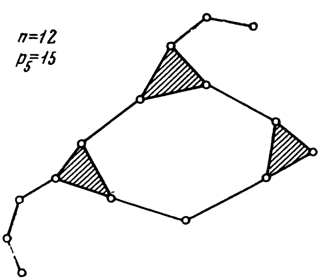


Рис. 44

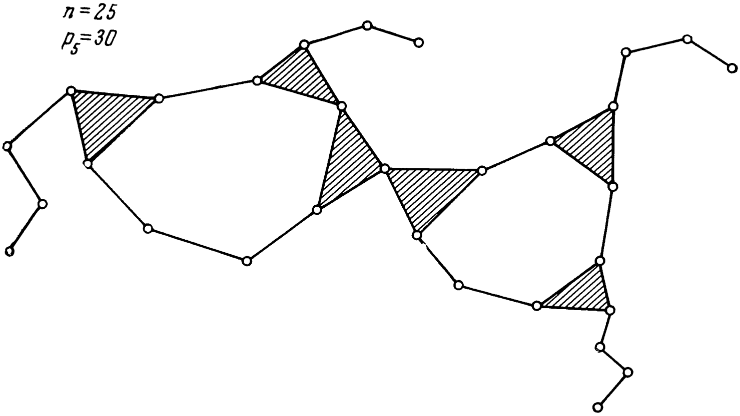


Рис. 45

но путем отсоединения не одного, а нескольких звеньев и элементов кинематических пар, при условии, чтобы в результате отсоединения группа не распалась на простейшие. В качестве примера на рис. 44 показана цепь, обладающая $w = -3$ и содержащая число пар $p_5 = 15$ и число звеньев $n = 12$, полученная из группы, показанной на фиг. 78 табл. 4. На рис. 45 показана группа, в состав которой входит одна цепь рис. 44.

Аналогично цепям II класса для любых присоединяемых цепей последующих классов могут быть составлены таблицы по типу табл. 2.

Для выяснения структуры присоединяемых цепей первого семейства надо воспользоваться уравнением (2). Тогда аналогично цепям нулевого семейства присоединяемые цепи первого семейства могут быть образованы из групп первого семейства, показанных в табл. 3 и 4, путем отсоединения от них одного, двух, трех или четырех звеньев и элементов кинематических пар. Цепи остальных семейств, присоединяемые к основному контуру для получения группы, могут быть определены аналогичным путем.

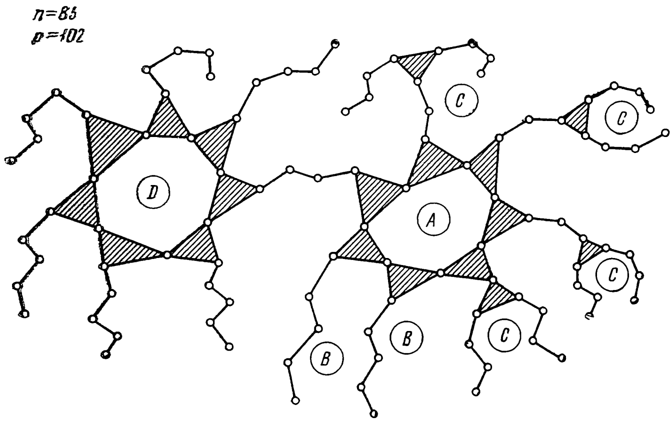


Рис. 46

Таким образом могут быть образованы группы, имеющие в своем составе любое количество контуров как обладающих, так и не обладающих относительной подвижностью.

В качестве примера в табл. 7 показано образование групп третьего семейства с двумя, тремя и более контурами. В этой таблице показано развитие групп третьего семейства при присоединении цепей только со степенями подвижности $w = -1$ и имеющими в своем составе контуры того же класса, что и остальные цепи. Нетрудно видеть, что если в группе III класса (фиг. 110 табл. 7) заменить цепь, состоящую из одного звена и одного элемента кинематической пары, цепью, в состав которой входит контур III класса, то получим группу, показанную на фиг. 112, и т. д. Этот процесс может быть продолжен до бесконечности. Следует отметить, что все группы, полученные в этой строке таблицы, охватят все так называемые группы I класса третьего и выше порядков по классификации Ассура для плоских цепей.

На рис. 42—45 и в табл. 7 мы показали, как могут быть образованы сложные группы путем присоединения к одному из звеньев, входящих в замкнутый контур, цепей III и более высоких классов. Более сложные группы можно получить, если подобные цепи будут присоединены к нескольким звеньям контура. На рис. 46 показана

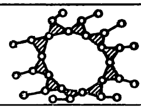
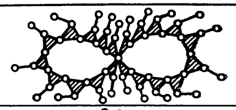
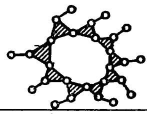
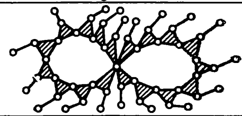
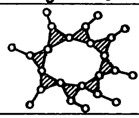
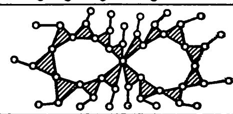
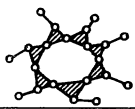
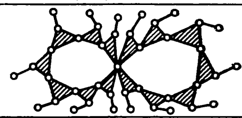
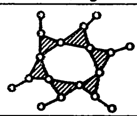
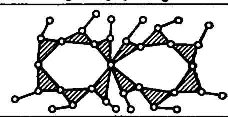
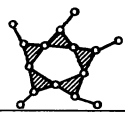
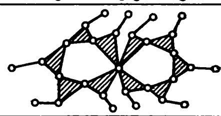
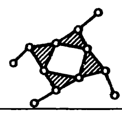
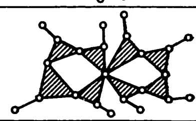
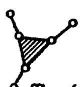
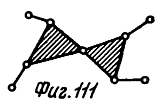
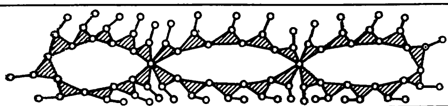
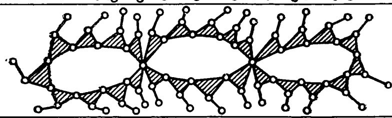
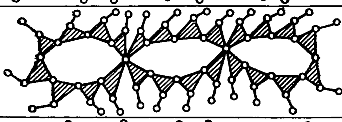
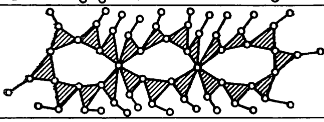
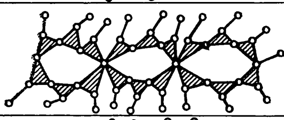
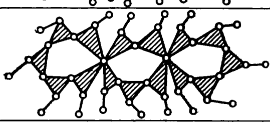
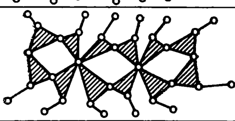
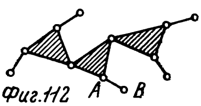
Класс	Количество контуров	
	1	2
X		
IX		
VIII		
VII		
VI		
V		
IV		
III	 Фиг.110	 Фиг.111
II		—

Таблица 7

Количество контуров	3 семейство
3	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
	$\longrightarrow \quad \infty$
 Фиг.112	$\longrightarrow \quad \infty$
—	—

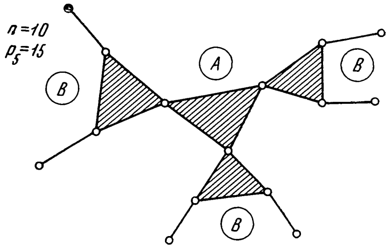


Рис. 47

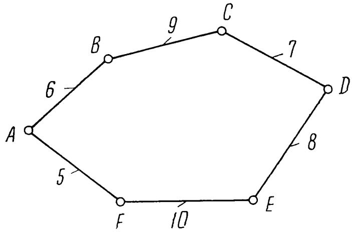


Рис. 48

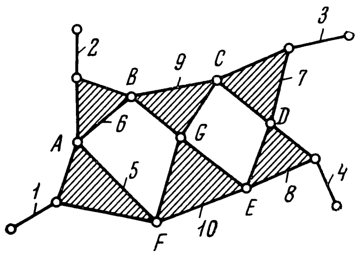


Рис. 49

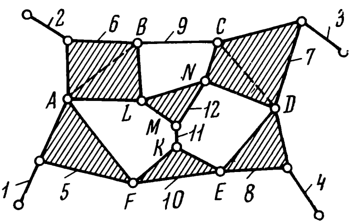


Рис. 50

группа нулевого семейства VII класса. К звеньям A главного контура VII класса этой цепи присоединены две цепи II класса B, четыре цепи III класса C и одна цепь VII класса D. В третьем семействе примером такой сложной группы может служить, например, группа, показанная на рис. 47. К звеньям главного контура A III класса присоединены три цепи III класса B. Отметим, что эта группа по классификации Ассура должна быть отнесена к группам II класса. По предлагаемой классификации она будет группой III класса.

Изложенная теория построения сложных групп позволит получать любой сложности группы как основные, так и производные.

Мы рассмотрели процесс образования групп методом наложения связей. Присоединяемые при этом к основному контуру цепи можно назвать цепями с внешним присоединением, поскольку в данном случае концевые кинематические пары крайних звеньев свободны, так как с их помощью будет происходить присоединение групп к основному механизму.

