АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

П. Я. Кочина

Гёста МИТТАГ-ЛЕФФЛЕР

1846—1927

МОСКВА
«НАУКА»
1987

ББК 22.1г
К 75
УДК 51(091)

Рецензенты:
доктор физико-математических наук
А. П. ЮШКЕВИЧ,
кандидат физико-математических наук
Е. М. ПОЛИЩУК

Кочина П. Я.

К 75 Гёста Миттаг-Леффлер: 1846—1927.— М.: Наука, 1987.—224 с., ил.— (Научно-биографическая литература).

Данная книга — первая на русском языке научная биография выдающегося шведского математика Гёсты Миттаг-Леффлера, получившего широкую известность благодаря трудам в области теории функций комплексного переменного. Им основан интернациональный математический журнал «Акта математика». Большую помощь Миттаг-Леффлер оказал нашей соотечественнице С. В. Ковалевской, пригласив ее преподавать в Высшую школу Стокгольма, где она получила звание профессора.

К $\frac{1702020000\text{-}411}{054(02)\text{-}87}$ 35-87 — НП **ББК 22.1г**

Предисловие

Гёста Миттаг-Леффлер был выдающимся математиком и научным деятелем международного масштаба. Личное творчество Миттаг-Леффлера в области математики значительно, его вклад в анализ стал классическим и оказал большое влияние на последующие изыскания.

В теории аналитических функций есть теоремы, носящие имя Миттаг-Леффлера, относящиеся к основам анализа. Его изящные исследования по теории целых трансцендентных функций вызвали ряд работ других авторов.

Миттаг-Леффлер был предан математике, которую считал «наукой всех наук», способной объединять людей разной национальности. Главное детище его жизни, основанный им журнал «Acta mathematica», он хотел сделать интернациональным и добился этого благодаря своим широким связям с математиками всего мира и благодаря дипломатическим способностям в привлечении к работе в журнале наряду с уже знаменитыми математиками талантливой молодежи.

Вместе с тем Миттаг-Леффлер был горячим патриотом своей родины Швеции, а также других скандинавских стран (Дании, Финляндии и Норвегии), которые связаны между собой общностью происхождения и ходом их истории. Он хотел содействовать росту науки в этих странах.

К своему 70-летию он вместе с женой Сигне Юлией Эмилией составил завещание, по которому все свое имущество Миттаг-Леффлеры завещали организации, которая должна была называться Математическим институтом супругов Миттаг-Леффлер. Этот институт существует и в настоящее время. Его задачами являются содействие развитию математики в скандинавских странах, к которым теперь присоединяется и Исландия, но особенно в Швеции, и ознакомление других стран с вкладом в «самые высокие области разума» северных народов.

В Институт Миттаг-Леффлеров может приехать математик из любой страны и заниматься там как в прекрасной библиотеке, собранной Миттаг-Леффлером и продолжающей пополняться, так и в архиве, в котором, в частности, находится переписка шведского ученого и С. В. Ковалевской.

Миттаг-Леффлер был участником математических конгрессов и активным деятелем в организации первых из них. Ему принадлежит основная роль в организации скандинавских математических конгрессов.

Сам Миттаг-Леффлер особенно ценил одно важное дело своей жизни — привлечение С. В. Ковалевской к работе на кафедре математики Стокгольмского университета. В те времена, во второй половине XIX в., задача добиться места профессора для женщины, да еще иностранки, была очень сложной, и Миттаг-Леффлеру понадобилось много энергии и дипломатических усилий, чтобы преодолеть все препятствия,— он мог гордиться победой. Это было и победой в области женского равноправия, показавшей женщинам пример и поднявшей их надежды. И мы всегда будем благодарны Г. Миттаг-Леффлеру за его дружескую помощь нашей соотечественнице.

В этой книге много материала заимствовано из «Переписки С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера», изданной в 1984 г. в издательстве «Наука» небольшим тиражом. Переписка дает достоверный материал о взаимоотношениях двух ученых — Миттаг-Леффлера и Ковалевской.

В процессе работы над книгой я получала полезные сведения от Е. М. Полищука и Е. П. Ожиговой. Профессору К. О. Селениусу из Упсалы и Е. П. Ожиговой я очень признательна за предоставленные фотографии. Постоянно пользовалась я помощью Отдела научной информации Института проблем механики АН СССР, который возглавляет И. А. Викторова. Разнообразную помощь оказывали мне Н. Н. Кочина и А. Р. Шкирич. Выражаю всем им глубокую благодарность.

Глава 1

Семья

Родня Миттаг-Леффлера. Детские годы

Имя Леффлеров (Leffler) [1] встречается в записях города Бреславля (Бреслау в Силезии, теперь Вроцлав) в XIV в. Предки Г. Миттаг-Леффлера прослеживаются начиная с XVII в., это Георг Леффлер и Катарина Берингер. Их сын Тобиас в 1655 г. поселился в Швеции и женился на шведке. У них было 18 детей, положивших начало различным ветвям семейства, из которых ко времени жизни Миттаг-Леффлера оставалось семь. Они происходили от семи сыновей Юхана Хокона Леффлера, оценщика кораблей в Гётеборге. Миттаг-Леффлер относился к четвертой ветви, его дед Эрик Магнус, член парламента, занимался изготовлением парусов.

Среди Леффлеров имелись ученые, инженеры, писатели и артисты.

Отец Г. Миттаг-Леффлера [2], доктор философии Юхан Олоф Леффлер, преподаватель начальной школы Клары в Стокгольме, потом стал старшим учителем и директором начальной школы Катарины. В 1867—1870 гг. он член риксдага — шведского парламента. Мать Г. Миттаг-Леффлера, Густава Вильгельмина, урожденная Миттаг, была умной, всеми уважаемой женщиной.

В семье Леффлеров 16 марта 1846 г. родился сын Гёста (Густав) Магнус. В это время родители жили в здании школы Клары в старой двухкомпатной квартире с низкими потолками. Следующий после Гёсты ребенок — Фриц, ставший в 1881 г. профессором северных языков. Он страдал расстройством нервной системы и в 1883 г. получил продолжительный отпуск. Фриц Леффлер (полное имя — Леопольд Фредрик Александр)

---

[1] Сведения о происхождении Леффлеров приведены в некрологе Миттаг-Леффлера, написанном Т. Карлеманом [126].

[2] Дальнейшие биографические сведения содержатся в статье Нёрлунда [155].

Гёста
Миттаг-Леффлер

Сигне
Леффлер

потом начал писать свою фамилию так: Läffler. Затем появилась на свет дочь Анна Шарлотта (Карлотта), впоследствии известная шведская писательница. Сначала она подписывала свои произведения как A. Ch. Edgren-Leffler (ее первым мужем был Густав Эдгрен), а потом, выйдя замуж за итальянского профессора геометрии в Неаполе Паскуале дель Пеццо герцога ди Кайянелло, стала писать: A.-K. Leffler, D:ssa [3] di Cajanello. Младший брат Миттаг-Леффлера Артур был инженером.

Позже отец получил более просторную квартиру. Несмотря на скромный достаток, родители Миттаг-Леффлера гостеприимно собирали у себя жизнерадостных, одаренных людей.

Летом дети ездили погостить к своему деду, священнику Миттагу, декану Фогелоса — большого церковного прихода на юге Швеции близ озера Веттерн. Гёста любил эти поездки в живописную местность. Он с уважением относился к деду, обладавшему научными способностями,— он издал пользовавшийся большим спросом сборник шведских церковных законов. Недалеко от дома деда находилось имение Альмнес графа Алексиса

[3] Сокращенно от итальянского duchessa, т. е. герцогиня.

Спарре. Дети ходили туда в гости, и их хорошо принимала жена Спарре — крестная мать Гёсты.

Математические способности Гёсты Миттаг-Леффлера проявились очень рано. В школе Клары, где он учился, он проходил математику на три ступени более высокого класса, чем его класс. Потом он перешел в стокгольмскую гимназию, где оказался настолько подготовленным, что его освободили от уроков математики, и он занимался самостоятельно более высокими разделами математики, в частности изучал труды Коши.

Семейная жизнь

Работая в Гельсингфорсе Миттаг-Леффлер познакомился с семьей генерала Юлиуса Якоба Линдфорса и в 1880 г. обручился с его дочерью, Сигне Юлией Эмилией, прелестной, веселой девушкой. В 1882 г. состоялась их свадьба. Они прожили совместно долгую жизнь, но, к сожалению, из-за болезни Сигне детей у них не было. Непросто складывались отношения с родственниками жены.

Отец Сигне принадлежал к одной из состоятельных семей Гельсингфорса. Мать была единственной дочерью крупного промышленника Хенрика Боргстрёма, известного донатора, подарившего городу общественный сад. После его смерти все состояние перешло к дочери. В начале 1880-х годов она умерла, и ее большое наследство, в свою очередь, должны были бы разделить ее муж Ю. Я. Линдфорс и дочь Сигне Миттаг-Леффлер. Однако из-за вмешательства родственников получилось так, что все наследство досталось генералу Линдфорсу. Было, правда, оговорено, что Сигне должна получить половину наследства, если ее отец женится в другой раз.

Об этом конфиденциально писал Ковалевской Миттаг-Леффлер: «Вы не можете себе представить как беззастенчиво с нами поступили. Моей жене принадлежит большое состояние, которое хотели у нас похитить ⟨...⟩ Дело окончилось тем, что мы отдали все состояние моему тестю с одним ограничивающим условием — в случае его второго брака он должен дать половину имущества моей жене. Мой тесть был совершенно неповинен в этой истории ⟨...⟩ Я, в сущности, очень рад освободиться от этих денег, хотя это были деньги моей жены ⟨...⟩ Нам надо будет решительно изменить наш образ жизни, но это так трудно, поскольку все нас считают богатыми, и мы не можем сказать, что ничего не имеем» [207, с. 67]. Далее Миттаг-Леффлер пишет о сложности своего положения: «С одной стороны, я считал, что мой долг — защищать состояние моей жены, но, с другой стороны, я был слишком горд, чтобы желать зависеть от этого состояния. Гордость одержала верх, и в глубине души я осуждаю собственное поведение. Но, не имея детей, мы все же имеем право поступать так, как поступили» [Там же].

Миттаг-Леффлер добавляет, что семья, которая воспрепятствовала получению наследства его женой, очень богата и «Вы не можете себе представить, до какой степени они нравственны и благочестивы и какие прекрасные принципы они проповедуют при каждом удобном случае. Это в особенности приводит меня в ярость. Но я не хочу больше об этом думать. Надеюсь, что смогу мало-помалу забыть это» [207, с. 68].

Отец Сигне был общительным человеком, любившим широко жить и кутнуть. Он приглашал зятя в Гельсингфорс погостить и рад бы был сопровождать его во всех поездках, а Миттаг-Леффлер порой тяготился слишком кипучей натурой тестя. Но его дочь, Сигне, всегда благотворно действовала на Гёсту. Он скучал, когда разлучался с нею.

Глава 2

Университеты Миттаг-Леффлера

Свои математические занятия Миттаг-Леффлер продолжал в университете города Упсала с 1865 по 1872 г. Он вышел с ученым званием доктора философии за работу «О разделении корней синектической (т. е. однозначной аналитической.— *П. К.*) функции одной переменной» [3]. Перед тем у него уже были опубликованы две заметки: в 1868 г. [1] и в 1870 г. [2].

У Миттаг-Леффлера сохранились хорошие воспоминания о профессорах Германе Теодоре Дауге и Карле Юхане Мальмстене. Дауг занимался главным образом геометрией. С Мальмстеном установилась тесная дружба, впоследствии Миттаг-Леффлер находил у него поддержку во всех своих начинаниях.

Нильс
Хенрик Абель

Мальмстен был профессором математики с 1842 г. Прекрасный лектор, он приложил много сил для восстановления высокого уровня преподавания математики, который за последние 100 лет пришел в упадок после блестящего периода, когда в Упсале работал профессор С. Клингеншерна. Лекции Мальмстена по анализу опирались на работы Коши и Абеля. Миттаг-Леффлер любил рассказывать о том, что он, как бывший студент, стал счастливым обладателем пионерского труда Коши «Курс анализа Политехнической школы» 1821 г. [128].

В 1873 г. Миттаг-Леффлер получил Византийскую стипендию (Byzantine) для поездки за границу на три года. Так называли учрежденную в XVIII столетии послом Швеции в Константинополе стипендию для повышения образования за границей.

Впоследствии в своей речи на Математическом конгрессе 1925 г. в Копенгагене Миттаг-Леффлер рассказал о тех математических влияниях, которые он испытал в годы своего математического просвещения. Он воздал должное заслугам Абеля и Галуа — этих гениев математики, рано ушедших из жизни и оставивших богатое наследие, которое ставит их в один ряд с величайшими мыслителями.

Вспомнив о своем университетском учителе Мальмстене, познакомившем его с теорией Коши, Миттаг-Леффлер сказал, что естественным шагом была его поездка в Париж. Там он слушал лекции Эрмита по теории эллиптических функций и очень близко познакомился с Эрмитом, Лиувиллем, Шалем, Брио, Буке. Боне и другими парижскими математиками. Войти в этот круг помогли шведский физик генерал Фабиан Вреде и норвежский математик Оле Якоб Брок, которые жили в Париже как представители Международного бюро мер и весов.

Миттаг-Леффлер вспоминал свою встречу с Лиувиллем. Лиувилль принял молодого шведского ученого тепло, со словами: «Я считаю своим долгом сердечно приветствовать каждого обещающего молодого ученого. Подумайте только, я видел Абеля, не зная его, и я видел Галуа» [126, с. 3].

В 1826 г., когда Абель посетил Париж, ему было 24 года, Лиувиллю 17 лет, а Галуа только 15; в 16 лет он написал свою первую работу. Миттаг-Леффлер добавил: «Воображение математика (Лиувилля.— *П. К.*) могло представить, что было бы, если бы Абель вошел в контакт с этими двумя мальчиками вместо старых французских математиков, о бесчувственном безразличии которых он говорил в своих письмах» [126, с. 4].

Лиувилль первым опубликовал посмертно работы Галуа.

Эрмит принял Миттаг-Леффлера очень дружелюбно, но удивил его, сказав: «Почему Вы не поехали в Берлин к Вейерштрассу? Он — вне сравнения, он первый среди нас всех» [126, с. 4]. В то время имя Вейерштрасса ничего не говорило Миттаг-Леффлеру. Однако он послушался совета Эрмита и, пробыв неделю в Гёттингене, где Э. Шеринг ознакомил его с методами Вейерштрасса, направился в Берлин. Там он провел осень 1874 г., весну и лето 1875 г. В зимнем семестре 1874/75 г. Гёста слушал лекции Вейерштрасса по теории эллиптических функций и privatissime, т. е. совсем частным образом, в составе группы из трех человек, курс «Теория дифференциальных уравнений». В летнем семестре Вейерштрасс читал «Применение эллиптических функций к геометрии и механике».

О связях между академическими кругами Парижа и Берлина у Миттаг-Леффлера сложилось свое мнение. Главы этих кругов Эрмит и Вейерштрасс были чужды шовинистических настроений. Оба были католиками: Эрмит — глубоко верующим, Вейерштрасс, скорее развлекаясь, вел иногда беседы с учеными прелатами о церковных догмах. Но прежде всего они были математиками. Вейерштрасс как-то сказал: «Высочайшие вершины нашей науки доступны лишь тому, кто является до некоторой степени поэтом и у кого есть дар предвидения и чувство красоты» [126, с. 4]. Миттаг-Леффлер полагает, что эта мысль близка не только Вейерштрассу, но и Эрмиту.

В Берлине Миттаг-Леффлер слушал также лекции Кронекера. Впечатления берлинского периода жизни молодого шведского ученого хорошо выражены им в письме[1] к своему учителю профессору Яльмару Хольмгрену. 19 февраля 1875 г. он писал Хольмгрену.

Моим пребыванием в Берлине с научной точки зрения я очень доволен. Нигде не нашел я так много для изучения, как здесь. У Вейерштрасса и Кронекера — у обоих необычное для Германии свойство — как можно больше избегать публикаций. Вейерштрасс, как известно, ничего не печатает, а Кронекер — только результаты без доказательства.

В своих лекциях они излагают результаты своих исследований. Едва ли математика наших дней может представить что-нибудь, что может соревноваться с теорией функций Вейерштрасса или с алгеброй Кронекера.

Вейерштрасс излагает теорию функций в двух- или трехгодичном цикле лекций, и на простейших и самых ясных основных понятиях он строит полную теорию эллиптических функций и ее приложения к теории абелевых функций, к вариационному исчислению и т. д. Что характеризует его систему в первую очередь, это то, что она полностью аналитична. К помощи геометрии он прибегает редко, и если это случается, то как к иллюстрации. Это кажется мне несомненным преимуществом по сравнению со школой Римана, а также Клебша.

Возможно, что с помощью римановых поверхностей как исходного пункта можно построить теорию функций вполне строго и что геометрическая система Римана достаточна, чтобы осветить известные до сих пор свойства абелевых функций, но с одной стороны, она недостаточна, чтобы выяснить свойства трансцендент высшего порядка, с другой стороны, таким образом в теорию функций вводятся элементы, которые ей, по существу, полностью чужды. Что касается системы Клебша, то она не может представить простейших свойств трансцендент высшего порядка, и это вполне естественно, так как анализ является бесконечно более общим, чем геометрия.

Как видим, Миттаг-Леффлер — сторонник идей Вейерштрасса в теории функций комплексного переменного. Сам Вейерштрасс относился с большим уважением к Риману. В письме к С. В. Ковалевской от 27 августа 1883 г. он писал: «Всеохватывающий взор, направленный к возвышенному, к идеалу, ярко отличает ⟨...⟩ Римана от всех его современников» [132, с. 54]. Однако геометрические теории Римана были чужды Вейерштрассу. Относительно лекций Вейерштрасса Миттаг-Леффлер отмечает в письме к Хольмгрену следующее.

Другой особенностью Вейерштрасса является то, что он избегает общих определений и доказательств, которые относятся к функциям вообще. Для него функция — это степенной

---

[1] Выдержки из этого письма опубликованы Отто Фростманом в сборнике, посвященном 150-летию Вейерштрасса [132, с. 54]

ряд, и из степенного ряда он выводит все. Однако это представляется мне в высшей степени трудным, и я не уверен, что он более легким путем приводит к цели, чем тот, которым идут Коши и Лиувилль, исходя из общих, но, естественно, вполне строгих определений.

Как Вейерштрасс, так и Кронекер отличаются полной ясностью и строгостью доказательств. Вместе с тем они унаследовали от Гаусса страх перед всякого рода метафизикой при установлении основных математических понятий, что дает их дедукциям простоту и естественность, которые раньше едва ли вводились так систематически и с высшей степенью строгости.

Далее Миттаг-Леффлер дал интересную характеристику манеры чтения Вейерштрассом лекций [132, с. 55]: пользовавшиеся колоссальным успехом, они были глубокими по содержанию, но отнюдь не блестящими по форме.

С совершенно формальной точки зрения манера изложения Вейерштрасса ниже всякой критики, и самый незначительный французский математик был бы при такой лекции признан совершенно неспособным как учитель. Но если кому-нибудь удается после долгой и тяжелой работы привести лекцию Вейерштрасса к такой форме, в какой он ее задумал, тогда все станет ясным, простым и систематичным. Вероятно, это удивительное отсутствие формального таланта объясняет то, что очень немногие из его многочисленных учеников понимают его полностью и что литература в развиваемом им направлении еще так незначительна. Однако это не мешает тому, что всюду ему воздаются почти идолопоклоннические почести. Теперь в Берлине много молодых и способных математиков, на которых Вейерштрасс возлагает надежды. Впереди всех находится «лучший ученик из всех, кто у него был»,— молодая русская графиня Софья ф. Ковалевская, которая недавно заочно получила степень доктора от Гёттингенского факультета на основе двух работ, которые скоро появятся в журнале Крелле: одна об уравнениях с частными производными, другая — о кольце Сатурна [2].

Закончил письмо Миттаг-Леффлер жалобой на недостаток времени для собственной работы, так как три лекции в день отнимают много времени для проработки; притом такие трудные предметы, как теория эллиптических функций, алгебраические уравнения по Абелю, Эрмиту и Кронекеру вместе с теорией чисел. Раз в неделю он слушает также Гельмгольца, который, «к крайнему раздражению философской Германии, читает с высочайшим мастерством „Логические принципы точных наук“» [132, с. 55].

---

[2] Сведения о Ковалевской не точны: она никогда не была графиней и представила не две, а три статьи, третья — о приведении абелевых интегралов третьего ранга.

Больше всего Миттаг-Леффлер был захвачен лекциями Вейерштрасса, исследования которого в области теории функций комплексного переменного оказали глубокое влияние на всю его дальнейшую исследовательскую деятельность. Он не только слушал лекции и усердно их записывал, но и усиленно занимался собственной работой. За время пребывания Миттаг-Леффлера за границей у него в шведских журналах вышли две статьи: «О некоторых определенных интегралах» [4], вероятно, сделанная еще в Упсале, и о теореме Коши [5]. В 1875 г. в журнале «Göttinger Nachrichten» появилась его статья с очень подробным заглавием о доказательстве теоремы Коши [6].

Огюстен Коши

Как результат тщательной проработки лекций Вейерштрасса, в 1876 г. в Гельсингфорсе вышла книжка Миттаг-Леффлера «О методе изучения аналитических свойств эллиптических функций», в которой излагается теория Вейерштрасса эллиптических функций и интегралов [8]. Она начинается с преобразования интеграла

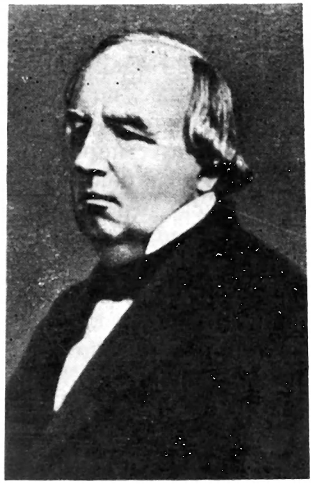
$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B^1x + A^1,$$

к каноническому виду Вейерштрасса

$$\int \frac{ds}{\sqrt{S}}, \qquad S = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Для функции Вейерштрасса $s = \wp(u)$ исследуются разные ее свойства, затем приводятся σ- и θ-функции Вейерштрасса. На последних страницах, 90—96, дается исторический очерк, в котором отмечаются результаты Якоби, Эрмита, Лакруа, Брио и Буке, Пюизё, Лиувилля и Вейерштрасса.

Шарль Эрмит



Карл Вейерштрасс

В 1923 г. эта работа Миттаг-Леффлера была переведена на английский язык и напечатана в журнале «Annals of Mathematics» [109].

Но главная работа Миттаг-Леффлера периода его первой поездки за границу была навеяна исследованиями Вейерштрасса по разложению целой трансцендентной функции в бесконечное произведение.

В 1876 г. 7 июня Миттаг-Леффлер представил Стокгольмской академии наук свою статью «Метод аналитического представления функции рационального характера...», которая вскоре была опубликована в Отчетах Шведской академии наук [7]. Дальнейшие работы на ту же тему Миттаг-Леффлер печатал в стокгольмских журналах в 1877 г. [10—14].

Вейерштрасс заинтересовался работой молодого шведского ученого и предложил другой вывод его теоремы в статье «Об одной функционально-теоретической теореме г-на Г. Миттаг-Леффлера» [184]. Эрмит ввел теорему Миттаг-Леффлера в свой курс анализа [140, 217]. Имя молодого ученого стало известно среди математиков.

Молодой Миттаг-Леффлер с самого начала произвел на Вейерштрасса хорошее впечатление. Вейерштрасс написал Ковалевской 7 мая 1875 г.: «У меня сейчас много довольно хороших слушателей, и среди них один швед, который мне особенно нравится» [190, с. 211]. Позже, когда Миттаг-Леффлер работал в Гельсингфорсе, Вейерштрасс писал своей ученице 15 августа 1887 г.: «Миттаг-Леффлер был для меня очень приятным учеником; наряду с основательными знаниями он обладает удивительными способностями к усвоению предмета и умом, направленным к идеалу. Я уверен, что общение с ним оказало бы на тебя стимулирующее действие» [190, с. 218].

Миттаг-Леффлер часто ездил за границу и бывал как в Париже, так и в Берлине. Он обязательно навещал Вейерштрасса и его сестер, Клару и Элизу, живших с ним. По словам Вейерштрасса, вся его семья радовалась приезду Миттаг-Леффлера и его жены, изящными костюмами которой все восхищались.

Вейерштрасс следил за развитием научной деятельности шведского ученика, который посылал ему оттиски своих статей. Учитель приветствовал основание журнала «Acta mathematica».

Глава 3

Миттаг-Леффлер — профессор

В Гельсингфорсе

Весной 1875 г. в Берлине Миттаг-Леффлер получил сведения, что в Гельсингфорсском университете [1] открылась кафедра математики после ухода в отставку Лоренца Линделёфа. Миттаг-Леффлер хотел принять участие в конкурсе на эту кафедру и пошел советоваться с Вейерштрассом. Но Вейерштрасс сказал: «Не делайте этого! Я сделал заявку на экстраординарную кафедру для Вас здесь, в Берлине, и мне уже сказали, что моя просьба удовлетворена» [130, с. 74].

Миттаг-Леффлер понимал заманчивость этого предложения, так как считал, что то время было наиболее блестящим периодом развития науки в Германии. Но он видел, что в Берлине атмосфера была непереносимой для иностранца. Ведь Германия только что одер-

[1] О времени работы Миттаг-Леффлера в Гельсингфорсе рассказал Густав Эльвинг [130], и мы воспользуемся его сообщением.

жала победу в войне с Францией, и немецкая надменность достигла своей вершины. «К иностранцам относились с высокомерной снисходительностью, только и было слышно о великом кайзере, о Бисмарке и Мольтке» [там же]. И Миттаг-Леффлер решил ехать в Финляндию.

Университет в Гельсингфорсе вел свое начало от старинного университета, основанного в 1640 г. в тогдашней столице Финляндии г. Або. Во время большого пожара в Або 4 сентября 1827 г. здание университета сгорело, и был открыт новый университет в Гельсингфорсе, куда перевели и профессоров прежнего университета. Лекции в новом университете, как и в прежнем, читали на шведском языке, хотя Финляндия уже не была в подчинении у Швеции, а входила в состав России.

В порядке некоторого раскрепощения от шведского влияния в Финляндии в 1865 г. был издан указ: для приема преподавателя на факультет философии требовалось его умение понимать написанное по-фински.

В феврале 1876 г. Миттаг-Леффлер по железной дороге через Петербург приехал в Гельсингфорс. Весной проходили испытания на должность профессора, которые проводил Линделёф. В них участвовало вместе с Миттаг-Леффлером пять человек. Молодой шведский ученый показал превосходство своего математического образования. Кроме того, он представил рекомендации Эрмита, Э. Шеринга, Кронекера и Вейерштрасса. Эрнст Шеринг к тому же написал декану факультета письмо со словами: «Я уверен, что Вы увидите в докторе Леффлере самого приятного и любезного коллегу» [130, с. 74].

Не только в Германии, но и в Финляндии, хотя и на другой основе, были сильны националистические настроения: по § 10 Конституции Финляндии 1772 г. иностранцы могли допускаться на гражданскую и военную службу только в том случае, если у них были большие и блестящие качества, могущие принести великую честь и замечательные благодеяния стране. Миттаг-Леффлер, видимо, был именно таким иностранцем. На университетском сенате (совете) за Миттаг-Леффлера было подано 11 голосов против 9, в то время как за его конкурента и соотечественника Матся Фалька 9 голосов против 11.

Однако шовинистически настроенные студенты первое время не прощали Миттаг-Леффлеру того, что он швед, и распевали на мотив арии из «Орфея в аду» Оффенбаха: «Он очень любезен и знает шведский, чего еще нужно для кафедры?» [130, с. 75]. Впрочем, «языковая проблема», по словам Г. Эльвинга, не доставляла Миттаг-Леффлеру большого беспокойства. Он немного знал финский язык, и когда на экзамене один студент «из шалости» написал работу на финском языке, то Миттаг-Леффлер понял ее. Для уверенности он проконсультировался с финским преподавателем и затем объявил студенту, что работа содержательна, но язык далеко не удовлетворителен.

В марте 1877 г. состоялось назначение на должность профессора, а в мае Миттаг-Леффлер начал читать лекции об иррациональных числах. На лекциях молодой профессор излагал идеи своего любимого учителя Вейерштрасса. По этому поводу Вейерштрасс писал С. В. Ковалевской 15 августа 1878 г.: «Положение, которое он [Миттаг-Леффлер] занимает в Гельсингфорсе, мало благоприятно. Там идут дальше, чем где бы то ни было, в создании национально-финской математики, и так как за время пребывания там Леффлера в местных газетах в каждом семестре появляются статьи против математики Вейерштрасса, Леффлер допускает неосторожность, упоминая мое имя в своих лекциях и статьях чаще, чем это необходимо» [190, с. 218].

Нужно отметить, что Миттаг-Леффлер не чуждался и теорий Кронекера при изложении некоторых частей алгебры. Но теорию иррациональных чисел он читал по Вейерштрассу, а эту теорию Кронекер не признавал, говоря, что «только целые числа создал милый бог, все остальное – дело людей» [130, с. 90].

Как преподаватель, Миттаг-Леффлер был требовательным и строгим. В его архиве сохранилась небольшая записная книжка, в которую он вносил имена студентов, сопровождая их характеристиками. Г. Эльвинг приводит такие записи: «Невежественный и тупой; Хорошие мозги. Ленивый. Медлительный. Стремится к похвале; Не умеет провести круг через три данные точки».

Положительная запись о Яльмаре Меллине: «Очень хороший. Написал статью об определенных интегралах в связи с моим курсом теории функций. Получил рекомендацию представить ее на премию» [130, с. 77].

Об Эмиле Арвиде Стенберге записано: «Слушал все мои курсы. Помогал мне в статье об эрмитовых дифференциальных уравнениях четвертого порядка» [130, с. 78].

В 1881 г. у Миттаг-Леффлера был готов к осуществлению план переезда в Стокгольм, где он получал кафедру математики в недавно открытом университете — Высшей школе. Он повторяет (письмо от 15 июля 1881 г.) приглашение С. В. Ковалевской работать вместе с ним, добавляя: «Вас примут с самой большой симпатией, и у Вас будут ученики-энтузиасты. Теории Вейерштрасса обладают способностью заинтересовать и захватить глубочайшим образом» [207, с. 29]. Миттаг-Леффлер убедился в этом, когда работал в Гельсингфорсе, где сначала, как мы видели, его приняли с недоверием. Но теперь он оставляет там «по меньшей мере дюжину учеников, воодушевленных величием нашей науки и проникнутых желанием посвятить свою жизнь изучению математики» [Там же].

Ученики Миттаг-Леффлера [2]

Андерс Доннер происходил из богатой купеческой среды. Он стал астрономом, но начинал с математики. Его докторская диссертация 1879 г. «О представлении однозначных эллиптических функций» в духе идей Вейерштрасса посвящена представлению двоякопериодических функций в виде отношения двух рядов Фурье.

Оппонентом был Миттаг-Леффлер. Некоторое время Доннер работал в Стокгольме у Гюльде́на. С 1883 г. он опять в Гельсингфорсе, занимается астрономией. Большим его делом было участие в составлении фотографической карты неба. Часть, относящаяся к небу над Финляндией, прорабатывалась при научной и финансовой помощи Доннера на протяжении 50 лет. Он был активным администратором, некоторое время — ректором университета, участвовал в страховой компании Финляндии.

Августа Рамсея, сына промышленника, Миттаг-Леффлер характеризует в своих записях как очень

---

[2] Г. Эльвинг в своей книге [130] пишет также и об учениках Миттаг-Леффлера. Многие из них защитили диссертации уже после отъезда Миттаг-Леффлера в Стокгольм.

одаренного, прилежного и интересующегося студента, благовоспитанного и обязательного. Два года он учился в Берлине у Вейерштрасса и защитил диссертацию в Гельсингфорсе. Первые 13 лет его деятельности он был школьным учителем в частной шведской школе и написал несколько учебников и популярных очерков, в частности о метрической системе, об иррациональных числах. Потом он занимался вопросами страхования и получил должность Первого страхового инспектора Финляндии. Он был активным банковским и промышленным деятелем, членом парламента, пионером туризма в Финляндии.

Диссертация Рамсея посвящена теме, предложенной Миттаг-Леффлером: исследование функции $(1+x)^{\mu}$ при любых μ, включая комплексные значения. В частности, он доказал, что степенной ряд для этой функции сходится при $x=-1$ в случае $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$.

Г. Эльвинг называет несколько слушателей Миттаг-Леффлера, которые стали работать не в области математики. Онни Хальстен стал школьным учителем, политическим и страховым деятелем. Карл Эверт Пальмен — инженер и преподаватель Политехнического института, он слушал лекции Миттаг-Леффлера в Стокгольме. Густав Меландер и Теодор Хомен стали физиками, первый — доцентом, второй — профессором.

Сам Миттаг-Леффлер ничего не писал по алгебре, но его ученик Георг Борениус по совету Миттаг-Леффлера опубликовал несколько заметок о решении алгебраических уравнений в духе Кронекера. Борениус, сын математика, стал физиком и метеорологом. В своей диссертации он нашел интерполяционную формулу для рациональной функции как обобщение формулы Лагранжа. Оппонент факультета Эдвард Рудольф Неовиус жестоко раскритиковал диссертацию, объявив ее не содержащей ничего нового, написанной небрежно и не дающей понятия о работе Кронекера. Но когда Борениус поехал в Берлин, он нашел поддержку у Кронекера, который предложил напечатать статью в журнале.

Карло Керппола происходил из семьи фермера. После Гельсингфорса учился в Стокгольме у Миттаг-Леффлера. В 1887 г. он защитил диссертацию — первую диссертацию на финском (а не на шведском) языке. Ее сурово раскритиковали, и через пять месяцев Керппола представил видоизмененный вариант на немецком языке, который благополучно прошел.

Три ученика Миттаг-Леффлера занимались линейными дифференциальными уравнениями — это Эверт Сьёблом, Эмиль Арвид Стенберг и Атле Генец.

А. Генеца Миттаг-Леффлер характеризовал как одаренного студента. Генец написал диссертацию по поводу линейного дифференциального уравнения, которому удовлетворяют функции $K(\sqrt{x})$ и $K(1-\sqrt{x})$, где $K(z)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Потом Генец работал школьным учителем.

Сьёблом был сыном морского капитана. Он защитил докторскую диссертацию в 1885 г., после того как учился некоторое время у Миттаг-Леффлера в Стокгольме. Сначала он преподавал в университете Гельсингфорса, потом в Або. Его диссертация относилась к уравнениям с периодическими коэффициентами.

Э. А. Стенберг, сын мелкого промышленника, получил первую ученую степень в 1882 г., три года учился в Стокгольме у Миттаг-Леффлера и Ковалевской и защитил диссертацию в 1885 г. Он стал доцентом, затем профессором в Гельсингфорсе. Сначала читал основные курсы математики, но в 1890-е годы стал выступать с лекциями по дифференциальным уравнениям, обыкновенным и с частными производными, а также по эллиптическим функциям.

Некоторые из окончивших Гельсингфорсский университет слушали лекции Г. Миттаг-Леффлера и С. В. Ковалевской в Стокгольме.

В мае 1890 г., во время каникул, С. В. Ковалевская была в Гельсингфорсе по приглашению генерала Линдфорса. Она хотела выяснить дальнейшую научную судьбу Стенберга, Сьёблома и Меллина, но никто не мог ей сказать, где они. Встретилась она со своей студенткой Санни Сёдерьельм, работавшей преподавательницей в гельсингфорсской гимназии. Софья Васильевна была на одной из защит диссертаций в университете и видела там Э. Р. Неовиуса.

