ЗНАНИЕ

НОВОЕ
В ЖИЗНИ,
НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

4'81

Ю. А. Данилов

ДЖОН ФОН НЕЙМАН

Новое в жизни, науке, технике

МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

Подписная научно- популярная серия

4/1981

Ю. А. Данилов
ДЖОН ФОН НЕЙМАН

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика, как и мир, в котором мы живём, поражает нас сегодня своими разительными контрастами и противоречиями. Для неё одинаково характерны как создание колоссальной «математической индустрии», воплощённой в гигантских ЭВМ и комплексах ЭВМ, так и углублённый интерес к философии математики, как крайняя специализация, доходящая до того, что создаются большие международные журналы, посвящённые уже не просто геометрии, а именно дифференциальной геометрии (The Journal of Differential Geometry, существует с 1965 г.), не статистике, а многомерному статистическому анализу (The Journal of Multivariate Analysis, существует с 1971 г.), не теории множеств, а теории размытых множеств (International Journal of Fuzzy Sets and

Systems, существует с 1979 г.), так и появление ряда универсальных гениев, внёсших вклад чуть ли не во все без исключения разделы невероятно разросшейся математической науки.

Вся математика нашего века проникнута влиянием нескольких титанов, каждый из которых в отдельности (не говоря уж об их совокупных заслугах!) охватил своим творчеством чуть ли не весь массив математической науки: для того, чтобы продемонстрировать это, достаточно назвать имена Анри Пуанкаре (1854–1912) и Давида Гильберта (1862–1943), Германа Вейля (1885–1955) и Джона фон Неймана (1903–1957) (я упоминаю только тех, кого ныне уже нет в живых). Интересы этих учёных простирались от вопросов психологии математического творчества (Пуанкаре), философии математики и самых основ нашей древней науки (основания теории множеств у Неймана; логицистская программа Гильберта и интуиционистская программа Вейля) до глубоких тем прикладного характера, связывающих математику с физикой, техникой и широко понимаемым естествознанием (участие Неймана в разработке первых ЭВМ; исследования Пуанкаре, Вейля и Гильберта по теории относительности; Вейля, Неймана и Гильберта по квантовой механике; неймановская теория игр, тесно связанная с задачами математической экономики, и его теория автоматов). Без информации о жизни и творчестве этих замечательных учёных наше представление о современной математике неизбежно окажется крайне обеднённым.

Между тем русский читатель имеет совершенно неодинаковые возможности знакомства с названными гигантами научной мысли XX столетия. Больше всего повезло у нас Пуанкаре: помимо того что мы имеем на русском языке трёхтомное собрание его сочинений (Пуанкаре А. Избранные труды. Под ред. Н. Н. Боголюбова. — М.: Наука, 1971–1974), сопровождаемое переводами обстоятельных статей замечательных учёных Г. Жюлиа, Ж. Адамара, А. Вейля, Г. Фрейденталя, Л. Шварца и Л. де Бройля, посвящённых отдельным сторонам научной деятельности Пуанкаре, этот учёный — кажется, единственный из математиков! — удостоился отдельного тома в популярной серии «Жизнь замечательных людей» (Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. — М.: Молодая гвардия, 1979). Гильберту посвящена превосходная переводная научно-биографическая книга Констанс Рид, пользующаяся во всем мире заслуженной известностью (Рид К. Гильберт. — М.: Наука, 1977). Вейлю, к сожалению, в нашей стране посвящена лишь краткая брошюра, вышедшая в той же серии издательства «Знание», к которой относится и настоящая книжка (Яглом И. М. Герман Вейль. — М.: Знание, 1967). Наконец, о Неймане в нашей литературе до сих пор не было сказано практически ничего.

Автором предлагаемой брошюры является известный переводчик и популяризатор математики Юлий Александрович Данилов. Математик по образованию и физик по научной специальности, Ю. А. Данилов является переводчиком первой статьи фон Неймана, появившейся на русском языке (в кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? — М.: Наука, 1960); он принимал также участие в работе над названным выше собранием сочинений Пуанкаре, а среди многих десятков других переведённых им книг числится, в частности, и замечательная «Симметрия» Вейля, которую, последний сам назвал своей «лебединой песнью». Разумеется, настоящая брошюра даёт только «первый эскиз» творческого портрета Неймана (подобно тому как не может удовлетворить наше любопытство к громадной фигуре Вейля названный выше весьма краткий очерк его жизни и деятельности), но «лучше мало, чем ничего».

Ясно, что Ю. А. Данилов имел возможность остановиться лишь на немногих из достижений Неймана: в частности, почти полностью обойдена здесь роль Неймана в становлении математической экономики и лишь весьма бегло сказано об истории создания первых ЭВМ. Здесь хоть и ясно, но всё же по необходимости довольно бегло охарактеризованы и общие взгляды Неймана на математику, её уникальность и необходимость, тесную связь со всеми другими науками и её коренное отличие от них. В этой связи хотелось бы выразить надежду на скорую публикацию на русском языке цитируемого автором программного эссе Неймана «Математик» (The Mathematician; написано для выпущенного издательством Чикагского университета сборника «Умственная работа» — The Works of the Mind; перепечатано в четырёхтомном «Мире математики» Дж. Р. Ньюмена — J. R. Newman. The World of Mathematics. — New York: Simon and Schuster, v. 4, p. 2051–2064). Пока же это эссе остаётся малодоступным, возможно, уместно обратить внимание читателей настоящей брошюры на достаточно характерную для общенаучных взглядов Неймана вводную главу обширной монографии «Теория игр и экономическое поведение», написанной Нейманом совместно с экономистом О. Моргенштерном и переведённой также на русский язык.

Совсем не затронул Ю. А. Данилов и такое специфическое явление, как колоссальный взлёт в XX веке венгерской физико-математической мысли, не сравнимый по масштабам с достижениями многих куда больших по численности населения и культурным традициям стран и народов: чтобы пояснить это, достаточно упомянуть здесь, скажем, имена Дж. фон Неймана, Р. фон Мизеса и Т. фон Кармана; братьев Ф. и М. Риссов; Л. Фейера и Б. Секефальви-Надя; Дж. Пойа и Г. Сегё; П. Эрдёша и Т. Радо; П. Лакса, П. Халмоша и И. Лакатоша; А. Реньи и Л. Фейеша Тота; Л. Сциларда, Е. Вигнера и Э. Теллера (кстати, двое последних в школе учились у того же учителя математики, что и Дж. фон Нейман!). К сожалению, в результате тех исторических катаклизмов, которые пережила наша планета в XX веке, большинство этих учёных проделали ставший чуть ли не стандартным для венгерских математиков путь: Венгрия — Германия — США. Заслуживало бы внимания указание на связь успехов венгерской науки с долголетней (исторически — первой в мире!) практикой серьёзных школьных математических олимпиад. Хотелось бы больше услышать о нескольких уникальных высших учебных заведениях, сыгравших ту или иную роль в жизни Неймана — не только о принстонском Институте высших исследований, но и цюрихской Высшей технической школе, с которой связаны имена Минковского и Эйнштейна, Вейля и Неймана, и о Гамбургском и Гёттингенском университетах. Было бы интересно сопоставить двух «знатных принстонцев»— Дж. фон Неймана и Г. Вейля: если с теплотой охарактеризованный автором дом Неймана в Принстоне отличался типично американской «распахнутостью» и простотой, то не менее популярный дом Вейля, напротив, во всём — даже в некоторой чопорности хозяина дома — хранил устоявшиеся традиции немецкой культуры, со столь привычными для немецкой профессуры вечерним музицированием и обсуждением философских проблем. Однако мне кажется бесспорным, что и в настоящем своём виде брошюра Ю. А. Данилова (которую, кстати, очень украшают обширные цитаты из высказываний её героя и воспоминаний людей, хорошо его знавших) будет очень интересна весьма многочисленным читателям.

Профессор, доктор физико-математических наук
И. М. Яглом

Многие из математиков устраиваются в каком-нибудь закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют всё то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет почти во всех его областях печать своего гения, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Н. БУРБАКИ.
Архитектура математики

НЕ БОЛЕЕ ОДНОЙ ЧЕТВЁРТОЙ...

Ещё при жизни Джон фон Нейман стал легендой. Одни восхищались безупречной логикой его рассуждений и сравнивали его с идеальной логической машиной с тщательно подогнанными шестеренками. Другим импонировали присущие мышлению фон Неймана блеск и изящество. «Слушая фон Неймана, начинаешь понимать, как должен работать человеческий мозг», — говорили наиболее восторженные поклонники его таланта. Третьих восхищало умение производить в уме сложнейшие вычисления и инженерная хватка, несколько неожиданная у математика, мышление которого, даже по мнению его искушённых коллег, отличалось особой абстрактностью.

Джон фон Нейман принадлежал к редкому в наши дни типу математика-универсала, презирающего искусственные перегородки между отдельными областями своей древней, но вечно юной науки, воспринимающего её как единый живой организм и свободно переходящего в своём творчестве от одного её раздела к другому, на первый взгляд весьма далекому от первого, но в действительности связанного с ним нерасторжимыми узами внутреннего единства.

Размышляя в одной из своих статей над характерными особенностями интеллектуальной деятельности математика, фон Нейман заметил: «Хороший физик-теоретик и в наши дни может активно владеть не более чем половиной своего предмета. Сомневаюсь, чтобы кто-нибудь из живущих ныне математиков был тесно связан хотя бы с четвёртой частью математики». Сам фон Нейман принадлежал к числу тех редчайших исключений из распространённого типа узкого специалиста, для которых эта оценка неверна. Если оставить в стороне топологию и теорию чисел, то в остальной части современной математики вряд ли найдется область, которая бы в той или иной степени не испытала на себе влияние идей фон Неймана. Более того, среди многочисленных разделов современной математики немало таких, которые возникли и в значительной мере обрели лицо в трудах фон Неймана.

Вильгельм Оствальд, различал среди деятелей науки два типа: классиков и романтиков. Первых можно уподобить мельнице, тщательно перемалывающей логическими жерновами исходные идеи — «засыпку», чтобы извлечь из неё как можно более далёкие следствия и довести теорию до пределов возможной полноты и совершенства. Вторых скорее следует сравнивать с генераторами новых идей. Высказав идею, они быстро утрачивают к ней интерес, сколь бы блестящей она ни была, и не принимают участия в её дальнейшей разработке.

Гигантская фигура фон Неймана не укладывается в прокрустово ложе оствальдовской (как, впрочем, и любой другой) классификации. Несомненный классик, фон Нейман обладал пылкой фантазией и не менее пылким темпераментом романтика и подарил математическому миру так много великолепнейших идей, что его можно назвать классиком в смысле Оствальда лишь при весьма существенных оговорках. Вместе с тем фон Нейман был слишком классиком, чтобы с безразличием относиться к судьбе намеченной им теории и предоставить другим развивать высказанные им идеи.

Джон фон Нейман был и остается классиком и в ином, более высоком значении этого слова. Шесть томов посмертного издания его трудов, содержащие далеко не все работы выдающегося математика современности, не стали надгробным памятником его идей. Работы фон Неймана имеют непреходящее значение.

Отвечая в 1954 г. на анкету Национальной Академии наук США, фон Нейман назвал три своих наивысших научных достижения: математическое обоснование квантовой механики; теорию неограниченных операторов и эргодическую теорию. В этой оценке не только проявление личных вкусов фон Неймана, но и щедрость гения: многое из того, что фон Нейман не включил в список своих лучших достижений, вошло в золотой фонд математической науки и могло бы по праву обессмертить имя своего создателя. Достаточно сказать, что среди «отвергнутых» работ оказались и частичное решение (для локально-компактных групп) знаменитой пятой проблемы Гильберта, и теория игр, и основополагающие работы по теории автоматов.

Широкий спектр математических интересов и научных достижений фон Неймана представлял собой настолько разительный контраст с унылой картиной всеобщей узкой (а иногда и чрезмерно узкой) специализации, что не только историки науки, но и многие активно работающие математики пытались найти объяснение этому уникальному явлению. Вот что, например, говорит по этому поводу известный математик С. Улам, лично знавший Джона фон Неймана и проработавший с ним многие годы: «Странствия фон Неймана по многочисленным разделам математической науки не были следствием снедавшего его внутреннего беспокойства. Они не были вызваны ни стремлением к новизне, ни желанием применить небольшой набор общих методов к множеству различных частных случаев. Математика в отличие от теоретической физики не сводится к решению нескольких центральных проблем. Стремление к единству, если он зиждется на чисто формальной основе, фон Нейман считал обречённым на заведомую неудачу. Причина его неуемной любознательности крылась в некоторых математических мотивах и в значительной мере была обусловлена миром физических явлений, который, насколько можно судить, ещё долго не будет поддаваться формализации.

...Своими неустанными поисками новых областей применения и общим математическим инстинктом, одинаково безошибочно действующим во всех точных науках, фон Нейман напоминает Эйлера, Пуанкаре или, если обратиться к более поздней эпохе, Германа Вейля. Не следует, однако, упускать из виду, что разнообразие и сложность современных проблем во много раз превосходят то, с чем сталкивались Эйлер и Пуанкаре».

Мир физических явлений был для фон Неймана тем компасом, по которому он выверял свой курс в безбрежном океане современной математики, тонкая интуиция позволяла ему предугадывать, в каком направлении надлежит искать неизвестные земли, а высокий научный потенциал и виртуозное владение техникой — преодолевать трудности, которые в изобилии встречаются на пути каждого открывателя нового.

Единого определения математики не существует. Сколь ни богат выбор различных типов определений в логике, ни один из них не позволяет полностью охарактеризовать неуловимую сущность математики, Например, широко известное определение математики через ближайший род и видовое отличие «Математика — дедуктивная наука, занимающаяся изучением...» неполно хотя бы потому, что дедуктивный характер присущ традиционной форме изложения математических результатов, т.е. математике «готовой». В процессе поиска доказательства теоремы математик следует примеру естествоиспытателя и широко использует индуктивные рассуждения, аналогию и т.п. Перечень того, чем занимается наука, именуемая математикой, предусмотрительно заменённый многоточием, обречен на неполноту, сколь бы длинным он ни был. Неполно и остенсивное определение математики: мы не можем указать перстом на нечто и сказать, что это и есть математика (работы одного математика, по фон Нейману, имеют отношение не более чем к одной четвёртой всей математики, работы различных математиков с необходимостью пересекаются и не образуют «полного покрытия» математики). Неполны и все другие определения математики: через отношение, противоположность, абстракцию, генетическое определение, семантическое и т.д.

Не будет преувеличением сказать, что у каждого крупного математика складывается своя собственная концепция математики, не часто формулируемая в явном виде, но дающая ключ к пониманию его творчества.