Метод наложения связей может быть использован и для образования цепей с внутренним присоединением. Рассмотрим это на примерах групп третьего семейства. Пусть задан контур $ABCDEF$ VI класса (рис. 48). Для образования группы необходимо наложить на него шесть связей. Четыре связи (см. фиг. 98 табл. 6) наложим вхождением звеньев *1*, *2*, *3* и *4* в пары со звеньями *5*, *6*, *7* и *8* (рис. 49) и две связи — вхождением звеньев *9* и *10* в пару *G* (см. фиг. 99 табл. 6). Таким образом, группа, показанная на рис. 48, будет группой с одним внутренним присоединением, осуществляемым парой *G*. При введении внутренних присоединений основной контур распадается на несколько контуров более низких классов. При образовании групп с внутренним присоединением необходимо соблюдать условие, чтобы новые контуры, образованные после присоединения, обладали бы подвижностью. Так, например, на рис. 49 полученные контуры *ABGF* и *CDEG* обладают каждый в отдельности четырьмя степенями подвижности. Связь, налагаемую парой *G*, назовем диагональной связью.

На рис. 50 рассмотрен тот же контур *ABCDEF* VI класса как и на рис. 48, но в качестве диагонали присоединена (см. фиг. 101 табл. 6) цепь, состоящая из двух звеньев *11* и *12*, входящих в пары *K*, *Z* и *N* со звеньями *10*, *6* и *7*. Эта цепь накладывает два условия связи. Нетрудно видеть, что после присоединения контур *ABCDEF* VI класса распался на 3 контура: контур *LBCN* IV класса и контуры *ALMKF* и *EDNMK* V класса. На рис. 51 показана

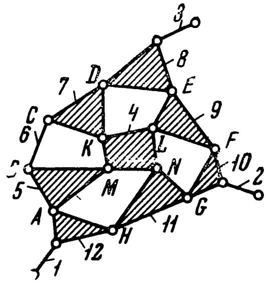


Рис. 51

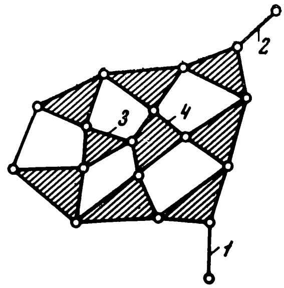


Рис. 52

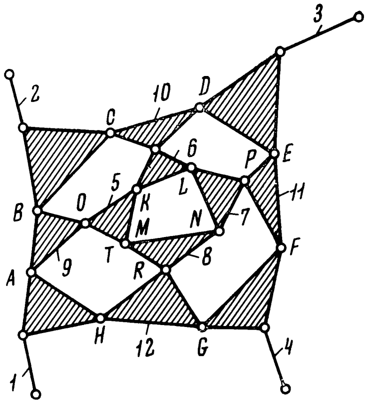


Рис. 53

группа VIII класса, образованная основным контуром $ABCDEFGH$, к звеньям *12*, *8* и *10* которого присоединены звенья *1*, *3* и *2* вида, показанного на фиг. 98 табл. 6 со степенями подвижности $w = -1$. Звено *4*, имеющее степень подвижности $w = -5$ (см. фиг. 105 табл. 6), входит в пары K, L, N и M со звеньями *7*, *9* и *11*. Основной контур распадается на четыре контура $BCKM$, $DELK$, $FGNL$ и $NHAM$, все IV класса. На рис. 52 показана группа VIII класса с диагональной цепью, состоящей из звеньев *3* и *4* (см. фиг. 113 табл. 6). Контур VIII класса распался на пять контуров IV класса.

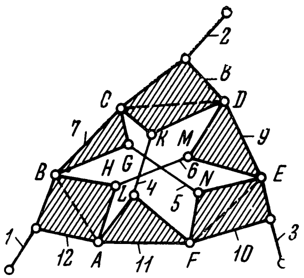


Рис. 54

При наложении на основной контур соответствующих связей надо иметь в виду, чтобы всегда в группе были хотя бы две цепи с внешними связями, концевыми парами которых эта группа будет присоединяться к основному механизму, так как порядок группы не может быть ниже второго. На рис. 49, 50 — по четыре таких цепи, на рис. 51 — три цепи и, наконец, на рис. 52 — две цепи.

Диагональными цепями могут быть цепи не только II и III классов, но и цепи более высоких классов. На рис. 53 к основному контуру $ABCDEFGH$ VIII класса присоединены четыре цепи вида, показанного на фиг. 98 табл. 6, состоящие из звеньев *1*, *2*, *3* и *4*, и одна диагональная цепь IV класса, имеющая замкнутый контур $KLNM$ и состоящая из звеньев *5*, *6*, *7* и *8*. Эта цепь, показанная на рис. 33, имеет степень подвижности $w = -4$ и входит в кинематические пары O, P, R и T со звеньями *9*, *10*, *11* и *12* основного контура. Число диагональных цепей может быть различным. Покажем это на некоторых простейших примерах групп третьего семейства.

На рис. 54 показана группа VI класса с основным контуром $ABCDEF$. Цепи с внешним присоединением состоят из трех звеньев *1*, *2* и *3* (см. фиг. 98 табл. 6) со степенью подвижности $w = -1$ каждая. Три другие цепи с той же степенью подвижности состоят из трех звеньев *4*, *5* и *6* (см. фиг. 98 табл. 6), входят в кинематические пары со звеньями *7*, *8*, *9*, *10*, *11* и *12* и представляют собой диагональные цепи. Нетрудно видеть, что после присоединения этих цепей цепь VI класса распалась на шесть контуров V класса: *BCDKLA*, *KDEFL*, *BCDMH*, *AHMEF*, *ABGNF* и *ENGCD*. В качестве диагональных цепей могут быть использованы и любые другие цепи III и более высших классов. На рис. 55 показана группа VI класса с основным контуром *ABCDEF*. Одна диагональная цепь, состоящая из звеньев *4*, *5* и *6*, будет цепью со степенью подвижности $w = -1$ (см. фиг. 100 табл. 6). Две цепи, состоящие каждая из одного звена *7* и *8*, будут цепями со степенью подвижности $w = -1$ (см. фиг. 98 табл. 6). Группа распадается на пять контуров. Два из них будут контурами IV класса. Это контуры *ABGK* и *FTRE*. Два будут контурами V класса. Это контуры *BCSLH* и *DSNME*. Один контур *AHLNMF* будет контуром VI класса.

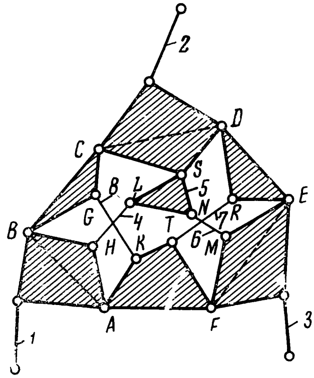
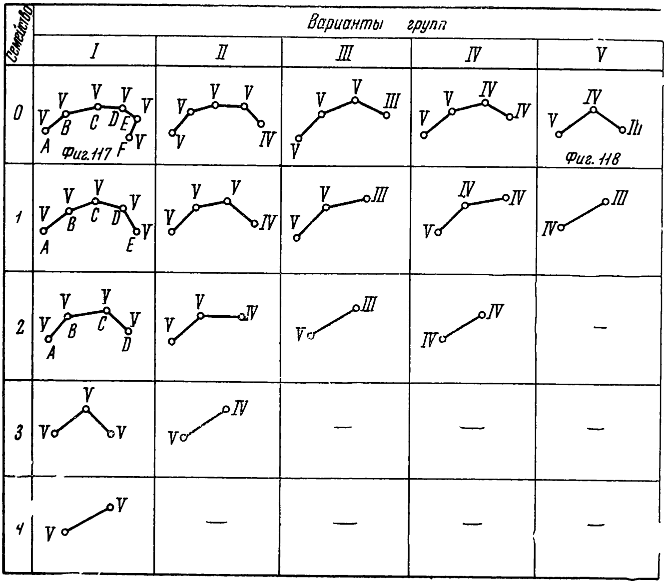


Рис. 55

При образовании групп методом наслоения цепей, накладывающих различное число связей на основной замкнутый контур, надо следить за тем, чтобы вновь образованные после присоединения контуры обладали бы необходимой подвижностью. Это условие будет всегда соблюдаться, если для группы различных семейств число кине-

Рис. 56



матических пар p_5, в которые входят звенья контура, удовлетворяло бы условиям: для нулевого семейства $p_5 \geqslant 7$, для первого $p_5 \geqslant 6$, для второго $p_5 \geqslant 5$, для третьего $p_5 \geqslant 4$ и для четвертого $p_5 \geqslant 3$, т. е. эти контуры должны быть подвижными (см. фиг. 17—36 табл. 1).

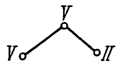
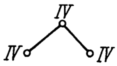
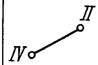
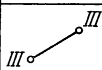
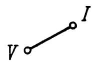
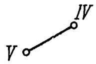
Нетрудно видеть, что для групп третьего семейства, указанных на рис. 49—55, условие $p_5 \geqslant 4$ всегда удовлетворяется.

Развитая теория образования групп является общей для механизмов всех семейств и родов при условии, что все образующие эти группы кинематические пары являются парами V класса.

Можно показать, что если группы будут образованы кинематическими цепями, состоящими из пар не только V класса, но и других классов, то методика образования групп остается прежней.

