РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

СЕРИЯ "НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА"

Основана в 1959 году

М. М. Коренцова

Колин МАКЛОРЕН

1698 - 1746

Ответственные редакторы
доктора физико-математических наук
С. С. ДЕМИДОВ, А. П. ЮШКЕВИЧ

МОСКВА
«НАУКА»
1998

УДК 51 (929) М.М. Коренцова
ББК 22.1
К 66

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук *Н.В. Александрова*,
доктор физико-математических наук *Г.П. Матвиевская*

Коренцова М.М.

Колин Маклорен. 1698–1746. – М.: Наука, 1998. – 144 с., ил. (Научно-биографическая литература)
ISBN 5-02-003691-9

Монография посвящена жизни и деятельности крупнейшего английского математика и механика XVIII в. Колина Маклорена. В блестящей плеяде учеников, последователей И. Ньютона К. Маклорен был наиболее одаренным и разносторонним. В "чистой" математике он внес существенный вклад в развитие алгебры, геометрии, анализа бесконечно малых. Интегральный признак сходимости, формула суммирования рядов, разложение в ряд и т. д. носят имя их создателя – Маклорена. Он получил также важные результаты в механике, астрономии, оптике. В книге освещена плодотворная общественно-политическая деятельность Маклорена.

Для широкого круга читателей, интересующихся развитием мировой науки.

ТП–97–II–182
ISBN 5-02-003691-9

Введение

Настоящая книга представляет собой научную биографию крупного математика и натурфилософа ньютоновской школы, видного деятеля эпохи Просвещения в Шотландии Колина Маклорена (1698–1746). Он известен своими открытиями в математическом анализе, геометрии, алгебре, различных приложениях анализа, как комментатор и популяризатор ньютоновской физики, как организатор академической науки в Шотландии, как университетский профессор математики. Его первая книга "Органическая геометрия" вызвала восхищение и одобрение Ньютона и была опубликована с его Imprimatur (рекомендация к опубликованию). За выходом его огромного "Трактата о флюксиях" по математическому анализу и его приложениям следили Л. Эйлер и А. Клеро, а первым его читателем и советчиком в процессе работы над книгой был Дж. Стирлинг. "Трактат по алгебре" Маклорена был не только научным трактатом, содержавшим новейшие результаты по этой науке, но и популярным университетским учебником. Маклорен интенсивно пропагандировал ньютоновскую физику и натурфилософию как в своих лекциях для студентов, так и в "Отчете о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона", который был опубликован уже после смерти его автора.

Маклорен сам подчеркивал, что в своих изысканиях следует за Ньютоном. Эта скромность до сих пор несколько умаляет роль Маклорена в глазах читающей публики. Да, Маклорен во многом следовал за Ньютоном, развивая его идеи, и, конечно, уступал своему учителю в оригинальности. Но каким прекрасным комментатором был Маклорен – можно судить по его "Органической геометрии", в которой развит ньютоновский метод органического описания кривых с помощью вращающихся углов. Ньютон лишь набросал схему, построив таким образом кривую второго порядка, и заявил, что аналогично можно получить кривые третьего и четвертого порядка. Все вместе это занимает не более 2–3 страниц текста, разбросанного по трем книгам Ньютона. Маклорен подробно разработал механизм получения алгебраической кривой произвольного порядка, описал ее свойства – наличие особых точек, асимптот, бесконечных ветвей – в нескольких десятках теорем и, в общем, исчерпал этот метод до конца.

Маклорен работал и жил в век Леонарда Эйлера (1707–1783), одного из величайших математиков всех времен, чье творчество значительно затмило труды его современников. А между тем, если присмотреться внимательнее, то окажется, что в ряде случаев Маклорен и Эйлер шли параллельно, были своего рода "сооткрывателями". Вот несколько примеров. Премию французской Королевской академии на тему о соударении тел Маклорен делит с Эйлером и Д. Бернулли. Параллельно они находят формулу суммирования рядов, которая и получает двойное название формулы Маклорена–Эйлера. Другие примеры такого рода читатель может найти в различных главах этой книги.

Как известно, между Ньютоном и Лейбницем возник спор по вопросу о первенстве открытия алгоритмов исчисления бесконечно малых. Начатый отнюдь не по их инициативе, он разверз пропасть между математиками Великобритании и Европейского континента, внес рознь и недоверие между двумя научными школами в области анализа. Поскольку школа Лейбница в трудах его последователей набирала силу, а школа Ньютона в конце XVIII в., напротив, пришла в упадок, то и Маклорен как ее наиболее крупный представитель оказался несколько на обочине историко-математической науки. Данная книга имеет своей целью привлечь внимание читателя к этой интереснейшей личности.

Маклорен был одним из тех ученых XVIII в., о которых Ф. Клейн писал, что они были гармоничными и универсальными личностями. Универсальность ученого той эпохи отчасти была вызвана слабой дифференциацией наук, но требовалась широта интересов и размах таланта, чтобы, подобно Маклорену, успешно заниматься всеми разделами математики, математической физикой, комментировать "Начала" Ньютона, вести астрономические наблюдения. Маклорен с 19 лет стал университетским профессором, весьма почитаемым и ценимым, оставившим заметный след в деле университетского образования. Его имя связано с тремя шотландскими университетами из четырех, существовавших в ту пору: он учился в г. Глазго, в Эдинбургском университете преподавал двадцать лет, в Абердине – семь лет. Маклорен был также одним из основателей Шотландской академии наук, которая на первых порах носила название Философского общества Эдинбурга. Маклорен становится ученым секретарем общества и ведет в нем основную организационную работу. Маклорена отличал яркий общественный темперамент, высокая гражданская активность. Примером тому является его деятельное участие в обороне Эдинбурга от повстанцев-якобитов*. Связанные с этим события послужили косвенной причиной ранней смерти математика.

Литература о жизненном пути Маклорена скудна. Имеется только одна, и притом краткая, биография, написанная после смерти Маклорена его другом, математиком и теологом Патриком Мэрдоком (?–1774). Некоторые сведения о Маклорене рассеяны в различных книгах по истории Великобритании и Шотландии, ее науки и образования. Недавно было опубликовано собрание писем Маклорена [82], которое дополняет и уточняет сведения о жизни и творчестве ученого. Мы неоднократно будем ссылаться на переписку Маклорена.

В предлагаемой книге семь глав. В первой главе описаны основные вехи жизненного пути Маклорена.

---

* Якобиты – сторонники изгнанного короля Якова II, боровшиеся за восстановление на престоле его прямых наследников.

Вторая глава посвящена обоснованию Маклореном математического анализа, который в конце XVII в. открыли Ньютон и Лейбниц. Нападки на основные понятия этого исчисления, действительно недостаточно проясненные его творцами, достигли своей кульминации в памфлете влиятельного философа епископа Дж. Беркли "Аналитик" (1734). В "Трактате о флюксиях" (1742) Маклорен построил исчисление флюксий на кинематико-геометрической основе, сформулировав в начале изложения группу аксиом.

В третьей главе мы рассмотрим вклад Маклорена в различные разделы математического анализа: теорию экстремумов, эллиптические и несобственные интегралы, ряды.

В четвертой главе дан анализ "Трактата по алгебре" (1748) – обработки университетских лекций по алгебре, изданного уже после смерти автора. Книга представляет собой комментарии к "Всеобщей арифметике" Ньютона, выдвинувшего много интересных идей, но часто без достаточного объяснения. Маклорен разъяснил некоторые теоремы и формулы "Всеобщей арифметики", а в применении определителей к решению систем двух и трех линейных уравнений опередил Г. Крамера.

В пятой главе рассмотрен "Отчет о философских открытиях сэра Исаака Ньютона".

В шестой главе приведен анализ одного из интереснейших исследований Маклорена по теории фигуры Земли, которое вошло в историю как учение об эллипсоидах Маклорена.

В седьмой главе дан очерк геометрических исследований Маклорена, содержащихся в уже упомянутой "Органической геометрии", "Трактате об общих свойствах геометрических фигур" и ряде статей.

Книга завершается перечнем основных дат жизни Маклорена, списком литературы.

Глава 1

Жизнь Маклорена

Ранние годы. Учеба в Глазго

Колин Маклорен принадлежит к старинному шотландскому роду, восходящему, по-видимому, к кельтам*. На гэльском языке – языке шотландских кельтов – его имя записывается как Cailean Maclabhruinn, что значит Колин, сын Лаврентия. Род Маклоренов в прошлом владел небольшим островом Тайри около западного побережья Шотландии, принадлежащего графству Аргайл. В одном из городков этого графства Килмодане родился Колин Маклорен в феврале 1698 г. Он был третьим сыном священника Джона Маклорена. Семья, по-видимому, была состоятельной. Биограф Маклорена, математик и теолог Патрик Мэрдок, пишет в жизнеописании своего друга, что деда Маклорена почитали в Инвэрери (столица графства Аргайл) за пожертвование на восстановление города, совершенно разрушенного во время английской революции и гражданской войны.

Детство Маклорена было омрачено смертью многих близких ему людей. Спустя шесть недель после его рождения умирает отец, в девятилетнем возрасте он теряет мать. После смерти родителей заботы о трех оставшихся сиротах – Джоне, Даниеле и Колине – принял на себя неженатый дядя Даниель Маклорен, тоже священник. Один из старших братьев, Джон, стал впоследствии известным священником и богословом, другой – Даниель – умер молодым, оставив, как пишет Мэрдок, "много доказательств исключительной гениальности".

Неизвестно, какую научную подготовку получил Маклорен до поступления в университет. Мэрдок говорит, что после смерти мужа мать Колина переехала в другой город в графстве Дамбартон, чтобы дать подходящее образование детям. В ту пору школьная жизнь для шотландского ребенка начиналась с пяти, иногда с семи лет. По истечении пяти лет школьник либо покидал начальную школу, либо отправлялся в большую городскую школу или прямо в университет, соответственно своим способностям. По-видимому, этот последний случай и имел место в жизни Маклорена, ибо он стал студентом старинного университета в Глазго, основанного в 1450 г., имея всего 11 лет от роду. Правда, мы должны при этом учесть два обстоятельства. В 1707 г. умерла мать, оставив на попечение брата мужа трех малолетних детей. Даниель Маклорен, занимавший приход в Килфинане, неподалеку от Килмодана, характеризуется Мэрдоком весьма положительно, но он все-таки

---

* Сейчас появились сомнения в знатности происхождения семьи Маклорена. Это следует из сопоставления документов того времени [82. С. XV].

был заинтересован в том, чтобы побыстрее пристроить сирот. Он сначала отдает в университет старшего мальчика, Джона, а затем и Колина.

Студент университета того времени жил в общежитии на полном пансионе, имел наставника – тьютора, так что был "под присмотром". С другой стороны, уровень преподавания в университетах в ту пору был весьма невысок, особенно на младшем факультете, который назывался факультетом искусств. В сущности факультет искусств был продолжением школы и давал студенту общую подготовку перед обучением на одном из трех старших факультетов: медицинском, богословском или юридическом. Заметим, что живший немного позднее известный шотландский философ Давид Юм (1711–1776) поступил в Эдинбургский университет в возрасте 12 лет. В те времена, когда студенты начинали обучение нередко в 14–15 лет, одиннадцати–двенадцатилетний студент все же был исключением.

На факультете искусств (это название идет от семи свободных искусств, преподававшихся в средневековой школе и делившихся на две группы: "тривиум" – грамматика, диалектика, риторика и "квадривиум" – геометрия, арифметика, астрономия, музыка) изучали древние и новые языки, античную литературу, логику, математику, натуральную философию. Факультет искусств давал две ученые степени: бакалавра и магистра. Магистр искусств получал право обучения на трех других факультетах.

Обучение в университетах долго велось по избранным классическим сочинениям преимущественно греческих и римских авторов или их изложениям. По математике это были сочинения Евклида, Аполлония, Паппа, Архимеда и др. Преподаватель обычно читал отрывок из книги, а затем шло обсуждение в форме диспута. Специальных учебников для университетов в ту пору почти не было. Будучи уже профессором Эдинбургского университета, Маклорен написал один из первых таких учебников – "Трактат по алгебре", который был весьма популярен в британских университетах XVIII в. С начала XVIII в. в университеты начинает проникать и наука Нового времени: ньютоновы "Начала", работы Лопиталя, Декарта, Валлиса.

Познакомился ли Маклорен с работами Ньютона в университете, или это случилось позднее – мы не знаем, однако он всегда считал себя учеником и последователем Ньютона. В самом деле, ранняя работа Маклорена – "Органическая геометрия" (1720) – была проникнута идеей Ньютона об органическом построении алгебраических кривых; в основном его сочинении – "Трактате о флюксиях" (1742) развивается и обосновывается ньютоновский метод флюксий; "Алгебра" представляет собой развернутый комментарий к "Универсальной арифметике", а "Отчет о философских открытиях сэра Исаака Ньютона" (1748) – комментарий к "Математическим началам натуральной философии".

В университете Маклорен оказался под влиянием видного математика Роберта Симсона (1687–1768). Он, подобно Маклорену, также был уроженцем Аргайлшира, как и он, поступил (в 1701 г.) в университет Глазго, где спустя десять лет получил место профессора математики.

Научные интересы Симсона почти целиком находились в области греческой математики, изучению и пропагандированию которой он посвятил всю жизнь. Его издание "Начал" Евклида долгое время считалось лучшим в Великобритании: книга переиздавалась почти тридцать раз. Известный геометр середины XIX в. Мишель Шаль с большой похвалой отзывался о работе Симсона по восстановлению другого утраченного трактата Евклида – "О поризмах". Его текст пришлось собирать по отдельным отрывкам, рассеянным по разным источникам. Между тем, поризмы Евклида были частью высшей, а не элементарной геометрии: они имели предложения, относящиеся к теории трансверсалей и к проективной геометрии.

Сам Маклорен писал, что в одном из поризмов увидел намек на то, что впоследствии стало называться теоремой Маклорена–Брейкендриджа [82. С. 247].

Роберт Симсон славился и как умелый преподаватель математики, многие его ученики впоследствии заняли математические кафедры шотландских университетов, а сам он был профессором математики в Глазго в течение полувека (!).

Как пишет Патрик Мэрдок, Маклорен в своем студенческом дневнике с восторгом описывает встречи и беседы с профессором Симсоном, тогда еще начинающим преподавателем. Сильнейшее влияние, оказанное Симсоном на Маклорена в столь юные годы, отразилось затем и на творчестве Маклорена. Симсон воспитывал в учениках любовь к синтетическим методам, которые предпочитал аналитическим. Известный английский историк Бокль пишет, что у Симсона и его учеников была "особенная любовь к самым утонченным способам разрешения задач и презрение к способам более легким, но менее изящным, которыми мы обязаны алгебре". Это высказывание нельзя вполне отнести к Маклорену, который, выйдя из университета, занимался как геометрией, так и инфинитезимальными методами и алгеброй. Но стремясь обосновать логически безупречно свой метод флюксий, он искал опору, наряду с кинематикой Ньютона, также и в геометрии древних. В предисловии к "Трактату о флюксиях" он писал: "Когда уверенность в какой-то части геометрии становится сомнительной, самый лучший путь найти истину в полном объеме и предотвратить споры – это вывести ее из аксиом или первоначальных принципов, являющихся очевидным, с помощью строгих доказательств, следуя способу древних геометров".

Знакомство юного Маклорена с Евклидом состоялось в первый год учебы в университете. Он увидел "Начала" в комнате друга и самостоятельно изучил первые пять книг этого сочинения за несколько дней. (Другой великий геометр Блез Паскаль (1623–1662) в 10 лет уже изучил Евклида, а в 16 лет открыл знаменитую теорему о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Кстати, у Маклорена имеется обобщение этой теоремы, которое он получил также в весьма юном возрасте – см. главу 7.)

В возрасте 15-и лет Маклорен закончил факультет искусств и получил степень магистра искусств после публичной защиты диссертации на тему "О силе тяготения". Как писал сам Маклорен, в тезисах обосновывается "универсальность закона тяготения" и проистекающая из него необходимость "первой причины": все это вместе "есть наиболее ясное и математическое доказательство существования Бога, его предусмотрительности" [82. С. 159]. Так причудливо в сознании юного философа слились новейшая физическая теория Ньютона и старые богословские учения.

Еще год Маклорен занимался на богословском факультете, а затем вышел из университета и поселился у дяди в Килфинане. Последующие три года весьма уединенной деревенской жизни были посвящены самообразованию. Он занимался и преподаванием, был частным учителем, по английски – тьютором.

Городок Килфинан в графстве Аргайл лежал в горной Шотландии. Исторически Шотландия разделена на две части: Highlands (высокая или горная страна) и Lowlands (равнинная страна). Гайлэндсы включали в себя север и запад Шотландии. Их жители – гайлэндеры, т. е. горцы – были в основном выходцами из кельтской расы. Во времена Маклорена многие из них говорили на гэльском языке – диалекте древнего кельтского языка. Вера их представляла собой смесь католической религии и язычества, поэтому горные кланы поставляли значительную часть якобитов – сторонников изгнанного в 1688 г. короля Якова II Стюарта, приверженца католичества.

Род Маклорена не принадлежал к горным кланам, его религией было пресвитерианство – разновидность протестантства, которое со временем стало всеобщей религией шотландского народа.

Живописная красота горной Шотландии (этот суровый край, его история, жизнь горцев были позднее так великолепно описаны Вальтером Скоттом в его многочисленных романах), прогулки по берегам залива Лох Файн, около которого стоял дом дяди, настраивали юного магистра на возвышенный лад. В его дневнике звучит "гимн совершенству и великолепию природы", они "обнаруживают чувствительный и возвышенный строй души юного автора", как сказано у Мэрдока. Плодотворно протекало изучение математики и философии, а также чтение античных авторов. В эти годы Маклорен обдумывает свою первую книгу – "Органическую геометрию", толчок которой был дан еще в университете. Книга была в основном завершена в 1719 г., а напечатана спустя год по рекомендации, как было упомянуто, Ньютона.

Знакомство с Ньютоном. Абердин

Осенью 1717 г. Маклорен покидает дядин дом, чтобы получить кафедру математики в другом университетском городе Шотландии – Абердине. Там существовало два учебных заведения: Королевский колледж и Маришаль-колледж. Они возникли в разное время и были расположены в разных частях города. Королевский колледж был основан в 1494 г. на основе буллы папы Александра VI; Маришаль-колледж возник спустя век, в 1593 г. Первый колледж был более пронизан католическим, "папистским" духом, второй был создан как орган реформаторской церкви. Выбор университета определялся религиозными убеждениями студента, его семьи. Оба колледжа были слиты в один университет лишь в 1860 г. Это были небольшие учебные заведения: в 1824 г. в обоих колледжах Абердина было 550 мест. Эдинбургский университет имел тогда же 2300 студентов, а университет в Глазго – 1240 студентов. Самый маленький шотландский университет Сэнт-Эндрью насчитывал к этому времени 300 студентов.

Вакансия профессора математики открылась в 1717 г. в Маришаль-колледже Аберлина. На место претендовал, помимо Маклорена, еще один участник конкурса. В течение десяти дней длились конкурсные испытания. Предпочтение было отдано Маклорену, так как он обнаружил лучшее знакомство с высшими разделами математики.

В последующие семь лет Маклорен преподавал в Маришаль-колледже; подробностей об этой его деятельности мы не знаем. Мэрдок лишь замечает вскользь, что Маклорен поднял здесь уровень преподавания математики. Заметим, что положение университетского профессора в те времена отличалось от нынешнего. У него не обязательно были классы, где читались бы публичные лекции – не всегда находились слушатели. Ему достаточно было обучать одного–двух студентов, быть для них наставником – тьютором. Тем более, что сам профессор был в данном случае весьма юным – 19 лет. Маклорен, повидимому, не был загружен преподавательской работой, и это высвобождало время для научных занятий. Одна за другой в "Philosophical Transactions" – издании Лондонского Королевского общества – появляются его первые статьи: "О построении и измерении кривых" (1718) и "Новый метод описания кривых всех видов" (1719). Статьи обращают на себя внимание в ученых кругах, где Маклорен завязывает знакомства, особенно во время каникулярных поездок в Лондон.

Лето и осень 1719 г. были особенно знаменательными для Маклорена. Во-первых, была закончена и сдана в печать первая книга – "Органическая геометрия", во-вторых, состоялось знакомство с Ньютоном, бывшим в ту пору президентом Королевского общества, и, наконец, Маклорен был избран действительным членом (fellow) Королевского общества. И это в замечательно раннем возрасте – в 21 год!

"Органическая геометрия" ("Geometria Organica") вышла спустя год: в нее вошел материал ранее опубликованных статей Маклорена. В книге развит метод, который применил Ньютон в "Перечислении кривых третьего порядка" (1704). Если два постоянных угла с закрепленными вершинами вращать так, что точка пересечения двух сторон углов пробегает прямую, то в пересечении двух других сторон образуется коническое сечение. Усложняя этот механизм, можно получить кривые третьего, четвертого и вообще любого порядка. Такой процесс порождения кривых получил название органического описания кривых. Ньютон этот процесс применил к кривым третьего порядка, 72 вида которых он и рассмотрел в упомянутом "Перечислении". Эту классификацию затем незначительно пополнили Дж. Стирлинг и А. Клеро.

Маклорен существенно развил метод органического описания. Он рассматривал случай нескольких, а не только двух углов постоянной величины, образующих своего рода шарнирный механизм, на "выходе" которого получалась кривая, порядок который определялся как исходной кривой, так и промежуточными траекториями, которые описывают вершины движущихся углов. Свойства порождаемых органическим описанием кривых, их порядок, число точек возврата, кратные точки и т.п. описаны в ряде теорем. Методом органического описания Маклорен получил много замечательных кривых, частью уже известных, как, например, спираль Вариньона, улитка Паскаля и другие, частью новых. Одна из них вошла в литературу как "трисектриса Маклорена". Он изучил свойства подэр кривой – геометрических мест оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к данной кривой.

Первая книга Маклорена была пронизана идеями и методами, позднее развитыми в алгебраической геометрии, проективной геометрии, теории кремоновых преобразований.

В университете Маклорен становится тьютором Патрика Хьюма, старшего сына именитого сановника графа Полворта, и в качестве его наставника и компаньона отправляется в путешествие по Европе летом 1722 г. Предполагалось посетить Лотарингию и ряд провинций Франции: Пикардию, Шампань и Камбрэ.

Первая остановка была сделана в Париже, где молодые люди обзавелись знакомствами в светских и научных кругах. Здесь Маклорен узнает, что Королевская академия наук Франции объявила конкурс на лучшую работу по теории удара. Он принял участие в конкурсе и в 1724 г. получил премию*. Материал конкурсной работы он включил затем в "Трактат о флюксиях" и в "Отчет о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона".

Вместе с тем геометрическая проблематика продолжала его интересовать. Тема органического описания кривых в "Органической геометрии" была, по-видимому, уже исчерпана, и Маклорен обратился к гармоническим свойствам кривых второго и третьего порядков. Однако свои изыскания по этому вопросу, относящиеся к 1722 г, он отправил в Королевское общество только в 1732 г., а опубликованы они были в 1735 г. Эта статья содержала следующее обобщение теоремы Паскаля: "Если многоугольник построен так, что его стороны проходят через фиксированные точки, и если все его вершины, исключая одну, описывают кривые порядков m, n, p, соответственно, то свободная вершина движется по кривой порядка $2 \times m \times n \times p$; если же данные фиксированные точки коллинеарны, то порядок полученной кривой равен $m \times n \times p$".

Между тем каникулярный визит в Европу затягивался. После Франции путешественники остановились в Лотарингии, где были представлены ко двору лотарингского герцога, одному из наиболее изысканных в Европе. Здесь, как пишет Мэрдок, Маклорен, благодаря своему

* Премию на этом конкурсе получили тогда Леонард Эйлер и Даниил Бернулли.

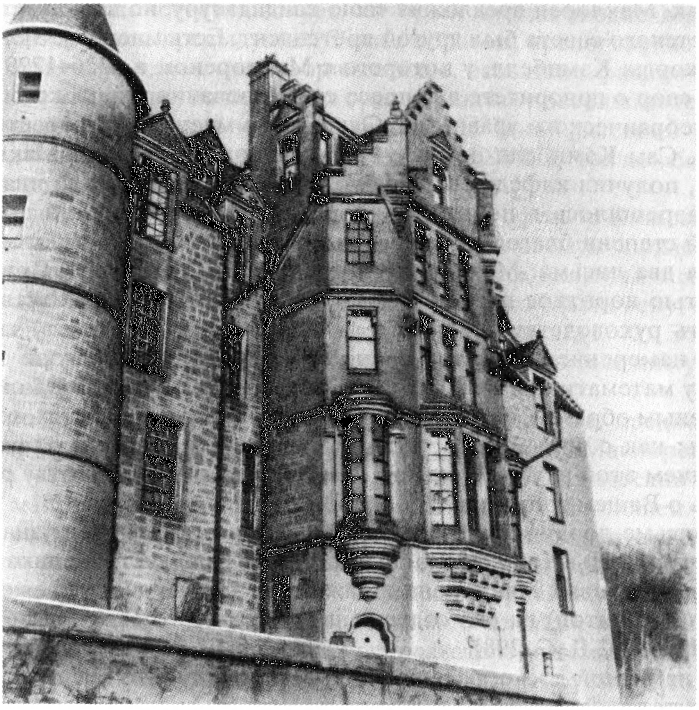
уму и обаянию, приобрел уважение "наиболее выдающихся особ обоего пола". В Лотарингии Маклорен написал упомянутую работу "О соударении тел". Путешествие завершилось в южных провинциях Франции весьма трагически. Молодой Полворт неожиданно в сентябре 1724 г. заболел лихорадкой и скоропостижно скончался. Маклорен, привязавшийся к своему подопечному и считавший себя отчасти виновным в том, что не уберег его, тяжело переживал эту смерть. Однако надо было возвращаться в Абердин. Там были недовольны долгим отсутствием Маклорена, тем более, что он не взял разрешения на отпуск для путешествия в Европу. Однако к тому времени слава Маклорена как молодого выдающегося математика была такова, что он вправе был претендовать на место в более крупном университете. Выбор его пал на Эдинбург, столицу Шотландии.

Преподавание в Эдинбургском университете

Кафедра математики в Эдинбурге была учреждена в 1674 г. Первым ее занял крупнейший шотландский математик Джеймс Грегори (1638–1675), член Королевского общества с 1668 г. [53, Т. I. С. 215–216]. Несмотря на короткую жизнь (он умер в возрасте 37 лет), Грегори внес значительный вклад в различные ветви математики, включая и исчисление бесконечно малых. Анализ рукописей Грегори позволяет сделать вывод, что он владел разложением функции в степенной ряд [55] значительно раньше не только Тейлора, но и Ньютона, в рукописи которого за 1661 г. это разложение выписано*. Дж. Грегори получил формулу приближенного интегрирования, которая была позднее переоткрыта Томасом Симпсоном и носит его имя. С помощью рядов он выполнил разнообразные квадратуры: пытался доказать, что круговые и логарифмические функции не могут быть сведены к алгебраическим операциям, т.е. являются трансцендентными функциями.

Его племянник Дэвид Грегори (1661–1708), видный астроном, учился в Эдинбурге, где и получил степень магистра искусств в 1683 г. С этого года он становится профессором математики и занимает кафедру дяди спустя восемь лет после его смерти. Математикой он заинтересовался, разбирая архив своего дяди. Дэвид Грегори развил метод квадратур при помощи бесконечных рядов. В числе первых британских профессоров он читал лекции по "Началам" Ньютона, а также по геодезии, динамике, оптике и различным ветвям математики. По рекомендации Ньютона он занял кафедру астрономии в Оксфорде в 1691 г., а в 1692 г. стал членом Королевского общества. Дэвид Грегори издал сочинения Евклида (1703), написал "Астрономию" (1703). "Кат-

* Таким образом, название "ряд Тейлора" явно устарело. В некоторых современных сочинениях уже вносятся коррективы. Так, известный математик Морис Клайн в книге [60] называет ряд Тейлора рядом Грегори–Ньютона.



Дом в пригороде Эдинбурга,
в котором жил Маклорен в 1730 г.

оптрику" (1705), служившие пособиями в британских университетах. Маклорен перевел его математические лекции с латыни на английский язык. Книга вышла в Эдинбурге в 1745 г. под названием "Трактат по практической геометрии". Как учебник "Трактат" был популярен, вышел в девяти изданиях.

После переезда Дэвида Грегори в Оскфорд кафедру математики в Эдинбурге занял его младший брат Джеймс (1666–1742), значительно уступавший дяде и брату в способностях, но также бывший одним из первых лекторов по "Началам" Ньютона. К 1725 г. ситуация, сложившаяся на кафедре математики в Эдинбурге, была следующая. Дж. Грегори II уже не мог по состоянию здоровья вести преподавание в полном объеме (до этого он занимал кафедру уже более 30 лет), и стали искать человека, который бы совмещал с ним эту должность, был бы a joint Professor, т.е. "совмещающим" профессором. Однако по уставу университета жалованье в размере 50 фунтов стерлингов ежегодно полагалось выплачивать одному человеку, в данном случае Дж. Грегори, "совмещающий" профессор должен был работать, таким образом, бесплатно. Маклорен, избранный на эту должность, не получал жалованья до самой кончины Грегори (в 1742 г.).

Итак, Маклорен предложил свою кандидатуру, но на примете университетского совета был другой претендент. Есть мнение [53], что им был Джордж Кэмпбелл, у которого с Маклореном в 1726–1729 годах возник спор о приоритете в вопросе существования комплексных корней алгебраического уравнения. Однако это мнение оспаривается [82. С. 172]. Сам Кэмпбелл позднее выражал сожаление, что Маклорен, а не он, получил кафедру в Эдинбурге [82. С. 423]. Так или иначе, но дело разрешилось в пользу Маклорена, и это произошло в значительной степени благодаря энергичному вмешательству Ньютона. Он написал два письма: Маклорену и лорду-мэру Эдинбурга. Приведем полностью короткое первое письмо, которое Ньютон рекомендовал показать руководству университета. "Я был рад услышать, что Вы имеете намерение совместно с мистером Джеймсом Грегори занять кафедру математики в Эдинбурге, не только потому, что Вы мой друг, но, главным образом, потому что Вы, при ваших способностях, хорошо знакомы как с новыми открытиями в математике, так и с прежним состоянием этой науки. Я желаю Вам большого успеха и буду рад услышать о Вашем избрании" [67. С. IV].

В письме лорду-мэру Эдинбурга, о котором Маклорен узнал уже после смерти Ньютона от его родственника Кондуитта, великий ученый рекомендовал Маклорена и даже готов был "вносить ежегодно деньги (20 фунтов) на его содержание, пока место Грегори не освободится" [53. Т. II. С. 298].

На памятной доске, посвященной Маклорену, что висит на стене университетской церкви в Эдинбурге, начертаны слова: Newtono suadente (рекомендованному Ньютоном).

В Эдинбурге Маклорен пользовался чрезвычайно высокой репутацией и большим авторитетом как среди студенчества, так и в научных и общественных кругах.

Кафедру математики Маклорен занимал здесь до конца жизни, т.е. более 20 лет. Сохранилось описание программы его занятий, относящееся к 1741 г. и напечатанное в журнале "Scots magazine". В математических классах он вел ежегодно 3–4 лекционных курса, постепенно усложняющихся. Первый курс – для начинающих – состоял из основ арифметики, первых шести книг "Начал" Евклида, плоской тригонометрии с использованием таблиц логарифмов и тригонометрических функций и начал алгебры. Маклорен учил первокурсников съемке местности (surveying), фортификации, а также читал один раз в две недели лекцию по географии. Во второй курс Маклорен включал сферическую тригонометрию, конические сечения с теорией баллистики, более серьезный курс алгебры, начала астрономии и оптики.

Третий курс он начинает с перспективы, после чего более полно трактует астрономию и оптику. Затем он читает лекции по "Началам" Ньютона и излагает прямой и обратный методы флюксий. С середины декабря он начинал курс "экспериментальной философии" (по-нашему: физики) и вел его трижды в неделю до начала апреля: по ночам он показывал планеты с помощью телескопов различных видов [53. Т. 1. С. 272].

И, наконец, четвертый курс, который иногда вводил Маклорен, был повторением предыдущих. Таким образом, преподавание Маклорена охватывало, как мы говорим сейчас, весь цикл физико-математических дисциплин, начиная с их основ и кончая новейшими теориями: механикой Ньютона и методом флюксий. Такой высокий уровень преподавания математики в первой половине XVIII в. могли обеспечить немногие британские университеты.

Среди современников, пожалуй, только профессор Николай Саундерсон, занимавший математическую (так называемую люкасовскую) кафедру в Кембридже после Барроу и Ньютона, включал в свои лекции такой широкий круг вопросов. Он, подобно Маклорену, написал "Элементы алгебры" (1741) и "Трактат о флюксиях" (1742). Эти книги также служили пособиями для студентов, но в научном плане уступали маклореновым.

Программа математических классов в Эдинбурге, предложенная Маклореном, утвердилась почти на столетие. Лекции Маклорена отличались методическим мастерством; при нем математические классы, ранее малочисленные, посещали ежегодно около ста юношей. Это немало, если учесть, что общее число студентов университета в начале XVIII в. равнялось 1300. Многие его ученики отзывались похвально о занятиях профессора Маклорена. Александр Карлейль, известный шотландский историк и литератор, вспоминал о нем, как о "чрезвычайно ясном и в высшей степени милом преподавателе математики" [53. Т. 1. С. 275]. Патрик Мэрдок, неоднократно нами цитируемый, тоже был учеником Маклорена. Он свидетельствует, что изложение его старшего друга отличалось "такой ясностью языка и метода, что его доказательства часто не требовали повторения. Если же студенты что-то не понимали, то Маклорен охотнее предпочитал заподозрить неясность в своем рассказе, чем в студентах – недостаток старания и способностей. В таких случаях он старался дать доказательство другим способом".

Преподавание отнимало много времени у Маклорена. В течение учебного года (который длился, как было выше сказано, с 1 ноября по 1 мая) он имел ежедневно 4–5 часов занятий. Это, конечно, отрывало его от творческой работы: впрочем, интересы преподавания и творчества у него заметно переплетались.

В 1734 г. философ Джордж Беркли, епископ Клойнский, опубликовал памфлет "Аналитик", в котором обвинил творцов математического анализа и их последователей в том, что начала этой науки полны тумана и мистики, а верные результаты получаются благодаря компенсации ошибок в ходе вычислений. Памфлет задел за живое многих математиков, и они вступили в полемику с Беркли. В бой ринулся и Маклорен, однако посоветовавшись со Стирлингом, он решил не ограничиваться полемической статьей, а "написать трактат о флюксиях, который бы соответствовал этой цели и был полезен моим школярам" [82. С. 250]. Так возник замысел основного труда Маклорена – "Трактата о флюксиях", – который начал печататься с 1736 г. и стал известен с этого времени ближайшему окружению Маклорена –

Дж. Стирлингу, Р. Симсону и другим. Полностью сочинение вышло в 1742 г.

Другая книга, "Трактат по алгебре в трех частях", была с самого начала задумана как пособие для студентов и являлась обработкой университетских лекций Маклорена. В качестве учебника она использовалась в Англии до конца века.

Замысел и общий план алгебраического трактата относятся к 1726 г., но опубликован он был уже после смерти автора. Хотя книга в целом вполне элементарная, в ней рассмотрены и новые вопросы. Маклорен первым предложил решение систем двух, трех и четырех линейных уравнений с помощью детерминантов, опередив в этом Г. Крамера*. Он дал доказательства некоторым теоремам и правилам "Всеобщей арифметики" Ньютона, в частности, правилу нахождения числа комплексных корней алгебраического уравнения. В процессе работы над "Алгеброй" он поместил в "Philosophical Transactions" две статьи по этому правилу Ньютона. История их появления связана со спором о приоритете, который разгорелся в 1726–1729 годах между Маклореном и Джоржем Кэмпбеллом, шотландским математиком средней руки.

Хронология событий такова. В 1726 г. Маклорен печатает небольшую статью "Об уравнениях с невозможными (improssible) корнями". В ней сообщается метод, позволяющий частично объяснить теорему Ньютона. Спустя два года Дж. Кэмпбелл публикует развернутую статью "О числе невозможных корней", где это число находится уже более точно. Маклорен усматривает в ней заимствование из своей прежней публикации и в следующем году публикует исчерпывающее изложение своего метода. Результаты обоих математиков весьма сходны. Им обоим не удалось, впрочем, до конца решить вопрос. Он был решен только в XIX в., когда Дж. Сильвестр установил точный критерий числа мнимых корней (об этом ниже).

Обстоятельства спора обсуждались в переписке Маклорена и Стирлинга. Статьей Маклорена от 1729 г. он не завершился, так как после нее Кэмпбелл в свою очередь обвинил Маклорена в плагиате. Маклорен был вынужден защищаться. Он пишет письмо в Королевское общество, содержащее выдержки из писем к Стирлингу, и опровергает нападки Кэмпбелла.

Оба спорщика получили свои результаты, вероятно, независимо. Такого мнения был Стирлинг, который был посвящен во все детали и которого, как друга Маклорена, трудно заподозрить в расположении к Кэмпбеллу. Эта дискуссия весьма показательна для нравов научной среды того времени. Нашумевший спор о приоритете между Ньютоном и Лейбницем, который был по сути спором между британскими и континентальными математиками, весьма наэлектризовал атмосферу и усилил подозрительность. Там и сям вспыхивали тяжбы о первенстве. Большей частью обе стороны, как и в нашем случае, были неправы, и тем не менее полемика длилась годами.

---

* Габриель Крамер, швейцарский математик, изложил свой способ решения систем с помощью определителей в [108] (1751).

Дружба с Джеймсом Стирлингом. Переписка Маклорена

На Эдинбургский период жизни Маклорена приходится его дружба с Джеймсом Стирлингом (1692–1770), видным математиком, выходцем из старинного шотландского рода. Получив образование в Глазго, а затем в Оксфорде, Стирлинг из-за политических и религиозных убеждений – он был якобитом – не смог получить кафедру в Великобритании и отправился в 1717 г. с этой целью в Италию. В 1725 г. он возвращается в Лондон и находит там преподавательскую работу. К этому времени у него уже были опубликованы два мемуара: о линиях третьего порядка и о методе разностей Ньютона. В работе о линиях третьего порядка Стирлинг дополнил ньютоновскую классификацию кривых третьего порядка, насчитывающую 72 вида, еще четырьмя случаями.

В 1726 г. Стирлинг был принят в Королевское общество. Примерно к этому времени относится его знакомство с Маклореном. Дружбой и мнением Стирлинга Маклорен весьма дорожил. Оба были друзьями Ньютона и оба в науке шли по его стопам. Из переписки следует, что Маклорен посвящал Стирлинга в свои изыскания по методу флюксий, в перипетии спора с Кэмпбеллом, обсуждал с ним вопрос о форме Земли. Стирлинг просматривал все ранние черновики "Трактата о флюксиях". Он же (а также Симсон) получал по мере напечатания части этой книги, которые начали появляться уже в 1736 г. [82. С. 266]. Стирлинг, ведущий обширную переписку с континентальными математиками – Г. Крамером, Ник. Бернулли I, Л. Эйлером, – сообщал им о достижениях друга.

Остановимся на короткой переписке Стирлинга с Эйлером в 1736–1738 гг. [33]. В ней обсуждалось предложение теории суммирования рядов, которое впоследствии получило название формулы Маклорена–Эйлера. В первом письме Эйлер сообщил несколько слагаемых своей формулы, на что ему Стирлинг ответил, что аналогичный результат есть в "Трактате о флюксиях" Маклорена, тогда напечатанном лишь частично. Стирлинг предложил Эйлеру его результаты опубликовать в "Philosophical Transactions". Эйлер в ответном письме отказался публиковать свой результат в Лондоне, ибо он "совсем не хотел бы... уменьшить славу знаменитого Маклорена, поскольку он, вероятно, раньше напал на эту теорему для суммирования рядов и поэтому заслуживает быть названным как бы первым изобретателем". Впрочем, свой результат Эйлер опубликовал в 1738 г. в "Записках Петербургской академии наук".

В своей основной работе "Метод разностей" [95] Стирлинг занимался суммированием и интерполированием рядов. Здесь он получил, в частности, так называемый ряд Стирлинга для вычисления $\log n!$ Другие работы его относятся к исследованию формы Земли.

В 1735 г. Стирлинг сменил преподавательскую работу на должность в компании по добыче руды и занимался этим последующие 35 лет жизни. После смерти Маклорена патроны университета хотели пригласить на его место Стирлинга, но якобитские принципы последнего заставили его отказаться от этой должности. Стирлинг был избран членом Берлинской академии наук и почетным членом Петербургской академии (1746): в обоих случаях – не без содействия Л. Эйлера.

Опубликованная недавно переписка Маклорена [82] позволяет судить о его дружеских, творческих и светских контактах. Среди британских корреспондентов Маклорена – Ньютон, секретари Королевского общества Э. Галлей, Дж. Джюрин, вице-президент, а затем президент Королевского общества М. Фолкс, профессора университетов Глазго и Абердина. Он вел переписку и с научными оппонентами – Дж. Кэмпбеллом и В. Брейкенриджем. Из математиков особенно теплые письма ему писал Р. Симсон, который восторженно принимал успехи своего ученика и страстно обрушивался на его противников. Имеются указания на переписку с А. де-Муавром, но письма не сохранились. Обширны и светские связи Маклорена с именитыми, богатыми и сановными людьми Шотландии и Англии, правда, чаще всего имеющие деловую направленность: хлопоты о деньгах на создание университетской обсерватории, о подписке на издание научных книг и т.д.

С математиками континента Европы у Маклорена, кажется, переписки не было*, но через посредство Дж. Стирлинга, установившего научные связи во время пребывания в Италии, они получали информацию об открытиях Маклорена. А. Клеро, Л. Эйлер, Г. Крамер, Д. Бернулли обсуждали в переписке работы Маклорена. Так, Эйлер в письме от 6 марта 1741 г. спрашивал Клеро, известно ли ему что-либо о сочинениях по дифференциальному исчислению Маклорена. На что Клеро отвечал 12 апреля 1741 г., что "Трактат о флюксиях" напечатан полностью, кроме чертежей, и т.д.

Общественная деятельность Маклорена

Эдинбургский период жизни Маклорена был насыщен разнообразной общественной, гражданской деятельностью. На поприще организации науки он выступает как инициатор создания Королевского общества Эдинбурга – Шотландской академии наук. При нем возникает и начинает реализоваться замысел строительства университетской обсерватории.

Как истинный шотландец, Маклорен участвует в уточнении карт своей страны, особенно побережья и прилегающих островов. Его "географические" интересы простираются дальше – он задумывает экспедицию на Северный полюс для проверки своей гипотезы о существовании обширного океана вокруг этой точки земли. Наконец, как патриот и гражданин своего города Маклорен активно участвует в обороне Эдинбурга во время осады его якобитами. Рассмотрим детальнее эти стороны деятельности Маклорена.

---

* Кроме А. Клеро, с которым у Маклорена была переписка по вопросу о форме Земли; сохранились только письма Клеро, письма Маклорена утрачены.

В XVIII в. культурная жизнь Шотландии достигла расцвета. Наука, техника, искусство этой страны переживали период большого прогресса после веков отсталости и застоя. В XVIII в. Дэвид Юм создал своеобразную философскую систему. Адам Смит прославился открытиями в политической экономии. Джеймс Уатт изобрел паровую машину. В этот период творили поэт Роберт Бернс и романист Вальтер Скотт. Этот расцвет особенно обозначился во второй половине столетия после якобитского восстания 1745 г., сыгравшего, как мы увидим, столь роковую роль в жизни Маклорена. Однако и в первой половине века наметились перемены в культурной и интеллектуальной жизни страны, в которой все большую роль играл Эдинбург, который стали называть "Северными Афинами". В упрочении этого статуса Эдинбурга заметную роль сыграл Маклорен. Как пишет историк, Маклорен был человеком выдающихся социальных качеств и видной фигурой в научных кругах Эдинбурга [53. Т. II. С. 299].