Эдвард Рудольф Неовиус [3] не был учеником Миттаг-Леффлера, однако имя его часто встречается в пере-

---

[3] Два брата Э. Р. Неовиуса в 1906 г. переменили фамилию на Неванлинна. У младшего брата, Отто Вильгельма Неванлинна было два сына — Фритьоф Неванлинна и Рольф Неванлинна, известные математики.

писке Миттаг-Леффлера и Ковалевской как преемника Миттаг-Леффлера. Неовиус учился в знаменитом Техническом университете Цюриха, затем, в 1974/75 г. — в Техническом университете Дрездена, затем год опять в Цюрихе, где его учителями были Г. А. Шварц и геометр В. Фидлер. Со Шварцем Неовиус подружился, под его влиянием он занимался теорией минимальных поверхностей. В его докторской диссертации 1880 г. рассматривались с точки зрения проективной геометрии кривые третьего и четвертого порядка.

Э. Р. Неовиус искусно строил модели сложных поверхностей, семь моделей он послал Дарбу в его знаменитую коллекцию в Сорбонне.

Самый выдающийся финский ученик Миттаг-Леффлера — Роберт Яльмар Меллин, сын священника. В 1881 г. Меллин поехал в Берлин слушать лекции Вейерштрасса, но уже осенью возвратился в родной город для защиты диссертации по алгебраическим функциям, написанной в духе вейерштрассовского анализа. В 1882 г. он снова отправился в Берлин, а в 1883/84 г. продолжал занятия в Стокгольме у Миттаг-Леффлера, влияние которого имело решающее значение для всей последующей деятельности Меллина.

В 1884 г. Меллин стал доцентом Гельсингфорсского университета и одновременно Политехнического института (который в 1908 г. был переименован в Технический университет Финляндии). За свои научные заслуги Меллин получил звание профессора honoris causa. Основным делом его жизни была наука.

В 1885 г. Миттаг-Леффлер подыскивал кандидата на должность профессора механики в Высшей школе Стокгольма и в Высшей технической школе, когда выбыл из строя профессор Я. Хольмгрен. В письме от 30 августа 1885 г. Миттаг-Леффлер советуется с С. В. Ковалевской, кого из скандинавских математиков следовало бы привлечь на это место: П. Л. Силова из Норвегии, Я. Меллина из Гельсингфорса, М. Фалька или А. Ф. Бергера из Упсалы. Про Меллина он написал, что он «обладает очень острым умом, специально занимается теорией чисел, был раньше пьяницей, в настоящее время трезвенник, самоучка с недостаточными знаниями, тихий, скромный. Хороший человек» [207, с. 120]. Ковалевская высказалась в пользу Меллина, добавляя: «Очень хорошо, что Меллин Ваш ученик, и это подействует ободряюще на других» [207, с. 124] [4].

Меллин больше всего известен в связи с преобразованием, носящим его имя.

Это преобразование Меллин применил при изучении гамма- и гипергеометрических функций. За статью об этих функциях он получил премию финского Общества наук.

Многолетние исследования Меллина обобщены им в статье по основам теории гамма- и гипергеометрической функций (на немецком языке), опубликованной в 1909 г. в финском журнале и в несколько сокращенном виде в 1910 г. в «Acta mathematica».

Покинув Гельсингфорс, Миттаг-Леффлер сохранил с ним связь. Его друзьями в Гельсингфорсе были отец и сын Линделёфы. Младший, Эрнст Линделёф, относился к Миттаг-Леффлеру с большим почтением, в письмах называл его «уважаемый дядя», позже — «дорогой дядя». Так же, пишет Г. Эльвинг, обращался Миттаг-Леффлер к Лоренцу Линделёфу. Оба Линделёфа входили в состав редколлегии «Acta mathematica».

Высшая школа Стокгольма

Высшая школа (Högskola) Стокгольма организована в 1879 г. Сначала в ней было два факультета — математический и естественных наук. Кроме того, существовали кафедры: истории литературы, истории искусств и экономики. Лабораторий было мало. Высшая школа не присуждала ученых степеней, желающие их получить обращались в университеты Упсалы или Лунда.

Официально титул университета присвоен Высшей школе в 1909 г.

Кафедра математики в Высшей школе, основанная в 1881 г. Миттаг-Леффлером, возглавлялась им до выхода в отставку в 1911 г. Он был превосходным лектором и воспитал много талантливых учеников. Основатель теории аналитических полугрупп Эйнар Хилле говорит, что «некоторые из них, возможно, превзошли

[4] В действительности получилось так, что первое время преемницей Хольмгрена была Ковалевская, а потом лекции по механике в Высшей и Технической школах стал читать А. Линдстедт.

своего учителя, но никто из них не являлся такой колоритной фигурой, как он» [142, с. 3].

Преемником Миттаг-Леффлера на университетской кафедре стал Хельге фон Кох, лекции которого отличались строгостью стиля. В 1884 г. Миттаг-Леффлер привлек в качестве профессора на свою кафедру С. В. Ковалевскую.

После ее безвременной смерти в 1891 г. ее место до 1905 г. занимал Ларс Эдвард Фрагмен. Он занимался задачами, связанными со страхованием жизни. Учитель Фрагмена, Миттаг-Леффлер, получивший интерес к страховому делу от своего учителя К. Мальмстена, много сделал для внедрения математических методов в страховое дело. Шведские и вообще скандинавские страховые компании и теперь славятся своими методами.

Фрагмен основал Шведское математическое общество. Он написал по теории аналитических функций классическую работу совместно с финским математиком Э. Линделёфом. Эти исследования развил Гаральд Крамер. В университете должность Фрагмена перешла к Ивару Бендиксону, который затем в течение 16 лет, с 1911 по 1927 г., сохранял пост ректора Высшей школы.

В 1911 г. в университете было уже три кафедры математики, возглавлявшиеся учениками Миттаг-Леффлера: И. Бендиксоном, И. Фредгольмом и Х. фон Кохом.

Э. Хилле, посещая лекции И. Бендиксона, был очарован красотой математики. Он вспоминает, что Бендиксон, превосходный лектор, всегда старался раскрыть перед слушателями перспективы излагаемых идей. Хилле начал свою педагогическую деятельность под руководством Бендиксона. Однажды Бендиксон пришел на лекцию молодого преподавателя, а затем познакомил его со своим учителем Миттаг-Леффлером, который принял его очень любезно, — Миттаг-Леффлер всегда интересовался делами студентов и начинающих ученых [142, 143].

Все было хорошо, пока Миттаг-Леффлер не спросил Хилле о его подходе к изложению понятия числа. «Когда я сказал, что излагаю его по Дедекинду, он прямо-таки подскочил на стуле», — говорит Хилле [Там же]. Миттаг-Леффлер дал ему препринт, в котором подробно излагался подход Вейерштрасса и самого шведского ученого к понятию числа. Но Хилле впоследствии потерял этот препринт. Возможно, в нем было изложено то, что Миттаг-Леффлер опубликовал в Японии в своей книге «Число» [101].

Миттаг-Леффлер порекомендовал молодому математику начать свои исследования с изучения работ Д. В. Ватсона по асимптотическим рядам. Хилле не последовал этому совету, но после сожалел об этом, узнав о замечательных обобщениях Ф. Неванлинны результатов Ватсона [142, 143].

Третий из профессоров, имевших кафедру в Высшей школе, Ивар Фредгольм, известен своими работами по теории линейных интегральных уравнений (1900—1903), носящих его имя.

Э. Хилле говорит, что Миттаг-Леффлер был человеком действия, так же как и его последователи по работе Ивар Фредгольм, Гарольд Крамер и венгерский математик Марсель Рис.

Миттаг-Леффлер любил молодежь и, по словам Н. Э. Нёрлунда, молодежь его любила. Лекции он читал ясно, излагал предмет строго, как истинный ученик Вейерштрасса. К молодым математикам любой национальности он относился доброжелательно и дружелюбно. Ирис Рунге, дочь Карла Рунге, говорит, что Миттаг-Леффлер «всегда собирал вокруг себя большой круг более молодых математиков, на которых излучал подлинную человеческую благожелательность» [173, с. 97]. Он всегда старался использовать встречи с талантливыми молодыми математиками в интересах своего журнала, что было, конечно, и в их интересах. Так, познакомившись с К. Рунге и узнав, что у него есть заметки по теории аналитических функций, Миттаг-Леффлер после ознакомления с ними, не скупясь на похвалы, предложил ему сдать их в «Acta mathematica», и две статьи Рунге были быстро опубликованы [170, 171]. Такое же покровительство оказывал Миттаг-Леффлер русскому математику Д. Ф. Селиванову, статья которого была напечатана в «Acta mathematica».

С Рунге Миттаг-Леффлер поддерживал переписку до конца его жизни. В первые годы Миттаг-Леффлер жаловался на трудный характер Кронекера и писал о том, что их отношения испортились. Однако он обладал достаточной широтой взглядов и не выражал недовольства по поводу того, что Рунге печатал свои статьи, связанные с работами Кронекера, в журнале «Journal für die reine und angewandte Mathematik», редактором которого был Кронекер.

Гуго Гюльден

Ивар Фредгольм

О взглядах Миттаг-Леффлера на преподавание в Высшей школе частично можно судить по его письму С. В. Ковалевской от 22 мая 1887 г.

Миттаг-Леффлер с юмором описывает празднества в университете Упсалы. Речь ректора университета ему не понравилась. В ней был призыв к молодежи слушаться старших, имеющих опыт, и набираться у них премудрости и ничего не говорилось о творческих силах самой молодежи. Миттаг-Леффлер делится с Ковалевской мыслями о том, как он сам выступил бы на месте ректора Сали́на: «Я думал о том, как бы я сказал молодежи, что все истинно великие и новые мысли рождались в молодых головах, что, правда, они не всегда выдвигались молодыми людьми, но когда зрелые люди преподносили их миру, то они лишь выражали то, о чем мечтали и думали в молодости. И с этой точки зрения я старался бы подогревать энтузиазм молодежи. Я сказал бы им, что задача университета состоит не в том, чтобы совать зрелые плоды в молодые глотки, а наоборот, в том, чтобы научить молодежь работать так, чтобы ее собственный труд давал бы ей наилучшие плоды» (см. [207, с. 147]).

Впоследствии Миттаг-Леффлеру довелось выступить перед студентами, которые поздравляли его с 60-летием.

Он ответил им так: «Мои дорогие друзья! Благодарю вас за слова, которые вы мне сказали. Они вдвойне дороги мне потому, что исходят от вас. Я всегда любил молодежь, счастливое время около двадцати, когда впервые возникают перед глазами большие вопросы познания и истины, когда дух начинает бороться с проблемами, которые поставлены величайшими [умами] всех времен. На этом отрезке времени возникают новые установки, на нем рождаются новые мысли. Как много мыслей двадцатилетних принадлежат к самому ценному в духовной сокровищнице человечества!

Чтобы вам или мне выпало счастье обнаружить у кого-либо из вас проблеск такой мысли, на это я не могу рассчитывать. Но вы не забывайте также, что теперь для вас как раз время собирать духовный капитал, которым позже вы будете питаться. Как правило, после первых лет молодости люди в глубоком смысле слова больше не в состоянии делать открытия. Самые великие, самые счастливые составляют исключение. Но они редки. Должно ли так быть? Я не знаю этого и думаю, что едва ли буду знать, но я мог бы думать, что объяснение надо искать в вялости характера и воли. Но так или иначе, верно то, что в скором времени ваше развитие будет убывать. Поэтому оберегайте вашу молодость. Заботьтесь о том, чтобы собирать сокровища, не мишурное золото и поддельные камни, не мертвый груз выученных вещей и научного хлама, но только чистейшее золото: мысль и способность спокойно и ясно, без мучений думать, сильно и здорóво чувствовать себя, но не только в том, что касается человечества самым глубоким образом. Не разбрасывайте ваше время на глупые и безумные удовольствия, не забывайте, как бесконечно коротко отмеренное вам время. Позади вас лежит бесконечность, перед вами жизнь, которую не всегда легко прожить, и за нею — бесконечное и неизвестное.

Друзья мои, благодарю вас, и вы можете мне поверить, никто не желает вам более сердечно добра, чем 60-летний, которого вы сегодня одарили таким дружелюбием» [155, с. XIII].

Интересно сопоставить мысли Миттаг-Леффлера в письме к Ковалевской, когда ему было 40 лет, с высказываниями перед студентами, когда он достиг уже 60. В последних есть налет пессимизма. Можно было бы и не говорить о том, что бесполезно искать величайшие умы среди студенческой молодежи Стокгольмского университета того времени, — а почему бы и не появиться среди них второму Абелю или Линнею? И напоминание о кратковременности человеческого существования в духе Пуанкаре (который сказал, что жизнь есть лишь краткий миг между двумя бесконечностями), хотя и верно, но высказано слишком пессимистично, его следовало бы смягчить хотя бы ссылкой на будущие поколения, ради которых стоит работать. Видно было, что сам Миттаг-Леффлер уже размышлял о «бесконечном и неизвестном» после жизни.

Несомненно, что деятельность Миттаг-Леффлера в Высшей школе Стокгольма способствовала быстрому прогрессу математики в Швеции.

Глава 4

Общественно-научная деятельность

Журнал «Acta mathematica»

Издание журнала «Acta mathematica» было главным делом жизни Миттаг-Леффлера.

В юбилейном, 148-м томе «Acta mathematica», посвященном столетию основания журнала, помещена статья Ингве Домара «Об основании журнала „Acta mathematica“» [129]. По словам автора, Миттаг-Леффлер в 1925 г. вспоминал о поддержке Эрмитом и Вейерштрассом его идеи об издании журнала в Швеции. Но конкретное предложение о математическом журнале было сделано Софусом Ли, который при встрече с Миттаг-Леффлером в Стокгольме весной 1881 г. побудил его стать во главе редколлегии из скандинавских математиков высокого ранга. Было решено печатать статьи на французском и немецком языках, но не на латинском и английском [1]. Пять скандинавских стран (включая Исландию) раньше имели одного великого математика Абеля. Но к 1881 г. появилось значительное число выдающихся математиков в этих странах. Кроме Ли и Миттаг-Леффлера, были А. Беклунд, Л. Силов, И. Цейтен – чистые математики, К. А. Бьеркнес, Г. Гюльден, Л. В. Лорентц, Л. Линделёф,

[1] Первая статья на английском языке появилась в томе 8, 1886 г.,— статья Хилла.

К. Ю. Мальмстен — прикладные. Можно было бы печатать статьи только скандинавских математиков, но решили сделать журнал международным. Проект обсуждался с ближайшими шведскими друзьями Миттаг-Леффлера Г. Гюльденом и К. Мальмстеном. Для национального продвижения математической науки были привлечены профессора математики, теперь занимавшие административные посты: Оле Якоб Брок (он жил в Париже в качестве члена правления Международного бюро мер и весов и иностранного члена Парижской академии наук), Лоренц Леонард Линделёф (в Гельсингфорсе) и Карл Юхан Мальмстен (в Упсале, министр кабинета и губернатор провинции).

Встал вопрос о тактике по отношению к немецким математикам. В 1880 г., после смерти Борхардта, Вейерштрасс и Кронекер приняли редактирование журнала Крелле. Миттаг-Леффлер, сомневаясь в административных способностях обоих ученых, боялся, что эти почтенные математики могут привести к упадку и даже к концу престижный журнал. Он боялся начать конкурирующий журнал не только из уважения к старому учителю Вейерштрассу, но и из-за опасения, что Вейерштрасс и Кронекер восстановят против него немецких математиков. Миттаг-Леффлер через Мальмстена обратился за поддержкой к королю Оскару II, и Мальмстен от имени короля написал письма Куммеру, Кронекеру, Шерингу и Вейерштрассу. Вейерштрасс ответил тепло и дружески, от остальных были получены также положительные ответы. Вейерштрасс обещал прислать статью для журнала, но так и не собрался. Кронекер в письме к Ковалевской писал, что хочет дать статью в «Acta mathematica». Это письмо уже было опубликовано [208, с. 124], но поскольку оно касается журнала «Acta mathematica», то я приведу его целиком:

Берлин 5 января 1884 г.

От всего сердца присоединяюсь, уважаемая коллега, к приветам и новогодним пожеланиям моей жены и прошу Вас вместе с тем вспомнить Ваше любезное добавление, согласно которому Вы хотели направить в наш журнал [2] Вашу работу, которую Вы в то время отдали Вейерштрассу. Тогда наш друг Миттаг-Леффлер ничего уже не сможет иметь против, так как обе редакции согласились лойяльным образом взаимно уступать друг другу статьи настолько, что я давно уже начал сам работу об абелевых уравнениях и вторую, о действительных

[2] То есть «Journal für die reine und angewandte Mathematik».

корнях алгебраического уравнения для «Acta», и продолжить ее помешало лишь заболевание глаз. Но мне очень хочется закончить именно последнюю работу, в которой я хотел изложить свои взгляды относительно необоснованности современной теории функций, которые я Вам, уважаемая сударыня, уже излагал устно летом. Как раз теперешние мои лекции об определенных интегралах укрепили меня в моих взглядах. Так как дело идет лишь о победе истины, то, вероятно, наш друг Миттаг-Леффлер охотно примет мои рассуждения взамен противоположных слепых утверждений Кантора.

Сердечно преданный Вам
Л. Кронекер

В этом письме ярко проявляется отрицательное отношение Кронекера к идеям Кантора. Так как вскоре отношения между Кронекером и Миттаг-Леффлером испортились, то статья Кронекера в «Acta» не появилась.

Миттаг-Леффлер оживленно переписывался с Эрмитом и получил от него информацию о его молодых талантливых учениках — Аппеле, Пикаре и Пуанкаре, и решил привлечь их всех, а особенно Пуанкаре, к работе в журнале. В марте 1882 г. он написал Мальмстену: «Абель создал успех немецкому журналу ⟨...⟩ Пуанкаре принесет успех нашему шведскому журналу» [129, с. 3].

«Миттаг-Леффлер действовал быстро и решительно»,— пишет И. Домар. Он написал Пуанкаре 29 марта 1881 г. о своем проекте, пояснив ключевую роль Пуанкаре и обращаясь к нему с просьбой дать в «Acta» большой манускрипт о фуксовых группах, который предназначался для французского журнала. Он обещал напечатать статью исключительно быстро и хорошо.

На издание журнала требовались большие средства. Миттаг-Леффлер обратился к нескольким донаторам, и они внесли по 1500 крон, в том числе король Оскар II, к которому ходили Миттаг-Леффлер и Мальмстен. Неожиданно Эрмит внес сумму, эквивалентную 720 кронам[3]. В 1882 г. было собрано 26 000 крон.

Начиная с 1883 г. можно было рассчитывать на 1000 крон в год от Швеции, Дании и Норвегии. Миттаг-Леффлер оценил расходы на один том в 4500 крон, но они оказались несколько больше. Подписная стоимость тома составляла 9 крон.

Перед выпуском в свет нужно было дать имя жур-

[3] Очевидно, 1000 франков, так как 1 крона равнялась 1,4 франка.

налу, для чего привлекли математиков и филологов. Миттаг-Леффлер, как редактор, считал что название следует дать на латинском языке. После нескольких предложений остановились наконец на названии «Acta mathematica eruditorum» («Математические действия эрудитов»).

Для печатания журнала заключили соглашение с фирмой «F. och G. Beijer» в Стокгольме и поддерживали контакты со знаменитыми издательствами «Mayer und Müller» в Берлине и «Hermann» в Париже.

По предложению издательства «Beijier» сократили заглавие журнала, отбросив последнее слово, и утвердили краткое «Acta mathematica». Выход первого тома журнала помечен 1882/83 г. В нем содержится 399 страниц большого формата (in quarto) дан портрет Абеля, сделанный в 1826 г. художником Гёрбицем (тушью, пером).

На первой странице — посвящение королю Швеции и Норвегии Оскару II, покровителю журнала. Далее перечислены организации, покрывшие расходы по журналу: Ассоциация памяти Ларса Хиерта, Фонд Леттерстедта, а также отдельные лица: К. Мальмстен, Ш. Эрмит, Фр. Вейер, Н. Серенсен, О. Вийк, Фр. Пипер, О. Диксон, Б. Кемпе, В. Кемпе, С. Аксель, Л. Рубенсон, К. Рубенсон. Затем идет вступительное слово редакции: «*Время, когда мы начинаем наше издание, является одним из самых плодотворных в истории математики благодаря большому числу и важности открытий, касающихся самых существенных принципов анализа. Известно, как в разных странах это движение мощно поддерживалось математическими журналами, которые содержат труды самых великих геометров нашего времени*». Далее говорится, что новый журнал поставил перед собой ту же цель служения науке, и добавляется: «*Знаменитые математики всех стран, заверив нас в своем сотрудничестве, дали нам свидетельство симпатии, что наполняет нас признательностью и что мы хотим оправдать заботами и старанием, которые приложим к нашим публикациям*». Кончается вступление выражением надежды, что «*предприятие, внушенное лишь одной любовью к науке, встретит со стороны геометров, к которым оно обращено, благосклонный и доброжелательный прием!*»

Статьи от редакции здесь и в дальнейшем печатаются на двух языках: французском и немецком. Статьи авторов идут в основном на одном из этих языков, иногда на английском.

Редакция состояла из математиков четырех скандинавских стран: Швеции — А. Беклунд, Г. Дауг, Г. Гюльден, Я. Хольмгрен, К. Мальмстен и Г. Миттаг-Леффлер; Норвегии — К. Бьеркнес, О. Брок, С. Ли, Л. Силов; Дании — Л. Лорентц, Ю. Петерсен, Г. Цейтен; Финляндии — Л. Линделёф. (Позже, в 1884 г., в т. 5 в составе редколлегии от Швеции появляется имя С. Ковалевской.)

Первый том «Acta mathematica» открывается статьей Пуанкаре «Теория фуксовых групп». В нем же дальше помещена другая большая статья Пуанкаре «Мемуар о фуксовых функциях».

Второй по порядку идет статья уважаемого учителя Миттаг-Леффлера Карла Мальмстена «К теории страхования жизни», третьей — Гуго Гюльдена «Приближенный метод в проблеме трех тел». Далее помещены три статьи Аппеля по теории аналитических функций. Другие авторы первого тома: Фукс, Эрмит, Нетто, Пикар, Э. Шеринг, Цейтен, ученики Эрмита Бурге и Рейе (последние два с краткими заметками).

Здесь были и в дальнейшем встречаются статьи, возникшие в результате научной переписки ученых, например выдержки из писем Эрмиту от Бурге, Гурса, Липшица и его ответов, из писем Миттаг-Леффлеру.

По выходе в свет первого номера журнала Миттаг-Леффлер разослал его видным ученым разных стран, в том числе П. Л. Чебышеву. В письме от 2 декабря 1882 г. он просит Чебышева представить «Acta mathematica» Петербургской академии наук и напечатать в «Известиях Петербургской академии наук» несколько слов о журнале. Миттаг-Леффлер просит Чебышева, а также в других письмах Вейерштрасса и Эрмита организовать обмен своего журнала на издания соответствующих академий наук.

Чебышев поддержал просьбу своего шведского коллеги и 18 января 1883 г. на заседании физико-математического отделения Академии наук выступил с высокой оценкой работы журнала и его редактора. Он сказал: «Г. Миттаг-Леффлер, знаменитый математик, которому трансцендентный анализ обязан чрезвычайно важными исследованиями, является редактором нового математического журнала, выходящего в Стокгольме под названием „Acta mathematica“». Перечислив математиков, вошедших в состав редколлегии журнала, Чебышев добавил, что журнал «будет способствовать развитию математических наук во всей Европе» [216, т. V, с. 384].

Желая привлечь Чебышева в качестве автора своего журнала, Миттаг-Леффлер обратился к нему 8 апреля 1884 г. с просьбой прислать статью, причем назвал Чебышева «одним из величайших мастеров анализа всех времен». Он добавил, что изучает блестящие исследования Чебышева о максимуме и минимуме. Посылая ему уже вышедшие к тому времени три тома «Acta», он просит принять их «в качестве скромного дара гению, так обогатившего нашу науку своими бессмертными открытиями»[216, т. V, с. 450].

Но Чебышев не присылал своей работы. Ковалевской он говорил в 1884 г., когда она была в Москве, что в журнале Миттаг-Леффлера математика отвлеченная, «туманная, совершенно бесполезная». Правда, он говорил это перед отъездом на отдых, когда был усталым и в плохом настроении. Миттаг-Леффлер решил перевести на французский язык и поместить в журнале статью Чебышева [178], напечатанную в «Известиях Петербургской академии наук» в 1885 г. Перевод был сделан Ковалевской, статья опубликована в «Acta mathematica» в 1886/87 г., в 9-м томе. Таким образом Чебышев был введен в журнал. Он охотно согласился на это, и в том же номере журнала была опубликована другая его статья, представлявшая его письмо С. В. Ковалевской. Всего Чебышев опубликовал в «Acta mathematica» пять статей.

Во втором томе фигурируют частично те же имена, что и в первом: Аппеля совместно с Гурса, Эрмита совместно с Липшицем, Пуанкаре, Бурге,— все с более короткими статьями, чем в первом томе; кроме них, другие авторы: Бендиксон, Эллиот, Меллин, Пикар, Валентинер. Больше ста страниц занимает перевод семи статей Г. Кантора (уже ранее опубликованных) с немецкого на французский язык, с добавлением извлечения из письма Г. Кантора Миттаг-Леффлеру.

Через три года после основания журнала Вейерштрасс написал Миттаг-Леффлеру подбадривающее письмо [155, с. III]:

Я спешу выразить... радость, с какой я встретил отрадное продвижение Вашего предприятия. Вероятно, было бы простительно, если бы я, соиздатель старейшего из современных математических журналов, почувствовал бы приступ зависти по поводу того, что Вам удалось с самого начала привлечь для «Acta» многие давно испытанные имена и молодые выдающиеся таланты, и не только из скандинавских стран, но также из Германии, Франции, Италии... Моим желанием и моей надеждой является, чтобы «Acta» и в дальнейшем с таким же блестящим успехом, как и теперь, могла оставаться интернациональным органом для дальнейшего развития нашей науки, которая больше всего должна оставаться космополитичной.

Особую роль в журнале «Acta mathematica» играл Густав Энестрём. Он был библиографом, историком математики и основал журнал «Bibliotheca mathematica».

В конце 10-го тома, в 1887 г., Энестрём составил подробный указатель статей, опубликованных в первых десяти томах, с краткими биографическими данными каждого из авторов (год и место рождения, место работы). Кроме перечня авторов и их статей, был помещен систематический указатель по разделам: алгебра и теория чисел, теория вероятностей (всего две статьи, Линделёфа и Мальмстена), общая теория функций, теория аналитических функций (два раздела: общие вопросы и особые функции), теория обыкновенных дифференциальных уравнений и с частными производными, геометрия и, наконец, механика и математическая физика.

Энестрём привел таблицу распределения статей (число мемуаров и страниц) по национальностям их авторов. Больше всего было немецких авторов — 28 и французских — 16, но по числу страниц французы превзошли немцев (соответственно 1594 и 1220 страниц); нидерландцы, американцы, бельгийцы и австрийцы дали по одной статье; русские, по таблице Энестрёма,— три статьи, но на самом деле четыре, так как Ковалевская причислена к шведским авторам, которых у него одиннадцать. Наибольшее число статей дал Пуанкаре (11), и в дальнейшем продолжавший печататься в журнале.

Интересно, что Энестрём составил указатель всех имен, встречавшихся в первых 10 томах, как фамилий авторов, так и ссылок на них. Так, имя Ковалевской встречается в пяти томах, на девяти страницах. Энестрём предвосхищает идею современного «Указателя научного цитирования» (Science citation index). Больше всего ссылок на Эрмита, затем идут Вейерштрасс с Кронекером и Якоби с Риманом. Далее цитируются последовательно по убывающему числу ссылок: Миттаг-Леффлер; Гаусс; Кантор, Коши и Дирихле; Лаплас, Штейнер, и с примерно одинаковым числом ссылок Лиувилль, Пуанкаре и др.

Журнал получил широкую известность среди математиков благодаря подбору авторов и их работ. Миттаг-Леффлер приложил много труда, чтобы «Acta mathematica» была на высшем уровне науки. Для привлечения авторов и увеличения числа подписчиков он давал задания и С. В. Ковалевской. На каникулах, когда она бывала в России, в Берлине или Париже, она должна была стараться привлечь великих математиков в качестве авторов. Это ей удалось по отношению к Чебышеву и французским авторам, но с Вейерштрассом дело обстояло хуже; и Миттаг-Леффлер перевел его статьи «К теории эллиптических функций» на французский язык, опубликовал их в 6-м томе, 1885 г. [187].

В 1896 г. Миттаг-Леффлеру исполнилось 50 лет. Его заслуги как главного редактора журнала были высоко оценены учеными разных стран, его сотрудниками и многими читателями. В начале 20-го тома Миттаг-Леффлер на отдельной незанумерованной странице журнала выразил свою благодарность всем почтившим его: «Издатель этого журнала исполняет свой долг, лежащий у него на сердце, выражая самую глубокую благодарность знаменитым геометрам — почитаемым им учителям, сотрудникам «Acta», их читателям, всем друзьям, с которыми он связан научными симпатиями, которые объединились, чтобы преподнести ему в дар его портрет по случаю 50-летия со дня его рождения.

Этот неоценимый подарок вместе с сопровождающим его адресом выше, чем можно было бы ожидать, служит компенсацией и почетной оценкой его работы.

Ему представляется возможным выполнить свой долг признательности только путем удвоения своих усилий в ведении журнала; он посвятит этому все свои помыслы, все усилия, с самой полной и самой абсолютной преданностью».

Энестрём еще раз составил указатель к журналу в томе 21 за 1987 г. к томам 11—20, но уже значительно менее подробный, в них дан указатель имен авторов с краткими биографическими данными и полным названием статей. Никаких других сведений, приведенных в подробном указателе первых десяти томов, здесь нет.

Том 13, 1890 г., посвящен всего двум статьям — Пуанкаре и Аппеля. Это были работы, получившие премию Оскара II.

Появились первые статьи английских авторов: лорда Кельвина (В. Томсона) в 11-м томе и Сильвестра в 14-м томе. В 21-м томе с большой статьей в 145 страниц «О периодических орбитах» выступил англичанин Дж. Дарвин, сын Чарлза Дарвина; в его статье и в приложении даны очень тонкие рисунки, сделанные в Кембридже.

Андерс Линдстедт

К этому времени умерли члены редколлегии: Ковалевская, Дауг, Гюльден, Хольмгрен и Брок; от Швеции редакторами стали Беклунд, Линдстедт, Миттаг-Леффлер и Фрагмен; от Норвегии к старому составу добавился Эллинг Холст; остальные имена сохранились.

В томе 21, 1897 г., помещен некролог Вейерштрасса, составленный Миттаг-Леффлером. Том 22 появился лишь в 1899 г., в нем первая статья, принадлежавшая Пуанкаре, посвящена математическому творчеству Вейерштрасса.

В последующих томах печатались более молодые французские математики: Бэр, Борель, Адамар, Фату, д'Окань; итальянцы Вито Вольтерра и Леви-Чивита. Печатаются и скандинавские математики: Гюльден, Болин и Линдстедт (со статьями по небесной механике), Меллин, Иенсен, В. Бьеркнес (метеоролог, сын К. Бьеркнеса), Хельге фон Кох.

Вместе с тем расширился географический круг математиков журнала: выступили Ю. Кёниг из Будапешта (потом он работал в России), М. Петрович из Белграда, Бромвич из Гальвея (Ирландия).

После выхода 20-го тома «Acta mathematica» Миттаг-Леффлер получил адрес с подписью 30 мастеров анализа [155, с. III–IV].

Сударь,
основанием «Acta mathematica» Вы оказали геометрам услугу

самого высокого значения, чем заслужили единодушную признательность. То, что сделали Крелле и Лиувилль для Германии и для Франции, Вы сделали с равным успехом для Скандинавских стран.

В эпоху, когда множится число работ и открытий, Вы взяли на себя миссию, которую выполнили с честью, содействовать прогрессу Математики, облегчая авторам публикацию их трудов.

Журнал, которому Вы в течение тринадцати лет посвящаете Ваши преданность и талант, имел счастье получить мемуары исключительного значения, которые навсегда сохранятся в Анализе.

Он находится на самом высоком уровне среди существующих периодических публикаций, он давал плодотворный импульс для математических исследований в Скандинавских странах, которые с гордостью соединяют славу Абеля и Линнея, Шееле, Берцелиуса и Эрстеда.

От имени друзей Анализа мы желаем, чтобы «Acta mathematica» продолжали действовать на благо науки на поприще, начатом с таким блеском, пользующемся всеобщей симпатией геометров.

Вейерштрасс, П. Дюбуа Реймон, Фукс, Э. Шеринг, Крэг, Ньюком, Вейр, Лерх, лорд Кельвин, лорд Рейли, Сильвестер, Мансион, Бертран, Эрмит, Жордан, Дарбу, Пуанкаре, Пикар, Аппель, Бриоски, Кремона, Бельтрами, Сонин, Марков, Стефанос, Скоут, Гомес Тейшейра, Эммануель, Петрович, Гейзер

Кроме того, были получены поздравления от 370 математиков из 18 стран: из Америки, Бельгии, Дании, Германии, Англии, Финляндии, Франции, Греции, Голландии, Италии, Норвегии, Австро-Венгрии, Португалии, Румынии, России, Швеции, Сербии, Испании.

В 1902 г. исполнилось 100 лет со дня рождения великого норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. Три тома (26—28-й) «Acta mathematica» были посвящены памяти Абеля. В них, кроме неизданного письма Абеля, помещены работы, непосредственно связанные с исследованиями Абеля. В 26-м томе дан портрет Абеля (это единственный известный его портрет), приведенный и в первом томе «Acta mathematica». Миттаг-Леффлер послал три юбилейных тома в университет Кристиании с таким письмом [155, с. IV]:

Глубокоуважаемый г-н Ректор, мои Коллеги университета Кристиании!

Математика, старейшая и выше всего развитая среди наук, может указать много имен, которые представляются межевыми камнями на пути развития человеческой мысли. Одним из них является имя Нильса Хенрика Абеля, который собрал нас на сегодняшнем памятном часе,— имя юноши с детской душой, мыслителя, записавшего вечные законы науки о числе, счастливца, который наслаждался радостью творчества, как могут только величайшие из людей, и знал, что время бессильно изменить его позицию властителя мыслей.

Взгляд Абеля на науку был всеобъемлющим, он всегда был направлен к самому высокому, к самому идеалу, как охарактеризовал его величайший из его учеников Вейерштрасс. В этом смысле я приношу вам дар от 50 математиков, которые все хотят считаться учениками Абеля и надеются, что некоторым образом могут прийти к продолжению его труда.

Среди 50 авторов юбилейных томов журнала: Аппель, Беклунд, Гильберт, Дарбу, Минковский, Миттаг-Леффлер, Пикар, Пуанкаре, Фробениус, Фукс и др.

Студенты университета Кристиании участвовали в торжествах по случаю дня Абеля. Миттаг-Леффлер выступил перед ними [155, с. V]:

Коллеги [4] университета Кристиании!

Благодарность за [приглашение участвовать] в поклонении от нас, посланцев различных научных обществ мира, которые занимаются математикой и заботятся о ней, уже высказал г-н Ньюком, старейший из нас. Но мы думаем, что должно прозвучать еще одно слово благодарности, на этот раз на северном языке. Коллеги из Кристиании, это ваш час, сегодня и вчера; так как кому же Абель ближе, как не вам, Абель, у которого никогда не было другого звания, кроме гордого звания «Скромный». Как математик и как норвежский студент, Абель, который любил вашу жизнь, разделял ваши горести и знал ваши радости, обдумывал идею, форма и содержание которой стали определяющими в науке о числе – самой высокой, самой строгой и самой трудной из наук.