Так как кинематическая пара является подвижным соединением двух звеньев, то очевидно, что пары I и II классов могут быть только высшими, так как соприкос-

Таблица 8

Варианты групп				
VI	VII	VIII	IX	X
			 Фиг. 119	
	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—				
—				

новение двух звеньев по поверхностям всегда накладывает не меньше трех связей на относительное движение этих звеньев. Пары III, IV и V классов могут быть как низшими, так и высшими. Рассмотрим в общем виде кинематические цепи, образующие группы с парами различных классов. Как известно, эти кинематические пары могут быть различными по конструктивному оформлению и тем относительным движениям, которые имеют звенья пары друг относительно друга. Поэтому условимся на последующих рисунках по-прежнему кинематическую пару изображать схематично в виде двух прямых с общим кружком (рис. 56), но у каждого кружка ставить римскую цифру, обозначающую класс кинематической пары. Все возможные варианты групп II класса для всех семейств сведены в табл. 8.

Нетрудно видеть, что наиболее развитой группой будет группа, показанная на фиг. 69 табл. 3 или на фиг. 117 табл. 8. Последующие группы будут обладать меньшим количеством звеньев и будут как бы упрощенными вариантами наиболее развитой группы. Дополнительные

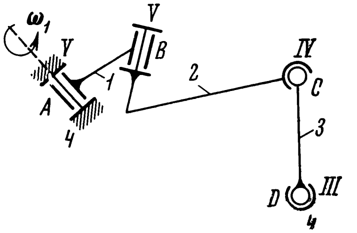


Рис. 57

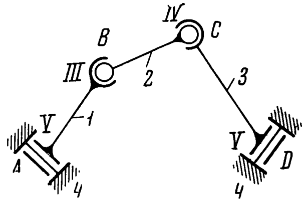


Рис. 58

варианты групп могут быть получены путем изменения порядка чередования пар различных классов. Вопрос чередования последовательности кинематических пар является весьма важным, так как в некоторых случаях могут появиться дополнительные степени подвижности или переход механизма из одного семейства в другое. Так, например, если мы к ведущему звену *1* (рис. 57), являющемуся механизмом I класса со степенью подвижности $w = 1$, присоединим группу, показанную на фиг. 118 табл. 8, то получим четырехзвенный механизм с одной степенью подвижности [23].

В конструкциях машин чаще всего используется четырехзвенный механизм (рис. 58), у которого пары A и D являются вращательными или поступательными парами V класса, а промежуточные пары B и C шаровыми парами V класса. При этом звено *2* получает дополнительную подвижность в форме вращения вокруг собственной оси, проходящей через центры сфер пар B и C. Если, например, группу, показанную на фиг 117 табл. 8, у которой все пары являются вращательными парами V класса, присоединить к механизму I класса, т. е. к звену *1* (рис. 59), то получим семизвенный пространственный механизм нулевого семейства. Если оси кинематических пар A, B, C и D, E, F пересекаются по три в точках O_1 и O_2 (рис. 60), то механизм получает вторую степень подвижности, так как звенья *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* образуют механизм первого семейства. Точно так же если оси четырех вращательных пар V класса, например

[23] На рис. 57 и дальше приняты условные обозначения пар: A и B — вращательные пары V класса, C — пара с пальцем в прорези IV класса, D — сферическая пара III класса.

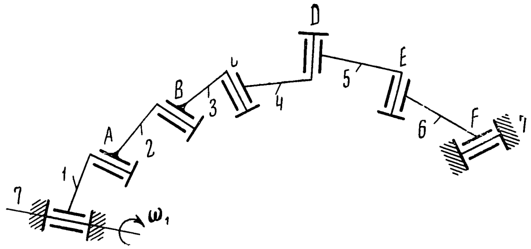


Рис. 59

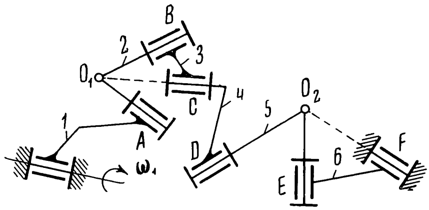


Рис. 60

A, B, C и D (см. рис. 59), будут всегда параллельны, то механизм получает дополнительную подвижность, поскольку в этом случае цепь, состоящая из звеньев, входящих в эти пары, будет плоской, соответствующей плоским механизмам третьего семейства. Точно так же, если четыре пары V класса, например A, B, C и D (см. рис. 60), будут поступательными, то эта часть кинематической цепи будет образовывать механизм третьего семейства с четырьмя поступательными парами. Присоединение к механизму I класса группы, показанной на фиг. 119 табл. 8, будет образовывать механизм, если пары III класса не будут сферическими, а будут, например, одна сферическая, а другая плоскостная или одна сферическая, а другая высшая III класса и т. д. При двух сферических парах механизм вырождается в одно звено с возможностью вращения присоединяемого звена вокруг оси, соединяющей центры сферических пар.

Таким образом, группы II класса нулевого семейства имеют десять основных модификаций, показанных в первой строке табл. 8, с помощью которых можно образовать механизмы от трехзвенного до семизвенного. Разновидностями этих модификаций будут механизмы, образованные парами всех классов различных видов, расположенных в различной последовательности.

Переходим к рассмотрению механизма первого семейства. Простейшая группа этого семейства показана на фиг. 70 табл. 3.

Во второй строке табл. 8 показаны шесть возможных модификаций групп первого семейства. Соответственно в третьей, четвертой и пятой строках показаны возможные модификации групп второго, третьего и четвертого семейств. Нетрудно видеть, что только в нулевом семействе группы могут быть образованы парами всех классов. В первом семействе группы не имеют звеньев, входящих в пары V класса; во втором семействе группы не имеют звеньев, входящих в пары V и IV классов; в третьем семействе группы не имеют звеньев, входящих в пары V, IV и III класса; и, наконец, в четвертом семействе звенья группы могут входить только в пары V класса.

Табл. 8 дает полное представление о том многообразии возможных групп II класса, которое можно получить модифицированием класса пар и последовательности их вхождения в цепь. Аналогичные таблицы могли бы быть составлены и для групп последующих классов III, IV, V и т. д., общая структура которых показана в табл. 3.

В своих работах по структуре Л. В. Ассур рассматривает цепи, образованные парами только V класса, т. е. подвергает анализу наиболее развитые цепи. Такой подход к исследованию был совершенно закономерным, особенно применительно к плоским кинематическим цепям третьего семейства, которые только и рассматривал Ассур. В самом деле, хорошо известно, что в этих цепях любая пара IV класса будет высшей парой качения и скольжения, накладывающая одну связь на относительное движение звеньев пары. Тогда очевидно, что эквивалентная высшей паре IV класса цепь должна также накладывать одно условие связи, т. е. степень их подвижности $w = -1$. Такие цепи третьего семейства простые и сложные II и III классов показаны на фиг. 98, 100, 120, 121 и 122 табл. 6, а сложные замкнутые IV класса — на рис. 30.

С точки зрения структуры цепи вопрос о способе присоединения той или иной замещающей цепи к звеньям, образующим высшую пару, не имеет значения. Но если мы переходим после изучения структуры механизма к исследованию его кинематики или кинетостатики, то здесь способ присоединения будет играть существенную роль. Так, если мы производим замену высшей пары IV класса, состоящей из звеньев *1* и *2*, соприкасающихся в точке C (рис. 61), кинематической цепью вида, показанного на фиг. 98 табл. 6, состоящей из одного звена *3*, входящего в две кинематические пары (см. рис. 61, *а*), то оси этих кинематических пар должны проходить через центры кривизны O_1 и O_2 кривых, образующих высшую пару.

Если высшая пара (рис. 62) заменяется цепью, показанной на фиг. 100 табл. 6, то звено *3* входит в кинематическую пару O_1 со звеном *1*. Звенья *4* и *5* входят в пары A и B со звеном *2*. При присоединении необходимо удовлетворять условию, чтобы точки O_1 и O_2, являющиеся мгновенным центром вращения P_{32} звена *3* относительно звена *2*, были бы центрами кривизны кривых, образующих высшую пару. Аналогичные условия должны быть и в случае замены высшей пары любыми сложными открытыми или замкнутыми цепями. Если один из элементов высшей пары является прямой линией, одна из вращательных пар переходит в пару поступательную (см. рис. 61, *б*). Высшая центроидная пара V класса в плоских механизмах третьего семейства представляет собой две перекатывающиеся без скольжения друг по другу кривые *1* и *2* (рис. 63) и может быть всегда заменена вращательной парой V класса, ось которой проходит через мгновенный центр вращения P_{12}.

Вопрос о замене пар различных классов эквивалентными цепями, образованными парами V класса, имеет важное значение не только с точки зрения обобщения теории структуры кинематических цепей и методов их анализа, но и с точки зрения конструктивного оформления элементов кинематических пар. Известно, что наиболее простыми с точки зрения технологической обработки являются пары, элементы которых выполнены по плоскостям или круглым цилиндрическим поверхностям. Более надежными с точки зрения прочности, трения, износа и т. д. являются низшие пары с цилиндрическими или плоскостными элементами. Весьма трудными являются операции технологической обработки шаровых поверхностей, особенно с внутренней шаровой поверхности и т. д. Поэтому рассмотрим вопрос о том, какими цепями с парами только V класса могут быть заменены низшие и высшие пары IV, III, II и I классов.