Выступая в июне 1933 г. в Оксфорде со Спенсеровской лекцией «О методе теоретической физики», Альберт Эйнштейн высказал следующий совет: «Если вы хотите узнать у физиков-теоретиков что-нибудь о методах, которыми они пользуются, я советую вам твёрдо придерживаться следующего принципа: не слушайте, что они говорят, а лучше изучайте их работы. Тому, кто в этой области что-то открывает, плоды его воображения кажутся столь необходимыми и естественными, что он считает их не мысленными образами, а заданной реальностью. И ему хотелось бы, чтобы и другие считали их таковыми».

Математики в своей работе имеют дело с абстракцией ещё более высокого порядка, чем физики-теоретики, предмет их рассмотрении удалён от реальности на ещё большее «расстояние», и поэтому могло бы показаться, что математики в ещё большей степени, чем физики-теоретики, склонны считать реальностью порождения своего разума.

Однако обратившись к трудам фон Неймана, мы увидим иную картину.

Испытав в молодые годы сильное влияние гильбертовской аксиоматической школы, Джон фон Нейман, как правило, начинал свою работу, к какой бы области она ни относилась, с составления перечня аксиом. Наглядные представления о предмете рассмотрения заменялись при этом схематическим описанием наиболее существенных его свойств, и только эти свойства использовались в последующих рассуждениях и доказательствах. [Эта логическая чёткость хорошо передана в диалоге фон Неймана со святым Августином из одной пьесы, в которой фон Нейман выведен в качестве главного действующего лица, хотя в целом пьеса, на мой взгляд, так себе. — *E.G.A.*]

Джон фон Нейман свободно парил в разреженной атмосфере абстракций, не прибегая в отличие от многих других математиков к наглядным образам. Абстракция была его стихией. Отмечая эту особенность творческого почерка фон Неймана, С. Улам писал: «Небезынтересно заметить, что во многих математических разговорах на темы, связанные с теорией множеств и родственными ей областями математики, явственно ощущалось формальное мышление фон Неймана. Большинство математиков, обсуждая подобные проблемы, исходят из интуитивных представлений, основанных на геометрических или почти осязаемых картинах абстрактных множеств, преобразований и т.д. Слушая фон Неймана, вы живо ощущали, как последовательно он оперирует с чисто формальными умозаключениями. Этим я хочу сказать, что основа его интуиции, позволявшей ему формулировать новые теоремы и отыскивать доказательства (как, впрочем, и основа его «наивной» интуиции), принадлежала к типу, который встречается гораздо реже. Если бы мы, следуя Пуанкаре, разделили математиков на два типа — на обладающих зрительной и слуховой интуицией, то Джонни, по всей видимости, принадлежал бы ко второму типу. Однако его «внутренний слух» был весьма абстрактным. Речь шла скорее о некоей дополнительности между формальными наборами символов и игрой с ними, с одной стороны, и интерпретацией их смысла — с другой. Различие между тем и другим в какой-то мере напоминает мысленное представление реальной шахматной доски и мысленное представление последовательности ходов на ней, записанных в шахматной нотации».

В полной мере владея обширным арсеналом современной математики, являясь творцом многих её разделов, фон Нейман был глубоко убеждён в плодотворности, более того — в необходимости связи математики с естествознанием, в проверке «качества» вводимых математиками понятий.

Своё понимание существа математики, её проблем, методов, генезиса и места в кругу других наук и её взаимосвязи с науками о природе, своё кредо фон Нейман изложил в статье «Математик». Это не просто декларация. Наиболее существенные положения статьи весомо подкрепляются всем математическим творчеством фон Неймана. В ней, в частности, говорится следующее:

«Самая жизненно важная отличительная особенность математики состоит, по-моему, в её совершенно особой связи с естественными науками или, если рассматривать всё в более общем плане, с любой наукой, интерпретирующей опыт на более высоком уровне, нежели чисто описательный.

Большинство людей, математиков и нематематиков, согласятся с тем, что математика не является эмпирической наукой или что она по крайней мере по образу действий отличается в некоторых весьма важных отношениях от методов эмпирических наук. Тем не менее развитие математики весьма тесно связано с естественными науками. Один из её основных разделов — геометрия — зародился как естественная, эмпирическая наука. Некоторые из наиболее ярких идей современной математики (я убежден, что это — её лучшие идеи) отчетливо прослеживаются до своих истоков в естественных науках. Математические методы пронизывают «теоретические» разделы естественных наук и доминируют в них. Главный критерий успеха в современных эмпирических науках все в большей мере усматривают в том, насколько эти науки оказываются в сфере действия математического метода или почти математических методов физики. Неразрывная цепь последовательных псевдоморфоз, пронизывающая естественные науки, сближающая их с математикой и почти отождествляемая с идеей научного прогресса, становится всё более очевидной. В биологию во всё возрастающей степени проникают химия и физика, в химию — экспериментальная и теоретическая физика, в физику — наиболее изощрённые по своей математической форме методы теоретической физики.

Природа математики обладает весьма замечательной двойственностью. Эту двойственность необходимо осознать, воспринять и включить её в круг представлений, неотъемлемых от предмета. Эта двуликость присуща лицу математики, и я не верю, что можно прийти к какому-нибудь упрощённому единому взгляду на математику, не пожертвовав при этом существом дела.

...Я считаю, что довольно хорошее приближение к истине (которая слишком сложна, чтобы допускать что-нибудь, кроме аппроксимации) состоит в следующем. Математические идеи берут своё начало в эмпирике, но генеалогия их подчас длинна и неясна. Но коль скоро идеи эти возникли, они обретают независимое, самостоятельное существование. Их лучше сравнивать с художественными произведениями, подчиняющимися чисто эстетическим оценкам, чем с чем-либо другим и, в частности, с эмпирическими науками. Однако здесь имеется одно обстоятельство, на которое, по моему убеждению, необходимо обратить особое внимание. Когда математическая дисциплина отходит достаточно далеко от своего эмпирического источника, а тем более когда она принадлежит ко второму или третьему поколению и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к «реальности», над ней нависает весьма серьёзная опасность. Она всё более и более превращается в бесцельное упражнение по эстетике, в искусство ради искусства. Это не обязательно плохо, если вокруг данной дисциплины имеются другие родственные разделы математики, имеющие более тесные связи с эмпирическими науками, или если данная дисциплина находится под влиянием людей с исключительно хорошо развитым вкусом.. Но существует серьёзная опасность, состоящая в том, что математическая дисциплина начнет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что поток вдали от источника разделится на множество мелких рукавов и что соответствующий раздел математики обратится в беспорядочное нагромождение деталей и всякого рода сложностей. Иначе говоря, на большом расстоянии от эмпирического источника или в результате чересчур абстрактного «инбридинга» [1] математической дисциплине грозит вырождение. При появлении того или иного раздела математики стиль обычно бывает классическим. Когда же он обретает признаки перерождения в барокко, это следует расценивать как сигнал опасности.

...При наступлении этого этапа единственный способ исцеления, на мой взгляд, состоит в том, чтобы возвратиться к источнику и впрыснуть более или менее прямо эмпирические идеи. Я убежден, что это всегда было необходимо для того, чтобы сохранить свежесть и жизненность математической теории, и что это положение останется в силе и в будущем».

НАЧАЛО ПУТИ

Старший из трёх сыновей банкира Макса фон Неймана Янош (которого в Цюрихе, Гамбурге и Берлине называли Иоганном, а после переезда в США стали называть Джоном, а ещё чаще — дружески — Джонни) родился 28 декабря 1903 г. в Будапеште, втором по величине и значению после Вены культурном центре бывшей Австро-Венгерской империи. В юные годы Янош занимался дома со специально приглашёнными педагогами, а в возрасте 10 лет поступил в одно из лучших учебных заведений, того времени — лютеранскую гимназию.

Это было необычное, учебное заведение. Руководство школы уделяло развитию личности учащихся не меньше внимания, чем прохождению обязательной программы. Преподаватели занимались, хотя и в скромных масштабах, научной работой, придерживались прогрессивных педагогических принципов, и многие выпускники школы, став взрослыми, не раз с признательностью вспоминали своих наставников.

Яркая математическая одарённость фон Неймана, проявилась ещё на школьной скамье. По свидетельству однокашников, он в школьные годы мог часами с увлечением говорить на математические темы. В проделках класса, вспоминает один из соучеников фон Неймана по гимназии Е. Вигнер, удостоенный впоследствии Нобелевской премии по физике, он принимал участие, «если можно так выразиться, не от всей души, а лишь для того, чтобы не выделяться. У него было несколько друзей, и он пользовался всеобщим уважением».

Математика — наука молодых. Многие выдающиеся математики получили свои наиболее выдающиеся результаты, едва переступив порог второго десятилетия. (Сам фон Нейман, вспоминает С. Улам, считал, что первичные («богом данные») математические способности достигают наивысшего развития к 26 годам, уступая затем место более прозаической профессиональной изощрённости, достигаемой многократными упражнениями. Возрастающая с годами квалификация как бы подслащивает пилюлю, компенсируя математика за постепенную утрату подлинного дара. Став взрослее, замечает Улам, фон Нейман медленно поднимал свою оценку «критического возраста» математика.) Именно поэтому для математика и физика-теоретика, как представителя наиболее математизированной области естествознания, чрезвычайно важна высокая «начальная скорость» — раннее развитие природных способностей.

Так же как и великому физику современности Энрико Ферми, фон Нейману необычайно повезло. Обоим в юности посчастливилось встретить человека, сумевшего распознать в любознательном мальчишке гения и сделавшего всё, чтобы развить яркое дарование. У Энрико Ферми это был инженер Амидей, у Яноша фон Неймана — преподаватель математики Ласло Ратц.

Мыслящий широко и нешаблонно, этот педагог умел прививать ученикам вкус к своему предмету. (Выступая с ответной речью после вручения Нобелевской премии, Вигнер с благодарностью упомянул имя своего учителя.) Осознав степень одарённости фон Неймана, Ласло Ратц справедливо рассудил, что столь необычный ученик требует и необычных методов обучения, и ввёл Яноша в «небольшой, но блестящий кружок будапештских математиков того времени, который возглавлял духовный отец венгерских математиков Липот Фейер. Огранка молодого таланта была поручена ассистенту

Будапештского университета М. Фекете, а общее руководство взял на себя выдающийся педагог, профессор Иожеф Кюршак.

Творческая атмосфера университета, беседы и сотрудничество с активно работающими («настоящими») математиками, благожелательное внимание со стороны Фейера («Величайший Янчи [2] нашей страны» — таков был его поистине пророческий отзыв о фон Неймане) сыграли в формировании фон Неймана-математика не меньшую роль, чем штудирование университетских курсов. К моменту получения аттестата зрелости Янош фон Нейман пользовался в математических кругах установившейся репутацией молодого дарования редкостной силы. Его первая печатная работа (написанная совместно с М. Фекете) «О расположении нулей некоторых минимальных полиномов» вышла в свет, когда её автору едва минуло 18 лет.

По окончании гимназии перед фон Нейманом, так же как и перед его сверстниками, встал важный вопрос: «Кем быть?» Однако для Яноша фон Неймана этот вопрос имел несколько иное значение, чем для других выпускников гимназий. Для юноши со столь незаурядными способностями и рано определившимися интересами речь шла не о выборе призвания, ибо этот выбор был предрешен заранее. Речь шла о выборе профессии, способной удовлетворить не столько чаяниям сына, сколько критериям отца: профессию математика Макс фон Нейман не считал достаточно «надёжной», способной обеспечить будущее своего первенца, и настоял, чтобы тот приобрёл более «земную» профессию инженера-химика. Разумеется, Янош, вкусивший первые радости математического творчества, принявший посвящение (хотя и неформальное) в математики, не мог представить себе жизнь без занятия любимой наукой. На семейном совете было решено, что Янош поступит в Федеральную высшую техническую школу в Цюрихе, где будет изучать химию, и одновременно на математический факультет Будапештского университета.

Необычный это был студент! Академические свободы и, в частности, вольное посещение лекций он трактовал весьма своеобразным способом: появлялся в Будапеште лишь в конце семестра, чтобы сдать очередные экзамены, и уезжал в Цюрих или в Берлин, но отнюдь не для того, чтобы углублённо изучать химию, призванную по замыслу отца снискать ему хлеб насущный. Основная часть времени уходила на подготовку к печати своих работ, беседы с коллегами-математиками (отсутствие диплома у талантливого юноши, разумеется, не мешало им называть его своим коллегой), посещение семинаров.

У фон Неймана-студента не было учителя в высоком значении этого слова. Фон Нейман не вышел из школы кого-нибудь из великих математического мира. Он был автодидактом, черпая необходимое из специальной литературы и в живом общении с другими математиками. Вспоминая впоследствии цюрихский период своей жизни, фон Нейман считал, что особенно много почерпнул у двух математиков: Эрхарда Шмидта и Германа Вейля. Подобно многим выдающимся математикам фон Нейман незаметно для постороннего глаза, «скрытно» преодолел период ученичества и превратился в зрелого мэтра, владеющего всеми тайнами своей профессии. Общение молодого фон Неймана даже с математиком такого ранга, как Герман Вейль, происходило скорее «по горизонтали», чем «по вертикали», и было полезно для обеих сторон. Известно, что когда Вейлю понадобилось среди семестра срочно отлучиться, то чтение курса вместо него продолжил фон Нейман.

Гений — это не только исключительная одарённость, но. и исключительная работоспособность. Фон Нейман был наделен и тем и другим. Много лет спустя Клара фон Нейман-Эккарт сказала о своём муже: «Когда его что-нибудь интересовало, работоспособность его становилась практически безграничной». Хотя в годы цюрихско-будапештского периода внешний «выход» был сравнительно невелик, проделанная работа была поистине титанической, и результаты её не замедлили сказаться. Именно в эти ученические годы фон Нейман приобщился к тому, что составляет подлинную математическую культуру, без чего невозможна творческая работа в математике (химия никогда по-настоящему не занимала его помыслов). Именно тогда в нем осуществился тот синтез накопленных знаний, который впоследствии позволил ему сформировать свой собственный взгляд на математику и выработать своеобразие, отличавшее творческий почерк фон Неймана в зрелые годы.

Требования, которые предъявлял к себе фон Нейман, были неизмеримо выше официальных требований к студентам и соискателям учёных степеней. В 1925 г. он без видимого напряжения получает диплом инженера-химика в Цюрихе и успешно защищает диссертацию «Аксиоматическое построение теории множеств» на звание доктора философии в Будапештском университете (по словам Е. Вигнера, «диссертация и экзамены не потребовали от него (фон Неймана) сколько-нибудь значительных усилий»). Воля отца выполнена, и отныне математика безраздельно завладевает всеми его мыслями.

Не обременённый академическими обязанностями, молодой доктор отправляется совершенствовать свои знания в Мекку математиков и физиков того времени — Гёттингенский университет. В стенах Георгии Аугусты [3] в Гёттингене в то время читали лекции люди, чьи имена стали гордостью науки: Ф. Клейн, К. Рунге, Э. Ландау, Д. Гильберт, Э. Цермело, Г. Вейль, Г. Минковский, М. Борн, Ф. Франк... Такого созвездия знаменитостей не было ни в одном другом университете мира. Стараниями Феликса Клейна при университете была собрана великолепная математическая библиотека. Получить приглашение в Гёттинген для чтения лекций считалось высокой честью, и в списке приглашённых лекторов мы встречаем блестящие имена: Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Зоммерфельд, Н. Бор, М. Планк, П. Эренфест...