Прекрасные слова были обращены к нам, посланцам, которые находятся здесь, чтобы почтить память Абеля, и наша научная значимость и наша научная деятельность оценены высоко. Однако все мы, как вы, норвежские коллеги, должны знать: только скромнейшие – последователи идей вашего Абеля, на них покоится дело нашей жизни, и только с ними мы можем надеяться на место в науке будущих поколений. Я считаю вас счастливыми, норвежские коллеги. Многие великие люди были раньше студентами. Никто раньше чем Абель не вошел в бессмертие будучи еще студентом. Ни у какого университета, ни у какого студенческого общества нет таких воспоминаний.

Будьте же вы всегда достойны таких воспоминаний, никогда не забывайте о строгом, наложенном на вас долге, поддерживайте всегда идеал на той высоте, на какой держал его Нильс Хенрик Абель — этого желает вам математик, являющийся вашим и Норвегии другом.

В 1916 г. Миттаг-Леффлеру исполнилось 70 лет. Он получил много поздравлений и в начале 40-го тома «Acta mathematica» выразил благодарность всем, поздравившим его:

---

[4] В подлиннике: Kommilitonen — соратники, соучастники.

Нижеподписавшийся, главный редактор этого журнала выражает здесь глубокую благодарность научным обществам, ассоциациям, группам математиков и отдельным математикам Германии, Англии, Австрии, Дании, Финляндии, Франции, Голландии, России, Швеции и Швейцарии, которые почтили меня добрыми пожеланиями по случаю моего 70-летия 16 марта этого года.

За благоприятные оценки, предметом которых был этот журнал, его прошлое и будущее, я также выражаю искреннюю благодарность. Я сделаю все, что будет от меня зависеть, чтобы журнал продолжал выполнять чисто научную задачу, которая была поставлена при его основании.

Дьюрсхольм, 1916.
Г. Миттаг-Леффлер

Незадолго до смерти, в 1926 г., по случаю 80-летия Миттаг-Леффлер получил еще раз выражение признательности от читателей журнала. Ему были посвящены три тома «Acta mathematica» (47—49-й) со статьями 46 выдающихся математиков разных стран.

Наконец, в томе 50, 1927 г., появилась статья Н. Э. Нёрлунда «Г. Миттаг-Леффлер», посвященная памяти человека, который в течение 45 лет был главным редактором журнала [155].

Ковалевская и «Acta mathematica»

По переписке С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера [207] можно проследить за тем, как главный редактор журнала работал над своим детищем и как он вовлекал Ковалевскую в работу над просмотром и редактированием статей, в хлопоты по распространению журнала и по изысканию средств для его издания.

Надо отметить, что у Миттаг-Леффлера было плохое здоровье и во время каникул он ездил на лечение в различные районы, рекомендованные врачами по климатическим условиям. Но и в периоды лечения он не оставлял мыслей о своих делах в Стокгольме, особенно о журнале. В 1885 г. неделю он пробыл на высокогорном курорте Церматт в Швейцарии, где продолжал думать о делах. Он писал Ковалевской (в письме от 8 августа 1885 г.), что собирается поехать в Петербург, она должна разузнать в столице России о наилучших путях получения ассигнований для журнала.

Миттаг-Леффлер считал, что он найдет возможность получить доступ к императрице, но спрашивает: от кого в дальнейшем зависит дело? От Д. А. Толстого, президента Петербургской академии наук (и одновременно министра внутренних дел)? «Но и за ним, вероятно, стоит какой-нибудь чиновник, который в конце концов и решает дело» [207. С. 115].

В июне 1886 г. Ковалевская поехала в Париж и, конечно, Миттаг-Леффлер дал ей поручения по поводу своего журнала. Из Дюфеда, в Емтланде, он пишет 18 июня 1886 г. Софье Васильевне, что она непременно должна пойти к Бертрану и сказать ему, что шведское правительство собирается официально обратиться в Институт Франции с запросом по поводу дотации для «Acta mathematica» и подписки на журнал. Ковалевская при этом должна проявить все свои дипломатические способности, которые, по его мнению, она умеет проявлять, если захочет. В другом письме, от 22 июня, он говорит Ковалевской о Бертране: «Завоюйте его для себя самой, для меня и прежде всего для „Acta"!» [207, с. 132].

В Христиании 7 июля 1886 г. должен был открыться съезд естествоиспытателей, куда Ковалевская собиралась поехать. Гёста напутствует ее: если она сможет достать хорошие статьи для журнала, пусть берет не раздумывая!

В августе Ковалевская была в Петербурге. Там она по просьбе Миттаг-Леффлера должна была развить бурную деятельность по поводу журнала. Миттаг-Леффлер вручил ей составленную им памятную записку (P. M., т. е. Pro Memoria), которую следовало через жену Достоевского передать в руки Победоносцева. В этой записке (см. Приложение 1) перечислялись государства, которые согласились давать ежегодно дотацию на журнал и подписываться на определенное число экземпляров журнала. Так, правительство Швеции ежегодно дает 4000 крон и подписывается на журнал для всех лицеев страны; правительство Франции обеспечивает подпиской на журнал все факультеты и лицеи страны, что составляет примерно 250 экземпляров (правда, может быть, как ему советовала Ковалевская, Миттаг-Леффлер несколько преувеличил числа).

Так как в России имелось свыше 400 лицеев (т. е. средних учебных заведений) то Миттаг-Леффлер надеялся, что подписка будет не менее чем на 200 экз.

В памятной записке отмечено, что журнал опубликовал уже ряд статей русских авторов.

Но хождения Ковалевской с памятной запиской были неудачными. Прежде всего она пошла к академику Чебышеву, с которым у нее были дружеские отношения. Но если Пафнутий Львович охотно выполнил просьбу Миттаг-Леффлера рекомендовать журнал Петербургской академии наук, то просьба хлопотать о субсидиях перед начальством ему была не по душе.

Другой визит Ковалевской, в воскресенье 19 декабря 1886 г., был к барону Ф. Р. Остен-Сакену, ученому и дипломату, почетному члену Петербургской академии наук. Она пишет, что он принял ее очень сердечно и осыпал бранью министра просвещения И. Д. Делянова, который, по его словам, много обещает, но ничего не делает. Однако и сам Остен-Сакен ничего другого не смог предложить Ковалевской, как только пойти к Чебышеву и просить его побывать у Д. А. Толстого, и если тот не будет абсолютно против, то надо бы посоветовать королю Швеции написать Д. А. Толстому. Предполагалось, что последний будет настолько польщен получением письма от монарха, что не сможет отказать. Миттаг-Леффлер мог бы пойти к королю в ближайший вторник, его приемный день, но план Остен-Сакена еще был очень далек от выполнения: надо было, чтобы Чебышев пошел к Д. А. Толстому.

Произошел оживленный обмен письмами и телеграммами между Миттаг-Леффлером и Ковалевской, но результат миссии Ковалевской был отрицательным, ей не удалось добиться поддержки у русских властей.

Однако нашелся русский математик, который горячо поддержал журнал, — это петербургский профессор А. Н. Коркин. Он написал докладную записку в министерство народного просвещения о необходимости для всех гимназий России подписки на «Acta mathematica»: этим министерство «не только принесет значительную пользу преподаванию, — писал А. Н. Коркин, — возвышая уровень познания учителей, но и повлияет вообще на распространение математических знаний в нашем отечестве» [207, с. 257].

Ученый комитет министерства народного просвещения вынес определение: «Периодическое издание „Acta mathematica“ рекомендовать для фундаментальных библиотек мужских средних учебных заведений» [Там же]. Насколько выполнялась эта рекомендация, трудно сказать.

Статьи Г. Кантора

Особого внимания заслуживает история публикации в журнале «Acta mathematica» работ Георга Кантора [5].

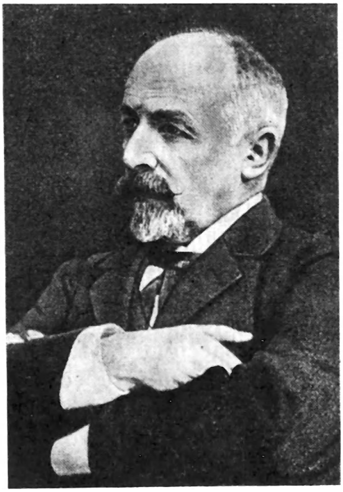
Миттаг-Леффлер был восхищен идеями Кантора и решил напечатать его статьи, уже опубликованные на немецком языке, в переводе на французский (см.: «Acta mathematica», т. 2, с. 349—380). Он написал Кантору 10 января 1883 г., что, по его мнению, философская часть трудов Кантора должна производить большое впечатление в Германии, но математическая часть может быть понята только Вейерштрассом и, может быть, Шоттки. Во Франции же его идеи заинтересуют многих, в особенности Аппеля, Пикара и Пуанкаре, а также Эрмита. Но они, кроме Аппеля, не владеют немецким языком.

Первую из пяти статей Кантора для тома 2 журнала перевел Аппель, вторую — Пуанкаре. Другие статьи было поручено перевести аббату Даржé, знавшему математику и философию Канта. Пуанкаре, Эрмит и Пикар производили тщательную проверку перевода. Сначала Пикар ругался: по-видимому, идеи Кантора воспринимались с трудом. Французским математикам не нравилось, что у Кантора много новых символов и названий.

На пасхальные каникулы 1884 г. Кантор приехал в Париж, где встретился с французскими математиками и произвел на них хорошее впечатление. Пикар писал Миттаг-Леффлеру 4 мая 1884 г. о Канторе: «Это очень любезный человек, разговор с которым очень интересен... Признаюсь, что сначала спекуляции Кантора мне показались не очень интересными..., теперь я думаю, что все это может иметь приложение в анализе: некоторые из его теорем о тригонометрических рядах, где речь идет о точках первого рода, меня в высшей степени поразили» [155, с. 159]. Пикар добавляет, что желательны дальнейшие публикации Кантора. Миттаг-Леффлер опубликовал еще две статьи Кантора («Acta mathematica». 1884, т. 4; 1885, т. 7), последнюю на немецком языке.

Сам Миттаг-Леффлер живо откликнулся на идеи Кантора. В 1884 г. он опубликовал статью [35], где построены интересные примеры множеств особых точек

[5] Подробнее об этом см. статью Дюгака [218].



Георг Кантор

Анри Пуанкаре

функций. Кронекер охарактеризовал эту статью как бесплодную.

В письме 17 мая 1885 г. Миттаг-Леффлер передает Ковалевской то, что он слышал от Энестрёма, приехавшего из Берлина. Там Энестрём разговаривал с Кронекером, который воспользовался случаем, чтобы высказать много плохого о теории функций Кантора. При встрече с Кантором Энестрём узнал, что Кантор обиделся на Миттаг-Леффлера, сократившего его философский мемуар.

С другой статьей Кантора произошло следующее. Она уже была набрана, когда Миттаг-Леффлер, посылая Кантору корректуру, написал ему, что эта работа — о порядковых типах — сейчас не получит признания, она будет понята лишь через 100 лет, и предоставил Кантору выбор — печатать ее или не печатать. Как впоследствии писал Кантор, он взял работу обратно, не желая повредить молодому журналу [144].

Статья Г. Кантора была напечатана через 52 года после его смерти и через 85 лет после первой ее корректуры. Опубликовал ее английский историк математики Граттан-Гиннес [144]. По-видимому, об этой статье Г. Кантор писал Ковалевской 7 декабря 1884 г.: «Сейчас я занимаюсь обработкой мемуара по теории порядковых типов, которая должна быть закончена в первых месяцах следующего года. Основные принципы с возможной краткостью я составил еще ранее для публикации в вашем журнале. Первые пять параграфов этих «принципов» 20-го октября послал проф. Миттаг-Леффлеру; за этим первым сообщением последуют еще по крайней мере пять параграфов, которые будут готовы, как только я узнаю, что должно начаться печатание».

Густав Энестрем

Далее Кантор писал: «В первых параграфах речь идет лишь о типах просто упорядоченных множеств; но подобным же образом существуют и типы двукратно, трехкратно, n-кратно, даже ω-кратно и т. д. упорядоченных множеств, благодаря которым, по-видимому, проливается много света на старые и новые вопросы арифметики и космологии» [208, с. 123].

В статье 1870 г. Кантор развивает более подробно мысль о применении теории множеств «к *естествознанию* или *космологии,* к которой принадлежат *естественные* науки, связанные как с *неорганическим,* так и с *органическим миром*» [134, с. 66]. Но философские и некоторые математические идеи Кантора не встречали сочувствия математиков. Известно, что Жюль Таннери называл теорию Кантора порядковых чисел «мистикой», а Пуанкаре — «плодом больного воображения», хотя оба признавали его теорию множеств. Неудивительно, что Миттаг-Леффлер выразил сомнение по поводу всей статьи.

В письме Миттаг-Леффлеру от 21 мая 1885 г. Ковалевская передает со слов Энестрёма, что лекции Кантора по философии Лейбница не пользовались успехом: собравшиеся 25 слушателей разбежались.

Признание

О популярности журнала «Acta mathematica» свидетельствует следующее. В мае 1886 г. во французской газете «Le Temps» появилась статья в рубрике «Академия наук», посвященная заседанию 3 мая математиков и астрономов [120]. В ней говорилось о том, что математика редко появляется на страницах газеты, но не потому, что ей не придается большого значения, а потому, что ее вопросы трудны для изложения. Но сейчас газета рекомендует обратить внимание на последний номер журнала «Acta mathematica», интернационального сборника, основанного в Стокгольме в 1882 г. Миттаг-Леффлером и ставшего благодаря преданности делу его редактора и покровительству монарха одним из первых математических журналов мира. Затем перечисляются статьи, напечатанные в 7-м томе журнала: Пинкерле, Рунге и Пуанкаре. Из двух статей последнего названа только одна: о равновесии вращающейся жидкой массы [162], очевидно, потому, что ее содержание доступно для газеты, и говорится, что г-н Эрмит отмечает работу Пуанкаре как «математический труд исключительной ценности».

В газете дается понятие о задаче об определении возможных эллипсоидальных форм вращающейся жидкости и отмечается вопрос об их устойчивости. Далее говорится о молодой русской, мадам Ковалевской, недавно ставшей профессором Стокгольмского университета, которая рассмотрела другую форму равновесия — форму кольца (как у Сатурна). Дается понятие об исследованиях Пуанкаре о формах равновесия вращающейся жидкости и их устойчивости.

Ковалевская пишет Миттаг-Леффлеру летом 1886 г. из Парижа, что она еще не видела статью, но слышала, что она принадлежит Пуанкаре. (На самом деле ее, очевидно, написал со слов Пуанкаре и, вероятно, Эрмита корреспондент газеты, и поэтому в ней много ошибок: Пуанкарре вместо Пуанкаре и т. п.)

Статья Пуанкаре о фигурах равновесия позволила газете рассказать читателям о шведском журнале, о Миттаг-Леффлере, Ковалевской и Пуанкаре.

На протяжении столетнего существования у журнала было лишь пять издателей (главных редакторов). Все они — крупные скандинавские математики: Миттаг-Леффлер (1882—1927), Н. Э. Нёрлунд (1924—1947), Т. Карлеман (1927—1949) и Леннарт Карлесон с Ларсом Гордингом (1949—1982).

С 1982 г. решено впредь издателем «Acta mathematica» считать Институт Миттаг-Леффлеров. Так была увековечена память Гёсты Миттаг-Леффлера — первого издателя большого скандинавского журнала.

О премии имени Оскара II

После основания журнала «Acta mathematica» Миттаг-Леффлер стал думать о премии журнала. Он привлек к премии внимание короля Оскара II и приурочил премию ко дню его шестидесятилетия: 21 января 1889 г.

Премия должна была посвящаться важным открытиям в области высшего математического анализа. Она состояла из золотой медали стоимостью в 1000 франков с изображением Оскара II и суммы в 2500 крон золотом.

Для конкурса были предложены четыре задачи[6], из них первая — Вейерштрассом, четвертая — Эрмитом, вторая и третья, вероятно, также Эрмитом:

1. Задача о движении n тел.
2. Развитие и обобщение функций Фукса, теорию которых он развил в ряде мемуаров, но для которых не нашел явной формы.
3. Изучение функций, определяемых дифференциальным уравнением первого порядка вида: целая рациональная функция независимого переменного, функции и ее производной равна нулю.
4. Изучение фуксовых (автоморфных) функций.

Допускались работы и на другие темы.

Во время летних каникул 1884 г. Миттаг-Леффлер в письме к Ковалевской от 6 июля обсуждает вопрос о премии.

Вейерштрасс высказал свое мнение: если на поставленные вопросы никто не ответит должным образом, то нужно присудить премию тому математику, который за последние годы сделал наиболее важные открытия. Миттаг-Леффлер согласился с ним, однако считал, что постановка определенных вопросов на премию должна содействовать успеху науки, если вопросы будут разумно выбраны. Он добавил, что вопрос Парижской академии наук относительно линейных дифференциальных

---

[6] Подробное изложение вопросов на премию см. в Приложении 2.

уравнений имел важное значение для науки, так как послужил исходной точкой для исследований Пуанкаре, который написал работу под названием «О фуксовых функциях» на большую премию Парижской академии наук 1880 г. [163].

Премия Оскара II будет присуждаться не чаще, чем раз в четыре года. Мальмстен и король решили, что жюри будет назначаться королем и состоять из трех человек: главного редактора «Acta mathematica» и двух из следующих лиц: немецкого или австрийского математика; французского или бельгийского; английского или американского; русского или итальянского математика. В первое жюри наметили: Вейерштрасса; Эрмита; Кейли или Сильвестра; Бриоски или Чебышева. Во второе жюри, если бы оно было, должна была войти Ковалевская.

После каждого присуждения премии двое из жюри уходят и новые назначаются королем. После смерти короля Оскара трое оставшихся намечают двух новых, однако они всегда должны придерживаться установленных правил.

Миттаг-Леффлер хотел, чтобы премия носила международный характер, поэтому публикация работы в «Acta mathematica» была не обязательна: «Интересы науки должны быть на первом месте. Если в то же время можно сделать что-нибудь и для «Acta», то это другое дело, и тогда я сделаю это с величайшим удовольствием» [207, с. 54].

Эта премия доставила Миттаг-Леффлеру много хлопот, беспокойства и неприятностей. Так, Кронекер прислал Миттаг-Леффлеру письмо, полное упреков, по поводу объявленной премии. Кронекер был обижен тем, что его не ввели в состав жюри, не посоветовались насчет вопросов на премию и поставили вопрос № 4 — о фуксовых функциях, который он считал чисто алгебраическим и, следовательно, подлежащим его, Кронекера, компетенции, между тем как решение о вопросе № 4 было принято некомпетентными лицами. Он писал, подчеркнув это предложение: «Совершенно несомненно также, что ни один из современных математиков даже в отдаленной степени не обладает той компетентностью для постановки и суждения об алгебраическом вопросе, как вопрос № 4, какую я приобрел путем работы целой жизни» [207, с. 113]. Кронекер собирался писать Оскару II о ненормальном положении дел с математикой, Обидчивый характер Кронекера проявился также в том, что в цитируемом письме он отказался от данного им раньше обещания дать рекомендацию для Сигне к пользовавшемуся известностью немецкому врачу.

Когда Ковалевская получила письмо Миттаг-Леффлера (от 8 августа 1885 г.) с выдержками из письма Кронекера, то ее охватил смех: так комично было все в этом письме, где проявлялось мелкое тщеславие Кронекера. Однако Миттаг-Леффлер был взволнован и написал Кронекеру, длинно объясняя в десяти пунктах, что вопрос № 4 является не алгебраическим, но функционально-теоретическим, этот вопрос был поставлен Эрмитом; что Вейерштрасс выбран не только по его научным заслугам, но и из-за почтенного возраста. Ковалевская считала, что Миттаг-Леффлер ответил Кронекеру с излишними подробностями, вроде бы извинялся. На это Миттаг-Леффлер отвечал ей так: «Ведь мои отношения с Кронекером совсем другие, чем, например, Ваши. Я его ученик и получил от него много доказательств его благожелательности и готовности к услугам. Этого я никогда не могу и не хочу забывать, как бы он теперь ни поступал» [207, с. 118].

Дальше, однако, Миттаг-Леффлер добавил: «Я никогда не забуду, чем я ему обязан, но также не премину сделать все, что могу, чтобы побороть вредное влияние, оказываемое им на немецкую математику» [Там же, с. 120]. (Пожалуй, одним из самых плохих влияний Кронекера на немецкую математику было то, что он испортил много крови Георгу Кантору и Вейерштрассу.) Вейерштрасс в одном из своих писем Ковалевской говорил, что когда у Кронекера бывает задето тщеславие, он может наделать много глупостей, о чем потом сожалеет и старается их загладить. Так случилось и на этот раз: вскоре Кронекер прислал Миттаг-Леффлеру примирительное письмо.

Были и другие лица, недовольные объявлением конкурса. Так, Тереза Гюльден сказала Софье Васильевне, что ее муж, Гуго Гюльден, задет выбором темы «Задача n тел», так как он сам занимался этой задачей. Он усмотрел в поставленном вопросе, что Леффлер не верит его работам. Ковалевская долго и подробно объясняла г-же Гюльден разницу между точками зрения астрономов и математиков, и Гюльден, наконец, примирился, сказав, что у каждой науки свои собственные задачи.

Премия Оскара II была присуждена двум французам за фундаментальные работы: Пуанкаре — за задачу трех тел [164] и Аппелю за исследование в области дифференциальных уравнений [121]. Усилия Миттаг-Леффлера не пропали даром.

Институт супругов Миттаг-Леффлер

В конце 1880-х годов Миттаг-Леффлер приобрел виллу в пригороде Стокгольма Дьюрсхольме, которую потом расширял и видоизменял. Он предназначал ее для своей библиотеки и коллекций, хотел сделать ее математическим архивом и служебным помещением для журнала «Acta mathematica». Он с увлечением коллекционировал книги, журналы, оттиски, рукописи и факсимиле. Вокруг него образовалась группа секретарей и ассистентов, которые разбирали его корреспонденцию, помогали ему собирать материалы для его работ по истории математики и составляли каталог библиотеки.

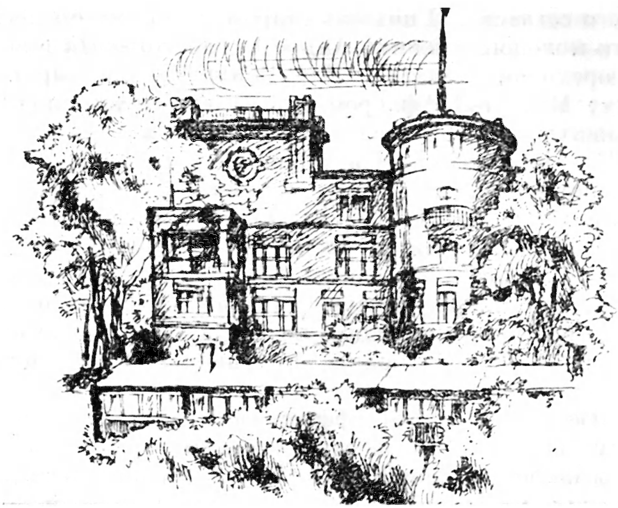
В 1914 г. вышел в свет каталог математической библиотеки, прекрасно сделанный Ст. Грёнфельдтом [136].

Еще 6 января 1883 г., в самом начале своей супружеской жизни, Г. Миттаг-Леффлер и его жена Сигне написали завещание. В день 70-летия Гёсты Миттаг-Леффлера, 16 марта 1916 г., они составили новое завещание [7]. Все их имущество после их смерти они завещали организации, которая должна получить название «Математический институт супругов Миттаг-Леффлеров». В завещании, опубликованном в «Acta mathematica», том 40, говорится о задаче института.

В заключении завещания содержатся предложения о том, как институт должен начинать свою деятельность, об условиях жизни Сигне, если она переживет мужа, и о некоторых небольших пожизненных рентах и других пособиях.

В 1916 г. Миттаг-Леффлер понес большие потери в своем состоянии, вложенном в строительство гидростанции на реке Уме. Он был вынужден продать часть земли в Дьюрсхольме. Свой дом он передал Королевской шведской академии наук в качестве здания для математического института, который был формально открыт в 1919 г. Миттаг-Леффлер стал его директором,

[7] См. Приложение 3.



Институт Миттаг-Леффлеров
Рис. Оле Эриксона

а группа его друзей образовала род совета. После смерти Миттаг-Леффлера в 1927 г. капитал института составлял 600 000 крон.

В печати появлялись сообщения об Институте Миттаг-Леффлеров. Так, в 1920 г. вышла в Упсале в издательстве Алмквиста и Викселя брошюра «Математический институт Миттаг-Леффлеров». В 1917 г. Журден написал статью «Институт Миттаг-Леффлеров».

Интересные воспоминания французского математика Андре Вейля относятся к последнему году жизни Миттаг-Леффлера: в 1927 г. Вейль провел месяц у шведского математика на его прекрасной вилле в Дьюрсхольме [188]. История этого посещения такова.

В 1922 г. Анри Виллá стал редактором обновленного журнала Лиувилля (и пробыл на этой должности полвека). В 1925 г. он начал выпускать серию «Мемориал математических наук» (Mémorial des Sciences Mathématiques), соперничавшую с немецкой «Энциклопедией математических наук» (Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften).

Виллá предложил Миттаг-Леффлеру написать для «Мемориала» статью о полиномиальных рядах и получил его согласие. В помощь старому ученому он послал своего молодого ученика Андре Вейля, который прибыл в Дьюрсхольм в марте 1927 г. Вейль был гостеприимно принят Миттаг-Леффлером и его персоналом, получил небольшую комфортабельную комнату в верхнем этаже. К столу собирались по-семейному, с секретарями и ассистентами, во главе с хозяином дома. Иногда бывали гости: Марсель Рис, Эйнар Хилле, экономист Густав Кассель. Миттаг-Леффлер был замечательным хозяином и знал это. Он вел беседы на разные темы. Вейлю запомнился рассказ Миттаг-Леффлера о посещении им папы римского, после разговора с которым он пришел к заключению, что папа не более верующий, чем он сам.

С Вейлем Миттаг-Леффлер беседовал отдельно по поводу обещанной работы, которая, как оказалось, была в полном беспорядке. Вейль начал писать статью, но бросил. Разговор же с Миттаг-Леффлером происходил так: сначала он начинал говорить по-французски — этим языком он владел превосходно, затем переходил на немецкий, который знал бегло, и, наконец, устав, начинал говорить по-шведски. Тогда он спохватывался: «Я забыл, что вы не знаете шведского; продолжим в следующий раз» [188, с. 11].

Вскоре после начала беседы Миттаг-Леффлер вспоминал о великих математиках, с которыми у него были близкие контакты, в особенности о Вейерштрассе (тут рассказ шел по-немецки), и, наконец, о Соне Ковалевской.

В своих романтических представлениях о скандинавской стране, навеянных повестью Сельмы Лагерлёф о Нильсе Хольгерссоне [200, 201], А. Вейль не разочаровался, так как посещал музеи, любовался скульптурами Стокгольма, и весна была хорошей, и он был молод.

Вечерами Вейль сидел в библиотеке Миттаг-Леффлера [8]. Восхищался Вейль и комнатой с корреспонденцией шведского ученого, разложенной по ящикам. В ней была переписка с А. Пуанкаре, Г. А. Шварцем, С. В. Ковалевской. В частности, Вейлю запомнилось грустное письмо Пенлеве 1902 г., в котором он сообщал о смерти своей молодой жены.

На вид Миттаг-Леффлер казался Вейлю хрупким,

---

[8] Харди считал эту библиотеку «прекраснейшей в мире» [137].

но все же крепким и выносливым. Поэтому для него была неожиданностью смерть хозяина Дьюрсхольма в июле 1927 г.

С этого времени и до 1949 г. директором института был Торстен Карлеман. После его смерти наступило «междуцарствие» до 1968 г. В 1969 г. директором стал профессор Леннарт Карлесон. В настоящее время институт возглавляет профессор Ларс Хёрмандер.

Институт помещается в красивом доме. При входе в него посетитель читает надпись [155, с. 1]:

Число есть мышленья начало и конец,
Вместе с мыслью рождается число,
Не поднимается мысль выше числа.

Рядом с главным домом в 1968 г. на средства Фонда Валленбергов построено здание, предназначенное для приезжающих поработать в институте. Теперь институт поддерживается также правительствами Дании, Норвегии и Финляндии.

Деятельность Института Миттаг-Леффлеров проявляется в настоящее время в осуществлении программ исследований по математике, частично поддерживаемых правительствами Швеции и Финляндии. Каждый год группа из примерно 20 старших математиков и дипломированных студентов, объединенных общими интересами, приглашается работать в институте. Основными областями исследований являются гармонический анализ, теория вероятностей, теория потенциала, функции комплексного переменного и уравнения с частными производными. Кроме «Acta mathematica», институт выпускает журнал «Arkiv för Mathematik».

Сведения об Институте Миттаг-Леффлеров и его богатой библиотеке и большом архиве даны в статье Граттан-Гинесса [135], которую он любезно прислал мне в 1970 г., до ее опубликования. В частности, в статье приведены данные о переписке Миттаг-Леффлера и С. В. Ковалевской (подробнее см.: [198]), о письмах к ней Чебышева и других русских, Вейерштрасса, Эрмита и других математиков.

Мною опубликованы письма Вейерштрасса [190], Эрмита [210], Чебышева [209] и других математиков [208, 211].

Тот, кто работал в Институте Миттаг-Лефflеров, остается доволен существующими там порядками. Порой в еще не разобранных архивных материалах находятся уникальные вещи. Так, профессор Роджер Л. Кук обнаружил среди записей лекций Ковалевской письмо к ней П. Л. Чебышева, очень интересное, потому что Чебышев применяет в нем эллиптические функции, которые он, по преданию, не любил и которые не встречаются в других его статьях [199]. Другое письмо — от Вейерштрасса Г. А. Шварцу по поводу работы Ковалевской над задачей о вращении твердого тела. Профессор Кук прислал мне также газету района Дандерид, к которому относится Дьюрсхольм [131]. В этом номере (июнь 1981 г.) художник Оле Эриксон написал статью о своем посещении Института Миттаг-Лефflеров, которую сопроводил своими рисунками. Один из них помещен здесь.

Американская писательница Беатриса Стилман, писавшая о С. В. Ковалевской [177] и переведшая на английский язык ее «Воспоминания детства» [147], получила в Дьюрсхольме ответы на ряд своих и моих вопросов о Миттаг-Лефflере.

Мною получено из института по почте много материалов, относящихся к жизни и деятельности Миттаг-Лефflера, и ответов на мои вопросы благодаря любезности г-жи Сильвии Карлесон.

Глава 5

Научные труды

О первых научных работах Миттаг-Лефflера

Если рассмотреть список 119 работ — статей и книг Г. Миттаг-Лефflера, составленный Н. Э. Нёрлундом [155], то в нем можно отметить три рода работ. Больше всего статей (около 80) посвящено теории аналитических функций, 12 статей — теории дифференциальных уравнений, главным образом линейных. В остальных работах рассмотрены общие вопросы математики, даны некрологи близких Миттаг-Лефflеру ученых и биографии Абеля, Вейерштрасса, Ковалевской.

Первая статья — заметка на двух страницах, опубликована в «Tidskrift för matematik och fysik» (шведский «Журнал математики и физики») [1] в 1868 г., когда Миттаг-Леффлер был еще студентом университета в Упсале. Журнал посвящен вопросам элементарного преподавания.

В первом номере этого журнала, в первом разделе, помещены статьи по тригонометрии, дескриптивной геометрии, истории арифметики в Швеции, а также приведены 103 задачи по геометрии, предложенные четырнадцатью авторами. Во второй части рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к началам высшей математики: об элементарном изложении теории maxima и minima, о радиусах кривизны конических сечений и т. п.

Среди указанных задач Миттаг-Леффлера заинтересовала задача № 43, предложенная преподавателем гимназии Г. Х. Линдквистом, а именно: «В круге проведены два радиуса под прямым углом друг к другу. Из одной из крайних точек нужно провести прямую линию, которая пересечет периферию круга и продолжение другого радиуса так, чтобы полученный отрезок равнялся стороне квадрата, вписанного в круг».

В том же номере журнала помещен отклик на эту задачу под заглавием: «Задача 43 (Г. Х. Линдквиста) решена студентом Г. Миттаг-Леффлером. При этом Миттаг-Леффлером дается обобщенная постановка задачи: «В круге проведена хорда EC и одна из соответствующих ей дуг делится пополам в точке A; через A проводится прямая линия так, чтобы отрезок между периферией круга и хордой или ее продолжением имел заданную длину l».

Миттаг-Леффлер приводит решение задачи и исследует число возможных решений (два или четыре).

Через два года в том же журнале появилась заметка Миттаг-Леффлера [2] под названием «Интегрирование уравнения $f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$». Для этой задачи в 1862 г. К. И. Мальмстеном была предложена геометрическая интерпретация, которой Миттаг-Леффлер и воспользовался. Другое решение, в том же номере журнала, дано датчанином Адольфом Стином.

В 1872 г. издательство Упсальского университета выпустило книгу Миттаг-Леффлера (68 с.) под названием «Об отделении корней синектической[1] функции одного переменного» [3]. Она послужила ему для получения докторской степени в Упсале в том же году.

В работе рассмотрена задача об определении области, ограниченной некоторым контуром, внутри которого находится каждый корень (вообще говоря комплексный) аналитической функции. Решение основано на теории вычетов Коши и некоторых исследованиях скандинавского математика Дилнера. Метод иллюстрируется примерами.

В последующие годы, обучаясь за границей, Миттаг-Леффлер обдумывал теоремы, изложение которых слышал от местных профессоров, и пытался давать им свои доказательства. В Бюллетене академии наук Стокгольма в 1873 г. появилась его статья «Попытка нового доказательства предложения по теории определенных интегралов» [4], а в 1874 г. «Два вывода теоремы Коши о вычетах» [5].

В 1875 г. была опубликована первая статья за границей, на немецком языке, с очень длинным названием: «Доказательство теоремы Коши об обращении в нуль интеграла $\int f(x)dx$ вдоль замкнутой линии, удовлетворяющей определенным условиям» [6].

Как раз в период, когда Миттаг-Леффлер слушал лекции в Берлине, Вейерштрасс размышлял над задачей о разложении аналитической функции в бесконечное произведение. В письме к Ковалевской от 16 декабря 1874 г. Вейерштрасс сформулировал свою знаменитую теорему, а в 1875 г. излагал ее на лекциях. Это дало толчок Миттаг-Леффлеру к открытию аналогичной теоремы о функциях «рационального характера». Первое сообщение о ней он сделал в Академии наук Стокгольма 7 июня 1876 г., и опубликовано оно было в Бюллетене академии в том же году [7].

Большая работа (на 96 с.) «Об одном методе получения аналитического представления эллиптических функций» [8] была напечатана в 1876 г. на шведском языке. В 1877 г. эта книга послужила автору в качестве второй диссертации (Habilitationsschrift). В том же году он стал профессором в Гельсингфорсском университете. Позже, в 1923 г., статья была переведена на английский язык под названием «Введение в теорию

---

[1] Синектическая — однозначная аналитическая.

эллиптических функций» и опубликована в журнале «Annals of Mathematics» [109]. Эта работа была сделана по побуждению Вейерштрасса, в ней указаны различные пути, которые приводят к аналитическому представлению эллиптических функций. В особенности автор останавливается на исследованиях Вейерштрасса. Дается обзор развития теории эллиптических функций (Якоби, Эрмит, Лакруа, Брио и Буке, Пюизё, Лиувилль, Вейерштрасс).

Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях

Здесь мы расскажем о самой известной теореме Миттаг-Леффлера. Это одна из основных теорем теории аналитических функций, аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби.

Напомним определение *мероморфной функции*[2]: это однозначная аналитическая функция, имеющая в конечной области особыми точками только полюсы.

Если a — полюс мероморфной функции $f(z)$ порядка r, то в окрестности a имеет место разложение

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^r}[c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots]$$

$(c_0\neq 0,\ r>0$, целое$)$.

Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечное число полюсов на конечном расстоянии $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причем главные части будут

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\frac{c_{0n}}{(z-a_n)^r}+\frac{c_{1n}}{(z-a_n)^{r-1}}+\ldots+\frac{c_{r-1\,n}}{z-a_n},$$

то $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\sum_{n=1}^{k} g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)+G(z), \tag{1}$$

где $G(z)$ — целая функция.

Однако если число полюсов бесконечно велико, то такое представление, вообще говоря, не годится, так как ряд, в который перейдет первое слагаемое, может оказаться расходящимся.

---

[2] Полное определение мероморфной функции см. в «Математической энциклопедии» [206, т. 3].

Пусть мероморфная функция имеет бесконечное множество полюсов. Расположим их в порядке возрастания модулей:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

причем $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|, \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$. (На конечном расстоянии не может быть точки сгущения полюсов, так как она была бы тогда существенно особой точкой.)

По теореме Вейерштрасса к каждой функции

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

можно подобрать целый полином

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N,$$

удовлетворяющий условию

$$\left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + p_n(z) \right| < \varepsilon_n,$$

где ε_n — произвольно заданное положительное число для всех z, для которых $|z| \leqslant r_n$, где r_n — радиус круга C_n, сколь угодно близкий к $|a_n|$, но меньший $|a_n|$.

Пусть положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ образуют бесконечный сходящийся ряд $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$. Тогда можно доказать, что бесконечный ряд

$$F(z) = g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \left\{g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + p_1(z)\right\} + \\ + \left\{g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + p_2(z)\right\} + \ldots \qquad (2)$$

в каждой конечной области имеет равномерно сходящийся остаток.

Действительно, пусть C — произвольная конечная область и C_k — первый из кругов $C_1, C_2, \ldots$, внутри которого находится C.

Ряд

$$\Phi_k(z) = \left\{g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + p_k(z)\right\} + \\ + \left\{g_{k+1}\left(\frac{1}{z-a_{k+1}}\right) + p_{k+1}(z)\right\} + \ldots,$$

представляющий k-й остаток ряда (2), сходится в области C равномерно, так как для него ряд $\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots$ является мажорантным.

Теперь пусть будет z_0 произвольная обыкновенная точка, расположенная в области C, а круг K с центром в z_0 весь лежит внутри C. Тогда $\Phi(z)$ будет регулярной внутри K.
Функция

$$F(z)=g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)+\left\{g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)+p_1(z)\right\}+\ldots$$
$$\ldots+\left\{g_{k-1}\left(\frac{1}{z-a_{k-1}}\right)+p_{k-1}(z)\right\}+\Phi_k(z) \qquad (3)$$

также регулярна в окрестности z_0. Функция $f(z)$ может отличаться от $F(z)$ только на целую функцию $H(z)$:

$$f(z)=H(z)+g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)+p_n(z)\right\} \qquad (4)$$

(a_0 может равняться и нулю, остальные $a_n \neq 0$).
Равенство (4) представляет *теорему* Миттаг-Леффлера.

Каждую мероморфную функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы целой функции и ряда, составленного из таких рациональных функций, каждая из которых имеет на конечном расстоянии полюсом только один из полюсов функции $f(z)$.

Мы изложили теорему Миттаг-Леффлера по книге А. Гурвица [193, с. 147–151]. Вейерштрасс сразу обратил внимание на статью молодого шведа, которую тот прислал ему на шведском языке, и быстро (в отличие от своего обыкновения) написал отклик на нее: «О теореме Г. Миттаг-Леффлера» [184], дав другое доказательство.

Вейерштрасс начинает статью словами: «В Известиях Академии наук Стокгольма за 1877 г. г-н Миттаг-Леффлер в дополнение к опубликованным в Известиях нашей (т. е. Германской.— *П. К.*) Академии за 1876 г. [182] моим исследованиям об однозначных функциях одного переменного развил некоторые замечательные теоремы. Среди них особую важность имеет следующая, на которой я ближе остановлюсь, потому что она послужила мне для того, чтобы пополнить результаты моей работы в некоторых существенных пунктах» [184, с. 189].

Вейерштрасс формулирует теорему Миттаг-Леффлера по статье автора:

«Пусть будут даны

1) бесконечный ряд определенных конечных чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$

среди которых нет двух равных и которые удовлетворяют условию

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = \infty;$$

2) бесконечный ряд рациональных функций переменной x:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots,$$

из которых $f_\nu(x)$ только в точке $x=a_\nu$ становится бесконечно большой, а при $x=\infty$ исчезает.

Тогда всегда можно образовать однозначную аналитическую функцию $F(x)$ с одной существенно особой точкой ∞, которая становится бесконечно большой только в точках a_1, a_2, $a_3, \ldots$, и притом так, что для каждого определенного значения ν разность

$$F(x)-f_\nu(x)$$

в точке $x=a_\nu$ имеет конечное значение и, следовательно, внутри некоторой области около этой точки $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x)=f_\nu(x)+\mathfrak{P}(x-a_\nu)$$ [3]».

Миттаг-Леффлер доказывает теорему, показав, что с помощью заданных функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots,$$

можно составить ряд других рациональных функций

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots,$$

таких, что разности

$$F_1(x)-f_1(x), \qquad F_2(x)+f_2(x), \ldots$$

образуют целые функции x или константы и что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

---

[3] $\mathfrak{P}(x)$ обозначает целый полином от x или степенной ряд.

равномерно сходится внутри каждой области, не содержащей точки $a_1, a_2, \ldots$. Отсюда следует, что ряд образует функцию $F(x)$ заданного свойства.

Вейерштрасс предлагает для $F_\nu(x)$ более простой способ образования, чем у Миттаг-Леффлера. По существу, способ, приведенный нами выше, Гурвиц изложил по Вейерштрассу.

Эрмит сразу же ввел теорему Миттаг-Леффлера в свой учебный курс [217, с. 98—106, 150—154]. Теперь эта теорема входит во все большие курсы анализа (см., например: А. И. Маркушевич [204, с. 533 и след.], Л. Хермандер [215]).

Теорема шведского ученого обобщается на случай кратных полюсов. Ряд обобщений дан и самим Миттаг-Леффлером, и другими авторами: Кузеном для аналитических функций многих комплексных переменных (см.: [206, т. 3, с. 706]), Адамаром, давшим уточнение выражения для функции $H(z)$ [193, с. 536], и др.

В статье в Математической энциклопедии [206, т. 3, с. 706] отмечается, что в равенстве (4) общая конструкция многочленов $p_n(z)$ указана Миттаг-Леффлером, отыскание же целой функции $H(z)$ по данной $f(z)$ иногда представляет более трудную задачу.

Чтобы еще лучше выяснить смысл теоремы Миттаг-Леффлера, покажем, что с ее помощью можно получить теорему Вейерштрасса о разложении целой функции в бесконечное произведение.

Заметим, что если целая функция имеет конечное число нулей: $a_1, a_2, \ldots, a_r$, то она представима в виде

$$G_r(z) = (z-a_1) \ldots (z-a_r)\, e^{H(z)},$$

где $H(z)$ — целая функция.

Чтобы получить представление целой функции с бесконечным числом нулей (таковы, например, функции $\sin z$, $\cos z$), будем исходить из равенства (4), в котором примем

$$g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) = 0, \qquad g_n(z) = \frac{1}{z-a_n}, \qquad H(z) = 0$$

и $p_n(z)$ выберем специальным образом:

$$p_n(z) = \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{r_n-1}}{a_n^{r_n}}.$$

Тогда вместо (4) напишем, считая, что $f(z)$ есть логарифмическая производная функции $K(z)$:

$$\left(\log K(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{k_n - 1}}{a^{k_n}}\right\}. \tag{5}$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$K(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\right]. \tag{6}$$

Функция $K(z)$ однозначна. Ряд (5) сходится равномерно и в окрестности каждой точки; бесконечное произведение может быть представлено в виде степенного ряда, т. е. будет целой функцией от z. Точки a_n, и только они, являются нулями $K(z)$.

Если $G(z)$ – целая функция с теми же нулями, что и $K(z)$, то отношение $G(z)/K(z)$ будет целой функцией, не имеющей нулей, представимой в виде $e^{H(z)}$, где $H(z)$ – целая функция. Наконец, если $z=0$ является k-кратным корнем целой функции, то нужно еще добавить множитель z^k к произведению. Окончательно общий вид целой функции, имеющей заданные нули $a_1, a_2, \ldots$, можно представить в виде

$$G(z) = z^k e^{H(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\right].$$

Это и есть теорема Вейерштрасса.

Аналитические функции

Первые работы Миттаг-Леффлера по теории аналитических функций

Появившиеся в 1870-е годы работы Георга Кантора по теории множеств произвели, как мы знаем, сильное впечатление на Миттаг-Леффлера. В 1884 г. Миттаг-Леффлер опубликовал в «Acta mathematica» статью «Об аналитическом представлении моногенных однозначных функций одной независимой переменной» [35], в которой нашла применение теория Кантора.

Миттаг-Леффлер пишет, что исследования, которые он предлагает в указанной статье, в основном были уже опубликованы в «Известиях Шведской королевской академии наук» и в «Докладах» Парижской Академии наук [28—31]. Цель этих исследований — привести теорию однозначных аналитических функций одной переменной к такой степени завершенности, к какой давно приведена теория рациональных функций.

Во введении Миттаг-Леффлер приводит ряд основных понятий. *Окрестность* точки x', принадлежащая числу R, определяется как множество точек x, удовлетворяющих условию $|x-x'|<R$; для бесконечно удаленной точки неравенство имеет вид $|1/x|<R$.

Моногенная однозначная функция $F(x)$ *регулярна* в окрестности точки x', если она разлагается в степенной ряд:

$$F(x)=A_0+A_1(x-x')+A_2(x-x')^2+\ldots, \qquad (1)$$

сходящийся во всей окрестности точки x'.

(Здесь у Миттаг-Леффлера понятие *моногенной* функции не определяется. Вообще же моногенная — функция, имеющая производную.)

Если для точки x' не существует окрестности, в которой $F(x)$ имела бы вид (1), то x' называется *особой точкой*.

Приводятся также сведения из теории множеств. Пусть имеется множество точек Q. *Предельная точка* этого множества — это точка, в любой окрестности которой содержится по крайней мере одна точка данного множества, отличная от нее самой. Производное множество Q' множества Q есть совокупность всех предельных точек множества.

В качестве первого примера рассматривается множество Q, состоящее из точек

$$a_{nk}=\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь производное множество образовано точками, заполняющими окружность $|x|=1$. Точки множества Q

подходят к предельным точкам с двух сторон: изнутри и извне окружности.

Для другого множества

$$a_{pk} = \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right) e^{\frac{2k\pi i}{2p+1}}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 2p;\ p = 1, 2, \ldots)$$

все точки находятся внутри окружности $|x|=1$, точки которой являются предельными.

Наконец, точки третьего множества

$$a_{2p-1,\,k} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right) e^{\frac{2k\pi i}{2p}}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1;\ p = 1, 2, \ldots)$$

расположены вне окружности $|x|=1$, состоящей из предельных точек.

Миттаг-Леффлер формулирует и доказывает свою основную теорему, предварительно приведя определение *изолированного множества.* Изолированным множеством называется множество, содержащее по одному разу каждую отдельную точку, а также содержащее все точки производного множества.

Различные точки изолированного множества могут быть расположены в виде ряда

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$$

По Кантору, это множество имеет ту же мощность, что и ряд целых чисел $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ (Однако не обязательно множество, обладающее таким свойством, изолировано. Таково, например, множество рациональных чисел.)

Теперь сформулируем основную теорему Миттаг-Леффлера.

Пусть будет Q изолированное множество, принадлежащее области переменного x, неограниченно изменяющегося, отдельные точки которого обозначены как $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Пусть будет

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, \quad G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

ряд моногенных однозначных функций, причем $G_\nu(1/$ $/x-a_\nu)$ означает целую рациональную или трансцендентную функцию от $1/(x-a_\nu)$, обращающуюся в нуль при $1/(x-a_\nu)=0$. Тогда можно составить аналитическое выражение, которое всюду ведет себя регулярно, *кроме окрестностей каждой из точек, принадлежащих $Q+Q'$, и которое для каждого определенного значения x в окрестности a_ν может быть представлено в форме*

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+\mathfrak{P}(x-a_\nu),$$

где $\mathfrak{P}(x-a_\nu)$ — ряд по целым положительным степеням $x-a_\nu$.

Во втором параграфе Миттаг-Леффлер рассматривает бесконечное произведение

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+v_\nu)$$

и соответствующий ему ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} w_\nu$, где

$$w_1=1+v_1,\ w_2=(1+v_1)v_2,\ w_3=(1+v_1)(1+v_2)v_3,\ \ldots,$$

$$w_\nu=(1+v_1)\ldots(1+v_{\nu-1})v_\nu,\ \ldots$$

Устанавливается понятие *равномерной сходимости* для бесконечного произведения: бесконечное произведение $\prod\limits_{\nu=1} f_\nu$, множители которого — функции некоторого числа переменных — сходятся равномерно в некоторой части $\mathfrak{A}$ его области сходимости, если для каждого $\delta>0$, фиксированного произвольно, существует целое m, такое, что

$$\left|\prod_{\nu=n}^{n+n'} f_\nu-1\right|<\delta$$

для всех систем переменных, принадлежащих области $\mathfrak{A}$ и для каждого положительного δ, если $n>m$.

Имеет место такая теорема: если произведение $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ равномерно сходится в области $\mathfrak{A}$, то то же будет для ряда

$$f_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(f_{\nu+1}-1)\prod_{\mu=1}^{\nu} f_\mu=\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu.$$

Иначе говоря:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+v_\nu).$$

Следующая теорема относится к случаю, когда имеется бесконечное число рядов Лорана, т. е. рядов, расположенных по положительным и отрицательным степеням x:

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\nu(x), \ldots,$$

которые все сходятся в кольце $R<|x|<R'$.
Пусть

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$$

сходится равномерно для всех x не только в кольце $R<|x|<R'$, но, кроме того, для всех x, имеющих одинаковый модуль. В этом случае можно найти ряд, расположенный по положительным и отрицательным степеням x, сходящийся равномерно для всех x в кольце $R<|x|<R'$.

Миттаг-Леффлер приводит еще одно понятие — *континуума* $\mathfrak{A}$: множество всех точек, в окрестности которых $F(x)$ ведет себя регулярным образом, составляет *континуум* $\mathfrak{A}$.

Теперь можно сформулировать теорему Миттаг-Леффлера.

Пусть Q — изолированное бесконечное множество точек в области переменной x, такое, что множество $Q+Q'$ образует полную границу континуума $\mathfrak{A}$. Пусть будут $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ различные точки множества Q, а $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ есть ряд целых положительных или отрицательных чисел. Всегда возможно образовать аналитическое выражение, представляющее моногенную однозначную функцию, регулярную внутри области $\mathfrak{A}$, не равную на ней нулю, и которое в окрестности a_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$ может быть представлено в виде функции

$$(x-a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x-a_\nu)},$$

где $\mathfrak{P}(x-a_\nu)$ — степенной ряд. Каждая точка Q' есть существенно особая точка этой функции.

В последнем, третьем параграфе статьи Миттаг-Леффлер излагает по Кантору вопросы теории множеств, относящиеся к некоторым видам особых точек.

Разобьем отрезок $(0, 1)$ точками $1/2^{m_1}$, где $m_1 = 1, 2, \ldots$, т. е. точками $1/2, 1/4, 1/8, \ldots$. Получим множество P, имеющее одну предельную точку — нуль.

Каждый из полученных отрезков разобьем таким же образом, как это сделано с отрезком (0, 1), тогда получим точки

$$\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_1+m_2}}\quad (m_1, m_2=1, 2, \ldots).$$

Здесь предельными точками будут точки $-1/2^m$, это счетное множество P'. Для него $(P')'=P^{(2)}$ есть точка 0. Для множества

$$\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_1+m_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

(каждое m_ν — целое >0)

$P^{(n)}$ состоит из одной точки — нуля.

В общем случае Кантор обозначает через $P^{(2)}$ множество всех точек, в окрестности каждой из которых есть бесчисленное множество точек P', через $P^{(\nu+1)}$ — множество точек, в окрестности каждой из которых есть бесчисленное множество точек, принадлежащих $P^{(\nu)}$. В ряду $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$ каждое предыдущее множество содержит все точки последующего. Если множество $P^{(n)}$ будет иметь лишь конечное число точек, то $P^{(n+1)}=0$. Если этого нет, то существует множество $P^{(\omega)}$, общее всему ряду:

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$$

Этот процесс может продолжаться.

Кроме приведенных примеров, отметим еще один пример Миттаг-Леффлера: множество точек, для которого $P^{(\omega+n)}$ содержит конечное число точек

$$\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_1+m_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}+$$
$$+\frac{1}{2^{m_1+\ldots+m_n+p}}+\frac{1}{2^{m_1+\ldots+m_n+p+q_1}}+$$
$$+\frac{1}{2^{m_1+\ldots+m_n+p+q_1+q_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m_1+\ldots+m_n+p+q_1+\ldots+q_p}},$$

где каждое из чисел $m_1, \ldots, m_n, p, q_1, \ldots, q_p$ пробегает все целые положительные значения. Это множество изолированное, $P^{(\omega+n)}$ содержит только одну точку 0. Аналогично строится множество, для которого $P^{(2\omega)}=0$.

В 1906 г. Осгуд выпустил книгу на немецком языке «Курс теории функций» [156], в которой привел подробно основную теорему Миттаг-Леффлера и ее обобщение, разъяснив смысл этого обобщения.

Предварительно Озгуд дает определение аналитической функции в такой форме: функция $f(z)$ является аналитической в области T, если она в каждой точке области однозначна и имеет непрерывную производную. Далее он дает подробное, *окончательное*, как он пишет, определение моногенной функции [156, с. 435—437], из которого вытекает, что моногенная функция может быть многозначной, причем элемент функции представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n},$$

где n — целое положительное число; m — целое положительное, отрицательное или нуль.

Основные теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера относятся к однозначным функциям с единственной существенно особой точкой $z \to \infty$. Первое обобщение — на случай конечного числа существенно особых точек — было дано уже Вейерштрассом в работе 1876 г. [182]. Миттаг-Леффлер дает обобщение на случай бесконечно большого числа существенно особых точек. Озгуд формулирует обобщенную теорему Миттаг-Леффлера следующим образом.

Пусть дано изолированное множество $\{a\}$: $a_1, a_2, \ldots$, производное множество которого обозначается через $\{c\}$. Каждой точке a_n сопоставляется произвольный полином относительно $1/(z-a_n)$:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

Тогда всегда существует однозначная функция $f(z)$, которая аналитична в каждой точке, не принадлежащей множествам $\{a\}$ и $\{c\}$, а в точке a_n имеет полюс с главной частью $g_n(1/(z-a_n))$. Функция $f(z)$ определяется бесконечным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right],$$

где $\gamma_n(z)$ — рациональная функция z.

Если плоскость, ограниченная множеством $\{c\}$, распадается на куски, то $f(z)$ распадается на различные аналитические функции. Озгуд добавляет, что более общо — $g_n(1/(z-a_n))$ может быть и целой трансцендентной функцией.

Любопытно, что Л. Кронекер, не признававший теории Кантора, отозвался о статье Миттаг-Леффлера [35] как о совершенно бесполезной, ни на что не пригодной.

Звезда Миттаг-Леффлера

Важные исследования по теории аналитических функций предпринял Миттаг-Леффлер в конце XIX — начале XX в.

Приведем краткое содержание шести его статей, объединенных общим названием «Об аналитическом представлении однозначной ветви моногенной функции». (Они были опубликованы в томах 23, 24, 26, 29 и 42 «Acta mathematica» за годы 1900, 1901 и 1902, 1905 и 1920.)

В первой из работ [54] автор говорит, что в ее содержание вошли его доклады, сделанные в Академии наук Стокгольма в 1898 г. и опубликованные на шведском [50, 51] и на французском [52, 53] языках.

Обозначим вместе с Миттаг-Леффлером через a произвольную точку плоскости комплексного переменного x. Пусть задана бесконечная последовательность величин

$$F(a),\ F^1(a), \dots,\ F^\mu(a), \dots . \qquad (1)$$

Предположим, что эти величины выбраны так, что точная верхняя грань модулей

$$\sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)}$$

является конечным числом, которое обозначим через $1/r$.

Тогда, по теореме Коши, ряд

$$\mathfrak{P}(x \mid a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \qquad (2)$$

сходится для всех $|x-a|<r$ и расходится для $|x-a|>r$.

Область сходимости ряда (1) обозначается буквой C, а аналитическое представление в ней функции

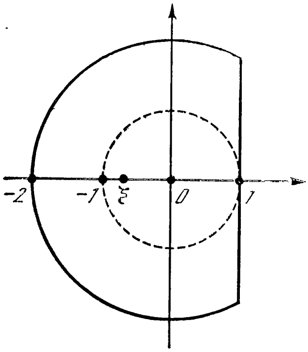


Рис. 1

$F(x)$ — через $FC(x)$, так что в области C

$$FC(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu}. \qquad (3)$$

В теории аналитических функций Вейерштрасса функция определяется рядом (2) и его аналитическим продолжением.

Рассмотрим континуум K, состоящий из однолистного куска, содержащий точку a и такой, что ветвь функции $F(x)$, образованная рядом (3) и его аналитическим продолжением внутри K, остается однозначной и регулярной. Эта ветвь обозначается $FK(x)$.

Ставится задача: *найти аналитическое представление ветви $FK(x)$, насколько возможно широкое.*

Рассмотрим предварительно простой пример [24, С. 190]

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Для него $fC(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, причем область C есть круг $|x| < 1$.

Пусть ζ будет точкой действительной оси между 0 и -1 (рис. 1). Тогда можно написать

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\zeta)(x-\zeta)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-\zeta)^{\nu}}{(1-\zeta)^{\nu+1}},$$

что справедливо для $|x-\zeta| < |1-\zeta|$. Так как $|1-\zeta| > |\zeta|$, то имеем, что во всяком случае ряд сходится для $|x-\zeta| \leqslant |\zeta|$.

Поэтому можем положить $x = 2\zeta$, и тогда

$$f(2\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\zeta)\zeta^{\nu}.$$

Но для $f^{(\nu)}(\zeta)$ можно написать ряд

$$f^{(\nu)}(\zeta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu+\mu)}(0)}{\mu!} \zeta^{\mu},$$

сходящийся для $|\zeta|<1$. Подставляя его в предыдущее равенство, найдем

$$f(2\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,\mu!}f^{(\nu+\mu)}(0)\,\zeta^{\nu+\mu}. \tag{4}$$

Этот ряд сходится для ζ в промежутке $-1<\zeta\leqslant 0$.

Если рассматривать ряд (4) как обыкновенный двойной ряд, в котором можно сделать замену, полагая $\nu+\mu=\lambda$, $\mu=\lambda-\nu$, то получим

$$f(2\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{(\lambda-\nu)!}f^{(\lambda)}(0)\,\zeta^{\lambda}. \tag{5}$$

Переставляя порядок суммирования и принимая во внимание, что

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{\lambda!}{\nu!\,(\lambda-\nu)!}=2^{\lambda},$$

найдем

$$f(2\zeta)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}f^{(\lambda)}(0)\,(2\zeta)^{\lambda}.$$

Этот ряд сходится для $|2\zeta|<1$, в частности для $-1/2<$ $<\zeta\leqslant 0$.

Однако, если рассматривать ряд (5), по словам Миттаг-Леффлера, как ряд *дважды бесконечный*, т. е. такой, в котором суммирование производится в определенном порядке, то, как мы видели, ряд (4) сходится в промежутке $-1<\zeta\leqslant 0$.

Полагая $2\zeta=x$, вместо (4) будем иметь

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,\mu!}f^{(\nu+\mu)}(0)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu}. \tag{6}$$

Про этот ряд мы можем теперь утверждать, что он сходится для отрицательных значений x при $-2<x\leqslant 0$. Таким образом, мы вышли за пределы круга сходимости C первоначальной ветви аналитической функции $1/(1-x)$.

В дальнейшем выясняется, что область существования ряда (6) ограничена дугой окружности $|x|=2$ и прямой $x_2=1$, где x_2 есть мнимая часть выражения

$x=x_1+ix_2$ (рис. 1). Область K есть расширение области C.

Миттаг-Леффлер дает общее определение n раз *бесконечного ряда* в отличие от n-кратного ряда.

Он говорит, что обычно под n-кратным рядом

$$f=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$
$$(\lambda_k=0, 1, 2, \ldots, \infty;\ k=1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

понимают ряд, приравнивая его простому ряду, члены которого суть различные функции $f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, связанные целыми числами 0, 1, 2, ... по определенному принципу.

Миттаг-Леффлер предлагает такое определение.

Предположим, что ряды

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}=\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n},$$
$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}}=\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty}f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{\lambda_1}=\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}f_{\lambda_1\lambda_2},$$
$$f=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}f_{\lambda_1}$$

все сходятся для некоторого значения независимого переменного. Тогда будем говорить, что ряд (7) есть *ряд n раз бесконечный,* сходящийся для этой величины. Пусть также все ряды

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},\quad f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}},\ \ldots,\quad f_{\lambda_1\lambda_2},\ f_{\lambda_1},\ f$$

равномерно сходятся в общей области K внутри области существования функций $f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$.

Далее, чтобы рассмотреть вопрос о возможно широком аналитическом представлении ветви $FK(x)$, Миттаг-Леффлер вводит понятие *звезды* (впервые это сделано в статье [50]).

Пусть на плоскости комплексного переменного x имеется площадь, ограниченная таким образом: вокруг фиксированной точки a вращается луч l (полупрямая, которую Миттаг-Леффлер называет вектором); на каждом положении луча определяем однозначным способом точку a_l, расстояние которой от точки a больше заданной положительной величины, одной и той же для всех векторов. Эта точка a_l может быть расположена на конечном или бесконечном расстоянии от точки a. В случае, если расстояние от a_l до a конечно, исключим из плоскости x часть вектора, которая простирается от a_l до бесконечности. Название *звезда* дается области, которая остается после производства всех купюр на плоскости x. Определенная таким образом звезда представляет континуум, составленный из одного односвязного куска [54, с. 47].

Предположим теперь, что точке a соответствуют элементы (1) и ряд (2). Произведем аналитическое продолжение ряда $\mathfrak{P}(x|a)$ вдоль векторов-лучей, исходящих из точки a.

Может быть, что каждая точка этого луча принадлежит кругу сходимости ряда, являющегося аналитическим продолжением $\mathfrak{P}(x|a)$, производимым вдоль луча; но возможно также, что, двигаясь вдоль него, мы встретим первую точку, которая не находится внутри круга сходимости какого-либо аналитического продолжения $\mathfrak{P}(x|a)$ вдоль вектора. В последнем случае мы исключаем из плоскости x часть вектора, заключенную между этой точкой и бесконечно удаленной. После полного оборота вектора вокруг точки a получится *звезда, принадлежащая элементам* (1). Миттаг-Леффлер обозначает ее буквой A (от греческого слова «астер», т. е. звезда) и замечает, что вместо лучей можно было бы взять другие линии, определенные подходящим образом. Он вводит также определение круга C как *круга, принадлежащего элементам* (1) — это круг сходимости ряда (2). Все время речь будет идти о функции $F(x)$ и о функциональной ветви $FA(x)$, принадлежащей тем же элементам.

Установив все эти определения, Миттаг-Леффлер доказывает т е о р е м у:

Ветвь $FA(x)$ *всегда может быть представлена рядом*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{(\mu)}(x),$$

где $G_{(\mu)}(x)$ — *целые рациональные функции от* x (*т. е. полиномы*):

$$G_{(\mu)}(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu, \tag{8}$$

где коэффициенты $c_\nu^{(\mu)}$ *заданы независимо от выбора* a *и* $F^{(\nu)}(a)$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots, \infty)$. *Этот ряд сходится в каждой точке звезды* A *и является равномерно сходящимся в каждой области, внутренней по отношению к* A.

Далее он получает явное выражение для $c_\nu^{(n)}$ в форме

$$c_\nu^{(n)} = \frac{1}{n^\nu} \sum_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!}, \qquad (9)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ пробегают все целые неотрицательные значения, включая нуль, причем

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\nu$$

$$(\lambda_1 \leqslant m_1, \lambda_2 \leqslant m_2, \ldots, \lambda_n \leqslant m_n),$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые положительные числа, зависящие от n.

Зависимость чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ от числа n может быть задана бесчисленным множеством способов, лишь бы выполнялись некоторые специальные условия. В частности, можно принять

$$m_\mu = n^{2\mu} \quad (\mu=1, 2, \ldots, n).$$

В этом случае можно составить полиномы

$$g_n = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \times$$
$$\times \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

Тогда, полагая

$$G_0(x) = g_0(x) = F(a),$$

$$G_\mu(x) = g_\mu(x) - g_{\mu-1}(x) \quad (\mu=1, 2, \ldots, \infty),$$

получим

$$\sum_{\mu=0}^{n} G_n(x) = g_n(x).$$

Имеет место такая оценка: пусть будет x любой точкой внутри звезды A, а σ — положительное число, сколь угодно малое; тогда, выбирая n достаточно большим, получим

$$\left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma.$$

Поэтому имеем

$$FA(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x), \tag{10}$$

причем ряд в правой части равномерно сходится во всякой области, внутренней к A.

Далее Миттаг-Леффлер доказывает теорему.

Пусть X будет некоторой конечной областью внутри звезды A, принадлежащей константам $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(n)}(a), \ldots$ Всегда можно зафиксировать наименьшее целое положительное число n, такое, что если n есть другое целое положительное число, не меньшее, чем $\bar{n}$, то n раз бесконечный ряд

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\times$$

$$\times\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \tag{11}$$

равномерно сходится в области X и в то же время представляет $FA(x)$ для этой области (2 статья, [60], с. 193).

Если область X совпадает с кругом C для констант (1), то имеем $\bar{n}=1$ и для $n=\bar{n}$ ряд (11) представляет один раз бесконечный ряд, а именно ряд Тейлора. Можно сказать, что ряд Тейлора (3) имеет звездой область круга C.

Однако n раз бесконечный ряд (11) в общем случае ведет себя в смысле сходимости по-разному для $n=1$, 2, 3 и для $n>3$. В первых трех случаях существует область сходимости K, такая, что ряд равномерно сходится во всякой области, внутренней к K, и перестает сходиться для внешней к K области. Во втором случае может случиться, что ряд сходится в точке x' области и расходится в точке x'', расположенной на луче l между a и x'.

Миттаг-Леффлер строит полиномы вида

$$G_m^{(n)}(x\,|\,a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\times$$

$$\times\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

и доказывает, что существует звезда A_n, вписанная в

A, обладающая по отношению к пределу

$$\lim_{m=\infty} G_m^{(n)}(x\,|\,a)$$

свойством: это выражение сходится равномерно в каждой области, внутренней к A_n, и представляет в то же время $FA_n(x)$.

Теорема иллюстрируется примером функции, имеющей лишь одну особую точку на всей плоскости, а именно $x=b$ (рис. 2). Такой функцией является рассмотренная уже функция

$$f(x)=1/(b-x).$$

Миттаг-Леффлер показывает, что звезда $A^{(n)}$ строится так: она состоит из внутренности круга с центром в начале координат и радиусом nb, причем справа ограничена прямой $x=nb/2$ и дугами окружностей с центрами $mnb/(m^2-1)$ и радиусами $nb/(m^2-1)$ для $m=2, 3, \ldots, n-1$. На рис. 2 представлены случаи $n=1, 2, \ldots, 5$. В пределе получится разрез вдоль действительной оси от $x=1$ до $x=\infty$.

Третья статья Миттаг-Леффлера [61] посвящена расширенному изложению его сообщения в «Comptes rendus» [53], в котором он указал, что существует другой класс предельных выражений, обладающих свойством аналитически продолжать данный элемент функции.

Пусть будет K некоторая звезда с центром a. Конструируется новая звезда $K^{(\alpha)}$ при помощи конформного преобразования, определяемого соотношением ($\beta=1-\alpha$)

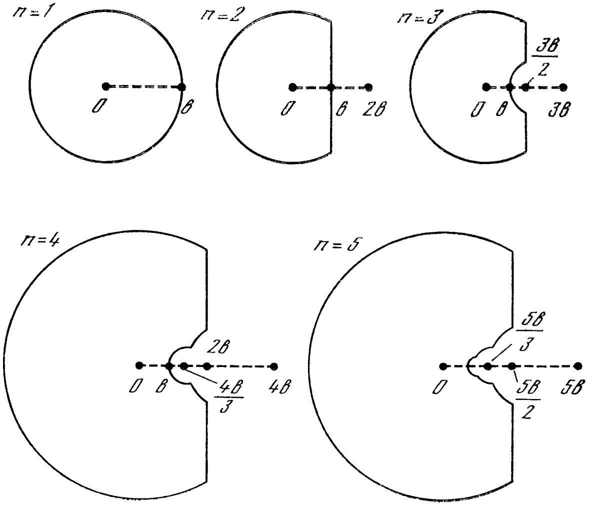
$$v=\exp\left(\int_1^u\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta\frac{du}{u}\right), \tag{12}$$

где β — действительное число, причем $0\leqslant\beta<1$.

Пусть u описывает окружность радиуса 1 с центром в начале. Для верхней полуокружности $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ положим $u=e^{i\varphi}$.

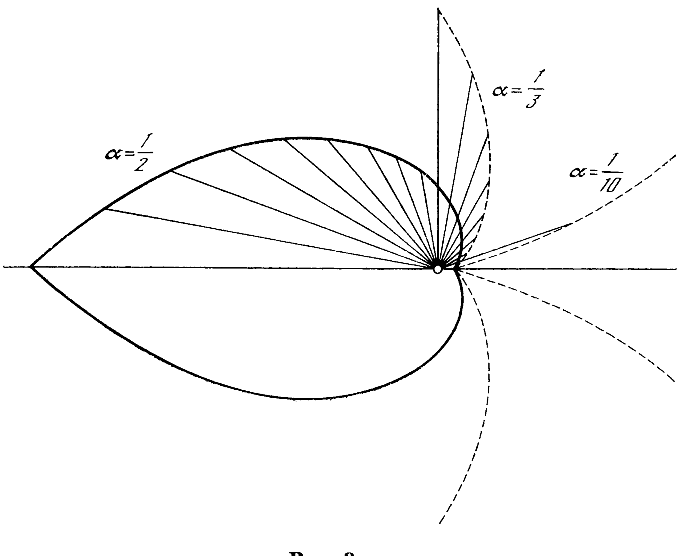
Тогда будем иметь

$$\ln v=ie^{\frac{\pi\beta i}{2}}\int_0^\varphi\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi.$$



n=1
0
в
n=2
0
в
2в
n=3
3в
2
0
в
3в
n=4
2в
0
в
4в
3
4в
n=5
5в
3
0
5в
2
5в

Рис. 2



α = 1/3
α = 1/2
α = 1/10

Рис. 3

Для нижней полуплоскости

$$\ln v = ie^{\frac{\pi\beta i}{2}} \int_0^{\varphi} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\beta} d\varphi.$$

При этом

$$\int_0^{\pi} \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\beta} d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\beta} d\varphi = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi\beta}{2}}.$$

Когда u пробегает верхнюю половину окружности $|u|=1$, то $v=Re^{i\varphi}$ опишет дугу логарифмической спирали, определяемой уравнением

$$R = e^{-\Phi\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}}, \qquad 0 \leqslant \Phi \leqslant \pi.$$

Эта логарифмическая спираль имеет центром точку $v=0$ и пересекает ось абсцисс в точках $v=1$ и $v = -\exp\left(-\pi\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}\right)$.

Вместо (12) можно написать

$$v = u\exp\int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right]\frac{du}{u}, \tag{13}$$

откуда видно, что внутренняя часть круга соответствует области фигуры, ограниченной двумя дугами спирали (рис. 3).