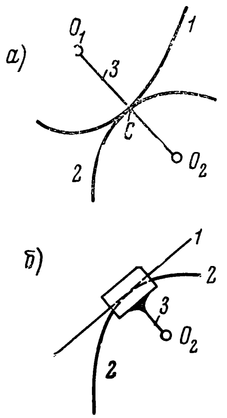


Рис. 61

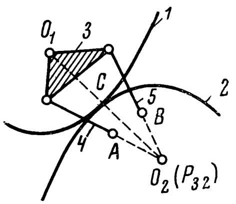


Рис. 62

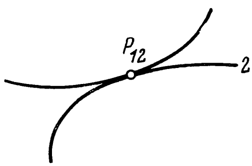


Рис. 63

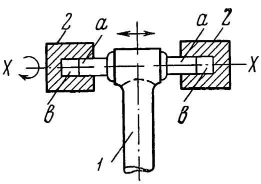


Рис. 64

На рис. 64 показана двухподводковая цилиндрическая пара IV класса. Звено *1* имеет две цилиндрические цапфы a, входящие в цилиндрические выточки b звена *2*. Звенья *1* и *2* имеют два движения относительно друг друга. Одно движение — поступательное вдоль оси $x - x$, второе — вращательное вокруг той же оси. Из условия (1) имеем:

$$p_5 = \frac{6n - 4}{5},$$

т. е. простейшей заменяющей цепью будет цепь, состоящая из числа звеньев $n = 1$ и числа пар V класса $p_5 = 2$. Эквивалентная заменяющая цепь, состоящая только из пар V класса, показана на рис. 65. Она образована звеном *3*, входящим в две кинематические пары. Звено *1* имеет коробчатую направляющую a, в которой скользит ползун *3*, входящий с этим звеном в поступательную пару V класса. Звено *2* входит во вращательную пару C V класса с ползуном *3*. Нетрудно видеть, что относительные движения звеньев *1* и *2* сводятся к поступательному и вращательному движениям вокруг и вдоль оси $x - x$, т. е. кинематическая цепь, показанная на рис. 65, эквивалентна кинематической паре, показанной на рис. 64.

На рис. 66 показана двухподвижная кинематическая пара IV класса. Звено *1* имеет сферическую поверхность d

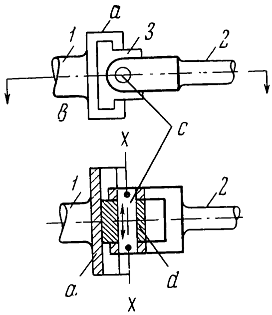


Рис. 65

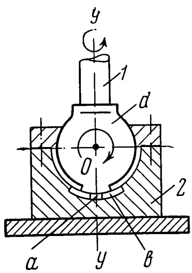


Рис. 66

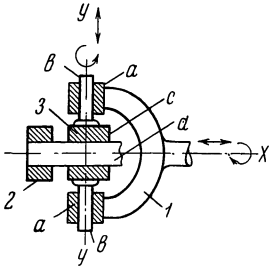


Рис. 67

с круглым цилиндрическим пальцем a, скользящим в радиальной прорези b. Звенья *1* и *2* имеют два вращательных движения друг относительно друга. Эквивалентная замещающая цепь, показанная на рис. 67, состоит из звена *3*, входящего в две вращательные пары V класса. Относительные движения звеньев *1* и *2* сводятся к двум вращательным движениям вокруг осей $x - x$ и $y - y$, т. е. кинематическая цепь, показанная на рис. 67, эквивалентна кинематической паре, показанной на рис. 66.

На рис. 68 показана трехподвижная шаровая пара III класса. Звено *1* оканчивается шаровой головкой a, входящей в полую шаровую поверхность в звене *2*. Звенья *1* и *2* могут иметь только три вращательных движения около трех осей, пересекающихся в точке O, совпадающей с центром сферы a. Из условия (*1*) имеем: $p_5 = \frac{6n-3}{5}$, т. е. простейшей замещающей цепью будет цепь, у которой $n = 2$, $p_5 = 3$. Эквивалентной замещающей цепью, состоящей только из пар V класса, будет цепь из звеньев *3* и *4*, входящих в три кинематические пары V класса, показанная на рис. 69. Звено *1* имеет валик a, вращающийся в детали *3*, имеющей шины b, которые вращаются в цапфах c кольца *4*, скользящего в сферическом корпусе d звена *2*. Таким образом, звенья

1, *2*, *3* и *4* входят в три вращательные пары V класса. Нетрудно видеть, что относительные движения звеньев *1* и *2* сводятся к трем вращательным движениям вокруг трех осей, пересекающихся в точке *O*, т. е. кинематическая цепь, показанная на рис. 69, эквивалентна кинематической паре, показанной на рис. 66.

На рис. 70 показана четырехподвижная кинематическая пара IV класса. Цилиндр *1* касается плоскости *2*. Звенья *1* и *2* имеют четыре движения относительно друг друга, два вращения вокруг осей z и y и два поступательных движения вдоль осей x и z. Простейшая эквивалентная цепь может быть получена, если воспользоваться условием, аналогичным условию (1). Имеем:

$$p_4 = \frac{6n+2}{4},$$

т. е. простейшей заменяющей цепью будет цепь, состоящая из числа звеньев $n = 1$ и числа пар IV класса $p_4 = 2$. Такая эквивалентная цепь показана на рис. 71. Звено *1* имеет втулки *a*, охватывающие пальцы *b*, принадлежащие звену *3*. Втулка *c*, принадлежащая звену *3*, охватывает цилиндрическую направляющую *d*, принадлежащую звену *2*. Движение звена *1* относительно звена *2* сводится к двум вращательным и двум поступательным движениям, т. е. цепь, состоящая

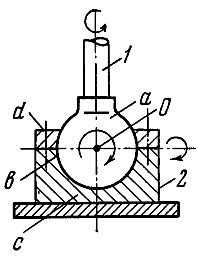


Рис. 68

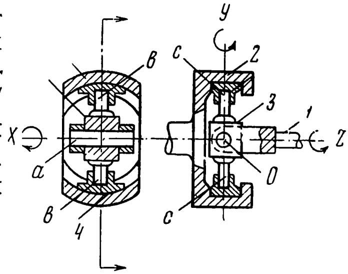


Рис. 69

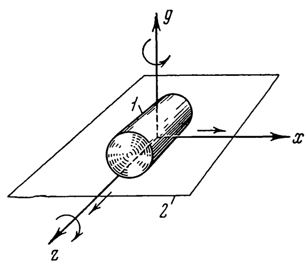


Рис. 70

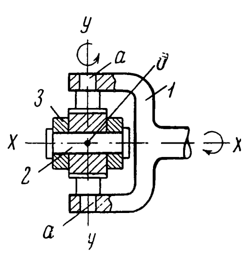


Рис. 71

из одного звена *3*, входящего в две цилиндрические пары IV класса (рис. 71), эквивалентна кинематической паре IV класса.

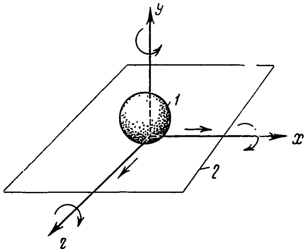


Рис. 72

На рис. 72 показана пятиподвижная пара V класса. Шар *1* соприкасается с плоскостью *2*. Звенья *1* и *2* имеют пять движений друг относительно друга, три вращения вокруг осей x, y и z и два поступательных движения вдоль осей x и z. Из условия, аналогичного условию (1), получаем:

$$4p_4 + 3p_3 = 6n + 1.$$

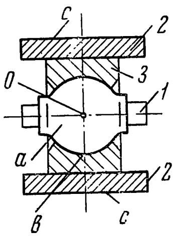


Рис. 73

Нетрудно видеть, что данное условие будет удовлетворяться при $n = 1$, $p_3 = 1$ и $p_4 = 1$. На рис. 73 показана такая эквивалентная цепь. Звено *1* имеет сферическую головку a, входящую в шаровой пояс b, принадлежащий ползуну *3*. Ползун *3* скользит в плоскостных направляющих c, принадлежащих звену *2*. Движение звена *1* относительно звена *2* сводится к трем вращательным и двум поступательным движениям, т. е. цепь, состоящая из звена *3*, входящего в одну пару III класса и одну пару IV класса (рис. 73), эквивалентна кинематической паре V класса.

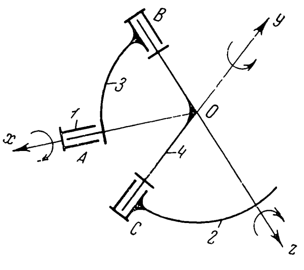


Рис. 74

Мы рассмотрели некоторые примеры замены пар I, II, III и IV классов цепями с парами более низких классов. При этом в основном использовали цепи с наименьшим возможным числом звеньев. Очевидно, что наибольшим числом звеньев будут обладать цепи, образованные парами только V класса. Такая цепь даже в простейшем случае будет состоять из четырех звеньев, входящих в пять кинематических пар (см. фиг. 123 табл. 2). Этой цепью можно с точки зрения структурной эквивалентности заменить пару, показанную на рис. 72. При этом из пяти пар V класса три пары будут вращательными и две пары поступательными. Если такая замещающая цепь должна удовлетворять и требованиям кинематической эквивалентности, то естественно, что на оси пар и их расположение друг относительно друга должны быть наложены дополнительные условия, связанные с геометрией соприкасающихся образов. Это можно ясно показать на замене шаровой пары III класса (рис. 68) эквивалентной цепью (рис. 74), состоящей из двух звеньев *3* и *4*, входящих в три вращательные пары V класса *A*, *B* и *C*. Нетрудно видеть, что такая цепь вследствие пересечения осей *x*, *y* и *z* кинематических пар *A*, *C* и *B* в общей точке *O* будет эквивалентна шаровой паре III класса (рис. 72) как структурно, так и кинематически.