Идея создания научных обществ, т.е. академий (в Новое время), принадлежит Фрэнсису Бэкону, который в трактате "Новая Атлантида" составил план такого общества. Он был использован для учреждения в 1662 г. Королевского общества в Лондоне (Royal Society of London) – Британской академии наук. Королевское общество начало выпускать ежегодно четыре тома своих ученых записок – Философских трудов (Philosophical Transactions). Одним из первых его президентов стал Ньютон. Маклорен поместил в этом издании большую часть своих статей.

В XVII–XVIII веках создаются академии наук во Франции, Германии, России и других странах. Этот процесс затронул и Шотландию, которая входила с 1707 г. в состав Соединенного королевства, но тем не менее всегда тяготела к автономии, включая деятельность ученых. Предтечей будущей академии стал "Ранкенианский клуб", возникший в 1716 г. в Эдинбурге. Так себя шутливо стали называть члены небольшого кружка интеллектуалов, собиравшиеся регулярно в таверне, владельцем которой был некий Ранкениан (Rankenian). В состав кружка входили парламентарии, профессора университетов, включая Маклорена. По мнению историка Рамсея, "Ранкенианский клуб" способствовал "распространению в Шотландии свободомыслия, смелости научных исследований, либерализма мнений..." [91. С. 8].

В Эдинбурге медицинский факультет был организован в 1726 г. На базе его в 1731 г. было образовано Общество для усовершенствования медицинских знаний. Его ученым секретарем был избран близкий друг Маклорена, профессор анатомии университета Александр Монро (1697–1767). Общество выпустило шесть томов ученых записок, которые затем были переведены на другие языки. В 1737 г. по предложению Маклорена было образовано научное общество, предметом которого стали, наряду с медициной, и другие фундаментальные науки, а также литература. Оно получило название "Общество для улучшения наук и искусств", или "Философское общество Эдинбурга".

Из писем Маклорена выясняется история этого Общества. Организаторы решили, что во главе его будет президент, два вице-президента и два секретаря. Президентом был избран влиятельный вельможа граф Мортон, а секретарями – Маклорен и профессор химии Эндрью Плюммер. На собраниях Общества зачитывались письма иногородних и иностранных членов, принимались решения о публикациях. Своего издания Общество пока не имело, научные результаты публиковались либо в томах "Медицинских очерков", либо в лондонских "Философских трудах". Вся переписка велась секретарями общества. Например, в письме от 4 апреля 1745 г. Маклорен извещает Франсуа Вольтера, что тот избран членом Философского общеста Эдинбурга. Полного состава эта корпорация достигла в 1739 г., когда в ее рядах насчитывалось 47 ординарных и почетных членов, среди которых был и Джеймс Стирлинг. Основу Общества составляли профессора шотландских университетов городов Эдинбурга, Глазго, Абердина и Сент-Эндрью. Гражданская война 1745 г. прервала работу Философского общества до 1752 г. Расстройство дел в Обществе было вызвано также и кончиной Маклорена в 1746 г., ибо его "всесторонний гений, пыл в занятиях наукой необычайно подходили для ведения дел такого рода" [67. С. VII].

Общество возобновило заседания в 1752 г. Его секретарями стали знаменитый философ Дэвид Юм и Александр Монро младший (сын Александра Монро, первого профессора анатомии). Первый том ученых записок вышел в 1754 г., второй и третий – соответственно в 1756 и 1771 годах. В первом томе были опубликованы посмертно две астрономические статьи Маклорена: "О внезапных и удивительных изменениях, наблюдаемых на поверхности Юпитера" и "О причинах изменения наклонения эклиптики".

Окончательный статус шотландская национальная академия получила в 1782 г., когда королем Георгом II ей была выдана королевская хартия и она получила название Королевского общества Эдинбурга. В списке его членов мы находим и старшего сына Маклорена, Джона (1734–1796), известного юриста, удостоенного титула лорда. Кроме юриспруденции, Джон Маклорен увлекался литературой и историей. В 1-м томе ученых записок Королевского общества Эдинбурга, которые начали регулярно печататься с 1789 г., вышла его статья: "Доказательство того, что Троя не была захвачена греками".

В более поздних томах мы встречаем имена известных математиков: Джона Плейфера, Джеймса Айвори, Чарльза Бэббиджа. В XIX в. почетными членами общества были Кремона, Гельмгольц, Кэли, Менделеев, Рэлей, Сальмон... В 1820–1831 гг. его президентом был Вальтер Скотт. Общество, у истоков которого стоял Маклорен, имеет славную и богатую историю.

Маклорену принадлежит идея создания астрономической обсерватории. Она создавалась на частные пожертвования, распоряжаться которыми было поручено ему. Когда сумма сбора достигла 300 фунтов (сам Маклорен внес свой гонорар за лекции по экспериментальной философии, т.е. физике), он обратился в магистрат с просьбой о строительстве здания: затем был сделан его проект. Однако война 1745 г. и смерть Маклорена отодвинули строительство на вторую половину века. Когда снова вернулись к мысли об обсерватории, деньги, собранные Маклореном, были употреблены в дело [53. Т. I. С. 378].

Шотландия – морская страна с чрезвычайно изрезанной береговой линией. Ей принадлежат на севере Оркнейские и Шетландские острова, также причудливой формы. Еще в XVIII в. карты Шотландии были весьма неудовлетворительны, что зачастую приводило к кораблекрушениям. Как преподаватель геодезии и географии, Маклорен считал своим долгом способствовать улучшению карт. Сам он не принимал участия в экспедициях, но давал каникулярные задания студентам, и на основе их наблюдений были составлены карты и географические описания некоторых островов. Частью они были опубликованы при жизни Маклорена, а карты самых северных из Шетландских островов были найдены в его архиве после смерти.

Изучая отчеты о северных морских путешествиях, Маклорен пришел к выводу, что к северу от Гренландии есть морской путь через полюс к южным морям. Иными словами, Северный полюс окружен океаном, а не сушей. Он настолько был в этом уверен, что подготовил проект экспедиции на Северный полюс. Однако парламент незадолго до этого утвердил расходы на другую морскую экспедицию, и план Маклорена не был осуществлен.

Заметим, что до конца XIX в. вопрос о том, что находится вокруг Северного полюса – суша или море – оставался открытым. На этот вопрос смог определенно ответить только Роберт Пири, достигший Северного полюса в 1909 г. Он же установил островной характер Гренландии. Таким образом, догадка Маклорена спустя полтора века подтвердилась.

Участие в обороне Эдинбурга. Последний год жизни

Обстоятельства последнего года жизни Маклорена требуют обращения к истории Великобритании. XVII век был насыщен значительными, иногда трагическими событиями. Век начался с воцарения на английском престоле шотландской династии Стюартов, а именно, короля Якова I, что привело к бóльшему сближению Англии и Шотландии, хотя формально это были еще различные государства. В середине века недовольство королевской властью подняло народные массы на войну против монархии: король Карл I, сын Якова I, был казнен в 1649 г., и образовалась республика, возглавляемая Кромвелем. Однако в конце века монархия снова была восстановлена, и к власти пришел весьма либеральный монарх Карл II, правивший в 1660–1685 годах: при нем было создано Королевское общество.

Впрочем, религиозная политика Карла II в Шотландии, насаждавшего епископальную церковь, встретила противодействие со стороны основной массы народа, исповедовавшей пресвитерианство. Это последнее представляло собой ветвь реформистской церкви, в которой главным действующим лицом церковного устройства был выбранный приходом священник – пресвитер. Пресвитерианство было распространено в различных странах Европы, а затем перенесено было в Северную Америку, но вполне и окончательно утвердилось только в Шотландии, став в XVIII в. государственной религией этой страны. Яков II был католиком, и его попытка насаждать католичество в протестантской стране кончилась тем, что после трехлетнего правления он был изгнан из Англии. Впрочем, в стране осталось немало его сторонников, которые стали называться якобитами. Якобитских убеждений придерживались и многие кланы горной Шотландии, что не раз их толкало на бунт и восстания против официального Лондона.

После изгнания в 1688 г. Якова II, нашедшего приют во Франции, на престол был приглашен Вильгельм Оранский, племянник Якова II, женатый на его дочери Марии. Вильгельм и Мария правили совместно, однако у них не было наследников, и после смерти трон опустел. С 1701 г. престол заняла Анна, вторая дочь Якова II. После тринадцати лет царствования Анна умирает, опять-таки не оставив наследников.

Парламент, еще при жизни Анны, предназначает ей в наследницы ганноверскую курфюрстину (правительницу) Софию, также из династии Стюартов. Но Анна пережила ее, и трон занял после смерти Анны сын Софии, ганноверский курфюрст Георг. В самом начале его царствования вспыхнуло первое восстание якобитов (1715), которое было подавлено. Георг II, его сын, стал править страной с 1727 г., и в его царствование имело место самое серьезное якобитское восстание 1745 года.

Осенью этого года внук скончавшегося во Франции Якова II, Карл Эдуард, с небольшим отрядом высадился на побережье Шотландии. Здесь он собрал значительную армию и двинулся в завоевательный поход. Единомышленниками его были феодалы, лелеявшие мечту о независимости Шотландии: они опирались на свои роды (кланы), где пользовались большой властью. Армия "принца Чарли" в сентябре подошла к Эдинбургу и осадила его. Быстрое продвижение претендента на королевский престол объяснялось тем, что в Шотландии было мало правительственных войск. Эдинбург, да и вся равнинная Шотландия, оставались верными правящему королю. Впрочем, и здесь часть населения сочувственно относилась к якобитскому движению.

В Эдинбурге было принято решение о сопротивлении и обороне города до прихода подкреплений. Маклорен (вспомним, что он преподавал фортификацию и баллистику!) принял самое деятельное участие в обороне. Дни и ночи, не зная отдыха, он составлял планы оборонительных укреплений, руководил их сооружением. Как он потом писал в письме, он "был среди добровольцев, записавшихся в одно из подразделений городкого полка" [82. С. 132]. Историки, пишущие о восстании 1745 года, неизменно подчеркивают патриотизм Маклорена. В одном из таких сочинений мы читаем: "Профессор Маклорен, выдающийся математик, напрягал все свои силы в сооружении защитных укреплений, которые сам и проектировал: стены ощетинились пушками, которые поспешно были доставлены из близлежащих районов страны. Все ворота в город были забаррикадированы, и около каждого установлена охрана" [51. С. 87].

Несмотря на большие усилия горожан, оборона все же была сломлена. Маклорен и другие защитники вынуждены были покинуть город. Семья Маклорена оставалась в пригороде Эдинбурга. Пришла пора сказать и о его семейной жизни. Маклорен женился в 1733 г. на Анне Стюарт; у них родилось семь детей, из которых пятеро пережили отца – сыновья Джон и Колин и три дочери. Старший сын, Джон, как говорилось выше, стал известным юристом и литератором, получил титул лорда.

Итак, претендент 16 сентября 1745 г. взял Эдинбург, и Маклорен покинул город. Сначала он поселился в Англии в Нью-Кастле, а затем по приглашению архиепископа Йоркского прибыл в Йорк. Однако тревога за оставленную семью и положение беженца заставили его вскоре покинуть приютивший его дом и вернуться снова в Шотландию. Тем временем армия принца Карла оставила Эдинбург и отправилась на юг, в Англию, выиграв в этом марше несколько сражений. Путь на Эдинбург был открыт, и Маклорен в середине ноября вернулся в родной город, однако при этом получил сильнейшую простуду, сыгравшую роковую роль в его жизни.

Бунтовщики в ноябре вторглись в Англию, и, приблизившись на 127 миль к Лондону, стали угрожать столице. Но, видимо, сил для дальнейшего наступления было мало, и войско из враждебной Англии вернулось в якобитскую Шотландию. Тем временем королевское войско стало преследовать бунтовщиков, и вскоре состоялось сражение при Фалькирке, опять-таки закончившееся победой Карла. Но это была его последняя победа. Для укрепления своего войска он продвинулся дальше на север, к дружественным горным кланам. И здесь вблизи столицы горной Шотландии Инвернесса состоялась в апреле 1746 г. решающая битва, в результате которой армия якобитов была полностью и наголову разгромлена. Частью они рассеялись по стране, около ста якобитов были казнены, многие были изгнаны за пределы страны. Вот как оценил разгром якобитского движения Бокль: "Восстания 1715–1745 годов были в нашем отечестве последней борьбой варварства и цивилизации" [2. С. 497].

Между тем, несмотря на помощь хороших врачей, среди которых был Александр Монро, болезнь Маклорена развивалась, дни его были сочтены. Скончался Маклорен 14 июня 1746 г., имея от роду 48 лет и 4 месяца. В поминальной речи на первом после смерти Маклорена собрании университета Александр Монро говорил "об уме и обширной учености покойного", о его благородстве, любви к людям, бесконечной благожелательности и непритворном благочестии [67. С. XI].

Маклорен был типичным представителем науки XVIII в., видевшим свои цели в познании природы на благо человека, в активном участии в жизни общества. О математиках того времени Ф. Клейн писал, что они "плодотворнейшее научное творчество сочетали с идеальным, гармоническим развитием собственной личности". Ученый XVIII в. "обладал богатейшими познаниями за пределами своей специальности и всегда ощущал живую связь с развитием науки, которую он воспринимал как единое целое. Это стремление к универсальности выходит за рамки науки, ища связи со всеми культурными ценностями, с религией, искусством и философией. Во всем чувствуется цель – усовершенствование человека".

И этой цели достиг Маклорен, став одним из великих людей эпохи шотландского Просвещения.

Глава 2

Проблемы обоснования математического анализа на раннем этапе его развития. Основы метода флюксий Маклорена

Возникновение дифференциального и интегрального исчисления в работах Ньютона и Лейбница. "Аналитик" Дж. Беркли

Предыстория дифференциального и интегрального исчислений весьма давняя и начинается, как и в ряде других разделов математики, с древних греков. В древности значительное число задач на квадратуру площадей, кубатуру объемов, а также нахождение касательных к кривой (спирали) решил Архимед (287–212). В его интеграциях сочетаются эвристические приемы с методом интегральных сумм. Для строгого доказательства этих и других результатов в греческой математике был разработан "метод исчерпывания", в центре которого находилось утверждение: если от некоторой величины отнять больше ее половины, с полученной разностью поступить также, то, продолжая этот процесс достаточно далеко, можно получить величину, меньшую наперед заданной [16]. Эта теорема, применяемая греками обычно в доказательствах от противного, представляет собой одно из первых предложений теории пределов.

После греков интерес к этой проблематике возродился спустя несколько веков. У средневековых схоластов XIII–XIV вв. (Н. Орем, Т. Брадвардин, Р. Суайнсхед) появляется идея функциональной зависимости и ее графического выражения, понятие мгновенной скорости, причем все это в своеобразной и специфической форме. Их изыскания в этой области (в форме так называемой теории калькуляции и теории широт) затем были восприняты предтечами и творцами математического анализа и сыграли важную роль в формировании названных идей и понятий уже в математической и механической форме.

Становление капитализма настойчиво обращало человеческий ум к изучению закономерностей окружающего мира, а это требовало адэкватного математического выражения. Так была подготовлена почва для появления систематического метода изучения переменных величин, служащих для изучения процессов, метода, получившего у Ньютона название метода флюксий, а у Лейбница – дифференциального и интегрального исчислений.

В процессе формирования и развития этого исчисления сталкивались, иногда вытесняя друг друга, иногда причудливо переплетаясь, два подхода. Часть математиков смело оперировали с появившимися тогда и не вполне ясными понятиями бесконечно малой величины, дифференциала, момента величины, неделимой величины. В своих рассуждениях они опирались главным образом на интуицию, а уверенность им придавала верность полученных результатов. Математики другого направления призывали к строгости в доказательствах и действиях с новыми математическими объектами: при этом они обращали свои взоры к грекам, видя в их трудах образцы строгости. Опираясь на метод исчерпывания, Лука Валерио (1552–1618), Григорий Сен-Венсан (1584–1667), Андре Таке (1612–1660) описали ряд свойств предела монотонной последовательности, в частности, что предел отношения равен отношению пределов. Однако эта концепция предела, которая лишь дополняла античную традицию, в математике Нового времени не заняла поначалу должного места. В процессе возникновения дифференциального и интегрального исчислений нужны были новые отправные понятия и методы, которыми не располагала греческая и средневековая наука.

Алгоритм дифференциального и интегрального исчислений* в своей основе был разработан И. Ньютоном (в форме метода флюксий) и Г.В. Лейбницем, сделавшим свои открытия независимо. Однако почва для этих открытий была подготовлена усилиями как дальних (греки, схоласты), так и близких предшественников. Среди них первым должен быть назван Иоганн Кеплер (1572–1630), немецкий математик и астроном, который находил площади плоских фигур и объемы тел вращения, пользуясь бесконечно малыми элементами фигур, но не уточняя этого понятия. Другой крупный математик Б. Кавальери (1597–1644), профессор университета в Болонье, построил теорию неделимых в книге "Геометрия неделимых" (1637). Существо понятия неделимой он пояснил, указывая, что неделимыми дуги являются точки, неделимыми плоской области являются заполняющие ее параллельные хорды, неделимые тела – плоские фигуры. С помощью теории неделимых Кавальери нашел ряд интегралов вида $\int\limits_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ (n – целое положительное число). Трудность метода заключалась в неясном математическом смысле понятия неделимого, что повлекло за собой критику современников.

Французский математик Пьер Ферма (1602–1675), юрист по профессии, применяя интегральные суммы, выполнил в аналитической форме квадратуру кривых вида $y = x^n$ ($n > 0$, целое), Блез Паскаль (1623–1662), французский религиозный философ, математик и физик, ввел в научный обиход "характеристический треугольник" (термин Лейбница) со сторонами dx, dy, ds. Применяя его и интегральные суммы. Паскаль нашел, в частности, интегралы от синуса и косинуса.

Интеграционные приемы были применены и в некоторых задачах на спрямление дуг, на нахождение площадей поверхностей вращения и

---

* Впрочем, операция интегрирования, в частности дифференциальных уравнений, не вполне алгоритмична.

другие задачи интегрального исчисления. В эпоху предшественников был решен ряд задач дифференциального исчисления. Рене Декарт (1596–1650) находил касательные, опираясь на идею, что в точке касания секущая имеет две общие точки с кривой, слившиеся в одну. И. Кеплер высказал необходимый признак экстремума. П. Ферма применил необходимое условие экстремума для нахождения касательных.

Наконец, один из самых замечательных результатов, достигнутых в эпоху, предшествующую Ньютону и Лейбницу, – установление взаимно обратного характера операций дифференцирования и интегрирования, в частности, задач на квадратуры и касательные. К идее зависимости этих двух операций подошли несколько ученых, но в наиболее ясном и четком виде это сделал Исаак Барроу (1630–1677), кембриджский учитель Ньютона, уступивший затем кафедру математики своему гениальному ученику. Правда, в полной мере важность этого открытия была осознана после того, как были аналитически определены сами операции интегрирования и дифференцирования.

Предшественники Ньютона и Лейбница в области инфинитезимальной математики не создали исчисления бесконечно малых, как такового. Исчисление, опирающееся на единую систему общих отправных понятий и имеющее единую символику, было порознь создано Ньютоном и Лейбницем.

Исаак Ньютон (1642–1727) знаменит тремя главными открытиями, к которым он пришел в 1664–1666 гг.: законом всемирного тяготения, открытием спектра, на который разлагается солнечный свет, и методом флюксий. В этих направлениях он работал всю жизнь. Первую версию исчисления флюксий Ньютон изложил в трактате "Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов", который был готов к печати и стал известен ряду математиков в 1669 г., но напечатан лишь в 1711 г. Здесь приведены правила интегрирования степенной функции с рациональным показателем и суммы таких функций, правила интегрирования других алгебраических и некоторых трансцендентных функций, для чего они разлагаются в бесконечные степенные ряды, которые затем почленно интегрируются.

Для обоснования этих правил Ньютон вводит приращение переменной – ее "момент". В процессе выкладок он полагает момент сначала малой, но конечной величиной, затем отбрасывает члены, содержащие степени момента больше двух, по причине их "исчезновения", и, наконец, делит почленно обе части равенства на момент. Эти действия, приводящие, однако, к правильным результатам, затем вызвали резкую критику, в частности, Дж. Беркли.

Более полное изложение эта теория получила в "Методе флюксий и бесконечных рядов", который был написан в 1670–1671 гг., но напечатан уже после смерти Ньютона в 1736 г. Именно здесь появляются основные понятия метода флюксий (в "Анализе..." их еще нет), а все задачи анализа Ньютон сводит к двум проблемам, которые в терминах механики формулируются так:

"1. Длина проходимого пути постоянно (т.е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

2. Скорость движения постоянно дана, требуется найти длину пройденного в предложенное время пути" [31. С. 45].

По Ньютону, всякая величина, подобно пути, порождается при помощи непрерывного течения, движения, роста или убывания. Такие величины он называет флюентами, т.е. по-латыни текущими. Каждая флюента в любой момент времени имеет скорость – флюксию. Флюенты, или величины, зависят, стало быть, от времени; однако в качестве "времени" может выступать и любая величина, меняющаяся равномерно. Флюенты Ньютон обозначает, следуя Декарту, последними буквами латинского алфавита: $x, y, z...$, а их флюксии (т.е. производные по "времени") соответственно: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ...$ После этого две проблемы анализа уже формулируются в терминах метода флюксий:

"1. По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями.

2. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами".

Первая проблема представляет собой задачу дифференцирования функции нескольких переменных, зависящих от времени. Вторая сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка. Первую проблему Ньютон демонстрирует на целых многочленах двух и более переменных, сводя, таким образом, вопрос к дифференцированию степенных функций, их сумм и произведений.

Упомянем, наконец, о первом напечатанном (1704), но написанном позднее других (в 90-х годах XVII в.) труде Ньютона по исчислению флюксий – "Рассуждение о квадратуре кривых". Здесь подход Ньютона к нахождению флюксий степенной функции принципиально меняется. Он не употребляет актуальных бесконечно малых – моментов, а берет приращение аргумента конечным, и затем ищет предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предельный переход Ньютон выполнил в духе теории "первых и последних отношений", развитой им в "Математических началах натуральной философии" (1687).

Этот основной труд Ньютона, в котором изложена механическая картина мира, опирающаяся на закон всемирного тяготения, содержит и богатый математический материал. Мы кратко остановимся на его теории пределов, представленной двенадцатью леммами.

В "Началах" Ньютон отказывается от оперирования с бесконечно малыми (включая их отбрасывание), ибо в "математических вопросах не следует пренебрегать и самыми малыми ошибками" [31. С. 168]. В леммах о пределах (этот термин – limes – введем в "Началах") показано применение этого понятия к измерению величин, некоторым вопросам дифференциальной геометрии, механики. Приведем лишь две леммы. В первой говорится о том, что "величины, а также отношения величин, которые постоянно стремятся к равенству в продолжение любого конечного времени и которые приближаются друг к другу ближе, чем на любую данную разность, ранее конца этого времени, напоследок становятся равными [30. С. 57]. В лемме 7 сказано, что последнее отношение исчезающей дуги, ее хорды и отрезка проведенной в конце дуги касательной, заключенного между этим концом и точкой пересечения касательной с радиусом-вектором кривой, проходящим через второй конец дуги, равно единице.

В других леммах речь идет о радиусе кривизны кривой, о соприкосновении кривых и о других вопросах. В леммах говорится о "последних отношениях исчезающих величин" или "первых отношениях зарождающихся величин". Ньютон эти термины разъясняет следующим образом. Последнее отношение исчезающих величин нужно понимать как отношение величин не до и не после их исследования, но отношение, с которым они исчезают. Аналогично объясняется первое отношение зарождающихся величин. Таково ньютоново понимание предела отношений двух величин, стремящихся к нулю, в частности, скорости как отношения пути к времени. Столь неясная трактовка основного понятия вызвала критику со стороны того же Дж. Беркли, который писал: "А что такое флюксии? Скорости исчезающих приращений. А что такое эти самые исчезающие приращения? Они не есть ни конечные величины, ни величины бесконечно малые, но они и не нули. Разве мы не имеем права называть их призраками исчезнувших величин" [3. С. 426].

В теории пределов Ньютона не было теорем о единственности предела, других его свойствах. Однако сделанное им все же было столь значительно, что оно вполне было осознано лишь в XIX в., когда О. Коши в 20-х годах начал строить математический анализ путем синтеза идей предела и бесконечно малой. Помимо упомянутых подходов у Ньютона была обнаруженная в рукописях попытка асимптотического построения метода флюксий; о ней мы будем говорить дальше в связи с аксиоматическим построением теории флюксий у Маклорена. Таким образом, у Ньютона имеется весь спектр подходов к обоснованию анализа в эпоху его возникновения: и чисто инфинитезимальный, и опирающийся на идею предела, и аксиоматический. Дальнейшее развитие этих концепций привело к строгому построению анализа в XIX в. В эпоху Ньютона и последующие за ней эта пестрота и неоднозначность подходов, неясность первоначальных понятий вызвала оживленную дискуссию, в которую вступил и Маклорен со своим "Трактатом о флюксиях".

Честь открытия дифференциального и интегрального исчисления с Ньютоном разделил Годфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), знаменитый немецкий математик и философ, а также дипломат и общественный деятель.

Основы дифференциального и интегрального исчислений Лейбниц изложил отдельно в двух небольших мемуарах: "Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служит препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчислений" (1684) и "О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных" (1686).

В первом мемуаре Лейбниц сначала дает определение дифференциала ординаты кривой как величины, которая так относится к дифференциалу абсциссы, равному произвольному отрезку, как ордината кривой к соответствующей подкасательной. Но затем он замечает, что дифференциалы величин можно считать пропорциональными их мгновенным приращениям, т.е. бесконечно малым. Таким образом, произошло смешение понятий дифференциала и бесконечно малой, которое подобно флюксиям и моментам Ньютона вызвало оживленную полемику по поводу их содержания, длившуюся до конца XVIII в. (см. об этом, например, [50]).

В первом мемуаре Лейбниц привел (без доказательства) ряд правил дифференцирования, сообщил приемы исследований функций. В целом здесь не было новых результатов, важно было само исчисление с его понятиями и символами, имеющее форму алгоритма.

Во второй статье Лейбниц рассмотрел операцию интегрирования как противоположную дифференцированию: ввел произвольную постоянную интегрирования. Позже Лейбниц впервые в печати привел "формулу Ньютона–Лейбница" (у Ньютона она была опубликована в "Методе флюксий", т.е. в 1736 г.). Лейбниц активно использовал ряды, считая их средством представления и исследования функций; сам термин "функция" принадлежит Лейбницу и обозначает у него отрезки, связанные с кривой (ординату, подкасательную, поднормаль и т.д.). В переписке Лейбница с Иоганном Бернулли (1667–1748) формировалось представление о функции как об аналитическом выражении, которое таким образом и было сформулировано Бернулли в 1718 г.

Последние годы жизни Ньютона и Лейбница были омрачены разгоревшимся спором о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых. Так как Лейбниц опередил Ньютона в публикации своих результатов, Ньютону было брошено обвинение в плагиате. Другая сторона парировала, приводя довод, что Лейбниц во время пребывания в Лондоне в 70-х годах мог позаимствовать неопубликованные в печати, но известные определенному кругу открытия Ньютона. Спор захватил в свою орбиту многих участников, расколовшихся на сторонников Ньютона (британцы) и Лейбница (ученые континента). История восстановила справедливость, установив, что Ньютон и Лейбниц пришли к своим открытиям независимо. Объективно спор принес вред, так как ослабил научные контакты между британскими и континентальными учеными.

Творцы анализа, как мы видели, уделяли большое внимание объяснению его исходных понятий и операций. Ближайшие последователи, с энтузиазмом разрабатывающие исчисление и окрыленные обилием новых прекрасных результатов в приложениях, с некоторым пренебрежением относились к первичным понятиям. Это привело к путанице в них, так что наступил определенный кризис основ математического анализа на раннем этапе его возникновения и развития. Наряду с математиками (к их числу относился, например, М. Ролль), с резкой критикой начал анализа выступил упоминавшийся Дж. Беркли (1685–1753). Название его памфлета, напечатанного в 1734 г., таково: "Аналитик, или рассуждение, адресованное неверующему математику, где исследуется, являются ли предмет, принцип и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры". "Неверующим математиком", как полагают, Беркли назвал Э. Галлея (1656–1742), астронома и математика, сподвижника Ньютона. Беркли упрекает его в том, что он считает догматы веры необоснованными, но спрашивает, более ли обоснованы понятия флюксий, первого и последнего отношения или дифференциала? И далее Беркли указывает на действительно некорректные действия Ньютона в выводе, например, флюксии степенной функции, которое сопровождается отбрасыванием бесконечно малых. Та же ошибка имеет место, как он считает, и при нахождении дифференциалов. Выкладки при нахождении флюксий (или дифференциалов) Беркли считает фокусом, трюкачеством, направленным на то, чтобы избавиться от лишних слагаемых. Второй же результат получается за счет компенсации двух ошибок, погашающих друг друга.

Беркли усомнился в возможности применения бесконечности в математике. Он возражал против деления конечной величины ad infinitum (т.е. до бесконечности) и образования таким путем бесконечно малых. Противоречивой является и идея бесконечно большой величины. В критике бесконечно малых и бесконечно больших величин Беркли опирался на основной принцип своей теории: "Существовать – значит быть воспринимаемым"; с этой точки зрения бесконечность, как чувственно невоспринимаемая, не имеет права на существование. В целом же памфлет Беркли имел скорее идеологическую, чем математическую направленность и был нацелен против безверия и атеизма в среде ученых. В одном из его тезисов говорится, что ученики Ньютона "кажется, стремятся скорее действовать, а не познавать, скорее применять его правила и формулы, а не понять его принципы и глубоко проникнуть в суть его понятий" [3. С. 432]. В этих словах весьма проницательно и точно оценена ситуация в анализе в рассматриваемый период. Упреки Беркли заставили взяться за перо ряд математиков различного ранга и уровня, готовых ринуться в бой на защиту новой математики. Первыми ответили епископу английский математик и врач Дж. Джюрин (1684–1750) и ирландский математик Дж. Уолтон, соответственно в 1734 и 1735 гг. Как ответ епископу был задуман и "Трактат о флюксиях" Маклорена, в основном завершенный в 1739 г., но напечатанный тремя годами позднее.

Философия бесконечного у Маклорена. Критика актуальной бесконечности

Аргументы Беркли заставили многих математиков пересмотреть их отношение к бесконечности. К тому же появилось сочинение, в котором над бесконечностью оперировали совсем уж непозволительно – трактат математика, непременного секретаря Королевской французской академии наук Бернара де Фонтенеля (1657–1757) "Геометрия бесконечного" (1727).

Маклорен писал Стирлингу в 1734 г.: "Когда я был очень молод, я был поклонником бесконечных, но произведение Фонтенеля... привило отвращение к ним...".

Фонтенель вводит бесконечно большую величину следующим образом: "В натуральном ряде каждый член равен числу членов, которые следуют за единицей, включая и ее. Следовательно, поскольку число таких членов бесконечно, ряд имеет последний член, который тоже бесконечен". Бесконечную величину он считает последним членом натурального ряда. Ее свойства таковы:

$$\infty + 1 = \infty; \quad \infty/\infty = 1; \quad n\infty : \infty = n : 1.$$

Можно даже рассматривать арифметическую прогрессию:

$$1\infty,\ 2\infty,\ \dots,\ \infty^2,\ \dots$$

и геометрическую прогрессию: $\infty, \infty^2, \infty^3, \dots$

Бесконечность, таким образом, можно возводить в степень, обладающую такими, к примеру, свойствами: $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$; $\infty^2/\infty = \infty$.

Сочинение Фонтенеля Маклорен подверг критике во вступлении к "Трактату". Он не принял саму идею актуальной бесконечности: "Мы легко представляем себе, что конечная величина может становиться все больше и больше... или что нельзя задать никакого предела или ограничения этому росту... но мы не можем мыслить величину возросшую бесконечное число раз" [69]. Ум постигает лишь потенциальную, а не актуальную бесконечность. В этом вопросе Маклорен разделял мнение влиятельного философа Джона Локка*, который различал понятие бесконечности чисел, как способности к беспредельному прибавлению, и понятие бесконечного числа, которое противоречиво**.

Развивая весьма произвольно свою концепцию. Фонтенель действительно приходит к абсурду. Он утверждает, что между конечными числами и бесконечным числом существуют некие промежуточные неопределимые (indeterminable) числа, квадраты которых бесконечны. Маклорен спрашивает, как после этого мы будем отличать конечное от бесконечного? В детальном разборе книги Фонтенеля Маклорен показывает, к каким нелепым последствиям можно придти, если с бесконечностью оперировать как с конечным числом.

В полемическом задоре Маклорен, впрочем, не заметил скрытых в концепции Фонтенеля некоторых рациональных и здравых суждений. Интересна мысль Фонтенеля, что в натуральном ряде чисел мы не приблизимся к концу, сколь бы далеко мы ни ушли от начала – иными словами, что остаток бесконечного ряда всегда бесконечен. Верно и

---

* Джон Локк (1632–1704) – английский философ и просветитель, разработал теорию познания в традициях английского эмпиризма и материализма. Основная идея этой теории – не существует врожденных идей и принципов, все человеческое знание проистекает из опыта. Это изложено в основном труде "Опыт о человеческом разуме" (1690). (Русский перевод [27]).

** Утверждение Локка таково: "...Актуально положительной идеи бесконечного числа быть не может" [27. С. 195].

равенство $\infty + 1 = \infty$. Фонтенель замечает, что натуральных чисел столько же, сколько их квадратов и т.д.*

Маклорен критикует и актуальные бесконечно малые величины. Допущение бесконечно малой величины, по его мнению, было бы слишком смелым постулатом для такой науки, как геометрия, ибо нельзя представить себе величину столь малую, но отличную от нуля, которая была бы меньше любой заданной. У него вызывает протест аксиома о том, что сумма конечной и бесконечно малой величины равна этой конечной. (Это одна из аксиом в "Анализе бесконечно малых" Лопиталя. Еще раньше она была высказана Иоганном Бернулли в рукописных "Лекциях по исчислению дифференциалов" (1692) в следующей форме: "Величина, уменьшенная или увеличенная на бесконечно малую величину, не уменьшается, не увеличивается".) Математик, так поступающий, уподобляется, по мнению Маклорена, бухгалтеру, который претендуя на скурпулезную точность, говорит тем не менее, что он пренебрег конечной суммой, потому что нашел ее маловажной**.

И все-таки метод бесконечно малых результативен, он дает точные и правильные выводы. В чем причина этого явления? Маклорен не разделял теорию компенсации ошибок Беркли, которая имела и более поздних последователей (Л. Карно). Инфинитезимальные исчисления верны, но выбор основных принципов не совсем удачен, и изложены они чересчур кратко, без разъяснения. Нужно, считает Маклорен, обратиться к испытанному и верному средству: аксиоматическому методу. Этим методом он и строит затем систему флюксий с кинематико-геометрической трактовкой основных понятий и применением предельного перехода. Для обоснования предельного перехода ему нужно было понимание бесконечности только как потенциальной. И здесь Маклорен опять-таки ссылается на Локка, приводя из него следующую цитату в "Трактате": "Люди беседуют и спорят о бесконечных величинах, точно у них идеи этих бесконечностей столь же полны и положительны, как идеи замещающих их имен или идеи ядра, часа или какого-нибудь другого определенного количества. Неудивительно поэтому, что непознаваемая природа вещи, о которой они рассуждают и спорят, приводит их к трудностям и противоречиям, и их души подавляются предметом, который по своей широте и силе недоступен исследованию и усвоению" [27. С. 201].

Итак, Маклорен поставил задачу логического обоснования анализа, которую он надеялся решить в "Трактате", разъяснив темные и непонятные места у основоположников этой науки, и тем самым достойно ответить Беркли.

Ситуация, которая сложилась в математике в этот момент, когда ряд основных задач классического анализа уже был решен, а его

---

* Впрочем, об этом писали уже средневековые авторы, а потом Г. Галилей.

** Актуальные бесконечно малые вполне непротиворечивым образом используются при построении отличного от классического так называемого нестандартного анализа (см., например, [90]).

логическое обоснование отставало, характеризовалось Ф. Клейном во второй половине XIX в. так: "Исторический экскурс подтверждает, что наглядное представление всегда было вначале, а строгое логическое обоснование за ним следовало. Это относится не только к возникновению инфинитезимального исчисления... Логический переход вступает в свои права лишь тогда, когда пространственное представление (или наглядность) выполнили задачу идеализации".

Маклорен, Робинс, Симпсон, Джюрин

Как справедливо заметил историк математики Ф. Кэджори, "аргументы Беркли были подобны бомбе, брошенной в лагерь математиков" [50]. Среди британцев вслед за упомянутыми Дж. Джюрином и Дж. Валтоном в полемику с Беркли вступили математик и инженер Б. Робинс (1707–1751) и математик Т. Симпсон (1710–1761), а также ряд менее значительных фигур. Некоторые из них спорили не только с Беркли, но и друг с другом. В этом потоке статей и мнений весьма четко выделилась некая концепция, которую можно связать с именами Джюрина, Робинса, Симпсона. Они склонялись к тому подходу в обосновании исчисления, который затем развил Маклорен в своем "Трактате". Основные черты этой концепции таковы.

Величины, как это раньше было у Ньютона, порождаются непрерывным движением, течением во времени и пространстве. Это, преимущественно, геометрические величины – пути, площади, объемы: их значения изображаются прямолинейными отрезками. Основное понятие – флюксия – интуитивно ясно: это – мгновенная скорость движущегося объекта – точки, прямой или плоскости. Флюксия – конечная величина.

Возникает вопрос: как измерить флюксию – скорость? Симпсон в "Новом трактате о флюксиях" (1737) отвечает на него так. Если движение переменно, то "мы не можем выразить флюксию при помощи любого приращения или пути, актуально пройденного в данное время (как в равномерном движении). Но тогда мы можем просто определить ее как путь, который мог быть пройден, если бы ускорение или замедление было приостановлено в предложенный момент, в который флюксия отыскивается" [97. С. 6].

Названными авторами были даны дефиниции предела. У Джюрина оно таково: " Я понимаю под пределом переменной величины некоторую определенную величину, к которой, по предположению, постоянно стремится переменная величина и подходит к ней ближе, чем на любую заданную разность". Робинс в статье "Рассуждение о природе и истинности метода флюксий, а также первых и последних отношений сэра Исаака Ньютона" (1735) дает определение предела отдельно для величин и для отношений величин. Ньютоновское последнее значение (ultimate magnitude) переменной величины он определяет как" предел, к которому переменная величина стремится с любой степенью близости, хотя она и не может никогда стать ей абсолютно равной" [92.

С. 54]. О пределе отношения он говорит так: "Пусть имеются две такие величины, что одна или обе непрерывно меняются, непрерывно возрастая или убывая; и пусть отношение, которое образуют величины, тоже беспрестанно меняется, но так, что постоянно стремится ближе и ближе к некоторому определенному отношению, и может, наконец, в своем стремлении к этому определенному отношению подойти ближе, чем к любому другому заданному отношению, но никогда не превзойдет первое: тогда упомянутое определенное отношение называется последним отношением этих переменных величин" [92. С. 57].

Робинс доказал несколько простых теорем о пределах, например, о равенстве постоянного отношения переменных величин отношению их пределов, если последние существуют. Главным предложением (general proposition) он назвал теорему о единственности предела отношения, которую вывел прямо из определения этого понятия. Робинс проиллюстрировал определение предела в задаче на касательную к кубической параболе.

Для рассматриваемой концепции предела в целом характерно различение определений предела переменной величины и предела переменного отношения. Именно второе определение имеет арифметический характер, так как, начиная с Ньютона, действительное число трактовалось как отношение одной величины к другой такого же рода, принятой за единицу. Первое же определение предела использовалось для измерения геометрических фигур с помощью последовательности значений, монотонно приближающейся к предельному значению. (Например, при измерении круга с помощью последовательности вписанных в него правильных многоугольников с бесконечно возрастающим числом сторон.)

Математиков, разрабатывающих концепцию предела, занимал вопрос: достижимо ли предельное значение. Робинс, как мы видели, давал на него отрицательный ответ. Джюрин, напротив, считал, что, если процесс изменения величин длится конечное время, то предельное значение достигается: в противном случает – нет.

Одним из принципов этой теории был отказ от актуальных бесконечно малых, неделимых и других атомистических представлений как "негеометричных" (Робинс). Джюрин, например, допускал только такие величины, которые "при постоянном уменьшении будут становиться меньше любой конечной величины". У него, как у Маклорена, было представление о бесконечно малой, как величине, стремящейся к нулю. Термин "бесконечно малая" они при этом не использовали, так как относили его к актуальным бесконечно малым.

Перечисленные авторы ориентировались на древнегреческую математику как на образец строгости. Упомянутые принципы теории пределов названными авторами частью заимствованы у Ньютона, частью получены самостоятельно. Основная их заслуга состоит в активном привлечении понятия предела для обоснования исчисления бесконечно малых. Они дали корректное определение предела и нашли ряд простых его свойств.

На континенте позднее Даламбер (1717–1783) дал определение предела в статьях "Предел" и "Дифференциал" французской Энциклопедии, которые были напечатаны в 1751–1757 гг.: "Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может приблизиться к первой ближе, чем на заданную величину, как бы мала она ни была, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность этой величины и ее предела абсолютно неуказуема" [57]. Даламбер подразумевал предел монотонной переменной. Он привел теоремы о единственности предела переменной величины и о пределе произведения величин. Иллюстрации этой теории он дал геометрические, в частности, как и Робинс, при построении касательной к параболе. Заметим, что статья о пределе была написана Даламбером совместно с аббатом де ла Шапелем (1710–1792), который раньше идею предела развил в учебнике "Основания геометрии" (1746) [18. С. 273].

Концепция Даламбера была изложена в более легкой и удобной форме, чем тяжеловесные и растянутые рассуждения того же Робинса. Кроме того, Даламбер был более крупным математиком, печатался в знаменитой Энциклопедии, поэтому его точка зрения стала широко известной, а британские математики были забыты.

И все же после атаки Беркли в 30-х годах XVIII в. в Великобритании была сделана попытка положить в фундамент анализа понятие предела. В этом они опередили континентальных математиков, где этой проблематике в указанный период уделялось гораздо меньше внимания.

"Трактат о флюксиях" Маклорена, как уже говорилось, тоже был ответом Беркли. По замыслу автора, он должен был прекратить споры и дать точное разъяснение принципов нового исчисления. Вначале была подготовлена статья, содержащая несколько первых глав будущего трактата. Маклорен был намерен ее напечатать, однако отложил это по двум причинам. Во-первых, друзья посоветовали ему расширить замысел и напечатать книгу. Во-вторых, в полемику уже включились Джюрин и Робинс, которые изложили точку зрения, близкую его собственной. Это позволило Маклорену без помех продолжать работу. Большая часть первой книги была напечатана уже в 1737 г., но полностью трактат вышел только в 1742 г. в двух томах, содержащих 764 страницы текста и 352 рисунка на отдельных листах.

В части трактата, напечатанной к 1737 г., Маклорен развернуто излагал рассмотренную выше концепцию Робинса–Симпсона–Джюрина. Близость точек зрения Маклорена и Робинса даже позволила издателю работ Робинса, Дж. Вильсону, бросить Маклорену обвинение в плагиате. Он это мотивирует тем, что оба автора рассматривают один и тот же пример для демонстрации метода исчерпывания древних и что у них есть несколько одинаковых выражений. Разумеется, небольшие статьи Робинса и трактат Маклорена не сравнимы ни по объему, ни по богатству математического материала.