Особенно благоприятной для формирования научной молодежи была атмосфера семинаров, далекая от чопорности и академизма, пронизанная одним стремлением — постичь истину.

Для фон Неймана исключительное значение имело общение с одним из крупнейших математиков современности Давидом Гильбертом. Интерес фон Неймана к проблемам аксиоматики теории множеств, проявившийся в выборе темы докторской диссертации, позволил ему легко найти общий язык с главой гёттингенского Математического института. Из общения с Гильбертом и, в частности, из работы в знаменитом гильбертовском «Семинаре о материи» фон Нейман вынес весьма важное для себя заключение: математика не должна ограничиваться ролью поставщика решений различных задач, возникающих в естественных науках; наоборот, естествознание должно стать неисчерпаемым источником постановок новых чисто математических проблем.

Именно в Гёттингене фон Нейман познакомился с идеями зарождавшейся тогда квантовой механики. Проблемы математического обоснования нового раздела физики захватили фон Неймана. Вслед за статьей «Об основаниях квантовой механики», написанной совместно с Д. Гильбертом и Л. Нордгеймом, в знаменитых гёттингенских Nachrichten появляется серия работ фон Неймана «Математическое обоснование квантовой механики», «Теоретико-вероятностное построение квантовой механики» и «Термодинамика квантовомеханических систем».

В 1927 г. фон Нейман становится приват-доцентом Берлинского, а с 1929 г. — Гамбургского университета.

ПО КОГТЯМ УЗНАЮТ ЛЬВА

Период с 1927 по 1929 г. в жизни фон Неймана знаменателен не только «продвижением по службе». Именно в эти годы фон Нейман выполнил основополагающие работы трёх больших циклов: по теории множеств, теории игр и математическому обоснованию квантовой механики.

«Крайне простые в своей сущности, не требующие никаких предварительных познаний идеи и выводы великого основоположника теории множеств Георга Кантора являют собой образец подлинно математического стиля. Настоящая математика заключается не в нагромождении искусственных вычислительных приемов, а в умении получать нетривиальные результаты путем размышления при минимуме применяемого аппарата — так охарактеризовали теорию множеств авторы известной популярной книги «Числа и фигуры» Г. Радемахер и О. Тёплиц. Современники Г. Кантора встретили его работы гораздо более сдержанно.

«Наивная» теория множеств Г. Кантора вводила в математику не только новые фундаментальные понятия, но и новый тип рассуждений, при помощи которых создатель теории доказывал её основные теоремы. Необычность этих рассуждений состояла в том, что Г. Кантор, оперируя с бесконечными множествами, систематически применял логические приемы и принципы, которыми до него математики имели обыкновение пользоваться лишь при рассмотрении конечных множеств. Недоверие, с которым определённая часть математиков восприняла результаты Г. Кантора, было отчасти обусловлено именно этим обстоятельством (хотя ни один из противников создателя теории множеств не мог указать ошибку в его рассуждениях).

Кроме того, вскоре выяснилось, что рассуждения, весьма близкие к тем, которые использовал в своих работах Г. Кантор, приводят к парадоксам, или антиномиям. Так, в 1897 г. (основные работы Г. Кантора по теории множеств вышли в 1872–1884 гг.) был открыт парадокс наибольшего ординального числа (парадокс Бурали—Форти), а в 1903 г. Б. Рассел поразил математический мир своим «парадоксом брадобрея».

Обсуждение парадоксов не только породило долгие споры и разделило математиков на несколько «враждующих» лагерей, но и способствовало второму рождению теории множеств — на сей раз не «наивной», а строгой, формализованной. Сколь бы крайних взглядов на судьбы теории множеств и причины возникающих в ней парадоксов ни придерживались представители различных направлений в основаниях математики, всем было ясно, что основные предпосылки теории подлежат уточнению, рассуждения, приводящие к парадоксальным заключениям, требуют особого внимания и потому их следует отделить от «безопасных» рассуждений, не порождающих антиномий, и что наилучшим средством для достижения ясности в спорных вопросах обоснования теории множеств может служить аксиоматический метод. Успехи, достигнутые Д. Пеано в аксиоматизации арифметики и Д. Гильбертом в аксиоматизации евклидовой геометрии, позволили надеяться, что аксиоматическое построение теории множеств окажется не менее полезным.

Аксиоматика теории множеств в двух независимых вариантах была создана в 1908 г. Б. Расселлом и Э. Цермело, однако понадобилось ещё одно десятилетие, прежде чем теоретико-множественные представления проникли в сознание большинства математиков и стали его неотъемлемой частью. Для нового поколения математиков, вступивших на научное поприще в начале 20-х годов нашего столетия, теоретико-множественное мышление было не только естественным, но и характерным. Именно к этому поколению математиков и принадлежал фон Нейман.

Первая работа фон Неймана по аксиоматической теории множеств вышла в свет в 1923 г. Она называлась «К введению трансфинитных ординальных чисел» и была опубликована в трудах Сегедского университета.

Критический ум фон Неймана не мог довольствоваться принятием существующих систем аксиом теории множеств. Фон Нейман разработал свою систему аксиом и изложил её в докторской диссертации и двух статьях. О том, как была воспринята работа фон Неймана, убедительно свидетельствует письмо одного из ведущих специалистов по теории множеств и основаниям математики А. Френкеля к С. Уламу: «Году в 1922–23 в бытность мою профессором Марбургского университета я получил от профессора Эрхарда Шмидта из Берлина (обратившегося ко мне по поручению редакции журнала Mathematische Zeitschrift) рукопись неизвестного мне автора Иоганна фон Неймана под названием «Аксиоматическое построение теории множеств». Эта работа оказалась его докторской диссертацией и была опубликована лишь в 1928 г. (в 27-м томе журнала). Меня просили ознакомиться с работой и отрецензировать её, так как членам редколлегии она показалась непонятной. Не стану утверждать, будто я полностью разобрался в присланной мне работе, но и того, что я понял, было достаточно, чтобы воздать должное её выдающимся достоинствам и «по когтям узнать льва». Дав положительный отзыв, я пригласил молодого учёного навестить меня (в Марбурге). Мы подробно обсудили работу, и я настоятельно порекомендовал ему подготовить почву для понимания его весьма специальной работы изданием менее строгого очерка, в котором излагались бы новый подход к проблеме и основные следствия, извлекаемые из него. Фон Нейман написал такую «разъяснительную» работу под названием «К вопросу об аксиоматическом построении теории множеств», и я опубликовал её в 1925 г. в Journal für Mathematik (т. 154), где в ту пору занимал пост заместителя главного редактора».

Поставив перед собой цель «дать логически безупречное аксиоматическое изложение теории множеств», фон Нейман построил замечательную систему аксиом, не уступающую по простоте и «прозрачности» знаменитой гильбертовой системе аксиом евклидовой геометрии. Полный перечень аксиом системы фон Неймана занимает немногим более одной страницы печатного текста! Вводимые объекты подразделяются на два типа: один соответствует множествам, другой — свойствам множеств в «наивной» теории множеств.

Система аксиом фон Неймана принадлежит к числу высших достижений современной теории множеств. Её исследованию, усовершенствованию и применениям посвящены многочисленные работы.

В «популярной» работе фон Неймана «К вопросу об аксиоматическом построении теории множеств», предваряющей публикацию его докторской диссертации, подобно сюите на тему крупномасштабного музыкального произведения, помимо подробностей, представляющих интерес для специалистов, содержится данная фон Нейманом характеристика различных направлений в основаниях математики, проливающая дополнительный свет на его концепцию математики. По свидетельству С. Улама, «фон Нейман проводит грань между двумя принципиально различными направлениями, избранными математиками, чтобы избежать антиномий Бурали—Форти, Ришара и Расселла. Одна группа (в неё входят Б. Расселл, Р. Кёниг, Л. Брауэр и Г. Вейль) придерживается более радикальной точки зрения, согласно которой появление парадоксов указанного типа можно предотвратить, сузив логические основы всех точных наук. По мнению фон Неймана, деятельность представителей этой группы производит впечатление не созидающей, а опустошающей. Фон Нейман возражает и против предложенной Расселлом идеи построения всей системы математики на весьма проблематичной аксиоме сводимости и протестует против предложения Вейля и Брауэра отказаться от того, что, по его мнению, составляет значительную часть математики и теории множеств.

Гораздо более сочувственное отношение встречает у фон Неймана деятельность другой, менее радикальной группы (в неё, в частности, входят Э. Цермело, Л. Френкель и А. Шёнфлис). Работу этих математиков, так же как и свою собственную, фон Нейман считает далёкой от завершения, поскольку выбор аксиом в известной мере произволен. Он признаёт, что избранный представителями менее радикального представления подход не позволяет доказать невозможность возникновения антиномий, но поскольку «наивную» теорию множеств нельзя принимать слишком всерьёз, то по крайней мере её большую часть удаётся «реабилитировать», представив её в виде формальной системы, причём смысл термина «формальный» можно определить вполне точно».

Вклад фон Неймана в аксиоматическую теорию множеств далеко не исчерпывается его докторской диссертацией и двумя уже названными статьями.

В работе «Об определении через трансфинитную индукцию и родственных вопросах общей теории множеств» (1928) фон Нейман вновь возвращается к проблеме введения ординальных чисел, рассмотренной им ранее в работе 1923 г., возвращается, чтобы на этот раз дать строгое аксиоматическое изложение теории.

В работех «Об одной проблеме непротиворечивости аксиоматической теории множеств» фон Нейман показал, что одна из «нетрадиционных» аксиом в предложенной им системе выводима из некоторых аксиом, лежащих в основе других систем. Поскольку ранее было показано, что эти аксиомы, в свою очередь, выводимы из аксиомы фон Неймана, то полученный результат означал, что «необычная аксиома эквивалентна обычным (в других системах).

Большая статья фон Неймана «К гильбертовой теории доказательства» (1927) посвящена важной проблеме непротиворечивости математики. Это глубокое исследование проникнуто духом гильбертовской программы построения всей математики финитными методами (иначе говоря, к рассмотрению должны допускаться лишь объекты, которые могут быть построены за конечное число шагов). Отметив неудовлетворительность решений проблемы непротиворечивости математики, предложенных другими авторами, фон Нейман, по словам С. Улама, «почти достиг предела того, что можно достичь, опираясь на гильбертову программу, т.е. строго финитными методами. Более того, фон Нейман высказал предположение о том, что аналогичным методом можно доказать непротиворечивость всего анализа. В настоящее время трудно отделаться от впечатления, что идеи, рождённые в трудах Гильберта и его школы, развитые со столь высокой степенью совершенства и затем революционизированные Гёделем, ещё не исчерпали себя. Быть может, мы находимся в середине другого великого процесса эволюции: «наивный» подход к теории множеств и формальные математические попытки охватить наши интуитивные представления о бесконечности в будущем, как мне кажется, сольются в «сверхтеории множеств». В истории математики неоднократно бывало, что интуиция или, лучше сказать, смутные предчувствия ведущих математиков относительно проблем современной им науки впоследствии входили в качестве составных частей в формальную «сверхсистему», предметом рассмотрения которой служило самое существо проблем исходной системы».

Интерес фон Неймана к теории множеств не угасал и в последующие годы. Многие работы фон Неймана по теории функций действительного переменного, общей теории меры, абстрактной теории автоматов зиждятся на отточенной теоретико-множественной интуиции их автора и могут рассматриваться как далеко идущие обобщения результатов, известных ранее лишь для евклидовых пространств, на другие топологические и алгебраические структуры.

Весьма важным для дальнейшего развития математики оказался и второй «цикл», состоящий из одной-единственной работы «К теории стратегических игр», опубликованной в 1928 г. Давно уже ставшая классической и породившая огромное количество литературы, эта работа содержала доказательство знаменитой теоремы о минимаксе, ставшей краеугольным камнем возникшей гораздо позже теории игр.

Что утверждает теорема фон Неймана?

Предположим, что двое играют в некую игру, по правилам которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (игра с нулевой суммой), и каждый из игроков волен выбирать из конечного, хотя, быть может, и очень большого, числа стратегий (конечная игра). Выбирая стратегию, игроки при оценке своих шансов на выигрыш (проигрыш) исходят из лестного для противника предположения о том, что тот всегда отвечает наивыгоднейшим для себя ходом. Следовательно, какой бы стратегии ни придерживался игрок, он всегда может рассчитывать лишь на ту ответную стратегию, при которой его выигрыш минимален (проигрыш максимален). Не желая рисковать, игрок должен остановить свой выбор на такой стратегии, при которой минимальный выигрыш максимален (соответственно максимальный проигрыш минимален).

Доказанная фон Нейманом теорема утверждает, что для любой конечной игры (двух игроков) с нулевой суммой существует «устойчивая» пара стратегий, для которых минимальный проигрыш одного игрока совпадает с максимальным выигрышем другого. Устойчивость стратегий означает, что каждый из игроков, отклоняясь от оптимальной стратегии, лишь ухудшает свои шансы и, внемля голосу рассудка, предпочитает вернуться к оптимальной стратегии.

В момент выхода в свет работы фон Неймана неожиданным было не только доказательство теоремы о минимаксе (в котором фон Нейман использовал теорему о неподвижной точке), но и утверждение теоремы. Лишь четверть века спустя математический мир по достоинству оценил небольшую работу фон Неймана. О том, сколь высоко ценил теорему о минимаксе сам фон Нейман, свидетельствует следующий факт.

Фон Нейман редко высказывал критические замечания о работах других математиков в категорической форме, предпочитая обычно отшучиваться фразой: «Пусть судят Радамант и Минос! [4]», и считал безусловным табу высказывание каких-либо оценок своих работ. (Как показывает опыт французского издания трудов А. Пуанкаре, прокомментированных раздел за разделом самим А. Пуанкаре, разбор собственных трудов может быть вполне объективным.) Лишь однажды этот запрет был нарушен в связи с приоритетным спором, возникшим между фон Нейманом и французским математиком М. Фреше, который назвал Э. Бореля создателем теории игр.

Небольшая заметка фон Неймана «Замечания по поводу работ Э. Бореля» не только разъясняет точку зрения автора теоремы о минимаксе на предмет спора, но и служит убедительным свидетельством тех высоких критериев, которых придерживался в оценке своих работ фон Нейман. В ней, в частности, говорится следующее:

«Я считаю в принципе нежелательным, чтобы любой автор вступал на страницах печати в спор, отстаивая свой «дом родной», поскольку его оценка работы, в которую он внёс вклад, с необходимостью субъективна. В данном случае я надеюсь, что мою предвзятость несколько компенсируют чувства дружбы и уважения, которые я питаю к проф. М. Фреше. С высказанной им оценкой развития теории игр я решительно не согласен по следующим причинам.