Мы рассмотрели вопросы замены пар эквивалентными им цепями применительно к плоским механизмам третьего семейства и механизмам нулевого семейства. Аналогичные замены могут иметь место и в других семействах при условии, что на эти эквивалентные замещающие цепи наложены те же общие связи, как и на соответствующие семейства.

Л. В. Ассур показал, что плоские группы третьего семейства полностью определимы как с точки зрения кинетостатики, так и с точки зрения кинематики. Кинематическая определимость групп нулевого семейства и некоторых других семейств была в дальнейшем доказана в работах В. В. Добровольского, И. И. Артоболевского, Н. Г. Бруевича, Г. Г. Баранова и др. Кинетостатическая определимость групп была доказана Н. Г. Бруевичем [24] и развита Я. Б. Шором [25].

В этих работах показано, что задачи кинематики и кинетостатики групп любых семейств сводятся к решению

[24] *Н. Г. Бруевич*. Кинетостатика пространственных механизмов.— Труды ВВА РККА, 1937, № 22.

[25] *Я. Б. Шор*. Графические методы статики и кинематики сложных пространственных систем.— «Успехи математических наук», 1940, вып. 7.

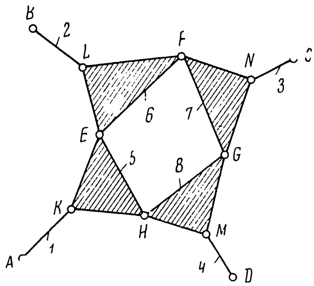


Рис. 75

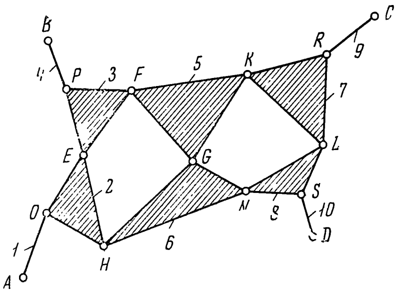


Рис. 76

систем линейных уравнений, в которые входят неизвестные величины, подлежащие определению (скорости и ускорения звеньев, силы и моменты, действующие на звенья), и метрические параметры механизма. При этом число неизвестных, подлежащих определению, всегда равно числу линейных уравнений. Это соответствие легко показать на группе любой сложности. Рассмотрим, например, плоскую группу третьего семейства IV класса (фиг. 48 табл. 3). Скорости $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_D$ (рис. 75) этой группы известны. Тогда векторные уравнения для определения скоростей всех звеньев группы примут вид:

$$\bar{v}_A - \bar{v}_B = \bar{\omega}_1 l_{KA} + \bar{\omega}_5 l_{EK} + \bar{\omega}_6 l_{LE} + \bar{\omega}_2 l_{BL}$$

$$\bar{v}_A - \bar{v}_C = \bar{\omega}_1 l_{KA} + \bar{\omega}_5 l_{HK} + \bar{\omega}_8 l_{GH} + \bar{\omega}_7 l_{NG} + \bar{\omega}_3 l_{CN}$$

$$\bar{v}_A - \bar{v}_D = \bar{\omega}_1 l_{KA} + \bar{\omega}_5 l_{HK} + \bar{\omega}_8 l_{MH} + \bar{\omega}_4 l_{DM}$$

$$\bar{\omega}_5 l_{EN} + \bar{\omega}_6 l_{FE} + \bar{\omega}_7 l_{GF} + \bar{\omega}_8 l_{HG} = 0.$$

Эта система четырех уравнений эквивалентна восьми линейным уравнениям. Для ее решения было развито много различных графических, графо-аналитических и аналитических методов. Своеобразный метод был предложен самим Л. В. Ассуром. Позже этот метод был упрощен Н. Е. Жуковским. Многие другие методы были разработаны как советскими, так и иностранными учеными. Роль этих методов в настоящее время, когда могут быть использованы счетно-решающие машины, малозначительна. В самом деле, решение систем линейных уравнений подобного типа или даже гораздо более сложных с помощью машин не представляет никаких сложностей. Важно только установить правила составления необходимой системы уравнений, т. е. составление алгоритма задачи. Нетрудно видеть, что эти уравнения составляются по единой схеме. Во-первых, выписываются уравнения кинематической зависимости между скоростями тех точек группы, которыми группа присоединяется к основному механизму (первые три уравнения системы). Далее имеется уравнение, характеризующее замкнутый контур группы (четвертое уравнение системы). Если контуров несколько, то число уравнений должно соответствовать числу контуров.

Так, например, для группы, показанной на рис. 76, составим три уравнения вида

$$\bar{v}_A - \bar{v}_B = \bar{\omega}_1 l_{OA} + \bar{\omega}_2 l_{EO} + \bar{\omega}_3 l_{PE} + \bar{\omega}_4 l_{BP}$$

$$\bar{v}_A - \bar{v}_C = \bar{\omega}_1 l_{OA} + \bar{\omega}_2 l_{EO} + \bar{\omega}_3 l_{FE} + \bar{\omega}_5 l_{KF} + \bar{\omega}_7 l_{RK} + \bar{\omega}_9 l_{CR}$$

и

$$\bar{v}_A - \bar{v}_D = \bar{\omega}_1 l_{OA} + \bar{\omega}_2 l_{HO} + \bar{\omega}_6 l_{NH} + \bar{\omega}_8 l_{SN} + \bar{\omega}_{10} l_{DS}$$

и два уравнения вида

$$\bar{\omega}_2 l_{EH} + \bar{\omega}_3 l_{FE} + \bar{\omega}_5 l_{GF} + \bar{\omega}_6 l_{HG} = 0$$

и

$$\bar{\omega}_6 l_{GN} + \bar{\omega}_5 l_{KG} + \bar{\omega}_7 l_{LK} + \bar{\omega}_8 l_{LK} + \bar{\omega}_8 l_{LN} = 0,$$

т. е. получаем системы, состоящие из десяти линейных уравнений с десятью неизвестными.

Тем же методом совместного решения систем линейных уравнений можно решать и все задачи, связанные с определением ускорений и реакций в кинематических парах. Метод может быть распространен и на механизмы всех других семейств и родов. Он может быть обобщен и на механизмы, у которых ведущим является звено, не связанное со стойкой. Рассмотрим, например, механизм, показанный на рис. 27, *а*. Для него надо составить уравнения, связывающие скорости или ускорения звеньев цепей *CFAGD* и *BE*, которые накладывают на движение звена *1* с заданной скоростью ω_1 две связи. Имеем для первой цепи:

$$\bar{v}_A - \bar{v}_C = \bar{\omega}_3 l_{FA} + \bar{\omega}_2 l_{CF}$$

$$\bar{v}_A - \bar{v}_D = \bar{\omega}_3 l_{GA} + \bar{\omega}_4 l_{DG}$$

для второй цепи:

$$\bar{v}_B - \bar{v}_E = \bar{\omega}_5 l_{EB}$$

и, наконец, условие связи:

$$\bar{v}_A - \bar{v}_B = \bar{\omega}_1 l_{AB}.$$

Мы получили систему из четырех уравнений, в которых $\bar{v}_C = \bar{v}_D = \bar{v}_E = 0$, угловая скорость ω_1 задана и остается восемь неизвестных: четыре угловых скорости ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и две скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Таким образом, задача о скоростях и аналогично об ускорениях и реакциях решается каждый раз как задача о совместном решении восьми линейных уравнений.

Более сложной для решения будут задачи о положениях звеньев. Эти задачи Л. В. Ассур рассматривал только частично, хотя они имеют важное значение для решения всех задач анализа и синтеза механизмов. В самом деле, нельзя даже начинать решение задач кинематического и кинетостатического анализа без построения последовательных положений звеньев механизмов. Закономерность последовательного положения ведущего и ведомого звеньев механизма называется функцией положений.

Геометрические методы нахождения положений звеньев механизма были развиты в работах В. В. Добровольского [26], Г. Г. Баранова [27], И. И. Артоболевского [28] и др.

В основу геометрических методов определения положений групп, образованных плоскими открытыми цепями третьего семейства, положена теорема Ассура о том, что при разъединении любой кинематической пары такие цепи распадаются на цепи, обладающие каждая

[26] *В. В. Добровольский.* Построение траекторий для плоских шарнирных механизмов.— Труды ВВА РККА, 1937, № 18.

[27] *Г. Г. Баранов.* Кинематика пространственных механизмов.— Труды ВВА РККА, 1937, № 18.

[28] *И. И. Артоболевский.* Теория пространственных механизмов. Ч. 1. М., 1937; Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. М., 1939.

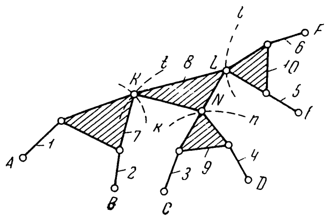


Рис. 77

одной степенью подвижности. Тогда задача сводится к задаче о пересечении двух геометрических мест, которые всегда могут быть построены. Рассмотрим это на примере группы, показанной на рис. 77.

Разделим звенья 7 и 8, входящие в кинематическую пару K. Тогда, поскольку положение точек A, B, C, D, E и F является фиксированным, группа распадается на два механизма III класса. Находим траектории k, l и n точек K, L и N. Далее, перемещая точки L и N по своим траекториям l и n, строим траекторию 1 точки K, принадлежащей звену 8. Пересечение геометрических мест k и t определит истинное положение точки K, после чего найти положение остальных точек будет нетрудно.