Маклорен и древнегреческая математика

Один из принципов построения "Трактата о флюксиях" – ориентация автора на древнегреческую геометрию. Маклорен прокомментировал метод исчерпывания древних, изложенный в работах Евклида и Архимеда. Обращение к древним он мотивировал так: "Когда уверенность в какой-либо части геометрии становиться сомнительной, лучший способ найти истину в полном объеме и предотвратить споры – это вывести ее из аксиом или первоначальных очевидных принципов с помощью строгих доказательств, следуя способу древних геометров".

Маклорен, конечно, не намеревался в точности следовать методу исчерпывания при построении системы флюксий. Однако анализируя этот метод, он стремился нащупать в нем главные принципы, чтобы использовать их, а главное – показать преимущества строгих доказательств древних перед новейшими теориями – неделимых, дифференциалов и т.п.

Родоначальником "метода исчерпывания" был Евдокс Книдский (406–355 г. до н.э.). Ему принадлежит аксиома "Евдокса–Архимеда": если даны две величины a и b, то найдутся два таких целых числа m и n, что выполняются неравенства $n \times a > b$ и $m \times b > a$. Из нее вытекает основная лемма "метода исчерпывания", изложенная Евклидом в предложении X, I "Начал". Если даны две величины a и b, $a > b$, то вычитая из величины a больше ее половины, из полученного остатка больше его половины и т.д., получим через конечное число шагов остаток, меньший b.

Рассмотренный метод был греческой моделью предельного перехода, он служил древним для нахождения площадей и объемов в тех случаях, когда сейчас применяют интегрирование. Некоторые современные исследователи считают, что его применяли для доказательства уже установленной истины, а сама она отыскивалась с помощью бесконечно малых или иных математических "атомов", другие ученые находят в самом методе исчерпывания эвристическую сторону [4].

Рассмотрим решение Маклорена одной из задач Архимеда. Оно поучительно по трем причинам: во-первых, показан механизм метода исчерпывания на примере построения вписанных и описанных ступенчатых тел и "зажимания" фигуры между этими телами с последующим переходом к пределу; во-вторых, сама идея решения, как считает Маклорен, подсказана методом неделимых; в-третьих, метод неделимых сравнивается с методом исчерпывания.

Пусть требуется найти объем сегмента сфероида (эллипсоида вращения), отсеченного плоскостью, перпендикулярной оси вращения. Рассмотрим половину сфероида, описанный около нее цилиндр и вписанный в цилиндр конус с вершиной в центре сфероида и пересечем все фигуры плоскостью, перпендикулярной оси вращения. Из свойств эллипса следует равенство:

$EH^2 = ET^2 - EX^2$ (рис. 1).

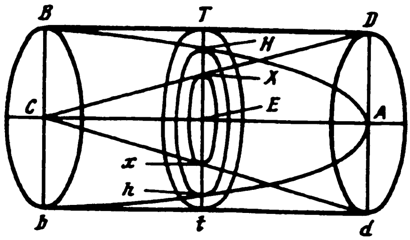


Рис. 1

Значит, площадь круга радиуса *EH* равна площади кольца шириной *TX*. По методу Кавальери отсюда сразу следует результат, что объем сегмента сфероида *AHh* равен разности объемов части цилиндра *TДtd* и части конуса *ДXxd*, ибо таково соотношение между неделимыми этих фигур. Неделимая сфероида – круг, неделимая разности цилиндра и конуса – кольцо.

Но по методу древних нужно отрезок *CA* разделить на равные части и вписать и описать вокруг сфероида и конуса цилиндры с высотой, равной этим частям. Затем число цилиндров увеличивается так, что разность между объемом вписанной и описанной ступенчатых фигур становится меньше любой заданной величины. Из чего следует упомянутый вывод об объеме сегмента сфероида.

Таким образом, там, где метод неделимых останавливается, требуется еще доказательство, содержащее предельный переход. Маклорен, видимо, считал, что результат находится методом неделимых, а проверяется он по методу исчерпывания.

Суть метода исчерпывания следует из теоремы Евклида, согласно которой площади двух кругов относятся как квадраты на их диаметрах (предложение II из XII книги). В два круга вписываются подобные многоугольники. При удвоении числа сторон площадь вписанного многоугольника возрастает, он как бы исчерпывает круг. При каждом удвоении к многоугольнику добавляются новые треугольники, вписанные в сегменты круга. Каждый такой треугольник имеет площадь, большую площади половины сегмента. Таким образом, по упомянутой лемме X, I "Начал" площадь вписанного многоугольника после конечного числа таких удвоений будет как угодно мало отличаться от площади круга. Поэтому площади кругов относятся как квадраты, построенные на их диаметрах. Этот факт далее доказывается еще и методом от противного.

Анализируя такие рассуждения, Маклорен добавляет, что если бы древние (как это принято в методе дифференциалов) рассматривали окружность как многоугольник с бесконечно малыми сторонами, то второе предложение XII книги "Начал" было бы простым следствием первого (об отношении площадей подобных вписанных многоугольников как квадратов на диаметрах). Допущение бесконечно малой величины вообще невозможно в математике древних, основанной на аксиоме

Евдокса–Архимеда, так как бесконечно малая, сложенная с собой любое число раз, не может превзойти конечную величину. Это второе замечание Маклорена также полемически направлено против метода бесконечно малых и дифференциалов.

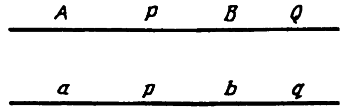


Рис. 2

В методе исчерпывания Маклорен выделяет два главных принципа.

1. "Если две переменные величины AP и AQ, находящиеся в постоянном отношении, приближаются соответственно к определенным величинам AB и AD так, что отличаются от них меньше, чем на любую заданную величину, то отношение AB к AD будет таким же, как постоянное отношение AP к AQ".

Т.е. постоянное отношение переменных равно отношению их пределов. Эта теорема есть ранее у Робинса и позднее у Даламбера.

Применительно ко второму предложению XII книги, отрезки AB и AD измеряют площади кругов, отрезки AP и AQ – площади вписанных подобных многоугольников.

Второй принцип изложен весьма многословно. Пусть задана постоянная величина AB, заключенная между переменными величинами AP и AQ, которые приближаются к ней и друг к другу так, что разность каждой из них и AB может стать меньше любой наперед заданной величины. Пусть дана другая постоянная величина ab, заключенная между ap и aq, причем $aq \leqslant AQ$ и $ap \leqslant AP$. Тогда величины AB и ab совпадают (рис. 2).

Второй принцип, по мнению Маклорена, часто применял Архимед в трактате "О шаре и цилиндре"*.

Оба принципа Маклорен доказывает от противного. Первый является теоремой о пределах, второй содержит в себе свойство непрерывности прямой (либо множества вещественных чисел, изображаемых отрезками).

Заканчивая обзор методов древних, Маклорен отмечает, что со временем их стали рассматривать как тормоз в развитии геометрии. Были созданы теории неделимых и бесконечно малых величин. Строгость доказательств древних геометров была отброшена. С бесконечностью стали оперировать свободно, как с конечными числами. В итоге высшие разделы геометрии оказались "полными мистики". Методы древних надо возродить на новой основе – такова мысль Маклорена.

---

* Например, при отыскании боковой поверхности конуса вписываются и описываются около него две пирамиды с подобными основаниями. Далее рассматривается круг, радиус которого равен среднему геометрическому между радиусом основания и его образующей. В круг можно вписать и около него описать два подобных многоугольника так, что их площади и боковые поверхности пирамид, описанных около конуса и вписанных в него, будут удовлетворять неравенствам принципа II. Отсюда следует, что боковая поверхность прямого кругового конуса с образующей l и радиусом круга основания r равна площади круга с радиусом $\sqrt{rl}$. Стало быть, $S = \Pi rl$.

Основные понятия и принципы метода флюксий Маклорена

Понятие производной возникло главным образом из двух задач – вычисления скорости переменного движения и нахождения касательной к кривой. У Ньютона, а вслед за ним и Маклорена, понятию производной соответствовала скорость изменения переменной величины. Сама эта переменная – флюента – порождается непрерывным движением, течением во времени и пространстве. Линии порождаются движением точек, поверхности – движением линий, тела – движением поверхностей, углы – вращением их сторон.

Рассматриваются исключительно непрерывные величины. Идея непрерывности – центральная в классическом анализе. По мнению Клейна, математика Нового времени, "возникшая из наблюдений природы, направленная на ее объяснение, поставила во главу угла один философский принцип – принцип непрерывности. Так это было у великих первооткрывателей Ньютона и Лейбница, так было на протяжении всего XVIII века, который для развития математики стал веком открытий".

Переменные величины Маклорен изображает отрезками прямой: эта прямая описывается движущейся точкой, которая в каждый момент имеет определенную скорость. Скорость изменения величины называется ее флюксией. Понятие скорости интуитивно ясно, оно не требует разъяснения, "по крайней мере в чистой геометрии", как считает Маклорен. В изложении основ исчисления у Ньютона было, как известно, несколько подходов, опиравшихся на понятие флюксии, момента, а также первого и последнего отношения (двух зарождающихся или исчезающих величин). Из этих трех понятий выбор Маклорена пал на флюксии, так как это величина конечная, как это подчеркивал сам Ньютон, писавший в одном письме: "Флюксии и моменты – величины разного рода. Флюксии – конечные скорости, моменты – бесконечно малые частицы".

Определив флюксию как скорость, Маклорен все же пытается разъяснить это понятие, "хотя, кажется, нет необходимости в чистой геометрии выяснять, какова природа силы (power), аффекта (affection) или модуса (mode), которая называется скоростью и приписывается движущемуся телу". Тем не менее он на нескольких страницах рассуждает о скорости в чисто схоластическом духе, нисколько ее не проясняя. При этом употребляются такие выражения, как "причины и следствия", "первопричины и следствия вещей" и т.п. Далее Маклорен формулирует два натурфилософских принципа. Согласно первому принципу, если действия (effects), производимые двумя силами, всегда равны, то и эти силы должны быть равными в любой момент времени, по второму принципу, если силы равны в любой момент времени, то действия, производимые ими за одинаковое время, всегда равны. На первом из них базируется прямой метод флюксий, на втором – обратный. Таким образом, метод флюксий Маклорен вписывает в натурфилософию, считает его составной частью последней.

Для математики важен вопрос – как измерить флюксию – скорость. Если движение переменно, то скорость в любой момент времени измеряется путем, который был бы пройден в заданное время, если бы от этого момента движение стало равномерным. Этот способ измерения мы находим не только у Маклорена, но и у других математиков-флюксионалистов, например у Т. Симпсона. Он нашел свое отражение и в британской Энциклопедии издания 1771 г., где флюксия определена как приращение, которое могло быть получено в данное время, если полагать его (приращение. – *М.К.*) растущим равномерно от этого момента; и как мера оно будет тем же самым, каким бы ни был отрезок времени; мы можем предположить его меньшим, чем любое заданное время".

Истоки теории флюксий уходят в средневековье. Маклорен подчеркнул, что понятие флюксии Ньютон заимствовал у Непера (1550–1617). В своеобразной форме оно было и в теории калькуляций.

Барроу, Кавальери, Кеплер, Галлилей развивали мысль о движении, порождающем кривые. Идея движения пронизывала натурфилософию и математику XVII века. Понятие движения оставалось фундаментальным, универсальным для Ньютона и ближайших его последователей. На континенте в это время начали уже отходить от этой идеи, считая ее слишком узкой и обременительной. Маклорена, в частности, критиковали за упомянутый способ измерения флюксий, который имеет условный характер (измеряется путем, который был бы пройден, и т.д.). Но именно Маклорен в основных теоремах получил скорость как предел отношения пути ко времени. Это не было замечено и оценено его критиками.

Аксиомы и основные теоремы

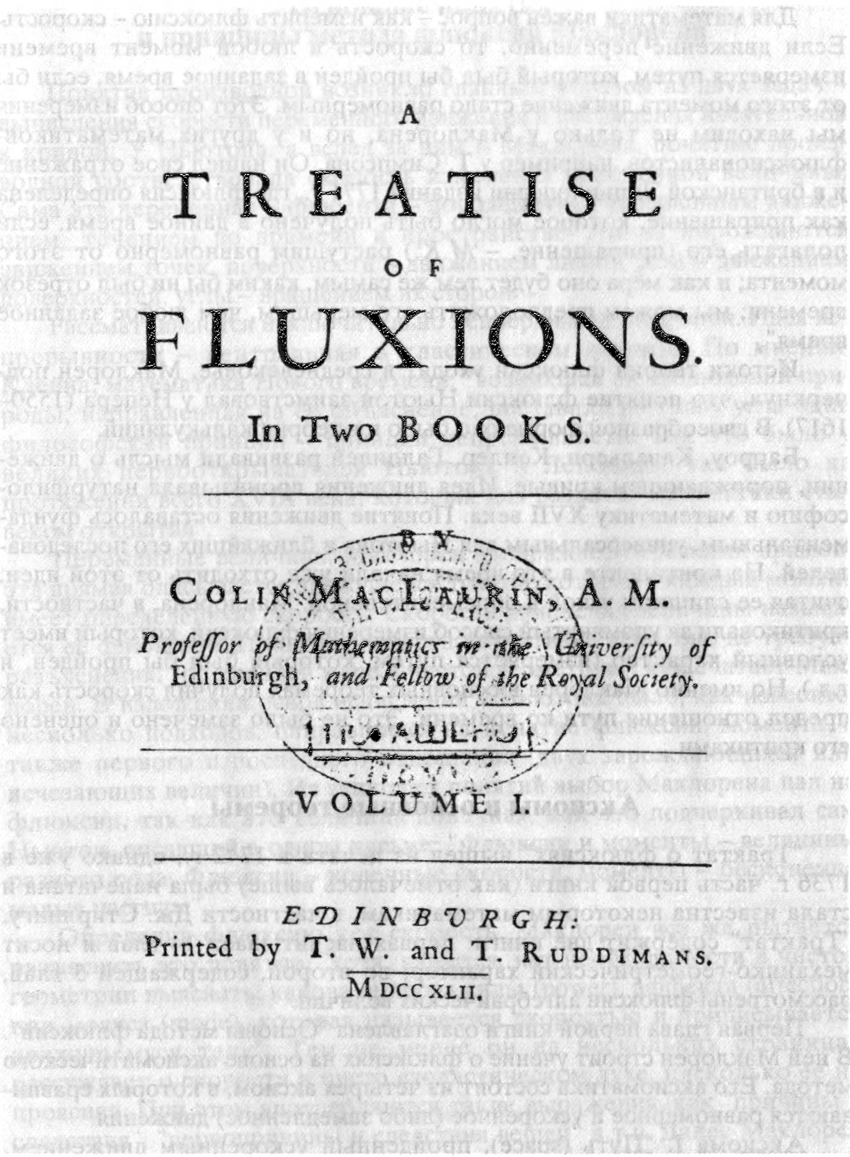
"Трактат о флюксиях" вышел из печати в 1742 г., однако уже в 1736 г. часть первой книги (как отмечалось выше) была напечатана и стала известна некоторым математикам, в частности Дж. Стирлингу. "Трактат" содержит две книги: первая насчитывает 14 глав и носит механико-геометрический характер; во второй, содержащей 5 глав, рассмотрены флюксии алгебраических величин.

Первая глава первой книги озаглавлена "Основы метода флюксий". В ней Маклорен строит учение о флюксиях на основе аксиоматического метода. Его аксиоматика состоит из четырех аксиом, в которых сравниваются равномерное и ускоренное (либо замедленное) движения.

Аксиома I. "Путь (space), пройденный ускоренным движением, больше пути, пройденного в то же время движением, лишенным ускорения, но от начала времени равномерно продолженным.

Аксиома II. "Путь, пройденный ускоренным движением в продолжении ускорения, меньше пути, который будет пройден в то же время движением, полученным в результате ускорения и продолженным равномерно".

В аксиомах III и IV аналогичные утверждения сделаны для замедленного движения.



A

TREATISE

OF

FLUXIONS.

In Two BOOKS.

BY

COLIN MACLAURIN, A. M.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh, *and Fellow of the Royal Society.*

VOLUME I.

EDINBURGH:

Printed by T. W. and T. RUDDIMANS.

MDCCXLII.

Титульный лист книги Маклорена
"Трактат о флюксиях"

За аксиомами следует 15 теорем, в которых сравниваются два или несколько движений. В них на языке механики изложены в сущности правила дифференцирования и интегрирования или – по Маклорену – прямого и обратного метода флюксий.

В первых двух теоремах изложены простые свойства равномерного движения, они нужны Маклорену только для ссылок. Теоремы взяты из трактата Архимеда "О спиралях".

Приведем Теорему III. "Если пути, пройденные за одно и то же время движениями, равномерными или переменными, всегда равны друг другу, скорости этих движений должны быть равными в любой момент времени".

В Теореме IV утверждается обратное: из равенства скоростей вытекает равенство путей, пройденных за одно и то же время.

В доказательствах обеих теорем, очень длинных и подробных, промежуток времени разбивается на интервалы, в которых переменное движение будет только ускоренным (или замедленным). Доказательства выполняются приведением к абсурду. Случай равномерных движений является тривиальным, но и он рассматривается со ссылкой на первые две теоремы.

В Теореме V постоянство отношения путей двух переменных движений выведено из постоянства отношения их скоростей в любой момент времени. В Теореме VI – наоборот.

Если читатель Маклорена все еще думает, что ему сообщают нечто исключительно кинематическое, то последующие теоремы не оставляют сомнения в том, что здесь все же речь идет об основах математического анализа.

Итак, Теорема VII: Если путь, пройденный одним движением, всегда равен сумме путей, пройденных за то же время любыми двумя другими движениями, то скорость первого движения всегда равна сумме скоростей двух других движений.

Теорема означает в сущности правило дифференцирования суммы двух функций, тогда как обратная ей Теорема VIII – правило ее интегрирования.

В Теореме X рассмотрено дифференцирование сложной функции $y = f(\varphi(t))$, если $\varphi(t)$ – линейная функция. Разумеется, она сформулирована на языке кинематики, так же как и Теорема XI, в которой дано общее правило дифференцирования сложной функции, притом в весьма "зашифрованном" виде. Приведем полностью формулировку, чтобы показать специфику изложения. "Пусть движение точки P на линии Aa равномерно, а движение точки p на той же линии – постоянно ускоренное или замедленное, и пусть их скорости равны в пункте D. Пусть, далее, EM определена из AP каким-то регулярным способом и Em определена из Ap тем же способом. Тогда, если при совпадении P и D точка M совпадает с L, двигаясь к ней ускоренно или замедленно, скорость точки m в L будет равна скорости M в L" (рис. 3).

На современном языке теорема может быть изложена следующим образом. Пусть точка P движется со скоростью, равной единице, т.е.

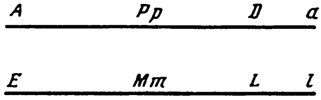


Рис. 3

$AP = t$. Движение точки p переменно, поэтому $Ap = \varphi(t)$. EM – значение произвольной функции аргумента AP, т.е. $EM = y = f(t)$. Em – такая же функция аргумента Ap; $Em = Y = f[\varphi(t)]$. Пусть $AD = t_0$. Тогда и $AD = \varphi(t_0)$. В точке D скорости точек P и p совпадают, т.е. $\varphi'(t_0) = 1$. Скорость точки M в пункте L равна $Y'_t = f'_t(t_0)$. Скорость точки m в L равна: $Y'_t = f'_\varphi \varphi'(t)|_{t=t_a} = f'_\varphi[\varphi(t_0)]\varphi'(t_0) = f'_\varphi[\varphi(t_0)]$. В теореме утверждается, что эти скорости равны, т.е. $f'_t(t_0) = f'_\varphi \cdot \varphi'_t(t_0)$. Налицо правило дифференцирования сложной функции.

Теоремы XII и XIII легко выводятся из аксиом. В Теореме XII утверждается, что отношение скоростей ускоренного (или замедленного) и равномерного движения заключено между отношением путей, пройденных за одно и то же время до и после рассматриваемого момента.

Теорема XIII имеет симметричную структуру, в ней отношение путей двух движений (одно – равномерное) заключено между отношением их скоростей в начале и конце промежутка.

Важна Теорема XIV. В ней утверждается, что отношение скоростей двух движений, равномерного и переменного, как угодно мало (меньше, чем на любую заданную величину) и отличается от отношения путей, пройденных в достаточно малый промежуток времени до или после рассматриваемого момента.

Если это второе движение заменить просто течением времени, то здесь доказано, что $\Delta s/\Delta t \to v(t)$ при $\Delta t \to 0$. Для этого факта Маклорен использует термин "предел" ("limit"). Итак, скорость, которую он пытался раньше истолковать метафизически, трактуется как предел отношения приращения пути к приращению времени. Правда, этот вывод Маклорен не поставил во главу угла теории, он как бы "потерялся" в тексте. Но он высказан отчетливо, хотя в кинематической форме. Спустя примерно век, О. Коши целенаправленно поставил понятие производной как предела отношения двух приращений в основание классического анализа.

В последней, XV Теореме вводится вторая флюксия, и способы ее измерения.

Все теоремы доказаны обстоятельно и исчерпывающе, с подробным рассмотрением частных случаев, вплоть до тривиальных. Доказательства эти, как правило, не прямые, т.е. ведутся от противного, как это было принято древними в методе исчерпывания. Маклорен входит в мельчайшие подробности, так что изложение становится весьма утомительным и неудобочитаемым. Доказательство Теоремы III, к примеру, занимает более четырех страниц (формат книги in quarto), хотя Маклорен в начале говорит, что если совместить две прямые линии, по которой бегут две точки, занятые в рассматриваемых движениях, то теорема становится очевидной. Но поскольку это "фундаментальная теорема доктрины", то ее нужно вывести из аксиом. Вообще,

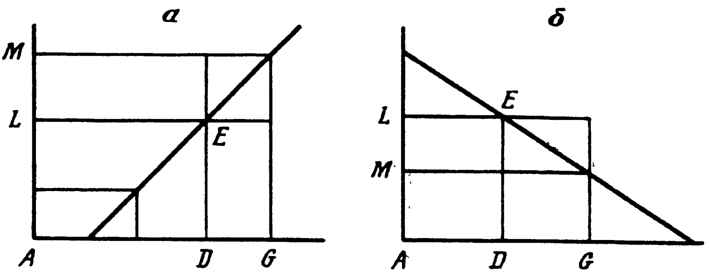


Рис. 4

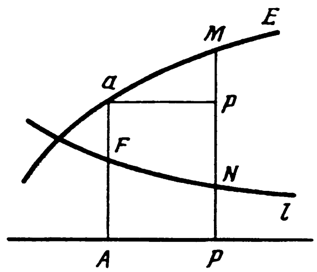


Рис. 5

некоторые доказательства можно было бы сократить, а другие вовсе отбросить, в этом Маклорен отдает себе полный отчет, но аксиоматический метод требует доказательства и вполне очевидных положений. Это тем более необходимо, что автор ставит себе задачу отвести любые подозрения от изложенной теории, сделать ее неуязвимой для любой критики. Ведь его цель – безупречно, логично строго, следуя классическим образцам, построить фундамент исчисления.

Заложив фундамент, Маклорен приступает затем к приложению рассмотренных общих теорем, сначала к геометрическим величинам, а во второй книге – к произвольным величинам, заданным аналитическими выражениями.

Рассмотрим несколько теорем из первой книги. Кстати, теоремами Маклорен называет только упомянутые выше 15 утверждений, остальные теоремы он называет предложениями (propositions).

В Предложении III сказано: если флюксии прямых линий AD и AL измеряются [отрезками] DG и LM, флюксия прямоугольника AE, построенного на AD и AL, измеряется суммой прямоугольников EG и EM, когда эти линии возрастают или убывают вместе, и разностью этих прямоугольников, когда одна из данных линий убывает, а другая возрастает.

Рисунок 4, *а* соответствует случаю совместного возрастания переменных, рис. 4, *б* – возрастанию одной из них, когда другая убывает. Теорему можно толковать как правило нахождения флюксии произведения двух переменных, текущих равномерно (так как их зависимость графически изображается прямой линией).

Среди теорем о флюксиях криволинейных фигур находится и основное утверждение интегрального исчисления, получившее потом название формулы Ньютона–Лейбница. В Предложении XX площадь трапеции $APNF$ Маклорен измеряет разностью ординат PM и Aa кривой aME, которая является флюентой (т.е. первообразной) исходной кривой

FNl (рис. 5). К этому соотношению в аналитической форме он возвращается во второй книге.

Более детально содержание трактата мы рассмотрим дальше, приведенные примеры иллюстрируют способ, которым Маклорен излагает некоторые факты математического анализа.

К первой геометрической книге трактата Маклорен затем присоединяет аналитическую: "О вычислениях в методе флюксий". В ней он дает более общую алгебраическую трактовку величин и их флюксий. Здесь он применяет алгебраическую символику (чего не было в первой книге), изложение становится более кратким и компактным.

Величины здесь уже не порождаются движением, но "получаются одна из другой при помощи алгебраических операций..., причем они предполагаются растущими и убывающими вместе". Таким образом, величины задаются аналитическими выражениями, полученными с помощью алгебраических операций над другой величиной, меняющейся равномерно. Флюксии двух величин, изменяющихся совместно, есть "меры их соответственных темпов возрастания и убывания". Как же находить или сравнивать флюксии? Из двух зависимых величин одна меняется равномерно, получая постоянно одно и то же приращение. Ее флюксия может быть измерена этим приращением. Тогда зависимая переменная (возрастающая) имеет последовательно возрастающие приращения, а убывающая переменная – убывающие приращения. Т.е. на современном языке $\Delta y < y'(x) < \Delta y(*)$, если $\Delta y < \delta y$; для убывающей функции неравенства аналогичные. Неравенства (*) можно переписать и так):

$$\Delta y < y'(x)\Delta x < \delta y \quad (**),$$

ибо Маклорен говорит не о точном значении флюксии, а о том, что она измеряется величиной, заключенной между двумя приращениями, т.е. подразумевается еще некий коэффициент. Тогда неравенства (**) принимают вид:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < y'(x) < \frac{\delta y}{\Delta x} \quad (***).$$

Флюксия переменной величины удовлетворяет двум неравенствам (**). Однако как же ее найти? Маклорен показывает это на примере функции $y = x^2$. Если последовательные значения абсцисс суть $x - \Delta x$, x, $x + \Delta x$, то последовательные значения ординат соответственно будут равны $(x - \Delta x)^2$, x^2, $(x + \Delta x)^2$ и, стало быть, два последовательных приращения ординаты равны $2x\Delta x - \Delta x^2$ и $2x\Delta x + \Delta x^2$. Флюксия x^2 заключена между этими двумя значениями. Допущением от противного он доказывает, что она точно равна $2x$*. Само это значение он получает, видимо, с помощью предельного перехода в отношении

$$\frac{2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} \text{ или } \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

* У Маклорена флюксия x^2 равна $2x\dot{x}$, где $\dot{x}$ – флюксия переменной x, которую мы считаем равной 1.

при $\Delta x \to 0$. Итак, к неравенствам (**) или (***) Маклорен неявно присоединял предельный переход.

Опираясь на предыдущую задачу. Маклорен затем находит флюксию произведения, частного, логарифмической функции и т.п.

Из двух первых аксиом первой книги (для ускоренного движения) весьма легко можно вывести соотношения для мгновенной скорости, аналогичные неравенствам (*). Таким образом, для аналитических, алгебраических флюксий у Маклорена такие же исходные принципы, как и для геометрических. Понятны его слова: "В толковании понятия флюксии я следовал сэру Исааку Ньютону в первой книге; но не думаю, что я ушел от его смысла во второй".

Итак, "степени совместного убывания или роста двух величин" не что иное, как скорости их непрерывного течения, изменения. И здесь мы имеем ту же кинематическую точку зрения, что и у Ньютона.

У самого Ньютона тоже была попытка аксиоматического построения теории геометрических флюксий, как это недавно обнаружено в его рукописях [87. V. III. С. 328–352]. Этот фрагмент можно рассматривать как добавление к "Методу флюксий и бесконечных рядов", написанному примерно в 1671 г. При переписывании, копировании он был опущен.

В аксиомах Ньютон утверждает, в частности, что из равенства флюент вытекает равенство их флюксий: отношение двух флюент равно отношению их флюксий: флюксия суммы равна сумме флюксий слагаемых. На основе аксиом он находит флюксию произведения, частного, корня, рациональной степени. Таким образом, из различных способов построения исчисления флюксий у Ньютона "в запасе" был еще один: на базе аксиоматического метода, примененного к геометрическим флюксиям. Он в развернутом виде был реализован Маклореном в "Трактате".

Имея лишь пока фундамент его теории, все же спросим, достиг ли Маклорен на такой основе безупречного построения анализа? Шотландский математик Тернболл (Turnbull H.W.) оценивает его труд как "первое логичное и систематическое изложение теории флюксий, в отношении строгости вместившее в себя и геометрический метод исчерпывания древних и более поздние принципы Коши и Вейерштрасса". Эта оценка справедлива, ибо она дается после обзора всего пути, пройденного классическим анализом. Однако современники Маклорена и математики следующего поколения, т.е. те, к кому обращен был "Трактат", оценивали его не слишком благосклонно. Дело в том, что идея предела и производной была облечена у Маклорена в архаическую форму геометрических флюксий. Его кинематика неудобочитаема, и, по-видимому, таковой она была и для его современников, хотя такой стиль был для них более привычным. Краткость обозначений и элегантность всего алгоритма лейбницевых дифференциалов, несмотря на их неясную природу (это неоднократно подчеркивал Маклорен), выглядела гораздо привлекательнее тяжелых и растянутых рассуждений Маклорена. Даже его соотечественники, среди которых немало было ортодоксов ньютоновой математики, постепенно склонялись к континентальному пути развития высшего анализа. Математики XVIII века не пошли по пути, указанному Маклореном.

Напротив, анализ постепенно освобождался от механических и геометрических пут: в работах Эйлера, Даламбера, Лагранжа и других он становился анализом функции. Лагранж писал в "Теории аналитических функций", что "с понятием движения привносится нечто чуждое в исчисление, которое должно иметь своим предметом только алгебраические величины... с другой стороны, нет ясного представления о скорости движения в каждый момент, когда скорость меняется. Из работы Маклорена о флюксиях можно видеть, как трудно метод флюксий обосновать и как много требуется для этого искусства" [65]. Впрочем, попытка самого Лагранжа в цитируемой работе трактовать производные различных порядков лишь как коэффициенты разложения функций по степеням независимой переменной тоже оказалась неудачной.

К концу XVIII в. анализ совсем освободился от кинематики, стал разветвленной обширной наукой. Однако попрежнему оставался актуальным вопрос, поставленный епископом Беркли: как логически обосновать операции анализа, какова природа бесконечного и в какой мере бесконечными можно пользоваться в математике? В 1784 г. Берлинская академия наук объявила конкурс на сочинение, в котором была бы дана "ясная и точная теория того, что называется в математике бесконечностью". Из 20 представленных работ ни одна не удовлетворила жюри вполне. Тем не менее лучшей была признана работа швейцарского математика Симона Люилье (1750–1840) "Элементарное изложение высшего анализа", в которой этот анализ строился на основе понятия предела. Он заимствовал идею предела, предложенную Даламбером.

Удовлетворительное обоснование анализа было получено лишь в XIX в. в работах Коши, Больцано, Вейерштрасса, Дедекинда на основе понятия пределах и убедительной теории действительного числа.

Позиция Маклорена, если не по форме, то по существу напоминает позицию классиков анализа XIX века. В ней главное, во-первых, отказ от актуальных бесконечно малых; во-вторых, в основу положено понятие производной (у Маклорена – скорости) как предела некоторого отношения; в-третьих, анализ строится дедуктивно, как цепь теорем (в конце XIX в. – на основе аксиоматики действительных чисел). Маклорен не располагал теорией действительного числа – к тому времени она не была еще получена, – но он брал, подобно древним, отрезки прямой в качестве "заменителей" действительных чисел, и потому его анализ имеет геометрический вид (большей частью). Таким образом, попытка Маклорена находилась в русле развития анализа, а может быть, в чем-то и опережала это развитие. Во всяком случае данная выше оценка Тернболла не является преувеличением, она объективна.

Глава 3

Вклад в развитие математического анализа

Проблема экстремумов

Проблема экстремумов уходит своими корнями в древнегреческую математику. Уже Архимед в решении одной частной задачи применил в своеобразной форме необходимый признак экстремума [5. С. 648–654]. Схоласты в средние века указали, что изменяющаяся величина имеет в максимуме (или минимуме) "остановку". Эту же идею высказал в Новое время И. Кеплер: вблизи экстремума изменение величины "нечувствительно". В этом вопросе значительно продвинулся П. Ферма. Из трактата "Метод отыскания наибольших и наименьших значений" (1643) и переписки Ферма следует, что он фактически владел достаточным условием экстремума.

Творцы анализа бесконечно малых придали проблеме общий вид. Ньютон в "Методе флюксий" необходимое условие экстремума выразил аналитическими равенствами $\dot{x} = 0$ или $\dot{y} = 0$. Лейбниц впервые в печати в 1684 г. сформулировал необходимое условие в форме $dy = 0$ и достаточные признаки максимума и минимума соответственно в виде $dy = 0$, $d^2y > 0$ и $dy = 0$, $d^2y < 0$.

В "Трактате о флюксиях" Маклорена этому вопросу уделяется значительное внимание. Один из его самых впечатляющих результатов представляет собой достаточное условие экстремума функции с использованием производных высших порядков.

Маклорен проблему максимума и минимума связывает с нахождением точек перегиба и точек возврата кривой. Он рассматривает два вида (two kinds) экстремума: по-нашему "обычный", или локальный, экстремум и "краевой" экстремум. В первом изучается поведение кривой по обе стороны от точки экстремума, во втором – по одну сторону. Для локального экстремума им найден упомянутый достаточный признак с применением высших производных. В этих исследованиях Маклорен применил односторонние и бесконечно производные – правда, в геометрической форме. Проблема изложена в первой книге геометрически, а во второй книге основной результат сообщен в аналитической форме.

Маклорен начинает с определения экстремума. Если непрерывная переменная величина постоянно и бесконечно возрастает или убывает "до исчезновения", то она не исследуется на экстремум. Но если величина сначала растет до определенного момента, а затем убывает (или наоборот), то ее значение в этот момент называют максимумом (или минимумом) "независимо от ее изменения в другие промежутки времени" [69. С. 239]. Маклорен определяет обычный или локальный

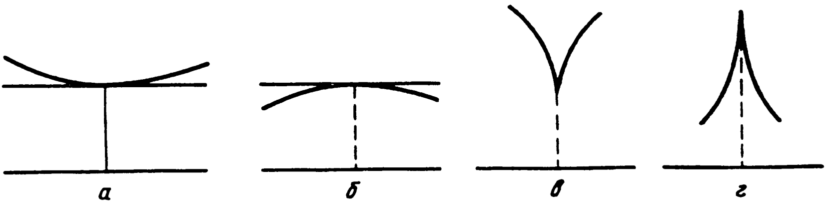


Рис. 6

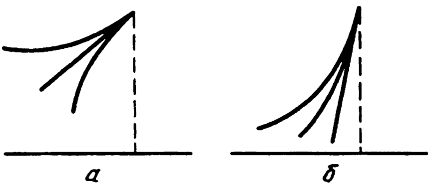


Рис. 7

экстремум, когда кривая расположена по обе стороны от экстремальной ординаты и имеет касательную параллельную или перпендикулярную оси абсцисс (рис. 6).

Второй, "краевой" экстремум – это наибольшее или наименьшее значение, которое ордината принимает на конце промежутка. Кривая тогда лежит по одну сторону от экстремальной ординаты, и конец является точкой возврата первого или второго рода. Это "краевой" экстремум для двузначной функции. Расположение кривой в этом случае (для максимума) представлено на рис. 7.

Для упомянутых видов экстремумов Маклорен нашел достаточные условия, попутно решив вопрос о точках перегиба.

В первой книге трактата Маклорен сначала изложил известные в то время условия монотонности функции и условия выпуклости (вогнутости) кривой (с использованием производных). Затем он переходит к выяснению критериев экстремума, для чего на чертеже одновременно рассматривает график функции *CEH* и ее производной *ceh* (рис. 8) в некоторой окрестности рассматриваемой точки *E*. Осью абсцисс является нижняя горизонталь, с которой кривая *ceh* имеет общую точку *e*, что соответствует обращению в нуль производной. Если кривая *ceh* пересекает ось абсцисс и лежит по разные стороны от нее, то на основе ранее изложенного признака кривая *CEH* имеет экстремум. Если же кривая *ceh* касается оси абсцисс, то линия *CEH* имеет в точке *E* перегиб. Этими двумя случаями исчерпывается поведение гладкой кривой. Далее Маклорен ставит вопрос о поведении кривой в точке, где обращаются в нуль все ее производные вплоть до n-го порядка и приходит к выводу, что при четном n кривая будет иметь перегиб, при нечетном – экстремум.

Прозрачное доказательство этого утверждения состоит в многократном применении ситуации, имеющейся на рис. 8,*а* и 8,*б*, где *ceh* изображает уже любую производную, а *CEH* – производную, на единицу меньшего порядка. Например, если равны нулю первые три производные, то последовательно чередуются рис. 8,*а*; 8,*б*; 8,*а*; и кривая, стало быть, имеет максимум и т.д.

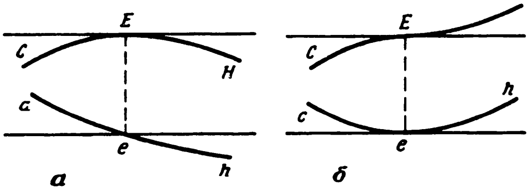


Рис. 8

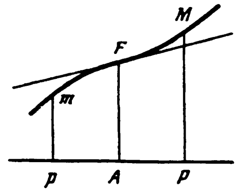


Рис. 9

Сравним это геометрическое доказательство с аналитическим, приведенным во второй книге. Оно следует из разложения функции в ряд Тейлора. На рис. 9 проведены кривая mFM, касательная к ней в точке F и три ординаты pm, PM, AF, причем $pA = PA$. Обозначив $AF = E$, $AP = x$, Маклорен рассматривает разложение ординаты PM по степеням x и ординаты pm по степеням $(-x)$:

$$PM = E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^2} + \ldots$$

$$pm = E - \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} - \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^2} + \ldots$$

Если $\dot{E} = 0$, то $PM = E + \dfrac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \ldots$ и $pm = E + \dfrac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \ldots$ Поэтому, при достаточно малом x, обе координаты PM и pm превосходят $AF = E$, если $\ddot{E} > 0$, но обе будут меньше AF, если $\ddot{E} < 0$. Т.е. в первом случае будет иметь место минимум, во втором – максимум. Если же $\dot{E} = \ddot{E} = 0$, $\dddot{E} \neq 0$, то одна из названных ординат будет больше AF, а другая – меньше, и в этом случае кривая имеет перегиб и т.д. Стало быть, обращение в нуль нечетного числа последовательных производных доставляет функции экстремум, четного числа – перегиб (этот последний случай имеет место на рис. 9).

Перед нами два доказательства теоремы: геометрическое и аналитическое. Современный читатель предпочтет, вероятно, второе, данное на языке формул. Однако и первое привлекает своей наглядностью, зримостью, что характерно для большинства синтетических, геометрических рассуждений. Для читателя XVIII века оно, наверное, было более доступным и убедительным, чем второе, ибо тогда еще сохранялась сильная геометрическая традиция в математическом мышлении, идущая от древних греков.

Следует подчеркнуть важность сделанного в ходе доказательства утверждения, что при достаточно малом x любой член тейлоровой строки превосходит по модулю сумму всех последующих; правда, само

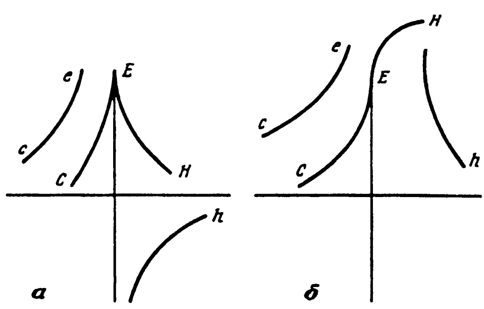


Рис. 10

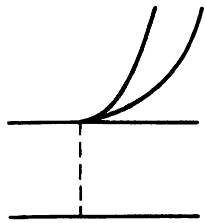


Рис. 11

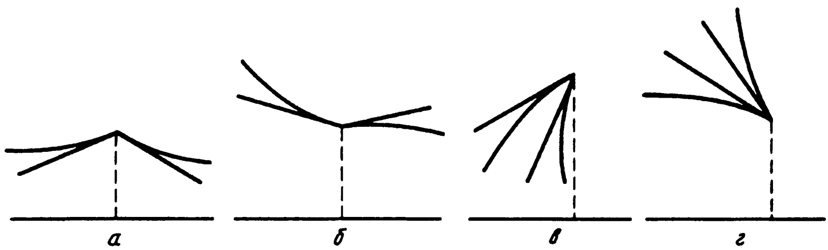


Рис. 12

это утверждение не доказывается. Оно потом у Эйлера и Лагранжа фигурирует как основное в целом ряде доказательств. Лагранж подчеркнул его значение в "Теории аналитических функций" следующим образом: "в ряде $f(x) + pi + Qi^2 + ri^3 + ...$ который получается из разложения $f(x + i)$, i всегда может быть взято столь малым, что любой член ряда будет больше, чем сумма всех последующих" [65. С. 14]. Этот факт Коши позднее доказал в "Лекциях по дифференциальному и интегральному исчислению", когда излагал признаки экстремума.

Признак Маклорена был отмечен многими выдающимися математиками, в частности Лагранжем в 1759 г. [63]. Аналитическое доказательство Маклорена воспроизводилось затем в известных курсах анализа Эйлера [39], Лакруа [66], Гурьева [11] и др.

Экстремумам вида *в* и *г* (см. рис. 6) соответствует бесконечное значение производной. У Маклорена график производной – кривая *ceh* – в этих случаях имеет две бесконечные ветви и вертикальную асимптоту. Если ее ветви расположены по разные стороны от оси абсцисс и от асимптоты, то *CEH* имеет экстремум, и *E* – точка возврата I рода. Если же обе ветви кривой лежат по разные стороны от асимптоты и по одну от оси абсцисс, то *E* – точка перегиба (рис. 10).

В современной символике эти результаты можно записать так.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = -\infty$

и $f(x_0)$ существует, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум;

если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = +\infty$, то

при условии существования значения $f(x_0)$ функция имеет перегиб в точке x.

Маклорен дает также геометрический признак точки перегиба с касательной, наклонной к оси Ox: если в окрестности точки e кривая ceh выпукла (вогнута) и имеет касательную, параллельную оси абсцисс, то E – точка перегиба линии CEH. Это условие в аналитической форме записывается так: если $f'(x) = 0$ и $f''(x) > 0$ в окрестности точки x (или $f''(x) < 0$), то x – абсцисса точки перегиба.

Вопрос о точках возврата и точках перегиба имеет давнюю историю. Ньютон в "Методе флюксий" находил точки перегиба, приравнивая нулю вторую флюксию, т.е. вторую производную. Лейбниц в 1684 г. писал, что в точке перегиба второй дифференциал равен нулю, а по разные стороны от нее значения второго дифференциала имеют разные знаки. Точки возврата встречаются у Гюйгенса в "Трактате о свете" (1790). Лопиталь в "Анализе бесконечно малых" (1684) привел аналитические признаки точек перегиба и точек возврата, не являющиеся полными. Признаки Маклорена уже потому полнее, что он пользовался и бесконечными и односторонними производными.