1. Э. Борель был первым, кто разработал понятие стратегии» как чистой, так и смешанной, хотя в своих рассмотрениях он не вышел за пределы случая симметричной игры двух лиц.
2. Важность этого понятия в его руках была существенно преуменьшена вследствие того, что Э. Борелю не удалось доказать имеющую решающее значение «теорему о минимаксе». Он даже подозревал, что эта теорема неверна. Насколько я могу судить, без теоремы о минимаксе на основе одного лишь определения стратегии теория игр не могла бы существовать. Подозревая, что теорема о минимаксе неверна, Борель в действительности подозревал, что теория игр в том виде, в каком она известна нам в настоящее время, невозможна.
3. В силу этих обстоятельств Борель вряд ли мог стать «основоположником» теории. Я развил свои соображения по поводу теоремы о минимаксе до того, как прочитал статью Э. Бореля, чьи отрицательные заключения по главному пункту (относительно теоремы о минимаксе, ибо лишь она делает безусловно полезными введённые Борелем понятия) могли бы лишь разочаровать меня. Я несколько удивлён тем, что проф. Фреше считает одно лишь желание математизировать понятия, относящиеся к стратегиям, и прямое формальное определение чистой стратегии главным аргументом при установлении «основоположника» теории игр. В течение всего периода, о котором идёт речь [фон Нейман имеет в виду 1921–1928 гг.], меня не покидало ощущение, что до того, как доказана теорема о минимаксе, всё остальное не заслуживает опубликования.
4. Мне представляется безосновательным высказанное проф. Фреше мнение о том, что фундаментальная теорема о существовании хороших стратегий (ныне общеизвестная под названием теоремы о минимаксе) была широко известна и, следовательно, несущественна. Действительно, сейчас нам известно несколько простых и прямых доказательств этой теоремы с помощью различных, более или менее классических, теорем о выпуклых множествах. Эта взаимосвязь может показаться очевидной тому, кто впервые познакомился с теорией игр после того, как она обрела свою современную форму (О. Моргенштерн и я в своей книге, написанной в 1943 г., руководствуясь дидактическими соображениями, всячески пытались подчеркнуть эту взаимосвязь). Однако в 1921–1938 гг. всё обстояло иначе. О том, что теорема о минимаксе и её связь с теорией выпуклых множеств были тогда далеко, не очевидны, свидетельствуют следующие факты:
    a. В 1921 г. и позднее Борель подозревал, что теорема о минимаксе или неверна, или может быть неверна.
    b. В 1928 г. я доказал эту теорему, обратив внимание на её связь с теорией неподвижных точек, а не с теорией выпуклых множеств.
    c. В 1935 г. я обобщил теорему о минимаксе (имея в виду её приложения в теории цен и производства), воспользовавшись в ещё более явном виде методом неподвижной точки.

d. Понадобилось десять лет после опубликования моего первоначального доказательства, прежде чем Ж. Вилль в 1938 г. открыл связь теоремы о минимаксе с выпуклыми множествами.
e. Даже сейчас эта связь, как показано после 1945 г. в работах Какутани, Нэша, Брауна и моих, рассказывает о теореме далеко не всё или далеко не в простейшем виде.

Широко распространённое и весьма соблазнительное заблуждение состоит в том, что более поздние этапы развития математической теории считаются постфактум более очевидными и убедительными, чем они были до создания теории.

Вряд ли необходимо подчеркивать, что я испытываю лишь чувство восхищения достижениями Э. Бореля и его гением, и для любого математика иметь непосредственное отношение к его работам и трудиться на территории, по которой некогда проходил Борель, — высокая честь. Однако в силу изложенных выше причин мне представляется необоснованным приписывать Э. Борелю, как это намеревается сделать проф. Фреше, создание теории игр (двух лиц)».

Фон Нейман обладал не только виртуозной математической техникой, позволявшей ему без видимых усилий преодолевать трудности и добиваться успеха там, где отступали другие, но и редкой среди математиков способностью воспринимать новые физические идеи. Особенно ярко сочетание этих необычных свойств проявилось в третьем цикле работ, выполненных фон Нейманом всё в тот же сказочный по широте тематики и продуктивности период с 1927 по 1929 г. — в математическом обосновании квантовой механики. Героический период становления новой отрасли физики совпал с расцветом творческой активности одного из выдающихся математиков современности лишь по счастливой случайности, но то, что новая теория, едва возникнув, привлекла внимание фон Неймана, было вполне закономерно. Фон Нейман, чьи взгляды на необходимость и плодотворность союза математики и естествознания ныне широко известны, фон Нейман, который, по свидетельству С. Улама, и в зрелые годы неоднократно выражал озабоченность тем, что математика держится в стороне от экспоненциального роста проблем и идей в физических науках, фон Нейман, жаждавший восстановить престиж и ведущую роль математики в формировании мышления современного физика-теоретика, не мог предоставить другим выполнить то, к чему он был призван всеми особенностями своего таланта.

Исаак Ньютон, возводя в своих «Математических началах натуральной философии» здание классической механики, был вынужден прибегнуть к новому математическому аппарату: дифференциальному и интегральному исчислению. Понадобилось почти столетие и труд нескольких поколений учёных, прежде чем этот аппарат был строго обоснован. История квантовой механики не знает разрыва между периодом «штурма» и более спокойным периодом «обживания» завоеванных территорий. То, на что в случае классической механики у блестящей плеяды учёных ушло несколько десятилетий, фон Нейман выполнил в одиночку за два года! И это — несмотря на возросшую сложность используемого аппарата и неизмеримо более высокие требования к строгости! Более того, избрав предметом своих рассмотрений едва зародившуюся квантовую механику, математик фон Нейман оказался прозорливее многих физиков, которым «классическая» интуиция и «классическое» мышление мешало воспринимать необычные выводы новой теории.

«Флагманом» цикла работ по математическому обоснованию квантовой механики стала статья «Об основаниях квантовой механики» (1927 г.), написанная фон Нейманом совместно с Д. Гильбертом и Л. Нордгеймом. В основу её была положена лекция об успехах квантовой теории, прочитанная в зимний семестр 1926–1927 гг. Д. Гильбертом. Как отмечалось в введении, наиболее существенная часть математических формулировок и доказательств, приведённых в статье, принадлежала фон Нейману.

Первоначально квантовая механика существовала в двух внешне различных математических «ипостасях»: в виде «волновой механики» Э. Шрёдингера и «матричной механики» В. Гейзенберга, М. Борна и П. Йордана. Эквивалентность их была доказана Шрёдингером. Йордану и Дираку удалось развить новый подход к математическому описанию квантовой теории в рамках так называемой теории преобразований. «Волновая механика» и «матричная механика» при новом подходе возникали как две частные реализации одной математической структуры. Новый подход, отличавшийся необычайной общностью, и был избран авторами статьи «Об основаниях квантовой механики» в качестве исходного пункта предпринятой ими (исторически первой) попытки строгого изложения квантовой механики.

Статья Гильберта, Нордгейма и фон Неймана стала прологом к циклу из семи работ по математическому обоснованию квантовой механики, выполненных фон Нейманом в 1927–1929 гг. В обобщённом варианте они были изложены в его монографии «Математические основы квантовой механики», вышедшей в 1932 г. в знаменитой «жёлтой серии» издательства Шпрингера.

Оценивая через много лет значение книги фон Неймана для всего круга проблем, связанных с математическим обоснованием квантовой механики, С. Улам писал: «Помимо огромной дидактической ценности этого труда, излагавшего идеи новой квантовой теории в форме, отвечающей умонастроению математиков и способной пробудить их профессиональный интерес, он представляет собой вклад в науку, имеющий бесспорно первостепенное значение, если рассматривать его как рациональное изложение физической теории, основанной, как первоначально считали физики, на отнюдь не тривиальных и далеко не очевидных соображениях. Хотя утверждать, что в книге фон Неймана вводятся принципиально новые физические идеи, было бы неверно (и квантовая теория, созданная в те годы Шрёдингером, Гейзенбергом, Дираком и другими, образует не более чем фрагментарный теоретический скелет для ещё более поразительных физических явлений, открытых с тех пор), изложение фон Неймана приводит по крайней мере к одной логически и математически прозрачной основе для строгого обсуждения проблем».

Работы фон Неймана — не схоластические упражнения ригориста. Именно в его работах квантовая механика обрела свой естественный язык — язык операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний. Именно в них была подведена прочная математическая основа под статистическую интерпретацию квантовой механики, введено новое важное понятие матрицы плотности, позволившее развить термодинамику квантовых систем, доказан квантовый аналог *H*-теоремы Больцмана и эргодической теоремы. Именно в них берёт начало другой, не менее известный и значительный цикл работ фон Неймана по теории операторов, далеко выходящий за рамки непосредственных нужд квантовой механики и снискавший фон Нейману заслуженную славу одного из основателей современного функционального анализа.

В статье Гильберта, Нордгейма и фон Неймана квантовая механика излагалась «по Дираку» — в духе так называемой теории преобразований. Прозрачный и изящный, метод Дирака получил широкое распространение, хотя, как это часто бывает с физическими теориями в пору их становления, он не отвечал требованиям математической строгости, «даже если их понизить естественным и разумным образом до обычного в теоретической физике уровня» (фон Нейман).

Дирак исходил из предположения, что любой самосопряжённый оператор можно привести к диагональному виду. Поскольку в классе обычных функций операция приведения к диагональному виду осуществима не для каждого оператора, то Дирак пополнил запас обычных функций некоторыми идеальными элементами («фикциями», по меткому выражению фон Неймана) с весьма необычными свойствами. Несобственные функции Дирака (за которыми в отечественной физико-математической литературе закрепилось название «обобщённые функции», или «дельта-функции Дирака», а за рубежом — «распределений») равны нулю всюду, кроме одной точки, и обладают отличным от нуля интегралом Римана от минус до плюс бесконечности. С введением такого рода «монстров» можно было бы временно мириться, если бы они были органически связаны с новой теорией, как мирились некогда современники и ближайшие потомки Ньютона с флюксиями и флюэнтами, на языке которых излагалась новая тогда классическая механика. Но после выхода в свет работы фон Неймана «Математическое обоснование квантовой механики» (1927) стало ясно, что построение новой физической теории отнюдь не обязательно связывать с созданием теории обобщённых функций, отвечающей всем современным требованиям математической строгости [5].

Фон Нейман показал, что квантовая механика «по Дираку» допускает весьма естественное обоснование в терминах асиоматической теории гильбертова пространства и спектральной теории операторов. Выдержав суровую проверку временем, эти идеи фон Неймана вошли в золотой фонд современной теоретической физики.

По фон Нейману, состояния физических систем описываются векторами в гильбертовом пространстве, а измеримые физические величины (положение, импульс, энергия и т.д.) — действующими на эти векторы неограниченными эрмитовыми операторами. Чтобы вдохнуть жизнь в свою схему квантовой механики, фон Нейману предстояло обобщить результаты своих предшественников (и прежде всего Д. Гильберта, Э. Шмидта и Ф. Рисса) на случай неограниченных операторов. Эта далеко не тривиальная задача была блестяще решена фон Нейманом в работе «Общая спектральная теория эрмитовых операторов» (1929), в которой впервые появилось весьма важное понятие гипермаксимального симметрического оператора (наиболее общего эрмитова оператора со спектральным разложением). Независимо от фон Неймана аналогичные результаты были получены М. Стоуном.

Операторная формулировка квантовой механики позволила фон Нейману подвести прочную основу под статистическую интерпретацию квантовомеханических утверждений. Исход измерения физической величины, производимого над системой, которая находится в определённом квантовом состоянии, по фон Нейману, описывается распределением вероятностей, зависящим от вектора этого состояния и спектрального разложения оператора измеряемой величины.

Формула для распределения вероятностей результатов измерения — математический парафраз статистической интерпретации квантовой механики, предложенной в 1926 г. Максом Борном. Именно эта формула послужила для фон Неймана толчком к построению всей квантовой механики на теоретико-вероятностной основе, осуществлённому в работе, которая так и называлась: «Теоретико-вероятностное построение квантовой механики» (1927). Именно в этой статье фон Нейман ввёл матрицу плотности, ставшую одним из ключевых понятий квантовой статистики. (В современных работах матрицу плотности принято обозначать ρ. В работе фон Неймана она обозначена U.)

Матрица плотности позволила фон Нейману получить квантовый аналог классической формулы для энтропии и тем самым заложить основы квантовой термодинамики, а позднее сформулировать и доказать для квантовых систем *H*-теорему и эргодическую теорему.

Значимость вклада, внесённого фон Нейманом в математическое обоснование квантовой механики, тем более велика, что в «героический период» её становления статистическая интерпретация квантовомеханических утверждений вызывала у многих физиков ностальгию по утраченному детерминизму. Они не верили в «бога, играющего в кости» (А. Эйнштейн). «Классически» мыслящие физики надеялись, что и квантовая механика станет детерминистской теорией, если будут учтены «скрытые параметры», описывающие состояние наблюдателя (не случайно М. Борн был удостоен Нобелевской премии за статистическую интерпретацию квантовой механики много позднее других создателей новой теории).

Фон Нейман, проявив глубокое понимание истинных причин статистического характера квантовомеханических утверждений и недюжинную физическую интуицию, показал, что неопределённость в теоретическом предсказании исхода измерения остаётся и при переходе к более широкой системе, включающей в себя как объект измерения, так и самого наблюдателя. Статистическая природа квантовомеханических утверждений, по фон Нейману, следует из первых принципов теории и, в частности, из представления квантовомеханических величин операторами в гильбертовом пространстве состояний.

Выходом в свет «Математических основ квантовой механики» (1932), по существу, завершается наиболее напряжённый и плодотворный период деятельности фон Неймана по математическому обоснованию квантовой механики. Период прямого обращения к математическим проблемам новой теории сменяется «латентным» периодом изучения её логической структуры и поисков возможных обобщений алгебраических основ. Лишь дважды фон Нейман публикует работы, отражающие его неугасающий интерес к квантовой механике и современной физике: в 1934 г. выходит в свет статья «Об алгебраическом обобщении квантовомеханического формализма» (написанная в соавторстве с П. Йорданом и Е. Вигнером); в 1936 г. появляется статья «Логика квантовой механики» (написанная совместно с Дж. Биркгофом). В первой работе речь идет об алгебраических структурах на множестве состояний, отличных от традиционной структуры. Во второй работе излагается своеобразное логическое исчисление со значениями истинности, непрерывно распределёнными от нуля до единицы.

Во всех остальных публикациях интерес к проблемам квантовой механики, никогда не угасавший окончательно, как бы тлевший под слоем новых интересов и обязанностей, проявляется лишь косвенно. Следы неоднократно предпринимавшихся попыток сформулировать квантовую механику на языке общей теории булевых алгебр или теории структур Биркгофа сохранились лишь в виде разрозненных заметок в архиве фон Неймана. Его работы по проективным геометриям пространств непрерывной размерности, геометриям без точек, так же как и исследования по теории операторов, были инициированы размышлениями над проблемами квантовой механики, неустанными поисками наиболее естественного языка для неё.