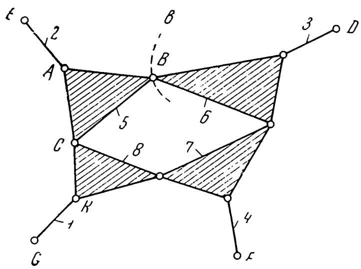


Рис. 78

Указанный Ассуром метод определения положений групп, образованных плоскими открытыми цепями третьего семейства, недостаточен для групп, образованных сложными замкнутыми цепями. Решение задачи о положении таких групп покажем на примере группы IV класса (рис. 78). Разъединим пары A, B и C. Тогда при фиксированных положениях точек E, D, F и G поводок 2 будет обладать одной степенью подвижности. Остальные звенья 1, 8, 7, 6, 3 и 4 образуют цепь с двумя степенями подвижности. Фиксируем положения одного из поводков, например, по-

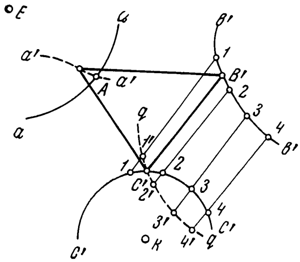


Рис. 79

ложение поводка *1*. Тогда легко построить траекторию b' точки B (рис. 79). Траекторией точки C при неподвижном поводке *1* будет окружность C' радиуса $C'K$, описанная из точки K как из центра. Находим далее на кривой b' ряд положений *1*, *2*, *3*, *4*.... точки B и соответствующие им положения *1*, *2*, *3*, *4* на окружности c'. Соединим точки *1*, *2*, *3*, *4* на полученных траекториях b' и c' прямыми и отложим на них длину BC звена *5*. Получим точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$,... ..., соединив их, находим геометрическое место $q - q$, в пересечении которого с окружностью c' лежит одно из возможных положений точки C'. Далее находим положения точек B' и A'. Фиксируя поводок *1* в другом положении, аналогичным методом получаем новые положения точки A. После этого положения остальных звеньев группы легко определить, если использовать ранее построенные геометрические места. Нетрудно видеть, что геометрические места, которые мы использовали, представляют собой алгебраические кривые весьма высоких порядков. Составление аналитических зависимостей для групп высших классов практически неосуществимо, поэтому для упрощения задачи используются методы: замены ведущего звена, обращения механизма и т. д.

При построении положений механизмов нулевого, первого и второго семейств задачи сводятся к нахождению геометрических образов в форме поверхностей, их линий пересечения и сечений этих поверхностей плоскостями.

В настоящее время для простейших плоских и пространственных механизмов составлены аналитические выражения для их функций положений. С помощью этих функций разработаны соответствующие алгоритмы для решения задач анализа и синтеза механизмов.

Уравнения функций положения являются, как правило, нелинейными и для сложных по структуре механизмов могут иметь весьма высокие порядки. Поэтому решение этих уравнений целесообразно вести на счетно-решающих цифровых машинах.

Заканчивая общий обзор теории структуры механизмов в свете идей Л. В. Ассура, остановимся на некоторых общих принципах классификации групп, образующих механизмы различных семейств.

Класс групп будем определять количеством кинематических пар, в которые входит звено жесткого контура или звенья подвижного контура. Тогда все группы смогут быть распределены на классы, начиная со II до бесконечности. В случае сложных групп класс всей группы будет определяться классом наивысшего контура, входящего в состав этой группы. Так, например, группа, показанная на рис. 46, будет группой VII класса, поскольку в ее состав наивысшими входят контуры A и D VII класса; группа, показанная на рис. 42, будет также группой VII класса и т. д.

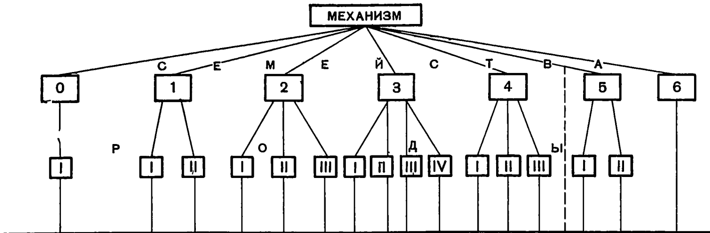
В отношении порядка группы в применении к сложным группам необходимо будет ввести некоторые обобщения и расширить это понятие. Так, если в простых группах порядок группы определялся количеством ветвей (поводков), причем эти ветви представляли собой цепи II класса, то в сложных группах ветви представляют собой цепи любых классов. Поэтому под ветвью (поводком) будем теперь понимать все те цепи, которые присоединены к главному контуру. Например, группа, показанная на рис. 46, будет группой седьмого порядка, так как к главному контуру A присоединяется семь цепей; группа, показанная на рис. 47, будет группой третьего порядка.

Для характеристики присоединенных поводков необходимо в сложных группах указывать класс контура, входящего в состав ветви, и частный его порядок. Например, в группе, показанной на рис. 46, имеется ветвь с контуром D VII класса и со своими семью ветвями II класса. Эта ветвь является ветвью наивысшего для данной группы класса. Поэтому при классификации группы, показанной на рис. 46, необходимо было бы дать следующее ее определение: «группа нулевого семейства, VII класса, седьмого порядка с ветвями не выше VII класса, седьмого порядка»; группа, показанная на рис. 47, будет «группой третьего семейства, VII класса, третьего порядка с ветвями не выше III класса, третьего порядка» и т. д.

В результате проведенного исследования может быть составлена следующая схема образования механизмов различных классов (табл. 9).

Все механизмы делятся на пять семейств: 0, 1, 2, 3 и 4. Семейства 5 и 6 введены нами условно, так как пятое семейство представляет элементарные кинематические пары, а шестое — фермы. Каждое семейство делится на роды. Для всех родов одного и того же семейства классификация будет общей. Все механизмы любого

Таблица 9



К Л А С С Ы											
К О Н Т У Р Ы											
cW=0	cW=1 до W=∞	cW=0	cW=1 до W=∞	cW=0	cW=1 до W=∞	cW=0	cW=1 до W=∞	cW=0	cW=1 до W=∞	Элементарные кинематические пары	Фермы
2		2		2		2		2			
3		3		3		3			3		
4		4		4			4		4		
5		5			5		5		5		
6			6		6		6		6		
	7		7		7		7		7		
	8		8		8		8		8		
	9		9		9		9		9		
	10		10		10		10		10		
	↓ ∞		↓ ∞		↓ ∞		↓ ∞		↓ ∞		

семейства могут быть образованы путем последовательного наслоения групп от II класса до бесконечности. При этом в нулевом семействе группы от II до VI класса включительно будут иметь жесткие контуры ($w = 0$); группы от VII класса и далее будут иметь подвижные контуры (от $w = 1$ до $w = \infty$). В первом семействе жесткие контуры будут иметь группы от II до V класса включительно; группы от VI класса и далее будут иметь подвижные контуры. Во втором семействе жесткие контуры будут иметь группы от II до IV класса включительно и т. д.

Таким образом, используя принципы, предложенные Ассуром:

а) для кинематических целей и механизмов всех пяти семейств можно создать единую классификацию;

б) кинематические цепи любой сложности можно образовать последовательным развитием жестких и подвижных контуров;

в) кроме основных кинематических цепей, можно получить любое количество производных цепей;

г) кинематические цепи различных семейств и классов можно получить использованием принципа последовательного вырождения цепей;
д) методы кинематического анализа кинематических цепей различных семейств, но одного и того же класса можно получить путем использования принципа последовательного вырождения этих цепей;
е) важной задачей теории механизмов является изучение структурных кинематических и динамических свойств кинематических цепей различных семейств и классов и выявление тех из них, которые могут быть использованы при построении новых механизмов.

В своих работах Л. В. Ассур особенно подчеркивает важность изучения структуры механизмов и создания их рациональной классификации в основном с позиций кинематического и кинетостатического анализа механизмов.

Вопросов синтеза механизмов и тем более синтеза машин он не рассматривал. Между тем для современного машиностроения развитие теории синтеза механизмов и машин имеет исключительно важное значение.

Но при синтезе механизмов нельзя ограничиваться только структурным синтезом, т. е. исследованием возможных сочетаний кинематических пар, образующих синтезированные цепи, как это было нами частично использовано выше. При синтезе механизмов необходимо учитывать конструктивные параметры, а также функциональное назначение механизма. Вот почему в последние годы были сделаны попытки создать классификации механизмов, структурно-конструктивных и по своему функциональному назначению. Эти классификации еще далеки от совершенства, но составляют основу современных пособий по проектированию механизмов, а также учебников для высшей школы. В них разумно сочетаются принципы классификации Ассура с особенностями конструктивного оформления элементов кинематических пар, оптимальными габаритами механизмов, требуемыми функциями положений, передаточными функциями или воспроизводимыми траекториями движения, кинематической и динамической точностью, динамическими характеристиками и т. д.

Синтез механизмов имеет ряд направлений, которые получили свое развитие в работах как отечественных, так и зарубежных ученых. Геометрические методы синтеза были широко использованы не только для синтеза механизмов с высшими парами, теоретически точно осуществляющими заданные функции положений и передаточных отношений, но и для приближенного синтеза механизмов с низшими парами с помощью соответствующих геометрических мест. Аналитические методы синтеза были широко использованы для приближенного воспроизведения механизмами с низшими парами требуемых функций положений и передаточных отношений. Для этих целей был привлечен математический аппарат: теории приближения функций, матрично-тензорный анализ, винтовое исчисление и другие разделы современной математики.