Маклорен рассмотрел точки возврата I и II рода, когда общая касательная к двум ветвям кривой – наклонная. (Сюда еще надо прибавить случай точки возврата второго рода с горизонтальной касательной – рис. 11). Для этих случаев Маклорен дает достаточные условия, выясняя поведение производной обоих значений функции вблизи рассматриваемой точки, опять-таки в геометрической форме (но ему легко дать аналитическое истолкование).

В этих исследованиях, посвященных нахождению наибольших и наименьших ординат, из особых точек изучаются только точки возврата I и II рода, так как изолированные, или кратные точки не связаны с проблемой экстремума*.

Первое детальное исследование особых точек провел Эйлер во "Введении в анализ бесконечно малых" (1748), записывая уравнение кривой в виде равенства нулю многочлена от двух переменных x, y. Он же занимался "краевыми" экстремумами и в "Дифференциальном исчислении" (1755), где нашел такой экстремум для некоторой функции частного вида. Признаки Маклорена более общие.

Исследования Маклорена по теории экстремума имели неожиданное продолжение в XIX в. в студенческой работе А.Н. Коркина (1873–1908), получившей золотую медаль Петербургского университета. Его статья под названием "Теория наибольших и наименьших величин функций" была рекомендована к печати В.Я. Буняковским.

---

* Кратные точки Маклорен рассмотрел в разделе "Трактата", посвященном нахождению кривизны алгебраических линий третьего порядка.

Коркин дал свою классификацию экстремумов. Наряду с рассмотренными у Маклорена (ссылок на него нет), он изучил и такие точки, в которых непрерывная функция имеет две различные односторонние производные (рис. 12). В случаях *в*, *г* функция двузначна вблизи исследуемой точки. Исследование Коркин провел уже чисто аналитически.

Несобственные интегралы

Исследования по несобственным интегралам Маклорен выполнил в геометрической форме. В главе X "Об асимптотах кривых линий, площадях, ограниченных асимптотами и кривыми, и телах, порождаемых такими площадями" он выяснил условия конечности площади, заключенной между бесконечной ветвью кривой и ее асимптотой, для чего рассмотрел два вида бесконечных фигур. Фигура первого вида ограничена кривой, крайней левой ординатой и горизонтальной асимптотой, второго – кривой, крайней правой ординатой, осью абсцисс и вертикальной асимптотой. На рис. 13 эти две фигуры по-разному заштрихованы.

Таким образом, рассмотрены, как мы бы сказали, несобственные интегралы двух видов: интеграл на бесконечном промежутке и интеграл от неограниченной функции.

Обе искомые площади, "правая" и "левая", являются предельными значениями площади криволинейной трапеции, которая находится по правилу Ньютона–Лейбница, найденному Маклореном в двух формах: геометрической и аналитической.

Согласно этому правилу, площадь трапеции $AFNP$ равна разности двух соответствующих значений первообразной PM и Aa (рис. 14) (здесь FNe – график функции, а aME – график ее первообразной). Если точку P устремлять неограниченно вправо, то полученная площадь будет конечна при условии, что ордината первообразной PM приближается к некоторому конечному значению, как своему пределу. Это означает, что первообразная aME должна иметь горизонтальную асимптоту – так Маклорен формулирует условие сходимости интеграла на бесконечном промежутке.

Если точку A устремлять влево к точке R – через нее проходит вертикальная асимптота RK кривой – то полученная фигура будет иметь конечную площадь при условии, что первообразная коснется прямой RK. В случае асимптотического приближения первообразной к этой прямой искомая площадь бесконечна. Здесь высказано условие конечности интеграла от неограниченной функции.

Таким образом, Маклорен выясняет вопрос о применимости формулы Ньютона–Лейбница для бесконечных промежутков интегрирования или разрывов подинтегральной функции. Он сводит вопрос к существованию предела первообразной при стремлении аргумента к бесконечности или к точке разрыва подинтегральной функции.

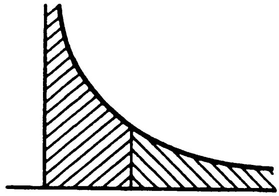


Рис. 13

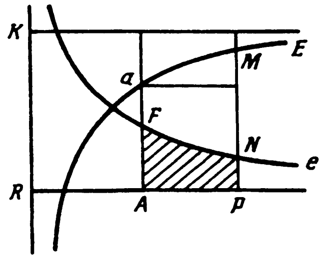


Рис. 14

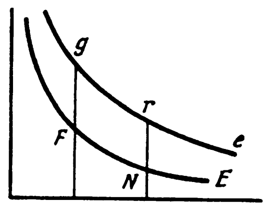


Рис. 15

В этой главе "Трактата" Маклорен нашел достаточный признак сходимости несобственного интеграла, впоследствии переоткрытый Коши в 1827 г. [48]. Результат получен из сравнения поведения данной кривой и гиперболы $y = 1/x^n$ ($n > 0$) и может быть сформулирован для интеграла на бесконечном промежутке так: если предел отношения ординаты данной кривой к ординате гиперболы конечен, то интеграл от данной функции на бесконечном промежутке сходится при условии, что $n > 1$, и расходится при $n \leqslant 1$.

У Маклорена речь идет, как и выше, об условии конечности (или бесконечности) одновременно двух площадей – под данной кривой *gre* и под гиперболой *FNE*, имеющих общую горизонтальную асимптоту снизу и общую крайнюю ординату слева (рис. 15).

Условие сходимости интеграла от неограниченной функции (имеющей вертикальную асимптоту) аналогично предыдущему, но в этом случае интеграл конечен при $n \leqslant 1$ и бесконечен при $n > 1$.

Эти результаты Маклорен использовал для определения площадей поверхностей и объемов тел, полученных вращением кривых около асимптот, и в интегральном признаке сходимости ряда.

У Маклорена нет вычислений с трудными несобственными интегралами, как, например, у Эйлера. Его усилия направлены на выяснение общих условий конечности интегралов. По-видимому, эти результаты прошли мимо внимания многих математиков в XVIII–XIX вв.: во всяком случае, мы не встречаем на них ссылок.

Ряды

Теория рядов во времена Маклорена была развивающейся ветвью анализа. Правда, еще в XIV в. Николь Орэм установил расходимость гармонического ряда. В Новое время Меркатор (1620–1687) и другие исследователи получали отдельные ряды с помощью бесконечной процедуры деления или извлечения корня. Лишь у Ньютона и Лейбница ряды стали действенным инструментом анализа. В "Анализе уравнений с бесконечным числом членов" Ньютон мимоходом заметил, рассматривая один частный ряд, что он сходится к конечному значению, если разность между этим значением и частичными суммами может стать меньше всякой данной величины [31. С. 23]*. Такое же понимание сходимости было у Лейбница. В письме Николаю I Бернулли от 28 июня 1713 г. Лейбниц определил сходящийся ряд как такой, "который можно продолжить настолько, чтобы он отличался от какой-либо возможной конечной величины на величину, меньшую заданной". Сам Лейбниц, как известно, установил признак сходимости знакопеременного ряда.

В обеих школах анализа – британской и континентальной – теории рядов уделялось значительное внимание. Среди последователей Ньютона этой проблемой занимались Брук Тейлор (1685–1731), Джеймс Стирлинг, Абрахам де Муавр (1667–1754), а на континенте – математики "клана" Бернулли и Леонард Эйлер, в частности, разделивший с Маклореном открытие известной формулы суммирования.

Особенностью этого этапа истории рядов было оперирование с ними без учета их возможной расходимости. Например, Якоб Бернулли полагал, что если из гармонического ряда вычесть почленно ряд, полученный из него отбрасыванием единицы, то сумма образованного ряда будет равна 1. После удвоения каждого члена получится ряд 1 + 1/3 + + 1/6 + 1/10 + ..., сумма которого равна 2. Подобного рода действия с расходящимися рядами в ту пору были нормой и зачастую приводили к парадоксам. Правда, тот же Якоб Бернулли призывал к осторожности в оперировании с рядами [41. С. 16].

В исследованиях Маклорена по теории рядов (в X главе I книги и II и IV главах II книги "Трактата") можно выделить три направления. Первое направление связано с проблемами сходимости: здесь Маклорен дает определение сходящегося ряда и интегральный признак сходимости. Второе направление исследований включает в себя разложение функции в степенной ряд – ряд Маклорена. И, наконец, третье направление связано с теорией расходящихся рядов и асимптотических приближений, где Маклорен получил знаменитую формулу суммирования, параллельно найденную также и Эйлером. Рассмотрим эти вопросы детальнее.

Маклорен привел, по-видимому впервые в печати, четкое определение суммы ряда как предела частичных сумм следующим образом: "...существуют последовательности (progressions) дробей, которые могут быть как угодно продолжены, и все-таки сумма их членов будет всегда меньше определенного конечного числа. Если разность между их суммой и этим числом убывает таким образом, что при продолжении последовательности она может стать меньше любой сколь угодно

---

* Ньютон, как отмечалось выше, в черновиках, относящихся к 1691–1692 гг., выписал в общем виде разложение функции и в "ряд Тейлора", и в "ряд Маклорена". Еще раньше подобное разложение содержалось в одном из писем Джеймса Грегори от 1671 г.

малой заданной дроби, то это число есть предел суммы последовательности (the limit of the sum of the progression) и есть то, что понимается под значением последовательности, когда она предполагается бесконечно продолженной" [69. С. 289].

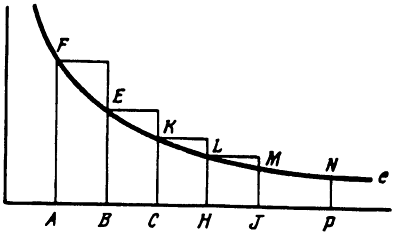


Рис. 16

Эйлер позднее дал аналогичную формулировку в "Дифференциальном исчислении": "Сумма каждого ряда всегда должна быть пределом, к которому мы тем ближе подходим, чем больше членов складываем".

Автору "Трактата" принадлежит и самый ранний – интегральный признак сходимости, изложенный следующим образом.

Члены ряда Маклорен изображает (рис. 16) взятыми на равных расстояниях ординатами $AF, BE, CK, \ldots$ некоторой кривой FNe. Взяв одну из таких ординат PN, он рассматривает площадь фигуры $APNF$. Тогда конечность суммы ряда зависит от конечности предела площади $APNF$ при условии, что AP бесконечно возрастает.

Для доказательства Маклорен строит прямоугольники $FB, EC, KH, \ldots$ и утверждает, что площадь трапеции $APNF$ всегда меньше суммы всех таких прямоугольников, но больше их суммы, из которой исключен первый прямоугольник FB. Поэтому площадь $APFN$ и сумма этих прямоугольников одновременно либо имеют пределы, либо не имеют их; при бесконечном возрастании AP то же самое можно сказать о сумме ординат $AF, BE, CK, \ldots$, представляющих члены рассматриваемого ряда [69. С. 289–290].

Таким образом, сходимость ряда следует из существования конечной площади бесконечной фигуры, заключенной между кривой, крайней левой ординаты и осью абсцисс, т.е. из сходимости несобственного интеграла. Такое сопоставление ряда с несобственным интегралом позволило Маклорену некоторые результаты, полученные ранее для несобственных интегралов, перенести на ряды. Так, из признака сходимости несобственного интеграла вытекает следствие (в современной формулировке):

Если дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Un$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Un / \frac{1}{n^k} = A$, где A – конечно, то ряд сходится при $k > 1$ и расходится при $k \leqslant 1$.

В частности, гармонический ряд расходится, так как расходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} 1/x\,dx$; напротив, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ $(k > 1)$ – сходится, ибо конечен интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$.

И еще пример: ряд, состоящий из дробей вида

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1}}{ax^n + bx^{n-1}} \quad (m, n \text{ – натуральные числа})$$

сходится при условии $n - m > 1$ и расходится, если $n - m \leqslant 1$.

Кстати, Маклорен более корректно просуммировал ряд

1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ...,

рассмотренный Якобом Бернулли, для чего предварительно доказал теорему: сумма ряда, полученного из некоторого ряда положительных убывающих дробей вычитанием последующего члена ряда из предыдущего, равна сумме первого члена исходного ряда. Ряд 1 + + + + ... получается из гармонического сначала вычитанием последующего члена ряда из предыдущего, а затем удвоением каждого члена. В итоге сумма его будет равна 2.

Таким образом, в "Трактате" изложен не только признак сходимости, но и достаточное число примеров на его применение.

Разложение функции в ряд ведет свое начало, как было сказано выше, от Меркатора, получившего, например, с помощью бесконечного деления выражение: $1/1 - x = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ Сделанные затем открытия Джеймса Грегори и Ньютона не вошли в научный оборот. Первым в печати опубликовал общее разложение функции в степенной ряд Тейлор в "Методе приращения" (1715).

Он взял за основу интерполяционную формулу Ньютона для конечных разностей:

$$f(z + n \times \Delta z) = f(z) + n \times \Delta f(z) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(z) + \ldots + \Delta^n f(z), \qquad (*)$$

где $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z)$, ..., $\Delta^n f(z)$ – приращения первого, второго и т.д. n-го порядков функции $y = f(z)$, когда аргумент получает приращение $n \times \Delta z$.

Совершив в равенстве (*) "неслыханный по своей смелости предельный переход" [21. С. 329] при $z \to 0$, $n \to \infty$. Тейлор получает искомое разложение:

$$f(z + h) = f(z) + f'(z) \times h + 1/2 f''(z) \times h^2 + \ldots^{*}$$

Он применил этот результат лишь дважды: при решении одного дифференциального уравнения и для приближенного вычисления корней алгебраического уравнения.

Маклореново разложение получено из допущения, что функцию можно разложить в степенной ряд вида:

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots \qquad (1)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, ..., равенст-

---

* Обозначения современные.

во (1) затем последовательно дифференцируется и в полученных выражениях совершается подстановка $z = 0$. В итоге получается

$$y = E + \frac{\dot{E}}{\dot{z}} z + \frac{\ddot{E}}{1 \cdot 2 \cdot \dot{z}^2} z^2 + \frac{\dddot{E}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dot{z}^3} z^3 + \ldots \qquad (2)$$

где E, $\dot{E}, \ddot{E}, \ldots$ – значения $y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ при $z = 0$.

Маклорен не претендовал на приоритет в этом вопросе и печатно сослался на Тейлора. Его результат является частным случаем ряда Тейлора, и все-таки в математике он существует самостоятельно. Одна из причин этого явления состоит, вероятно, в том, что рассуждения Маклорена, основанные на методе неопределенных коэффициентов, были более убедительны, чем выкладки Тейлора. Впрочем, Маклорен, как и Тейлор, не ставил вопрос о сходимости разложения к самой функции. Другая причина – Маклорен более активно применял свой результат: для разложения в ряд показательной, логарифмической, тригонометрических и других элементарных функций, в доказательстве достаточного признака экстремума функции и при выводе формулы суммирования.

Маклорен, подобно другим математикам XVIII столетия, пытался доказать справедливость разложения бинома Ньютона в общем виде. Сам Ньютон пришел к формуле бинома $(1 + x)^n$ для рациональных показателей методом неполной индукции, используя метод интерполирования Валлиса. Маклорен получил разложение в ряд $(1 + x)^n$ тем же путем, каким был найден "ряд Маклорена". Он рассмотрел равенство

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \ (n - \text{рациональное}),$$

затем, последовательно дифференцируя равенство и подставляя $x = 0$ нашел неопределенные коэффициенты. Таким же образом он получил разложение рациональной степени бесконечного полинома $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$, улучшив результат Муавра, полученный в 1697 г. для натуральных показателей.

Теоремой о биноме в XVIII в. занимались Эйлер (дал несколько доказательств), Эпинус, да Кунья и др. Недостатком большинства доказательств (в том числе и маклоренова) было то, что проблема сходимости оставлялась в стороне. Условие сходимости биномиального ряда для комплексных x и действительных n дал Коши в 1821 г. Абель нашел его и для комплексных показателей (1826).

Итак, ряд Маклорена в руках его создателя стал действенным инструментом математического анализа. Мы присоединяемся к исследователю истории рядов Райфу, отметившему, что ни сам Тейлор, ни некоторые его современники не оценили по достоинству теорему о разложении, и раскрыть смысл и значение ее стало заслугой Маклорена [93. С. 83].

Исследования Маклорена принадлежат к первому этапу истории тейлоровой строки, когда вопрос о законности разложения не ставился. Более совершенный и логически строгий характер операции с рядом

Тейлора приняли тогда, когда были введены разные формы остаточного члена. Большую роль сыграл в этом классический пример Коши, показавшего, что из сходимости ряда Тейлора для данной функции еще не следует его сходимость к этой функции (1823).

В XVIII в. широкое применение нашли расходящиеся ряды, открытые еще Ньютоном. Несмотря на парадоксы, возникавшие при оперировании с расходящимися рядами, крепло убеждение в их ценности. Ньютон, в частности, использовал асимптотическое представление функции при нахождении частных сумм гармонических рядов. Д. Стирлинг и А. де Муавр в 30-х годах XVIII в. получили асимптотические разложения выражений: $\sum_{k=1}^{n} \log(x+kd)$ и $\log n!$ (для больших значений n). Наконец, Маклорен и Эйлер, независимо один от другого, получили общий способ, позволяющий выразить конечную сумму бесконечного ряда $S_n = \sum_{n=1} f(x)$ через другой ряд.

Маклорен нашел формулу суммирования значений функции $f(x)$, аргументу которой придаются значения 0, 1, 2, ..., n. В современных обозначениях формула имеет вид:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \int_{0}^{n+1} f(x)dx - 1/2[f(n+1) - f(0)] + 1/12[f'(n+1) - f'(0)] -$$
$$- 1/720[f'''(n+1) - f'''(0)] + 1/30240[f^{\vee}(n+1) - f^{\vee}(0)] - ...$$

Маклорен получил ее последовательным дифференцированием разложения функции $f(x)$ в степенной ряд, после чего каждый из полученных рядов интегрируется на промежутке [0, 1]. Из найденной системы уравнений Маклорен находит значение $f(0)$, выражая его через интегралы и производные данной функции. Аналогично находятся значения $f(1), f(2), ..., f(n)$, которые затем суммируются и дают искомую формулу.

Эйлер аналогичную формулу получил несколько раньше и по-иному*. Она живо обсуждалась в переписке Эйлера со Стирлингом в 1736–1738 гг. [33]. Самостоятельность и оригинальность Маклорена в этом вопросе была признана самим Эйлером. Сравнивая оба вывода, Н. Бурбаки приходит к выводу, что шотландский математик получил формулу "менее рискованным путем, сходным с тем, по которому мы идем сегодня" [16. С. 211]. Впрочем, и Эйлер, и Маклорен дали приближенную формулу – без остаточного члена.

На основе формулы суммирования Маклорен получил разложение:

$$\log(1 \times 2 \times ... x) = \log\sqrt{2\pi} + x\log x + 1/2\log x + 1/12x - 1/360x^3 +$$
$$+ 1/1260x^5 - ... \qquad (**)$$

Аналогичный результат был найден Стирлингом в 1730 г. Сам Стир-

---

* См. об этом, например, в [18. С. 306–307].

линг в письме к Эйлеру от 16 апреля 1738 г. отметил, что его формула является частным случаем общей формулы суммирования, которая стала известна ему из присланных страниц "Трактата" Маклорена.

Ряд Стирлинга, стоящий в правой части формулы (**) расходится, точнее, является асимптотическим разложением $\log n!$, но Маклорен этого не знал, так как коэффициенты ряда начинают расти очень далеко. Этот "полусходящийся" ряд впоследствии изучил Коши (1843).

Теорему о суммировании Маклорен использовал для сложения целых и дробных степеней рациональных и целых чисел и применил эти результаты к популярной тогда проблеме суммирования рядов, обратных степеням натуральных чисел. Например, для суммы ряда $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots$ он получил приближенное значение, равное 1,64493. Маклорен указал еще на одно назначение теоремы о суммировании – преобразовать медленно сходящиеся ряды в быстро сходящиеся.

Формула Эйлера–Маклорена получила значение одной из основных формул анализа лишь с введением остатка ряда в правой части. Ею занимались Пуассон, Якоби, Остроградский. Оригинальный вывод формулы – без использования ряда Тейлора – был предложен В.Г. Имшенецким (1832–1892). Ею занимался А.А. Марков (1856–1922). В настоящее время это одна из основных формул теории конечных разностей, она играет видную роль в теории расходящихся рядов, асимптотических разложений и т.п.

Эллиптические интегралы

Уже первым аналистам было известно, что существуют интегралы, не выражающиеся конечным образом через элементарные функции. Весьма часто такие интегралы получались при измерении дуг кривых, в частности, эллипса и гиперболы. Ньютон решал подобные задачи, разлагая длину дуги кривой в степенной ряд. Так, в "Методе флюксий" флюксия длины дуги гиперболы разлагается в степенной ряд, после чего ряд почленно интегрируется.

Проблема измерения длин дуг, выражающихся, как мы бы сказали, эллиптическими интегралами, приняла иной характер в направлении, которое основали Якоб и Иоганн Бернулли и к которому позднее примкнул итальянский математик Дж. Фаньяно (1682–1766): производную длины дуги надлежало выразить через длины других кривых, чаще – дуг конических сечений. Иоганн Бернулли в 1695 г. поставил задачу: найти такие кривые, чтобы сумма или разность их дуг могла быть выражена через дугу круга. Результат он получил в виде эвольвенты некоторой кривой. Спустя три года Иоганн Бернулли предложил аналогичную задачу, заменив в ней дугу круга на прямолинейный отрезок, и получил кубическую параболу.

Фаньяно в 1715–1720 гг. нашел прообраз будущей теоремы сложения эллиптических интегралов, и с ее помощью получил еще одно решение задачи Иоганна Бернулли. Фаньяно показал также, что дуга лемнискаты может быть выражена через дуги эллипса и гиперболы.

Исследования Маклорена по этой проблематике содержатся в третьей главе второй книги "Трактата": "Об аналогии между дугами окружности и логарифмами: о приведении флюент к таковым или к гиперболическим и эллиптическим дугам или к другим флюентам, более простой формы, когда они не могут быть выражены с помощью конечного числа алгебраических членов". Метод Маклорена кратко может быть изложен так: находится дифференциал длины дуги кривой, и если он содержит радикалы от многочлена третьей или четвертой степени, то делается попытка выразить его через дифференциалы длин дуг эллипса или гиперболы (разумеется, у Маклорена не дифференциал, а флюксия, не интеграл, а флюента). Эту задачу Маклорен решил, в частности, для эластичной кривой – кривой, в каждой точке которой кривизна пропорциональна ординате (см. дальше), и тем самым поправил Якоба Бернулли, ошибочно считавшего, что дугу эластичной кривой нельзя выразить через дуги конических сечений.

Дуги эллипсов и гипербол при таком подходе выступают как новые средства выражения интеграла. Маклорен сознавал, что развитие интегрального исчисления связано с расширением представления об интегрируемости. Рассуждая об интегралах от выражений, содержащих радикалы, он усматривает среди них, во-первых, такие, которые берутся в алгебраических функциях ($\int dx/\sqrt{1 \pm x}$, например), затем интегралы, сводимые к аркфункциям и логарифмам ($\int dx/\sqrt{x}\,\sqrt{1 \pm x}$), и, наконец, интегралы, выражаемые посредством дуг эллипсов и гипербол, как, например, $\int \sqrt{x}\,dx/\sqrt{1 \pm x^2}$. Тем самым он верно подметил три этапа расширения понятия интеграла.

На первом этапе допускается или, по крайней мере, предпочитается алгебраическая интегрируемость. Такой позиции придерживался Ньютон в исследовании интеграла от дифференциального бинома $\int x^m \times (e + fx^n)^l\,dx$ (1), где m, n, l – рациональные, e, f – действительные числа. Достаточный признак алгебраической квадратуры дифференциального бинома, сообщенный Ньютоном (без доказательства) в письме к Ольденбургу для Лейбница (от 24 октября 1676 г.), состоял в том, чтобы числа $m + 1/n$ или $m + 1/n + l$ были целыми положительными. Маклорен отбросил в этом вопросе требование алгебраической интегрируемости и пришел к более общему условию: числа $m + 1/n$ или $m + 1/n + l$ должны быть только целыми. Как раз в случае их отрицательных значений интеграл от бинома берется через логарифмы и круговые функции.

Интеграл от дифференциального бинома занимал многих крупных математиков. Достаточные условия его конечной выразимости обсуждали Эйлер, Гольдбах и Даниил Бернулли в переписке 1729–1730 гг. Эйлер опубликовал свой результат лишь в 1768 г., а признак Гольдбаха остался неопубликованным. Эти результаты континентальных ученых не могли быть известны шотландскому математику. Ему первому, таким образом, принадлежит публикация достаточного условия интегрируемости дифференциального бинома. Вопрос об интеграле (1) был исчерпан в 1853 г., когда П.Л. Чебышев доказал и необходимость условия, высказанного Маклореном. Для иррациональных показателей подинтегральной функции доказательство было дано в 1926 г. Д.Д. Мордухай-Болтовским.

На втором этапе развития интегрального исчисления в качестве новых средств выражения допускаются трансцендентные функции: тригонометрические и логарифмические. Именно такой подход был у Маклорена при интегрировании дифференциального бинома. Впрочем, эти функции считались не вполне равноправными с алгебраическими. Аналист начала XVIII в. "интегрирует" лишь в алгебраических функциях, а к трансцендентным функциям "приводит". Так, в одном из писем Даниила Бернулли мы читаем, что рациональные дифференциалы* "могут быть либо интегрируемыми (intégrés) либо приведенными (réduite) к квадратурам круга или гиперболы" [58. С. 339].

И, наконец, на третьем этапе интегрирование иррациональных функций приводит к новым трансцендентным функциям, которые геометрически выражаются длинами дуг конических сечений (эллипсов, гипербол) и лишь у Лежандра получают название эллиптических интегралов и развернутую теорию.

Таким образом, Маклорену следовало прежде всего найти дифференциалы дуг эллипса и гиперболы. Для них он получает несколько различных аналитических выражений, зависящих от выбора аргумента и формы кривой. Например, для дифференциала дуги равнобочной гиперболы (рис. 17) в точке E им найдена формула $ds = \sqrt{x}\, dx/4\sqrt{x^2-1}$, где x равен отрезку SM, проведенному из центра гиперболы S так, чтобы $\angle MSE = \angle ESA$. AM – касательная в вершине A, E – произвольная точка гиперболы (на рис. 17 представлена только одна ветвь гиперболы). Дифференциал дуги произвольной гиперболы с полуосями a и b у Маклорена имеет вид $a\sqrt{x}dx / 2\sqrt{x^2+2ex+b^2}$, дифференциал дуги эллипса с такими же полуосями – $\sqrt{ax}dx / \sqrt{2ex - x^2 - b^2}$ (e – функция полуосей).

Такое варьирование в сущности означало поиск наиболее удобной, можно сказать, канонической формы для дифференциалов дуг эллипса и гиперболы, но она не была найдена Маклореном. Поэтому приведение выполнялось без общего приема.

Маклорен выразил через дуги эллипса и гиперболы интегралы вида $\int \frac{x^{\pm 1/2}}{\sqrt{a \pm bx \pm cx^2}}dx$. Действуя фактически наощупь, он в значительной степени опирался на геометрическое чутье и доскональное знание свойств кривых. Покажем это на примере лемнискаты. Сначала

* Так по-другому называли подинтегральное выражение в формуле (1).

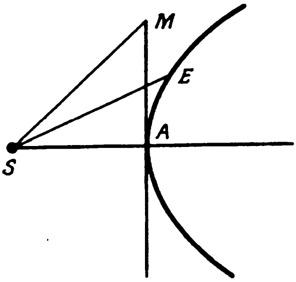


Рис. 17

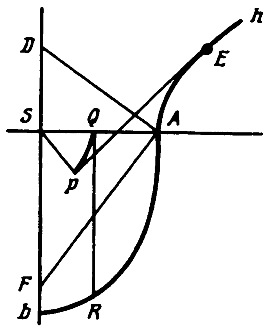


Рис. 18

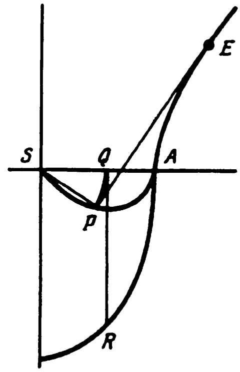


Рис. 19

Маклорен выразил интеграл вида $\int\limits_a^z -b^2dz/2\sqrt{az}\sqrt{b^2-2ez-z^2}$ через дугу некоторого эллипса, дугу гиперболы и отрезок касательной к гиперболе, конструктивно связанные между собой и зависящие от констант, входящих в подинтегральное выражение. Этот результат он получил в пункте 805-м рассматриваемой главы.

Пусть у гиперболы AEh полуоси: $SA = a$, $SD = b$, $SP \perp PE$ (PE – касательная к гиперболе в точке E), $SQ = SP$, $AF \perp AD$. ARb – эллипс с малой полуосью SA и фокусом F, $QR \perp SA$.

Тогда флюента от $-b^2\dot{z}/2\sqrt{az}\sqrt{b^2-2ez-z^2}$ равна $b/a\ AR + AE - EP$, где $z = p^2/a$, $2ea = b^2 - a^2$, $SQ = SP = p$ (рис. 18). Для дуги AP лемнискаты* (рис. 19) Маклорен получает интеграл указанного вида, который поэтому равен сумме дуг эллипса AR и гиперболы AE, из которой вычтена длина отрезка касательной EP**.

Даламбер в "Исследованиях по интегральному исчислению" (1746) назвал Маклорена своим предшественником, вывел его результаты аналитическим путем, а затем и дополнил их, рассмотрев интегралы более общего вида $\int \frac{x^{\pm n}}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}}dx$.

Итог исследованиям Маклорена и Даламбера подвел Эйлер в статье "О приведении интегральных формул к спрямлению эллипсов и гипербол" (1766), где впервые предложил каноническую форму эллип-

* Лемнискату Маклорен определяет как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра равнобочной гиперболы на касательные к ней; на рис. 18 P принадлежит лемнискате, так что $SP \perp PE$, где PE – касательная к равнобочной гиперболе в точке E.

** В задаче о лемнискате Маклорен повторил результат Фаньяно, но иным способом и независимо от него, так как итальянский журнал "Giornale de Letterari d'Italia", в котором печатались статьи Фаньяно, не был широко известен.

тического интеграла в виде $\int\sqrt{\frac{f+gz^2}{h+kz^2}}\,dz$ и, рассмотрев 12 случаев, показал, к каким каноническим сечениям приводится интеграл в каждом случае.

Лежандр в "Трактате об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах" (т. I, 1825) писал: "Маклорен и Даламбер были первыми из тех, кто занимался интегралами, которые могут быть выражены через дуги эллипса и гиперболы: они нашли большое число формул, допускающих такое приведение; но эти различные результаты не могли составить теории".

Такая теория была создана Лежандром, и среди ее предтеч был Маклорен.

Глава 4

Об "Алгебре" Маклорена

"Всеобщая арифметика" Ньютона

"Трактат по алгебре" Маклорена – одно из первых руководств, появившихся после "Всеобщей арифметики" Ньютона и по замыслу автора являющееся комментарием последней. Первое латинское издание "Всеобщей арифметики" появилось в 1707 г. [85]; другие издания были снабжены комментариями и приложениями с анализом теорем и правил Ньютона, среди которых встречаются и работы Маклорена. Так, латинское издание "Всеобщей арифметики" 1732 г. было дополнено двумя статьями Маклорена о числе мнимых корней, ранее опубликованными в "Philosophical Transactions" в 1726 и 1729 гг. Здесь же помещена и статья Дж. Кэмпбелла – шотландского математика, который соперничал с Маклореном в решении вопроса о мнимых корнях. В английском издании "Всеобщей арифметики" 1769 г. напечатаны в качестве приложения разделы "Трактата по алгебре", посвященные приближенному извлечению корней. Эти и другие издания книги Ньютона дополнялись также статьями Э. Галлея, А. де Муавра, А.Г. Кестнера, Р.И. Бошковича и других математиков XVIII века. Всего же на протяжении этого столетия "Всеобщая арифметика" издавалась многократно как на латыни, так и в переводах на европейские языки (см. об этом, например, [87. Т. 5. С. 16–19]; [29. С. 344–346]).

"Всеобщая арифметика" Ньютона знаменовала собой новый этап развития алгебры, имеющей к этому времени почтенную историю. Начало этой науке положили греки, однако в форме так называемой геометрической алгебры; у арабов она получила название (от арабского "аль-джабр") и начала освобождаться от геометрической "окраски". Следующий этап развития этой науки связан с именами европейских математиков эпохи Возрождения: С. дель Ферро (1445–1526), Дж. Кардано (1501–1576), Н. Тартальи (1500–1557), Л. Феррари (1522–1565), решавших уравнения третьей и четвертой степеней в радикалах. Однако подлинный расцвет алгебра переживает в XVI–XVII вв. в двух научных европейских школах – британской и континентальной, где параллельно был получен ряд общих результатов. Британцы: Дж. Валлис (1616–1703), У. Оутред (1574–1660), Т. Гарриот (1560–1621): континентальные ученые: Фр. Виет (1540–1603), А. Жирар (1595–1632), Декарт (1596–1650) ставят вопрос о числе, характере, функциях корней алгебраического уравнения произвольной степени. Вершинным достижением этого этапа была "Геометрия" Декарта (1637), в которой изложены и аналитическая геометрия, и буквенная алгебра.

Вопросы теории уравнений решаются названными учеными в значительной степени уже в арифметическом плане, хотя геометрический подход занимает еще почетное место. Так, Декарт еще рассматривал алгебру как исчисление отрезков, в котором можно выполнять алгебраические операции, для чего достаточно лишь указать единицу измерения отрезков. Но он же ввел метод координат, что означало замену непосредственного геометрического объекта адекватным аналитическим (например, уравнением геометрической фигуры) и послужило "алгебраизации" геометрии. Для этой же цели Гарриот, Оутред и, в особенности, Декарт развивали и усовершенствовали алгебраическую символику.

Таким образом, к моменту появления "Всеобщей арифметики" алгебра начала складываться как независимая от геометрии наука, и следующий решительный шаг в этом направлении сделал Ньютон.

Мы не будем сейчас сколько-нибудь обстоятельно характеризовать "Всеобщую арифметику", да это и невозможно в рамках нашего беглого и краткого очерка. Заметим лишь, что развитие алгебры в XVIII в. в большей мере шло под влиянием этой книги, в частности, благодаря попыткам ее комментировать, объяснять трудные места, доказывать теоремы и т. д. В дальнейшем мы будем касаться отдельных вопросов содержания сочинения Ньютона, а сейчас выделим те проблемы, которые привлекли наибольшее внимание Маклорена.

Предмет алгебры. По мнению Ньютона, алгебра представляет собой обобщение арифметики. В ней "вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов (species), как в алгебре. Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика – путем определенным и частным, алгебра же – путем неопределенным и всеобщим. Поэтому почти все предложения и особенно заключения, содержащиеся в алгебре, можно назвать теоремами" [29. С. 7]. Эту мысль затем продолжил Маклорен.

Понятие числа. Ньютон писал: "Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-либо величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное (surdus). Целое число есть то, что измеряется единицей: дробное – кратной долей единицы, иррациональное число несоизмеримо с единицей" [29. С. 8]. Такое понимание положительного действительного числа встречалось и у других математиков доньютоновской и ньютоновской эпохи, однако столь определенно оно было высказано только Ньютоном. Отрицательные числа Ньютон, подобно Жирару, Декарту и другим, интерпретировал с помощью точек, лежащих по другую сторону от начала оси по отношению к точкам, изображающим положительные числа.

Объяснений действий (например, умножения) над отрицательными числами во "Всеобщей арифметике" не дано. Маклорен в "Трактате по алгебре" остановился на этом вопросе подробнее. Что же касается мнимых ("невозможных") чисел, введенных в математический обиход Дж. Кардано, Р. Бомбелли (1526–1573), то их природу, законность и полезность обсуждали позднее Фр. Виет, А. Жирар, Р. Декарт, Дж. Валлис, Ньютон, суммируя взгляды предшественников, видел полезность "невозможных корней", во-первых, в том, что они указывают на невозможность решения задачи в данной постановке (например, на отсутствие точки пересечения двух линий), во-вторых, в том, что они позволяют дать более общую формулировку теоремам алгебры. Маклорен следовал Ньютону в этом вопросе.

Теория алгебраических уравнений. В центре внимания Ньютона, а ранее у А. Жирара, Т. Гарриота, Р. Декарта стоял вопрос о числе корней алгебраического уравнения, т. е. основная теорема алгебры. Ньютон в рукописи 1665 г. [87. С. 520], а затем во "Всеобщей арифметике" говорил об этом так: "Каждое уравнение имеет столько корней, каково его измерение: из них некоторые могут быть верными (true), некоторые ложными (fals), некоторые воображаемыми (imaginari) или невозможными (improssible)*". Маклорен, как мы увидим дальше, приблизил формулировку теоремы к современной.

Ньютон немало места отводит выяснению вопроса о характере корней уравнения. Если число положительных и отрицательных действительных корней он находит по известному тогда правилу Гарриота–Декарта (число положительных корней равно числу перемен знаков в ряду коэффициентов уравнения), правда, уточняя его с учетом мнимых корней, то для числа мнимых корней он предложил свой весьма хитроумный способ, который и рассмотрим далее в связи с дискуссией Маклорена и Кэмпбелла по этому вопросу. Этой проблемой позднее занимались Э. Варинг (1734–1798), Ж.Л. Лагранж (1736–1813), а окончательное решение получил Дж. Сильвестр (1814–1897), спустя ровно два века после Ньютона.

Ньютон нашел формулы для степенных сумм корней, частично ранее известные А. Жирару (1629), который нашел суммы первых четырех степеней**. В "Всеобщей арифметике" несколькими способами определены границы действительных корней. В книге решается проблема приводимости путем отыскания линейных, квадратичных, кубических и т. д. делителей многочлена с целыми или рациональными коэффициентами как в рациональном поле, так и в некотором его расширении. Объяснению алгоритма Ньютона в этой задаче Маклорен посвятил две главы "Алгебры".

Аналитическая геометрия. Хотя Ньютон настойчиво осуществлял идею арифметизации алгебры, но, следуя установившейся традиции, присущей особенно Декарту, отдал дань и геометрическому решению уравнений и их систем. Любопытно, что в рукописи 1665 г. он сформулировал утверждение, позднее названное теоремой Маклорена: "число точек, в которых две линии могут пересекаться, не может быть больше прямоугольника (т. е. произведения. – *М.К.*) от числа их измерений" [87. С. 498]. Маклорен переоткрыл ее (в 1720 г.), не зная, по-видимому, неопубликованного результата Ньютона. В "Всеобщей арифметике" имеется несколько десятков задач, решаемых методами ана-

---

* "Верные" – положительные, "ложные" – отрицательные корни.

** Д. Уайтсайд, издатель пятитомного собрания рукописей Ньютона, считает, что результаты Жирара не были известны Ньютону [87].

литической геометрии, с использованием уравнений алгебраических кривых.

Приближенное численное решение уравнений, а также решение алгебраических уравнений от двух переменных с помощью "параллелограмма Ньютона" также рассмотрено Ньютоном. Комментированию этих вопросов Маклорен уделил значительное внимание.

К большей части своих работ Ньютон, как он сам писал, "не присоединял доказательства, ибо они представлялись слишком легкими, а иногда не могли быть изложены без докучливых длиннот" [29. С. 295]. Некоторыми из них Ньютон, наверняка, вообще не располагал. Получить эти доказательства стало задачей нескольких последующих поколений математиков. К их числу принадлежал и Маклорен.

Ньютон излагал правила и теоремы "Всеобщей арифметики" без доказательств, но пояснял их на большом количестве примеров, следуя принципу: "при изучении наук примеры полезнее правил". Для учебного пособия того времени, каковым являлась "Всеобщая арифметика", этот принцип, вероятно, был методически оправданным; с другой стороны, доказательствами иных теорем Ньютон и не располагал, а пришел к ним эмпирическим, индуктивным путем либо интуитивно. Многие комментаторы "Всеобщей арифметики", включая Маклорена, стремились пополнить ее доказательствами и комментариями. А. Клеро [46], Л. Эйлер, Т. Симпсон [98], Хр. Вольф [10] и другие в XVIII в. опубликовали сочинения по алгебре, которые так или иначе были навеяны "Всеобщей арифметикой". Книга Эйлера, вышедшая на русском языке в 1768 г., так и называлась: "Всеобщая арифметика" (Правда, немецкий вариант был опубликован позднее и имел название "Полное руководство по алгебре" [56].) Ньютон указал дальнейший путь развития как в направлении алгебраизации математики в целом, так и в разработке отдельных проблем самой алгебры.

"Алгебра" Маклорена представляет собой прямой комментарий к "Всеобщей арифметике". Маклорен выписывает, заключив в кавычки, некоторое утверждение Ньютона, а затем поясняет или доказывает его. Конечно, замысел дать строгие доказательства всем теоремам и правилам алгебры, имеющимся у Ньютона и у других авторов, Маклорен полностью реализовать не мог – это стало возможно благодаря дальнейшему развитию науки в XVIII–XIX вв.

Общие сведения о "Трактате по алгебре"

"Трактат по алгебре" был в 1748 г. посмертно издан группой друзей, которым Маклорен оставил свои бумаги. В предисловии подчеркивается, что книга готовилась давно и составлена на основе университетских лекций автора. В архиве Маклорена был обнаружен старый ее план, относящийся к 1726–1729 гг., который "почти в каждом параграфе" совпадает с планом публикуемого сочинения. Издатели включили в книгу также материал двух статей Маклорена о числе мнимых корней, опубликованных в "Philosophical Transactions" в 1728–1729 гг.

Итак, Маклорен начал работать над "Алгеброй", видимо, уже с 1726 г., но так и не опубликовал при жизни. Надо заметить, что он не спешил с публикациями и других своих сочинений – "Трактата о флюксиях", над которым он работал восемь лет, и "Отчета о философских открытиях сэра Исаака Ньютона", который был напечатан тоже посмертно в 1748 г. Маклорен задумал свою "Алгебру" как комментарий к "Всеобщей арифметике" Ньютона, в которой нет доказательств. Правда, многие "доказательства" Маклорена суть рассуждения по методу неполной индукции, не пренебрегает он и аналогиями, – одним словом, делает все возможное, чтобы убедить читателя в истинности утверждения, хотя бы даже и не чисто дедуктивным способом. Но идеалом для него все-таки была дедукция, образцом которой он считал евклидову геометрию и которой он следовал и в теории флюксий и в органическом описании кривых.

"Трактат по алгебре" был обращен главным образом к студенчеству и как учебник был популярен в течение XVIII в., особенно в британских университетах. Он шестикратно издавался на английском языке, а в 1753 г. вышел во французском переводе. Структура руководства такова, что оно удобно для чтения и изучения. Вопрос обычно излагается так: сначала теорема формулируется, затем доказывается или разъясняется и, наконец, подкрепляется примерами. Формулировка теоремы набирается курсивом с большими полями с обеих сторон. Подразделение материала, помимо трехчастного деления, на главы и небольшие параграфы также облегчает чтение.

В первой части изложены начала алгебры: введены величины и операции над ними, рассмотрены арифметическая и геометрическая прогрессии. Решаются линейные уравнения и их системы, причем метод их решения аналогичен "правилу Крамера". Рассмотрены квадратные уравнения и иррациональности. Всего в этой части 14 глав и 131 параграф.

Вторая часть является главной в книге. Здесь рассмотрены вопросы, группирующиеся, как мы бы сказали, вокруг основной теоремы алгебры: о числе корней уравнения вообще, положительных, отрицательных и мнимых – в частности. Выведено соотношение между коэффициентами и корнями уравнения – "теорема Виета". Решается вопрос об отделении корней. Сообщается несколько приемов нахождения границ действительных корней. Теория приводимости дана в способах нахождения линейных, квадратичных и кубических делителей данного уравнения. Излагаются методы приближенного вычисления корней. Уравнения с буквенными коэффициентами решаются при помощи бесконечных рядов по правилу параллелограмма Ньютона. Выведены степенные суммы корней. Вторая часть содержит 12 глав и 124 параграфа.