В 1929 г. фон Нейман получает приглашение прочитать в течение одного семестра цикл лекций в Принстонском университете.

ДЖОННИ

По другую сторону Атлантики фон Нейман впервые оказался в 1930 г. и, по свидетельству близко знавшего его ещё со школьной скамьи Е. Вигнера, сразу «почувствовал себя в общественной и научной атмосфере Принстона, как рыба в воде». Живому и общительному фон Нейману импонировал чуждый условности стиль общения и работы, принятый в одном из лучших университетов Америки и столь разительно контрастировавший с официальностью (чтобы не сказать казёнщиной), чопорностью и чинопочитанием, которые царили в высших учебных заведениях Германии того времени.

Вскоре после своего приезда приват-доцент Гамбургского университета Иоганн фон Нейман для многих коллег становится просто Джонни. В этом ласковом уменьшительном от английской транскрипции имени фон Неймана не только отзвук тех тёплых чувств, которые питали к фон Нейману его новые сотрудники, но свидетельство его стремления влиться в новую среду. На слух неофита «Джонни» звучит так по-американски.

Приглашение было продлено, а в 1931 г. фон Нейман окончательно расстаётся с Гамбургским университетом, с тем, чтобы принять профессуру в Принстоне. К решению обосноваться в США фон Нейман пришёл по зрелом размышлении в прозорливом предвидении ухудшения политической обстановки в Германии, которая не могла не сказаться отрицательно на научной жизни, и после трезвого подсчёта шансов на получение профессуры в Германии (по оценке фон Неймана, в обозримом будущем могло открыться не более трёх вакансий, в то время как претендентов набиралось более трёх дюжин).

Незадолго до своего первого визита в Принстон фон Нейман женился на Мариэтте Кевеши. В 1935 г. у них родилась дочь Марина. Радушие и гостеприимство фон Нейманов, у которых «на огонёк» часто собирались и приезжие из Европы, и постоянные обитатели Принстона, надолго запомнились тем, кто имел счастье побывать в доме фон Нейманов. Память об этих вечерах, ставших своеобразной достопримечательностью Принстона, сохранилась и после того, как в 1937 г. брак фон Неймана с Мариэттой Кевеши распался. Из очередной поездки на летние каникулы в Будапешт в 1938 г. фон Нейман вернулся со второй женой — урождённой Кларой Дан. Позднее, в годы второй мировой войны, Клара фон Нейман стала программисткой. Ей принадлежат первые программы для электронных вычислительных машин, в разработку и создание которых её муж внёс неоценимый вклад.

Прибытие фон Неймана в Принстон совпало с важным событием в научной жизни Америки — основанием в Принстоне Института высших исследований (решение о создании института было принято 20 мая 1930 г., но функционировать он начал лишь через два с половиной года — в 1933 г.). По замыслу основателей института А. Флекснера, О. Веблена, их друзей Луи Бамберджера и его сестры миссис Феликс Фулд, взявших на себя финансирование предприятия, он призван «поощрять, поддерживать и опекать изучение науки в старом, широком и недифференцированном смысле этого слова» (Р. Оппенгеймер).

Институт высших исследований, который существует и сейчас, — учреждение весьма необычное. Он сочетает в себе особенности высшего учебного заведения и научно-исследовательского института, отличаясь в то же время от того и другого. От учебного заведения институт отличается отсутствием обязательной учебной программы, свойственного многим университетам стремления охватить как можно больше отраслей современной науки и т.д. От научно-исследовательского института обычного типа принстонский Институт высших исследований отличается отсутствием узкой специализации. Но, пожалуй, главное отличие Института высших исследований от учебного заведения и научно-исследовательского института состоит в том, что каждый член института является одновременно и студентом, и преподавателем. Основная цель института заключается в том, чтобы предоставить своим членам возможность заниматься самостоятельной научной работой. Учитывая ограниченные финансовые средства института и сложность создания современных лабораторий, оснащённых по последнему слову техники, основатели института сочли необходимым ограничить его деятельность теоретическими (или, лучше сказать, неэкспериментальными) областями науки. Первоначально тематика института ограничивалась физико-математическими дисциплинами. Впоследствии к Математической школе, объединяющей физиков и математиков, прибавилась Школа исторических исследований, объединяющая гуманитариев.

Во главе Института высших исследований стоит совет попечителей, насчитывающий 15 членов, и избираемый советом директор, несущий всю полноту ответственности за научную деятельность. Пост директора на протяжении многих лет занимал Роберт Оппенгеймер.

Первоначально предполагалось учредить при институте аспирантуру, с тем чтобы предоставить молодым учёным возможность совершенствоваться в избранной области науки и защищать диссертации на соискание учёной степени. По замыслу основателей Института, для этого требовалось создать специальный факультет, обслуживаемый небольшим числом профессоров. Не обременённые чтением обязательных курсов для студентов, профессора могли бы всё своё время уделять научной работе и руководить аспирантами.

Однако с самого начала деятельность института приняла иное направление. За всю историю своего существования Институт высших исследований не присудил ни одной учёной степени.

Стать временным членом института по неписаному, но неуклонно соблюдаемому правилу может лишь обладатель высшей научной степени.

Первыми профессорами Института высших исследований стали Освальд Веблен (1932) и Альберт Эйнштейн (1933). В 1933 г. этой высокой чести был удостоен и тридцатилетний Джон фон Нейман. Профессором института он оставался до конца жизни, несмотря на обременявшие его многочисленные обязанности. Самый молодой из постоянных членов института, он умер в 1957 г., так и не успев достигнуть предельного возраста и выйти в отставку.

ЭСКИЗЫ К ПОРТРЕТУ

Каким был Джон фон Нейман в жизни? Интересовало ли его что-нибудь помимо математики? Сознавал ли он свою исключительную одарённость и проявлялось ли это каким-либо образом в его манере общения с людьми? Ответы на эти (и многие другие) вопросы мы находим в воспоминаниях тех, кто хорошо знал фон Неймана, и в первую очередь в воспоминаниях Е. Вигнера и С. Улама. Сопоставляя и сравнивая то, что запечатлела память этих двух людей, мы отчётливо выделяем непустое пересечение характерных черт и чёрточек, выражающих наиболее существенные особенности его личности и внешнего облика (симметрическая разность воспоминаний, по-видимому, выражает менее существенные черты и, быть может, отчасти связана с особенностями личного восприятия Вигнера и Улама).

«Безупречная логика была наиболее характерной чертой его мышления, — пишет Е. Вигнер. — Ещё более поразительным был свойственный ему блеск мышления... Третьей отличительной чертой его ума была замечательная память, позволявшая ему помимо научной работы иметь десятки увлечений. Он был историком-любителем, осведомлённость которого в событиях огромных периодов истории не уступала осведомлённости профессионала, свободно говорил на пяти языках и умел читать по-латыни и по-гречески. Он прочитал и помнил содержание многих книг, как художественных, так и научно-популярных по другим областям науки. Из всех тем, на которые автору этих строк доводилось когда-либо беседовать с фон Нейманом, лишь описательные естественные науки не вызывали у него интереса. Фон Нейман всегда был готов помочь любому, кто обращался к нему за советом, и искренне радовался любой трудной проблеме...

Глубокое чувство юмора и незаурядный дар рассказчика различных историй и анекдотов вызывали симпатию к фон Нейману даже у случайных знакомых. Если нужно, он мог быть резким, но никогда не был напыщенным и чванным. Фон Нейман с его безукоризненной логикой понимал и соглашался со многим из того, что большинство из нас не хотело принимать и даже понимать. Это ощущалось во многих высказываниях фон Неймана на темы морали. «Сетовать на эгоизм и вероломство людей так же глупо, как сетовать на то, что магнитное поле не может возрастать, если ротор электрического поля равен нулю: то и другое — законы природы». Лишь научная, интеллектуальная нечестность и присвоение чужих результатов вызывали его гнев и негодование независимо от того, кто был пострадавшим — он сам или кто-либо другой».

«Друзья Джонни, — читаем мы у С. Улама, — помнят его в характерных позах — стоящим у доски или обсуждающим проблемы у себя дома. Каким-то образом его жест, улыбка и выражение глаз всегда отражали характер обдумываемой идеи или суть обсуждавшейся проблемы. Он был среднего роста. Очень худой в юности, фон Нейман с годами располнел. Передвигался он мелкими шажками со случайным ускорением, но никогда не развивал большой скорости. Лицо его озарялось улыбкой, если задача обнаруживала черты логического или математического пародокса. Несмотря на любовь к абстрактным шуткам, Джонни высокого ценил и более земной тип комедии и юмора (можно сказать, жаждал его).

Разуму фон Неймана были присущи несколько особенностей, если и не исключающих друг друга, то во всяком случае имеющих между собой мало общего и требующих поэтому памяти и умения сосредоточиться, которыми редко бывает наделён один интеллект. К числу этих особенностей относятся: склонность к математическому мышлению на теоретико-множественной и формально алгебраической основе, знание и глубокое понимание существа классической математики в анализе и в геометрии и способность тонко чувствовать потенциальные возможности современных математических методов для формулировки проблем теоретической физики, которые существуют ныне и возникнут в будущем. Все эти отличительные особенности мышления фон Неймана наиболее отчётливо проявились в его блестящих и глубоко оригинальных работах, охватывающих широкий спектр современной научной мысли.

Беседы Джонни с друзьями на научные темы могли длиться часами. В выборе тем недостатка не было, даже если речь шла о вопросах, далёких от математики.

Джонни питал живой интерес к людям, сплетни необычайно забавляли его. Казалось, он накапливает в своей памяти коллекцию человеческих причуд, слабостей и т.п., как бы собирая материал для статистического исследования.

...Джонни обладал исключительными способностями и ясно сознавал это. Тем не менее он был лишён самоуверенности и восхищался математиками и физиками, обладавшими качествами, которыми, по его мнению, он сам не был наделён в должной мере. Такими качествами были интуитивное постижение новых истин и способность иррационально угадывать доказательства или формулировки новых теорем.

...Друзьям Джонни нравилось присущее ему тонкое чувство юмора. В обществе учёных коллег он иногда комментировал, обычно иронически, исторические события, придавая своим замечаниям форму математических утверждений. Соль шутки, как правило, заключалась в высказывании, справедливом только для пустого множества. Его шутки иногда могли по достоинству оценить только математики.

...Если не считать точных наук, Джонни больше всего привлекало изучение истории. Древнюю историю он знал до мельчайших подробностей. Например, он держал в памяти весь анекдотический материал из «Заката и падения Римской империи» Гиббона и после обеда охотно пускался в разговор на исторические темы. Однажды, когда мы направлялись на заседание Американского математического общества в университете Дьюка, нам довелось проезжать вблизи мест, где разыгрывались сражения гражданской войны, и он поразил нас знанием мельчайших подробностей минувших сражений. Энциклопедические познания в области истории питали его взгляды на развитие грядущих событий. Его предсказания как бы носили характер аналитического продолжения.

...Помимо других дарований Джонни был превосходным лингвистом. Он хорошо помнил школьную латынь и греческий. Кроме английского, он бегло говорил по-немецки и по-французски. Его лекции в США славились своими высокими литературными достоинствами (Джонни допускал характерные ошибки в произношении, например, вместо «интеджерс» — целые числа — произносил «интегерс»), которые его друзья всегда ждали с радостным оживлением. Во время визитов в Лос-Аламос и Санта-Фе он обнаружил знание испанского, правда, далёкое от совершенства, а во время поездки в Мексику пытался объясняться на «неокастильском» — языке своего собственного изобретения (к английским словам присоединялась приставка «эль» и соответствующее испанское окончание)».

Если отвлечься от второстепенных деталей, то оба эскиза к портрету фон Неймана в основном совпадают. Запечатлённый в них образ живого, увлечённого человека менее всего походит на гротескную фигуру профессора из традиционных анекдотов о математиках. Оба эскиза выполнены с натуры, по личным воспоминаниям, и сходство между ними позволяет надеяться, что в них ухвачены и верно переданы наиболее существенные и характерные черты Джона фон Неймана, человека и математика.

«НЕОЖИДАННАЯ ПОМОЩЬ»

Было бы неверно утверждать, что математическое творчество фон Неймана питалось только идеями, индуцированными запросами теоретической физики, сколь бы рафинированными и изысканными те ни были. Необычайно широкий математический кругозор фон Неймана, его поразительная осведомлённость о состоянии дел в самых различных областях математики и виртуозное владение всем арсеналом средств современной математики позволяли ему обнаруживать «неожиданную помощь» [6], которую один из разделов математики может оказать. другому, а аксиоматический метод и склонность к абстрактному мышлению, необычная даже для математиков его ранга, — доискиваться до первопричин каждого такого открытия. Так, топологическая теорема Брауэра о неподвижной точке позволила фон Нейману доказать теорему о минимаксе, работа Купмана «Гамильтоновы системы и преобразования в гильбертовом пространстве» — получить первый математически строго доказанный результат в статистической механике (доказательство так называемой статистической эргодической теоремы), работа Хаара «Понятие меры в теории непрерывных групп» — частично решить (для компактных групп) пятую проблему Гильберта.

Занимаясь в 1929–1932 гг. теорией операторов в связи с математическим обоснованием квантовой механики, фон Нейман осознал, что многие свойства операторов проявляются лишь при рассмотрении алгебраической структуры семейств операторов (алгебр полиномов от операторов и их замыканий в различных операторных топологиях) и действия этих семейств в гильбертовом пространстве. Предвосхищая одно из основных направлений в последующем развитии функционального анализа и понимая важность теории семейств операторов, наделённых определённой алгебраической структурой, для теории представлений групп, эргодической теории и квантовой механики, фон Нейман в работе «Об алгебре функциональных операторов и теории нормальных операторов» (1929) приступил к изучению важного типа семейств операторов в гильбертовом пространстве — так называемых колец операторов, или W^*-алгебр. Впоследствии за ними с лёгкой руки Дж. Диксмье закрепилось название алгебр фон Неймана.

Гильбертово пространство, впервые возникшее как объект математической теории в работах Гильберта по интегральным уравнениям и ставшее после основополагающих работ фон Неймана основной ареной, на которой разыгрываются события в квантовой механике, — это не что иное, как полное бесконечномерное евклидово пространство, т.е. бесконечномерное линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, введённой скалярным произведением.

На заре квантовой механики В. Гейзенберг при построении «матричной механики» использовал гильбертово пространство l_2 последовательностей со сходящейся суммой квадратов членов, а Э. Шрёдингер при построении «волновой механики» — гильбертово пространство L_2 функций, интегрируемых с квадратом. Оба этих гильбертовых пространства изоморфны (физическая эквивалентность обоих подходов была установлена Шрёдингером).