Среди различных методов синтеза особое положение занимает структурно-логический синтез, в основе которого лежит принцип последовательного наслоения логических элементов, выполняющих те или иные простейшие операции, чтобы полученные в результате этого наслоения механизм или машина осуществляли заданный в математической форме алгоритм.

Принцип получения сложного по структуре механизма с помощью наслоения более простых групп является фундаментальным открытием Л. В. Ассура, хотя, как это всегда бывает в науке, зародыши этого процесса можно найти в работах и более ранних исследователей. К их числу принадлежал Кемпе [29], показавший, как может быть осуществлен синтез плоского механизма третьего семейства с парами V класса для воспроизведения плоской алгебраической кривой любого порядка.

Пусть уравнение алгебраической кривой в неявной форме, имеющее общий вид

$$f(x, y) = 0, \tag{6}$$

представлено в следующем виде:

$$\Sigma A x^m y^n = 0, \tag{7}$$

где A — некоторая постоянная. Нетрудно показать, что воспроизведение с помощью кинематической цепи кривой,

[29] *A. B. Kempe*. On a general method of describing plane curves of the n-th degree by linkwork. Proc. of the London. Math. Society, T. 23, 1877—1878.

данной уравнением (7), сводится к ряду последовательных математических операций, выполняемых отдельными механизмами, соединенными в общую искомую кинематическую цепь.

Для этого достаточно располагать следующими механизмами:

а) для перемещения точки по заданной прямой;

б) для проектирования заданной точки на заданную прямую;

в) отсекающим на осях Ox и Oy равные отрезки;

г) для проведения через заданную точку прямой, параллельной данной;

д) для получения пропорциональных отрезков на двух прямых, проходящих через заданную точку (множительный механизм);

е) для сложения заданных отрезков (суммирующий механизм).

Из рассмотрения указанных механизмов видно, что они должны выполнять — путем геометрических построений — все те математические операции, которые необходимы для получения суммы членов, входящих в уравнение (7), т. е. операции сложения или вычитания, умножения и возведения в степень или деления и извлечения корня, опускания перпендикуляра, черчения параллельных линий и т. д.

Механизмы для перемещения точки по прямой весьма различны. Это могут быть механизмы

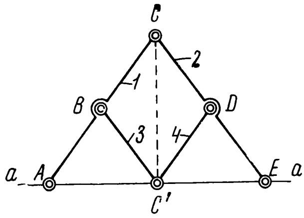


Рис. 80

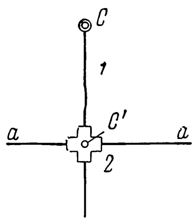


Рис. 81

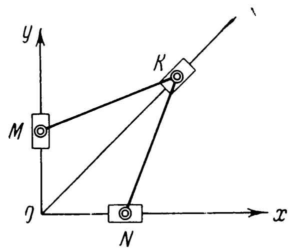


Рис. 82

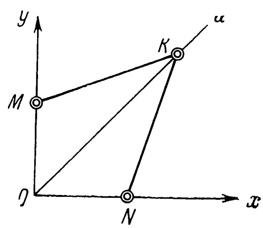


Рис. 83

только с вращательными парами, например точные направляющие механизмы. Более просты механизмы, имеющие в своем составе поступательные пары, например кривошипно-шатунные механизмы, некоторые виды кулисных механизмов и т. д.

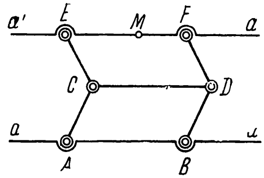


Рис. 84

Механизмы для проектирования заданной точки на заданную прямую также состоят или из одних только вращательных пар, как, например, механизм, показанный на рис. 80, или вращательных и поступательных пар. Пусть размеры звеньев кинематической цепи на рис. 80 удовлетворяют условиям $AC = CE$ и $AB = BC = CD = DE = BC' = C'D$. Тогда, если двигать весь механизм так, чтобы точки A и E перемещались по заданной прямой a — a (например, с помощью механизмов, для осуществления движения точки по прямой), то точка C' будет всегда лежать на прямой a — a и будет ортогональной проекцией точки C на эту прямую.

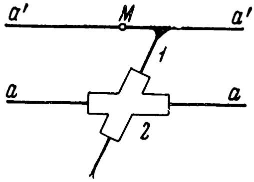


Рис. 85

Проектирование точки C на прямую a — a можно осуществить значительно проще, если, например, использовать крестообразный ползун *2* (рис. 81) со взаимно перпендикулярными направляющими, в одной из которых скользит звено *1*.

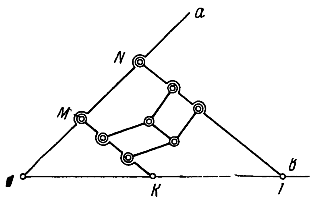


Рис. 86

Механизм, отсекающий на осях Ox и Oy (рис. 82) равные отрезки $OM = ON$, может быть образован из трех механизмов, воспроизводящих движение точ-

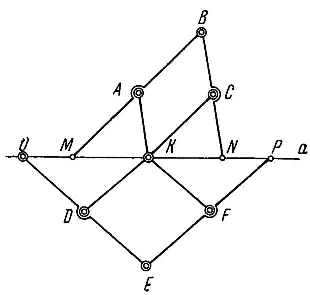


Рис. 87

ки M по оси Oy, точки N по оси Ox и точки K по прямой Oa, являющейся биссектрисой угла xOy. Если точки M, K и N соединить двумя звеньями MK и KN равной длины, то получим искомый механизм. Возможны и другие механизмы для воспроизведения данного геометрического построения, например, механизм с поступательными парами, показанный на рис. 83.

Механизм для проведения через заданную точку M прямой $a' - a'$, параллельной данной прямой $a - a$, показан на рис. 84. Это транслятор, представляющий собой механизм двойного параллелограмма, звенья которого удовлетворяют условиям $AB = CD = EF$, $AC = BD$ и $CD = DF$. Устанавливая звено AB вдоль заданной прямой $a - a$, а звено EF так, чтобы его ось проходила через точку M, получаем направление $a' - a'$, параллельное $a - a$.

Вариант механизма с поступательными парами показан на рис. 85. Угол между направляющими ползуна *2*, вообще говоря, может быть выбран произвольным.

Механизм для получения пропорциональных отрезков на двух прямых Oa и Ob (рис. 86) может быть создан с помощью рассмотренных кинематических цепей. Пусть на прямых Oa и Ob заданы точки M, N и K; требуется найти на прямой Ob точку L, удовлетворяющую условию

$$\frac{OL}{OK} = \frac{ON}{OM}. \tag{8}$$

Для этого с прямой MK связываем механизм вида, показанного на рис. 84 и 85, таким образом, чтобы прямая NL была параллельна прямой MK. Тогда прямая NL отсечет на прямой Ob отрезок OL, удовлетворяющий условию (8), если точки M, N и K перемещаются по прямым Oa и Ob.

Для сложения заданных отрезков OM и ON (рис. 7) так, чтобы

$$OM + ON = OP, \tag{9}$$

можно дважды применить механизм пантографа. Первый пантограф $MABCNK$ осуществляет деление отрезка MN пополам так, что отрезок

$$OK = \frac{OM + ON}{2}. \tag{10}$$

Второй пантограф $ODEFPK$ удваивает отрезок OK так, что отрезок

$$OP = 2OK. \tag{11}$$

Таким образом, всегда могут быть построены механизмы, выполняющие указанные выше геометрические построения. Сочетанием рассмотренных механизмов можно воспроизвести любую алгебраическую кривую, описываемую уравнением вида (7).

Пусть M есть некоторая точка плоскости xOy. С помощью механизмов, показанных на рис. 80, всегда можно найти проекции M_x и M_y этой точки на оси O_x и O_y так, что $x = OM_x$ и $y = OM_y$. Отметим далее на оси O_x некоторую точку S, для которой

$$OS = \frac{1}{A}. \tag{12}$$

Тогда можно с помощью механизма вида, показанного на рис. 86, на оси O_y построить точку P, которая бы удовлетворяла условию

$$\frac{OP}{OM_x} = \frac{OM_y}{OS}$$

или

$$OP = A(OM_x)(OM_y) = Axy. \tag{13}$$

Аналогично путем последовательного наслоения можно получить отрезки, выражающие Ax^2y, Axy^2, Ax^2y^2, Ax^3y, Ayx^3 ..., и окончательно на оси O_x или O_y может быть получена некоторая точка Q, удовлетворяющая условию

$$OQ = Ax^my^n. \tag{14}$$

При этом перенос отрезка OQ с одной оси на другую может быть всегда осуществлен механизмами вида, показанного на рис. 82 и 83.

Аналогично можно построить и слагаемые уравнения (7), если оно содержит члены, имеющие форму Bx^m или Cy^n.

Далее с помощью механизма вида, показанного на рис. 86, можно осуществить сложение отрезков (14) в форме

$$OQ_1 + OQ_2; OQ_1 + OQ_2 + OQ_3 \ldots$$
$$OQ_1 + OQ_2 + OQ_3 + \ldots + OQ_n.$$

Сумма всех этих отрезков должна равняться, согласно уравнению (7),

$$OQ_1 + OQ_2 + OQ_3 + \ldots + OQ_n = 0. \tag{15}$$

Следовательно, если полученный путем сложения отрезок

$$OR = \Sigma Ax^m y^n = 0 \tag{16}$$

приравнять нулю, т. е. совместить полученную точку R с началом координат (точкой O), то точка M будет описывать заданную алгебраическую кривую.