После длинных выкладок для $h_\lambda^{(m)}$ получаются полиномы степени λ относительно каждой из переменных β и m. Выпишем несколько первых:

$h_1^{(m)}(\beta) = m(2\beta)$,

$h_2^{(m)}(\beta) = (m^2+{}^1/_2 m)\ (2\beta)^2$,

$h_3^{(m)}\beta = (m^3+{}^3/_2 m^2+{}^1/_3 m)\,((2\beta)^3+{}^2/_3 m(2\beta)$,

. . . .

В конце концов получается теорема, при формулировке которой вместо β опять вводится величина

$\alpha = 1-\beta$.

Теорема. *Обозначим через A звезду с центром в a, через α — положительную величину, не превосходящую единицы, через $A^{(\alpha)}$ — звезду, концентричную с A*

и вписанную в A, которая определяется производящей функцией $f(u|\alpha)$. Эту функцию всегда можно выбрать так, чтобы при достаточно малом α звезда $A^{(\alpha)}$ заключала в себе некоторую заданную область, расположенную внутри A и такую, что при $\alpha=1$ звезда $A^{(1)}$ становится кругом, концентричным с A и вписанным в A.

Такие спирали, последовательно расширяющиеся, могут служить звездами для аналитических функций, имеющих одну особую точку $x=1$. При $\beta\to 1$ получаем плоскость с разрезом вдоль действительной оси от $x=1$ до бесконечности.

Функцию

$$U(u,\beta)=\exp\int_1^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}$$

Миттаг-Леффлер представляет в виде ряда функций $U^{(m)}(u,\beta)$:

$$U(u,\beta)=\Sigma U^{(m)}(u,\beta),$$

где

$$U^{(m)}(u,\beta)=1+\frac{h_1^{(m)}(\beta)}{1!}u+\frac{h_2^{(m)}(\beta)}{2!}u^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda!}u^\lambda+\ldots.$$

Можно выбрать $f(u|\alpha)$ такими, что если A — главная звезда последовательности констант

$$F(a),\ F^{(1)}(a),\ \ldots,\ F^{(\mu)}(a),\ldots,$$

удовлетворяющих условию Коши, то ряд

$$S_\alpha(x\,|\,a)=F(a)+\sum_{\nu=1}^{\infty}G_\nu(x-a),$$

где

$$G_\nu(x-a)=\frac{h^{(\cdot)}_{\nu-1}}{1!\,(\nu-1)!}F^{(1)}(a)(x-a)+$$
$$+\frac{h^{(2)}_{\nu-2}}{2!\,(\nu-2)!}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h_1^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!\,1!}F^{(\nu-1)}(a)(x-a)^{\nu-1}+$$
$$+\frac{h_0^{(\nu)}}{\nu!\,1!}F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

и где

$$h_{\nu-\mu}^{(\mu)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu; \ \nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

определенные положительные постоянные, зависящие только от определяющей функции, обладает звездой сходимости, идентичной с $A^{(\alpha)}$, такой, что

$$FA(x) = S_\alpha(x|a)$$

имеет место всюду внутри $A^{(\alpha)}$ и ряд $S_\alpha(x|a)$ для $\alpha=1$ становится рядом Тейлора.

Выражение

$$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x\,|\,a)$$

имеет звезду сходимости, тождественную с звездой A, и равенство

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x\,|\,a)$$

имеет место всюду внутри A.

Миттаг-Леффлер говорит, что можно строить и другие производящие функции $f(u, \alpha)$, обладающие ограничительными свойствами: константы $h^{(\mu)}_{\ \ -\mu}$ все должны быть положительными и построенный ряд при $\alpha=1$ должен быть рядом Тейлора. В качестве примера он приводит функцию

$$f(u\,|\,\alpha) = \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon} \frac{(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{\alpha(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha},$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Эта функция обладает таким свойством: когда u описывает окружность единичного радиуса, f опишет *кюнеиформную* (коническую) фигуру. При этом точке $u=0$ соответствует $f=0$,

$$f(-1, \alpha) = -\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}, \qquad f(1, \alpha) = \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha(\alpha-\varepsilon)}.$$

Кюнеиформная фигура ограничена двумя окружностями, пересекающимися в точках $f(-1, \alpha)$ и $f(1, \alpha)$ под углом $\alpha\pi$.

Такую функцию Миттаг-Леффлер употреблял в начале своих исследований по общей теории моногенных функций. Об этом он писал Вито Вольтерра в ответ на его письмо от 9 апреля 1899 г. Потом он нашел преимущества у *кордиформной* (сердцевидной) функции и перешел на ее изучение. Эту функцию он рассматривает и применительно к

$$F(x)=1/(1-x).$$

Звезда $A^{(\alpha)}$ здесь представляет кордиформную фигуру, имеющую действительную ось осью симметрии; тупой угол фигуры в точке $x=1$, острый — в точке $x=-\exp\left[\pi\,\mathrm{tg}\,(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]$. С уменьшением α звезда $A^{(\alpha)}$

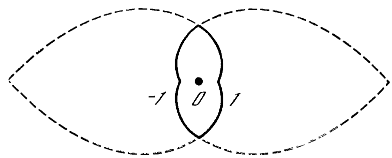


Рис. 4

очень быстро приближается к звезде A, представляющей всю плоскость, за исключением полупрямой $(1, \infty)$.

Если у звезды A две особые точки $x=1$ и $x=-1$, то звезда A образуется пересечением двух сердцевидных звезд (рис. 4).

Четвертая статья Миттаг-Леффлера появилась в 1902 г. в томе 26 «Acta mathematica», посвященном столетию Нильса Генрика Абеля. И Миттаг-Леффлер вспоминает о задаче Абеля, которую Абель сформулировал так.

«Предполагая, что ряд

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

сходится для всякой положительной величины, меньшей числа r, предлагается найти предел, к которому сходится значение функции $f(x)$, когда x сходится к r».

Очевидно, Абель понимал под r радиус сходимости. Он подразумевал, что точка $x=r$ может быть или особой, или регулярной точкой функции $f(x)$. Для функции

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

точка $x=1$ обыкновенная, однако ряд расходится. Задача Абеля состоит в том, чтобы в случае, когда $x=r$ регулярна, дать представление функции $f(x)$ в виде ряда, пригодного не только для $0\leqslant x<r$, но

и для $0 \leqslant x \leqslant r$. Это рассуждение приводит и к более общей задаче, которой занимается Миттаг-Леффлер: о представлении функции внутри главной звезды констант (1). В статье [71] он дает новый способ построения — с помощью интеграла Коши.

Пусть будет

$$v = f(u \mid \alpha)$$

биоднозначное преобразование круга $|u| < R$, $R > 1$, в конечную односвязную область S, причем точке $u=0$ соответствует $v=0$ и точке $u=1$ — точка $v=1$, и, кроме того, пусть $f(u \mid 1) = u$.

Строится интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^S \frac{F[a + (x-a) f(y \mid \alpha)]}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

где S — односвязный замкнутый контур, для которого $f(y \mid \alpha)$ и $F[a + (x-a) f(y \mid \alpha)]$ — моногенные и регулярные функции y, которым принадлежат точки $y=0$ и $y=u$. Интеграл J можно представить в виде суммы

$$J = F[a + (x-a) f(u \mid \alpha)] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits^{(0)} \frac{F[a + (x-a) f(y \mid \alpha)]}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

где интеграл берется в положительном направлении около точки $y=0$. Под знаком интеграла строится разложение в ряд функции F по степеням $(x-a) f(y \mid \alpha)$. Полагая затем $u=1$ и вводя обозначения

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits^{(0)} \frac{[f(y \mid \alpha)]^n}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \\ = \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\mu!} + \frac{D^{(\mu+1)} f^{\mu}}{(\mu+1)!} + \ldots + \frac{D^{(n)} f^{\mu}}{n!},$$

где

$$D^{(\nu)} f^{\mu} = D^{\nu} [f(y \mid \alpha)]^{\mu}_{y=0},$$

причем $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1$, для $F(x)$ получим представление

$$F(x) = F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) +$$

$$+\frac{\alpha_{n2}(\alpha)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F[a+(x-a)f(y\mid\alpha)]}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1}dy.$$

Иначе говоря, принимая за контур интегрирования C окружность $|y|=r$, где $1<r<R$, и вводя обозначения Миттаг-Леффлера для функции в звезде $FA^{(\alpha)}(x)$, можно написать

$$FA^{(\alpha)}(x)=F(a)+\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a)+$$

$$+\frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha_{nn}^{\alpha}}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{C}\frac{F[a+(x-a)f(y\mid\alpha)]}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1}dy=$$

$$=F(a)+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu!}\left\{\frac{D^{\mu}f}{1!}F^{(1)}(a)(x-a)+\right.$$

$$+\frac{D^{\mu}f^2}{\mu!}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots$$

$$\left.\dots+\frac{D^{\mu}f^{\mu}}{\mu!}F^{\mu}(a)(x-a)^{\mu}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{C}\frac{F[a+(x-a)f(y\mid\alpha)]}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1}dy.$$

Это основное равенство имеет место для всех точек x, принадлежащих области X внутри звезды $A^{(\alpha)}$. При $\alpha=1$ получаем формулу Тейлора с остаточным членом Коши.

Предельный переход при $n=\infty$ дает представление $F(x)$ в виде ряда полиномов в главной звезде $A^{(\alpha)}$. При этом можно перейти к пределу $\alpha\to 0$.

Числа $\alpha_{\mu n}$ ($\mu=1, 2, \dots, n$; $n=1, 2, 3, \dots, \infty$) вычисляются по рекуррентным формулам для каждой производящей функции $f(u|\alpha)$. И. Фредгольм предложил в качестве такой функции следующую:

$$f(u\mid\alpha)=\frac{\log(1-(1-\alpha)u)}{\log\alpha}.$$

Сам Миттаг-Леффлер предлагает

$$v = f(u \mid \alpha) = \frac{\alpha u}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)^{\alpha}}, \qquad \frac{1}{R} = 1 - \alpha^{1/\alpha}.$$

В этой же, четвертой статье Миттаг-Леффлер рассматривает другой интеграл Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F[a + (x - a) y]}{y - 1} e^{\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)} dy,$$

с помощью которого получает такое представление $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu!)^2} \int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^{\mu} \, d\omega F^{(\mu)}(a) (x - a)^{\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F[a + (a - x) y]}{y - 1} e^{\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)} dy.$$

Отсюда получаются дальнейшие оценки и выводятся три формулы:

$$FA^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{F(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x - a) + \cdots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(a) (x - a)^n \right\} \frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (*)$$

$$FA^{(1)}(x) =$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^{\mu} \, d\omega F^{(\mu)}(a) (x - a)^{\mu}, \qquad (**)$$

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F(a, \omega(x - a)) \, d\omega, \qquad (***)$$

имеющие место внутри звезды $A^{(1)}$. Формула (*) была также получена Борелем. Формула (***), говорит Миттаг-Леффлер, является знаменитым интегралом Лапласа—Абеля.

Пятая статья Миттаг-Леффлера [82] посвящена интегралу Лапласа—Абеля и его применению к представлению аналитических функций. Он приводит определение *интеграла Лапласа—Абеля.*

Пусть дан ряд констант $k_0, k_1, k_2, \ldots$, удовлетворяющих условию, что существует

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \sqrt[\nu]{k_\nu} \right| = \frac{1}{r},$$

где r — радиус сходимости степенного ряда k_0+k_1x+ $+k_2x^2+\ldots$

Обозначим $F(x)$ аналитическую функцию, определяемую константами $k_0, k_1, k_2, \ldots$.

Известно, что

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!}} = 0.$$

При этом ряд

$$\overline{F}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu!} x^\nu$$

будет всюду сходящимся. Тогда интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x)\, d\omega, \tag{14}$$

распространенный на все положительные значения ω, является *интегралом Лапласа—Абеля.*

Борель занимался определением области сходимости интеграла Лапласа—Абеля [122]. Эта область представляет звезду с центром в начале координат, внутри главной звезды, определяемой константами k_0, $k_1, k_2, \ldots$ и содержащую в себе круг сходимости ряда $k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots$ Эта звезда обозначается $B^{(1)}$, внутри нее интеграл (14) сходится.

Миттаг-Леффлер предлагает обобщение интеграла Лапласа—Абеля таким образом. Вместо образующей функции Абеля $\overline{F}(x)$ он вводит новую функцию

$$F_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\Gamma(\alpha\nu+1)} x^\nu,$$

где α — заданное положительное число. Очевидно,

$$F_1(x) = \overline{F}(x)$$

и ряд $F_\alpha(x)$ всегда сходится вместе с $\overline{F}(x)$. Вместо интеграла Лапласа—Абеля вводится такой:

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-\omega^{1/\alpha}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{1/\alpha}=\int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega.$$

Формулируется теорема.

Интеграл $f(x)$ обладает по отношению к x звездой сходимости $B^{(\alpha)}$, вписанной в звезду A, которая беспредельно стремится к A, когда α стремится к нулю. Равенство

$$FB^{(\alpha)}(x)=f(x)$$

имеет место всюду внутри $B^{(\alpha)}$.

Сложное и длинное доказательство этой теоремы Миттаг-Леффлер разбивает на три части, в которых доказывается:

1. Если интеграл $f(x_0)$ сходится, то интеграл $f(x)$ сходится равномерно в области $\theta(x_0)$, где $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 1$, а θ_0 — положительная величина.

2. Если интеграл $f(x_0)$ сходится, то интеграл $f(x)$ представляет на векторе (Ox_0) функцию $FC(x)$ и ее аналитическое продолжение вдоль этого вектора.

3. Интеграл $f(x)$ сходится равномерно во всякой области, внутренней к $B^{(\alpha)}$.

Отметим частный случай функции $F_\alpha(x)$, а именно: если $k_0=k_1=\ldots=k_\nu=\ldots=1$, то $F_\alpha(x)$ переходит в функцию Миттаг-Леффлера $E_\alpha(x)$:

$$E_\alpha(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha\nu+1)}.$$

При $\alpha=1$ частный случай интеграла Лапласа—Абеля может быть преобразован в выражение Бореля

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_nx^n)\frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!},$$

имеющее ту же область сходимости, что и интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\omega}F_1(\omega x)\, d\omega.$$

Результаты Миттаг-Леффлера переплетаются с многочисленными появившимися в то время исследованиями других авторов по теории расходящихся рядов.

Специально выделяется метод суммирования Миттаг-Леффлера числовых и функциональных рядов [206, т. 3, с. 705].

Так, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

суммируем методом Миттаг-Леффлера к сумме S, если

$$\lim_{\delta=0} \sum_{k=0} \frac{u_k}{\Gamma(1+\delta k)} = S,$$

и ряд под знаком предела сходится.

Первоначально этот метод был введен Миттаг-Леффлером для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

и применен как аппарат для аналитического продолжения функции.

Последняя, шестая статья Миттаг-Леффлера по теории аналитических функций [99] вышла только в 1920 г., через 16 лет после пятой. Миттаг-Леффлер пишет, что у него вскоре после 1904 г. уже был материал для публикации, однако оформление его задержалось из-за болезни, а также потому, что он хотел дать место в журнале другим статьям, присланным знаменитыми авторами. Теперь его исследования потеряли значительную часть своей актуальности и интереса. Однако все же он решил опубликовать их, потому что они принадлежат к кругу мыслей, отличающих теорию аналитических функций, как она сформулирована и представлена Карлом Вейерштрассом. За содействие в выходе в свет работы автор благодарит Э. Фрагмена, Т. Карлемана, Ю. Мальмквиста и М. Риса.

После этого предисловия появляется заголовок: «О сходимости выражения аналитической функции вне главной звезды функции», за которым следуют введение и три главы. Во введении он напоминает определение звезды, которое было им дано в первой статье, и выписывает наиболее интересные результаты предыдущих статей. Теперь Миттаг-Леффлер рассматривает новую функцию.

Как известно, всякая целая трансцендентная функ-

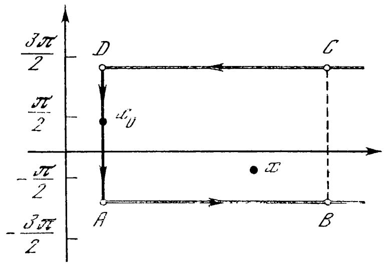


Рис. 5

ция может быть сколь угодно приближена к любому заданному числу вне круга достаточно большого радиуса. Это не исключает того, что существуют целые функции, модуль которых стремится к нулю, когда переменная x стремится к бесконечности вдоль некоторой полупрямой, исходящей из начала. Миттаг-Леффлер дал примеры таких функций в 1904 г. [77, 79]. Одна из наиболее простых представляется интегралом

$$E(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}}\cdot e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{\zeta-x},$$

где интегрирование проводится вдоль контура, состоящего из отрезка, проходящего через точку x_0 и параллельного оси ординат, и двух полупрямых, параллельных оси абсцисс, на расстояниях, содержащихся между $\pm\frac{\pi i}{2}$ и $\pm\frac{3\pi i}{2}$. Интеграл не изменится, если перемещать точку x_0 налево или направо, лишь бы x оставалось по одну сторону от пути интегрирования.

Интеграл $E(x)$ определяет две функции, $E(x)$ и $\bar{E}(x)$, в зависимости от того, расположена ли точка x направо и налево от отрезка AD (рис. 5). Между этими функциями существует соотношение

$$E(x)=\bar{E}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCD} e^{e^{\zeta}}\cdot e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{\zeta-x},$$

где $ABCD$ — контур прямоугольника (рис. 5), или, иначе,

$$E(x)=e^{e^{x}}e^{-e^{e^{x}}}+\bar{E}(x).$$

Обе функции, $E(x)$ и $\bar{E}(x)$, — целые функции. По отношению к $E(x)$ доказана теорема: пусть x_0 есть точка действительной оси, $-\infty<x_0<\infty$; функция $E(x)$ беспредельно стремится к нулю, когда переменная x стремится к $+\infty$ вдоль полупрямой, исходящей из x_0.

Аналогичными свойствами обладают некоторые другие функции, например построенная при помощи функции $E_k(x)$:

$$e^{e^{x^k}} e^{-e^{e^{x^k}}}.$$

Далее Миттаг-Леффлер останавливается на функции, которую строит с помощью функции $E(x)$. Он берет точку b на оси абсцисс так, что $b<x_0$ (рис. 5), и полагает

$$G(x)=\frac{E(x+b)}{E(b)}.$$

$G(x)$ разлагается в ряд по степеням x:

$$G(x)=1+H_1x+H_2x^2+\ldots+H_\nu x^\nu+\ldots,$$

где

$$H_\nu=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{(\zeta-b)^{\nu+1}}.$$

Строится также ряд для целой функции $G(\omega(x-1))$, коэффициенты его $K_\nu(\omega)$ являются функциями ω:

$$G(\omega(x-1))=\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\, x^\nu,$$

причем

$$K_\nu(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{\omega^\nu\, d\zeta}{(\zeta-b+\omega)^{\nu+1}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)=1.$$

После проведения подробных исследований Миттаг-Леффлер получает два представления аналитической функции $F(x)$, определяемой рядом

$$F(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots,$$

сходящимся при $|x|<r$, а именно

$$FK(x)=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1}\omega^{\nu+1}(-1)^\nu\left[k_0-\frac{\nu}{1!}k_1x+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}k_2x^2+\ldots+(-1)^\nu k_\nu x^\nu\right],$$

и другое:

$$FK(x)=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu+1}(\omega)(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu).$$

Эти выражения сходятся равномерно во всякой области внутри главной звезды A.

В последнем, третьем параграфе статьи Миттаг-Леффлер вводит понятие о точках, которые он называет *полоидами*, присоединив к свойствам функции, иметь не только полюсы, но и изолированные существенно особые точки. У целой функции полоид в точке $x=\infty$, но всюду вне этой точки функция остается регулярной. Если целая функция рациональна, то полоид становится полюсом. Существенно особыми точками Миттаг-Леффлер называет особые точки однозначной ветви функции в заданной области, не являющиеся полоидами.

Теперь Миттаг-Леффлер рассматривает функцию, которая определяется рядом

$$\mathfrak{P}(x-a)=\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu (x-a)^\nu,$$

сходящимся при $|x-a|<r$.

Для этой функции определяется звезда таким образом. Из центра a проводятся полупрямые до первой точки, которая не является ни регулярной, ни полоидом; это означает, что луч может проходить через полюс. Получаемая при этом звезда обозначается через L. Миттаг-Леффлер доказывает, что внутри этой звезды имеют место представления

$$FL(x)=\lim_{\alpha=0}\int_0^\infty e^{-\omega^{1/\alpha}}F\left[\omega(x-a)e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}\right]d\omega^{1/\alpha}$$

и

$$FL(x)=\lim_{\alpha=0}\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\times$$

$$\times\int_0^{\omega^{1/\alpha}} e^{-\omega^{1/\alpha}}\omega^\nu\, d\omega^{1/\alpha}\left[(x-a)e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}\right]^\nu.$$

Здесь применяется обозначение Миттаг-Леффлера для введенной им функции, выражающейся через Г-функцию:

$$\underline{|\alpha\nu}=\Gamma(\alpha\nu+1).$$

Если функция $F(x)$ аналитична, однозначна и регулярна во всех конечных точках, за исключением полоидов, то все ее регулярные значения получаются из последних формул.

В конце статьи Миттаг-Леффлер говорит о возможном продолжении звезды за контур L. Но этот вопрос требует углубленного изучения, к нему он надеется вернуться в дальнейшем (однако больше он ничего не опубликовал).

Развитие идей Миттаг-Леффлера

Идеи, близкие к идеям Миттаг-Леффлера, развивали в дальнейшем многие математики: Фрагмен, Фредгольм, фон Кох, Карлеман, Пенлеве и др. Я остановлюсь только на работе русского ученого В. В. Голубева «О звезде Миттаг-Леффлера», напечатанной в 1913 г. в «Математическом сборнике» [191]. В. В. Голубев говорит, что наиболее общим способом представления аналитических функций является их разложение в ряд по многочленам, причем «наиболее совершенное есть разложение Миттаг-Леффлера, которое позволяет по элементу аналитической функции дать ее аналитическое выражение, годное во всей звезде» [191, с. 171].

Для функции с конечным числом особых точек звезда Миттаг-Леффлера покрывает всю плоскость, кроме нескольких лучей, число которых не превышает числа особых точек. Если функция имеет особые линии, то звезда может вся помещаться в конечной области плоскости, хотя функция может существовать и за границей звезды (причем изучение функций вне звезды представляет некоторые трудности).

В. В. Голубев думает, что Пенлеве был первым, кто высказал предположение: функция может не иметь особых линий и все-таки иметь звезду только в ограниченной области. И В. В. Голубев занялся отысканием таких функций [191, 192].

На отрезке (0,1) он строит канторово совершенное множество: отрезок делится на три равные части и средняя из них выкидывается, так же поступают с каждой из оставшихся частей и так до бесконечности. На этом множестве строится функция $f(x)$ таким образом: $f(0)=0$, $f(1)=1$; $f(x)=1/2$ при $1/3\leqslant x\leqslant 2/3$; $f(x)=1/4$ при $7/9\leqslant x\leqslant 8/9$ и т. д. (в каждом интервале берется полусумма двух крайних ординат). Полученная функция $f(x)$ непрерывна и монотонна. Длина кривой, состоящей из горизонтальных и вертикальных отрезков, равна 2, площадь, ограниченная кривой, равна $^1/_2$.

Далее В. В. Голубев составляет уравнение в полярных координатах

$$\varphi=2\pi f(r-1),$$

которое определяет кривую, состоящую из отрезков радиусов, проведенных из центра, и из концов этих радиусов. Она получается из кривой $y=f(x)$, если квадрат со стороной «единица» развернуть в кольцо с внутренним радиусом 1 и внешним 2. Длина кривой равна $3\pi+1$.

Из множества точек спирали выкидываются все точки, лежащие внутри входящих в нее радиусов, общая длина которых равна единице. Остающееся на спирали множество точек обозначается через E, это множество совершенное, всюду прерывное. Любой луч, выходящий из начала, проходит через точку множества E. Если около какой-нибудь точки E описать окружность радиуса ρ, то мера той части E, которая лежит внутри круга, отлична от нуля.

Понятие об интеграле Лебега, так же как понятие о мере множества, на котором оно основано, переносится на множество, расположенное на любой спрямляемой линии, поэтому можно рассматривать криволинейный интеграл Лебега

$$F(z)=\int\limits_E \frac{\varphi(x)\,dx}{x-z},$$

где $\varphi(x)=1$ в точках E и $\varphi(x)=0$ в других точках спирали.

В. В. Голубев доказывает, что $\varphi/(x-z)$ есть измеримая функция и $F(z)$ — аналитическая функция для всех z, не лежащих на спирали. При этом $F(z)\neq\text{const}$ и все точки E — особые для $F(z)$. Вся звезда Миттаг-Леффлера для $F(z)$ помещается внутри круга радиуса 2.

Дается также другое построение функции $F(z)$ в виде разложения на рациональные дроби:

$$F(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{z-a_i},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ — такие точки плоскости z, что производное множество $\{a_i\}$ есть множество E, а числа α_i определяют сходящийся ряд $\Sigma\alpha_i=A$ (A конечное).

О функции Миттаг-Леффлера $E_\alpha(x)$. О функции Фредгольма

Миттаг-Леффлера интересовало поведение целых трансцендентных функций вблизи их особых точек. В 1903 г. в статье «Обобщение интеграла Лапласа — Абеля» [74] он рассматривает такие аналитические функции.

Пусть $k_0, k_1, k_2, \ldots$ будет последовательностью констант, для которых точная верхняя грань $\sqrt[\nu]{|k_\nu|}$ есть конечное число $1/r$. Величина r есть радиус круга сходимости C для ряда

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots,$$

определяющего аналитическую функцию $F(x)$. Ее ветвь, обозначенная $FC(x)$,

$$FC(x)=k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu+\ldots$$

представляет ряд, который сходится всюду внутри C и расходится вне C.

Абель ввел целую функцию, соответствующую $FC(x)$:

$$F_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\nu!}x^\nu, \tag{15}$$

которую назвал *производящей функцией*.

С помощью этой функции Абель построил интеграл, о котором уже была речь — интеграл Лапласа — Абеля.

Миттаг-Леффлер же ввел функцию, которая послужила ему для разных целей:

$$E_\alpha(x)=1+\frac{x}{\Gamma(1+\alpha\cdot 1)}+\frac{x^2}{\Gamma(1+\alpha\cdot 2)}+$$
$$+\frac{x^3}{\Gamma(1+\alpha\cdot 3)}+\ldots$$

Очевидно, что эта функция при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ дает известные функции

$$E_0(x)=\frac{1}{1-x},\qquad E_1(x)=e^x,$$

из которых вторая — целая трансцендентная, и таковой $E_\alpha(x)$ является при всех $\alpha>0$. Оказывается, что $E_\alpha(x)$ ведет себя по-разному для $0<\alpha<2$ и для $\alpha\geqslant 2$ (см. статью Миттаг-Леффлера «О новой функции $E_\alpha(x)$» [75]).

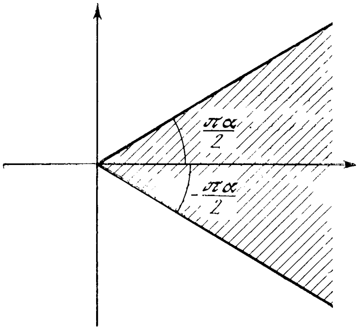


Рис. 6

Положим $x=re^{\varphi}$ и пусть $r\to\infty$ вдоль луча φ, где

$$\frac{\alpha\pi}{2}<\varphi<2\pi-\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Тогда $|E_\alpha(x)|\to 0$. Если

$$-\frac{\alpha\pi}{2}<\varphi<\frac{\alpha\pi}{2},$$

то $|E_\alpha(x)|\to\infty$, и, наконец, при $\varphi=\pm\pi\alpha/2$ получается

$$|E_\alpha(x)|_{r\to\infty}\to 1/\alpha.$$

При $\alpha\geqslant 2$ функция $E_\alpha(x)^v$ увеличивается по модулю сверх всякого предела по любому направлению, кроме одного.

На рис. 6 на плоскости x проведены лучи из начала координат под углом $\pm\pi\alpha/2$ к действительной оси. Заштрихованная часть плоскости является областью, в которой $\lim\limits_{r\to\infty}|E_\alpha(x)|$ равен бесконечности, незаштрихованная часть плоскости — область, где этот предел равен нулю; вдоль лучей $\pi\alpha/2$ и $-\pi\alpha/2$ имеем $\lim\limits_{r\to\infty}|E_\alpha(x)|=$ $=\frac{1}{\alpha}$.

В частности, при $\alpha=1$, т. е. для $E_1(x)=e^x$, вся правая полуплоскость есть область, где $\lim\limits_{r\to\infty}|E(x)|=\infty$, в левой полуплоскости этот предел равен нулю, вдоль мнимой оси он равен единице.

Для функций e^{xi} и e^{-xi} соответствующие области будут верхняя и нижняя полуплоскости, поэтому $\sin x$ будет на всей плоскости x иметь $\lim\limits_{|x|\to\infty}|\sin x|=\infty$, кроме действительной оси, вдоль которой этот предел равен нулю.

Миттаг-Леффлер задает вопрос: существуют ли целые трансцендентные функции, модуль которых беспредельно возрастает одновременно с $|x|$ по *всем* лучам? На этот вопрос дал утвердительный ответ Хельге фон Кох, указав функцию $x\sin(x+i)$.

Был поставлен второй вопрос: есть ли целая функция, которая обращается в бесконечность только *вдоль одного вектора* и бесконечно уменьшается, когда $|x|$

возрастает вдоль всех других? На него ответил ученик Миттаг-Леффлера И. Мальмквист, давший в качестве примера функцию

$$\bar{E}_\alpha(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Другую функцию такого рода составил Линделёф. Миттаг-Леффлер предлагает свой вариант:

$$\bar{\bar{E}}_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\log\nu)^\alpha} x^\nu, \qquad 0<\alpha<1,$$

Две последние функции стремятся к нулю при $|x|\to\infty$ вдоль любого луча $0<\varphi<2\pi$ и к бесконечности вдоль действительной полуоси.

Функция $E_\alpha(x)$ уже фигурировала у нас, когда мы рассматривали обобщение Миттаг-Леффлером интеграла Лапласа—Абеля.

Отметим здесь случай, когда Миттаг-Леффлер отдал дань задаче о функциях с особыми линиями. В статье [79] он рассматривает пример, данный его учеником И. Фредгольмом, функции, имеющей окружность $|x|=1$ своей границей, причем степенной ряд для этой функции непрерывен со всеми производными на границе. Этот пример интересен потому, что построенные к тому времени функции, существующие лишь в ограниченной области, перестают существовать на ее границе. Пример Фредгольма таков:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu x^{\nu^2}, \qquad |a|<1, \qquad |x|\leqslant 1.$$

Миттаг-Леффлер приводит новое доказательство, исходя из свойств ряда

$$\varphi(t, v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t + \nu v},$$

который представляет решение уравнения теплопроводности

$$\partial\varphi/\partial t = \partial^2\varphi/\partial v^2.$$

Функция $\varphi(t, v)$ существует внутри области, для которой действительная часть t меньше нуля, и на ее границе, если действительная часть v меньше нуля.

Полагая

$$e^t = x,\ e^v = a,\ |a| < 1,$$

получаем ряд Фредгольма.

Миттаг-Леффлер добавляет, что результат Фредгольма можно обобщать, однако примеров обобщений не приводит.

Доказательство одной теоремы Вейерштрасса и теоремы Лорана

Эмиль Пикар был приглашен в 1899 г. для прочтения курса лекций в американском университете Кларка в Вустере. В результате появилась книга Пикара «Лекции по математике» [160]. Миттаг-Леффлер обратил внимание на то, что в ней автор приводит несколько методов доказательства теоремы Вейерштрасса: каждая непрерывная функция действительного переменного в конечном интервале может быть представлена с любой степенью точности полиномом. Шведский ученый написал Пикару письмо, в котором говорится: «Вы даете такое элегантное собственное доказательство теоремы, а также другое — г. Вольтерра. Я позволю себе привлечь Ваше внимание к выводу, сделанному раньше Вашего и вывода г. Вольтерра. Это метод г. Рунге, который имеется в его мемуаре: «О представлении произвольных функций» [172], который я опубликовал в моем журнале» [57].

Миттаг-Леффлер напоминает, что Рунге для доказательства пользовался функцией

$$\frac{1}{1+x^{2n}},$$

обладающей свойством

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1, \quad |x| < 1; \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0,$$
$$|x| > 1.$$

Эту же функцию использовал Жюль Таннери, чтобы получить после Вейерштрасса пример функции, имеющей разные значения в разных областях.

Всегда можно образовать ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu(x),$$

($R_\nu(x)$ — рациональные функции x), имеющий свойства: если $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(r)}$ — r различных кругов на плоскости x, не имеющих общих частей, то ряд представляет в каждой из $r+1$ областей, ограниченных окружностями этих кругов, различные функции.

Миттаг-Леффлер добавляет, что в последних публикациях стали забывать, что это фундаментальное предложение было полностью освещено Вейерштрассом [181, т. 2, с. 231—233].

Рунге же доказал, что непрерывная функция действительного переменного всегда может в заданном интервале быть представленной с любой степенью приближения *рациональной функцией*, и показал, как можно представить в заданном интервале рациональную функцию с любой аппроксимацией с помощью полинома.

Миттаг-Леффлер позволяет себе сообщить Пикару новое доказательство, которое он приводит в своих лекциях и которое кажется ему более простым, чем все предложенные.

Он вводит функцию

$$\chi_n(x) = 1 - 2^{1-(1+x)^n},$$

рассматривая ее в интервале $x > -1$. Предельные значения этой функции

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 1, \quad x > 0; \qquad \lim_{n=\infty} \chi_n(x) = -1, \quad x < 0;$$

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 0, \quad x = 0.$$

Пусть $F(x)$ — функция действительного переменного, остающаяся действительной в интервале

$$A < a \leqslant x \leqslant b < B$$

Как известно, всегда можно вставить между a и b точки

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < a_{r+1} = b$$

таким образом, чтобы функция $F(x)$ была представлена с желаемой точностью полигональной линией, образованной последовательными отрезками прямых, т. е. применить интерполяционную формулу

$$F_\mu(x) = [F(a_\mu) - F(a_{\mu-1})] \frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$

$$(a_{\mu-1} \leqslant x \leqslant a_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots r+1).$$

Но можно построить также полигональную линию с помощью функции Миттаг-Леффлера $\chi_n(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}[F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\,\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right).$$

Это целая трансцендентная функция от x, которая в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ с желаемой степенью точности может быть представлена полиномом от x. Отсюда формулируется теорема.

Пусть $F(x)$ будет в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ действительной и непрерывной функцией действительного переменного x. Пусть δ — положительное число, сколь угодно малое. Тогда существует полином $G(x)$, такой, что разность $F(x) - G(x)$ в указанном интервале по абсолютному значению меньше δ.

Это и есть теорема Вейерштрасса, которую хотел доказать Миттаг-Леффлер.

Таким же образом он получает теорему о представлении непрерывной функции двух переменных с помощью полиномиальных функций и указывает на возможность распространения теоремы на функции любого числа переменных.

В статье [37] Миттаг-Леффлер дает новое доказательство теоремы Лорана, которая еще раньше Лорана была дана Вейерштрассом. У обоих авторов, Вейерштрасса и Лорана, доказательство основано на применении интеграла Коши.

Миттаг-Леффлер поставил целью дать элементарное доказательство и достиг этого путем длинных рассуждений, применяя разложение данной функции по степеням вспомогательной функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right]$$

в кольце

$$\frac{R}{1 + \varepsilon} \leqslant |x| \leqslant R(1 + \varepsilon).$$

В письме от 7 июня 1884 г. Ковалевская писала Миттаг-Леффлеру, получив его статью о теореме Лорана: «Я очень благодарна Вам за присылку Вашей работы. Вейерштрасс тоже принялся теперь за ее чтение. Он будет иметь случай воспользоваться Вашим доказательством теоремы Лорана в своем курсе лекций на семинаре этим летом. Я одолжила мой экземпляр Вашей работы г. Рунге и просила его прислать Вам статью о разложении аналитической функции на рациональные дроби, которую он уже закончил прошлой осенью. Так как его исходный пункт (интеграл Коши) совершенно иной, чем у Вас, то я думаю, что, возможно, было бы интересно напечатать его работу, потому что предмет ее — величайшей важности, а два доказательства не будут лишними» [207, с. 51].