Метрика в гильбертовом пространстве позволяет ввести понятие сходимости (или топологию) в множество операторов, действующих на гильбертовом пространстве. Если последовательностью операторов подействовать на произвольный вектор гильбертова пространства, то он перейдёт в последовательность векторов-образов, по свойствам которой можно судить о сходимости последовательности операторов. В зависимости от того, в каком смысле понимается сходимость последовательности образов исходного вектора в гильбертовом пространстве, различают несколько операторных топологий. «Множество различных операторных топологий, — замечает известный специалист по функциональному анализу Р. В. Кадисон, — предназначено отнюдь не для того, чтобы умножать число доказываемых теорем. Операторные топологии возникают в важных ситуациях, как правило, не оставляя исследователю свободы выбора. Они как бы пришиты к определённому месту в доказательстве. Фон Нейман первым осознал важность введения нужной операторной топологии в нужном месте, развил этот приём и широко использовал его».

Мы говорим, что последовательность операторов A_k сходится к оператору A в сильной операторной топологии, если нормы разностей $A_k f - A f$ сходятся к нулю при любом векторе f из гильбертова пространства. Мы говорим, что последовательность операторов A_k сходится к оператору A в слабой операторной топологии, если скалярные произведения $(A_k f - A f, g)$ сходятся к нулю при любых векторах f и g из гильбертова пространства.

Если операторы, принадлежащие некоторому семейству, образуют последовательность, сходящуюся в той или иной операторной топологии, то предел последовательности может не принадлежать самому семейству. Присоединив к семейству пределы всевозможных последовательностей, образованных его операторами, мы получим замыкание семейства в соответствующей операторной топологии.

Семейства операторов могут быть наделены структурой, например, быть алгебрами, группами, полугруппами и т.д.

Математическая структура — это множество, между элементами которого аксиоматически заданы те или иные отношения.

Установление абстрактной структуры, скрывающейся за индивидуальными особенностями конкретного множества с заданными на нём операциями, — вопрос далеко не праздный, и математики занимаются им отнюдь не из любви к терминологическим новшествам. Принадлежность множества с теми или иными операциями, или отношениями между элементами, к определённой разновидности структур как бы высвечивает его внутреннюю сущность. Свойства, «унаследованные» множеством от абстрактной структуры, как правило, глубже и фундаментальнее его индивидуальных свойств, которые, варьируются от множества к множеству и носят преходящий характер. По словам Н. Бурбаки, «структуры являются орудиями математика; каждый раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определённого типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он был бы должен мучительно трудиться, сам выковывая средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причём их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы».

Алгебра — это множество, на котором заданы две операции, аксиомы которых воспроизводят все свойства сложения и почти все свойства умножения. В большинстве случаев умножение операторов не удовлетворяет переместительному, или коммутативному, закону: $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то говорят, что операторы A и B коммутируют. Нарушение коммутативности Г. Вейль прокомментировал следующим образом: «С этим правилом, — хотя, быть может, и не с его математическим выражением, — вы все знакомы. Когда вы одеваетесь, то отнюдь не безразлично, в каком порядке вы производите операции. Если при одевании вы начинаете с рубашки и заканчиваете пальто, то при раздевании порядок оказывается обратным: сначала вы снимаете пальто, рубашку же — в самом конце».

Оператор B называется сопряжённым оператору A, если $(A f, g) \sim (f, Bg)$ для любых векторов f, g гильбертова пространства. Семейство операторов называется самосопряжённым, если вместе с каждым своим оператором оно содержит и сопряжённый оператор. Алгебра фон Неймана — это самосопряжённая алгебра, замкнутая в слабой операторной топологии.

Первая же работа фон Неймана по теории алгебр, носящих ныне его имя, содержала важный результат, ставший впоследствии удобным инструментом исследования этих алгебр — так называемую теорему о двойном коммутанте. Но планомерный штурм теории слабо замкнутых самосопряжённых операторных алгебр был осуществлён в серии из четырёх работ «О кольцах операторов», из которых первая и заключительная были написаны фон Нейманом в соавторстве с Ф. Дж. Мюрреем (первая работа вышла в 1936 г.).

Фон Нейман и Мюррей начали с рассмотрения важного частного случая алгебр фон Неймана — так называемых факторов, иначе говоря, алгебр фон Неймана, центр которых (множество операторов, коммутирующих со всеми операторами алгебры) состоит из скалярных, кратных единичному операторов алгебры, т.е. операторов, отличающихся от единичного числовым множителем.

Фон Нейман и Мюррей построили исчерпывающую классификацию факторов — такого разбиения множества всех факторов на классы, при котором каждый фактор принадлежит одному и только одному классу.

Предпринятые впоследствии попытки других математиков обобщить результаты фон Неймана—Мюррея на произвольные алгебры фон Неймана увенчались лишь частичным успехом. Для факторов новая классификация совпадает с классификацией фон Неймана—Мюррея, но в общем случае не охватывает всех алгебр фон Неймана.

Фон Нейман и Мюррей показали, что существует функция (так называемая относительная размерность операторов проектирования), область значения которой может быть лишь пяти типов, причём каждый тип соответствует одному и только одному классу факторов. Эта функция определена с точностью до постоянного множителя. Варьируя его выбор, можно в известных пределах изменять область определения относительной размерности. Фон Нейман и Мюррей показали, что если область определения введённой ими функции при определённом выборе постоянного множителя совпадает либо с $\{0, 1, ..., n\}$, либо с $\{0, 1, ..., \infty\}$, то фактор принадлежит к типу I (соответственно к подтипам I_n и I_∞). Если область значений совпадает с отрезком $[0, 1]$, то фактор принадлежит к типу II_1, а если область значений совпадает с положительной полуосью $[0, +\infty]$, то к типу II_∞. Наконец, если область значений содержит только две точки 0 и $+\infty$, то фактор принадлежит к типу III. В зависимости от свойств области определения относительной размерности фон Нейман и Мюррей подразделяли факторы на дискретные и непрерывные, конечные и бесконечные, полуконечные и чисто бесконечные.

Открытие факторов рода II и III было довольно неожиданным. До появления работ фон Неймана и Мюррея о существовании таких факторов никто даже не подозревал. И снова — «неожиданная помощь»: используя соображения эргодической теории и абстрактной теории меры, что само по себе было новшеством, так как обе теории в ту пору ещё не получили должного развития, фон Нейман и Мюррей построили целый класс примеров факторов типа II_1 и II_∞.

В классификации фон Неймана и Мюррея отчётливо проглядывалась алгебраическая основа: факторы каждого из пяти типов обладали различными алгебраическими свойствами, или, говоря техническим языком, были алгебраически неизоморфны. Важный вопрос, к решению которого фон Нейман и Мюррей неоднократно возвращались на протяжении многолетней работы над «Кольцами операторов», состоял в том, различимы ли по своим алгебраическим свойствам факторы одного типа, т.е. полна ли алгебраическая классификация факторов или в неё необходимо вводить более тонкие градации. Ответ, свидетельствующий скорее о трудности проблемы, чем о её решении, был получен в заключительной, четвёртой части цикла (1943 г.). Исходя из совершенно иных идей и используя совершенно иную технику, т.е. прибегая к «неожиданной помощи» совершенно с другой стороны, фон Нейман и Мюррей построили ещё один класс факторов II_1 по крайней мере внешне отличный от того, который они построили на основе соображений эргодической теории. К сожалению, до сих пор не доказано, что факторы этих двух классов алгебраически неизоморфны. Не доказано также, что факторами этих двух классов, если они неизоморфны, исчерпывается алгебраическая классификация факторов типа II_1, т.е. что каждый фактор этого типа изоморфен факторам одного из двух «предъявленных» фон Нейманом и Мюрреем классов.

Цикл «О кольцах операторов» оставил заметный след в математике. Фон Нейман и Мюррей не только получали, но и щедро оказывали «неожиданную помощь». Так, построение факторов типа III потребовало от фон Неймана разработки основ довольно необычной и экзотической «теории некоммутативного интегрирования». И, как всегда, возникшая проблема была решена с блеском и остроумием в объёме, намного превышающем нужды породившей её теории.

Другой, не менее существенный вклад фон Нейман и Мюррей внесли в развитие теории неограниченных операторов. Оценивая его, Кадисон писал: «С момента своего зарождения теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве была неодолимым искушением для математиков, которым доводилось соприкасаться с ней. Элементарные, чисто формальные манипуляции самого разумного рода приносили столь высокие дивиденды, как решение пятой проблемы Гильберта или трудно добываемые результаты чисто аналитического характера. Многие из расчётов в квантовой теории в той или иной форме также связаны с неограниченными операторами. К сожалению, большая часть этих формальных манипуляций не допускает обоснования, и именно фон Нейман указал опасности, которыми отпугивает эта область математики. Тем не менее, когда формально столь привлекательные маневры с такой лёгкостью приводят к долгожданным результатам, то невольно начинаешь мечтать о «мире», в котором эти манёвры обоснованы. Фон Нейман не был исключением. Открыв факторы типа II_1, Мюррей и фон Нейман сотворили именно такой «мир».

...Решающая трудность в формальных манипуляциях с неограниченными операторами заключается в том, что область определения и область значений одного неограниченного оператора не связана с областью определения и областью значения другого. Когда же мы твёрдо знаем, что эти множества содержат много общих векторов, то значительная часть трудностей испаряется». Именно так и обстоит дело в случае факторов типа II_1.

К циклу «О кольцах операторов» непосредственно примыкают две большие работы фон Неймана: «О бесконечных прямых произведениях» (1938) и «О кольцах операторов. Теория разложения» (1949). В первой работе фон Нейман рассматривает бесконечные прямые произведения гильбертовых пространств и алгебры ограниченных операторов на них, во второй — прямой интеграл гильбертовых пространств и алгебры фон Неймана на них, но главный результат второй работы, как бы подводящей итог всему циклу «О кольцах операторов» и объясняющей, почему фон Нейман и Мюррей уделили столь большое внимание факторам, — теорема о разложении произвольной алгебры фон Неймана в прямой интеграл факторов. В этой же работе фон Нейман доказывает ещё одно замечательное утверждение — так называемую полную спектральную теорему, которая, как показали математики Л. Гординг и А. Уайтман, играет основополагающую роль в математическом аппарате квантовой теории поля, поскольку именно на ней основаны все теоремы о разложениях по собственным функциям.

Последним документально засвидетельствованным обращением фон Неймана к теории операторов был его доклад о проблемах функционального анализа на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954). Текст доклада не сохранился. Поездка в Амстердам стала последним визитом фон Неймана в Европу.

Сколь интенсивной и целенаправленной ни была работа по теории операторов, универсальный ум фон Неймана был занят не только проблемами функционального анализа. Фон Нейман выступает с многочисленными докладами перед различными учёными обществами. Одна за другой выходят в свет работы по математической статистике, теории почти периодических функций на группах, статистике гравитационного поля, создаваемого случайным распределением звёзд, численному обращению матриц высокого порядка, фундаментальный труд «Теория игр и экономическое поведение» (1944), написанный в соавторстве с О. Моргенштерном. Даже этого далеко не полного перечня достаточно, чтобы представить себе гигантский размах научной деятельности фон Неймана, его живой интерес к любимой науке, его колоссальный научный потенциал.

В огромном здании современной математики для фон Неймана не было закрытых дверей. Когда во время работы над третьей частью «Колец операторов» фон Нейману понадобилось обратиться к теории меры, он, по свидетельству известного специалиста по теории меры и эргодической теории П. Р. Халмоша, «с радостью оторвался от работы, чтобы написать учебник по теории меры». Мимеографированные экземпляры двух оригинальных курсов лекций по теории меры, прочитанных фон Нейманом в Институте высших исследований в 1934 и в 1940 гг., находились в библиотеке института. Не один американский математик изучал теорию меры «по фон Нейману».

ДЖОНИАК

В конце 30-х годов внимание фон Неймана привлекла гидродинамика — наука, включающая в себя «физику двух из трёх самых общих состояний материи — жидкого и газообразного» (Дж. Биркгоф). Сложная система нелинейных уравнений, описывающая гидродинамические явления в традиционном варианте теории, допускает точное аналитическое решение лишь в исключительных случаях и обладает многими свойствами (например, допускает разрывы или неединственность решений), противоречащими всему опыту, накопленному классическим линейным анализом. В те годы эти свойства казались загадочными и непонятными. Неконтролируемые физические и математические допущения, вводимые для упрощения задачи, нередко противоречили основным предположениям теории и обесценивали получаемые приближённые результаты. Такое положение дел не могло удовлетворить фон Неймана, и он одним из первых понял несбыточность надежд на будущее развитие теории, которое позволило бы найти точные решения. В докладе на симпозиуме по движению масс газа космических размеров (1949) он писал: «Вопрос о том, реализуется ли в природе решение, найденное математическим путем, и можно ли исключить заранее существование нескольких решений с теми или иными хорошими или плохими свойствами, очень труден и неоднозначен. Этот вопрос обсуждался как в классической, так и более современной литературе на самых различных уровнях строгости и её прямой противоположности. Резюмируя, можно сказать, что в указанной области трудно прийти к какому-нибудь определённому выводу. Если воспользоваться математической терминологией, то положение, в котором мы сейчас находимся, можно назвать состоянием непрерывной неопределённости, поскольку обычные теоремы существования и единственности решения, которыми нам очень хотелось бы располагать, никогда и никем не были доказаны и, по всей видимости, неверны в своей традиционной форме.

...Таким образом, гидродинамика оставляет огромный диапазон математических возможностей относительно допущения разрывов, требования разумного термодинамического поведения и т.д. Весьма вероятно, что существует некий набор условий, при котором каждая разумно поставленная задача допускает одно и только одно решение. Однако нам остаётся лишь догадываться, какие условия могут входить в него, и в поиске его мы можем полагаться почти исключительно на физическую интуицию. Следовательно, мы ни в чём не можем быть твёрдо уверены. О любом решении, с какой бы точностью оно ни было получено, мы не можем утверждать, что оно непременно должно существовать в природе».

Фон Нейман, накопивший за годы войны уникальный опыт численных расчётов на быстродействующих машинах первого поколения (в создании которых он принимал непосредственное участие), усматривал выход из затруднений в особом подходе к использованию вычислительных машин, получившем название эвристического подхода.

Накопление сведений об изучаемом явлении на нестрогом, эвристическом уровне на основе численного эксперимента, создание интуитивной схемы явления, проверка её на следующем этапе численного эксперимента и, наконец, построение строгой теории — таковы основные этапы эвристического подхода к исследованию нелинейной задачи по фон Нейману.

Одно из крупнейших событий в современной математической физике, заставившее специалистов отрешиться от «линейного наследия», подтвердившее правильность пророческих слов Л. И. Мандельштама о необходимости выработки «нелинейного» мышления, — открытие солитона — произошло в русле идей именно эвристического подхода.