Третья часть – "О применении алгебры к геометрии" представляет собой раздел аналитической геометрии и содержит 3 главы и 50 параграфов. Маклорен находит здесь уравнения прямой, конических сечений и некоторых высших кривых и приводит примеры графического решения уравнений.

Учение о числе

В первой части книги алгебра определяется как "общий метод вычисления при помощи определенных знаков и символов, которые были изобретены для этой цели в найдены удобными" [70. С. 1]. Алгебра, продолжает Маклорен, может быть названа универсальной арифметикой, но она превосходит обычную арифметику в "обширности" ("extent") и "всеобщности" ("generality").

Понимание алгебры как особого символического исчисления, созданного по образцу арифметики, было и у Ньютона, хотя специального определения алгебры у него нет. Такое представление об алгебре ближе к современному, чем весьма распространенное в XVIII в. ее толкование как науки об уравнениях. (У Эйлера: "Алгебра есть умение неизвестное количество находить из известных".)

Основные объекты алгебры – величина и число. Величину Маклорен трактует по Аристотелю – как нечто, состоящее из частей и способное к возрастанию и убыванию. Такое определение величины можно встретить почти в любом руководстве по алгебре XVIII и даже XIX в. К нему иногда прибавляются аксиомы величины из евклидовых "Начал". Правда, в рамки аристотелева определения укладываются только скалярные величины, а не мнимые количества, с которыми тоже оперировал Маклорен. Тем не менее их он тоже называл величинами, хотя и "воображаемыми", "невозможными".

Величина, входящая в алгебраическое выражение, может быть положительной или отрицательной, сообразно ее знаку, но эти величины "обе *одинаково реальны*, хотя и противоположны одна другой*. Их можно уподобить избытку и недостатку, наличности и долгу, тяжести и легкости, восходу светила над горизонтом и его закату, наконец, движению в противоположных направлениях. Такая трактовка была традиционной, однако Маклорен один из первых подчеркнул одинаковую реальность положительных и отрицательных чисел.

Заметим, что отрицательные числа в форме "долга" в противовес "имуществу" встречаются еще у индийцев. В Европе их в таком понимании впервые ввел Леонардо Пизанский (1180–1240); позднее М. Штифель (1487–1567) назвал их фиктивными и считал числами, меньшими нуля. Дж. Кардано называл отрицательные корни "фальшивыми". А. Жирар сделал шаг вперед, объясняя положительные и отрицательные числа с помощью движения по прямой в противоположных направлениях. Вторя ему, Т. Гарриот писал, что "+3" означает три фута вперед, "–3" – три фута назад и т. д. [28].

В вопросе о реальности отрицательных чисел у математиков XVIII в. были сомнения. Так, Т. Томпсон (1710–1761), соотечественник и современник Маклорена, писал в своем "Трактате по алгебре", что в математике нет места отрицательной величине, ибо она меньше нуля,

---

* Сравним этот тезис Маклорена с точкой зрения, высказанной французским математиком Л. Карно (1753–1823): "Ни одно количество не может стать ни отрицательным, ни мнимым, не перестав быть истинным количеством" [22].

а "вычесть нечто из ничего – невозможно" [28. С. 102]. Обращение к наличию и долгу и другим подобным толкованиям Симпсон считал неубедительным, потому что они находятся вне пределов математики, объектом которой служит отвлеченная величина. Реальны только положительные числа, отрицательные и мнимые величины представляют собой удобные фикции, которые указывают на невозможность решения задачи в ее первоначальной постановке.

Л. Карно в конце XVIII в. писал: "Кажется, гораздо труднее вразумительно объяснить, что такое изолированное отрицательное количество, чем понять, что такое бесконечно малое количество, потому что последнее... есть количество действительное, в то время как первое является фиктивным понятием, ибо его можно получить лишь путем невыполнимого действия"* [22. С. 230]. (Карно имеет в виду вычитание из нуля.) Подобно Симпсону, Карно полагал, что причина появления отрицательного количества – в неправильной постановке задачи.

Как выразился тот же Карно, правило знаков "служит основой всей алгебры". Маклорен придавал ему первостепенное значение. Равенство $a - b = a + (-b)$, т. е. понимание вычитания как прибавление противоположной величины, Маклорен считал очевидным, оно хорошо иллюстрируется на прямой при сложении противоположно направленных отрезков. Правило знаков для умножения было камнем преткновения для математиков этого периода. Маклорен пояснял его на основе распределительного закона, который молчаливо допускал. Рассмотрен частный случай, когда a – целое, n - натуральное. Так как $a - a = 0$, то произведение $(a - a) \times n = 0$. В соответствии с распределительным законом получим: $n \times (a - a) = n \times (a + (-a)) = n \times a + n \times (-a)$. Но эта сумма равна нулю, поэтому второе слагаемое, говорит Маклорен, должно "уничтожить" первое, т. е. быть равным $-n \times a$. Итак, $n \times (-a) = -n \times a$. Аналогично Маклорен показывает, умножая $(-n)$ на $(a - a)$, что $(-a) \times (-n) = n \times a$.

У Эйлера, Кестнера, Вольфа, Симпсона, Безу правило знаков $(-) \times (+) = (-)$ следовало из соображения, что долг, взятый многократно, есть снова долг, а правило $(-) \times (-) = (+)$ вытекало из предыдущего. Кстати, Василий Висковатов, переводчик "Оснований алгебры" Эйлера [106. С. 17] на русский язык, дополнил эйлерово разъяснение правила знаков упомянутым доказательством Маклорена, взятым из французского издания "Алгебры" 1753 г. У Ньютона правило знаков дано без объяснения.

К XIX в. сложилось справедливое мнение, что правило знаков в принципе недоказуемо, что его следует принять как одну из аксиом множества действительных чисел. Ф. Клейн писал о правиле знаков: "Речь может идти только о признании его логической допустимости; в остальном же оно является произвольным и регулируется лишь соображениями целесообразности" [21. С. 43].

---

* По этому поводу Ф. Клейн (1849–1925) писал, что трудности математиков XVII–XVIII вв. состояли в попытках "интерпретировать отрицательное число как количество предметов" [21. С. 43].

В главе XIV второй части "Алгебры", озаглавленной "Об иррациональностях" ("Of surdus"), дается определение двух соизмеримых (commensurables) величин, как имеющих общую меру, полученную с помощью алгоритма Евклида. В противном случае они называются несоизмеримыми. Величину, не имеющую общей меры с рациональной величиной, Маклорен называет иррациональной. Помимо термина "irrationales", он употребляет для обозначения этого же понятия слово "surdus" – "глухой, невыразимый"*. Иррациональными числами являются, например, квадратные корни из всех натуральных чисел, не являющихся квадратами, кубические корни из всех чисел, не являющихся кубами, и т. д. Что же касается соизмеримых величин, то Маклорен говорит о соизмеримости в первой, второй и т. д. степенях в духе "Начал" Евклида. Например, 47 и 28 соизмеримы в квадрате, так как отношение их квадратов постоянно. Маклорен показывает затем, что радикалы, неизвлекаемые конечным образом, представляют собой величины, несоизмеримые с рациональными.

Возведение в целую степень он называет инволюцией и определяет через умножение числа на себя, противоположная операция – извлечение корня – называется эволюцией. Действия над радикалами он выполняет как над степенями с рациональными показателями.

Значительное место Маклорен уделяет проблеме избавления от иррациональности. Доказав ряд теорем, он, наконец, приходит к итоговому равенству, позволяющему избавляться от иррациональностей в сложных случаях. Оно имеет вид:

$$(a^{m} \pm b^{l}) \times (a^{n-m} \mp a^{n-2m} \times b^{l} + a^{n-3m} \times b^{2l} \mp \ldots) = a^{n} \pm b^{nl/m}.$$

Здесь n – минимальное натуральное число, обращающее дробь nl/m в целое число, причем m, l – положительные рациональные числа. Второе слагаемое в правой части положительно, если дробь n/m – нечетное число и в левой части первый сомножитель имеет вид $a^m + b^l$. Число слагаемых во втором сомножителе левой части таково, чтобы в последнем слагаемом показатель степени числа a, имеющий вид $n - k \times m$, оставался неотрицательным числом.

Пусть дана, например, разность $\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}$. Найдем выражение, на которое следует умножить эту разность, чтобы избавиться от корней. Так как m = 1/2, 1 = 1/3, то в соответствии с упомянутой формулой наименьшее целое число n, обращающее дробь $n/m \cdot l$ в целое число, равно 3. Следовательно, данную разность радикалов надо умножить на сумму:

$$a^{3-1/2} + a^{3-1} \times b^{1/3} + a^{3-2/3} \times b^{2/3} + a^{3-2} \times b + a^{3-5/2} \times b^{4/3} +$$
$$+ a^{0} \times b^{5/3} = a^{5/2} + a^{2} \times b^{1/3} + a^{3/2} \times b^{2/3} + ab + a^{1/2} \times b^{4/3} + b^{5/3}.$$

Тогда

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right) \times \left(a^{2}\sqrt{a} + a^{2} \times \sqrt[3]{b} + a\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^{2}} + ab + \sqrt{a} \times b\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{b^{2}}\right) =$$
$$= a^{3} - b^{2}.$$

---

* Термином "surdus" Маклорен обозначает и степень с рациональным показателем.

Вслед за Ньютоном Маклорен занимался выражениями, содержащими сложные иррациональности. В "Всеобщей арифметике" дана без пояснения формула

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}},$$

вошедшая во многие руководства по алгебре и ведущая свое начало от Евклида, который рассмотрел случай соизмеримых в квадрате A и B (т. е., например, A – целое, B – квадратный корень из целого числа). Маклорен доказал ее, полагая A – рациональным, B – иррациональным числом и приравняв $\sqrt{A + B} = x \pm y$, где x и y – тоже квадратные корни. Возводя обе части в квадрат и приравнивая отдельно их рациональные и иррациональные части, Маклорен и получает искомую формулу. Этот прием Маклорен применил и для извлечения квадратного корня из комплексного числа. Например, $\sqrt{-1 + \sqrt{8}} = \pm(1 + \sqrt{-2})$, если положить $A = -1$, $B = -8$. Ньютоново правило извлечения радикала $-\sqrt{A \pm B}$, где A и B соизмеримы в квадрате. Маклорен тоже сначала истолковывает, а затем использует для извлечения кубического корня из комплексного числа. Он утверждает, что "каждый куб или другая степень имеет столько корней, действительных или воображаемых, сколько единиц в показателе степени" [70. С. 128]. В частности, кубические корни единицы таковы: 1, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Для извлечения кубического корня из комплексного числа надо вычислить один корень по найденному раньше правилу, а два других получить умножением этого корня на сомножители $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ [70. С. 129]. Правда, "полное и элегантное" решение проблемы извлечения корней из комплексных чисел он усматривает у А. де Муавра (1667–1759) в статье, опубликованной в качестве приложения к "Алгебре" Н. Сондерсона (1682–1739) в 1740 г. [99].

Достаточно свободно оперируя с иррациональностями, Маклорен, вслед за Ньютоном, шел к признанию их равноправия с рациональными числами, хотя и называл их по традиции "глухими", "невыразимыми".

В процессе извлечения корней могут получиться и комплексные числа. Корень четной степени из отрицательного числа Маклорен называет "невозможной" ("impossible") или "воображаемой" ("imaginary") величиной. Полученная при решении задачи она указывает на невозможный случай, а также на то, как надо видоизменить задачу, чтобы она стала разрешимой. Эта точка зрения была, в частности, высказана Д. Валлисом; ее придерживался и Ньютон. Маклорен, как и другие ученые того времени, не принимал комплексные числа за реальные, хоть и не отрицал их пользу и весьма свободно оперировал с ними, включая, как мы видим, и извлечение корней. В "Трактате о флюксиях" Маклорен писал, что употребление символа $\sqrt{-1}$ "весьма полезно и сокращает вычисления", но очевидность теории флюксий "нельзя ставить в зависимость от искусства такого рода" (т. е. оперирования с мнимостями). "Законность" комплексных чисел (термин Гаусса) стала признаваться лишь после появления их геометрической модели у К. Весселя (1745–1818), Ж. Аргана (1768–1822), самого Гаусса и возникновения функций комплексного переменного в трудах Гаусса и Коши*.

"Правило Крамера"

Маклорен рассмотрел уравнения и их системы, причем уравнением назвал "предложение, утверждающее равенство двух величин". Аналогично определяли это понятие многие авторы XVIII в.: тождество и уравнение начали различать лишь в XIX в. Системы двух и трех линейных уравнений он решал как методом подстановки, так и по "правилу Крамера".

Правилом Крамера называется известный алгоритм решения систем n-линейных уравнений с n неизвестными, согласно которому каждое неизвестное равно дроби, знаменатель которой равен определителю системы, а числитель образуется из определителя системы заменой соответствующего столбца свободными членами системы. Швейцарский математик Габриэль Крамер (1704–1752) опубликовал его в трактате "Введение в анализ алгебраических кривых" (1750). Сначала им был рассмотрен частный случай – система пяти линейных уравнений с пятью неизвестными, полученная при отыскании уравнения кривой второго порядка, проходящей через пять данных точек. А в общем виде правило было сформулировано в приложении к упомянутому сочинению. Однако на пути замечательного результата было несколько важных вех.

Первый шаг сделали китайцы более 2000 лет назад, когда для решения систем применили матрицы. Однако их методы не получили широкого распространения, и почти до конца XVII в. повсеместно системы уравнений решали методом исключения неизвестных (применяли также и метод "ложного положения", имевший тоже весьма древнее происхождение). Идею определителя мы впервые встречаем в ясной форме только у Лейбница. В письме к Лопиталю от 1693 г. он предлагает способ решения системы уравнений, эквивалентный использованию детерминанта. Для удобства вычислений он впервые применил коэффициенты с двойными индексами. Но переписка Лейбница не была опубликована до середины XIX в. (а рукописи напечатаны только недавно), так что его результат не получил в свое время известности и развития.

Ближе других к "правилу Крамера" подошел Маклорен, изложив его в XII главе "Трактата по алгебре", которая "содержит некоторые

---

* Г.В. Лейбниц писал о мнимой единице, что это "выродок мира идей, почти двойственное существо, находящееся между бытием и небытием".

общие теоремы для уничтожения неизвестных величин в данных уравнениях".

Решив методом исключения неизвестной систему двух, а затем трех линейных уравнений, Маклорен обращает внимание на единую форму результатов: он имеет вид отношения двух алгебраических сумм, составленных из коэффициентов и свободных членов уравнений. Чтобы установить закон составления таких сумм, т. е. определителей, Маклорен называет коэффициентами одного порядка (same order) те, которые стоят в разных уравнениях перед одной неизвестной, либо являются свободными членами. По-нашему – это элементы одного столбца определителя. Противоположными (opposite) называются такие коэффициенты, которые берутся из разных уравнений и разных столбцов. В системе

$$a \times x + b \times y + c \times z = m$$

$$d \times x + e \times y + f \times z = n$$

$$g \times x + h \times y + k \times z = p$$

противоположные коэффициенты образуют тройки: a, e, k; a, h, f; d, b, k; ... и т. д. Неизвестное z имеет вид дроби:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec},$$

в которой "числитель содержит все различные произведения, которые могут быть составлены из трех противоположных коэффициентов, взятых из столбцов, в которых z отсутствует, а знаменатель содержит всевозможные произведения, которые могут быть составлены из трех противоположных коэффициентов, взятых из столбцов, включающих три неизвестные величины".

Идея определителя как суммы всевозможных произведений элементов, взятых из разных строк и разных столбцов, представлена здесь весьма отчетливо. Налицо, собственно, "правило Крамера" – неизвестное z равно отношению определителей, причем числитель получается из знаменателя заменой элементов третьего столбца свободными членами. Это подчеркивается и формулой для нахождения z. Для систем из четырех уравнений Маклорен рекомендует поступать аналогично: составить всевозможные произведения из четырех "противоположных" коэффициентов, снабдив их определенными знаками, после чего найти отношение двух таких алгебраических сумм, т. е. определителей. Правда, здесь мы сталкиваемся со слабым местом в рассуждениях Маклорена – с вопросом о знаке члена определителя. Разъяснения на этот счет весьма туманны, однако идея их, кажется, такова: знак зависит от "порядка" или "беспорядка" в записи члена определителя. Примеров на это правило Маклорен не привел.

Историки математики по-разному оценивали вклад Маклорена в открытие определителей. М. Кантор считал, что Маклорен напал на след закона образования детерминанта, и если бы он употребил более целесообразные обозначения Лейбница, то к своим "многочисленным заслугам прибавил бы нахождение решений с помощью детерминантов".

Современный историк математики К. Бойер оценивает этот результат выше [109], приводя следующие аргументы. Согласно Т. Мюиру, автору "Теории определителей в ее историческом развитии" [84], Крамеру принадлежат следующие новые открытия: 1) правило для составления членов общего знаменателя дробей, выражающих значения неизвестных системы линейных уравнений; 2) правило для определения знака любого индивидуального члена в названном знаменателе; 3) правило для нахождения числителя такой дроби из выражения для знаменателя.

По мнению Бойера, Маклорену были известны правила 1) и 3) и он вплотную подошел к правилу 2), причем эти правила Маклорен знал, вероятно, еще в 1729 г., когда намеревался печатать "Трактат по алгебре". Несмотря на то, что эта книга издавалась 6 раз в Англии и один раз во Франции, математики учились решать систему уравнений по Крамеру, а не по Маклорену. Это объясняется, во-первых, превосходством обозначений Крамера (употребившего индексы), во-вторых, полной ясностью в вопросе о знаке. Учитывая приоритет Маклорена в публикации и превосходство изложения Крамера, было бы справедливо называть это правило – правилом Маклорена–Крамера – считает Бойер и с этим мнением нельзя не согласиться.

Отметим, что среди известных руководств по алгебре XVIII в. только у Маклорена изложено решение линейных систем с помощью "определителей".

Учение об уравнениях

Вторая часть книги, озаглавленная: "Об образовании и решении уравнений всех степеней и о различных действиях с корнями", является центральной. В ней решаются важнейшие вопросы алгебры: о числе, характере и способе нахождения корней алгебраического уравнения произвольной степени.

Начиная с Гарриота, алгебраические уравнения стали получать перемножением биномов вида $(x - x_i)$*. Отсюда, как справедливо заметил Валлис, нетрудно прийти к мысли, что степень уравнения совпадает с числом его возможных корней [102], т.е. к основной теореме алгебры. Первую ее формулировку дал Жирар в еще 1629 г.: "Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей степени". Декарт в "Геометрии" (1637), подразумевая только действительные корни, утверждал, что "всякое уравнение может иметь столько же различных корней или же значений неизвестной, сколько последняя имеет измерений". Наконец, Ньютон в

* По всей вероятности, так поступал и Виет, однако письменных свидетельств этому нет [107. С. 313].

"Арифметике" сформулировал теорему так: "Уравнение может иметь столько же корней, сколько оно имеет измерений, но не более". При этом Ньютон имел в виду не только действительные, но и мнимые ("невозможные") корни. В его черновиках, относящихся к 1665–1666 гг., это изложено еще более определенно.

Маклорен начинает изложение вопроса, относящегося к основной теореме алгебры, традиционно с перемножения "простых", т.е. линейных уравнений вида $x - a = 0$, $x - b = 0$ и т.д., в результате чего получается уравнение n-й степени. Отсюда следует, что любое уравнение можно получить перемножением такого числа уравнений первой степени, какова его степень; или любых других уравнений, если сумма их степеней равна степени данного уравнения. Так, кубическое уравнение можно получить умножением трех линейных уравнений или одного линейного и одного квадратного. Из указанного способа порождения уравнений вытекает метод их решения: надо левую часть исходного уравнения разложить на линейные множители вида $(x - a)$, $(x - b)$ и т.д. Стало быть: "Любое уравнение может иметь столько решений, сколько имеется простых уравнений, умножаемых одно на другое, чтобы получить данное; или сколько содержится единиц в наивысшем показателе неизвестной величины в предложенном уравнении [70. С. 134]. Здесь пока речь идет о действительных корнях. Далее Маклорен вводит мнимые ("невозможные" – "impossible") корни, которые в уравнении бывают сопряженными парами. Тогда решение уравнения представляет собой разложение его левой части не только на линейные, но и на (неприводимые) квадратные сомножители, каковым и соответствуют "невозможные" корни.

Таким образом, понимание Маклореном основной теоремы алгебры таково: всякое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами можно разложить на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами, так чтобы сумма их степеней была равна n.

У Маклорена нет доказательств этой теоремы, кроме приведенных пояснений. Строгое доказательство теоремы дал Гаусс в 1799 г., однако потом возвращался к нему несколько раз. До Гаусса теорему доказывал Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж.Л. Лагранж, П.С. Лаплас. Степень строгости их доказательств и, в целом, вклад в решение вопроса дискутируется в науке (см., например, [32], [8]). Кстати, диссертация Гаусса 1799 г. содержала в своем заголовке формулировку основной теоремы алгебры, так сказать, "в духе" Маклорена*: "Новое доказательство теоремы о том, что всякая целая алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на множители первой и второй степени".

Отдельный раздел "Алгебры" посвящен теореме Виета и отысканию сумм целых степеней корней, т.е. теории симметрических функций. Перемножая линейные сомножители, Маклорен находит выражения

---

* Эйлер предложил аналогичную формулировку в 1742 г.

коэффициентов уравнения (с действительными корнями) как симметрические функции корней. Так, из равенства

$$(x-a)\times(x-b)\times(x-c)=x^3-\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}a\times b\\a\times c\\b\times c\end{matrix}\right\}x-a\times b\times c^* \qquad (1)$$

Маклорен, вслед за Виетом, методом неполной индукции выводит заключение: коэффициент второго члена уравнения произвольной степени равен сумме корней, взятой с противоположным знаком, коэффициент третьего члена равен сумме парных произведений корней и т.д.

Степенные суммы корней Маклорен рассмотрел в XI и в заключительной XII главе центральной части книги. Эта последняя глава содержит материал из одного частного** письма Маклорена от 8 июля 1743 г., присланного адресатом издателям книги.

Ньютон в "Всеобщей арифметике" сообщил формулу для нахождения сумм степеней корней алгебраического уравнения (в современных обозначениях)

$$a_0x^n+a_1\times x^{n-1}+a_2\times x^{n-2}+\ldots+a_n=0 \quad (\text{при } a_0=1)$$

в виде рекуррентного соотношения

$$S_n+a_1\times S_{n-1}+a_2\times S_{n-2}+\ldots+n\times a_n=0,$$

где S_n – сумма n-х степеней действительных корней. В черновиках Ньютона имеются и прямые выражения для первых восьми степенных сумм корней уравнения восьмой степени. Способ их получения не указан [87].

Степенные суммы корней Маклорен находит сначала для кубического уравнения $x^3-px^2+qx-r=0$, где p, q, r – положительные числа. Если a, b, c – положительные корни уравнения, то из равенств

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\times a\times b+2\times a\times c+2\times b\times c,$$

$$a+b+c=p, \quad a\times b+a\times c+b\times c=q$$

следует: $a^2+b^2+c^2=p^2-2\times q$.

Величину $p^2-2\times q$ он обозначает буквой B. Сумму кубов C корней уравнения он находит из тождества:

$$(a^2+b^2+c^2-a\times b-a\times c-b\times c)\times(a+b+c)=$$

$$=a^3+b^3+c^3-3\times a\times b\times c;$$

тогда $C=a^3+b^3+c^3=(B-q)\times p+3\times r=B\times p-q\times p+3\times r.$

---

* Такая форма записи в подлиннике: ее придерживался и Ньютон.

** К графу Стенхоупу (Stanhope).

Эти правила Маклорен распространяет методом неполной индукции на произвольное уравнение вида:

$$x^n - p\times x^{n-1} + q\times x^{n-2} - r\times x^{n-3} + S\times x^{n-4} -$$
$$-t\times x^{n-5} + u\times x^{n-6} - \ldots = 0$$

и получает для сумм четвертых (D) и пятых (E) степеней корней выражения:

$$D = p\times C - q\times B + p\times r - 4\times s;\quad E = p\times D - q\times C + r\times B - p\times S + 5\times t$$

и т.д.

Общим образом теорема доказана, для уравнения n-й степени с n положительными корнями в упомянутой XII главе.

Первые четыре степенные суммы получил Жирар. Ньютон нашел упомянутую рекуррентную формулу, не указав способа ее получения. Маклорен получил ее для частных случаев, позднее ее выводили Эйлер, Лагранж, Э. Варинг.

Гарриот и Декарт нашли "правило знаков": число положительных корней уравнения равно числу перемен знаков в ряду коэффициентов уравнения, причем подразумевалось уравнение, имеющее только действительные корни. Чтобы обобщить правило, Ньютон, а за ним и Маклорен, относят комплексные корни к положительным. Так как они бывают в уравнении парами, то положительных корней (в обычном смысле) будет столько, сколько перемен знаков у коэффициентов, или на четное число меньше. Справедливость правила, считает Маклорен, вытекает из того, что в случае только положительных корней знаки коэффициентов уравнения чередуются – как это следует из умножения $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\ldots$ В случае только отрицательных корней перемен знаков вовсе нет. Эти соображения, а также включение комплексных корней в число положительных, приводят к искомому выводу. Исчерпывающее доказательство "правила знаков" было осуществлено Гауссом.

XI глава второй части книги посвящена правилам "для нахождения невозможных корней в уравнении". Импульс исследованию снова был дан Ньютоном, который составил для уравнения (в современных обозначениях):

$$a_0x^n + a_1\times x^{n-1} + a_2\times x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

совокупность чисел:

$$a_0^2,\quad \frac{1}{n}\frac{n-1}{2}a_1^2 - a_0a_2,\quad \frac{2}{n-1}\frac{n-2}{3}a_2^2 - a_1a_3,\ldots,$$
$$\frac{n-1}{2}\frac{1}{n}a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n, a_n^2. \tag{2}$$

Число "невозможных" (т.е. комплексных корней), по Ньютону, не меньше числа перемен знаков в этой последовательности чисел. Способ нахождения элементов последовательности (2) весьма сложен, а между тем Ньютон приводит это удивительное правило без малейшего намека на его происхождение.

Маклорен изложил свои исследования по этому вопросу в двух статьях, опубликованных в 1726 и 1729 гг. в "Philosophical Fransactions" [77], [78] в форме писем к Мартину Фолксу, президенту Королевского общества. Маклорен соперничал в этом вопросе с английским математиком Джорджем Кембеллом, который в 1728 г. тоже опубликовал статью на эту тему [47]. Результаты обоих математиков имели много общего, так что даже возник спор о приоритете. Более ранней была первая статья Маклорена 1726 г., в которой рассмотрено уравнение только с действительными корнями. Между коэффициентами такого уравнения сначала второй, затем третьей и, наконец, произвольной степени устанавливаются соотношения, нарушение которых, как считает Маклорен, указывает на появление комплексных корней. Однако при этом появляются лишь отдельные числа совокупности (2).

В статье Кемпбелла наряду с уравнением $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ рассматриваются уравнения $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, и т.д. Кемпбелл полагает, что в уравнении $f(x) = 0$ по меньшей мере столько комплексных корней, сколько в уравнении $f'(x) = 0$. Сравнивая коэффициенты уравнений $f'(x) = 0, f''(x) = 0,\ldots$ он получает между ними соотношения, которые дают всю совокупность (2). Кемпбелл заметил недостаточность правила Ньютона и прибавил свое, дающее большее число мнимых корней, чем у Ньютона*.

В более подробной второй статье Маклорен выясняет вопрос о соотношении между действительными корнями уравнений $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$ и показывает (раньше это было в краткой форме сообщено Роллем (1652–1715) в 1692 г.), что корни первого уравнения являются пределами корней второго, и наоборот. Затем следует теорема, что алгебраическое уравнение (1) имеет мнимых корней не меньше, чем уравнение

$$n \times a_0 x^{n-1} + (n-1) \times a_1 \times x^{n-2} + \ldots = 0$$

или уравнение

$$a_1 \times x^{n-1} + 2 \times a_2 \times x^{n-2} + 3 \times a_3 \times x^{n-3} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Понижая степень уравнения (1) дифференцированием, Маклорен получает квадратное уравнение

$$n \times (n-1) \times a_0 x^2 + 2 \times (n-1) \times a_1 \times x + 2 \times a_2 = 0,$$

которое имеет мнимые корни при условии, что

$$4 \times (n-1)^2 \times a_1^2 < 8 \times n \times (n-1) \times a_0 \times a_2$$

или

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{2} a_1^2 - a_0 a_2 < 0.$$

---

* Впрочем, сам Ньютон отмечал, что корней может быть и больше, чем число перемен знаков в последовательности (2).

Если дифференцировать уравнение (3), то соответствующее квадратное уравнение имеет мнимые корни при условии, что

$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{3} a_2^2 - a_1 a_3 < 0 \text{ и т.д.}$$

Таково происхождение элементов последовательности (2).

У Ньютона упомянутое правило отыскания числа мнимых корней имеется уже в рукописях 1665–1666 гг. Оно дано без доказательства. Издатель рукописей Уайтсайд полагает, что Ньютон получил его на основе примерно тех же соображений, которые позднее высказали Маклорен и Кемпбелл. Так как $f'(x)$ обращается в нуль только в одной точке между двумя смежными действительными корнями уравнения $f(x) = 0$, то по крайней мере один действительный корень уравнения $f(x) = 0$ может лежать между двумя соседними действительными корнями уравнения $f'(x) = 0$. Геометрически это означает, что непрерывная кривая $y = f(x)$ встречает ось $y = 0$ не более чем в одной действительной точке между двумя соседними максимумом и минимумом функции $y = f(x)$. Отсюда следует, что если уравнение $f(x) =$ $= 0$ имеет только действительные корни, то таковыми должны быть и корни уравнения $f'(x) = 0$. Если же $f'(x) = 0$ имеет мнимые корни, то уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере столько же мнимых корней. Продолжая процесс дифференцирования дальше, можно на каждом этапе получать соотношения между коэффициентами, которые дадут элементы последовательности (2) [87].

Правило Ньютона строго доказал Дж. Сильвестр в 1865 г., отметив его недостаточность. Полное решение вопроса о числе действительных, а, стало быть, и мнимых корней, было дано в 1829–1835 гг. Ж.Ш. Штурмом.

В "Алгебре" и упомянутой выше статье 1729 г. Маклорен изложил приемы отделения корней уравнения и вычисления границ корней.

Исторически общая проблема решения алгебраического уравнения (с действительными коэффициентами) включала в себя три специальных задачи: во-первых, нахождение границ действительных корней, т.е. таких чисел, между которыми лежат все действительные корни, в частности – нахождение границ положительных корней и границ отрицательных корней; во-вторых, отделение корней, т.е. нахождение таких интервалов, в каждом из которых лежит только по одному действительному корню; и, наконец, вычисление корней, т.е. приемы, позволяющие вычислить действительные корни с любой точностью.

В "Алгебре" рассмотрено несколько приемов нахождения верхних границ положительных корней. Правило Ньютона, данное в "Всеобщей арифметике" без доказательства, – брать за верхнюю границу положительных корней алгебраического уравнения число, при котором левая часть уравнения и все ее производные положительны – Маклорен доказывает следующим образом.

Пусть данное уравнение

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots = 0 \qquad (1)$$

(с положительными действительными корнями: A равно сумме корней, B – сумме всевозможных парных произведений корней и т.д.; A, B, C,… – числа положительные). И пусть, далее, число e таково, что имеют место неравенства:

$$e_n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} + \ldots > 0,$$

$$ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - \ldots > 0,$$

$$n \times (n-1)e^{n-2} - (n-1)(n-2)Ae^{n-3} + (n-2)(n-3)Be^{n-4} - \ldots > 0$$

и т.д.

Подставим в уравнение (1) $x = y + e$. Обозначим $c = e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - \ldots$ Тогда в результате подстановки получается уравнение

$$c + \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y + \frac{\ddot{c}}{2!\dot{e}^2} y^2 + \frac{\dddot{c}}{3!\dot{e}^3} y^3 + \ldots = 0. \qquad (2)$$

Имеют место неравенства: $c > 0$ (по условию):

$$\dot{c} / \dot{e} = ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - \ldots > 0,$$

$$\ddot{c} / 2!\dot{e}^2 = 1/2!(n(n-1)e^{n-2} -$$

$$-(n-1)(n-2)Ae^{n-3} + (n-2)(n-3)Be^{n-4} - \ldots) > 0$$

и т.д.*

Так как все коэффициенты уравнения (2) положительны, то все значения y должны быть отрицательными, и, стало быть, в ряду коэффициентов нет ни одной перемены знаков. Так как $y = x - e$, то $x < e$, и, заключает Маклорен, число e превосходит все положительные корни x исходного уравнения (1).

Рассуждения Маклорена сводятся к тому, что если в алгебраическом уравнении

$$x^n + a_1 \times x^{n-1} + a_2 \times x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (3)$$

произвести подстановку $x = y + e$, то оно принимает вид:

$$\frac{f^{(n)}(e)}{n!} y^n + \frac{f^{(n-1)}(e)}{(n-1)!} y^{n-1} + \ldots + \frac{f''(e)}{2!} y^2 + f'(e)y + f(e) = 0. \qquad (4)$$

Маклорен рассмотрел еще одно правило, идущее от М. Ролля: за верхнюю границу положительных корней нужно принять наибольший по модулю отрицательный коэффициент, увеличенный на единицу. Правило поясняется на примере кубического уравнения вида

$$x^3 - px^2 - qx - r = 0$$

---

* Выкладки следуют из способа нахождения флюксии степенной функции: $\dot{x}^n = nx^{n-1} \cdot \dot{x}$ или $\dot{e}^n = ne^{n-1} \cdot \dot{e}$.

(p, q, r – положительны), в котором сначала p, а затем q и, наконец, r предполагаются наибольшим числом, после чего устанавливается, что каждое из них, сложенное с единицей, превосходит наибольший положительный корень уравнения. Маклорен добавляет при этом, что очень редко эта граница бывает ближайшей.

Еще одно правило Ньютона – принимать за верхнюю границу корней уравнения число $\sqrt[2n]{S_{2n}}$, где $S_{2n} = \Sigma x^{2n}$ – сумма четных степеней корней, Маклорен иллюстрирует на примере уравнения n-й степени $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \ldots = 0$, в котором сумма квадратов его корней, как установлено раньше, равна $p^2 - 2q$, и искомая граница, стало быть, равна $\sqrt{p^2 - 2q}$.

Обратимся к проблеме отделения корней. Как было сказано выше, Маклорен установил в упомянутой статье 1729 г., что корни уравнения $f'(x) = 0$ являются границами корней уравнения $f(x) = 0$. Имея в виду только уравнения с положительными корнями, он доказал это утверждение для кубического уравнения, а затем распространил, по неполной индукции, на уравнение произвольной степени.

К третьей задаче теории уравнений – вычислению корней – Маклорен обратился в последних главах центральной части "Алгебры", где рассмотрел приближенное решение уравнений с числовыми и буквенными коэффициентами.

Заметим, что Ньютон не затронул этот вопрос в "Всеобщей арифметике", а изложил приближенное численное решение уравнений в "Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов" (написан около 1665 г., опубликован в 1711 г.), а также в приложении к "Алгебре" Валлиса 1685 г. Суть метода Ньютона в том, что в алгебраическое уравнение он вместо корня x подставляет $x = \alpha + p$, где α – целая часть, p – неизвестная дробная часть корня. Пренебрегая в полученном уравнении, ввиду их малости, степенями p выше второй, он находит первое приближенное для p. Повторное применение линейной подстановки с учетом найденного первого приближения дает второе приближение и т.д. Некоторые модификации этого метода разработали современники Ньютона Дж. Рефсон (1647–1715) и Э. Галлей (1656–1724).

Маклорен усовершенствовал метод, продемонстрировав его на следующем примере.

Сначала устанавливается, что корень кубического уравнения $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$ принадлежит промежутку [1, 2]. Применив подстановку $x = 1 + f$, Маклорен получает уравнение

$$-1 + 36f - 12f^2 + f^3 = 0.$$

Отбросив два последних слагаемых, он получает $36f - 1 = 0$, откуда находит первое приближение (с точностью до тысячных) $f = 1/36 \approx 0{,}027$. Если из уравнения

$$-1 + 36f - 12f^2 + f^3 = 0 \qquad (1)$$

найти $f = 1/36 - 12f + f^2$ и подставить в правую часть последнего выражения значение $f = 1/36$, получим более точное значение $f = 0{,}02803$. Полагая далее, что $f = 0{,}02803 + q$, подставив это значение в уравнение (1) и отбросив вторую и третью степени q, Маклорен получает значения $q = 0{,}00000923127$, а $x = 0{,}02803923127$ и т.д.

Усовершенствование, о котором шла речь выше, заключается в подстановке $f = 1/36$ в дробь $1/36 - 12f + f^2$. Таким образом, значение неизвестного уточняется уже на первом этапе итерационного процесса. Отметим, что в одном из изданий "Всеобщей арифметики" этот метод, изложенный в комментариях, назван именем Маклорена [46. С. 505]. Его Маклорен применяет и для извлечения корня произвольной степени.

Для решения уравнения вида $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – многочлен от x и y, Маклорен использует параллелограмм Ньютона и получает решение в виде бесконечного ряда.

Значительное место в книге отведено проблеме приводимости над полем рациональных чисел, изложенной в VII главе второй части: "О решении уравнений путем нахождения уравнений более низкой степени, которые являются их делителями", где речь идет о разложении многочленов от одной переменной с целыми или рациональными коэффициентами на множители того же вида.

По мнению Маклорена, найти корни уравнения – это то же самое, что найти "простые" (т.е. линейные) делители полинома, стоящего в левой части уравнения. В случае отсутствия таковых, надо найти делители второй и более высоких степеней и тем самым понизить степень уравнения.

Метод нахождения линейных делителей Маклорен демонстрирует на примере кубического уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. В результате подстановки $y = x - 1$ получается уравнение со свободным членом $(1 - p + q - r)$, равным левой части данного уравнения при $x = 1$, а в результате подстановки $y = x + 1$ – уравнение со свободным членом $(-1 - p - q - r)$. Рациональные корни исходного уравнения являются делителями свободного члена – r, а корни двух полученных уравнений являются делителями свободных членов $(1 - p + q - r)$ и $(-1 - p - q - r)$. Корни $x - 1, x, x + 1$ образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Отсюда, считает Маклорен, вытекает правило нахождения линейных делителей вида $(mx \pm n)$, высказанное Ньютоном (без доказательства) для уравнения любой степени: подставим в левую часть уравнения значения x равные $-1, 0, 1$, найдем делители полученных чисел и составим из них две арифметические прогрессии с разностями соответственно равными 1 или делителю коэффициента высшего члена уравнения; полагая n равным члену прогрессии, соответствующему $x = 0$, а m – равному разности прогрессии, получим искомый линейный делитель $(mx \pm n)$. Знак "+" берется, если прогрессия убывающая, знак "–", если возрастающая.

Для примера Маклореном рассмотрено уравнение

$8x^3 - 26x^2 + 11x + 10 = 0.$

В левую часть уравнения надо подставить значения $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ и найти делители полученных чисел 3, 10, –35. Из них составляют две арифметические прогрессии: 3, 2, 1 и 3, 5, 7. Действия показаны в таблице:

	Результаты	Делители	Прогрессии
$x = 1$	$8x - 26x + 11x + 10 = 0 \begin{cases} +3 \\ +10 \\ -35 \end{cases}$	1, 3	3 3
$x = 0$		1, 2, 5, 10	2 5
$x = -1$		1, 5, 7, 35	1 7

Убывающей прогрессии 3, 2, 1 с разностью 1 соответствует делитель $(x + 2)$, возрастающей прогрессии 3, 5, 7 с разностью 2 – делитель $(2x - 5)$. Полученные результаты, однако, требуют проверки. Проверка показывает, что $(x + 2)$ не является делителем левой части уравнения, тогда как $(2x - 5)$ делит ее нацело.

При отыскании делителей второй, третьей и т.д. степеней процедура усложняется. В случае квадратичных делителей следует находить ряды чисел, первые разности которых образуют арифметическую прогрессию; для кубических делителей – такие ряды чисел, что в арифметической прогрессии располагаются их вторые разности. Основу таких действий Маклорен видит в том, что если возвести в квадрат члены арифметической прогрессии a, $a + e$, $a + 2e$, ... (1), то их первые разности тоже составят арифметическую прогрессию с разностью $2e^2$: $2ae + e^2$, $2ae + 3e^2$, $2ae + 5e^2$,...

Арифметические прогрессии составят вторые разности кубов и третьи разности четвертых степеней членов исходной последовательности (1).

Полное доказательство упомянутого правила Ньютона о нахождении для данного полинома делителей первой, второй и т.д. степеней с рациональными коэффициентами опубликовал Николай I Бернулли (1687–1759) в 1745 г.

Проблему приводимости Маклорен рассмотрел, вслед за Ньютоном, не только над рациональным полем, но и над его некоторым расширением. Вопрос изложен в приложении к VII главе, озаглавленной "О приведении уравнений при помощи иррациональных делителей". Ньютон в разделе "Всеобщей арифметики", имеющем такой же заголовок, рассмотрел приемы разложения многочлена степени $2m$ с целыми или рациональными коэффициентами (и коэффициентом, равном единице, при старшем члене) на два многочлена степени m, коэффициентами которых являются числа вида $a + b\sqrt{n}$ (n – положительное целое число, a, b – рациональные), т.е. возможность разложения вида $f_{2m}(x) = \varphi_m(x) \times \psi_m(x)$, где

$$f_{2m}(x) = x^{2m} + p_1 x^{2m-1} + \ldots + p_{2m-1}x + p_{2m}{}^{*}.$$

---

* $f_{2m}(x)$ не приводим над полем рациональных чисел.

Таким образом, Ньютон расширил область приводимости, добавив к рациональным числам простейшие квадратичные иррациональности вида $\sqrt{n}$. Эту проблему Ньютон решал отдельно для уравнений с четвертой по двенадцатую степень. Для каждого вида уравнения он предлагает эффективный алгоритм, позволяющий установить, приводимо ли уравнение указанным образом, и, если приводимо, найти делители его левой части [29. С. 271–295]*.

Ньютон в манере, свойственной "Всеобщей арифметике", не привел обоснование предложенного алгоритма, но показал его действие на большом числе примеров. Маклорен пояснил этот алгоритм, в частности, для уравнения четвертой степени.

Правило Ньютона для нахождения квадратичных делителей уравнения $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ начинается с составления функции коэффициентов уравнения:

$$\alpha = q - 1/4p^2; \quad \beta = r - 1/2\alpha p; \quad \xi = S - 1/4\alpha^2.$$

Затем следует найти такое число n, чтобы оно было целым делителем чисел β, 2ξ, но не было бы при этом полным квадратом. Если коэффициенты p и r – нечетные числа, то n, кроме того, должно еще иметь вид $4k + 1$. Если p – четное, то через p обозначим какой-либо делитель числа β/n, а если p – нечетное, то так обозначим половину нечетного делителя. Если же $p = 0$, то $k = 0$. Далее вводятся величины $l = 1/2\ (1/2pk - \beta/nk)$, $Q = \alpha + nk^2/2$ и $\delta = \sqrt{Q^2 - S/n}$.

Если при каком-либо выборе чисел n и k значения l и δ совпадают, то многочлен $f_4(x)$ распадается на множители:

$$f_4(x) = [x^2 + 1/2px + Q + \sqrt{n}(kx + l)][x^2 + 1/2px + Q - \sqrt{n}(kx + l)].$$

Затем Ньютон приводит примеры.