Статья Рунге была опубликована в «Acta mathematika» в 1885 г. В ней есть примечание Миттаг-Леффлера, как редактора журнала, в котором он сравнивает статью Рунге со своей статьей [37].

Работы по дифференциальным уравнениям

В 1870-е годы Миттаг-Леффлер был увлечен исследованиями по аналитической теории дифференциальных уравнений, развивавшейся в то время немецкими и французскими математиками. Первая его статья из этой области «Интегрирование одного класса линейных дифференциальных уравнений» опубликована в 1879 г. на шведском языке [15]. В начале 1880 г. он выступил с докладом на ту же тему в Петербурге на VI съезде русских естествоиспытателей и врачей. Краткое содержание доклада приведено в трудах съезда [18].

Миттаг-Леффлер выписывает общее линейное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами и говорит, что интегралы этого уравнения в окрестности некоторой особой точки $x=a$ его коэффициентов изучены Фуксом. Фукс и Фробениус показали, каким образом можно составить основную систему частных интегралов, в которой каждый интеграл есть функция, хорошо определенная в окрестности точки a. Однако эти интегралы сходятся только для достаточно малых значений модуля $|x-a|$.

Идеальная цель интегрирования дифференциальных уравнений, замечает Миттаг-Леффлер, состоит в нахождении аналитических выражений интегралов, которые были бы определены для каждого значения независимой переменной. В докладе он ограничивается случаем уравнения второго порядка

$$y''=f_1(x)y'+f_2(x)y.$$

Ставится условие: $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — однозначные функции, могущие иметь полюсы и имеющие лишь одну существенно особую точку $x=1/0$ (так пишет Миттаг-Леффлер). Тогда дифференциальное уравнение допускает основную систему интегралов, в которой каждый интеграл есть однозначная функция с единственной существенно особой точкой на бесконечности.

Миттаг-Леффлер выделяет полюсы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициентов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, составляя по этим полюсам вейерштрассовское произведение

$$\Pi(x) = \Pi\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\frac{x}{a} + \cdots + \frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^\nu} \quad (a = a_1, a_2, \ldots)$$

и вводит новую функцию

$$z = y\Pi(x),$$

для которой получает новое линейное уравнение лишь с одной особой точкой,— существенно особой точкой на бесконечности. Для нее интегралы уже будут сходящимися при всех x.

В своем первом письме к Ковалевской 19 октября 1880 г. Миттаг-Леффлер говорит, что он занимается вопросом об интегрировании линейного уравнения n-го порядка с двоякопериодическими коэффициентами. Их интегралы представимы в форме, аналогичной той, какую Эрмит придал интегралам уравнения Ламе. Шведский ученый обещает Ковалевской прислать ей три своих заметки по этому вопросу [21—23]. Далее Миттаг-Леффлер пишет о том, что Вейерштрасс сообщил ему: Пикар написал статью по дифференциальным уравнениям и представил ее в «Доклады» Парижской академии наук. Миттаг-Леффлер хотел послать в Париж свою статью на ту же тему, но решил воздержаться до выхода в свет статьи Пикара [207, с. 20].

Статьи Миттаг-Леффлера не последовало, в «Докладах» появилась лишь другая его статья [23] — извлечение из письма Эрмиту как отклик на статью последнего [139]. Дальнейшие свои исследования по дифференциальным уравнениям Миттаг-Леффлер публиковал в шведском и финском журналах [26, 27, 28].

Ламе рассматривал уравнение, названное впоследствии его именем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]\,y, \tag{1}$$

где k — модуль, n — целое число, h — постоянная. Ламе получил решение этого уравнения в частных случаях для таких значений постоянной h, когда интеграл уравнения есть полином от эллиптических функций. Так, при $n=1$ и $h=-(1+k^2)$ имеется решение $y=\operatorname{sn} x$, при $n=1$, $h=-1$ есть решение $y=\operatorname{cn} x$.

Эрмит рассмотрел общий случай уравнения Ламе и нашел, что оно может быть проинтегрировано в функциях вида

$$y=C_1F(x)+C_2F(-x),$$

где $F(x)$ — двоякопериодическая функция *второго рода*, т. е. такая функция, которая при изменении аргумента x на $x+2K$ или $x+2K'i$ приобретает постоянный множитель:

$$F(x+2K)=\mu F(x), \qquad F(x+2K'i)=\mu' F(x).$$

В дальнейшем уравнение Ламе и его обобщения рассматривали как сам Эрмит, так и его ученики, а также Брио и Буке, Гуго Гюльден, нашедший ряд точных решений, и др.

После работы Эрмита об уравнениях Ламе Пикар показал, что если уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,$$

коэффициенты которого $p(x)$, $q(x)$—двоякопериодические функции с периодами $2K$ и $2K'i$, допускает однозначный интеграл, имеющий во всей плоскости x только полюсы, то этот интеграл может быть представлен при помощи функций Якоби H и θ. В другой статье он обобщил этот результат на уравнения любого порядка с двоякопериодическими коэффициентами и дал пример уравнения третьего порядка [158].

В начале 1880 г. Миттаг-Леффлер опубликовал статью [21], в которой рассматривал свойства двоякопериодических функций второго рода.

Пусть $F(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и точка a есть полюс $F(x)$ степени α. В его окрестности имеет место представление

$$F(a+\varepsilon)=A\varepsilon^{-1}+A_1D\varepsilon^{-1}+\ldots$$
$$\ldots+A_\alpha D^\alpha\varepsilon^{-1}+B+B_1\varepsilon+\ldots, \tag{3}$$

здесь D — обозначение производной.

Эрмит показал, что тогда $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = \sum [Af(x-a) + A_1 Df(x-a) + \dots$$
$$\dots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)], \qquad (4)$$

где сумма охватывает все полюсы a, расположенные в параллелограмме периодов. Функция $f(x)$ определится равенством

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\mathrm{H}(x)} e^{\lambda x}, \qquad (5)$$

причем λ и ω связаны с μ и μ' так:

$$\mu = e^{2k\lambda}, \qquad \mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{k} + 2iK'\lambda}, \qquad (6)$$

$\mathrm{H}(x)$ — эта-функция Якоби.

Миттаг-Леффлер рассматривает случай, когда представление (5) не годится, а именно когда ω выражается через кратные периодов $2K$, $2K'i$:

$$\omega = 2mK + 2niK',$$

где m, n — целые или равны 0. Тогда вместо (6) имеем

$$\mu = e^{2\lambda K}, \qquad \mu' = e^{2\lambda iK'}.$$

Для $F(x)$ — двоякопериодической функции первого рода — Эрмит нашел формулу

$$F(x) = \sum \left\{ A \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + A_1 D \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + A_\alpha D^\alpha \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} \right\}. \qquad (7)$$

Миттаг-Леффлер с помощью теории вычетов дает вывод формулы для двоякопериодической функции $F(x)$ второго рода, удовлетворяющей условию (1):

$$F(x) = A_0 e^{\lambda x} + \Sigma \{Af(x-a) + A_1 Df(x-a) + \dots$$
$$\dots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)\},$$

где

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} e^{\lambda x}.$$

При этом λ удовлетворяет уравнению

$$\sum (A + A_1\lambda + \dots + A_\alpha \lambda^\alpha) e^{-\lambda a} = 0,$$

где суммирование распространяется на все полюсы a.

В одном из следующих номеров парижских «Докладов» Пикар поместил статью, в которой дополняет статью Миттаг-Леффлера, рассматривая случай $\lambda=0$. В том же номере «Докладов» Миттаг-Леффлер делает дополнение к теореме Пикара.

В другом выпуске «Докладов» за 1880 г. Миттаг-Леффлер рассматривает линейное уравнение n-го порядка с двоякопериодическими коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y, \tag{8}$$

где дополняет теорему Пикара о том, что такое уравнение, если для него существует однозначный интеграл, имеет общим решением сумму n двоякопериодических функций второго рода. Но Пикар не дал более подробного представления этих интегралов. Миттаг-Леффлер предполагает, что один из частных интегралов известен. Пусть это будет $y=\psi(x)$, тогда

$$\psi(x+2K)=\mu\psi(x), \qquad \psi(x+2iK')=\mu'\psi(x).$$

Если коэффициенты (8) таковы, что его интегралы — однозначные функции с единственной существенно особой точкой $1/0$ (так пишет Миттаг-Леффлер), то можно получить $n-1$ интегралов, которые, присоединенные к $\psi(x)$, образуют фундаментальную систему.

В последней статье 1880 г. [23], представляющей часть письма Эрмиту, Миттаг-Леффлер обобщает такую теорему Эрмита.

Пусть уравнение (2) имеет два линейно независимых интеграла u и v. Положим $uv=F(x)$. Тогда уравнение

$$z'' = \left[(\omega - 1)\frac{F'(x)}{F(x)} - p\right] z' + \left[\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega)\frac{F''(x)}{F'(x)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega)\, p \frac{F'(x)}{F(x)} + \omega^2 q\right] z = 0, \tag{9}$$

в котором ω — произвольная константа, имеет интегралами u^ω и v^ω.

Если p и q — двоякопериодические функции, такие, что $F'(x)/F(x)$ также двоякопериодическая функция, то дифференциальное уравнение для z имеет коэффициенты периодические, а интегралы, вообще говоря, неоднозначные.

Обобщение Миттаг-Леффлера состоит в следующем. Пусть будут U, V — линейно независимые интегралы уравнения

$$z''+Pz'+Qz=0,$$

а u, v — линейно независимые интегралы уравнения (2). Пусть

$$\frac{U'}{U}=\varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right), \qquad \frac{V'}{V}=\varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right).$$

Проведенные Миттаг-Леффлером выкладки показывают, что P и Q симметричны относительно u'/u и v'/v. Если принять за $\varphi(x, \xi)$ рациональную функцию от ξ, коэффициенты которой — однозначные функции x, то P и Q будут рациональными функциями от $\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$ и $\frac{u'}{u}\frac{v'}{v}$ или, при $uv=F$, от $\frac{F'(x)}{F(x)}$ и $\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}+\frac{1}{2}\frac{F'}{F}+q$ Коэффициенты в этих выражениях однозначные функции x.

Если в рациональном выражении $\varphi(x,\xi)$ коэффициенты при различных степенях ξ — двоякопериодические функции от x, то P, Q также двоякопериодические функции, но решения уравнения (9), вообще говоря, неоднозначны. Если $\varphi(x,\xi)=\omega\xi$, то получается случай Эрмита.

Работы Миттаг-Леффлера по дифференциальным уравнениям в противоположность его исследованиям по аналитическим функциям не были основополагающими. Они перемежались с работами Пикара, Эрмита и других авторов. Может быть, в силу сложившегося соперничества на долю Миттаг-Леффлера пришлись обобщения и дополнения к основным теоремам или новые доказательства. Однако в «Лекциях» Эрмита 1882 г. часто упоминается имя Миттаг-Леффлера (например, в лекциях 10, 11, 12, 23 и в Приложениях); оно также вынесено в оглавление. Речь идет не только о теореме Миттаг-Леффлера, относящейся к мероморфным функциям, и ее приложениям, но и о двоякопериодических функциях первого и второго рода. По поводу основной теоремы Миттаг-Леффлера он добавляет, что выводит ее тем же способом, «который привел молодого ученого геометра к его прекрасному открытию» [140, с. 89].

После первых работ по теории дифференциальных уравнений Миттаг-Леффлер вернулся к теории этих уравнений лишь через 11 лет. В 1891 г. в своем журнале он опубликовал статью «Об аналитическом представлении интегралов и инвариантов линейного однородного дифференциального уравнения» [43].

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y = 0. \tag{10}$$

Считается, что в каждой конечной области плоскости х имеется лишь конечное число особых точек коэффициентов уравнения. Особые точки

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty.$$

Пусть будет $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система интегралов уравнения; x_0 — обыкновенная точка; L — замкнутый контур, проходящий через x_0. Около $x=x_0$ элемент системы решений представляется степенными рядами

$$\mathfrak{P}_i(x-x_0) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Придя в точку x_0 после обхода контура L, получим систему рядов $\overline{\mathfrak{P}}_i(x-x_0)$, связанную с $\mathfrak{P}_i(x-x_0)$ соотношениями

$$\overline{\mathfrak{P}}_m(x-x_0) = \alpha_{m1}\mathfrak{P}_1(x-x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{mn}\mathfrak{P}_n(x-x_0). \tag{11}$$

Составим целую рациональную функцию от ω:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\omega & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\omega \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Коэффициенты при каждой степени ω^m являются *инвариантами,* т. е. они одни и те же для каждой данной подстановки при деформации L и не зависят от изменения подстановки, если взять за исходную другую точку x_0 и другую фундаментальную систему интегралов y_i.

Во введении излагаются результаты Фукса, полученные для уравнения (10) и для его частного случая, уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)}\,y = 0, \tag{13}$$

$$P_0(x) = (x-a_1)^{q_1}\ldots(x-a_n)^{q_n},$$
$$P_\nu(x) = A_{\nu 0} + A_{\nu 1}x + \ldots + A_{\nu p_\nu}x^{p_\nu};$$

здесь q_i — целые положительные числа.

Миттаг-Леффлер останавливается на случае, когда контур L заключается внутри кольца C, не содержащего особых точек, ограниченного концентрическими окружностями.

Положим $x=\rho e^{i\theta}$. Задана точка $x_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$ в области C. Проводится луч из начала координат, на нем выбираются точки x_1, x_2 внутри C так, чтобы через них проходили окружности, ограничивающие кольцо X, причем $x_0=\sqrt{x_1 x_2}$.

Принимая $x_1=x_0 e^{-h}$, $x_2=x_0 e^h$, получим

$$h=\frac{1}{2}\log\frac{x_2}{x_1}.$$

Миттаг-Леффлер делает последовательно два преобразования. Полагая

$$x=x_0 e^z,$$

он переводит кольцо X в полосу K между прямыми $x=\pm h$. Затем он полагает

$$t=\frac{e^{i\alpha z}-1}{e^{i\alpha z}+1}.$$

Тогда на плоскости t полосе K будет отвечать круг H радиуса единица. Зависимость между x и t представляет подстановку Пуанкаре

$$t=\frac{(x/x_0)^{\frac{\pi i}{2h}}-1}{(x/x_0)^{\frac{\pi i}{2h}}+1}, \tag{14}$$

или

$$t=x_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}. \tag{14'}$$

В точке x_0 задаются условия для фундаментальной системы интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\frac{d^\nu y_m}{dx^\nu}=0, \qquad \nu\gtrless n-m, \qquad \nu\leqslant n-1;$$

$$\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}=1, \qquad x=x_0.$$

Тогда y_m представляется в виде

$$y_m=\frac{(x-x_0)^{n-m}}{(n-m)!}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_m^{n+\nu}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+\nu}}{(n+\nu)!}\quad (m=1, 2, \ldots, n). \quad (15)$$

После перехода от x к t по формуле (14) получим

$$y_m=R_m(t). \quad (16)$$

Далее строится фундаментальная система интегралов

$$v_m(t)=\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_m^{n+\nu}\frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!}\quad (m=1, 2, \ldots, n), \quad (17)$$

удовлетворяющих условиям

$$\frac{d^\nu v_m}{dt^\nu}=0, \qquad \nu \gtrless n-m, \qquad \nu\leqslant n-1;$$
$$\frac{d^{n-m}v_m}{dt^{n-m}}=1 \qquad (t=0). \quad (18)$$

Функции $R_m(t)$ и $v_m(t)$ связаны подстановкой

$$y_m(t)=R_m(t)=c_{1m}v_1(t)+c_{2m}v_2(t)+\ldots$$
$$\ldots+c_{nm}(t)\,v_n(t). \quad (19$$

Из (15) и (17) получаем

$$y_m(x)=\sum_{\lambda=1}^{n}c_{\lambda n}\left\{\frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi_\lambda^{n+\nu}(x_0)}{(n+\nu)!}t^{n+\nu}\right\}\quad (|t|<1), \quad (20)$$

где

$$t=\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}}-1\right]:\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}}+1\right]. \quad (21)$$

После обхода контура L придем в точку $x=x_0e^{2\pi i}$; тогда t примет значение

$$t_0=\left(e^{-\frac{\pi^2}{h}}-1\right):\left(e^{-\frac{\pi^2}{h}}+1\right). \quad (22)$$

Когда x описывает контур L, не пересекающий себя и охватывающий те же особые точки, что и кольцо C, то элементы $v_i(t)$ претерпевают линейную подстановку

$$S=\begin{vmatrix} v_{11}(t_0) & v_{12}(t_0) & \dots & v_{1n}(t_0) \\ v_{21}(t_0) & v_{22}(t_0) & \dots & v_{2n}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}(t_0) & v_{n2}(t_0) & \dots & v_{nn}(t_0) \end{vmatrix},$$

причем

$$v_{m\lambda}(t_0)=k_{m\lambda}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{n}\Psi_m^{n+\nu}(x_0)\frac{1}{(\lambda+\nu)!}\{(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}}-1):(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}}+1)\}^{\lambda+\nu},$$

где

$$k_{m\lambda}=0,\qquad \lambda<m;$$
$$k_{m\lambda}=\frac{1}{(\lambda-m)!}[(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}}-1):(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}}+1)]^{\lambda-m},$$
$$\lambda>m;\qquad k_{mm}=1.$$

Инварианты $V_m(t)$ являются коэффициентами уравнения

$$(-1)^n\begin{vmatrix} v_{11}(t)-\omega & v_{12}(t) & \dots & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t)-\omega & \dots & v_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}(t) & v_{n2}(t) & \dots & v_{nn}(t)-\omega \end{vmatrix}=$$
$$=\omega^n+V_1(t)\,\omega^{-1}+\dots+V_n(t)=0.$$

Ряды $V_\mu(t)$ — искомые инварианты кольца C. Они не зависят от x_0.

Для уравнения (13) подстановочные инварианты $V_m(t_0)$ для каждой подстановки, которую получаем, заставляя x пробегать замкнутый контур, не самопересекающийся и охватывающий те же особые точки, что и X, могут быть представлены в форме рядов по целым положительным степеням коэффициентов A_{rq} и величин t_0, определяемых равенством (22). Эти ряды сходятся для всех конечных систем значений величин A_{rq}, коэффициенты рядов — рациональные функции a_1, $a_2, \dots, a_n$ и целые рациональные функции $h/\pi i$ с целыми коэффициентами.

Другой способ получения инвариантов Миттаг-Леффлер строит, вводя замену переменных

$$x=x_0e^{\tau}.$$

Наконец, Миттаг-Леффлер исследует случай, когда замкнутый контур охватывает особые точки, расположенные на отрезке прямой. Если концы этого отрезка определяются числами $x=a$ и $x=b$, то за контур L берется эллипс с полуосями α, β и делается замена переменного

$$x=\frac{b-a}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{b-a}{2}.$$

Часть плоскости x между отрезком и эллипсом переходит на плоскости z в кольцо, в котором внутренняя окружность имеет радиус единица, а радиус внешней равен $\rho=\dfrac{2(\alpha+\beta)}{|b-a|}$.

Мы видели, что Миттаг-Леффлер занимался различными вопросами теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Он также принял участие в изучении одного нелинейного уравнения, вызвавшего оживленный обмен письмами и журнальными статьями между математиками. Это задача об интегрировании уравнения

$$y''=Ay^3+By^2+Cy+D+(Ey+F)y'. \tag{23}$$

Миттаг-Леффлер замечает [47], что это уравнение является естественным обобщением уравнения того же вида, но с $E=F=0$. Последнее же интегрируется с помощью эллиптических интегралов.

Пикар занимался определением общих свойств решений этого уравнения, имеющих вид однозначных функций. Миттаг-Леффлер задается целью «осуществить интеграцию», т. е. по возможности найти решение в замкнутой форме. В статье [47], являющейся извлечением из письма Пикару, Миттаг-Леффлер исходит из уравнения, которому удовлетворяет функция Вейерштрасса $\wp(x)$:

$$\wp''=6\wp^2-{}^1/_2 g_3, \tag{24}$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\wp=\wp(x+x_0;\ g_2,\ g_3). \tag{25}$$

Здесь g_2, g_3 — инварианты функции $\wp$, x_0 и g_2 рассматриваются как произвольные постоянные.

Рассматривая различные возможности, Миттаг-Леффлер приходит к решениям, которые выражаются через эллиптические функции. Так, при $A=C=E=F=$

$=0$ имеем решение вида (25); если при этом $B=6$, $D=$ $={}^1/_2 g_3$, то решение имеет вид

$$\wp(x+x_0; g_2, g_3)=\frac{1}{(x+x_0)^2}+\frac{g_2}{2^2\cdot5}(x+x_0)^2+$$
$$+\frac{g_3}{2^2\cdot7}(x-x_0)^3+\ldots,$$

причем следующие коэффициенты — целые рациональные функции от g_3.

В качестве примера рассуждений Миттаг-Леффлера приведем случай, когда он ищет решение, имеющее полюс 2-го порядка. Сравнивая порядок полюса в разных членах уравнения (23), он приходит к заключению, что должны равняться нулю коэффициенты A и E. Тогда линейной подстановкой можно привести уравнение к виду

$$y''=6y^2-{}^3/_2k^4+5ky' \qquad (k \text{ — константа}).$$

После ряда выкладок получается общее решение этого уравнения

$$y=k^2e^{2kx}\wp(e^{kx}+e^{kx_0}; 0, H)-\frac{k^2}{2},$$

где x_0 и H — произвольные постоянные.

В других случаях получаются более сложные решения в виде отношения эллиптических функций. Миттаг-Леффлер отмечает, что в одном месте он использовал прием Пикара, в другом — Пуанкаре.

Таковы в общих чертах исследования Миттаг-Леффлера по дифференциальным уравнениям.

Последняя статья Г. Миттаг-Леффлера

Последняя напечатанная статья Миттаг-Леффлера представляет краткую заметку «Дополнительные замечания», опубликованную в томе 50 «Acta mathematica» в 1927 г. [119]. Это замечания к статье А. Шёнфлиса «Кризис в математическом творчестве Кантора» [175], помещенной вслед за написанным Нёрлундом некрологом Миттаг-Леффлера. Заметка эта интересна не только потому, что это последняя статья, но и потому, что в ней Миттаг-Леффлер вспоминает об одной из своих основных работ и о ее оценке крупными математиками.

А. Шёнфлис в своей статье рассматривает письма Г. Кантора Миттаг-Леффлеру за 1884—1885 гг. Это был период, когда Кантор нашел в лице Миттаг-Леффлера друга, полностью принявшего его теорию, оказавшего поддержку его идеям и открывшего ему, казалось, широкую дорогу в «Acta mathematica». Но как мы видели, потом эта дорога оказалась закрытой.

В опубликованных письмах Кантора много места уделяется его разрыву с Кронекером, попыткам примирения с ним (однажды у них с Кронекером, на дому у последнего, спор длился в течение семи часов, до часу ночи) и дальнейшему разладу. Кантора возмущала дерзость Кронекера, который заявил, что собирается в «Acta mathematica» показать, что «результаты новой теории функций и теории множеств не имеют никакого реального значения» [175, с. 5].

Шёнфлис пишет, что большое место в письмах Кантора занимали теоретические вопросы, которые потом вошли в опубликованные статьи.

В письмах есть жалобы Кантора на то, что никто не понимает его философских идей. Он решил даже обратиться в министерство с просьбой разрешить ему в лекциях по математике переходить к философии. В связи с этим можно напомнить, что в 1885 г. лекции Кантора по философии Лейбница окончились неудачей — все его слушатели разбежались [207, с. 86], хотя Кантор владел словом и был очень остроумным и интересным собеседником. В письме от 22 сентября 1884 г. [175, с. 20] Кантор пишет о том, какое прикладное значение он придает своим теориям.

> Кроме того, я занимаюсь исследованиями о применении теории множеств к естественной истории организмов, к которой современные механические принципы не применимы... Для этого должны быть созданы совсем новые математические средства, которые, однако, содержатся в разработанной мною части теории множеств. Этими идеями — более точного обоснования сущности всего органического — я занимаюсь уже 14 лет, они являются действительным побуждением к тому, что я предпринял утомительную и неблагодарную работу по исследованию точечных множеств и в течение этого промежутка времени не терял ни на мгновение из вида.

Когда Миттаг-Леффлер послал Кантору корректуру его статьи с выражением сомнения в том, стоит ли ее печатать в «Acta», — ведь ее смогут понять только через 100 лет, Кантор ответил ему, что берет статью обратно, добавив: «То обстоятельство, что моя теория типов показалась Вам неподходящей для «Acta», не играет для меня никакой роли; это ни в малейшей мере не меняет моего отношения к Вам» [175, с. 15].

На самом деле, конечно, отношение Кантора к Миттаг-Леффлеру изменилось, и он уже больше не посылал своих работ в его журнал. Шёнфлис указывает, что в 1887 г. Кантор опубликовал статью в «Журнале философии и философской критики». В действительности в этом журнале были опубликованы две статьи под названием «Дополнения к учению о трансфинитном» (вторая — в 1888 г.). Но это не была статья, взятая из «Acta mathematica», она была опубликована, как мы уже говорили, Граттан-Гинессом в 1970 г. [134]. Статья Шёнфлиса была подготовлена в марте 1926 г. к 80-летию Миттаг-Леффлера, который пожелал сделать к ней добавление. Он пишет, что его письма к Кантору относятся к двум его, Миттаг-Леффлера, статьям — [35] и [36] — и добавляет: «Задача, решения которой я добиваюсь в этих работах, — связать с единой точки зрения вейерштрассово представление анализа с канторовым» [119, с. 25].

Большой знаток учения Кантора, А. Шёнфлис в 1922 г. написал статью «К воспоминанию о Георге Канторе» [174], в которой дал оценку работы Миттаг-Леффлера [35]. Шёнфлис пишет так: «Победное шествие его (Кантора) идей можно датировать моментом, когда Миттаг-Леффлер и Пуанкаре раскрыли их большое значение для теории функций в своих блестящих исследованиях. Работы Пуанкаре по автоморфным функциям и четко выявленное своеобразие свойственной им области существования едва ли могли бы получить завершение без проникновения во внутреннюю структуру множеств точек. Равным образом Миттаг-Леффлером просвечена, так сказать рентгеновским способом, возможность построения аналитических функций с помощью других функций, имеющих выбранные особые точки, на основании канторовых понятий и результатов» [174, с. 100].

Начав воспоминания о том, как о его исследованиях отозвался Шёнфлис, Миттаг-Леффлер стал вспоминать и другие случаи, когда его работы получали высокую оценку. Он приводит слова Вейерштрасса, который всегда был умеренным в своих высказываниях, по поводу статьи [35] : «В Вашей последней статье Вы рассмотрели в самом общем виде главную задачу теории, решение которой поставлено как одно из будущих исследований, посвященных, вероятно, достижению цели лишь в будущем» [119, с. 25].

На математическом семинаре Вейерштрасс сделал сообщение о работе Миттаг-Леффлера; правда, неясно, о которой из двух: «О представлении аналитических функций...» [35] или «Новое доказательство теоремы Лорана» [36]. Во всяком случае, Вейерштрасс действительно знал первую часть работы [35] и считал, что ее переиздание было бы подходящим не только для академической лекции.

Миттаг-Леффлер вспоминает также Эрмита, который часто обращался к его работам и дал «элегантное и важное приложение общей теории (Миттаг-Леффлера. — *П. К.*)» в четвертом издании своего «Курса анализа» (см. :[217, с. 129—134]).

В Америке большая часть общей теории Миттаг-Леффлера обстоятельно изложена Осгудом в «Курсе теории функций» [156]. Во Франции никогда не придавали значения принижению Кронекером теории Кантора. Об этом свидетельствует то, что переводы статей Кантора, опубликованных Миттаг-Леффером в «Acta mathematica» были сделаны молодыми членами «математической школы, которая развивалась у ног Эрмита» [119, с. 25]. Фундаментальная статья Кантора [123] переведена Пуанкаре.

У Миттаг-Леффлера осталось чувство сожаления по поводу того, что он перестал в свое время заниматься приложениями теории множеств к анализу. Он заключает «Дополнительные замечания» так: «С самого начала моим намерением было дать в последующих статьях ряд приложений общей теории. Но я не достиг этого, так как одна за другой стали появляться многие интересные и важные работы, имевшие большее или меньшее отношение к моей статье. Притом у меня также появились другие работы, стоящие в связи с тем, что я назвал „звездой“» [119, с. 25].

Миттаг-Леффлер критически разбирает свои работы, придавая большое значение тому, как их оценивают другие математики. Мы же отдаем должное его заслугам и чтим память человека, ставившего математическую науку превыше всего и внесшего в нее значительный вклад. Мы благодарны Миттаг-Леффлеру за его дружбу с нашей соотечественницей С. В. Ковалевской и его товарищескую помощь в достижении ее цели — открыть дорогу женщинам в науку.

Глава 6

Г. Миттаг-Леффлер и С. В. Ковалевская

Из письма Миттаг-Леффлера Мальмстену от 19 февраля 1875 г. мы знаем, что Миттаг-Леффлер уже тогда, будучи слушателем лекций Вейерштрасса, много слышал о его ученице. В то время Ковалевская жила в России, закончив обучение у Вейерштрасса и получив ученую степень доктора наук в Геттингенском университете.

На родине Софья Васильевна не нашла применения своим знаниям и способностям. В 1878 г. были открыты Высшие женские курсы, на которых Ковалевской естественно было бы стать профессором математики. Но у начальства она пользовалась репутацией нигилистки и работы на курсах не получила.

Муж Софьи Васильевны, Владимир Онуфриевич Ковалевский, за годы пребывания одновременно с женой за границей стал крупным ученым, основателем новой ветви палеонтологии. Однако чужой в университетской среде, и он в Петербурге также не смог устроиться по своей специальности.

Супруги почти отошли от научной работы, стали заниматься другими делами, первое время дававшими им доходы. Они хотели укрепить свое положение, стать независимыми и тогда вплотную заняться наукой, но оказались неумелыми дельцами, что привело их в начале 1880-х годов к полному разорению. Ковалевская все больше отходила от науки, что очень обеспокоило ее учителя — Вейерштрасса.

В 1876 г. Миттаг-Леффлер собрался в Петербург, и Вейерштрасс поручил ему навестить Ковалевскую, считая, что это может послужить побудительным толчком для возвращения его ученицы к математической работе. Миттаг-Леффлер встретился с Ковалевской 10 февраля. Она произвела сильное впечатление на молодого шведского ученого и как математик, и как обаятельная образованная женщина. Об этом он написал восторженное письмо Мальмстену (см., например [198, с. 105]).

Вторая встреча произошла в Петербурге в начале 1880 г. на VI съезде русских естествоиспытателей и врачей, где оба молодых ученых делали доклады: Ковалевская — о преобразованиях гиперэллиптических интегралов 3-го ранга [195, с. 57—74], а Миттаг-Леффлер — об интегрировании линейного дифференциального уравнения с двоякопериодическими коэффициентами [181].

После этого съезда между ними завязалась переписка, продолжавшаяся 11 лет, до конца жизни Ковалевской. Эта переписка, недавно опубликованная [207], дает представление не только о взаимоотношениях Миттаг-Леффлера и Ковалевской, но и о математическом мире Европы того времени. Мы здесь выделим из нее главным образом то, что связано с Миттаг-Леффлером.

Ковалевская, активная поборница женского образования, старалась помочь и другим женщинам получить высшее образование. В 1881 г. некая Покровская, возможно, жена профессора математики Н. М. Покровского, рассказала ей о своей дочери, очень любившей математику, и просила посоветовать ей, как быть, чтобы дочь могла заниматься высшей математикой на университетском уровне. Ковалевская предложила попытать счастья у гельсингфорсского профессора Миттаг-Леффлера и 14 октября 1880 г. написала ему письмо, в котором спрашивает, верно ли, что в университете Гельсингфорса могут учиться и женщины. Ее интересует вопрос: «Как Ваш университет относится к нам: открывает ли он нам двери без ограничений, допускает ли он нас только в исключительных случаях и в виде особой милости, или же он совершенно закрывает перед нами вход?» [207, с. 108].

Миттаг-Леффлер ответил быстро. После съезда в Петербурге он поехал в Париж, где заболел, и испросил себе отпуск до осени. Весной и летом он был в Италии и Швейцарии, посетил Гёттинген, Берлин и Христианию и навестил в Рюдерсдорфе Вейерштрасса, который отдыхал там в семье недавно умершего Борхардта. Вейерштрасс болел и тяжело перенес смерть своего друга Борхардта.

К 19 октября 1880 г. Миттаг-Леффлер вернулся в Стокгольм, где начал читать лекции по теории абелевых интегралов и алгебраических функций, четыре часа в неделю.

В ответ на вопрос Софьи Васильевны он пишет, что в Гельсингфорсском университете женщины могут

Софья Ковалевская

свободно слушать лекции, но вопрос о допущении их к экзаменам еще не решен, еще не получен ответ от русского императора на запрос совета университета. Миттаг-Леффлер, во всяком случае, предлагает свою помощь молодой девушке, она сможет слушать его лекции. Он охотно частным образом повторит ей лекции, которые уже прочитал в университете.

Миттаг-Леффлер старался помочь Покровской, когда она приехала в Гельсингфорс. Но если у нее были успехи в шведском языке (на котором велось преподавание), то успехи в математике оказались слабыми, и ей пришлось возвратиться в Россию.

Но вернемся к письму Миттаг-Леффлера. Он обещает прислать Софье Васильевне в Москву три небольших заметки, опубликованные в «Comptes rendus» (парижских «Докладах») (очевидно, это статьи об интегрировании линейных дифференциальных уравнений), а также «целое собрание мемуаров Э. Шеринга и Г. А. Шварца». В последнее время Миттаг-Леффлер занимается вопросом об интегрировании линейного дифференциального уравнения n-го порядка с двоякопериодическими коэффициентами. Он не хочет публиковать свои результаты, пока не будет напечатана статья Пикара на ту же тему, о чем он слышал от Вейерштрасса. (Позднее Миттаг-Леффлер напечатал свои статьи в «Comptes rendus» [21, 22].)

В этом же письме, как и в последующих письмах, Миттаг-Леффлер делится с Ковалевской научными новостями. Он привлекает ее внимание к замечательному мемуару Пикара, где доказывается, что целая функция, не принимающая двух значений, является константой. Вейерштрасс находит доказательство Пикара слишком сложным и хотел бы иметь элементарный вывод теоремы. Миттаг-Леффлер пытался найти его, но ему лишь удалось простым способом доказать, что если существует целая функция, не принимающая значений 0 и 1, то найдется также другая целая функция, не принимающая ни одного из значений

$1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

Мать Покровской, зная, что Софья Васильевна стала нуждаться в заработке, дала ей совет — узнать, нельзя ли ей получить профессуру в Гельсингфорсском университете, и одновременно написала об этом Миттаг-Леффлеру. Миттаг-Леффлер стал нащупывать почву среди деятелей университета, но наткнулся на неожиданное сопротивление, о котором пишет Ковалевской 23 марта 1881 г.: «Все мои университетские друзья знают о Вашем исключительном таланте, так что нет сомнений, что Вы были бы приняты сюда, если бы были финкой или принадлежали любой другой нации, кроме русской» [207, с. 109]. Однако финские профессора боятся, что вслед за Ковалевской в их университете появятся учащиеся русские женщины, а среди них могут оказаться такие, которые принадлежат революционной партии, что для университета нежелательно. (Вероятно, слухи о том, что Ковалевская — нигилистка, а ее сестра — революционерка и деятельница Парижской Коммуны, просочились и в Гельсингфорс.)