В 1949 г. С. Улам, Дж. Паста и Э. Ферми решили проверить при помощи численного эксперимента, выполняется ли одна из основных гипотез статистической механики — гипотеза о равнораспределении энергии по степеням свободы для системы нелинейных осцилляторов (системы грузиков с пружинками, возвращающая сила которых пропорциональна кубу смещения грузиков из положения равновесия). Выяснилось, что никакой тенденции к равнораспределению не наблюдается: энергия локализуется то в одной, то в другой группе мод (колебаний с определённой частотой), не «расплываясь». Возникший парадокс был разрешён лишь в начале 60-х годов Н. Забуским и М. Д. Крускалом, которые показали, что Ферми, Паста и Улам в своём численном эксперименте наблюдали уединённую волну, за которой в 1838 г. скакал верхом на коне Дж. Скотт-Расселл и которая является решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка Кортевега—де Фриза (1895). Сохраняя форму, уединённая волна не позволяла энергии распределиться по степеням свободы. В проведённом ими численном эксперименте, многократно повторенном впоследствии целой армией исследователей, Забуский и Крускал обнаружили, что при столкновении уединённые волны уравнения Кортевега—де Фриза ведут себя, как упругие частицы, и назвали их солитонами (от англ. solitary wave — уединённая волна, «он» — окончание названий для частиц (фотон, протон, нейтрон, мюон и т.д.). Открытие солитона привлекло внимание исследователей к сказочному миру нелинейных явлений и послужило стимулом к разработке мощных аналитических методов решения отдельных классов нелинейных уравнений (в частности, к созданию знаменитого метода обратной задачи теории рассеяния).

Без эвристической прикидки в наше время не обходится ни одно серьёзное исследование нелинейной проблемы.

Помимо обычных компонент успеха эвристический подход фон Неймана предполагает использование быстродействующих вычислительных машин и наличие соответствующего математического обеспечения. Чтобы диалог между человеком и машиной протекал как можно более непринуждённо, фон Нейман разделил процесс программирования на два этапа. На первом этапе вычислитель составляет блок-схему программы, «язык» которой достаточно близок и понятен программисту. На втором этапе блок-схема по строго установленным правилам записывается в кодах машины. Таким образом процесс составления программы уподобляется переводу с человеческого языка на язык машины. Та же идея воплощена и в работе современных трансляторов, осуществляющих автоматический перевод с «входного» языка программирования (формализованного человеческого языка с упрощёнными лексикой и синтаксисом, приспособленными к описанию определённого класса алгоритмов) на выходной язык (в машинных кодах).

Численный анализ также многим обязан фон Нейману. Известный специалист по численному анализу А. С. Хаусхолдер даже считает, что «численный анализ как общепризнанная научная дисциплина, можно сказать, появился в 1947 г. В этом году произошли два совершенно независимых события, которые возымели действие на последующее развитие численного анализа. Первое событие произошло в июле. Именно в этом месяце Национальное бюро стандартов США открыло Национальную лабораторию прикладной математики, одно из отделений которой называлось Институт численного анализа. Вторым событием, происшедшим в ноябре, стал выход в свет ныне классической статьи Голдстайна и фон Неймана «Численное обращение матриц высокого порядка». В ней были рассмотрены важные для решения многих прикладных задач вопросы решения больших систем линейных уравнений.

Фон Нейман рассмотрел также и многие другие вопросы численного анализа: разностные схемы для решения уравнений с частными производными, округление и накопление ошибок, устойчивость алгоритмов и др. Вместе с Д. Р. Рихтмайером он предложил получивший широкое распространение метод фиктивной вязкости. Введение в уравнения газовой динамики фиктивного вязкого члена приводило к размыванию разрывов. Разрывные решения превращались в непрерывные, а сам разрыв — в область быстрого изменения соответствующих величин, сосредоточенную в окрестности бывшего разрыва. «Хитрость» состояла в том, что отпадала необходимость в задании краевых условий на разрыве, положение которого требовалось находить в процессе счёта. По окончании вычислений фиктивная вязкость устремлялась к нулю, и газ вновь становился невязким. Введение фиктивной вязкости нашло применение и в других задачах.

Фон Нейман принадлежит к числу создателей эффективного численного метода решения многомерных задач математической физики — метода Монте-Карло. Преимущество этого метода состоит в том, что он «срабатывает» там, где отказывают другие численные методы, и позволяет находить решения, казалось бы, безнадёжных задач.

Метод Монте-Карло, или, как его ещё называют, метод статистических испытаний, основан на замене решаемой задачи некоторой вероятностной моделью. Параметры модели дают приближённое решение исходной задачи. Например, площадь фигуры, вписанной в единичный квадрат, можно найти, если наугад разбросать по квадрату точки (координаты точек — случайные величины, равномерно распределённые на единичном отрезке) и подсчитать, какую долю от общего числа точек составляют те, которые попали на фигуру. Вычисление многомерного интеграла по методу Монте-Карло основано на той же идее, и имеет преимущество по сравнению с обычными кубатурными формулами, число точек в которых быстро возрастает с размерностью пространства.

После того как вероятностная модель найдена, для решения задачи по методу Монте-Карло необходимо иметь датчик случайных чисел, позволяющий генерировать случайные точки с нужным распределением вероятности. Один из первых и наиболее простых датчиков был предложен фон Нейманом и основан на выборе «середины произведения»: произвольное $2n$-значное двоичное число возводится в квадрат (состоящий из $4n$ цифр), из которого вырезается n-значное число, стоящее в середине (от $n+1$ до $3n$-го знака). После многократного повторения возникает некоторая последовательность псевдослучайных чисел (правда, с распределением, отличающимся от равномерного).

Когда в конце 30-х годов фон Нейман обратился к проблемам гидродинамики, лучшей вычислительной машиной в США и, быть может, во всём мире был дифференциальный анализатор, построенный в конце 20-х годов под руководством В. Буша в Массачусетском технологическом институте. Предназначенный для решения широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, анализатор был чисто механической машиной. Позднее В. Буш построил усовершенствованный электромеханический вариант своего дифференциального анализатора.

Первая электронная вычислительная машина была построена в 1943–1946 гг. в школе инженеров-электриков Мура Пенсильванского университета и получила название ЭНИАК (по первым буквам английского названия машины — электронный цифровой интегратор и вычислитель). Фон Нейман сразу же распознал возможности, заложенные в этой машине, и понял, как их можно использовать более оптимальным образом. Вот как рассказывает об этом конструктор ЭНИАКа А. Беркс: «Идея создания универсальной быстродействующей вычислительной машины принадлежит Джону Мочли. Он внёс предложение Голдстайну из артиллерийского управления о том, чтобы армия Соединённых Штатов поддержала разработку и создание такой вычислительной машины, которую можно было бы использовать прежде всего для расчётов по баллистике. Такая поддержка была оказана, причём военных особенно поражала большая скорость, с которой электронная вычислительная машина могла составлять таблицы стрельб. Машина ЭНИАК проектировалась и создавалась ... при техническом руководстве Мочли и Эккерта. Фон Нейман посетил нас, когда мы строили эту машину, и сразу же заинтересовался ею. К этому времени конструкция машины была уже выбрана, но после того как её постройка была закончена, фон Нейман показал, как можно модифицировать машину, чтобы сильно упростить её программирование».

В создании следующей машины ЭДВАК (электронный автоматический вычислитель с дискретными переменными), построенной также в школе Мура, фон Нейман принял гораздо более активное участие. Он не только разработал подробную логическую схему машины, в которой структурными единицами были не физические элементы цепей, а идеализированные вычислительные элементы, но и предложил ряд инженерных решений. Использование идеализированных вычислительных элементов было важным шагом вперёд: оно позволило отделить создание принципиальной логической схемы от её технического воплощения.

Фон Нейману принадлежит и предложение использовать в качестве элементов памяти не линии задержки, а электронно-лучевые трубки. Предложение было встречено со скепсисом, но первые же испытания подтвердили правоту фон Неймана, и тот начинает вынашивать замысел новой вычислительной машины с памятью на электронно-лучевых трубках. «Новая вычислительная машина, — свидетельствует Беркс, — должна была намного превосходить по быстродействию все рассматривавшиеся тогда машины в основном в силу следующих двух обстоятельств. Во-первых, применение электростатической запоминающей системы обеспечивает немедленный доступ к каждому разряду, тогда как разряд или всё слово, хранящееся в линии задержки, недоступно до тех пор, пока не дойдёт до конца линии. Во-вторых, было принято решение обрабатывать все разряды слова параллельно, что также снижает время вычислений». Планы фон Неймана не долго оставались на бумаге. Задуманная им машина была построена под руководством Дж. Бигелоу в Институте высших исследований. Её логическую схему разработали Беркс, Голдстайн и фон Нейман. Машина Института высших исследований приобрела широкую известность под названием ДЖОНИАК — в честь фон Неймана. Её логические и схемные решения послужили прототипами при создании вычислительных машин в Иллинойсском университете, Национальных лабораторий Лос-Аламоса, Аргонна, Окриджа, корпорации РЭНД. Именно ДЖОНИАК позволил осуществить важные расчёты при создании водородной бомбы, превосходившие по своему объему всё, что когда-либо было сосчитано человечеством.

В работе над ЭДВАК проявилась важная особенность мышления фон Неймана, проливающая свет на его деятельность инженера, изобретателя, физика. Конкретные детали реальной конструкции он рассматривал, по существу, аксиоматически, абстрагируясь от несущественных подробностей и сохраняя лишь главное. Такой подход не только отвечал его индивидуальным наклонностям, но и позволял фон Нейману использовать аппарат математической логики, оперируя с абстрактными элементами, как с символами. Эта мысль находит подтверждение в следующем замечании С. Улама: «Мы уже упоминали о способности фон Неймана, сравнительно редкой у математиков, общаться с физиками, понимать их язык и почти мгновенно, без малейшего промедления преобразовывать его в математические схемы и выражения. Затем, разобравшись в существе задачи, фон Нейман переводил их снова в выражения, общепринятые у физиков... Фон Нейман с необычайной лёгкостью производил прикидочные оценки и алгебраические и численные выкладки в уме, не прибегая к карандашу и бумаге. Эта способность, несколько напоминающая способность играть в шахматы вслепую, нередко производила сильное впечатление на физиков. У меня создалось впечатление, что фон Нейман, размышляя, не прибегал к зримым образам физических объектов, а предпочитал рассматривать их свойства как логические следствия из основных физических допущений. С каким блеском он умел играть в эту дедуктивную игру!»

В конце 40-х годов, накопив колоссальный практический опыт в создании быстродействующих вычислительных машин, фон Нейман приступил к созданию общей математической (или, как предпочитал называть её сам фон Нейман, логической) теории автоматов.

По Берксу, теория автоматов — это наука об основных принципах, общих для искусственных автоматов (цифровых вычислительных машин, аналоговых вычислительных машин, управляющих систем) и естественных автоматов (нервной системы человека, самовоспроизводящихся клеток, организмов в эволюционном аспекте).

В планы фон Неймана входило создать систематическую теорию, математическую и логическую по форме, которая упорядочила бы понятия и принципы, касающиеся структуры и организации естественных и искусственных систем, роли языка и информации в таких системах, программирования и управления такими системами. Теория автоматов лежит на стыке разных дисциплин, объединяет различные подходы (с точки зрения логики, теории связи, физиологии), но в конце концов ей предстоит стать отдельной самостоятельной дисциплиной.

Различия между теорией автоматов фон Неймана и кибернетикой Винера несущественны и обусловлены скорее личным вкусом и опытом их создателей, чем принципиальными соображениями. Теория автоматов фон Неймана, принимавшего активное участие в разработке и создании современных быстродействующих ЭВМ первого поколения, основное внимание уделяет цифровым вычислительным машинам и дискретной математике (главным образом, комбинаторике и логике). Кибернетика Винера, принимавшего в годы войны участие в разработке прибора управления артиллерийским зенитным огнём, сосредоточивает внимание на следящих системах и непрерывной математике (классическом анализе). Винер всячески подчеркивает важность обратной связи для управления и целенаправленного поведения, фон Нейман, по существу, используя обратную связь и в конструкции машин, и в блок-схемах программ, не считает необходимым специально подчеркивать это.

Разумеется, Винер сознавал важность цифровых вычислительных машин, а фон Нейман отнюдь не принадлежал к числу принципиальных противников непрерывного в математике. Предвосхищая успехи синергетики, фон Нейман намеревался построить непрерывную модель самовоспроизведения, основанную на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, которые описывают систему химически реагирующих и диффундирующих веществ. В этой связи небезынтересно отметить, что в 1952 г. независимо от фон Неймана аналогичную модель структурообразования предложил в работе «Химическая основа морфогенеза» английский математик А. Тьюринг, внёсший немалый вклад в развитие теории автоматов.

Винер и фон Нейман находились под взаимным влиянием и, как показывает, например, рецензия фон Неймана на книгу Винера «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине», были великолепно осведомлены о сильных и слабых сторонах каждого подхода, но всё же их подходы и цели были различны.

Ещё в период работы над созданием вычислительной машины ЭДВАК фон Нейман произвёл сравнение некоторых элементов живых и искусственных автоматов. Более отчётливо цели и задачи такого сравнения были сформулированы им в начале знаменитой статьи «Общая и логическая теория автоматов», представлявшей собой текст доклада, с которым фон Нейман выступил в сентябре 1948 г. на симпозиуме «Механизмы мозга в поведении» в Калифорнийском технологическом институте: «В естественных науках автоматы играли роль, значение которой непрерывно возрастало и которая к настоящему времени стала весьма значительной. Этот процесс развивался в течение нескольких десятилетий. В конце этого периода автоматы стали захватывать и некоторые области математики, в частности (но не только) математическую физику и прикладную математику. Их роль в математике представляет интересный аналог некоторых сторон жизнедеятельности организмов в природе. Как правило, живые организмы гораздо более сложны и тоньше устроены и, следовательно, значительно менее понятны в деталях, чем искусственные автоматы. Тем не менее рассмотрение некоторых закономерностей устройства живых организмов может быть весьма полезно при изучений и проектировании автоматов. И наоборот, многое из опыта нашей работы с искусственными автоматами может быть до некоторой степени перенесено на наше понимание естественных организмов.

При сравнении живых организмов и, в частности, наиболее сложно организованной системы — нервной системы человека — с искусственными автоматами следует иметь в виду следующее ограничение. Естественные системы чрезвычайно сложны, и ясно, что проблему их изучения необходимо подразделить на несколько частей. Один метод такого расчленения, особенно важный в нашем случае, заключается в следующем. Организмы можно рассматривать как составленные из частей, из элементарных единиц, которые в определённых пределах автономны. Поэтому можно считать первой частью проблемы исследование структуры и функционирования таких элементарных единиц в отдельности. Вторая часть проблемы состоит в том, чтобы понять, как эти элементы организованы в единое целое и каким образом функционирование целого выражается в терминах этих элементов.

...Аксиоматизация поведения элементов означает следующее. Мы принимаем, что элементы имеют некоторые вполне определённые внешние функциональные характеристики, т.е. что их следует считать «чёрными ящиками». Это означает, что их рассматривают как автоматы, внутреннюю структуру которых нет необходимости раскрывать и которые, по предположению, реагируют на некоторые точно определённые раздражители (стимулы) посредством точно определённых реакций.