Нетрудно видеть из рис. 80 и 81, что основные цепи, выполняющие отдельные геометрические операции, представляют собой группы Ассура II класса или систему этих групп. Таким образом, можно считать, что плоская алгебраическая кривая любого порядка может быть воспроизведена методом последовательного наслоения групп Ассура.

Мы рассмотрели метод синтеза механизмов с помощью принципа наслоения цепей, в основе которого лежат простейшие геометрические образы. Этот метод был в дальнейшем развит В. В. Добровольским [30] и И. И. Артоболевским [31], которые использовали более сложные геометрические образы, применяя для этого методы проективной геометрии, теорию подер, теорию инверсии и трансляции геометрических образов.

Другим направлением синтеза механизмов и машин, основанным на принципе наслоения и представляющим собой один из разделов структуры логического синтеза, явился чисто алгебраический метод. Сущность его заключается в том, что если функции положений или функции передаточных отношений заданы аналитически, то воспроизведение требуемой функции может быть осуществлено путем последовательного наслоения механизмов, выполняющих простейшие математические операции. К таким механизмам относятся: суммирующие механизмы, множительные механизмы, механизмы возведения в степень, механизмы для воспроизведения тригонометрических функций и т. д. К более сложным механизмам относятся механизмы дифференцирующие, интегрирующие, для гармонического анализа и т. д. Этот метод имеет то преимущество, что он одинаково применим как для механиче-

[30] *В. В. Добровольский*. Теория механизмов для образования плоских кривых. Изд-во АН СССР, 1953.

[31] *И. И. Артоболевский*. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. Изд-во АН СССР, 1959.

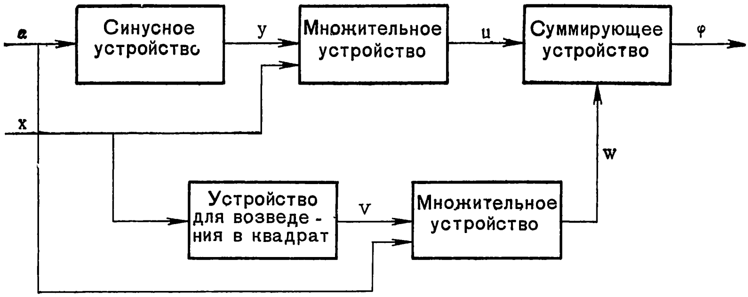


Рис. 88

ских систем, так и для электрических, электронных, пневматических или гидравлических и других систем. Этот метод лег в основу синтеза современных счетно-решающих устройств и машин [32].

Рассмотрим только один простейший пример для иллюстрации этого метода. Пусть, например, требуется просинтезировать устройство, вычисляющее зависимость следующего вида:

$$\varphi = x \sin \alpha + x^2 \alpha,$$

где α и x—безразмерные независимые переменные. Данную зависимость можно расчленить на отдельные операции, соответствующие набору простейших математических устройств.

Возьмем следующий набор механизмов:

$$y = \sin\alpha; \quad u = xy; \quad v = x^2 \text{ и } w = v\alpha.$$

Тогда основное уравнение перепишется так:

$$\varphi = u + w.$$

На рис. 88 показана формальная структурная схема устройства. Устройство состоит из одного синусного, двух множительных, одного устройства для возведения в квадрат и одного суммирующего устройства. Как уже указывалось выше, это могут быть как механические, так и другого вида устройства.

Из приведенных примеров структурно-логического синтеза видно, как принцип наслоения цепей, сформули-

[32] См. *Н. Г. Бруевич, Б. Г. Доступов.* Основы теории счетно-решающих устройств. «Советское радио», 1964.

рованный Ассуром, получил широкое развитие в современных машинах, приборах и устройствах. Можно было бы также показать, что принцип наслоения цепей был развит и в такой новой области теории машин, как теория управления. Например, построение сложных управляющих систем с использованием пневмоэлементов струйного типа [33] в основе своей имеет принцип наслоения цепей.

В нашем кратком обзоре мы отметили только основные вехи развития идей Ассура. Но это развитие не остановилось. Возможности идей Ассура до конца не исчерпаны. Ассур сам знал лишь единицы механизмов, образованных наслоениями групп высших классов и порядков; в настоящее время их знают значительно больше и в построении многих из них, несомненно, есть и доля идей Ассура.

При изучении работ Ассура надо постоянно помнить, что автор, имея недостаточный материал для рассуждений, делал задел на будущее и не всегда его положения были ясны. Однако среди этих зачастую излишне трудных и тяжеловесных предложений разбросано множество мыслей, острых замечаний, иногда, впрочем, и не полностью согласующихся друг с другом. Видно, что Ассур на страницах своего труда беседует с читателем и сам с собой, причем последнее чаще, иногда даже спорит и не всегда соглашается. Он волнуется, мысли иногда обгоняют слова и он не успевает положить их на бумагу, набрасывая себе для памяти лишь некоторые заметки. Основное исследование Ассура представляет собой диссертацию: защитить ее он успел, но на литературную обработку у него не хватило времени.

Авторы надеются, что настоящая книга в какой-то степени может послужить толчком к дальнейшему изучению поистине классического творчества Леонида Владимировича Ассура.

[33] См. *Е. В. Герц*, *В. П. Зинченко*, *Г. В. Крейнин*. Синтез пневматических приводов. «Машиностроение», 1966.

Список трудов Л. В. Ассура

1. К вопросу о плавности хода паровых машин.— Бюллетени политехнического общества, состоящего при Императорском техническом училище, 1906, № 8, стр. 341—352.
2. Две теоремы механики твердого тела в применении к изучению движения плоских механизмов.— Бюллетени политехнического общества, состоящего при Императорском техническом училище, 1907, № 6, стр. 301—306.
3. Аналоги ускорений и их приложение к динамическому расчету плоских стержневых механизмов.— Известия СПб политехнического института, Отдел технических, естественных и математических наук, 1909, т. 9, вып. 2, стр. 735—773; т. 10, вып. 1, стр. 43—74.
4. Основные свойства аналогов ускорений в аналитическом изложении.— Известия СПб политехнического института, Отдел технических, естественных и математических наук, 1909, т. 11, вып. 2, стр. 317—338.
5. Картины скоростей и ускорений плоских механизмов. СПб, 1911, издание литографированное.
6. Графические методы определения момента инерции маховиков. СПб, 1911, издание литографированное (соавтор К. Э. Рерих).
7. Die Methode der charakteristischen Kuwen, als Beihop zur gryaphiscen Auswertung mehrfachen Yntegrale.— ZMPh, 1912, т. 60, стр. 1—60.
8. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Ч. 1. Учение о нормальных многоповодковых цепях и роль их в образовании механизмов.— Известия СПб политехнического института, 1914, т. 20—21; Ч. 2. Приложение учения о нормальных многоповодковых цепях к общей теории механизмов.— Там же, 1915, т. 21—23; Дополнение ко второй главе первой части.— Там же, 1915, т. 24; Дополнение к первой главе второй части.— Там же, 1918, т. 24.
9. Схемы геометрического построения некоторых кривых. СПб, 1916, издание литографированное.
10. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Ред. статья и примечания акад. И. И. Артоболевского. М., Изд-во АН СССР, 1952.

Литература

1. *Артоболевский И. И.* Л. В. Ассур и его работы по теории механизмов.— В кн.: Труды по истории техники, вып. VII. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1954, стр. 3—11.
2. *Артоболевский И. И.* Русская школа по теории машин и механизмов.— Известия АН СССР, ОТН, 1943, № 7.
3. *Артоболевский И. И.* Русская наука о механизмах.— Вестник АН СССР, 1945, № 5—6.
4. *Артоболевский И. И., Бруевич Н. Г.* Русская школа по теории механизмов.— В кн.: 220 лет Академии наук. Юбилейная сессия АН СССР, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1947.
5. *Артоболевский И. И.* Русская школа теории механизмов и машин.— В кн.: Ученые записки МГУ, вып. 11, 1947.
6. *Артоболевский И. И.* Леонид Владимирович Ассур и его работы по теории механизмов.— В кн.: Л. В. Ассур. Исследование плоских стержневых механизмов... М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 576—590.
7. *Н. Е. Жуковский.* Отзыв о сочинении Л. В. Ассура «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации». Полн. собр. соч., т. VII, стр. 289. М., Гостехтеоретиздат, 1950.
8. *Боголюбов А. Н.* История механики машин. Киев, «Наукова думка», 1964.

Оглавление

Иван Иванович Артоболевский, Алексей Николаевич Боголюбов

Леонид Владимирович Ассур

(1878—1920)

Утверждено к печати редколлегией серии научно-биографической литературы Академии наук СССР

Редактор издательства *Н. Б. Прокофьева*. Художник *С. А. Данилов*

Художественный редактор *В. И. Тикунов*. Технический редактор *Ф. М. Хенох*

Сдано в набор 21/IX 1970 г. Подписано к печати 3/II 1971 г. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Печ. л. 8,5. Усл. печ. л. 1428 Уч.-изд. л. 13,9. Тираж 2700
Т-01457 Тип. зак. 1273. Бумага № 2 *Цена 85 коп.*

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

И. И. Артоболевский, А. Н. Боголюбов

Л. В. АССУР

И. И. Артоболевский
А. Н. Боголюбов

Леонид Владимирович

АССУР

Цена 85 коп.