Но Миттаг-Леффлер сообщает, что скоро он будет заведовать кафедрой математики в недавно открывшемся университете Стокгольма и он надеется, что там ему удастся добиться для Ковалевской приглашения преподавать математику.

Далее Миттаг-Леффлер пишет Ковалевской, что Вейерштрасс только что опубликовал статью о методе Миттаг-Леффлера представления однозначной функции с помощью ряда рациональных функций: «Об одной теореме г. Миттаг-Леффлера» [184]. Ранее, 19 октября 1880 г. он писал, что Вейерштрасс прислал ему 100 оттисков этой статьи, один из которых Миттаг-Леффлер собирается послать Ковалевской.

В большом ответном письме от 8 января 1881 г. Софья Васильевна выражает сожаление о том, что Миттаг-Леффлер так запоздал с опубликованием своих работ по интегрированию дифференциальных уравнений. Она точно помнит, что его работа была в большей части закончена в прошлом году, когда он приезжал в Петербург.

В письме от 23 марта 1881 г. Миттаг-Леффлер также жалуется на то, что у него мало времени, чтобы заниматься чистой наукой. Он был председателем научного общества, что доставило ему много работы. В университете у него много дел, имеющих мало отношения к науке. «И, наконец, как Вы хорошо знаете, общественная жизнь в наших странах мало содействует научной работе» [207, с. 25].

Ковалевская отвечает письмом, посланным из Берлина 7 июня 1881 г. Оно начинается с извинения за то, что она отвечает с некоторым запозданием на известие о помолвке Миттаг-Леффлера с Сигне Линдфорс. Софья Васильевна собиралась написать поздравление вместе с Розой Борхардт, вдовой Карла Борхардта, и с семьей Вейерштрассов, но этот проект все откладывался и не осуществился.

Миттаг-Леффлер ответил сравнительно быстро, 19 июня 1881 г. Он сообщает, что 1 сентября откроются факультеты точных наук и он вступит в свою должность ординарного профессора чистой математики. По поводу приглашения Ковалевской он уже говорил с некоторыми из своих друзей: с астрономом Гюльденом и с известным физиологом Ретциусом. Скоро он увидит профессора Мальмстена из Упсалы, в помощи которого он уверен. К началу будущего года Миттаг-Леффлер надеется, что сможет рекомендовать Ковалевскую в качестве профессора или доцента, но вначале без жалованья.

Миттаг-Леффлер посылает Ковалевской, находившейся в то время в Берлине, свои фотографии и просит передать одну из них г-же Борхардт, обещая через несколько дней выслать фотографию невесты.

В письме от 8 июля 1881 г. Ковалевская благодарит за присылку фотографий обоих, Гёсты и Сигне, и собирается заказать свою. Она просит передать благодарность Сигне и высказать ей всю симпатию, внушаемую оригиналом портрета.

Пока еще Ковалевской трудно согласиться на предложение Миттаг-Леффлера, она связана с мужем и семьей. Вейерштрасс плохо верит, что Стокгольмский университет может допустить к преподаванию женщину, и боится, что у Миттаг-Леффлера окажется много врагов. А еще раньше Вейерштрасс писал ей, что если бы она одна поехала в Гельсингфорс, то он считал бы это ненормальным для отношений между мужем и женой. Окончательное приглашение Ковалевской произошло после трагической смерти ее мужа в 1883 г.

В следующем из рассматриваемых писем, от 15 июля 1881 г., Миттаг-Леффлер радуется принципиальному согласию Ковалевской приехать в Стокгольм и сообщает ей некоторые сведения о новом университете, провозгласившем наиболее либеральные принципы. Положение женщин в Швеции совсем иное, чем в Германии: уже есть около двадцати студенток в университете Упсалы, а в Высшей школе Стокгольма их, конечно, будет гораздо больше. Экзамены женщины могут сдавать так же, как мужчины. Неясно, имеет ли право женщина стать профессором в старинных университетах Швеции — в Лунде и Упсале, но до сих пор такой женщины не находилось. Однако он уверен, что в Стокгольме это право осуществится. Правда, возникнут трудности, так как университет в настоящее время находится под руководством малопросвещенных людей, «которым, к тому же, я не по вкусу», добавляет он. Но будут профессора и на стороне Миттаг-Леффлера, он уверен в этом.

У Ковалевской будут ученики-энтузиасты, так как теории Вейерштрасса, которые она хочет развивать, способны увлечь: «В Финляндии, где меня принимали сначала с недоверием, я оставил теперь по меньшей мере десяток учеников, воодушевленных величием нашей науки и проникнутых желанием посвятить свою жизнь изучению математики» [207, с. 29].

О предстоящих лекциях в университете Миттаг-Леффлер пишет, что он собирается вначале прочесть введение в теорию функций по Вейерштрассу, но более подробно, так как учащиеся в Стокгольме не так хорошо подготовлены, как в Берлине. Потом он будет излагать теорию функций, а затем можно будет читать что угодно.

Поскольку Вейерштрасс высказывал опасения по поводу трудностей в вопросе приглашения Ковалевской, Миттаг-Леффлер говорит: «Я никогда не боюсь трудностей, когда работаю, как здесь, для научной цели самого высокого значения» [207, с. 29].

Ковалевская советуется с Вейерштрассом и пишет Миттаг-Леффлеру, что Вейерштрасс «полагает, что появление женщины в звании доцента на университетской кафедре представляет собою настолько серьезный шаг, который может иметь такие серьезные по-следствия для цели, которой я главным образом хочу служить, что я не имею права решиться на него, пока своими чисто научными трудами не докажу, на что я способна» [207, с. 30]. И Ковалевская хочет серьезно заняться исследованиями по преломлению света в кристаллах, откладывая вопрос о Стокгольме (письмо Ковалевской от 21 ноября 1881 г.). Тут же она рассказывает о своем большом интересе к «математической русалке» — задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Она много думает об этой задаче, пытается решить ее с помощью абелевых функций, но вычисления настолько сложны, что она пока не может сказать, достигнет ли цели.

В письме от 25 февраля 1882 г. Миттаг-Леффлер рассказывает о своих занятиях. Подготовка к лекциям доставила ему много работы. Теперь он читает три часа в неделю теорию эллиптических функций. У него от 20 до 25 учеников, которые почти все — кандидаты философии или доктора, учившиеся раньше в университете Упсалы или Гельсингфорса.

«Г. Эрмит, г. Пикар и г. Пуанкаре не оставят меня в покое, пока я не сообщу им о моих исследованиях относительно однозначных функций, особенности которых образуют бесконечное множество первого рода — по терминологии Кантора. Эти исследования идут к тому же еще дальше и имеют приложения, которые мне кажутся интересными,— к теории линейных уравнений. Я начал публиковать некоторые статьи об этом в «Comptes rendus», а скоро опубликую и другие самого большого значения. Я бы лучше предпочел подождать и написать мемуар для журнала г. Вейерштрасса (т. е. для «Journal für die reine und angewandte Mathematik», где Вейерштрасс и Кронекер были в то время редакторами.— *П. Я.*), но у меня нет достаточно времени, чтобы написать большой мемуар, а если я не опубликую в скором времени по крайней мере некоторые из моих результатов, то меня, вероятно, опередят Пикар или Пуанкаре, которые знают уже достаточно об этих вещах» [207, с. 33].

Здесь речь идет о ряде исследований Миттаг-Леффлера по теории аналитических функций, публиковавшихся им начиная с 1876 г. в шведских журналах, а в 1882 г. — в девяти статьях «Comptes rendus» [29] [1].

[1] См. об этом реферат Гурвица в 10-м томе «Acta mathematica», в Указателе к томам 1—10 (с. 370).

В 1884 г., наконец, Миттаг-Леффлер опубликовал большую статью «Об аналитическом представлении моногенных однозначных функций одного независимого переменного»[35], которую поместил в 4-м томе своего журнала (см. здесь «Аналитические функции»).

Возвратимся к письму Миттаг-Леффлера от 25 февраля 1882 г., в конце которого он сообщает, что женится, возможно, 14 мая. Молодые собираются поехать в Париж и в Бретань, чтоб провести там несколько недель. На обратном пути, в середине или конце июня, они собираются проехать через Берлин, где Миттаг-Леффлер надеется получить удовольствие представить Ковалевской свою жену. А теперь он просит Софью Васильевну взять у Вейерштрасса экземпляр оттиска его статьи в «Berliner Monatsberichte» за февраль 1881 г. Это «Дополнение» к статье Вейерштрасса «К учению о функциях», где Миттаг-Леффлера особенно интересовал пример, построенный Ж. Таннери,— ряда, который представляет одну константу внутри некоторой области и другую вне этой области.

В последнем письме за 1882 г., а именно 18 октября, Ковалевская пишет Миттаг-Леффлеру из Парижа; она сообщает, что Мольк, французский математик, дал ей для передачи Миттаг-Леффлеру, небольшую статью Вейерштрасса, содержащую доказательство теоремы Линдемана о трансцендентности π. Вейерштрасс считал доказательство самого Линдемана не вполне точным. Однако Мольк по рассеянности прислал только начало и конец статьи, и в таком виде Софья Васильевна не хочет пересылать ее.

Первое из имеющихся писем за 1883 г. письмо Ковалевской, посланное из Одессы, где она присутствовала на VII съезде русских естествоиспытателей и врачей, проходившем с 30 августа по 9 сентября. Она написала Миттаг-Леффлеру в последний день съезда. К этому времени уже был решен вопрос о приезде Софьи Васильевны в Стокгольм для чтения пока приватного курса лекций. Но она хотела бы еще два месяца провести в Берлине, чтобы еще поконсультироваться с Вейерштрассом по многим вопросам, относящимся к лекциям. С другой стороны, она еще продолжила бы свой контакт с несколькими молодыми математиками (в их числе были К. Рунге и Д. Ф. Селиванов). Она могла бы взять на себя теорию преобразования абелевых функций, они ее не знают, а она изучила обстоятельно. Но если Вейерштрасса не будет в Берлине, то она приедет раньше. При этом она добавляет: «Я постараюсь как можно лучше делать все, на что я способна. Я буду рассчитывать именно на Вас, дорогой г-н Леффлер, на Ваши добрые советы и на Вашу поддержку, которые придадут мне мужество взяться за столь новое для меня дело» [207, с. 35]. Ковалевская выражает свою признательность в таких словах: «Я так благодарна Стокгольмскому университету, который первым из всех европейских университетов хочет открыть мне свои двери, что я заранее готова привязаться к Стокгольму и к Швеции, как к родной стране, и я надеюсь, что прибыв туда, я останусь там на долгие годы и найду там вторую родину» [Там же, с. 34].

Ковалевская уже начала обдумывать свой курс, ей хотелось изложить теорию линейных дифференциальных уравнений, исследования Фукса, Ж. Таннери и Пуанкаре. Но Миттаг-Леффлер написал ей, что он сам объявил такой курс на весеннее полугодие, а ей советует читать теорию уравнений с частными производными весной (приватно), а также осенью, уже будучи избранной профессором математики Стокгольмской высшей школы.

В письме от 19 сентября 1883 г. Миттаг-Леффлер говорит, что ее письмо он получил, вернувшись из Финляндии, и очень обрадовался ему. Он одобряет ее желание побыть еще несколько месяцев около Вейерштрасса: «Я сам был бы чрезвычайно счастлив, если бы это было возможно и для меня»,— добавляет он.

Письмо Миттаг-Леффлера полно заботы о Ковалевской, он просит написать ему, что должен предпринять для ее жизни в Стокгольме. Приедет ли она одна или возьмет с собой свою дочку. Не лучше ли ей для начала взять пансион в какой-нибудь семье? Он описывает различные возможные варианты пансиона.

В ответном письме от 1 октября 1883 г. Софья Васильевна благодарит Миттаг-Леффлера за предложение найти для нее пансион. Дочку она собирается оставить на попечение ее крестной матери. Вейерштрасс, по-видимому, этой зимой не вернется в Берлин, поэтому она приедет в Стокгольм, как только ей позволят ее дела в России.

В следующем письме, от 10 ноября 1883 г., Софья Васильевна опять благодарит Миттаг-Леффлера и всю его семью за предложение поместить ее у их родственников.

Наконец, 11 ноября Ковалевская посылает телеграмму из Петербурга о том, что выедет в пятницу, т. е. 16 ноября, а затем 17 ноября телеграммой из Ханко (порт в Финляндии) извещает, что она приедет с пароходом «Экспресс».

18 ноября 1883 г. Миттаг-Леффлер встретил Софью Васильевну и привез в свой дом, где ее радушно приняла Сигне Миттаг-Леффлер. Ковалевская познакомилась и подружилась с сестрой Миттаг-Леффлера, писательницей Анной-Шарлоттой Эдгрен-Леффлер. Некоторые ее повести Софья Васильевна впоследствии рекомендовала, а иногда и переводила для русских журналов. Другая шведская писательница — Эллен Кей скоро также стала большим другом Ковалевской; она после смерти Ковалевской написала о ней теплые воспоминания. И другие шведские женщины встретили Ковалевскую с большим дружелюбием, помогали ей в выборе квартир и обстановки. В их числе были Тереза Гюльден — умная женщина, хорошая воспитательница своих детей, жена астронома Гуго Гюльдена, впоследствии много сделавшая для воспитания дочери Ковалевской. Дружески восторженно отнеслась к Ковалевской Амелия Викстрём.

Скоро в Стокгольме Ковалевскую стали называть Соней Ковалевской или просто Соней (Sonja), а ее дочь — lilla Sonja, т. е. маленькой Соней или Сонечкой.

Когда Софья Васильевна привезла в Стокгольм свою дочь Соню, которую в семье называли Фуфой, девочка подружилась с детьми Гюльденов, особенно с Эйнаром, мальчиком ее возраста. Часто, уезжая из Стокгольма, Ковалевская оставляла Фуфу у Гюльденов. После смерти Софьи Васильевны до окончания шведской средней школы девочка оставалась в Стокгольме и жила у Гюльденов.

Конец 1883 г. и каникулы 1883/84 г. Миттаг-Леффлер старался использовать для введения Ковалевской в шведское общество. Он считал, что для укрепления ее положения важно, чтобы ее знали в кругах не только научных деятелей, но и финансовых, от которых многое зависит в Высшей школе.

В Стокгольме было несколько салонов, где среди гостей встречались ученые и литераторы, художники и музыканты. Хозяевами были: директор банка Генрик Пальме, деятель страховых обществ Свен Пальме и его жена Ханна; профессор бальнеологии Карл Курман и его жена Калла Курман, пианистка и композитор; Андре Оскар Валленберг, основатель Стокгольмского государственного банка, и его жена Анна. Их сын Кнут Агатон Валленберг, крупный финансист, основатель фонда Кнута и Алисы (жены) Валленбергов для развития научных исследований в области промышленности.

У Анны и Андре Валленбергов было 10 детей. И до настоящего времени Валленберги являются крупными финансистами, поддерживающими науку, в частности Институт Миттаг-Лефферов. В их жизни были и трудные времена, когда дела Андре терпели крах, но в конце концов наступило время благоденствия.

В книге Гурли Линдер «Общественная жизнь в Стокгольме в 1880—1890 гг.» [153] рассказано о приемах в салонах. Приведены фотографии многих деятелей и их жен, даны снимки их домов и внутренних помещений с роскошной обстановкой, показан атриум Курма́нов, т. е. парадный зал в стиле римского атриума.

Бывали и менее пышные вечера у профессора В. Леке, где выступал квартет: В. Бреггер — тенор, В. Леке — бас, фру Бреггер — альт и Сигне — сопрано.

На почве этих салонов начали создаваться более широкие общественные организации, о которых мы здесь расскажем, чтобы затем уже сосредоточиться на описании деятельности Миттаг-Леффлера и Ковалевской.

В статье «Шведские впечатления» [197] С. В. Ковалевская дала интересный очерк общего состояния современного ей общества. Она говорит, что в политическом и социальном отношении Швеция — одно из самых свободных государств Европы. Швеция не бывала под иностранным игом, в ней не было крепостного права, среди ее королей не было таких тиранов, как Иоанн Грозный или Людовик XI. Поэтому у шведов выработался «разумный, логический темперамент, который не переносит разлада между словом и делом и не останавливается на одной фразе» [197, с. 289].

Убедить шведа в чем-нибудь нелегко, но если это удается, то он не останется на полдороге. Нет такой радикальной реформы в экономическом и социальном отношении, которую не привели бы в исполнение в Швеции, если бы только удалось убедить достаточное число шведов в необходимости этой реформы.

Можно добавить к этому, что в светском обществе того времени еще сильны были феодальные пережитки, мрачная религиозная направленность, было много предрассудков, фарисейства (последнее я постаралась показать на примере истории с наследством Сигне Миттаг-Леффлер), был силен гнет «общественного мнения».

Во второй половине XIX в. в Швеции начали возникать организации, имевшие целью общение различных групп людей: писателей, ученых, художников, финансовых деятелей и членов их семей. В 1860-е годы было организовано общество, которому присвоили имя древнескандинавской богини молодости и обновления Идун (Idun), владевшей яблоками вечной молодости (idunsäpplen). Цели общества были сформулированы так: «с одной стороны — общаться друг с другом для отдыха и подъема сил в борьбе с жизненными трудностями, сохранение свежести и молодости чувств; с другой — приучать молодое поколение сохранять традиции и творческие стремления, которые должны главенствовать на собраниях общества» [198, с. 129; 153, с. 102]. В это общество входили только мужчины. Председателем его был Аксель Кей, профессор патологической анатомии в Королевском медико-хирургическом институте, член Королевской шведской академии наук.

Женщины Швеции, как и других стран Европы в то время, боролись за свое равноправие и образование. Через 20 лет после основания общества Идун женщины во главе с Каллой Курман организовали свое общество, назвав его Новая Идун (Nya Idun). Секретарем общества стала Амелия Викстрём. Председательствовала обычно Эллен Кей. Первое собрание состоялось 7 февраля 1885 г. Члены общества Новая Идун, в том числе А.-Ш. Леффлер и С. В. Ковалевская, делали доклады на разные темы: искусство, положение женщин в разных странах и т. д. (подробнее см.: [198, с. 130]).

Через два года, зимой 1887 г., образовалось общество, объединявшее мужчин и женщин. Оно должно было носить семейный характер, содействовать сближению людей разных специальностей. Учредительницами общества были: Ханна Пальме, Калла Курман, Тереза Гюльден, Анна-Шарлотта Леффлер, Софья Ковалевская и др. Поэтому общество получило название «Хеймдал» (Heimdall) по имени древнескандинавского героя, сына девяти матерей. Председателем общества

Густав Гейерстам

стал Курт Валлис, профессор патологической анатомии, секретарем — Ханна Пальме.

Первое собрание общества «Хеймдал» состоялось в малом зале отеля Рюдберга 23 февраля 1887 г., с докладом Ганса Олофа Гильдебранда, археолога, этнографа и историка культуры, члена Шведской королевской академии наук и Шведской академии.

Среди других докладчиков были: Курт Валлис; Карл Гейерстам, инженер, брат писателя Густава Гейерстама; Вильгельм Леке, профессор зоологии; Кристофер Брёггер, профессор геологии; Юхан Андрес Леффлер, экономист; Роберт Тигерстедт, профессор физиологии; Кристофер Эйхгорн, библиотекарь.

Темы докладов были разнообразны: посещение мормонов; внушение в обычной жизни; новое открытие ископаемых людей; полярная поездка Нансена; об обложении налогами лиц свободных профессий (людей искусства, литераторов, ученых и др.); о шведском художнике Лафренсепе, с экспозицией копий его работ; френология [2] нашего времени.

Выступали на вечерах писатели, художники, музыканты. После выступлений был простой ужин [153].

М. Леке-Лёфгрен в книге «Мир наших родителей» [151] пишет еще об одном обществе, организованном передовыми деятелями науки. Они критически относились к распространенным в шведском обществе косности, суевериям и предрассудкам и решили в знак борьбы с этими явлениями организовать группу. По-видимому, случайно число членов оказалось равным 13, но они шутливо восприняли это как проявление борьбы с предрассудками и назвали свое общество «Группа

[2] Френология — учение о том, что по строению поверхности черепа можно определить характер человека и его судьбу. В настоящее время признано ложным.

тринадцати» (tretton-sällskap). Впрочем, скоро их стало 14, а позднее — 17. Первыми были профессора Брёггер, Гюльден, Кей, Ковалевская, Леке, Линдстедт, Лове́н, Миттаг-Леффлер, Монтелиус, Смитт, Тигерстедт и государственный антикварий Гильдебранд. То, что в него вошла Ковалевская, свидетельствовало о понимании учредителями аномалии в положении женщины в области науки. Члены общества собирались по очереди друг у друга и обсуждали разные вопросы, как о нравах шведского общества, так и связанные с Высшей школой.

Миттаг-Леффлер всячески опекал Ковалевскую и был ей всегда другом и советчиком.

Во время зимних каникул 1883/84 г. Гёста болел и некоторое время не виделся с Ковалевской. Однако 3 января он послал ей записку, в которой предуведомил, что к Ковалевской должна прийти Ханна Пальме, чтобы пригласить ее на первый большой прием наступившего года. Он советует принять приглашение. Она не потеряет много времени — ведь прием начинается не раньше половины девятого. Он и Сигне собираются быть там, так же как Анна-Шарлотта с мужем.

Ханна Пальме, финка по рождению, играла большую роль в светском обществе Стокгольма. Она была красива, обаятельна, изящна. Круг ее интересов был очень широк и многообразен. Ее муж Свен Теодор Пальме, шведский финансист, служил в разных страховых обществах; впоследствии он стал председателем Шведского союза по страхованию и членом дирекции Государственного банка. В ее салоне собиралось высшее общество Стокгольма, и Миттаг-Леффлер хотел приобщить к нему Софью Васильевну.

В то же время Ковалевская тщательно готовилась к предстоящему чтению курса дифференциальных уравнений. Каждую лекцию она должна была записывать и показывать Миттаг-Леффлеру. В его архиве сохранились эти записи; первая лекция записана дважды: рукою Ковалевской и переписана рукою Миттаг-Леффлера.

Накануне третьей лекции, которая состоялась 6 февраля, она посылает ему записку: «Будьте так добры посмотреть мою завтрашнюю лекцию ⟨...⟩ Я посылаю Вам только начало. Затем идет историческая часть, которую я заимствую из Вашего курса, сократив ее немного ⟨...⟩ Вы придете на мою лекцию? Я очень хотела бы, чтобы Вы пришли в первый раз» [207, с. 38—39]. Миттаг-Леффлер побуждает Софью Васильевну дать краткую статью о ее работе по преломлению света в кристаллических средах. Вместе с тем Ковалевская уже связана с Миттаг-Леффлером и другими делами. Она получили письмо Фукса от 3 февраля 1884 г. по поводу предстоящего 70-летия Вейерштрасса 31 октября 1885 г. (Фукс был председателем комиссии по юбилею учителя), он сообщает о готовящихся к юбилею альбоме, бюсте и медали с изображением Вейерштрасса.

Она обсуждает с Миттаг-Леффлером вопрос о том, кому из математиков послать извещение о юбилее, и составляет список этих лиц. Позже, 30 декабря 1884 г., ей написал Георг Кантор, которому не понравился адрес, составленный кем-то из комиссии. И Ковалевская обсуждает с Миттаг-Леффлером вопрос о замене адреса, занимается рассылкой писем русским математикам для сбора средств на чествование.

Миттаг-Леффлер вовлекает Ковалевскую и в другие дела: вводит ее в состав редколлегии журнала «Acta mathematica», поручает во время каникул хлопоты о подписке на журнал и на дотацию в Петербурге и Берлине.

В письме от 29 апреля 1884 г. Ковалевская говорит о своих материальных затруднениях. В Петербурге у нее был дом, полученный ею, ее сестрой и братом в наследство от одной из тетушек Шуберт. Опекун, которого навязали наследникам дома, сдал его в аренду на 10 лет на очень невыгодных условиях.

В ответном письме от 4 мая 1884 г. Миттаг-Леффлер желает Ковалевской удачи в ее материальных делах: «Было бы хорошо иметь возможность спасти остатки Вашего состояния. В официальном положении, которое Вы теперь будете занимать, небольшое состояние ⟨...⟩ придаст Вам больший авторитет и престиж и значительно поможет Вам в тех предприятиях, которые мы хотели начать на пользу математике и женскому вопросу» [207, с. 41]. Когда Ковалевская собралась перевозить свою мебель в Стокгольм, Миттаг-Леффлер говорит, что если найдутся красивые вещи для украшения квартиры, то это поднимет авторитет Софьи Васильевны среди «слабых душ» общества.

В том же письме Миттаг-Леффлер выражает беспокойство по поводу того, что она уехала в Петербург, не сделав прививки от оспы, и просит ее сделать это в Петербурге: «Подумайте о том, что Ваша жизнь драгоценна не только для Ваших друзей и для науки, но также и для женского вопроса, и что быстрое и здравое решение этого вопроса зависит главным образом от Вас» [Там же].

Миттаг-Леффлер полон планов, которыми делится с Ковалевской. Он пишет, что будет прилагать свои усилия для учреждения большой премии «Acta mathematica», займется вопросом о создании капитала, рента с которого будет употребляться на оплату лекций знаменитых математиков, если они согласятся прочитать их в Стокгольме.

Заботясь о своем журнале, он просит Ковалевскую устанавливать научные контакты с молодыми берлинскими математиками: «Скажите, — добавляет он, — что Вы выступаете как редактор и приглашайте их побольше писать для нас» (письмо от 4 мая 1884 г.). Письмо он пишет в вагоне поезда, по дороге в Упсалу, куда едет для консультации с врачами относительно здоровья, и своего, и брата Фрица.

Ковалевская поехала в Берлин и пишет оттуда Миттаг-Леффлеру 29 мая 1884 г. о Вейерштрассе, что он сильно загружен, читает курс вариационного исчисления и занят премией Штейнера, который завещал 8000 талеров за работы по синтетической геометрии. Вейерштрасс предложил тему для премии, предполагая, что никто на нее не напишет. Однако была прислана масса работ, одна объемистее другой, и Вейерштрасс считает своим долгом все их прочесть, что потребует не меньше семи недель труда. Ковалевская ужасается: «Вот пример полезно проведенного времени!» [207, с. 44].

С Вейерштрассом Ковалевская не могла наговориться: столько новостей он ей сообщил о разных математиках и их работах. Многие из этих новостей она передает Миттаг-Леффлеру в длинном письме.

1 июня 1884 г. Ковалевская опять пишет Миттаг-Леффлеру, обсуждая с ним вопросы своего жилищного устройства в случае, если ее назначение может считаться окончательным. Она поздравляет своего друга с избранием его в почетные члены Кембриджского философского общества и передает поздравление Вейерштрасса, который ждет подробного письма от Миттаг-Леффлера.

Далее Ковалевская приводит соображения Вейерштрасса и свои сведения об известных им премиях и говорит, что Вейерштрасс обещал после письма Миттаг-Леффлера высказать ему свое мнение по вопросу о премии Оскара II.

Миттаг-Леффлер посылает Ковалевской письмо 2 июня 1884 г. с парохода «Оулу» по пути в Гельсингфорс. Его интересует вопрос о ее планах жизни в Стокгольме: возьмет ли она свою дочку с собой, какую выберет квартиру из тех, которые ей ищут Тереза Гюльден и Амелия Викстрём. О себе говорит, что перед отъездом выдержал еще одну тяжелую схватку с председателем Правления Высшей школы Линдхагеном по вопросу о профессорском окладе для Ковалевской. Около 12 июня будет рассматриваться вопрос об ассигновании суммы для Высшей школы, 15 июня, если все пойдет так, как рассчитывает Миттаг-Леффлер, Ковалевская получит официальное назначение. Назначение произошло 25 июня 1884 г., о чем было сообщено Миттаг-Леффлеру телеграммой в Мёрсиль.

Миттаг-Леффлер высоко ценил свою победу в деле привлечения Ковалевской в Высшую школу. В письме от 2 июня пишет: «Да, многого я, видит бог, не совершил в своей жизни, но <u>одно</u> действительно большое дело будет навсегда внесено в список моих заслуг. Дай только бог, чтобы у нас было достаточно сил и здоровья подольше работать вместе! Может быть, со временем мы сделаем немало!» [207, с. 48]. Ковалевская в то время писала статью о преломлении света в кристаллических средах, вводная же часть статьи должна быть написана Вейерштрассом. Миттаг-Леффлер торопил ее: «Заставьте Вейерштрасса дать Вам его статью, которая должна предшествовать Вашей ⟨. . .⟩ <u>Внимание!</u> Обе статьи должны быть переписаны набело латинским шрифтом». Дело в том, что Вейерштрасс писал готическим шрифтом.

Миттаг-Леффлер хочет, чтобы Ковалевская в Берлине познакомилась с жившими там шведскими деятелями, в частности с послом Швеции в Германии Д. А. Бильдтом. Она характеризует его как приятного светского человека, дает характеристику также членам его семьи.

Следующее письмо Миттаг-Леффлер посылает 5 июня из Гельсингфорса. Он рад, что наконец получил от нее долгожданную весть — по-видимому, письмо от 29 мая 1884 г. Он сознается, что был ребячлив, тревожась, как бы Софья Васильевна не заболела оспой, и поясняет: «Когда стоишь так близко к осуществлению давно лелеянной мечты, ради которой пришлось поработать с такой неиссякаемой энергией, как это было у меня по поводу Вашего назначения в Стокгольм, то тобой легко овладевает глубокое беспокойство, что в последний момент все рухнет» [207, с. 49].

Он пишет о своей жене: «Сигне расцвела и порозовела... Она укладывает волосы узлом на затылке, чтобы больше походить на даму, но ее друзья уверяют ее, что она похорошела и помолодела» [Там же]. Далее сообщает, что до начала июля она пробудет у своего отца в Финляндии, а затем приедет в Емтланд, в Средней Швеции, где они будут жить в крестьянской усадьбе около большого озера, окаймленного сосновым бором, с видом на снежные горы. До ее приезда он живет в отеле, в котором, по всей вероятности, будет шумно. Он поедет в Емтланд, как только узнает, что состоялось назначение Ковалевской. Ему необходимо отдохнуть в спокойной обстановке и полечиться. За последнюю неделю в Стокгольме у него был сильный приступ лихорадки, ужасный катар с бессонницей в течение трех ночей. Вероятно, он уедет из Гельсингфорса 11-го и будет в Стокгольме 13-го, чтобы не пропустить заседания, на котором будут избирать Ковалевскую.

Миттаг-Леффлер продолжает думать о премии имени Оскара II, ему понравился вопрос, предложенный Вейерштрассом о задаче n тел, он собирается писать учителю после назначения Ковалевской.

В письме из Берлина от 7 июня 1884 г. Ковалевская много пишет о Вейерштрассе, о том что она показала ему свою старую работу о приведении абелевых интегралов, и он сказал, что можно ее напечатать без изменений. Статья была опубликована в «Acta mathematica». Другую свою диссертационную работу (о кольце Сатурна) она хочет показать Гюльдену. Эта работа была напечатана в астрономическом журнале [195, с. 139—152].

Вейерштрасс читает статью Миттаг-Леффлера о новом доказательстве теоремы Лорана [36], и Ковалевская думает, что он воспользуется этим доказательством в своем курсе лекций.

Карл Рунге написал статью о разложении аналитической функции на сумму рациональных дробей, и Ковалевской кажется, что следует напечатать эту работу в «Acta mathematica» и сравнить с работой самого Миттаг-Леффлера по этому вопросу, «Предмет ее — величайшей важности, и два доказательства не будут лишними» — добавляет она. Статья Рунге была опубликована [170].

Помимо обсуждения премии журнала «Acta», Миттаг-Леффлер поднимает вопрос о создании фонда, на доходы с которого должны вознаграждаться выдающиеся иностранные математики, привлекаемые для чтения лекций в Стокгольме. Для этого Вейерштрасс согласился приехать в Стокгольм, но так и не собрался. Лишь позднее, в 1895 г., удалось пригласить Поля Пенлеве и в 1896 г. Вито Вольтерра в Высшую школу для чтения лекций.

Огорчает Миттаг-Леффлера вероятный отъезд Гюльдена в Германию, куда его приглашают в качестве астронома. Гуго Гюльден родился и учился в Гельсингфорсе, с 1863 по 1871 г. он работал в Пулковской обсерватории, а с 1871 г. стал директором Стокгольмской обсерватории и астрономом Королевской шведской академии наук. В 1879 г. он был избран в члены-корреспонденты Парижской, а в 1882 г. — Петербургской академии наук.

Гюльден был хорошим специалистом по небесной механике, и из-за того, что его не пригласили для чтения лекций в Высшую школу у него было чувство обиды. Поэтому Миттаг-Леффлер считает, что если пригласить Гюльдена читать лекции, хотя бы на первое время и бесплатно, то он останется в Стокгольме. Миттаг-Леффлер собирается предпринять дипломатические ходы, для того чтобы приглашение состоялось и Гюльден остался. Проект этот осуществился, Гюльден не уехал в Германию и начал лекции в Стокгольме. Но штатным профессором стал только в 1888 г.

Когда дочь Софьи Васильевны, Софья Владимировна Ковалевская, стала работать над разбором и переводом писем Миттаг-Леффлера, то она увидела, что обвиняли его в стремлении отстранить Гюльдена от Высшей школы неосновательно, он в этом нисколько неповинен.

Между прочим, в том же рассматриваемом нами письме Миттаг-Леффлер пишет о своем неразборчивом почерке. «Скажите мне откровенно, можете ли Вы читать мои письма? Я понимаю, что это должно быть трудно, так как мой почерк отвратителен» [3]. К тому же он начал писать Ковалевской письма на шведском языке, который пока еще Ковалевской не так знаком, как французский. В дальнейшем иногда он пишет по-французски.

Утверждение Ковалевской на должность до 15 июня, вопреки ожиданию Миттаг-Леффлера, еще не состоялось, и он пишет ей 15 июня 1884 г. из Стокгольма, куда приехал, чтобы проследить за утверждением. Он очень устал от поездки в Гельсингфорс. Но и в Стокгольме ему нет отдыха. Он пишет, что был сегодня у председателя Правления Высшей школы Линдхагена, что Комитет городских уполномоченных единогласно утвердил ассигнования для Высшей школы, а вопрос о Ковалевской будет обсуждаться 17 июня на заседании городских уполномоченных, где, без сомнения, все пройдет хорошо. Теперь дело должно рассматриваться на Совете семи [4], а затем в Правлении нужно добиться окончательного назначения. Собирать людей сейчас очень трудно, так как все на даче. Однако Миттаг-Леффлер приложил все усилия, чтобы добиться от профессоров обещания присутствовать на заседании. Назначение состоится не раньше конца месяца. Миттаг-Леффлер пишет даже, что очень зол на Линдхагена за эти ненужные проволочки. Он сейчас не может думать о математике, так как должен приложить все усилия, чтобы добиться назначения Ковалевской. И у него около 50 писем, на которые он должен срочно ответить. Он рад, что Пуанкаре прислал

---

[3] Почерк Миттаг-Леффлера действительно очень неразборчив, и Софье Владимировне, а также другой переводчице, Татьяне Ивановне Лебедкиной, которая занималась разбором шведских писем после смерти Софьи Владимировны, пришлось много потрудиться, чтобы прочитать их. Некоторые слова, оставшиеся неразобранными, расшифровал профессор К. О. Селениус из Упсалы.

[4] Советом семи (Sjumannanämden) называли организованную в 1879 г. группу деятелей, заботившихся об интересах Стокгольмской высшей школы, заменявшую в некоторых случаях Совет преподавателей. Профессор Селениус сообщил, что в Совет семи в течение ряда лет входили: Андерсон Андерс, Дальгрен Фредерик, Стенберг Стен, Гильям Густав, Сандер Фредерик, Стенберг Стен Юхан, Рубенсон Роберт, Миттаг-Леффлер Гёста, Брёггер Вальдемар, Варминг Эуген, Рюдберг Виктор, Леке Вильгельм, Петерсон Отто.