Установив это, мы можем перейти к изучению более сложных организмов, которые можно построить из этих элементов, — их структуры, функционирования, связей между элементами и общих теоретических закономерностей, обнаруживаемых в том сложном синтезе, который представляют собой рассматриваемые организмы».

Сравнивая особенности функционирования естественных и искусственных автоматов, фон Нейман обратил внимание на то, что живые автоматы и, в частности, человеческий мозг работают с непостижимой надёжностью, несмотря на сравнительно низкую надёжность их деталей. Можно ли смоделировать эту особенность живых организмов при помощи искусственных автоматов? Можно ли, и если можно, то как построить надёжный автомат из ненадёжных компонент? Можно ли понизить порог ошибки до заданного значения? Эти вопросы были разобраны в статье фон Неймана «Вероятностная логика и синтез надёжных организмов из ненадёжных компонент», написанной на основе пяти лекций, прочитанных в январе 1952 г. в Калифорнийском технологическом институте.

«Как показывает заглавие, — подчёркивает фон Нейман во введении, — основным предметом статьи является роль ошибки в логике и в физическом орудии логики — синтезировании автоматов. Поэтому ошибка рассматривается не как исключительное событие, результат или причина какой-то неправильности, но как существенная часть рассматриваемого процесса. Значение понятия ошибки в синтезировании автоматов вполне сравнимо со значением обычно учитываемого фактора правильной логической структуры, которая имеется в виду.

Предлагаемая трактовка ошибки является неудовлетворительной и даётся лишь для определённой ситуации. По убеждению автора, которого он придерживается уже много лет, ошибку следует рассматривать при помощи термодинамических методов, так же, как это делается с информацией в работах Л. Сциларда и К. Шеннона».

По фон Нейману, каждую компоненту допустимо рассматривать как чёрный ящик с определённым числом входов и выходов. Если бы сигнал на выходе был функцией сигналов на входе, то мы имели бы надёжную компоненту, срабатывающую с вероятностью 1. Если же сигнал на выходе при заданных сигналах на входе возникает с вероятностью меньше 1, то компонента ненадёжна. Можно ли, располагая неограниченным запасом ненадёжных компонент, построить надёжный вариант любого заданного автомата?

Фон Нейман решает эту задачу двумя способами. Первое решение (автоматы с простыми линиями) позволяет понижать вероятность ошибки лишь до некоторого уровня. Суть решения состоит в построении из трёх ненадёжных одинаковых линий и смесителей, производящих сравнение сигналов на выходах подключённых к ним компонент, более надёжной системы, выполняющей ту же функцию.

Второе решение фон Нейман называет трюком с кратными линиями. Двоичный выход машины заменяется пучком из многократно повторенного двоичного выхода, и значение сигнала на выходе определяется «большинством голосов» — значением сигнала на большей части линий в пучке. Схема идеального автомата, построенного из надёжных компонент, преобразуется: каждая линия заменяется пучком линий, а каждый орган — аналогом, производящим операции с выходным сигналом большинства линий. Фон Нейман приводит оценки избыточности для второй схемы. Оказывается, что при замене органа, не срабатывающего с вероятностью 1/200, при избыточности 60 000 на единицу уровень ошибки понижается до 10^{-20}. Это означает, что автомат, сравнимый по сложности и быстродействию с человеческим мозгом, мог бы столетиями работать без сбоев.

Другая важная особенность живых организмов, которую фон Нейман стремился включить в общую теорию автоматов, — способность к самовоспроизведению. В записях фон Неймана сохранились два фрагмента теории. Первый из них мы находим в уже упоминавшейся статье «Общая и логическая теория автоматов». В нем речь идёт о построении автоматов автоматами из сравнительно небольшого числа стандартных.

Второй, несравненно более обширный фрагмент долгое время оставался известным лишь узкому кругу лиц, слушавших лекции фон Неймана. Благодаря усилиям А. Беркса, взявшего на себя тяжкий труд по разбору, дополнению и «монтажу» отдельных записей, сохранившихся в архиве фон Неймана, мы можем теперь по достоинству оценить важность и красоту многих идей фон Неймана, относящихся к теории самовоспроизведения и, в частности, доказанную им возможность самовоспроизведения конечного автомата, обладающего 29 внутренними состояниями.

Многие идеи фон Неймана ещё не получили должного развития. К их числу относится, в частности, идея о взаимосвязи уровня сложности и способности системы к самовоспроизведению, о существовании критического уровня сложности, ниже которого система вырождается, а выше обретает способность к самовоспроизведению.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА И МОЗГ

При жизни фон Неймана часто сравнивали с безупречной логической машиной с тщательно подогнанными шестерёнками. Но мозг, его, подаривший миру столько блестящих идей, принадлежал человеку. И как все люди, фон Нейман был смертен. Он ушёл из жизни после тяжёлой болезни, измученный таявшими день ото дня надеждами на выздоровление, так и не примирившись с выводом, который задолго до кончины подсказал ему мозг. Человек, он до последней минуты надеялся. И до последней возможности, пока хватало сил, работал над рукописью книги «Вычислительная машина и мозг», которую ему так и не суждено было закончить. Рассказывает Клара фон Нейман:

«Выступить на Силлименовских чтениях, одних из наиболее старых и почитаемых академических чтениях в Соединённых Штатах, считается привилегией и высокой честью среди учёных всего мира [7]. По традиции лектора приглашают прочесть в течение примерно двух недель цикл лекций, а затем представить их текст в виде рукописи для издания отдельной книгой под эгидой Йельского университета, родины и штаба по проведению Силлименовских чтений.

В начале 1955 г. моего мужа Джона Неймана пригласили выступить на Силлименовских чтениях в весенний семестр 1956 г., в конце марта или в начале апреля. Джонни был весьма польщён и обрадован приглашением, хотя ему сразу пришлось оговорить право ограничить продолжительность предполагаемого курса одной неделей. Было условлено, что в рукописи избранная им тема «Вычислительная машина и мозг», давно интересовавшая его, будет изложена более подробно. Просьба сократить продолжительность лекций была вынужденной, поскольку Джонни только что был назначен членом Комиссии по атомной энергии (КАЭ). Однако мой муж не сомневался, что найдёт время написать лекции, поскольку свои работы он всегда писал дома по вечерам или ночами. Если его что-нибудь интересовало, то работоспособность его становилась практически беспредельной, а неизученные возможности автоматов представляли для него особый интерес. Поэтому он не сомневался, что сумеет подготовить целиком всю рукопись, несмотря на то, что лекционный курс пришлось сократить. Йельский университет с готовностью и пониманием пошёл навстречу Джонни ещё тогда, как шёл и позднее, когда не осталось ничего, кроме горечи, печали и сожалений, и принял его условия.

Весной 1955 г. мы переехали из Принстона в Вашингтон, и Джонни взял отпуск без сохранения содержания в Институте высших исследований, где он состоял профессором в Математической школе с 1933 г. Через три месяца привычный ритм нашей деятельной и напряжённой жизни, в центре которой неизменно находился не знающий усталости поразительный ум моего мужа, внезапно был нарушен. У Джонни появилась сильные боли в левом плече, и после операции был поставлен диагноз: костная форма рака. В последующие месяцы надежда сменялась отчаянием, отчаяние — надеждой. Иногда нам казалось, что в плече — единственное проявление ужасной болезни, что боли больше не повторятся, но трудно локализуемые боли, от которых Джонни нестерпимо страдал время от времени, лишали нас всяких надежд на будущее. На протяжении этого периода Джонни лихорадочно работал. День заставал его в служебном кабинете или в бесчисленных разъездах, связанных с его новой работой, ночь — склонённым над рукописями научных статей, которые прежде он откладывал до окончания срока пребывания на посту члена КАЭ. Тогда же он приступил к систематической работе над рукописью для Силлименовских чтений. Значительная часть опубликованного варианта книги была написана в те дни неопределённости и ожидания. В конце ноября последовал новый удар: метастазы были обнаружены в спинном мозге, и Джонни стало трудно ходить. С тех пор его состояние начало быстро ухудшаться, хотя оставалась небольшая надежда на то, что лечение и уход позволят хотя бы на время приостановить роковую болезнь.

К январю 1956 г. Джонни оказался прикованным к инвалидному креслу, но он продолжал принимать посетителей, требовал, чтобы его ежедневно привозили в служебный кабинет, и продолжал работать над рукописью. Силы его заметно таяли день ото дня. Все поездки и выступления мало-помалу пришлось отменить, все, кроме Силлименовских лекций. Оставалась надежда, что облучение спинного мозга позволит ему хотя бы на время собраться с силами и отправиться в Нью-Хейвен, чтобы выполнить столь много значившее для него обязательство. Но даже в расчёте на самый благоприятный исход лечения Джонни пришлось обратиться к Комитету по проведению Силлименовских чтений с просьбой сократить число лекций до одной-двух, ибо напряжение недельного цикла лекций было бы опасным в его ослабленном состоянии. К марту все ложные надежды пришлось оставить. Вопрос о том, чтобы Джонни мог куда-нибудь поехать, отпал сам собой. И снова Йельский университет с неизменной готовностью и пониманием не отменил его лекций, а предложил представить рукопись, с тем чтобы кто-нибудь мог прочитать её вместо Джонни. Несмотря на все усилия, Джонни не смог завершить работу над рукописью в намеченное время. Судьба сложилась так, что он вообще не смог закончить её.

В начале апреля Джонни положили в госпиталь Уолтера Рида, из которого он так и не вышел до самой смерти, последовавшей 8 февраля 1957 г. Незаконченная рукопись отправилась вместе с ним в госпиталь, где он предпринял ещё несколько попыток поработать над ней. Но к этому времени болезнь явно взяла верх, и даже исключительный разум Джонни оказался не в силах побороть телесную слабость».

ЭПИЛОГ

Ещё при жизни Джон фон Нейман стал легендой. Он был удостоен высших академических почестей. Был избран членом Академии точных наук (Лима, Перу), Академии деи Линчи (Рим, Италия), Американской Академии искусств и наук, Американского философского общества, Ломбардского института наук и литературы, Национальной Академии США, Нидерландской королевской академии наук и искусств, почётным доктором многих университетов в США и за рубежом.

Мы начали свой рассказ о фон Неймане словами из статьи Н. Бурбаки, написанными как бы о нём, и хотим завершить словами, которыми Гильберт закончил свой знаменитый доклад на втором Международном математическом конгрессе в 1900 г.:

> «Но, — спросим мы, — не становится ли при расширении математического знания в конце концов невозможным для отдельного исследователя охватить все его части? Отвечая на это, я хочу сослаться на то, что существо математической науки таково, что каждый действительный успех в ней идет рука об руку с нахождением более сильных вспомогательных средств и более простых методов, которые одновременно облегчают понимание более ранних теорий и устраняют старые, более сложные рассуждения. Поэтому отдельному исследователю, если он усвоит эти более сильные и простые вспомогательные средства и методы, удастся легче ориентироваться в различных областях математики, чем это возможно в каких-либо других науках.
>
> Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки, ибо математика — основа всего точного естествознания. А для того, чтобы в совершенстве выполнить это высокое назначение, пусть в грядущем столетии она обретёт гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением приверженцев!»

Одним из таких мастеров и был Джон фон Нейман.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. von Neumann. **Collected Works**, v. 1–6. — New York, Oxford, London, Paris: Pergamon Press, 1961–1963.
2. J. von Neumann. **The Computer and the Brain**. — New Haven: Yale University Press, 1958.
3. **John von Neumann [1903–1957]**. Bulletin of the American Mathematical Society, 1958, v. 64, № 3 (part 2), p. 8.
4. Дж. фон Нейман. **Общая и логическая теория автоматов**. В кн.: А. Тьюринг. Может ли машина мыслить? — М.: Физматгиз, 1960, с. 59–102.
5. И. (Дж.) фон Нейман. **Математические основы квантовой механики**. — М.: Наука, 1964.
6. Дж. фон Нейман. **Вероятностная логика и синтез надёжных организмов из ненадёжных компонент**. — В сб.: Автоматы. — М.: ИЛ, 1956, с. 68–139.
7. Дж. фон Нейман. **Вычислительная машина и мозг**. — В сб.: Кибернетический сб., 1960, № 1, с. 11–60.
8. Дж. фон Нейман. **Теория самовоспроизводящихся автоматов**. — М.: Мир, 1971.
9. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. **Теория игр и экономическое поведение**. — М.: Наука, 1970.
10. Е. Вигнер. **Джон фон Нейман**. — В кн.: Е. Вигнер. Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.
11. Дж. фон Нейман. **К теории стратегических игр**. — В сб.: Матричные игры, М.: Физматгиз, 1961, с. 173–204.
12. Дж. фон Нейман. **Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения**. — В сб.: Матричные игры, М: Физматгиз, 1961, с. 145–155.
13. Дж. фон Нейман. **Математик** (с предисловием Ю. А. Данилова). — Природа, 1983, № 2, с. 86–95.

Примечания

1. Инбридинг — скрещивание близкородственных форм. Фон Нейман имеет в виду отрицательные последствия инбридинга: пониженную жизнеспособность потомства, повышенную заболеваемость наследственными болезнями, врождённые уродства и высокую смертность в детском возрасте. назад к тексту
2. Уменьшительное от Яноша. назад к тексту
3. Георгия Аугуста — актовый зал Гёттингенского университета. назад к тексту
4. Сыновья Европы и Зевса, которым греческая мифология приписывает создание первых законов для жителей Крита. Справедливейшие из людей, Радамант и Минос после смерти стали судьями в подземном царстве. назад к тексту
5. Обобщённые функции Дирака позволили существенно расширить сферу применимости анализа и стали в руках физиков удобным инструментом решения различного рода задач задолго до того, как обрели «права гражданства» и были включены в арсенал проверенных математических средств. В математике одним из первых ввёл обобщённые функции С. Л. Соболев (1935). В работах других математиков (например, С. Бохнера, Дж. Темпла, Я. Микусинского) обобщённые функции рассматривались как пределы последовательностей непрерывных функций или как производные от непрерывных функций. Синтез различных направлений в обосновании обобщённых функций осуществил Лоран Шварц в своём фундаментальном труде «Теория распределений» (1950–1951). Важным этапом в развитии теории обобщённых функций стала знаменитая пятитомная серия монографий И. М. Гельфанда, Н. Я. Виленкина, М. И. Граева. назад к тексту
6. Выражение из книги Л. Брюншвига «Этапы математической философии», приведённое в статье Н. Бурбаки «Архитектура математики». назад к тексту
7. Среди тех, кто выступал на Силлименовских чтениях, были выдающиеся учёные: Дж. Дж. Томсон, В. Нернст, Э. Резерфорд, Дж. Б. С. Холдейн, Ж. Адамар, Т. Х. Морган и другие. — *Прим. авт.* назад к тексту