Маклорен изложение этого вопроса начинает с замечания, что уравнение четной степени, не имеющее рациональных делителей, может иметь иррациональные. Затем он цитирует приведенное правило Ньютона для уравнения четвертой степени и обосновывает его. К обеим частям уравнения $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ прибавляется такая величина $n(kx + l)$, чтобы получился полный квадрат трехчлена:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + nk^2x^2 + 2nklx + nl^2 = n^2k^2x^2 + 2nklx + nl^2 =$$

$$= (x^2 + 1/2px + Q).$$

Преобразовав, получим уравнение:

$$x^4 + px^3 + (q + nk^2)x^2 + (r + 2nkl)x + S + nl^2 =$$

$$= x^4 + px^3 + (2Q + 1/4p^2)x^2 + pQx + Q^2.$$

---

* Анализ алгоритма Ньютона дан в статье [7].

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получаем три уравнения с четырьмя неизвестными n, k, l, Q:

$$q + nk^2 = 2Q + 1/4p^2,$$

$$r + 2nkl = pQ,$$

$$S + nl^2 = Q^2.$$

Маклорен замечает далее, что такая система может быть решена "методом проб". Исключая из первых двух уравнений величину Q, Маклорен получает значение n:

$$n = \frac{\beta}{k(1/2pl - 2l)^2},$$

где β таково же, как и в равенствах (1).

Отсюда следует, что n – делитель β и k – делитель β/n. Далее можно найти выражение $2\xi/n = \alpha k^2 + 1/2nk^4 - 2l$, откуда следует, что n – делитель величины 2ξ. Проводя рассуждения дальше, Маклорен получает все правило Ньютона.

Эти исследования Ньютона, а затем Маклорена имели весьма принципиальное значение, ибо в них сделаны первые шаги в вопросе приводимости уравнений в различных алгебраических расширениях. Ближайшим последователем их в этом вопросе был Э. Варинг. В дальнейшем из этого направления выросла концепция алгебраического числа, развитая Л. Кронекером (1823–1891), Р. Дедекиндом и Д. Гильбертом.

Аналитическая геометрия в "Трактате по алгебре"

В III части "Трактата" изложены начала аналитической геометрии и способы графического решения уравнений. Изложение здесь лишено той основательности, которой отличаются первые две книги: доказательства почти отсутствуют. В некоторых изданиях "Трактата" эта часть вообще опущена – например, во французском переводе.

Намериваясь "объяснить пользу алгебры в решении геометрических задач", Маклорен вводит декартову систему координат на плоскости (косоугольную и прямоугольную). Кривую, задаваемую уравнением, Маклорен рассматривает как геометрическое место точек (lokus), координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Геометрические характеристики линий – пересечение с осями, симметричность, наличие асимптот, существование кратных точек и т.д. – выясняются в результате исследования уравнения. Для примера Маклорен берет прямую, параболу, циссоиду. Кое-где он прибегает и к предельному переходу – например, при отыскании асимптот; в остальном изложение элементарно.

"Польза геометрических линий и фигур при решении уравнений" раскрывается на квадратичных, кубических и биквадратных уравнениях и состоит в их графическом решении. Маклорен здесь использует теорему, получившую его имя: число точек пересечения двух алгебраических кривых порядков n и m не превосходит произведения mn. Например, уравнение четвертой степени он решает с помощью некоторых круга и параболы, исследуя при этом все возможные случаи корней: 4 действительных корня (4 точки пересечения круга и параболы), 2 действительных корня (2 точки пересечения), все корни мнимые (пересечений нет).

Геометрическое решение уравнений, весьма популярное в Греции и на арабском Востоке, с развитием собственно алгебры утрачивало свое значение. Однако рецидивы этой архаической "теории уравнений" наблюдались довольно долго, постепенно сходя на нет. Если в "Геометрии" Декарта графический подход занимает еще почетное место, то в маклореновской "Алгебре" он представлен в минимальном объеме, а из руководств второй половины XVIII в. исчезает совершенно.

Завершая обзор "Алгебры" Маклорена, отметим, что ее автор занял скромную позицию комментатора своего великого учителя и предшественника Ньютона. Во многих вопросах он действительно следовал за Ньютоном, дополняя, разъясняя, а то и уточняя отдельные положения "Всеобщей арифметики" непосредственно. Но в ряде вопросов он вышел за рамки этой книги, например, в решении систем линейных уравнений, где близко подошел к правилу Крамера. Маклорен не включил в свою книгу, в отличие от Ньютона, арифметических вопросов, так что это вполне "алгебра". В целом, на 366 страницах "Трактата по алгебре" Маклорена представлен весь спектр алгебраических проблем того времени.

Глава 5

Очерк философских и натурфилософских взглядов Маклорена. Обзор "Отчета о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона"

О "Математических началах натуральной философии" Ньютона

"Отчет о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона" [68] был напечатан спустя два года после смерти Маклорена, однако задуман был за двенадцать лет до кончины автора. Внешним поводом к написанию книги послужило следующее обстоятельство. После смерти Ньютона муж его племянницы Кондуитт, бывший также заместителем Ньютона в управлении Монетным двором, обратился в 1728 г. к Маклорену, в котором он, несомненно, видел самого знаменитого последователя своего великого родственника, с просьбой помочь составить жизнеописание Ньютона с анализом его работ. Вскоре Кондуитт умер, однако Маклорен выполнил его просьбу и написал книгу, представляющую собой апологетику ньютонианства. Прежде чем перейти к ее анализу, коротко остановимся на идеях и методах "Начал" Ньютона.

"Математические начала натуральной философии" [30], опубликованные в 1687 г., посвящены прежде всего проблемам механики. Центральное место в книге занимает найденный Ньютоном закон всемирного тяготения и три классических закона механики, частично известные и до него. "Начала" состоят из трех книг и "Введения". Во "Введении" приведены дефиниции количества вещества, количества движения, инерции и силы. В следующем затем "Поучении" даны определения абсолютного и относительного времени, пространства и движения. Далее Ньютон формулирует три основных закона движения и выводит из них некоторые следствия. В первой книге Ньютон рассматривает движение тел под действием центростремительных сил. Основные теоремы книги касаются движения материальных точек, притягивающихся друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Во второй книге Ньютон рассматривает движение тел в среде, оказывающей сопротивление, а также движение и равновесие жидкостей. В частности, исследуется движение маятника в вязкой среде. Ньютон анализирует теорию вихрей Декарта* и на основе изучения движения вращающейся жидкости приходит к выводу о ее ложности.

---

* В основе космологии Декарта была идея возникновения Солнечной системы из вихревого движения космической материи.

В третьей книге предлагается картина Вселенной, которая вытекает из предыдущих теоретических предпосылок, а также астрономических наблюдений. Здесь Ньютон излагает законы движения Солнца и планет (в частности, законы Кеплера) и доказывает, что Земля, как всякая вращающаяся вокруг своей оси планета, должна быть сплющена с полюсов. Приливы он объясняет притяжением небесных тел, а движение Луны – не только тяготением к Земле, но и возмущающим воздействием солнечного притяжения.

Такова вкратце "физика" "Начал". Но в них представлена и "метафизика", т.е. философия ньютонианства, которую можно свести к следующим постулатам. Пустое пространство абсолютно и неподвижно. Оно является вместилищем материи, но не зависит от нее. Материя от природы инертна и побуждается к движению только под действием силы. Это движение также абсолютно и совершается в пустоте. Абсолютное время длится равномерно и существует само по себе, безотносительно к отдельным событиям. Все материальные тела связаны законом всемирного тяготения. Основывающаяся на нем система мира вечна и неизменна, как вечны и неизменны законы природы. Поскольку последняя лишена естественного развития, то для "запуска" вселенской машины необходим первый импульс, первый божественный толчок. В заключении "Начал" воздается хвала всемогуществу Бога, говорится, что "он продолжает быть всегда и присутствует всюду, всегда и везде существуя; он установил пространство и продолжительность" [30. С. 660].

В "Началах" Ньютон реализовал свою концепцию научного метода, основные принципы которого он высказал в "Правилах философствования" (книга III) и в заключительном "Общем поучении", а также в "Оптике".

Первое "правило философствования" гласит: "Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений". Согласно второму правилу, следует одинаковым явлениям приписывать одинаковые причины; по третьему правилу, свойства тел, подвергаемых испытанию, предписывались всем подобным телам вообще; и, наконец, четвертое правило гласит, что в физике верные выводы получаются из опыта путем индукции (выведения). Так нужно поступать, заключает Ньютон, чтобы доводы индукции "не уничтожались предположениями" [30. С. 504]. С этими правилами согласуется знаменитая заключительная фраза "Начал": "гипотез не измышляю".

Итак, в теории познания Ньютон выдвинул на первый план индуктивный метод, опирающийся на опыт и наблюдение. Он предостерегал от произвольных схем и предположений, не подтверждаемых эмпирическим путем. Он отдавал предпочтение механическим моделям явлений природы; его материализм имеет механистический характер, ибо он намеревался "вывести из начал механики и остальные явления природы" [30. С. 3]. Впрочем, не следует абсолютизировать ньютоновское заявление о гипотезах. Он отнюдь не отказывался от научных гипотез, но подчеркивал, что "...гипотезы должны подчиняться природе явлений, а

AN

ACCOUNT

OF

SIR ISAAC NEWTON's

PHILOSOPHICAL DISCOVERIES,

IN FOUR BOOKS.

BY

COLIN MACLAURIN, *A. M.*

Late Fellow of the Royal Society, Professor of Mathematics in the University of EDINBURGH, *and Secretary to the Philosophical Society there.*

Published from the Author's Manuscript Papers,

By *PATRICK MURDOCH*, M. A. and F. R. S.

LONDON

PRINTED FOR THE AUTHOR'S CHILDREN:

And Sold by A. MILLAR, and J. NOURSE, over against *Catharine-street* in the *Strand*; G. HAMILTON and J. BALFOUR, and A. KINCAID at *Edinburgh*; J. BARRY at *Glasgow*, and J. SMITH at *Dublin*. M.DCC.XLVIII.

Титульный лист книги Маклорена
"Отчет о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона"

не пытаться подчинять ее себе". Более того, сам он был автором ряда гипотез, например, гипотезы эфира, выступающего в качестве "проводника" силы тяготения находящихся на расстоянии тел. Что касается математического аппарата "Начал", то центральное место в нем занимает геометрико-механическая модель теории пределов – "метод первых и последних отношений", а также метод органического описания кривых.

Содержание "Отчета о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона"

Книга представляет собой комментарий к основным разделам "Начал". В шотландских университетах гораздо раньше, чем в Англии, а тем более на континенте, стали читать лекции по ньютоновской физике. Начало положил Дэвид Грегори, занимавший кафедру астрономии в Оксфорде; эту традицию продолжил его младший брат Джеймс Грегори в Эдинбурге. А преемник последнего по кафедре, Маклорен, написал руководство по этому предмету, в котором учел и свой опыт его преподавания. Мы упоминали о трех сторонах "Начал": математике, физике и методологии. Маклорен в "Отчете" сосредоточил внимание на основных результатах по физике и развернуто прокомментировал ньютоновский метод.

Сочинение состоит из четырех книг. Первая книга: "О методе исследования в натурфилософии и о различных системах философа" содержит изложение методологии Ньютона и обзор предшествующих натурфилософских систем, начиная с античности. По Маклорену, задача натуральной философии состоит в том, чтобы "описывать явления природы, намечать соотношения и связи между этими явлениями и исследовать все пространство Вселенной". Вместе с тем "...натуральная философия подчинена и высшего рода целям и должна главным образом цениться потому, что она полагает надежное основание естественной религии и нравственной философии, приводя удовлетворительным образом к познанию Творца и Вседержителя Вселенной" [68. С. 3]. Итак, под натуральной философией здесь понимается наука о природе вообще, в частности физика. В современном понимании натурфилософия – умозрительное толкование природы, заменяющее научное естествознание. Особенно сильна была роль натурфилософии в античной науке, где из-за отсутствия экспериментального материала зачастую высказывались произвольные предположения об устройстве мироздания. С появлением научного естествознания роль натурфилософии умалялась, сойдя на нет в Новое время. Однако сам термин "натурфилософия" еще удерживался некоторое время.

Подробное содержание первой книги мы рассмотрим в следующем разделе. В трех следующих книгах Маклорена излагаются основы ньютоновской физики с подробным толкованием ее принципов и большим числом примеров. Вторая книга имеет название "О теории движения или рациональной механике". В ней Маклорен трактует пространство, время, материю и движение в духе Ньютона. Главным отличительным свойством тела является инерция, пропорциональная количеству материи, так что при помощи инерции можно судить о количестве материи в теле. "Пространство беспредельно, неподвижно, однородно и подобно во всех своих частях и лишено всякой сопротивляемости (void of all resistance)". "Мы мыслим истинное или абсолютное время текущим равномерно в неизменном направлении...". "Движение абсолютно, когда тело имеет свое место в абсолютном пространстве". Относительное движение, продолжает Маклорен, есть изменение положения тела по отношению к другим окружающим телам.

Тяготение определяется как сила, пропорциональная количеству материи тела, но не зависящая от его конфигурации или структуры его частей; тяготение всего тела складывается из его тяготения к отдельным частям Земли. Она представляет собой центростремительную силу, ибо направлена приблизительно к центру Земли. Притяжение – также сила, открытая Ньютоном; она возникает в тех случаях, когда тела действуют одно на другое на расстоянии и устремляются друг к другу без какой бы то ни было видимой причины, их побуждающей. Механизм ее действия неясен и вызвал множество споров. Поначалу Ньютон предполагал существование некой тончайшей материи (medium), которая пронизывает всю Вселенную, проникает в поры всех тел и является проводником силы притяжения, однако затем он отказался от этой гипотезы, так как не мог на основе экспериментов и наблюдений дать ей удовлетворительное объяснение. Благодаря притяжению Ньютону удалось, несмотря на неясность механизма этой силы, объяснить основные явления системы мира; измерить количество материи и плотность Солнца и некоторых планет; правильно определить движение узлов орбиты Луны и объяснить ее траекторию действием других тел Солнечной системы – так заключает Маклорен первую главу второй книги.

В следующих главах, полемизируя с оппонентами (неназванными), он формулирует и разъясняет три классических закона механики и демонстрирует их в различных предложениях статики и динамики (параллелограмм сил, центр тяжести двух и более тел). "Механические силы" (название третьей главы) рассмотрены применительно к простым механизмам: блоку, рычагу, наклонной плоскости, винту, клину. Особое внимание уделяется условию равновесия сил, по-разному приложенных и направленных, на основе понятия момента силы (у Маклорена – момента или количества движения). Маклорен решает ряд конкретных задач на применение рассмотренных законов. В одной из задач требуется установить, каким должен быть угол наклона наклонной плоскости, чтобы в кратчайшее время поднять по ней данный вес на данную высоту под действием силы тяжести другого данного тела, связанного с первым веревкой, переброшенной через блок наверху наклонной плоскости. В другой задаче жидкость, двигающаяся с данной скоростью в заданном направлении, давит на плоскость, образующую острый угол с направлением движения жидкости и перемещающуюся параллельно самой себе в направлении, перпендикулярном движению жидкости;

требуется установить угол наклона данной плоскости, при котором она получит наибольший импульс от давления жидкости.

Маклорен нашел этот угол – он равен 54°44′. Эта задача имеет разнообразные применения. Например, если курс судна перпендикулярен направлению ветра, то наиболее выгодное положение плоскости паруса – под углом 54°44′ к направлению ветра*. Этот же угол Маклорен ввел при определении формы ромбических ячеек сот, в которых пчелы откладывают мед, и показал, что эта форма самая экономная,– в статье помещенной в "Philosophical Transactions" № 471 [83]. Задачу на угол между направлением ветра и парусом решал и Даниил Бернулли в "Гидродинамике", однако ошибочно, как считает Маклорен, получил другое значение угла. Причину ошибки он разъяснил в "Трактате о флюксиях".

Глава IV посвящена соударению тел для случаев полной или частичной их эластичности, а также вовсе лишенных эластичности. При этом Маклорен использует результаты Гюйгенса по теории упругости. В главе V речь идет о движении снаряда в вакууме и колебаниях маятника по циклоиде; свойства этой кривой подробно изложены в ряде предложений.

В третьей книге "Гравитация, доказанная с помощью анализа", речь идет о до-ньютоновских представлениях о тяготении, взглядах самого Ньютона на этот счет и о строении Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения. Сначала говорится о притяжении тел к Земле, вызывающем в различных телах одно и то же ускорение и направленном приблизительно к центру Земли. Маклорен рассматривает форму Земли под действием сил тяготения в виде сплющенного эллипсоида вращения и сравнивает с этой точкой зрения представления древних – пифогорейцев, Птолемея. Рассмотрев эллиптическую орбиту Луны и скорость ее движения в разных точках орбиты, он подчеркивает мысль Ньютона, что Луна находится на своей орбите по той же причине, по которой "любой снаряд описывает некоторую кривую в воздухе" [68. С. 254]. Причина здесь общая – гравитация, притяжение одного тела к другому. В строении Солнечной системы главную роль играет также тяготение планет к Солнцу. Благодаря силам тяготения движение планет вокруг Солнца постоянно и регулярно. Маклорен подчеркивает универсальность законов природы, считает их следствием своего рода "униформности" природы.

Действие силы тяготения на тело складывается из действий на его части. Чтобы найти эту силу, надо выполнить процедуру геометрического интегрирования, равносильную нахождению интеграла по объему. Маклорен решает такие задачи методом, который был применен в проблеме эллипсоидов равновесия. В выкладках используются "последние отношения" исчезающих величин, т.е. пределы отношений.

В третьей книге Маклорен заодно объяснял, как вести астрономические наблюдения с помощью дневного или годичного параллаксов.

---

* Потом Маклорен добавил, что угол должен быть только в начале движения; затем парус нужно ставить под бóльшим углом.

В четвертой книге "Отчета" ньютоновская картина Вселенной излагается без применения анализа (т.е. приемов интегрирования, предельных переходов и т.д.), или, как говорит Маклорен, синтетическими методами. В ней сказано, как с помощью гравитации можно объяснить нарушения регулярности в движении планет (а именно, возмущающим действием других небесных тел); рассмотрено взаимодействие трех и более тел; исследуется вопрос о движении Луны, в частности, об узлах ее орбиты; о форме Земли, степени ее сплюснутости в полюсах (по Ньютону, равной 1/289) и об измерении в связи с этим длины земного меридиана. В описательной манере Маклорен затем объясняет приливы на море притяжением небесных тел и сравнивает выводы теории с измерениями в различных географическиих пунктах. Заключает всю книгу глава "О высшем Творце и Вседержителе Вселенной, истинном и сущем Боге".

Защита ньютонианства

Всю первую книгу "Отчета" Маклорен посвятил обоснованию и защите философии ньютонианства. Он подверг критике предшествующие натурфилософские учения: системы древних, взгляды Кеплера, Галилея, Коперника, Тихо Браге, эмпиризм Бэкона и Локка; философию Лейбница, Спинозы и, наконец, картезианство. Некоторые из этих учений он отверг как бесплодные в научном объяснении природы (древние, Лейбниц, Спиноза); в других усмотрел принципы, которые затем были развиты Ньютоном (Бэкон). Наиболее подробному разбору Маклорен подверг картезианство, еще весьма влиятельное в его время, если не в Англии, то, во всяком случае, на континенте.

Первые страницы книги Маклорена посвящены методологии Ньютона. Причину ньютоновских открытий он видит в плодотворности метода Ньютона. По мнению Маклорена, в наших исследованиях должна быть свобода, "но не для предположений взамен исследованиям и не для измышления (imagining) систем вместо изучения правильного устройства вещей на основе наблюдения и эксперимента". Но "эксперименты и наблюдения – не единственное, что он (Ньютон. – *М.К.*) использовал для изучения природы; геометрия была главным его инструментом в этом трудном исследовании". "Он называл свою философию экспериментальной, подчеркивая названием существенное отличие от тех систем, которые являются только продуктом измышлений" [68. С. 6].

В гносеологии Ньютона Маклорен подчеркивает правильное чередование анализа и синтеза. Если мы идем от явления или следствия к причине; от частных случаев к более общим, это – анализ. Но если мы владеем этими причинами, мы должны идти в противоположном порядке, т.е. из причин выводить следствия; это – синтез. Очевидно, говорит Маклорен, что в математике, как и в натуральной философии, при изучении трудных вопросов анализ должен предшествовать методу композиции, или синтезу.

Итак, изучение природы основано на эксперименте и наблюдении. Все попытки построить правильную картину Мира только из головы, только путем измышлений, пусть даже гениальных, – бесплодны. На основе этого тезиса Маклорен дает оценку философским и натурфилософским системам.

Экскурс в историю философии Маклорен начинает с древних. Он рассматривает миропонимание философов ионийской и пифагорейской школ: Сократа, Платона, Аристотеля, Эпикура. Платона он порицает за чрезмерную любовь к идеям, однако отдает ему предпочтение перед "опасной доктриной Демокрита". Аристотель, по его мнению, более преуспел в метафизике и диалектике, чем в изучении природы, хотя его картина мироздания и продержалась вплоть до Галилея и Тихо Браге. Однако все эти доктрины в общем несостоятельны, ибо представляют собой вымышленные схемы. Умозрительность античной философии порождала обилие школ, состоявших из последователей крупных философов и постепенно мельчавших: учение Платона превратилось в "невразумительную мистику", а перипатетики стали "неутомимыми спорщиками".

Тем не менее нельзя отказать древним в некоторых гениальных догадках, которые заставляют видеть в них предшественников некоторых современных открытий; однако в целом античная натурфилософия немногого стоит, считает Маклорен. Причина этой оценки ясна – она дается исключительно с позиций эмпиризма.

Неудивительно, что учение Фрэнсиса Бэкона* он принимает с энтузиазмом, называя его создателем экспериментальной философии. Маклорен цитирует то место из Бэкона, где он сравнивает философов-эмпириков с муравьями, которые собирают вместе грани земли, строя различные сооружения; софистов же уподобляет паукам, которые ткут паутину из собственного брюха, чтобы поймать в нее неосторожных насекомых; тогда как пчела, собирающая нектар с полевых цветов, из которого она потом с изумительным мастерством делает мед, – вот образец подражания для настоящего философа. Настоящий философ не тот, кто полагается исключительно на собственный разум, и не тот, кто довольствуется лишь регистрацией материала, которым его снабжает природа, но тот, кто, умело его объясняя, двигает науку вперед. Наивысшую надежду Бэкон возлагал на гармоничное сочетание экспериментальных и рациональных способностей – подчеркивает Маклорен.

Эти рассуждения показывают, что Маклорен отнюдь не пренебрегал рациональным в познании – упрек, постоянно бросаемый ньютонианству. Разумеется, в этом союзе экспериментального и рационального начал он постоянно подчеркивает первое, но это не что иное, как

* Фрэнсис Бэкон, лорд Веруламский (1561–1626) – основоположник английского материализма. Он провозгласил освобождение научной мысли от церковной догматики и схоластической псевдоучености. Правильный научный метод, по его мнению, состоит в обращении к опыту и обработке его индукцией. Ему принадлежит лозунг: "Знание – сила", подчеркивающий роль науки в овладении тайнами природы и улучшении жизни людей.

реакция на засилие безудержного системосозидания в предыдущие столетия. Ньютоновское "Гипотез не измышляю" означало лишь, что Ньютон был противником произвольных и фантастических гипотез, которые господствовали в доньютоновской науке. Стремление исключить из науки произвольные гипотетические конструкции было в ту пору прогрессивным. Однако здесь не обошлось без издержек, и Маклорен в своей критике часто бывает односторонним, как при характеристике систем древних философов, так и в анализе учения Спинозы, Лейбница, Декарта.

В середине XVIII в. картезианская система Мира* и философия под ударами учения Ньютона сдавала одну позицию за другой. Несостоятельность теории вихрей доказывала, по мнению Маклорена, несостоятельность рационализма Декарта и всей методологии. Резкое возражение вызывает у него основная посылка Декарта: из наличия в нашем сознании идей тех или иных объектов делать вывод о их реальном существовании. Этот идеалистический тезис Декарта Маклорен излагает следующим образом. "Из существования в нас идеи о бесконечно совершенном и необходимом Существе (Being), он (Декарт. – *М.К.*) заключает, что это Существо актуально, и делает зависимым от его воли наличие аксиом и других необходимых истин" [68. С. 64]. "Из достоверности этого Существа он выводит реальность материальных объектов" [68. С. 65].

Попытку Декарта сконструировать "всю фабрику природы" и дать "полное объяснение ее явлениям из идей, которые мы способны составить о бесконечном Существе", Маклорен назвал экстравагантной.

По Декарту, сущность материи – в протяженности; не может быть пустоты без материи; все части материи беспредельно делимы и подвижны. Его Вселенная наполнена плотным всепроникающим флюидом. По мнению Маклорена, это невозможно, так как эта плотная материя оказывала бы заметное сопротивление движению небесных тел (например, комет), чего нет на практике.

Декарт выдвинул гипотезу, что во Вселенной представлено всегда одно и то же количество движения. Маклорен возражает ему, указывая, что в композиции движений и в некоторых случаях соударения тел количество движения уменьшается.

Декарт выводил тезис о сохранении количества движения из неизменности (immutability) Бога. Поэтому картезианский Бог, сотворив Мир, мог уже более не вмешиваться в его дела и предоставить возможность Вселенной далее следовать механическим законам.

---

* В космогонической гипотезе Декарта (1596–1650), объясняющей движение планет увлекающими их вихревыми потоками космической материи, несмотря на ее несостоятельность, была попытка объяснить появление Солнечной системы путем ее внутреннего развития, не требующего вмешательства Бога. В философии Декарт провозгласил существование врожденных идей, а в теории познания – ведущую роль дедукции. Декарт – родоначальник философского рационализма, он подчеркивал приоритет разума над эмпирией и чувствами.

Творец у Маклорена (и Ньютона) должен периодически поддерживать ход вселенской машины из-за уничтожимости количества движения. Таким образом, Маклорен отводит Богу более важную роль, чем Декарт.

В этих антикартезианских пассажах Маклорен не всегда был прав. В теориях Декарта присутствует тезис о развитии Вселенной – чего нет у Ньютона. Более научна его идея о связи материи и пространства, чем ньютоновская абсолютизация последнего. Чрезвычайное подчеркивание Маклореном роли эмпирики перед рациональным, умозрительным началом в науке также было не на пользу последней; несостоятельность космогонической гипотезы Декарта заслонила Маклорену полезные черты картезианства, как метода. Впрочем, столь обстоятельная и эмоциональная критика Маклореном картезианства понятна: оно было в ту пору главным конкурентом натурфилософии Ньютона.

Вслед за Декартом Маклорен подвергает критике философию Спинозы*, в которой он видит лишь un cartesianisme outré (утрированное картезианство – выражение Лейбница). Их сходство Маклорен усматривает в идеалистическом исходном пункте: подобно тому, как Декарт выводил существование вещей из идей, так и Спиноза "из наличия в нас правильных идей о субстанции заключал, что она необходимо должна существовать; или, пользуясь его собственными словами, что ее существование (existence), как и сущность (essence), должны быть вечными истинами". Спиноза, как и Декарт, утверждает, что "все наше знание выводимо из правильных идей (как он их всегда называет), а эти правильные идеи должны быть произведены разумом" [68. С. 76]. Сходны и их методы: оба пытаются создать картину Мира лишь из идей, которые они имеют "о неизменных сущностях и необходимых причинах". Поиск таких глобальных "причин", считает Маклорен, нас уводит слишком далеко; надо принципы природы выводить из наблюдений и оставаться на почве фактов и опытов. Спиноза утверждал, что существует лишь одна субстанция с бесконечными свойствами, в частности с бесконечной протяженностью и мышлением, которая "производит все вещи в себе как собственные модификации; она (субстанция. – *М.К.*) одна во всем причина и следствие, во всех отношениях, физических и моральных" [68. С. 78]. Эту доктрину Маклорен называет абсурдной, считая, что она подрывает "фундамент натуральной религии". Маклорен обошел вниманием все богатство учения Спинозы, но выделил его слабые стороны: идеалистическую окраску доктрины и в значительной степени умозрительный метод.

---

* Барух Спиноза (1632–1677), нидерландский философ, развил учение о единстве и целостности Мира на основе идеи субстанции – единственного, вечного и бесконечного начала, являющегося причиной самого себя. Отдельные вещи Спиноза рассматривал как единичные проявления этой единой субстанции. Он был монистом (в отличие от дуалиста Декарта), так как отождествлял Бога и природу, дух и материю в идее единой субстанции. В теории познания он был сторонником рационализма и невысоко ценил опытное, чувственное познание, видя в нем источник заблуждений. Большое значение он придавал, как и Декарт, интеллектуальной интуиции, которая в сочетании с дедукцией и доставляет нам истинное знание.

У Лейбница* Маклорен усматривает два основных принципа бытия. 1) Невозможно, чтобы нечто было и не было одновременно (закон исключенного третьего), 2) Ничто не бывает без достаточной причины, благодаря которой оно случается предпочтительнее, чем другое (закон достаточного основания). На основе этих принципов (а отнюдь не из наблюдений и экспериментов) Лейбниц конструирует свою систему Мира, в которой движение объясняется сочетанием циркуляции эфира по Декарту и ньютоновской гравитацией, а сущность субстанции состоит в активности.

Лейбниц продолжал развивать взгляд Декарта и на Сущее как на совершенную машину: по его мнению, дух в своем волеизъявлении следует тем же законам, что тело в движении; то, что человек видит или говорит, есть не более чем результат утонченной "машинерии" ("machinary"). Маклорен выступил против столь крайнего механицизма. Заодно он отвергает и тезис об активности материи – ценную черту натурфилософии Лейбница.

Завершив этот экскурс в историю философии, Маклорен резюмирует: "Мы можем удовлетвориться тем, что в натуральной философии истина может быть открыта только экспериментом и наблюдением при помощи геометрии: необходимо сначала применять метод анализа, прежде чем мы позволим себе представить некоторую систему синтетически" [68. С. 91]. Причины неудачных натурфилософских доктрин он видит в следующем: "Вместо того, чтобы проникать в природу, люди ушли в обдумывание собственных идей; вместо прослеживания ее операций, они придались игре воображения; там, где им следовало колебаться, они были решительными, и где не было никаких трудностей, они сомневались; что было простым – разделяли и объясняли то, что было ясным... Выдумывался один необоснованный принцип, чтобы поддержать другой; фикция громоздилась на фикцию. Гипотезы изобретались не для того, чтобы привести в порядок факты и наблюдения, но как принципы науки" [68. С. 94].

В этом отрывке содержится сгусток гносеологических установок Маклорена. Рассмотренный философский обзор представляет собой одну из важных страниц в истории ньютонианства как философской и натурфилософской системы. В полемике Маклорен отстаивает и подчеркивает ее сильнейшие стороны: материализм и методологию, основанную на наблюдении и эксперименте и поставившую естествознание

* Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), в отличие от единой субстанции Спинозы, развил учение о множественности субстанций, называемых монадами и являющихся первоэлементами, или "единицами" бытия. Монадологией он объяснял целостность и единство всего сущего. Многообразие Мира вытекает из иерархии различных монад – простых (неорганические тела и растения), душ (животные), духов (человек) и высшей монады – Бога. Разум – монада, заключающая в себе в зародышевом состоянии все идеи абсолютно достоверных наук. Эмпирическое познание природы играет роль толчка, чтобы эти идеи получили развитие, но само не является истинным познанием. Один из важных атрибутов монады – способность к саморазвитию благодаря наличию сил, приводящих все материальные вещи в состояние движения, активного стремления. В противоположность Ньютону, Лейбниц отрицал абсолютное пространство и время. В теории познания он был продолжателем рационализма Декарта и противником эмпиризма Локка.

на научную основу. Вместе с тем он критикует ценные черты других философских систем и утверждает слабые стороны ньютонианства: метафизичность, повлекшую за собой идею "первого толчка"; некоторое пренебрежение к научной гипотезе, без которой невозможна наука: абсолютизацию времени, пространства, движения.

Но ценные стороны учения Ньютона оказали громадное влияние на последующее развитие философии и других наук. Их усвоили и в известном смысле развили знаменитые французские материалисты: Вольтер, Дидро, Руссо, Монтескье. Ньютон внес большой вклад в борьбу с остатками средневековой схоластики и теологии и дал толчок невиданному развитию естествознания. В этом немалую роль сыграла популяризаторская и комментаторская деятельность Маклорена.

Известный историк естественных наук У. Узвелль писал в 1837 г., что среди прочих сочинений, популяризирующих физику Ньютона, "Отчет" Маклорена – "это до сих пор самая лучшая книга об этом предмете" [38. Т. 2. С. 254].

Глава 6

Эллипсоиды равновесия и форма Земли

Исследования Маклорена по теории притяжения впервые были опубликованы в работе "О приливах" (1740), получившей премию Парижской Академии наук. В более пространном и уточненном виде они были изложены в его "Трактате о флюксиях". В "Трактате", помимо чистой математики, рассмотрены ее приложения (занимавшие едва ли не треть объема книги) к теории удара, гидростатике, небесной механике, теории приливов, оптике и т.д. Теории притяжения Маклорен посвятил § 628–685 второго тома "Трактата". Вопросы, группирующиеся вокруг теоремы равновесия жидкого сфероида*, изложены в § 628–647.

Ньютон создал новую механику, сформулировав закон взаимодействия двух точечных масс. Она замечательным образом не только объяснила движение небесных тел, но и позволила заняться изучением их формы. Какую форму принимает планета, частицы которой взаимодействуют по закону тяготения, если учесть ее суточное вращение вокруг оси? При некоторых упрощающих предположениях Ньютон высказал гипотезу, что она принимает форму сплюснутого у полюсов эллипсоида вращения – сфероида, и получил расчет размеров Земли. Центральным пунктом изысканий Маклорена о притяжении является выяснение условий равновесия сфероида. Они дали толчок исследованиям современников Маклорена – Клеро и Даламбера. Эти два математика, а позднее Лагранж, Лаплас и другие, высоко ценили не только результаты Маклорена в этом вопросе, но и его метод. Лаплас писал: "... эллиптическая фигура удовлетворяет равновесию однородной жидкой массы. Маклорен показал это прекрасною методою" [26. С. 85].

Так как именно метод Маклорена обходили своим вниманием исследователи, занимавшиеся историей исследований формы небесных тел (например, Тодгентер в [100]), то нам представляется полезным обратить на него внимание. Математический аппарат Маклорена, ныне весьма устаревший, показывает, однако, как синтетические геометрические конструкции, по крайней мере на заре развития высшей математики, прекрасно заменяют формулы. Обладая геометрической интуицией, Маклорен не только усвоил геометрический метод "Начал" Ньютона, но и развил его со всей возможной общностью в "Трактате" и использовал в различных приложениях.

---

* Сфероидами называли, следуя древнегреческой традиции, эллипсоиды вращения.

О притяжении пирамид и конусов

В математическом аппарате теории притяжения основную роль играет интегрирование по объему. Ньютон в "Началах" осуществил эту операцию (в IX Предложении I книги) при нахождении притяжения телом вращения частицы, помещенной на оси вращения. Множеством плоскостей, перпендикулярных оси вращения, тело было разбито на цилиндрики, а затем каждый цилиндр расслаивался на кольца. Притяжение кольца может быть найдено уже легко; и оно представляет собой, таким образом, элемент интегрирования. Само интегрирование по объему сводится затем к "однократному" интегралу, т.е. к квадратуре [30], [35]. У Маклорена элементарный объем имеет, как правило, форму пирамиды (иногда усеченной). Поэтому во вводных теоремах (§ 628–630) он находит притяжение пирамидой ее частицы, помещенной в вершине. Задача решается в три этапа, по мере усложнения формы притягивающего тела.

1. Простейшим по форме является конусовидное тело, вырезаемое в однородном шаре центральным телесным углом. Притяжение таким "конусом" частицы в центре шара складывается из притяжений отдельных бесконечно тонких слоев, на которые "конус" разбивается концентрическими сферами. По закону тяготения два таких слоя на расстоянии r_1 и r_2 от центра притягивают частицу с силами, прямо пропорциональными их площадям (т.е. квадратам радиусов r_1 и r_2) и обратно пропорциональными квадратам расстояний до притягиваемой частицы, т.е. тѐх же радиусов. Стало быть, притяжения частицы отдельными слоями равны. Если известно притяжение частицы слоем, лежащим в основании, то ее притяжение всем "конусом" получается умножением силы притяжения основания на длину образующей*. Отсюда ясно, что действия двух подобных конусов, вырезаемых из концентрических шаров, на их общую вершину находятся в таком же отношении, как и образующие конусов; таково же отношение проекций этих сил на произвольную прямую.

2. Притяжения двух подобных и подобно расположенных конусовидных или пирамидальных тел частицы в их общей вершине относятся как соответственные отрезки данных тел. Это положение легко вывести из предыдущего пункта, если данные два тела разложить на элементарные фигуры, строя в их общей вершине телесные углы. При достаточной малости последних фигуры разбиения можно считать конусами со сферическими основаниями и использовать предыдущий результат.

3. Отсюда легко прийти к выводу, что два подобных или подобно расположенных тела S и S_1 действуют на частицы P и P_1, подобно к ним

---

* Например, если A – сила притяжения основанием "конуса" частицы, находящейся в вершине, r – длина образующей, то сила притяжения частицы всем телом получается простым интегрированием $\int_0^r A dr = A \times r$.

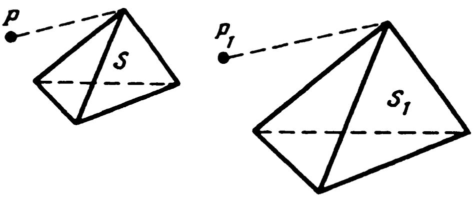


Рис. 20

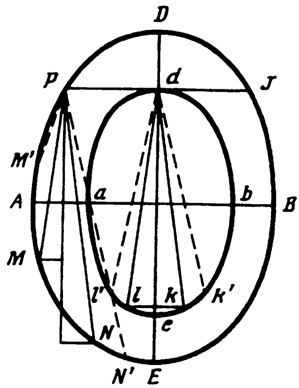


Рис. 21

расположенные, с силами, прямо пропорциональными соответственным отрезкам данных тел* (рис. 20).

Эти простые результаты Маклорен использует в более сложных конструкциях. Он находит силы притяжения двух подобных одноцентренных эллипсоидов вращения, направленные на две поверхности точки P и d эллипсоидов, лежащие на прямой, параллельной общей оси вращения AB (рис. 21).

В сечении эллипсоидов плоскостью, проходящей через ось, образуются подобные эллипсы $ADBE$ и $adbe$. Из точек P и d в эллипсах проводятся две пары параллельных хорд. $PM \parallel dl$, $PN \parallel dk$. Из свойств эллипса следует соотношение: $PM + PN = dl + dk$ (*). Затем Маклорен строит еще две пары параллельных хорд, весьма близких к первым: $PM' \parallel dl'$, $PN' \parallel dk'$. Если повернуть плоскость эллипсов на малый угол вокруг оси Pd, то образуются 4 элементарные фигуры с вершинами P и d, полученные вращением соответствующих эллиптических секторов (например, dkk'). По причине малости угла поворота можно эти фигуры считать подобными пирамидами. Поэтому по 3-у пункту действия пирамид на их вершины относятся так, как их линейные размеры. Согласно равенству (*), две пирамиды с вершиной P притягивают ее так же, как две другие притягивают точку d. Просуммировав притяжения всех частичных пирамид (см. далее лемму), Маклорен приходит к выводу о равенстве сил притяжения большим сфероидом частицы P и малым – d; равны будут и проекции этих сил на любое направление. Точки P и d равноудалены от оси AB, поэтому составляющая силы притяжения на точку d по направлению, перпендикулярному оси, тем больше, чем далее точка отстоит от оси. Аналогично ведет себя и составляющая по направлению оси вращения: она изменяется пропорционально расстоянию точки до плоскости экватора.

---

* В пунктах 1–3 Маклорен развил одну из теорем "Начал", доказательство которой Ньютоном лишь намечено.

В приведенных теоремах центральной является мысль, что переменные величины при определенных условиях могут иметь то же отношение, что и их флюксии. Но передается эта мысль на языке пределов без употребления бесконечно малых или лейбницевых дифференциалов. Так, в пункте 2 притяжения элементарными конусами их общей вершины будут относиться как соответствующие линейные размеры самих тел лишь "напоследок", т.е. в пределе, когда телесные углы стремятся к нулю.

Основная лемма

Нахождение силы, с которой тело конечных размеров притягивает материальную частицу, сводится к тройному интегралу. Для этого в теле вырезается элементарный объем, находится его действие на данную частицу и все такие притяжения затем суммируются. Сейчас, когда теория кратного интеграла разработана, подобные задачи решаются единообразно, независимо от формы тела. Не так было на заре возникновения этой теории. Форма разбивающей "решетки" выбиралась применительно к условию задачи. У Ньютона в задаче о притяжении телом вращения точки оси система координатных поверхностей – цилиндрическая. Маклорен же разбивает тело так, чтобы элемент объема имел форму пирамидки с вершиной в притягиваемой частице и затем выполняет, как мы увидим далее, интегрирование по полярному углу. Этот прием оказался настолько удачным, что Маклорену удалось кратчайшим путем решить несколько задач теории потенциала, в частности, найти одну из форм равновесия жидкости и вычислить силу притяжения эллипсоидом точки на его поверхности.

Суть интеграционного приема Маклорена заключена в лемме следующего содержания.

Дано тело и притягиваемая им частица P (рис. 22). Через P проведена плоскость, которая в данном теле высекает фигуру $ADda$: в этой же плоскости построена прямая PZ. Произвольная прямая PM пересекает контур $ADda$ в точках M, m. Пусть прямая PM описывает малый центральный угол MPO. Точка m при этом перемещается в точку o. Через прямую PZ (мысленно) проведена другая плоскость, образующая с данной некоторый двугранный малый угол. В точках M и O проведены перпендикуляры к данной плоскости, которые встречают другую плоскость в точках X и U. Такое же построение выполняется для точек m, o. Соединив соответственные вершины, получают усеченную пирамиду с ребром Mm, близкую ввиду малости двугранного угла к усеченной "пирамиде" со сферическими основаниями. Так как площадь большего основания "пирамиды" равна $MO \times MX$, а притяжение точки P прямо пропорционально площади основания и обратно пропорционально квадрату его расстояния до точки, то оно равно $K \times \frac{MO \cdot MX}{PM^2}$. Чтобы

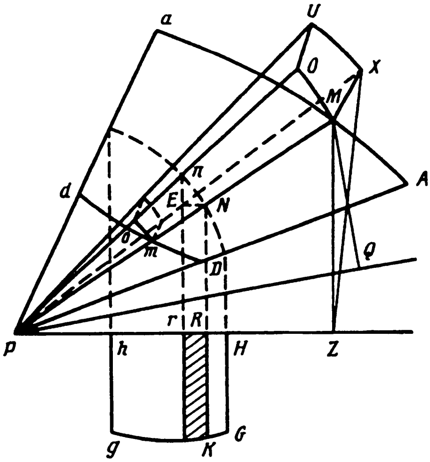


Рис. 22

найти притяжение всей усеченной "пирамидки", надо эту величину умножить на ребро Mm.

Таким образом, элементарное притяжение телом точки P равно $K \times \frac{MO \cdot MX}{PM^2} \times Mm$ (1). В духе геометрических флюксий Маклорен представляет величину (1) в виде элемента площади* некоторой криволинейной трапеции $HGgh$. Но численное значение площади трапеции измеряет притяжение еще не всего тела, а лишь его части, заключенной внутри бесконечно малого двугранного угла с ребром PZ. Притяжение точки P всем телом получается интегрированием по этому последнему углу и сводится к простому умножению на 2П в случае тела вращения (с осью PZ).

Перед нами образчик геометрического интегрирования, столь распространенного у основателей анализа, особенно в школе Ньютона. Здесь не употребляется специальная символика и терминология, все понятия изложены на языке геометрии, например, вместо однократного интеграла речь идет о площади трапеции под кривой, ординаты которой равны значениям интегрируемой функции, и т.п. Большую роль при этом играют геометрические свойства фигур в каждой конкретной задаче. Весьма важная роль отводится предельному переходу, свойства которого были изучены Ньютоном в известных леммах "Начал".

В современных терминах и обозначениях рассуждения Маклорена могут быть изложены так.

Обозначим бесконечно малый двугранный угол с ребром PZ через $d\alpha$, а фигуру $ADda$ рассматриваем в полярной системе координат с осью PZ. Тогда $\angle ZPM = \theta$ – полярный угол, $\angle MPO = d\theta$ – его дифференциал. Отрезки PM, pm зададим как функции полярного угла: $PM = \rho(\theta)$, $pm = \rho_1(\theta)$. Тогда ребро $Mm = \rho(\theta) - \rho_1(\theta)$, длинам дуги $MO = \rho(\theta)d\theta$. Проведем $MZ \perp PZ$. В треугольнике MZX $\angle MZX = d\alpha$ – бесконечно мал, поэтому $MX = MZ \times d\alpha = p \times \sin\theta d\theta$. Тогда выражение (1) принимает вид:

$$K\frac{MO \cdot MX}{PM^2} \times Mm = K\frac{\rho\theta\rho \sin\theta d\alpha}{\rho^2}(\rho - \rho_1) = K(\rho - \rho_1) \times \sin\theta d\theta d\alpha.$$

* На рисунке он заштрихован.

Так как Маклорен ищет проекцию этой силы на произвольное направление PQ, то это выражение нужно умножить на $\cos\beta$, где $\beta = \angle ZPQ$ и элемент интегрирования будет равен

$$K(\rho - \rho_1) \times \sin\theta d\theta d\alpha \times \cos\beta = K\frac{(\rho - \rho_1)\cos\beta}{r} r\sin\theta d\theta d\alpha. \qquad (2)$$

Здесь r – радиус некоторой окружности, проведенной из центра P; N, n – точки ее пересечения с прямыми PM, PO; NR и nr – перпендикуляры, опущенные из этих точек на PZ.

Рассмотрим кривую, описываемую точкой K с декартовыми координатами: $x = PR = r \times \cos\theta$, $y = RK = Mm \times \cos\beta = (\rho - \rho_1) \times \cos\beta = Qq$. Тогда $dx = -r \times \sin\theta d\theta = Rr$ (из ΔNEn, где $EN = rR$), и равенство (2) преобразуется к виду $K\frac{y}{r}\,dxd\alpha$. Интеграл $\int ydx$ равен площади трапеции $HGgh$, а повторный интеграл по α дает значение притяжения всего тела вращения.

Теория жидкой планеты Ньютона

Из закона всемирного тяготения можно вывести не только траекторию движения небесных тел, но и их форму. Ньютон и его последователи применили этот закон прежде всего для установления формы Земли. Ньютон допускал, что Земля образовалась путем охлаждения огненно-жидкой массы, и пытался выяснить, каковы фигуры равновесия жидкой вращающейся однородной массы. Интересные доводы в пользу изучения формы Земли как жидкого тела, т.е. по законам гидростатики, привел Клеро: "Когда мы представляем себе все то, что образует внешнюю поверхность нашей планеты – материки, моря, озера, горы, реки и т.д., то на первый взгляд мы склонны считать, что все исследования, которые можно провести в теории для определения фигуры Земли, являются бесполезными отвлеченными рассуждениями... Но если затем обратить внимание на то, что моря со всех сторон сообщаются между собой; что берега очень мало возвышаются над уровнем моря, что высота самых больших гор совершенно ничтожна по сравнению с диаметром Земли, что скат русла самых больших рек не требует, чтобы их истоки находились над уровнем моря выше, чем горы, то мы быстро придем к заключению, что фигура Земли подчиняется законам гидростатики; что операции, произведенные для ее измерения, должны дать приблизительно те же результаты, как если бы они производились на поверхности воды, застывшей после того, как она приняла форму, соответствующую условиям равновесия" [24].

Если все частицы изолированного в пространстве тела взаимодействуют по закону тяготения, то оно принимает форму шара; если тело к тому же вращается, на его частицы действует, помимо тяготения, центробежная сила, тем бóльшая, чем дальше частица отстоит от оси вращения. Поэтому Ньютон допускал, что вращающаяся жидкость, частицы которой взаимодействуют между собой по закону всемирного тяготения, принимает форму эллипсоида, слабо сжатого у полюсов. Чтобы найти сжатие такого эллипсоида (или отношение его осей), Ньютон применил так называемый принцип столбиков: два тонких столба жидкости, направленные от центра планеты к полюсу и к экватору, должны оказать одинаковые давления на центр планеты. Таким образом, отношение полярной и экваториальной осей у Земли по Ньютону равно 229:230.

Эти теоретические расчеты были позднее проверены геодезическими измерениями. Теория мироздания Ньютона, основанная на законе тяготения, далеко не сразу была признана. Довольно долго с ней конкурировала картезианская механика, в которой основная роль отводилась движению вихрей. Обе системы предложили свою форму Земли. По Ньютону, Земля должна быть сплюснутой, по Декарту – вытянутой по оси. Какова же она на самом деле? Oblatum sive oblongum – сжатая или вытянутая? Ответ на этот вопрос можно было получить только опытным путем. И вот в 1735 г. Парижская академия наук снаряжает две экспедиции для измерения градуса земного меридиана. Одна экспедиция, под руководством Мопертюи, была направлена в Лапландию, другая, возглавляемая Бугэ, – в Перу. Обе экспедиции установили, что градус земного меридиана "удлиняется" к полюсу, т.е. они привезли ньютоновский "oblatum", так что закон тяготения окончательно восторжествовал в естествознании.

Конечно, эти данные были известны Маклорену и укрепили его в мысли, что ньютоновская гипотеза фигуры планеты должна быть доказана математическим путем. Мы обращаемся к его выдающейся теореме об условии равновесия вращающегося сфероида.

Эллипсоид Маклорена как фигура равновесия

История фигур равновесия движущейся жидкости ведет свое начало от Маклорена. Впервые он высказал и применил принцип, что жидкость находится в (относительном) равновесии, если ее поверхность представляет поверхность уровня, и ввел этот термин ("a surface of level").

Основная теорема в этих исследованиях формулируется так. Если жидкий вращающийся сфероид с осью AB (рис. 23) притягивает полярную частицу (A) с силой M, экваториальную частицу (D) с силой N, то он будет пребывать в равновесии при условии, что силы тяготения M, N и центробежная сила на экваторе V связаны равенством

$$M \times AC = (N - V) \times CD. \qquad (*)$$

В процессе доказательства теоремы Маклорен устанавливает три

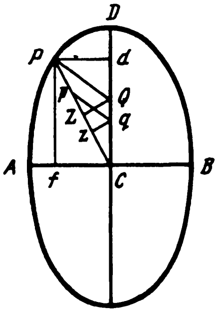


Рис. 23

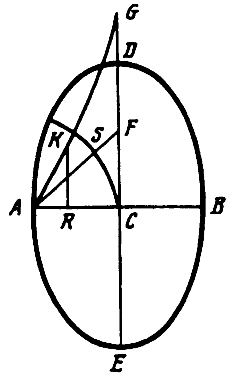


Рис. 24

положения: а) равнодействующая всех сил, приложенных к частице на поверхности сфероида, направлена по нормали к поверхности; б) все бесконечно тонкие столбы жидкости от центра сфероида к поверхности уравновешивают друг друга; в) жидкость давит на любую частицу сфероида с силой, одинаковой по всем направлениям.

В первой части теоремы найдено направление равнодействующей силы в точке P на поверхности сфероида. На нее действуют две силы – сила притяжения и центробежная. Каждая из сил разложена на две составляющие вдоль осей AC и CD. Действие на P вдоль оси AC вызвано только притяжением, оно прямо пропорционально расстоянию точки до экватора, поэтому, так как притяжение точки A равно M, искомая сила $F_{\Delta C} = M\,\dfrac{Pd}{AC}$.

Действие на ту же частицу по направлению CD вызвано силой притяжения, от которой отнята центробежная сила. Обе силы убывают с уменьшением расстояния частицы до полярной оси, поэтому составляющая $F = (N - V)Cd/CD$.

Если на отрезке CD построить точку Q так, чтобы выполнялось равенство $dQ/dC = (N - V)AC/M{\cdot}CD$ или (на основании равенства (*)) $dQ/dC = AC^2/CD^2$, то из свойств эллипса следует, что PQ – его нормаль. Отношение сил $F_{AC}{:}F_{CD} = MPd/AC{:}(N - V)Cd/CD = AC^2 - CD^2$, откуда и следует, что их сумма направлена по нормали к эллипсу.

Силы M и N у Маклорена находятся следующим образом. Взят сфероид, полученный вращением эллипса $ADBE$ (рис. 24) вокруг оси AB и заполненный материей одинаковой плотности. Требуется найти притяжение этим телом на точки A (в полюсе) и точки D (на экваторе). В обоих случаях находится притяжение не всего тела, а его части, заключенной внутри малого двугранного угла с ребром по оси вращения. Притяжение этой части находится по рецепту, данному в лемме, и сводится к нахождению площади криволинейного треугольника $AKGC$. Площадь этой фигуры найти нетрудно, так как по свойствам эллипса связь между отрезками AR $(= x)$ и KR $(= y)$ выражается формулой:

$$y = \frac{2b\frac{a^2}{b^3}x^2}{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2},$$

где $a = CD$, $b = AC$, $c = CF$, F – фокус эллипса. Интеграл от этой функции сводится к табличному интегралу вида $\int \frac{dx}{1+x^2}$, так что площадь $AKGC = \frac{2a^2b^2}{c^3}\left(c - b\,\mathrm{arctg}\frac{c}{b}\right)$ (у Маклорена площадь $AKGC = \frac{2AC^2 \cdot CD^2}{CF^3}(CF - CS)$, т.е. она выражается через отрезки AC, CD, CF и дугу CS, где S – точка пересечения фокального радиуса AF с окружностью радиуса AC с центром A). Таким образом для притяжения всем телом точки в полюсе и на экваторе получаются значения:

$$M = 2\Pi\frac{\text{пл.}AKGC}{AC}, \quad N = 2\Pi\left(CD - \frac{\text{пл.}AKGC}{2AC}\cdot\frac{CD}{AC}\right).$$

Обе силы притяжения – в полюсе и на экваторе – зависят от формы эллипса $ADBE$. Это отчетливо показал Клеро [7], придавший результату Маклорена более удобный вид заменой $AC = 1$, $CD = m$. Тогда $CF = \sqrt{m^2 - 1} = l$, $CS = \mathrm{arctg}\,l$, и площадь $AKGC = \frac{2(1+l^2)}{l^3}(l - \mathrm{arctg}\,l)$. Здесь величина l – так называемый второй эксцентриситет эллипса, что находится по формуле

$$l^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} (= m^2 - 1).$$

Далее Маклорен замечает: "Поверхности, подобные, подобно расположенные и имеющие общий центр с эллипсоидом $ADBE$, будут поверхностями уровня на всех глубинах (will be level surfaces at all depthes) и силы, с которыми равные частицы таких поверхностей притягиваются к сфероиду, измеряются перпендикулярами к поверхностям" (§ 640).

Во второй части теоремы равновесие эллипсоида проверяется "по принципу столбиков" Ньютона, который распространяется на все направления. Сравнивается "вес" полярного столба и "вес" столба, соединяющего центр с произвольной точкой поверхности P. Сила тяжести в полюсе равна M, поэтому "вес" полярного столба равен $1/2M \times AC$ (сила тяжести в точке f равна MfC/AC). Если обозначить

$Af = x$, то задача сводится к нахождению $\int\limits_0^{AC} M\frac{AC-x}{AC}dx$. Принимая силу притяжения в полюсе численно равной длине AC, получают для "веса" полярного столба значение $1/2AC^2$. Тогда сила тяжести в точке P будет численно равна отрезку нормали PQ от точки до экваториальной плоскости. Проекция силы тяжести в точке P на направление PC равна длине отрезка PZ ($QZ \perp PC$). Во внутренней точке p столба PC сила тяжести в том же направлении равна отрезку pz, полученному аналогично. Из подобия треугольников PQZ и pqz следует пропорция

$$\frac{pz}{PZ} = \frac{pC}{PC}, \quad \text{т.е. } pz = PZ\frac{pC}{PC}. \tag{1}$$

"Вес" столба PC получится при сложении составляющих силы тяжести по направлению столба в каждой его внутренней точке, т.е. интегрированием выражения (1). Получается, подобно весу полярного столба, величина $1/2PZ \times PC$, которая по геометрическому свойству эллипса равна $1/2AC^2$.

Итак, столб, идущий от центра сфероида к его поверхности, уравновешивается полярным столбом и, стало быть, все они одинаково давят на центр планеты.

Наконец, третье следствие, полученное Маклореном из формулы (*) таково, что жидкость в таком сфероиде давит на любую частицу с силой, одинаковой во всех направлениях, т.е. справедлив закон Паскаля. Для этого внутренняя частица сфероида p соединяется с любой точкой поверхности P, лежащей с данной в одной меридиальной плоскости. "Вес" столбика Pp в его направлении оказывается равным "весу" проекции на полярную ось.

Таково доказательство этой замечательной теоремы, простоту и элегантность которой оценили многие знаменитые ученые. Клеро в "Теории фигуры Земли" излагал эти вопросы почти точно следуя Маклорену, ибо его метод "столь красив и глубок, что, мне казалось, я доставлю удовольствие мои читателям, изложив его здесь" [24].

Известный механик XIX в. Поль Аппель видел ценность этой теоремы как во введении поверхностей уровня, так и в том, что Маклорен "прилагал к однородной вращающейся массе закон Паскаля о равенстве давления еще задолго до того, как основы гидростатики были окончательно установлены. Он распространил вычисления Ньютона на все точки массы и все направления" [1. С. 10].

Вопрос о формах равновесия и исследования фигуры Земли и других планет привлекал математиков XVIII–XIX вв. Клеро в упоминаемой книге отказался от принципа однородности Земли и поставил задачу найти ее форму из предположения, что она состоит из бесконечного числа слоев, плотности которых изменяются по произвольному закону от центра к поверхности. Даламбер привел условие равновесия (*) к виду зависимости между угловой скоростью вращения эллипсоида и его вторым эксцентриситетом, установив затем, что всякой угловой скорости соответствуют два эллипсоида Маклорена, с одинаковыми массами, но разными эксцентриситетами [15].

В дальнейшем были найдены и другие фигуры равновесия, имеющие форму трехосного эллипсоида (Якоби), кольца (Ковалевская, Пуанкаре), грушевидную (Пуанкаре, Ляпунов)... Толчок этим поискам дал Маклорен, о котором Ляпунов писал: "Еще Ньютоном было замечено, что эллипсоид вращения может быть формой равновесия. Но обстоятельно этот вопрос был исследован впервые Маклореном, почему фигуры равновесия в форме эллипсоидов вращения и называются эллипсоидами Маклорена" [25. С. 366].

Глава 7

Маклорен как геометр

Состояние геометрии до Маклорена: Декарт, Ньютон, Паскаль, Симсон

Веками геометрия развивалась по направлению, заданному ей древними греками, – главным образом Евклидом, Архимедом, Аполлонием. По их сочинениям учились в университетах, их комментировали и многократно переиздавали. Такого рода комментарии иногда выходили за рамки традиционных методов, подготовляя, в частности, почву для неевклидовой геометрии. Но чаще исследователи оставались верными букве греческой геометрии, содержание которой сводилось, фактически, к элементарной геометрии, построенной синтетическим дедуктивным методом, и теории конических сечений Аполлония.

XVI–XVII века знаменовали начало научно-технической революции и принесли новые важные идеи в геометрию и другие разделы математики. Благодаря введению координат в работах Декарта и Ферма возникла аналитическая геометрия. Этому открытию предшествовал долгий путь накопления фактов, начиная с попыток древних астрономов установить положение небесного тела с помощью сферческих координат. В Средние века идея метода координат присутствовала в учении о "широте форм" Орема, в работах арабского ученого Омара Хайама и других. Непосредственно Декарту предшествовали работы Ф. Виета, Геталдича (1566–1627) и других математиков, развивавших алгебру как новое "аналитическое искусство" (Виет). В "Геометрии" (1637) Декарт сопоставил каждой точке два отрезка координатных осей – две (положительные) координаты, обозначив их буквами x и y. Затем он получил уравнения некоторых алгебраических и трансцендентных кривых. П. Ферма высказал аналогичные идеи. Метод координат был развит затем Д. Валлисом, который ввел отрицательные координаты (1655), А. Параном, рассмотревшим прямоугольные декартовы координаты в пространстве (1700).

Метод аналитической геометрии, в иных случаях чрезвычайно краткий и удобный по сравнению с громоздкими рассуждениями древних, все же пробивал себе дорогу не так уж быстро и победоносно. Показательно отношение к декартовым координатам самого Ньютона. В "Перечислении кривых третьего порядка" (1704), где впервые приведена насчитывающая 72 вида классификация кривых третьего порядка, широко и плодотворно используются как декартовы, так и полярные координаты. А в "Началах" Ньютон их не применял, оставаясь на почве греческой геометрии.

Метод координат Декарт продемонстрировал в задаче Аполлония

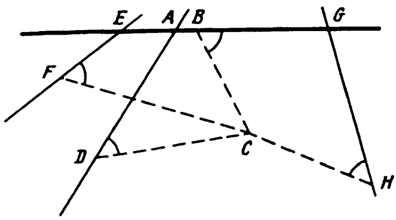


Рис. 25

"о четырех линиях". Даны четыре прямые линии AB, AD, EF, GH (рис. 25). Требуется найти геометрическое место таких точек C, что если из C провести к данным прямым под данными углами четыре отрезка CB, CD, CF и CH, то будет справедливо равенство $CB \times CF = k \times CD \times CH$ (1) (k – натуральное число). Декарт показал, что уравнение искомого может быть приведено к виду $\alpha\beta = \gamma\delta$, где α, β, γ, δ – линейные функции координат x, y точки C. Стало быть, получается кривая второго порядка [14].

Ньютон в "Началах" эту же задачу решил синтетически, без координат, и добавил, что такое решение, "исполняемое геометрическими сопоставлениями, а не аналитическим расчетом", и подразумевалось древними. Это – явный выпад против декартова анализа, к которому у Ньютона было двойственное отношение: сознавая его полезность, в иных случаях он предпочитал обходиться без "аналитического расчета". Отношение Ньютона было показательным в оценке роли аналитических и синтетических методов в математике в XVII–XVIII вв. Вторжение в геометрию чисел и алгебраических выражений, которое несет с собой метод координат, воспринималось иной раз как нечто чужеродное, как нарушение "правил игры", предложенных древними греками. Осознание плодотворности аналитических методов шло постепенно с развитием самого аналитического аппарата математики. А пока он был неразвит, классическая греческая математика воспринималась как более "надежная"; на нее опирался Ньютон в главном труде своей жизни – "Началах", в ней искал Маклорен пути обоснования метода флюксий.

Лейбниц разделял мнение Ньютона в оценке роли алгебраических методов в геометрии. Он писал: "Я еще недоволен Алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений. Поэтому... я полагаю, что нам нужен иной чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение, как Алгебра выражает величину...". Построение такого рода анализа начали в XVII в. Ж. Дезарг (1591–1661) и Б. Паскаль; оно завершилось в XIX в. блестящим расцветом проективной геометрии.

Среди математиков, подготовивших расцвет проективной геометрии, можно назвать и Ньютона, который рассмотрел так называемое органическое описание кривых в трех своих работах: "Началах", "Перечислении кривых третьего порядка" и "Всеобщей арифметике". Впрочем, идея органического описания родилась еще раньше и тоже заимствована у греков. Она состоит в том, что кривая – это геометрическое место точек, полученных на пересечении двух прямых линий, каждая из которых движется на плоскости. В зависимости от характера их движения получаются различные кривые. Так, голландский математик Франс ван-Схоутен (1561–1626) строил эллипс с помощью точки, жестко связанной с данным отрезком, концы которого скользят по сторонам данного угла. У него, по-видимому, впервые встречается термин "органическое описание".

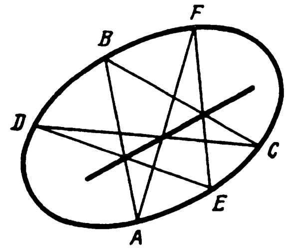


Рис. 26

Ньютон применил метод органического описания для построения кривой второго порядка следующим образом. Если два постоянных угла вращаются вокруг закрепленных вершин, и точка пересечения одной пары сторон углов движется по прямой, то точка пересечения второй пары описывает конику*. Чисто синтетическое доказательство этого факта дано в XXI лемме "Начал", а с помощью декартовых координат – во "Всеобщей арифметике".

В "Перечислении кривых третьего порядка" метод органического описания Ньютон распространил на высшие кривые. В мемуаре без доказательства высказана, в частности, теорема, что если одна пара сторон, вращающихся вокруг двух неподвижных вершин постоянных углов, описывает коническое сечение, то вторая пара, пересекаясь, порождает либо кривую третьего порядка с двойной точкой, либо кривую четвертого порядка [31. С. 207].

В органическом описании конических сечений Ньютона можно усмотреть зародыш будущей теории проективных пучков, развитой в XIX в. Понселе и Штейнером. Этот материал послужил отправной точкой для многих исследователей, в том числе и Маклорена.

Ньютон выполнил в "Началах" построение конических сечений по пяти заданным элементам, применив при этом также их метрические свойства. С помощью одной линейки конические сечения могут быть построены на основе теоремы Паскаля. Теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, или теорема "о мистической гексаграмме" была высказана 16-летним Блезом Паскалем. Ее формулировка, несколько отличная от авторской, такова:

Во всяком шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в кривую второго порядка, точки пересечения трех пар сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA принадлежат одной прямой (рис. 26).

Содержащая теорему Паскаля статья под названием "Эссе о конических сечениях" вышла из печати в 1640 г. в виде листовки, изданной небольшим тиражом. В ней были даны три определения, три леммы, три чертежа и несколько других предложений. Одна из лемм и стала называться впоследствии теоремой Паскаля. Все предложения в

---

* Маклорен называет иногда коническое сечение коникой, кривую третьего порядка – кубикой, кривую четвертого порядка – квартикой. В западноевропейской математической литературе эта традиция кое-где сохранилась до сих пор. Мы тоже иногда будем употреблять эти термины – для краткости.

"Эссе" даны без доказательств. Однако идею доказательства теоремы Паскаль высказал. Она состоит в том, что теорема сначала доказывается для окружности с использованием ее метрических свойств, а затем вывод, имеющий уже неметрический характер, переносится на коническое сечение, так как последнее получается из окружности с помощью центрального проектирования.

Паскаль разослал "Эссе" виднейшим математикам своего времени. Тем не менее теорема не стала широко известной, во-первых, из-за малого тиража издания, а во-вторых, потому, что бóльший интерес у математиков вызвала нарождающаяся аналитическая геометрия Декарта–Ферма, а отнюдь не проективная геометрия. На сочинение юного математика обратил внимание только основоположник проективной геометрии Дезарг*, по достоинству его оценивший: но открытия самого Дезарга также не были понятны современникам и вскоре были забыты. Расцвет проективной геометрии, как уже отмечалось, произошел в XIX в., когда творили Понселе, Штейнер, Штаудт, Шаль и др. Но XVIII век тоже внес свою лепту в развитие проективной геометрии – благодаря главным образом работам британцев: Маклорена, Р. Симсона, В. Брейкенриджа (1700–1769), Э. Варинга (1734–1798).

На основе "теоремы Паскаля" коническое сечение может быть построено только линейкой, по заданным пяти точкам общего положения. Задание коники пятью точками – один из самых ярких фактов геометрии**. Ньютон, как уже отмечалось, выполнил построение конического сечения, используя при этом метрическое свойства фигур. Позже Маклорен и Брейкенридж выполнили одно из первых неметрических построений коники, опираясь на "теорему Паскаля", полученную каждым из них независимо от Паскаля.

Мы уже отмечали, что в геометрии XVII–XVIII вв. оставались сильными позиции древнегреческой математики. Трактовка, обобщение и развитие идей и методов Евклида, Аполлония, Паппа, Архимеда продолжали занимать умы. Истоки новых идей часто находили в работах греков. Так, в "Конических сочинениях" Аполлония уже существовал аналог уравнения кривой второго порядка в виде соотношения между отрезками на осях специальной системы координат (состоящей из оси симметрии кривой и перпендикулярной ей прямой, проходящей через вершину кривой). Такие соотношения греки называли "симптомами".

Одно из сочинений Евклида – "О поризмах" – дошло до нас в изложении Паппа, весьма неясном. Были предприняты попытки реконструировать эту работу. Попытку истолкования поризм предпринял учитель и друг Маклорена, профессор математики в Глазго Роберт Симсон. Поризм представляет собой своеобразное предложение на

---

* Он считал, что из "Эссе" Паскаля вытекают четыре книги "Конических сечений" Аполлония.

** П.С. Александров говорил, что в детстве на него неизгладимое впечатление произвел тот факт, что окружность можно задать пятью точками, после чего ее можно строить по точкам с помощью одной только линейки.

стыке теоремы и задачи*. Работу о поризмах Симсон опубликовал в "Philosophical Transactions" в 1723 г., однако в свои изыскания он посвятил Маклорена еще раньше в письмах. Маклорен писал в одном из писем, что он пришел к построению коники по пяти точкам благодаря Симсону «давшему мне намек об остроумной статье, опубликованной затем в "Ph. Tr."» [82, С. 138].

Симсон издал "Начала" Евклида, выпустил книги "О конических сечениях", "О плоских местах у Аполлония", опубликовал статьи о приближенном вычислении корней, о логарифмах и др. Его рукописи и публикации были выполнены исключительно в чисто геометрическом стиле, в манере древних. В целом работа Симсона по изданию, комментарию и пропаганде сочинений древних геометров была настолько внушительной, что его влияние в математическом просвещении оставалось заметным в Великобритании вплоть до XX в.

"Теорема Паскаля" и другие проективные теоремы у Маклорена

В статье "Приложение к трактату относительно описания кривых линий", отправленной в Королевское общество в декабре 1732 г., а опубликованной спустя три года, Маклорен сообщает историю своих исследований по "теореме Паскаля". Как упоминалось выше, она не была известна широкому кругу математиков, по-видимому, вплоть до 1779 г., когда было издано собрание сочинений Паскаля, включающее "Эссе о конических сечениях".

В статье Маклорена говорится, что этой проблематикой он занимается с 1719 г. Итог этих занятий он намеревался опубликовать в качестве Приложения к "Органической геометрии". В 1721 г. было напечатано четыре листа Приложения. Однако в 1722 г. материал пополнился двумя рукописями, относящимися к июлю и ноябрю и написанными во время путешествия по Франции. В них приведено построение конического сечения по пяти точкам, "теорема Паскаля" и рассмотрено построение кривых высших порядков с помощью движущихся прямых. Полный отчет о Приложении, которое так и не вышло отдельно, Маклорен дает в рассматриваемой статье 1735 г. Она вышла в разгар спора Маклорена с Брейкенриджем по вопросу о приоритете в неметрическом построении коники. О нем будет сказано дальше, а сейчас мы рассмотрим результаты Маклорена, относящиеся к 1722 г.

Один из них таков (рис. 27). Вокруг трех фиксированных точек C, S, D ("полюсов", как пишет Маклорен) вращаются соответственно три прямые CR, SQ, QDR так, что точка R, находящаяся на пересечении прямых CR и QR, движется по фиксированной прямой AE, а точка Q,

* Смысл этих своеобразных предложений Евклида весьма трудно разгадать. Ими занимались многие математики, начиная с Паппа и Прокла и кончая П. Ферма, Д. Валлисом, Д. Плейфером, а в XIX в. – Г. Вронским. По мнению М. Шаля, поризмы Евклида представляют собой начала теории преобразования фигур [37. Т. II. С. 5–20].

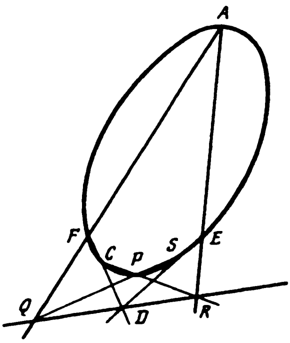


Рис. 27

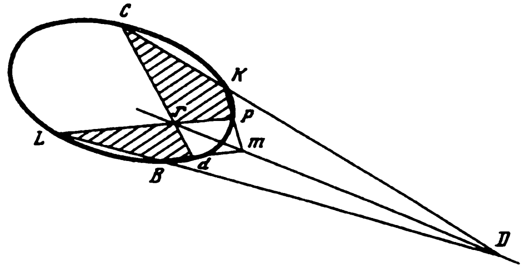


Рис. 28

находящаяся на пересечении прямых SQ и QR, движется по фиксированной прямой AF. Тогда точка P, находящаяся на пересечении прямых CR и SQ, описывает коническое сечение. Отсюда вытекает способ построения этой кривой по пяти заданным точкам A, F, E, C, S – заключает Маклорен, не приводя какого-либо доказательства в данной статье, но утверждая, что он располагает "геометрическим" доказательством. Он сообщает далее теорему на случай, когда точки Q и R описывают кривые измерений m и n соответственно, и утверждает, что точка P описывает кривую порядка $2mn$. Имеется обобщение и на случай большего числа точек, движущихся по кривым различных порядков. Эта теорема Маклорена о коническом сечении является обратной по отношению к "теореме Паскаля". Собственно "теорему Паскаля" он также высказывает в упомянутой публикации (материал относится к ноябрю 1722 г.) в следующей форме.

Если точки C, K, P, L, B, d принадлежат коническому сечению, то точки

$D = CK \cap LB,\ m = KP \cap Bd,\ r = PL \cap Cd$ коллинеарны (рис. 28).

Вписанный шестиугольник $CKPLBd$, как видим на рисунке, является самопересекающимся. К "теореме Паскаля" Маклорен вернулся в "Трактате о флюксиях", где привел два доказательства теоремы. В первом используются метрические свойства коник. А вот второй подход интереснее. Теорема сначала доказывается для круга, а затем переносится на произвольную конику. Таким образом, здесь реализована идея доказательства самого Паскаля. Теорема, стало быть, переоткрыта спустя почти век и доказана по замыслу автора, конечно, не известному Маклорену.

Здесь мы снова сталкиваемся с ситуацией, многократно имевшей место в истории математики: когда идея "созревает" в науке, она либо почти одновременно, но независимо открывается несколькими учеными, либо, не будучи широко известной после открытия, переоткрывается затем заново, как это имело место с "теоремой Паскаля" у Маклорена. Одновременно с Маклореном проблемой построения конического се-

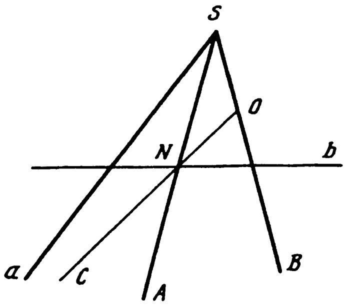


Рис. 29

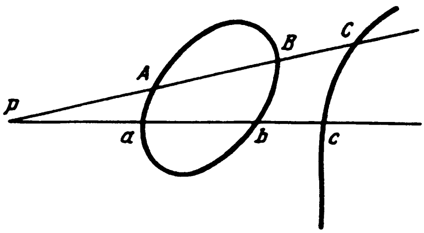


Рис. 30

чения одной линейкой занимался его соотечественник, член Королевского общества Вильям Брейкенридж (1700–1769). Письма Маклорена по этому вопросу показывают, насколько он был удручен и взволнован этой полемикой.

Статья Маклорена "Приложение к трактату относительно описания кривых линий", как уже упоминалось, была направлена в Королевское общество в декабре 1732 г., а напечатана спустя три года. В переписке Маклорена имеется письмо к секретарю Королевского общества Дж. Мэчину от 15 ноября 1732 г., т.е. до отправки упомянутой статьи. В ней Маклорен заявляет, что ему стало известно о статье Брейкенриджа по тематике, весьма близкой к его собственным изысканиям. Рукопись Брейкенриджа находится в Королевском обществе и готовится к публикации. В связи с этим Маклорен сообщает Дж. Мэчину о существовании уже упомянутого нами приложения к "Органической геометрии", о рукописях 1722 г. Маклорен общался с Брейкенриджем, начиная с 1727 г., они обменивались результатами. И вот теперь Брейкенридж намерен их опубликовать. Помимо Брейкенриджа, Маклорен делился этими результатами и с другими людьми, в частности, со студентами университета, которым он читал лекции. Таким образом, сотни людей были посвящены в эти вопросы, добавляет Маклорен.

Вслед за письмом к Мэчину Маклорен отправляет, наконец, упомянутую статью, которая выходит с задержкой в три года, в N 439 "Philosophical Transactions". Тем временем Брейкенридж публикует сначала в 1733 г. работу [42] по упомянутой проблематике, а затем выходит статья в "Ph. Tr." за 1735 г., N 435 под названием "Об общем методе описания кривых при помощи пересечения прямых линий, движущихся вокруг точек в данной плоскости". Здесь он излагает свой главный результат – о построении кривой второго порядка методом подвижного треугольника. Если стороны (рис. 29) треугольника *SNO* проходят через заданные точки *A*, *B*, *C* и две вершины *N* и *S* движутся по двум фиксированным прямым (*a* и *b*), то третья вершина *O* описывает конику. Теорема дана без доказательства.

В статье содержатся также инсинуации против Маклорена с намеком о плагиате. Маклорен был оскорблен и в письмах к президенту Королевского общества Мартину Фолксу, меценату графу Мортону, своему учителю Роберту Симсону высказал свою обиду и объяснялся по поводу этой неприятной истории; между прочим, в свое время он давал рекомендацию Брейкенриджу для преподавания, которую тот не мог получить от других лиц.

Если обратиться к математической стороне спора, то в конкретном вопросе построения кривой второго порядка одной линейкой результаты обоих математиков действительно совпадают. В конструкции Маклорена также можно выделить подвижный треугольник, стороны которого проходят через три фиксированные точки, а две вершины перемещаются по фиксированным двум прямым: тогда третья вершина описывает коническое сечение. Но в целом исследования Маклорена, как мы увидим, несравненно богаче результатами, чем у Брейкенриджа. Тем не менее история воздала должное обоим математикам. Лежащая в основе предложенного им способа построения коники теорема называется ныне теоремой Маклорена–Брейкенриджа. Известный современный геометр Коксетер отметил, что Брейкенридж "разделил с Маклореном честь открытия первого неметрического построения конического сечения" [23. С. 112].

К проблематике, связанной с теоремой Паскаля, Маклорен пришел и другим путем. Этот подход связан с так называемыми гармоническими свойствами алгебраических кривых. Богатейший геометрический материал был опубликован всего на 65 страницах посмертно изданного в качестве приложения к "Алгебре" "Трактата об общих свойствах геометрических фигур". В центре сочинения находится фундаментальная теорема, к которой Маклорен пришел, отправляясь от двух важных предложений Ньютона и Р. Коутса. Теорема Ньютона из трактата "Перечисление кривых третьего порядка" такова: Если через точку P проходят две секущие, пересекающие кривую в двух тройках точек A, B, C и a, b, c, то отношение

$$\frac{PA \cdot PB \cdot PC}{Pa \cdot Pb \cdot Pc} = K \qquad (*)$$

постоянно при сохранении направления секущих и не зависит от положения точки P (рис. 30).

Ньютон дал теорему без доказательства, но заметил, что она справедлива для кривой любого порядка.

Второй результат – теорема Роджера Коутса (1682–1716), талантливейшего ученика Ньютона, к тому времени покойного, стала известна Маклорену следующим образом. Ее обнаружил в 1722 г. в архивах Коутса друг и кузен Маклорена Роберт Смит, магистр Тринити-колледжа в Кембридже, сообщивший затем теорему Маклорену.

Содержание теоремы Коутса таково. Если через точку P проведена прямая линия, пересекающая кривую n-го порядка в n точках $A, B, C, \ldots$, а точка m взята на прямой так, что $n/Pm = 1/PA + 1/PB +$

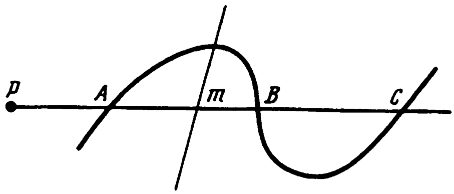


Рис. 31

+ $1/PC$, то множество точек m образует прямую линию, когда прямая Pm вращается вокруг точки P [54] (рис. 31). Иными словами, если отрезок Pm является средним гармоническим n отрезков PA, PB, PC,..., то точка m образует прямую линию, когда прямая Pm вращается вокруг точки P. Имеет место и частный случай теоремы, когда прямая линия, проходящая через фиксированную точку P, пересекает три прямые в точках D, E, F и PM есть средняя гармоническая PD, PE, PF. Тогда множество точек M образует прямую линию, когда прямая PM вращается вокруг точки P.

Теорема Коутса также была приведена без доказательств.

Обратимся к теореме Маклорена, навеянной этими результатами Ньютона и Коутса и напечатанной в упомянутом приложении к "Алгебре".

Если через точку P (рис. 32) проведены две секущие к алгебраической кривой, пересекающие ее в двух рядах точек A, B, C,..., a, b, c,..., число которых равно порядку кривой; и если в этих точках проведены касательные, пересекающие произвольную прямую PD, проходящую через P, в двух рядах точек K, L, M,..., k, l, m,..., то справедлво равенство:

$$1/PK + 1/PL + 1/PM + \ldots = 1/Pk + 1/Pl + 1/Pm + \ldots \qquad (1)$$

Если D, Z, E,... – точки пересечения прямой PD с кривой, то

$$1/PK + 1/PL + 1/PM + \ldots = 1/PD + 1/PZ + 1/PE + \ldots$$

Маклорен затем добавляет, что по обе стороны знака равенства в формуле (1) дроби берутся с одним знаком, если точки K, L, M,... лежат по одну сторону от точки P. Если они лежат по разные стороны, то знаки дробей разные.

Что касается доказательства, то Маклорен лишь намечает его, указывая, что оно опирается на равенство Ньютона (*) и его последующее логарифмическое дифференцирование.

Выполним полное доказательство этой важной теоремы. Прологарифмовав найденное Ньютоном равенство

$$\frac{PA \cdot PB \cdot PC}{Pa \cdot Pb \cdot Pc} = K,$$

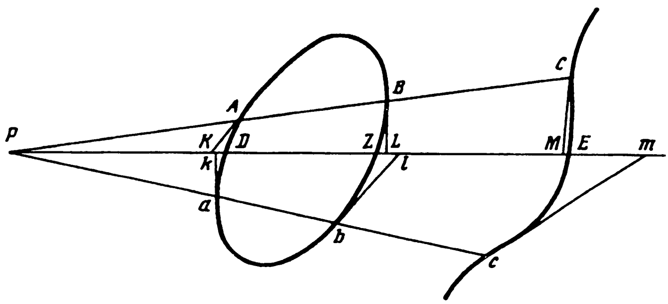


Рис. 32

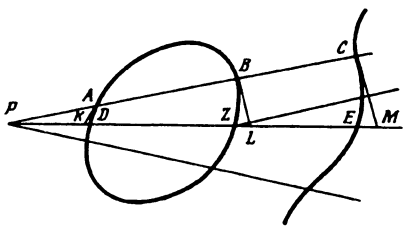


Рис. 33

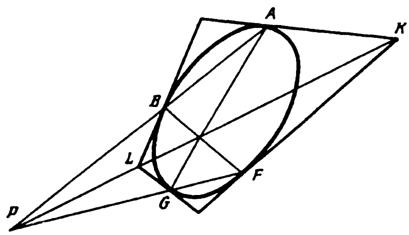


Рис. 34

или $PA \times PB \times PC = k \times Pa \times Pb \times Pc$ и, взяв затем от обеих сторон флюксию*, получаем

$$\dot{PA}/PA + \dot{PB}/PB + \dot{PC}/PC = \dot{Pa}/Pa + \dot{Pb}/Pb + \dot{Pc}/Pc. \qquad (2)$$

Точки A, B, C относим к косоугольной системе координат с центром в точке Z, осью абсцисс ZM и осью ординат, проходящей через Z параллельно PA (рис. 33).

Тогда координаты точки A таковы: $x = PZ$, $y = PA$. PK – подкасательная точки A. Координаты точки A и ее подкасательная удовлетворяют известному соотношению $\dot{y}/\dot{x} = y/PK$ (3), т.е. отношение флюксии ординаты к флюксии абсциссы равно отношению ординаты к подкасательной (в терминах производной: $y' = y/PK$. Это равенство совпадает с равенством (3), если принять $x' = 1$). Равенство (3) переписываем так: $\dot{PA}/\dot{PZ} = PA/PK$, откуда следует $\dot{PA}/PA = \dot{PZ}/PK$ (4) (здесь $\dot{PZ} = \dot{x}$ есть постоянная скорость точки P). Аналогично для точки a имеет место соотношение $\dot{Pa}/Pa = \dot{PZ}/Pk$ (5). Выполнив в

* Когда точка P перемещается, отрезки, содержащиеся в равенстве, меняются во времени, поэтому от них можно взять производную – флюксию. Производная постоянной K при этом равна нулю.

равенстве (2) замену в соответствии с равенствами (4) и (5), получим равенство

$$\dot{P}Z/PK+\dot{P}Z/PL+\dot{P}Z/PM=\dot{P}Z/Pk+\dot{P}Z/Pl+\dot{P}Z/Pm$$

или

$$1/PK+1/PL+1/PM=1/Pk+1/Pl+1/Pm. \qquad (6)$$

В частности, если вращающаяся вокруг точки P секущая PA совпадает с неподвижной прямой PD, то точки A, K, D сливаются в одну, и получается равенство

$$1/PK+1/PL+1/PM=1/PD+1/PZ+1/PE. \qquad (7)$$

Теорема повлекла за собой множество следствий, составивших содержание "Трактата об общих свойствах геометрических фигур", среди которых имеется доказательство вышеприведенной теоремы Коутса.

Одно из следствий представляет собой важную теорему о конических сечениях следующего содержания.

Если две секущие AB и GF кривой второго порядка (рис. 34) пересекаются в точке P, касательные к ней в точках A и F, B и G попарно пересекаются соответственно в точках K и L, то точки P, K, L принадлежат одной прямой.

Затем Маклорен добавляет, что на прямой PK находится и точка пересечения хорд AG и BF. Стало быть, мы имеем здесь частный случай "теоремы Паскаля" для четырехугольника $AGFB$. Роль двух недостающих сторон играют касательные AK и FK. Кстати, учитель Маклорена Р. Симсон первым стал рассматривать касательную в вершине пятиугольника, вписанного в конику, как шестую сторону. У Маклорена мы имеем развитие этой идеи. В приведенном утверждении содержится и теорема Брианшона для четырехугольника $MKNL$, описанного около кривой второго порядка, согласно которой в одной точке пересекаются диагонали этого четырехугольника и отрезки AG и BF, соединяющие точки прикосновения противоположных сторон.

На основе вышеизложенного Маклорен с помощью одной линейки решает следующие задачи на построение:

1) касательных к кривой второго порядка, заданной пятью точками;

2) точек прикосновения прямых пучка второго порядка, заданного пятью прямыми;

3) точки прикосновения одной стороны описанного около кривой второго порядка треугольника, если заданы точки прикосновения двух других (в этой задаче применяется "теорема Брианшона" для треугольника, которая также легко выводится из центральной маклореновой теоремы) (рис. 35);

4) точек конического сечения, вписанного в данный четырехугольник и проходящего через данную точку.

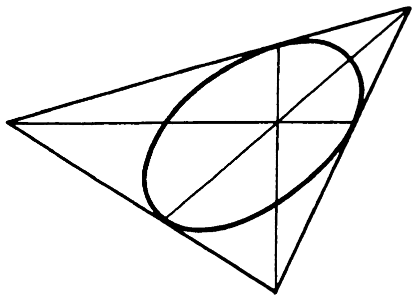


Рис. 35

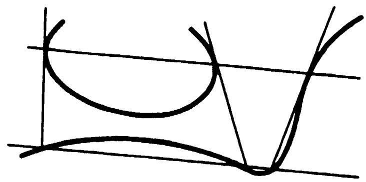


Рис. 36

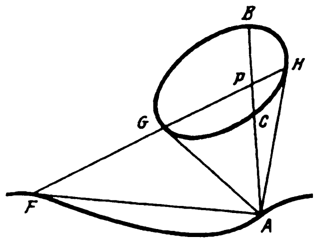


Рис. 37

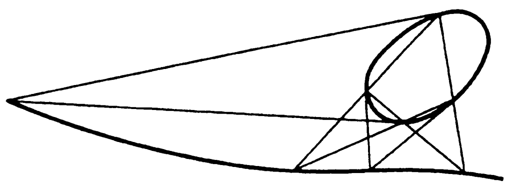


Рис. 38

В этих и других задачах Маклорен, помимо "теорем Паскаля и Брианшона", использует свойство поляры данной точки как геометрического места точек, образующих гармоническую четверку с данной точкой и точками пересечения с кривой всевозможных прямых, проходящих через данную точку. Термин "поляра", введенный в начале XIX в., он не употребляет.

Заметим, что если теорема Паскаля была высказана в 1639 г., то теорема Брианшона о шестиугольнике, описанном около кривой второго порядка, была опубликована в 1804 г. Маклорен ее частные случаи рассмотрел и применил в задачах, как видим, значительно раньше.

Теория конических сечений в "Трактате об общих свойствах геометрических линий" содержит, таким образом, ряд ярких фактов проективной геометрии. Впрочем, проективная геометрия Маклорена не строится на выявлении свойств фигур, инвариантных при проектировании – эта последняя идея была руководящей у Дезарга и Паскаля и получила дальнейшее развитие в XIX в. Это скорее проективно-дифференциальная геометрия – в том смысле, что в ее построении участвует теория флюксий. Однако Маклорен в ряде задач, как мы увидели, избегает метрического элемента в построениях, пользуется только линейкой. Изгнание метрики из проективной геометрии стало предметом заботы геометров следующего поколения, и его вполне завершил только Штаудт (1798–1867).

Значительные результаты в рассматриваемом сочинении относятся к теории кривых третьего порядка.

Одно из свойств кривой третьего порядка, легко выводимое из центральной теоремы, состоит в том, что касательные в трех точках кривой, принадлежащих одной прямой, пересекаются с кривой в трех точках, также принадлежащих одной прямой (рис. 36).

Еще одно, гармоническое свойство кубики звучит так. Если A – точка перегиба кубики (рис. 37), и из нее проведены к кривой три касательные с точками прикосновения H, G, F, то точки H, G, F – коллинеарны, и любая прямая, проходящая через A, пересекает кривую в точках B и C и прямую HG – в точке P, так что A, P, B, C – гармоническая четверка, т.е. $(APBC) = -1$.

Таким образом, прямая GH есть геометрическое место таких точек P, что отрезок AP является средним гармоническим между отрезками AB и AC, где B и C – точки пересечения с кривой любой прямой, проходящей через A.

Заметим, что если $(APBC) = -1$, то $2/AP = 1/AC + 1/AB$, т.е. AP является средним гармоническим между AC и AB.

Нельзя не упомянуть еще об одном важном результате Маклорена: три точки перегиба кубической кривой принадлежат одной прямой.

И, наконец, венчает теорию кубик следующее обобщение "теоремы Паскаля". Если четыре вершины и две точки пересечения противоположных сторон четырехугольника принадлежат кривой третьего порядка, то касательные, проведенные в противоположных вершинах, пересекаются на той же кривой (рис. 38).

Маклорен замечает, что теорема о четырехугольнике, вписанном в коническое сечение, является частным случаем этой теоремы. Так оно и есть, если рассматривать прямую, на которой пересекаются противоположные стороны и касательные в противоположных вершинах этого четырехугольника, вместе с коническим сечением как кривую третьего порядка.

В заключении анализа "Трактата об общих свойствах геометрических фигур" заметим, что в нем Маклорен мало использовал координатный метод Декарта, рассуждения его в основном геометрические с применением метода флюксий.

Результаты Маклорена в этой области были высоко оценены виднейшими геометрами. Один из создателей проективной геометрии Понселе писал: "Знаменитый Маклорен... снова нашел, не имея, без сомнения, сведений о сочинениях Дезарга и Паскаля, важные теоремы, которые возникают именно вследствие свойств "мистического шестиугольника"; он открыл, сверх того, много других теорем подобного рода, относящихся как к коническим сечениям, так и к кривым высокого порядка и указал способы точечного описания этих разных кривых" [89. С. 42].

Органическое описание кривых

Оно изложено в первой книге Маклорена – "Органической геометрии". Но предварительно ознакомимся с письмом Маклорена от 6 июля 1720 г., где он кратко излагает суть своих изысканий по этому вопросу, отмечая, что толчок исследованию дал способ описания кривых второго и третьего порядков в "Началах" и "Перечислении кривых третьего порядка" Ньютона. Ньютон доказал (в "Началах"), что если два постоянных угла FCO и KSH вращаются вокруг своих вершин C и S, и две стороны SK и CF пересекаются на прямой AE, то другие две стороны SH и CO, пересекаясь, описывают коническое сечение (рис. 39). В "Перечислении кривых третьего порядка" Ньютон прямую AE заменил коническим сечением: тогда стороны CO и SH, пересекаясь, образуют кривую третьего или четвертого порядка в зависимости от вида конического сечения. Маклорен поставил задачу – построить кубическую кривую без конического сечения и, как сказано в упомянутом письме, тем самым "открыл универсальный метод описания линий всех порядков с помощью прямых линий и углов, движущихся по ним, без помощи любых кривых" [82. С. 117].

Кривую третьего порядка Маклорен строит в Предложении I, используя метод Ньютона, но вместо угла KSH, вращающегося вокруг S (рис. 40) берет угол QNL, вершина которого перемещается по прямой AE, а сторона NQ проходит через данную точку S. В теореме установлено, что если точка пересечения сторон CF и SH описывает прямую линию BQ, то точка пересечения сторон CO и NL порождает кривую третьего порядка с двойной точкой C.

В Предложении II вместо FCO берется угол CRQ (рис. 41), вершина которого движется по прямой DR, тогда как сторона CR проходит через фиксированную точку C. Если точка пересечения Q прямых RQ и NL будет двигаться вдоль фиксированной прямой BQ, то точка пересечения P двух других сторон подвижных углов CR и SN будет описывать линию четвертого порядка с двумя двойными точками. В некоторых случаях, добавляет Маклорен, это построение дает кривую третьего порядка.

Таким образом, увеличивая число линий и углов и варьируя этот метод, можно получить всевозможные алгебраические линии.

Маклорен сообщает формулу для нахождения порядка полученной кривой (не указывая способа получения формулы). Если m и n – число прямых*, вдоль которых движутся вершины постоянных углов, расположенных соответственно справа и слева от точки P, s – число звеньев ломаной, соединяющей точку C с точкой P и проходящей через вершины углов, то степень кривой равна $sm + s + n + 1$.

Например. Пусть даны три фиксированные прямые BN, ER, FT и

---

* Маклорен эти прямые, по которым перемещаются вершины углов постоянной величины, называет "гидами".

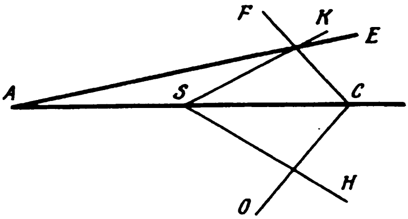


Рис. 39

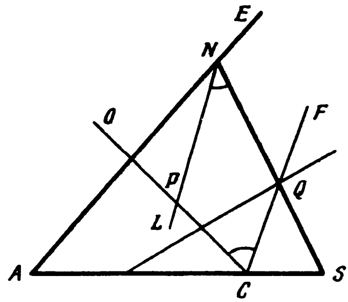


Рис. 40

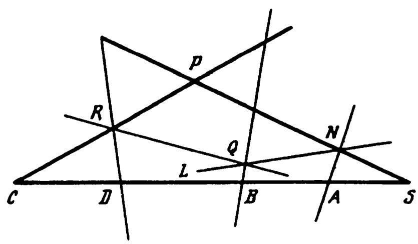


Рис. 41

три фиксированные прямые *DM, GL, HK*. Вдоль этих прямых двигаются вершины постоянных углов *CNR, NRT, RTQ, SML, MLK, LKQ*. Пусть стороны *TQ* и *KQ* описывают прямую линию *AQ*. Ломаная *CNRP* имеет 3 звена. Тогда, подставив в формулу значения $s = m = n = 3$, получим порядок кривой, равный 16 (рис. 42).

Первая публикация Маклорена по этой проблематике относится к 1719 г., когда в "Philosophical Transactions" вышла статья "Новый метод описания кривых всех видов". В этом же году состоялось знакомство с Ньютоном, и Маклорен посвятил его в свои занятия. Полное описание метода Маклорен сделал в "Органической геометрии", которая была готова к печати уже в ноябре 1719 г., а вышла в свет в следующем году.

Обратимся к "Органической геометрии", где изложение строится с помощью декартовых координат. Книга форматом in folio содержит 139 страниц текста и 12 листов с чертежами. В ней развернуто изложены те идеи, которые Маклорен опубликовал в статье 1719 г. и описал их кратко в упомянутом письме. "Органическая геометрия" состоит из двух частей. Первая часть, озаглавленная "Универсальный метод описания линий любого порядка с помощью данных постоянных углов и прямых", имеет четыре раздела и 27 предложений.

В первом разделе дается описание конического сечения так, как это делает Ньютон. В отличие от Ньютона, давшего в "Началах"

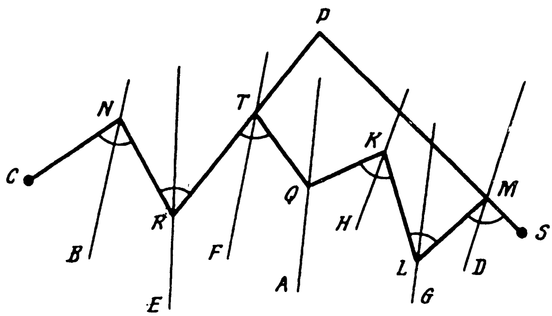


Рис. 42

синтетическое доказательство, у Маклорена оно – аналитическое. Впрочем, и вся книга представляет собой прекрасный образец аналитической геометрии. У Маклорена отличное аналитическое "чутье", он наилучшим образом выбирает систему координат, чтобы аналитический результат – например, уравнение кривой, – имел наиболее удобный вид. В первом разделе Маклорен выясняет способы органического описания эллипса, гиперболы и параболы, а также рассматривает случаи их вырождения в прямую линию.

Во втором разделе первой части (Предложение V) приведено органическое описание кубической кривой с двойной точкой в "полюсе" C. Далее рассмотрены случаи, когда кубика имеет точку возврата, либо не имеет вовсе особых точек. Строятся касательные и асимптоты к кубикам. Путем органического описания Маклорен получает несколько видов кривых из ньютоновского "Перечисления кривых третьего порядка".

Заметим, что сам Ньютон высказал идею, что все его 72 вида кривых третьего порядка могут быть получены путем центрального проектирования пяти видов кривых (расходящихся парабол). Потом это утверждение доказал А. Клеро.

В разделе III речь идет об органическом описании кривой четвертого порядка, вкючая случаи ее вырождения и, наконец, в IV разделе приведена упомянутая выше общая теорема о степени кривой, полученной движением вершин постоянных углов по заданным прямым.

Первую часть Маклорен завершает схолией (поучением), где подчеркивает, что для построения кривых он применил только прямые линии и постоянные углы. Этим способом нельзя получить кривую любой степени, поэтому дальнейшее усовершенствование метода состоит в том, чтобы использовать кривые линии. Эта последняя идея развивается во второй части, имеющей пять разделов и 27 теорем. В первых двух разделах линии более высоких порядков описываются с помощью линий более низких порядков. Так, если одна пара сторон вращающихся углов описывает коническое сечение, проходящее через один из полюсов, то вторая пара образует кривую третьего порядка с двойной

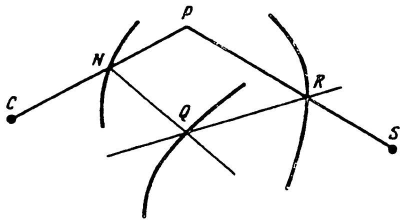


Рис. 43

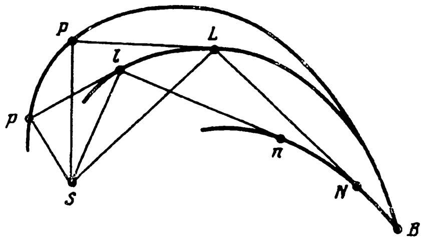


Рис. 44

точкой. Если в предыдущем случае коническое сечение не проходит через полюсы, порождаемая кривая имеет четвертую степень, которая при некотором частном расположении данных фигур может снова выродиться в кубическую кривую. И вообще – с помощью линии порядка n можно получить линию порядка $2n$.

Маклорен пошел еще дальше в обобщении этого способа. Так, если два постоянных угла CNQ и QRS (рис. 43) движутся так, что их вершины N и R перемещаются по кривым порядка m и n, а стороны CN и RS проходят через фиксированные точки C и S соответственно, и точка Q на пересечении сторон NQ и RQ пробегает линию порядка r, то точка P пересечения сторон CN и SR описывает кривую порядка $4mnr$. Увеличивая число движущихся углов, Маклорен получает кривые, порядок которых зависит от числа углов и порядка линий, по которым движутся их вершины.

Особый раздел посвящен теории подзр, или подошвенных кривых. Об этом Маклорен написал еще в самой первой своей статье "Построение и измерение кривых", изданной в "Philosophical Transactions" в 1718 г. Подзрой (Маклорен не употребляет этого термина) называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки (полюса) на касательные к данной кривой. На рис. 44 BLl – данная кривая, S – полюс, BPp – ее подзра; здесь LP, lp – касательные к данной кривой в точках L и l соответственно, и $SP \perp LP$, $Sp \perp lp$. С помощью метода флюксий Маклорен из уравнения данной кривой получает уравнение (флюксиональное, т.е. дифференциальное) ее подзры относительно данной точки, затем находит подзру подзры и таким образом получает цепь кривых, связанных между собой. Например, подзрой конического сечения относительно фокуса является окружность для центральной кривой и прямая для параболы. Подзрами являются кардиоида, улитка Паскаля, всевозможные рулетты (циклоиды), лемниската и другие кривые. Ряд подзр может быть продолжен и в противоположном направлении, так что получаются как бы отрицательные подзры, или антиподзры. На рис. 44 первая отрицательная подзра кривой BLl – кривая BNn. Маклорен рассмотрел спрямление кривых с помощью их положительных и отрицательных подзр, нашел радиусы кривизны этих кривых и вообще получил элементы дифференциальной геометрии подзр.

Geometria Organica:

SIVE

DESCRIPTIO

LINEARUM CURVARUM

UNIVERSALIS.

AUCTORE

COLINO MAC LAURIN, *Matheseos in Collegio Novo* Abredonensi *Professore, & Reg. Soc. Soc.*

LONDINI:

Impensis GUL. & JOH. INNYS, Regiæ Societatis Typographorum in Areâ Occidentali D. Pauli. MDCCXX.

Титульный лист книги Маклорена
"Органическая геометрия"

В небольшом четвертом разделе рассмотрены приложения теорем о кривых к механике, а вот последний, пятый раздел, представляет большой интерес. В третьей лемме Маклорен показывает с помощью алгебраических рассуждений, что линия n-го порядка пересекает линию второго порядка не более чем в $2n$ точках, а линию третьего порядка – не более чем в $3n$ точках. Отсюда вытекает первое следствие, что две алгебраические кривые m-го и n-го порядков пересекаются не более чем в $m \times n$ точках. Это – известная теорема Маклорена. Правда, теорема имелась и в черновиках Ньютона, относящихся к 1667 г., но опубликованы они были лишь недавно. Во втором следствии Маклорен столкнулся с так называемым парадоксом Крамера, который вовсе не принадлежит Г. Крамеру как первооткрывателю, ибо последний прямо указал на источник своих рассуждений – "Органическую геометрию". Суть парадокса состоит в следующем. Как следует из теоремы Маклорена, две линии n-го порядка пересекаются в n^2 точках. С другой стороны, Маклорен устанавливает, рассматривая число коэффициентов уравнения алгебраической кривой n-го порядка, что такая кривая однозначно задается числом точек, равным $1/2(n^2 + 3n)$*. При $n > 3$ имеет место неравенство $n^2 > 1/2(n^2 + 3n)$. Таким образом, кривая n-го порядка однозначно определяется некоторым числом точек, а с другой стороны, две различные кривые n-го порядка имеют бóльшее число общих точек. Крамер этот парадокс обсуждал в переписке с Эйлером (начиная с письма Крамера от 30 сентября 1744 г., в котором был сообщен этот парадокс), а полную теорию этого вопроса разработал Ю. Плюкер (1828).

И, наконец, в четвертом следствии Маклорен на основе теоремы о точках пересечения двух алгебраических кривых приходит к выводу, что число двойных точек линии n-го порядка не превосходит $(n^2 - 3n + 2)/2$.

В "Органической геометрии" Маклорена можно обнаружить многие идеи алгебраической геометрии, теории кремоновых преобразований и других более поздних теорий. Вместе с тем, некоторые его результаты остались незамеченными. Известный шотландский математик Ч. Твиди, тщательно проанализировавший книгу, отметил, что хотя известные геометры XIX–XX вв. Лориа, Вилейтнер, Тейшейра воздают отчасти должное Маклорену в теории кривых, но многое и пропускают. Так, полная теория подзр у Маклорена и, в частности, теория подзр конических сечений, была спустя век переоткрыта вновь, а Маклорен как первооткрыватель был фактически забыт. В своей работе [101] Твиди показывает на ряде примеров, как результаты "Органической геометрии" перекликаются с исследованиями по алгебраическим кривым более поздних геометров и предвосхищают их.

Завершим обзор геометрических исследований Маклорена упоминанием о кривой, получившей название трисектрисы Маклорена. Трисектрисами называют кривые, с помощью которых можно разделить на

* Этот результат получил также Стирлинг в 1717 г.

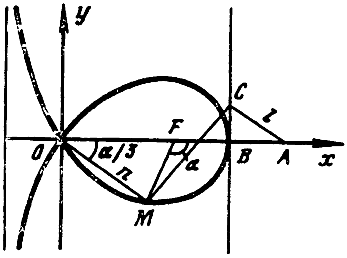


Рис. 45

три равные части произвольный угол. Задача трисекции угла – одна из замечательных задач древнегреческой геометрии, не разрешимых с помощью циркуля и линейки. Было придумано несколько трисектрис, начиная с древнейшей, которую потом Лейбниц назвал квадратрисой.

Наиболее простой из них является трисектриса Маклорена. Она описана как в "Органической геометрии", так и в "Трактате о флюксиях"; свое теперешнее название кривая получила, по-видимому, в XIX в.

Несколько видоизменив изложение Маклорена, построим эту кривую. Проведем прямую m с уравнением $x = 3a$ и возьмем точку A $(4a, 0)$ (рис. 45).

Через точки A и O проведем две параллельные прямые l и n. Пусть l пересекается с m в точке C. Через C проведем перпендикуляр к l, который пересечет прямую n в точке M. Множество точек M образуют трисектрису Маклорена с уравнением $x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$.

Это кривая третьего порядка с узловой точкой O, в которой касательные образуют с осью абцисс углы в 60° и 120°. Кривая симметрична относительно оси абцисс и имеет асимптоту $x + a = 0$. Трисекция угла осуществляется на основе следующего свойства кривой: если $\angle BFM = \alpha$, то $\angle BOM = \alpha/3$. Точка B имеет координаты $(3a, 0)$, точка F – $(2a, 0)$.

Существуют несколько других способов построения этой кривой, которая привлекала внимание многих геометров, вплоть до начала XX в. О ней писали Д. Лориа, Г. Тейшейра, Р. Шоут и др.

Сам Маклорен ее получил на пересечении лучей OM и FM, вращающихся вокруг своих вершин O и F равномерно в одном направлении, но так, что угловая скорость первого луча в 3 раза меньше угловой скорости второго. Маклорен далее устанавливает геометрические свойства этой кривой, в частности, те, которые были изложены в приведенном выше построении. Он нашел площадь петли кривой и – с помощью предельного перехода – площадь, заключенную между бесконечными ветвями и асимптотой [69. С. 262].

Итак, открытия Маклорена по геометрии шли по двум направлениям. Первое – в области проективной геометрии – содержало "теорему Паскаля" и ее частные случаи, частные случаи "теоремы Брианшона", построение кривой второго порядка и пучка второго порядка с помощью одной линейки. "Теорема Паскаля" была обобщена для кубической кривой и получен ряд теорем для этих кривых об их гармонических свойствах. Это направление принадлежит синтетической геометрии, но с небольшим применением флюксий. Второе направление, в котором исчерпывающим образом развита идея органического описания кривых, относится к алгебраической геометрии. Органическое описание задает механизм преобразования, которое является кремоновым. В работах Маклорена по органическому описанию рассеяны результаты, переоткрытые более поздними исследователями алгебраических кривых.

Сочинения Маклорена-геометра так же богаты содержанием, как и сочинения Маклорена-аналиста. Твиди даже считает, что "как бы ни была непоколебима его репутация в анализе, он был более велик как геометр, чем как аналист" [101]. Если это и преувеличение, то небольшое; во всяком случае, геометрические исследования Маклорена не менее значительны, чем исследования в математическом анализе.

Заключение

Биографическая литература о Маклорене весьма скудна. Имеется лишь одна краткая биография [67], написанная другом Маклорена Патриком Мэрдоком в приложении к "Отчету о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона". Краткая информация о научной, педагогической и общественной деятельности Маклорена содержится также в сочинениях, посвященных политической истории Шотландии, ее образованию и науке. В 1987 г. в Англии было издано собрание писем Маклорена, которое проливает новый свет на отдельные малоизвестные стороны жизни и деятельности шотландского ученого и которое мы неоднократно цитировали.

В обзорных сочинениях по истории математики Маклорену уделено достаточно внимания, его роль в различных ветвях математики оценена по достоинству высоко. Здесь мы встречаем, разумеется, и разложение в "ряд Маклорена", и "интегральный признак сходимости Маклорена–Коши", и "формулу суммирования рядов Маклорена–Эйлера", и "эллипсоиды равновесия Маклорена" и другие результаты, благодаря которым наш герой прочно вошел в историю науки. Однако немало из наследия Маклорена оказалось незамеченным. Например, нигде нет упоминания о 15 основных теоремах метода флюксий, излагающих в кинематической форме основные свойства диференцирования и интегрирования (в частности, дифференцирование функции от функции). Исследователи прошли мимо самой идеи Маклорена об аксиоматическом построении анализа, которую он реализовал в виде четырех аксиом, представляющих собой аналог теоремы о среднем интегрального исчисления (для монотонной непрерывной функции).

Нет нигде упоминания и о несобственных интегралах у Маклорена; обойден исследователями вопрос о его классификации экстремумов; не отмечены некоторые результаты в теории рядов и эллиптических интегралов; лишь отчасти исследован математический аппарат приложений метода флюксий. В предлагаемой книге эти результаты рассмотрены.

Существует мнение, что направление анализа, развиваемое Маклореном и другими британскими учеными вслед за Ньютоном и опирающиеся (в большой степени) на кинематику и геометрию древних, было обречено – в отличие от континентальной школы Лейбница, к которой принадлежали братья Бернулли и (позднее) Эйлер. Между тем, как мы видели, Маклорен шел " в ногу" с виднейшими континентальными математиками, включая Эйлера. Например, маклореново исследование эллиптических интегралов шло в русле направления, основанного Якобом Бернулли. Даламбер и Ланден развили результаты Маклорена, а Эйлер в известном смысле завершил это направление.

В алгебре Маклорен взял на себя скромную роль исследователя и комментатора Ньютона, однако, смог вплотную подойти к "правилу Крамера", опередив швейцарского математика в публикации (посмертной).

Органическое описание кривых, рассмотренное Ньютоном на двух примерах, Маклорен настолько развил, что результаты составили целую книгу. Гармонические и проективные свойства кривых он рассмотрел в ряде блестящих статей.

Среди приложений анализа самым ярким у Маклорена является исследование фигур равновесия, а именно эллипсоидов вращения. Маклорен ввел в научный обиход понятие "поверхность уровня" – одно из основных в теории потенциала.

Разросшийся до грандиозных размеров спор о приоритете между Ньютоном и Лейбницем, конечно, ослабил связи между двумя европейскими научными школами. Но никакой научной изоляции британских ученых, как это видно на примере Маклорена, не существовало. Маленькая Шотландия, только приобщавшаяся в начале XVIII в. к успехам европейской цивилизации, дала в лице Маклорена достойного участника прогресса естественных наук.

Основные даты жизни и деятельности Колина Маклорена

1698, февраль	– родился в Килмодане, графство Аргайл.
1709–1714	– учеба в университете г. Глазго.
1713	– получена степень магистра искусств.
1717–1724	– профессор математики в Маришаль-колледже, Абердин.
1719, ноябрь	– утверждена к печати Ньютоном "Органическая геометрия", опубликованная в следующем году.
1719	– становится членом Лондонского Королевского общества.
1724	– премия Французской Королевской академии за работу по теории удара.
1722–1724	– путешествие в Европу.
1725	– избрание профессором математики в Эдинбургском университете по рекомендации Ньютона.
1726	– начало работы над "Трактатом по алгебре", опубликованном посмертно в 1748 г.
1728	– начало работы над "Отчетом о философских исследованиях сэра Исаака Ньютона", опубликованном спустя двадцать лет.
1733	– женитьба на Анне Стюарт.
1734–1742	– работа над "Трактатом о флюксиях".
1737	– создание Философского общества Эдинбурга, в котором Маклорен становится ученым секретарем.
1740	– премия Французской Королевской академии за работу о приливах.
1745, сентябрь	– осада Эдинбурга армией принца Карла Эдуарда; участие Маклорена в обороне города.
1745, сентябрь – ноябрь	– бегство в Англию.
1746, 14 июня	– кончина Маклорена.

Литература

1. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.; Л., 1936.
2. *Бокль Г.Т.* История цивилизации в Англии. Т. I–II. СПб., 1906.
3. *Беркли Дж.* Аналитик, или рассуждение, адресованное неверующему математику… // Сочинения. М., 1978. С. 335–442.
4. *Башмакова И.Г.* Лекции по истории математики в Древней Греции // Ист.-мат. исслед. 1958. Вып. XI. С. 225–438.
5. *Башмакова И.Г.* Дифференциальные методы в работах Архимеда // Там же. 1956. Вып. VI. С. 609–658.
6. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики / Пер. И.Г. Башмаковой; Под ред. К.А. Рыбникова. М., 1963.
7. *Башмакова И.Г.* Об одном вопросе теории алгебраических уравнений в трудах И. Ньютона и Э. Варинга // Ист.-мат. исслед. М., 1958. Вып. XII. С. 431–456.
8. *Башмакова И.Г.* О доказательстве основной теоремы алгебры // Там же. 1957. Вып. X. С. 257–304.
9. *Башмакова И.Г.* О некоторых особенностях развития алгебры XVIII века // Там же. 1966. Вып. XVIII. С. 317–323.
10. *Вольф Хр.* Сокращение первых оснований математики, сочиненное в пользу учащегося юношества Хр. Вольфом. Т. 1. СПб., 1791. Первое немецкое издание вышло в 1713 г.
11. *Гурьев С.Е.* Краткое изложение различных способов изъяснить дифференциальное исчисление. СПб., 1813.
12. *Граве Д.* Энциклопедия математики. Киев, 1912.
13. *Граве Д.* Элементы высшей алгебры. Киев, 1914.
14. *Декарт Р.* Геометрия: С прил. избр. работ П. Ферма и переписки Декарта / Пер., примеч. и статья "Декарт и математика" А.П. Юшкевича. М.; Л., 1938.
15. *Даламбер Ж.Л.* О фигуре Земли // Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.; Л., 1947.
16. *Евклид.* Начала / Пер. и коммент. Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. Т. 1–3. М.; Л., 1948–1950.
17. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. / Под ред. А.П. Юшкевича. Т. II. Математика XVII столетия. М., 1970.
18. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. / Под ред. А.П. Юшкевича. Т. III. Математика XVIII столетия. М., 1972.
19. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии / Подготовлено к печати Р. Курантом и О. Нейгебауэром; Пер. с нем. Н.М. Нагорного; Под ред. М.М. Постникова. Т. 1. М., 1989.
20. *Кузнецов Б.Г.* Ньютон. М., 1982.
21. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М., 1987.
22. *Карно Л.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых / Пер. Н.М. Соловьева. М., 1933.
23. *Коксетер Г.С.М.* Действительная проективная плоскость. М., 1959.
24. *Клеро А.К.* Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатистики. М.; Л., 1947.
25. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел // Собр. соч. М., 1953. Т. 3.
26. *Лаплас П.* Изложение системы мира. Т. II. СПб., 1861.
27. *Локк Д.* Опыт о человеческом разуме. М., 1898.
28. *Молодший В.Н.* Основы учения о числе в XVIII веке. М., 1953.
29. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или книга об арифметических анализе и синтезе / Пер., статья и коммент. А.П. Юшкевича. М., 1948.

30. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. и коммент. А.Н. Крылова // Собр. соч. акад. А.Н. Крылова. М.; Л., 1936. Т. VII.
31. *Ньютон И.* Математические работы / Пер., ввод. статья и коммент. Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л., 1934.
32. *Петрова С.С.* О первом доказательстве основной теоремы алгебры // История и методология естественных наук. М., 1971. Вып. XI: Математика, механика. С. 123–127.
33. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга / Публ. Т.А. Красоткиной // Ист.-мат. исслед. М., 1957. Вып. X. С. 117–158.
34. *Смогоржевский А.С., Столова Е.С.* Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М., 1961.
35. *Сретенский Л.Н.* Ньютонова теория приливов и фигуры Земли // Исаак Ньютон. М.; Л., 1943.
36. *Сушкевич А.Н.* Основы высшей алгебры. М.; Л., 1931.
37. *Шаль М.* Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. Т. I/II. История геометрии. М., 1883.
38. *Узвелль В.* История индуктивных наук от древнейшего до настоящего времени: В 3 т.: Пер. с 3-го англ. изд. СПб., 1867–1869.
39. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Пер. статья и примеч. М.Я. Выгодского. М.; Л., 1949.
40. *Arnot H.* The history of Edinburgh. Edinburgh, 1788.
41. *Bernoulli J.* Ueber unendliche Reihen. Leipzig, 1909. (Oswalds Klassiker). Пер.: Propositionis arithmeticae de seriebus infinitis lorumquo summa finita, 1689–1704.
42. *Braikenridge W.* Exercitatio Geometriae de descriptione linearum curvarum. Londini, 1733.
43. *Coolidge J.L.A.* History of geometrical methods. Oxford, 1940.
44. *Coolidge J.L.A.* A History of the conic sections and quadric surfaces. N.Y., 1945.
45. *Cantor M.* Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik. Bd. 3. 1668–1758. Leipzig, 1907–1908.
46. *Clairaut A.C.* Elemens d'algebre. Paris, 1749.
47. *Campbell G.* A method for determining the number of impossible roots in adfected equations // Philos. Tracts. 1728. Oct., N 404. P. 515–531.
48. *Cauchy A.L.* Sur la convergence des series // Exercices des mathematiques. Paris, 1827. T. II. P. 221–232.
49. *Cauchy A.L.* Résume des lecons données a l'Ecole Rovale politéchnique sur le calcul infinitesimal. Paris, 1823. Vol. 1. Пер. на рус. яз.: *Коши О.Л.* Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. СПб., 1831.
50. *Cajori F.* A history of the conceptions of limits and fluxions // Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago; London, 1919.
51. *Chambers R.* History of the Rebellion of 1745–1746. Edinburgh; London, 1869.
52. *Gregory D.* A treatise of practical geometry... / Transl. by C. MacLaurin. Edinburgh, 1745. Оригинал: Davidis Gregorii astronomie physika Geometricae elemento. Genevae, 1726. T. 1. С. 427; T. 2. С. 429–751.
53. *Grant A.* The story of the University of Edinburgh during its first three hundred years: In 2 vol. London, 1884.
54. *Gowing R.* Roger Cotes – natural philosopher. Cambridge, 1983.
55. *Gregory J.* Tercentenery memorial volume / Ed. by H.W. Turnbull. London, 1932.
56. *Euler L.* Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersburg, 1770.
57. Encyclopedie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, ars et métries. T. VI, art. Limite; T. IV, art. Differentiel.
58. *Fuss P.H.* Correspondanse mathématique et phisique de quelques célèbres geometres du 18° sieicle. Vol. 1–2. St. Pétersbourgh, 1843.
59. The fusion of 1860: A record of the centenary celebration and a history of the United University of Aberdeen, 1860–1960 / Ed. by W.D. Simpson, Edinburgh; London, 1963.
60. *Kline M.* Mathematical thought from ancient to modern times. N.Y., 1972.
61. *Loria G.* Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven: Theorie und Geschichte. Leipzig, 1902.
62. Leibnizens mathematische Schriften / Hrsg. von C. 1. Gerhandt. Abt., I. Bd. III. Briefwe-

chsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli. Abt. II. Halle, 1856.
63. *Lagrange J.L.* Recherches sur la methode de maximis et minimis // Oeuvres. Paris, 1877. T. 1. P. 3–20.
64. *Legendre A.M.* Traité des fonctions elliptiques et des integrales eulériennes. T. 1–3. Paris, 1825–1828.
65. *Lagrange J.L.* Théorie des fonctions analytiques. 2e ed. Paris, 1813.
66. *Lacroix S.T.* Traite du calcul differentiel et du calcul integral. 2e ed. Paris, 1810–1818.
67. *Murdoch P.* An accont of the life and writing of the auttor // Maclaurin C. An account of sir Isaac Newton's philosophical discoveries. London, 1748. P. I–XX.
68. *Maclaurin C.* An account of sir Isaac Newton's philosophical discoveries. London, 1748.
69. *Maclaurin C.* A treatise of fluxions: In 2 books. Edinburgh, 1742.
70. *Maclaurin C.* A treatise of algebra: In 3 pt. London, 1748.
71. *Maclaurin C.* Dissertatio Philosophica Inaguralis De Gravitate, allisque viribus Naturalibus, quan cum annexis Corollariis Favente summo Numine. Edinburgh, 1713.
72. *Maclaurin C.* Tractatus de Curvarum Constructione et Mensura: ubi plurimae series Curvarum Infinitae vel rectis mensurantur vel ad simpliciores Curves reductuntur // Philos. Tracts. 1717–1719. Vol. 30. P. 803–819.
73. *Maclaurin C.* Nova Methodus Universalis Curvas Omnes cujuscunque Ordinis Mechanicae describendi sola datorum Angulorum and Rachtarum Ope // Ibid. P. 939–945.
74. *Maclaurin C.* Geometria Organica: sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis. Londini, 1720.
75. *Maclaurin C.* An account of a Book Entituled Geometria Organica, sive Descriptio Linearum Curvarum universalis. Auctore Colino Maclaurin Matheseos in Collegio Novo Aberdoneusi Professore and F.R.S. // Philos. Tracts. 1720–1721. Vol. 31. P. 38–42.
76. *Maclaurin C.* An account of monstrous double Birth in Lorraine / Communicated to the Publisher by Mr. Colin Maclaurin, Prof. Math. Aberdin. F.R.S. // Ibid. 1722–1723. Vol. 32. P. 346–348.
77. *Maclaurin C.* A Letter from Mr. Colin Maclaurin. Professor of Mathematics at. Edinburgh and F.R.S. to Martin Folkes, Esq. Pr. R. S., Concerning A Equtions with Impossible Roots // Ibid. 1726–1727. Vol. 34. P. 104–112.
78. *Maclaurin C.* A Second Letter from Mr. Colin Maclaurin. Professor om Mathematics in the University of Edinburgh and F.R.S. to Martin Folkes. Esq. Pr. R. S., Concerning A Equation, with the Demonstrations of Other Rules in Algebra: being the Continuation of the Letter published in the "Ph. Tr." N 334 // Ibid. 1729–1730. Vol. 36, N 408. P. 59–96.
79. *Maclaurin C.* A Defence of the Letter Published in the Phil. Tr. for March and April 1729. Concerning the impossible Roots of Equations in a Letter, from the Author to a Friend at London. Edinburgh, 1730.
80. *Maclaurin C.* A Letter from Mr. Colin Maclaurin, Math. Prof. Edinburgh, F.R.S. to Mr. John Machin... concerning the Description of Curve Lines // Philos. Tracts. 1735–1736. Vol. 39. P. 143–148.
81. *Maclaurin C.* An Abstract of what has been printed since the Year 1721 as a Supplement to a Treatise conserning the Description of Curve Lines published in 1718 and of what the Author proposes, to add to that Supplements // Ibid. 1735–1736. Vol. 39. P. 148–168.
82. *Maclaurin C.* The collected letter of Colin MacLaurin / Ed. by S. Mills. Nantwich, 1982.
83. *Maclaurin C.* Of the basis of cells wherein the bees deposit their honey.
84. *Muir T.* The theory of determinants in the historical order of developments. Vol. 1. London, 1906.
85. *Newton I.* Universal Arithmetic, translated by Raphson, revised by Wilder. 1769. (Первое изд.: Arithmetica unuversalis sive compositione et resolutione arithmetica liber cui accessit Halleiana aequationum radices arithmetica inveniendi methodus. In usum juventutis Academiae. Cantabrigiae, 1707.
86. *Landan L.L.* Thomas Reid and the Newtonian turn of British methodological thought // The methodological heritage of Newton / Ed. by R.E. Butts, J.W. Davis. P. 103–131. (Материалы коллоквиума от 31/III по 1/IV 1967 г. в университете Западного Онтарио).
87. *Newton I.* The mathematical papers of Isaac Newton / Ed. by D.T. Whitside with the assistance in publ. of M.A. Hoskin. Vol. I–III. Cambridge, 1967–1969. Vol. I. (1664–1666). Cambridge, 1967. Vol. V. (1683–1684). Cambridge, 1972.

88. *Pemberton H.* A view of sir Isaac Newton's philosophy. London, 1728.
89. *Poncelet J.V.* Traite des proprietes projectives des fiqueres. Paris, 1822.
90. *Robinson A.* Non-standart analysis. Amsterdam, 1966; The methaphysics of the calculus: Problems philos-math. Amsterdam, 1967. P. 28–49.
91. *Ramsay J.* Scottland and scottsmen in the 18th century: In 2 vol. Edinburgh; London, 1888. P. 8.
92. *Robins B.* A discourse concerning the nature and certainty of sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios // Mathematical tracts of the late Benjamin Robins: In 2 vol. London, 1761. P. 5–73.
93. *Reiff R.* Geschichte der Unendlichen Reihen. Tubingen, 1889.
94. *Van Schooten F.* De organica conicorum sectionum in plano descriptione tractatus. Lugduni Batavorum, 1646.
95. *Stirling J.* Methodus Differetialis sive Tractatus de Summatione et interpolatione serierum infinitarum. London, 1730.
96. *Simson R.* Pappi Alexandrini Propositiones duae generales quibus plura ex Euclidis Porismatis complexus est Restitutae a Viro Doctissimo Rob. Simson. Math. Prof. Glasc. Vid. Pappi pracfatinem ad Lib. 7 Coll. Math. Apollonii de Sectione rationis libris duobus a Clariss. Haliejo pracmissam pag VII et XXXIV // Philos. Tracts. 1722–1723. Vol. 32. P. 330–348.
97. *Simpson T* A new treatise of fluxions. London, 1737.
98. *Simpson T.* Treatise of algebra by Thomas Simpson, F.R.S. London, 1767. 1-е издание появилось в 1737 г.
99. *Saunderson N.* Elements of algebra. London, 1740.
100. *Todhunter I.* A history of the mathematical theories of attraction and the figures of the Earth. N.Y., 1962. P. 133–175.
101. *Tweedil C.* The "Geometrie Organica" by Colin Maclaurin // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1915. Vol. XXXVI. P. 87–150.
102. *Wallis J.* A treatise of algebra. London, 1685.
103. *Youngson A.Y.* Beyond the highland line. London, 1974.
104. *Voltaire F.M.* Elémens de la philosophie de Neuton. Amsterdam, 1738.
105. *Эйлер Л.* Основания алгебры Леонарда Эйлера... СПб., 1812.
106. *Юшкевич А.П.* Лейбниц и основания анализа бесконечно малых // Успехи мат. наук. 1948. Т. III, вып. 1(23). С. 150–165.
107. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. / Под ред. А.П. Юшкевича. Т. 1. История математики с древнейших времен до начала Нового времени. М., 1972.
108. *Cramer G.* Introduction à l'analyse des lignes courbes. Geneve, 1750.
109. *Boyer C.B.* Colin Maclaurin and Cramer's Rule // Scr. math. 1966. Vol. 27. P. 377–379.

Оглавление

Научно-биографическое издание

Коренцова Майя Михайловна

Колин Маклорен
(1698–1746)

Утверждено к печати Редколлегией серии "Научно-биографическая литература" Российской академии наук

Заведующая редакцией "Наука – биосфера, экология, геология" *А.А. Фролова*
Редактор *Н.Б. Прокофьева.* Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Технический редактор *З.Б. Павлюк.* Корректоры *А.Б. Васильев, Ю.Л. Косорыгин*

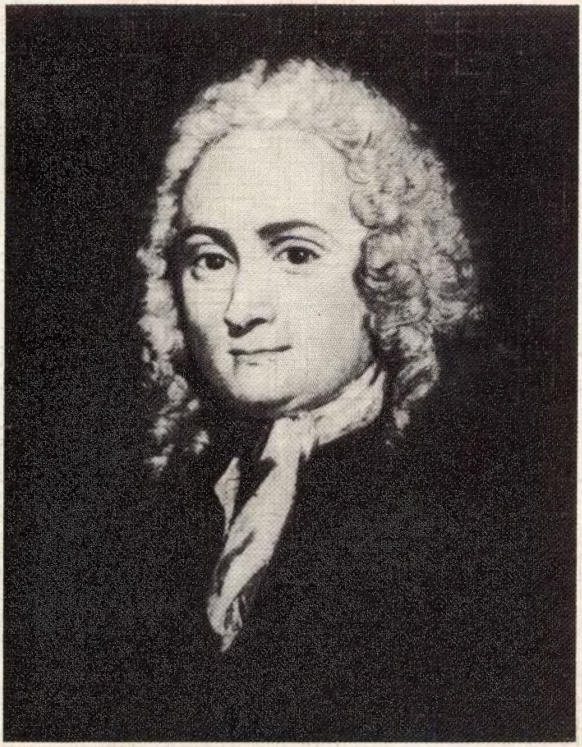
Набор и верстка выполнены в издательстве на компьютерной технике

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 30.01.98. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная. Усл.печ.л. 9,0. Усл.кр.-отт. 9,3. Уч.-изд.л. 12,0
Тираж 200 экз. Тип. зак. 598

Издательство "Наука" 117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография "Наука" 199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12



М. М. Коренцова

Колин МАКЛОРЕН

М. М. Коренцова Колин МАКЛОРЕН