для журнала шестую статью, об интегрировании линейных однородных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами [165].

Заканчивает свое письмо Миттаг-Леффлер словами: «Но уже поздно, и я смертельно устал. Спокойной ночи! Напишите скорее горячо преданному Г. Миттаг-Леффлеру».

Ковалевская 19 июня пишет о своем огорчении в связи с тем, что он должен еще оставаться бог знает сколько времени в Стокгольме из-за ее назначения. Она просит отложить дело до осени и уехать немедленно в Емтланд.

Миттаг-Леффлер отвечает 21 июня. Ему удалось добиться назначения собрания Совета семи и принять решение: Ковалевская, Леке и Петерсон назначаются профессорами. Теперь остается собраться Правлению, которое, как свято обещает член Правления Угглас, состоится в течение недели, и он телеграфирует Ковалевской, как только ее назначение будет утверждено.

Поэтому Миттаг-Леффлер решил завтра выехать в Емтланд. Своей победой он удовлетворен и пишет: «Ведь действительно, никогда не удается ввести что-нибудь новое без упорной борьбы, а борьба, которую мне пришлось выдержать, все же ничтожна по сравнению с размером победы. Лишь бы природа дала нам обоим достаточно сил и здоровья, и я убежден, что мы в течение предстоящих пяти лет сделаем так много, что положение математики, равно как и наше собственное, как в Стокгольме, так и вообще на Севере, будет совсем иным, чем сейчас» [207, с. 58].

В том же письме Миттаг-Леффлер подробно пишет о своих хлопотах по поводу приглашения в Высшую школу Гюльдена. Он пишет, что его могут заподозрить в личной заинтересованности в уходе Гюльдена, и эта мысль приводит его в отчаяние. А заинтересованность такова: Гюльден сказал, что если уедет из Швеции, то Миттаг-Леффлер станет его преемником в страховом обществе «Тюле», в котором очень выгодно служить, так как там нет такой большой работы и ответственности, которые приходится Миттаг-Леффлеру нести в страховом обществе «Виктория». И хотя он очень нуждается в этих преимуществах, он составил план действий, чтобы удержать Гюльдена, о чем подробно пишет Ковалевской.

Миттаг-Леффлер продолжил письмо уже на борту

Емтланд

парохода «Северная Звезда» по пути в Сундсваль (порт на побережье Ботнического залива), он заканчивает рассказ о своих хлопотах по поводу Гюльдена. Ковалевскую он просит прислать биографические данные, чтоб дать правильные сведения о ней в газету «Ny Illustrerad Tidning» («Новая иллюстрированная газета»).

В том же письме есть еще одна приписка — из Эстерсунда. 24 июня 1884 г. Миттаг-Леффлер собирается послать свое письмо с поездом, который уйдет на следующее утро. Вместе с ним в Емтланд едут фрёкен Польман и Викстрём и фру Польман. Миттаг-Леффлер описывает местную природу: «Здесь прекрасная и величественная природа. Город расположен у озера Стуршен, самого красивого озера Швеции. На противоположном берегу виден ряд покрытых снегом скал. Похоже на Монблан с набережной Монблан в Женеве. Но здесь, кроме того, северное небо. Сейчас 11 часов вечера, светло, как днем, и на всем лежат странные, фантастические краски, придающие ландшафту оттенок чего-то нереального, как в сновидениях. Вам непременно надо когда-нибудь это увидеть, здесь своеобразная и чарующая природа».

Ковалевская посылает Миттаг-Леффлеру письмо из Берлина 26 июня 1884 г. в Стокгольм, откуда 28 июня его пересылают в Емтланд, Мёрсиль. Она от-

Емтланд

вечает на интересующие Миттаг-Леффлера вопросы по пяти пунктам, которые все, кроме пункта 3, связаны с Вейерштрассом.

В первом пункте Ковалевская сообщает, что Вейерштрасс прочитал статью Миттаг-Леффлера о теореме Лорана [36]. Большую же работу «Об аналитическом представлении моногенных однозначных функций одного независимого переменного» [35] только начал читать. Это для него трудно, так как он французский текст читает не так легко, как немецкий, а главное — теперь он находится в состоянии хронической усталости: он читает 6 часов лекций в неделю и, кроме того, двухчасовую лекцию на семинаре раз в две недели. Но он намерен изложить содержание большого мемуара Миттаг-Леффлера (в нем 79 страниц), когда подойдет к изложенным в нем вопросам.

Кронекер, по словам Вейерштрасса, более чем сдержанно говорил об этой статье Миттаг-Леффлера. С некоторой резкостью он заметил, что Миттаг-Леффлер «очевидно, потратил много труда, чтобы связать исследования Кантора с предметом, с которым они не имеют ничего общего».

Остановимся и на последнем пункте письма Ковалевской, в котором она пишет, что Вейерштрасс совершенно серьезно обещал ей приехать будущей осенью в Стокгольм, чтобы прочитать шестинедельный курс лекций. Он отказывается от 5000 крон вознаграждения, но, может быть, согласится на оплату его проезда и расходы по пребыванию в Стокгольме. Он бы приехал и в этом году, но мешает болезнь старшей сестры Клары, что заставляет его поехать в Швейцарию. «В сущности, Вейерштрасс с гораздо большим нетерпением ждет моего назначения, чем я сама»,— добавляет Софья Васильевна.

Миттаг-Леффлер пишет Ковалевской 30 июня 1884 г. из Мёрсиля. Он получил вчера телеграмму Угласа об ее избрании и очень радуется этому. Он благодарит Ковалевскую за ее сведения о Гурвице, Краuере и Вильтхейсе и собирается написать Гурвицу, о работах которого Софья Васильевна очень хорошо отозвалась. В конце письма он просит: «Постарайтесь оказать мне услугу — помирите меня с Кронекером. Не моя в том вина, что исследования Кантора необходимы для теории функций» [207, с. 62].

В письме Миттаг-Леффлеру от 1 июля 1884 г. Ковалевская выражает радость по поводу своего избрания и пишет: «Теперь я от всей души желаю обладать силами и способностями, необходимыми для того, чтобы выполнить свою задачу и быть достойной помощницей во всех Ваших делах. Теперь я так верю в будущее и так счастлива, что буду работать вместе с Вами! Какое счастье, что мы встретились в жизни!» [207, с. 64].

Ковалевская сообщает берлинскую научную новость: на последнем заседании Академии наук Л. Фукс прочитал свою работу, содержание которой изложили Ковалевской Кронекер и частично сам Фукс. Он нашел необходимые и достаточные условия того, чтобы нелинейное дифференциальное уравнение обладало основным свойством линейных уравнений: чтобы особые точки его интегралов не зависели от начальных данных (впоследствии работа Фукса появилась в печати [133]).

Затем Ковалевская пишет о своем посещении Кронекера, у которого пробыла целый день. Он был чрезвычайно любезен. Просил ее передать Миттаг-Леффлеру, что в будущем году должен выйти 100-й том журнала Борхардта, т. е. «Journal für die reine und angewandte Mathematik», роскошно изданный. Кронекер надеется, что все выдающиеся математики, в том числе и Миттаг-Леффлер, пришлют свои работы в журнал.

Сам он собирается передать в «Acta» две статьи, одна из которых касается абелевых функций. О другой статье Ковалевская не пишет. (Из письма к ней Кронекера видно, что он хотел подвергнуть критике теорию Кантора. Статья Кронекера в «Acta» не появилась.)

Во время беседы Кронекер, пишет далее Софья Васильевна, все время говорил «наш друг г-н Миттаг-Леффлер», с большим восхищением отзывался о красоте и изяществе Сигне. Но косвенным образом он «не мог удержаться, чтобы не прибавить каплю дегтя ко всему этому меду»: он ничего не говорил о работе Миттаг-Леффлера «Об аналитическом представлении моногенных однозначных функций одной независимой переменной» [35], в которой Миттаг-Леффлер пользуется идеями Кантора. Ковалевская отмечает, что, говоря о статьях Рунге[5], Кронекер «рассыпался в сожалениях по поводу молодых математиков, которые расточают свои прекрасные способности, посвящая их не поистине полезным и солидным темам, а не имеющим никакой ценности общим вопросам!» [207, с. 65]. Далее Ковалевская сообщает о деле Гюльдена: оно еще не закончено, в Берлине министр финансов еще не дал согласия на его условия. Софья Васильевна радуется этому: это дает надежду сохранить Гюльдена в Стокгольме. Она поддерживает общее мнение о том, что в настоящее время имеется немного астрономов, которые стоили бы его.

Ковалевской захотелось поехать в Емтланд, красоты которого так хорошо описал Миттаг-Леффлер. В письме от 4 июля 1884 г. он говорит уже об окрестности селения Мёрсиль, вблизи которого он поселился (на конверте адрес: Скалстуган, станция Дюфед, Емтланд): «Наконец я нашел мой горный рай. Он расположен на большом горном плато, которое отделяет Швецию от Норвегии. Природа восхитительна. Снежные горы окаймляют горизонт. Есть реки, большие озера и рощи полярных берез. Имеются большие стада оленей с их владельцами лопарями. Я думаю, что я был бы здесь очень счастлив, если бы только Сигне скоро приехала».

---

[5] По-видимому, Кронекер видел статьи Рунге [170] и [171], посвященные теории аналитических функций, в рукописи, так как эти статьи появились в журнале «Acta mathematica» только в 1885 г.

Почта приходит один раз в неделю, и он должен спускаться за нею в Мёрсиль.

Миттаг-Леффлер, извиняясь, что вмешивается в дела Ковалевской, дает ей советы относительно квартиры, мебели, служанки, «за которую придется отвечать перед законом и перед богом». Рекомендует ей хорошенько овладеть шведским языком, чтобы читать на нем лекции *правильно*. «Вы можете говорить по-немецки неправильно, но для шведского языка это непозволительно... Вы знаете, что этой зимой Вы будете работать до крайнего предела Ваших сил» [207, с. 63].

Через неделю, 10 июля, Миттаг-Леффлер опять пишет Ковалевской и выражает беспокойство, что не получает ответа на свои письма и телеграммы. Он настоятельно просит ее сообщить сведения о себе для газеты «Ny Illustrerad Tidning», чтобы он мог написать статью о ней. Иначе в газете бог знает что напечатают, да еще припишут сведения ему. «Не говорите,— добавляет он,— что газетные сообщения не имеют значения. Это, быть может, верно для Германии, но совершенно не верно для Швеции [6]. Подумайте также, что Вы оказываете существенную услугу нашему университету и женскому вопросу, позволяя говорить о себе лишь в надлежащем тоне» [Там же, с. 64].

Остается загадкой то обстоятельство, что Ковалевская дала неправильные сведения о себе в письме от 1 июля 1884 г.: родилась в 1853 г., вышла замуж в 1869 г. и в том же году была принята студенткой по математике в Гейдельберге, в 1871 г. приехала в Берлин, где частным образом занималась у Вейерштрасса до 1874 г.

Можно объяснить уменьшение возраста женским кокетством. Но интересно, что она изменила и день своего рождения, давая сведения для «Acta mathematica», где указано, что она родилась 15/27 декабря 1853 г. (вместо 3/15 января 1850 г.). Такая дата приводится в Указателе имен 1—10-го томов «Acta mathematica» (Т. 10, с. 364). В Указателе томов 11—20 эти сведения исправлены.

Во всяком случае, Миттаг-Леффлер получил сведения, и они были достаточны и для него, и для газеты.

13 июля по дороге из Сторлиена в Эстерсунд для

[6] В шведских газетах существовал раздел «Högskolegrälet» (Руготня в Высшей школе) [151, с. 87]. Обычно речь шла о разногласиях между профессорами и Правлением Высшей школы.

встречи с женой Миттаг-Леффлер пишет, что они останутся в горах до 8 августа, а потом поедут на морские купания в Норвегию. Ковалевская также в течение августа должна позаботиться о своем здоровье и побыть в горах. Он просит сообщить, когда она уедет из Берлина.

Софья Васильевна написала Миттаг-Леффлеру о работе Рунге о разложении аналитической функции в ряд по рациональным функциям, и Миттаг-Леффлер старается сопоставить решение Рунге со своим. Своей целью он считает не столько доказательство общих абстрактных теорем, сколько желание дать формулы практического значения для представления функций. Он пишет: «В формулах Пуанкаре есть примеры наиболее общих функций, которые я рассматривал, и я уверен в возможности разложения всех этих функций при помощи моих формул». Зимой он надеется написать работу для Кронекера и доказать ему, что его, Миттаг-Леффлера, теоремы не являются абстракциями «без мяса и без цели»... «Но мои силы, увы, так слабы, и бог весть, позволит ли мне мое здоровье работать»,— добавляет он.

Относительно Кронекера он пишет, что тронут его благосклонным отношением. «Я знаю его слабости,— говорит Миттаг-Леффлер,— но я его искренне люблю и глубоко восторгаюсь его гением и проницательностью его ума». Он собирается испросить для Кронекера командорский крест Полярной звезды, после выхода 100-го тома «Journal für die reine und angewandte Mathematik». Но ко времени появления этого тома отношения между ними совсем испортились и об ордене уже не было речи.

Миттаг-Леффлер пишет о своей сестре Анне-Шарлотте, что она стала восторженной социалисткой после поездки в Лондон. Он считает, что это очень хорошо, «если только это не повредит ее литературной деятельности и если она не начнет писать, отдавая предпочтение социальным вопросам перед художественными».

Сигне, наконец, вернулась из Финляндии. Миттаг-Леффлер мог бы провести с нею все лето в Финляндии, но он не хочет этого главным образом из-за семьи матери Сигне. Здесь он описывает перипетии с наследством Сигне, о которых мы уже рассказывали раньше.

18 июля Ковалевская узнала о смерти отца Миттаг-

Леффлера Юхана Олофа Леффлера. Это было неожиданным несчастьем, разрушившим планы Миттаг-Леффлера. Он вернулся в Стокгольм.

Три последующих письма Миттаг-Леффлера — от 30 июля, 31 июля и 2 августа 1884 г.— посвящены в основном приглашению Софье Васильевне приехать на юг Норвегии, в Ханкобад (около порта Фредрикстад в заливе Бохус), где отдыхали супруги Миттаг-Леффлер.

Но Софья Васильевна раздумала ехать в Норвегию, она поселилась в Сёдертелье, недалеко от Стокгольма, и пишет оттуда 12 августа 1884 г., что ей очень важно сосредоточиться и подготовиться к лекциям. Она довольна, что может провести несколько недель в полном одиночестве после Берлина, где была занята работой и «всякого рода математическими мечтаниями». У нее столько скопилось мыслей в голове, что надо хорошенько все обдумать.

Из Сёдертелье Ковалевская посылает Миттаг-Леффлеру свое первое письмо на шведском языке. Миттаг-Леффлеры захотели также пожить некоторое время в Сёдертелье, и Ковалевская передала одной их родственнице просьбу подыскать для них помещение.

Доктор Баклунд навестил Ковалевскую и рассказал, что Правление Высшей школы не приняло денег на жалованье профессора Гюльдена под тем предлогом, что совершенно бесполезно получать деньги на 5 лет. (Мы уже говорили, что Гюльден был утвержден штатным профессором лишь через четыре года после того, как начал читать лекции.) В настоящее время, пишет Ковалевская, профессор Гюльден находится у жены, которая больна, как предполагают, скоротечной чахоткой. (К счастью, Тереза Гюльден скоро поправилась.)

В письме от 26 августа Ковалевская подробно описывает квартиры в Сёдертелье, которые она вместе с их родственницей фрёкен Темптандер осматривала для Миттаг-Леффлеров, собиравшихся по возвращении из Норвегии пожить в окрестностях Стокгольма.

В этом же письме она сообщает Миттаг-Леффлеру, что первое заседание Совета преподавателей Высшей школы состоится 3 сентября. Ковалевская была на этом Совете и в тот же день отправила Миттаг-Леффлеру отчет. На собрании было лишь пять человек: Брёггер, Леке, Петерсон, Рубенсон и Ковалевская. Первая запись студентов будет происходить десятого, вторая — 13 сентября, как того и желал Миттаг-Леффлер.

Ковалевская огорчена изменением его планов: он с женой не приедет в Сёдертелье. Судя по надписи на конверте, они гостят у графа Густава Спарре в Южной Швеции, в Альмнесе, близ озера Веттерн. (Фру Спарре была крестной матерью Миттаг-Леффлера.)

Ковалевская огорчена тем, что Вейерштрасс не присылает окончательной редакции своей части статьи, которая должна предшествовать изложению Ковалевской теории преломления света в кристаллах. Он живет где-то под Мюнхеном. «Невозможно представить себе, насколько он обленился за последнее время, особенно когда дело идет о публикации чего-нибудь. Я думаю, что это зависит от его здоровья»,— пишет Ковалевская [207, с. 73].

В письме от 7 сентября Ковалевская продолжает уговаривать Миттаг-Леффлера приехать в Сёдертелье и пожить до конца сентября: здесь воздух свежий и чистый, гораздо лучше, чем в Стокгольме. Карл Рунге собирается приехать из Англии в Стокгольм 10 сентября, он очень интересный человек и энтузиаст математики. Хорошо было бы, чтобы он пожил вместе с ними в Сёдертелье. (Рунге приехал и осенью был в Стокгольме.)

В октябре 1884 г. Ковалевская приступила к чтению лекций. В записке без даты она посылает Миттаг-Леффлеру свою лекцию с просьбой просмотреть ее. Вероятно, продолжая начатый разговор, она пишет, что статья Пуанкаре, рассердившая Кронекера, по-видимому, та, которая помещена в «Comptes rendus». Очевидно, эта статья [165], в которой Пуанкаре применяет понятия из теории множеств Кантора. Кантор опубликовал ряд основополагающих статей в «Mathematische Annalen» (1879—1883), перепечатанных, как мы уже говорили, в «Acta mathematica» на французском языке [124].

Дальше в «Переписке С. В. Ковалевской и Миттаг-Леффлера» идут письма и записки, связанные с визитом Ковалевской к королю Оскару II. Затем переписка относится к зимним каникулам, которые Ковалевская проводила в Берлине, в то время как Миттаг-Леффлер путешествовал: Берлин — Лейпциг — Рим — Париж.

Из Лейпцига он пишет Ковалевской 14 декабря: в начале декабря был в Берлине, где виделся со многими немецкими математиками. Теперь он не успевает написать каждому, кто оказывал гостеприимство им с женой и просит Ковалевскую передать им привет, особенно Вейерштрассу, добавляя: «Он был и остается крупнейшим современным математиком не только по глубине и широте тех проблем, которые его занимают, но и той огромной силе, с которой он умеет преодолевать величайшие затруднения, но он велик и как человек» [207, с. 74]. Ковалевская должна передать привет также Кронекеру, Фуксу, г-же Борхардт, Бильдту и физику Г. Ханземану (он не занимал официального поста, но дружил с математиками).

Перед поездкой в Лейпциг Миттаг-Леффлер заехал в Галле к Кантору, с которым было интересно поговорить, у него необыкновенно много идей. Но он находился в состоянии сильного раздражения. «Он страдает тем же недостатком, что и Гюльден,— говорит Миттаг-Леффлер,— он непременно хочет быть признанным другими и не довольствуется тем удовлетворением, которое должны бы ему давать его собственные открытия. Если бы он был удовлетворен сам, то и признание других скоро выпало бы на его долю. Всегда ведь труднее всего получить то, чего больше всего хочешь добиться» [207, с. 74]. Но Миттаг-Леффлер считает несправедливым, что Кантор вынужден довольствоваться окладом в 3500 марок, в то время как, например, Фукс получает 11 000. Г. Кантор собирается навестить Ковалевскую в Берлине, и Миттаг-Леффлер думает, что она получит удовольствие от общения с ним. Ковалевскую он просит описать ему обед у Бильдтов и заполучить статью от Гельмгольца для «Acta mathematica». Она должна сказать Гельмгольцу, что Бельтрами уже написал для «Acta». (Статья Бельтрами была напечатана в 3-м томе «Acta mathematica», а Гельмгольц ничего в журнале не опубликовал.)

Из Рима Миттаг-Леффлер пишет 24 декабря. Он просит Ковалевскую написать в Париж ее зятю Жаклару, чтобы он нанял комнату для Миттаг-Леффлера с женой в отеле «Лувр» на четвертом или пятом этаже стоимостью около 10 франков в сутки.

Вечер и целый день Миттаг-Леффлеры пробыли в Павии, где к ним был очень внимателен итальянский математик Казорати, пригласивший их на интересную экскурсию.

В Риме Миттаг-Леффлер встретился со многими математиками — Бриоски, Бетти, Дини, Кремона, Черутти, Гучча. Не удалось повидать Бельтрами. Недавно в Италии был Г. А. Шварц, он всем рассказывал, что якобы Ковалевская — его ученица. «Я сейчас устал и хочу спать. Мы все время в движении»,— пишет Миттаг-Леффлер. Он не забывает и в пути о своих делах и просит Ковалевскую всячески побуждать Вейерштрасса, чтобы его вопросы на премию пришли в Париж около 3 января. Миттаг-Леффлер пробудет там до 6-го или 7-го, он должен получить вопросы также от Эрмита.

Ковалевская пишет Миттаг-Леффлеру в Рим, в посольство Швеции, 25 декабря 1884 г. Она начинает с насмешливого описания обеда у посланника Швеции в Берлине Бильдта, где присутствовало 50 человек, все графы и бароны. Накануне она была у Кронекеров, где собрались математики, молодые и старые. Завтра будет большой обед у г-жи Борхардт, послезавтра — у Ханземана. Завтра же она собирается сделать десяток визитов, в частности к Кирхгофу, Сименсу и Гельмгольцу.

Несмотря на такой рассеянный образ жизни (правда, всюду она должна пользоваться случаем, чтобы выполнить поручения Миттаг-Леффлера), она не забывает заниматься математикой. По ее просьбе Хеттнер и Кноблаух, ученики Вейерштрасса, принесли ей массу заметок и бумаг, касающихся алгебры, и она надеется подготовиться в Берлине к предстоящим лекциям. В последних строках письма она говорит, что Вейерштрасс торжественно обещал ей на каникулах заняться своей частью статьи.

В этом длинном письме Ковалевская развивает грустные мысли по поводу ухода людей из жизни. Эти мысли навеяны тяжелой болезнью ее сестры.

В следующем письме она подробно рассказывает о задаче, над которой много думала в последнее время, о решении системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt}=f_2(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dt}=f_3(x, y, z), \qquad (*)$$

где f_1, f_2, f_3 — однородные многочлены второй степени относительно x, y, z. Для частного случая, когда имеют место некоторые соотношения между коэффициентами этих полиномов, Ковалевская нашла решение системы в виде линейных функций от отношения сигма-функций. Исследование общего случая показало Ковалевской, что система функций x, y, z, являющаяся решением заданной системы уравнений (*), может допускать только полюсы первого порядка или существенно особые точки.

В конце письма Ковалевская пишет, что она говорила с Кронекером о бюсте Вейерштрасса к его юбилею. Кронекер нашел скульптора, который согласен сделать мраморный бюст за сумму не менее 1200 марок. «Если собранная сумма окажется недостаточной (что будет более чем стыдно), то придется ограничиться барельефом» [207, с. 79]. Вейерштрасс возвратился в Берлин. Но он еще ничего не написал по теме на премию. «Что мне с ним делать, чтобы заставить его сдержать свое обещание?» — спрашивает она.

Миттаг-Леффлер пишет 22 января 1885 г. в Берлин из Гамбурга, где он был проездом, умоляя Ковалевскую привезти вопросы Вейерштрасса для премии. «Жестоко мучить его, но как в его интересах, так и в моих, чтобы я сейчас получил их». Он может потом прислать поправки и изменения, но сейчас необходима предварительная редакция. «Навещайте его каждый день, приставайте непрерывно, плачьте и стенайте, если это понадобится, но не бросайте дела» (письмо от 22 января 1885 г.). Он напишет ей еще из Копенгагена, куда собирается поехать.

Каникулы в Высшей школе были длинными, но наконец Ковалевская и Миттаг-Леффлер весной 1885 г. вернулись в Стокгольм, стали читать свои курсы лекций. Сохранилась записка Миттаг-Леффлера от 12 апреля 1885 г., в которой он напоминает Ковалевской, что должен просмотреть ее лекцию к завтрашнему дню.

Прекратив чтение лекций 8 мая, Миттаг-Леффлер уже уходит в отпуск из-за нездоровья. Он уезжает в Швейцарию для отдыха и лечения, Ковалевская пишет ему в записке без даты [207, с. 81]: «До свидания, дорогой Гёста. Желаю Вам счастливого пути. Самое главное пусть восстановится Ваше здоровье. Прошу Вас писать так часто, как только Вы сможете. Как только приеду в Петербург, я напишу Жаклару по поводу Пиренеев. Спасибо за все. Преданная Вам Соня».

Яльмар Хольмгрен

Миттаг-Леффлера интересовали водные курорты Пиренеев, о которых имелись сведения у зятя Ковалевской Жаклара. Он прислал такую справку Ковалевской, а она послала ее Миттаг-Леффлеру.

Весной 1885 г. тяжело заболел профессор механики в Высшей школе и в Высшей технической школе Яльмар Хольмгрен. Встал вопрос о его замене. Миттаг-Леффлер предложил Ковалевской читать лекции по механике в Высшей школе. Она согласилась на один год. Но Хольмгрен умер и нужен был профессор высокой квалификации как для Высшей, так и для Технической школы.

На пароходе «Гаутиод» 11 мая 1885 г. Миттаг-Леффлер написал Ковалевской письмо, полное беспокойства о делах Высшей школы, с перечнем заданий и наставлениями Ковалевской. «Прежде всего, не откладывая ни на один день, надо, чтобы был составлен диариум, т. е. расписание занятий. Срочно надо лично передать диариум А. Линдхагену и поговорить с ним о механике, о которой уже есть договоренность. «Пойдите к нему около половины пятого, а если не застанете его, то пойдите и на следующий день, и вообще, продолжайте, пока не найдете его. *Энергия!*» [207, с. 81].

Затем, пишет он далее, нужно разыскать профессора физики Р. Рубенсона, организатора метеорологической службы в Швеции. Если его нет дома, то искать его надо в Метеорологическом институте. Он должен отвести Ковалевскую в институт профессора Э. Эдлунда, т. е. в основанный им физический институт Шведской академии наук. Не откладывать разговора о механике *ни на один день*! Если уже теперь будет составляться расписание лекций, то Миттаг-Леффлер читает в среду от половины первого до половины второго (а Ковалевская с 11 до 12 часов) дифференциальные уравнения, а в субботу в такие же часы — элементы высшей арифметики.

Последнее поручение — она должна сейчас же написать французскому математику Ж. Перотту и попросить его прислать Миттаг-Леффлеру в Монтрё лекции по теории чисел.

В письме содержатся советы. Во-первых, справиться, не лучше ли ей, возвращаясь домой из Германии, ехать пароходом через Любек — цена снижена до 40 крон и пароходы превосходные. Во-вторых, она не должна пропустить празднества в честь Линнея (по-видимому, в связи со 150-летием труда Линнея «Система природы»). «Надо, чтобы Вас видели там», — добавляет он.

Когда Миттаг-Леффлер писал письмо, пароход находился в районе ненастной, дождливой погоды. Он говорит, что он так устал и чувствует такую слабость, что не знает, как доберется до Монтрё. В конце письма такие слова: «Сердечное спасибо за верную товарищескую работу в истекшем учебном году. Желаю нам снова встретиться здоровыми и бодрыми» [207, с. 82].

Друзья решили нумеровать свои письма и за лето написали не менее чем по 14 писем каждый. В первом занумерованном письме Ковалевская дает отчет об исполнении поручений Миттаг-Леффлера. Она написала значительную часть диариума и хочет поймать Бендиксона, чтобы он поправил его, после чего она пойдет к Линдхагену. Рубенсона она не застала дома, а в Метеорологическом институте ей не захотелось его искать.

Далее, состоялось собрание профессоров для обсуждения вопроса, следует ли послать депутацию для возложения венка у статуи Линнея. В качестве представителей ботанической и зоологической наук были избраны профессора Варминг и Леке.

В письме от 19 мая 1885 г. Миттаг-Леффлер пишет, что И. Е. Варминг, датский ботаник, работавший в Высшей школе Стокгольма с 1882 по 1885 г., при возложении венка ничего не произнес. Он собирался переехать в Данию (и действительно уехал в том же 1885 г., стал ректором Копенгагенского университета), а в Дании, по словам Миттаг-Леффлера, не признают Линнея, потому что он швед.

О курсах, которые будет читать Миттаг-Леффлер, Ковалевская сообщила, но расписание еще не может быть установлено в связи с переменой помещения.

Ковалевская рассказывает, как она была на обеде у директора банка Генрика Пальме, где «разговор почти все время вращался вокруг безнравственности новой пьесы Анны-Шарлотты» [7]. В особенности раздражен был хозяин дома, и у Ковалевской возникло подозрение, нет ли у него личных причин для плохого мнения о пьесе.

В одном из последующих писем Миттаг-Леффлер подтверждает ее подозрения. Он говорит, что в Швеции еще никогда не совершали такого опасного покушения на имущие классы, как это делает Анна-Шарлотта в своем произведении.

Следующее письмо Миттаг-Леффлера от 17 мая 1885 г. из Террите, Кантон Во (Швейцария), где он отдыхал вместе с Сигне. По дороге они заезжали в Гейдельберг и посетили Кёнигсбергера. Он произвел на Миттаг-Леффлера хорошее впечатление. Вероятно, рано или поздно Кёнигсбергер будет работать в Берлине. Хотя, возможно, он не из самых талантливых математиков, но у него личные и общественные качества такие, которые необходимы для работы в Берлине. Он в дружбе с Кирхгофом и Гельмгольцем, работавшими раньше вместе с ним в Гейдельберге, и восстановил дружбу с Фуксом, который провел с ним неделю на каникулах.

В Гейдельберге рассказывали о побывавшем там в прошлом году Андерсе Сёдербломе, преподавателе математики в Упсале, слушавшем лекции Миттаг-Леффлера и Ковалевской. Сёдерблом пренебрежительно говорил о деятельности Миттаг-Леффлера, считая его старания эксцентричными, сложными и недостижимыми.

Несколько часов Миттаг-Леффлер с Сигне провел в Берне и успел повидаться там с профессором Морицем Штерном, уже вышедшим в отставку, и Людвигом Шлефли. Его Миттаг-Леффлер оценил как выдающегося человека, с ним интересно беседовать.

Пока еще Миттаг-Леффлер плохо себя чувствует, кашляет, не спит. Но он надеется на целительное действие здешнего воздуха.

Ковалевской он дает наставление, как следует поступать в шведском обществе: перед отъездом из Стокгольма она обязательно должна послать свои визитные карточки, чтобы попрощаться со своими коллегами и

---

[7] По-видимому, пьеса «Каким образом делать добро».

их женами, а также с другими знакомыми, приглашавшими ее. Уггласу надо сделать личный визит, иначе он обидится, если она уедет, не повидавшись с ним. Он ведь теперь их начальник — председатель Правления Высшей школы.

Но Ковалевской есть о чем и поговорить с Уггласом: она нашла в бумагах своего деда его переписку с матерью Угласа, когда оба были еще молодыми; мать Уггласа даже приложила к письму план и описание своего дома.

Миттаг-Леффлер и в Швейцарии не забывает о своих стокгольмских делах. Он спрашивает, ходила ли Ковалевская к Линдхагену, Рубенсону и Эдлунду. Беспокоит его и вопрос о кафедре механики. Он вспомнил об итальянских математиках как кандидатах на кафедру в университете и в Высшей технической школе Стокгольма. Зять Казорати Маджи произвел на Миттаг-Леффлера хорошее впечатление, и он просит Софью Васильевну посмотреть статьи Маджи, разыскать которые ей поможет Энестрём. Пожалуй, стоит связаться по поводу кандидатов с Бельтрами и Бетти. В Италии механика занимает большое место, а преподаватели оплачиваются плохо. Впрочем, профессоров там не хватает, поэтому на итальянцев надежды мало.

Миттаг-Леффлер думает также о молодом Шеринге, Карле, преподавателе математики в Страсбурге (старший Шеринг, Эрнст Христиан, астроном и математик). Он зять Мальстена, знает немного шведский язык и вообще хороший человек. Миттаг-Леффлер просит Ковалевскую посмотреть его работу «О среднем арифметико-геометрическом» [176] и другую, по математической физике. Ковалевская ответила, что, по ее мнению, первая из этих работ ничего не стоит.

В этом же письме Ковалевская говорит, что советник юстиции Линдхаген очень любезно разговаривал с нею и предлагал заменить Хольмгрена по механике в осеннем семестре.

Миттаг-Леффлер в следующем письме, от 24 мая, замечает, что уважение Линдхагена к Ковалевской особенно укрепилось после ее лекции по элементарной алгебре.

По поводу чтения Ковалевской лекций по механике Миттаг-Леффлер дает ей ряд советов. Хольмгрен на редкость хороший лектор. Лундквист в Упсале также читает курс механики очень хорошо и знает современную литературу. Чтобы не делалось неблагоприятных для Ковалевской сравнений, нужно читать на другие темы и применять более интересный математический аппарат. Но для этого нужно знать, что и как читали эти лекторы. Сведения о лекциях Хольмгрена она может получить у Линдхагена, а о Лундквисте ей даст точную справку Бендиксон. Далее идут советы о расписании занятий, о том, что к лекциям нужно подготовиться в течение лета и т. п.

В ряде писем обсуждаются кандидаты на курс механики: Герц, Гурвиц, Рунге. У каждого из них свои большие достоинства. Но в конце концов в Высшую техническую школу был принят кто-то без ведома Миттаг-Леффлера, а в Высшую школу на один год назначили Ковалевскую.

Софью Васильевну часто навещал Энестрём, и они стали друзьями. (Энестрём знал русский язык и любил поэзию. Он перевел на шведский язык стихотворение Добролюбова «Пускай умру — печали мало» и собирался переводить какую-то поэму Никитина.)

Густав Энестрём, секретарь редакции «Acta mathematica», был историком математики, работал адъюнктом библиотек университета в Упсале (с 1875 г.), затем Королевской стокгольмской библиотеки (с 1879 г.). С 1884 г. он издавал историко-математический журнал «Bibliotheka mathematica».

В начале июня Ковалевская уехала в Россию, а Миттаг-Леффлер в Швейцарии переехал из Террите в Беатенберг. В Террите становилось слишком жарко, в Беатенберге же, в горах, покрытых густыми облаками, холодно — в комнате 10° Цельсия.

Миттаг-Леффлер любил и умел описывать природу. Вот как, например, он описывает переход, совершенный им с Сигне, большей части Ропского ледника: «Природа неописуема, дикая и величественная, и наслаждение ею еще увеличивается в высочайшей степени вдыханием разреженного, свободного от бактерий, холодного, бодрящего воздуха... Здесь в Беатенберге тоже очень красиво, и отсюда великолепный вид на Бернер Оберланд и особенно на Юнгфрау» [207, с. 97]. В другом письме он описывает «жутко привлекательное зрелище» разразившейся грозы.

Сигне собирается уехать к отцу. Миттаг-Леффлер понимает, что часть лета она должна провести с отцом, но не представляет себе, как сможет обходиться без нее.

После отъезда Сигне Миттаг-Леффлер один поднимается на вершину Нидер-Хорн. Туда было трудно подняться, но зато открылась прекрасная панорама Бернер Оберланда, а за ним виден Монблан и другие вершины. Миттаг-Леффлер всегда любил такие «странствия в одиночестве на лоне природы, величие которой уже не действует так подавляюще, когда смотришь на нее сверху. Глубоко чувствуешь тогда все ничтожество земной суеты и ощущаешь себя ближе к вечности, ясности и истине»,— пишет он [207, с. 101].

В письмах происходит обмен мнениями между Миттаг-Леффлером и Ковалевской о прочитанных книгах. Ковалевскую заинтересовали философские взгляды Льва Толстого, и ей захотелось написать о них в какой-нибудь шведском журнале. В книге Толстого наряду с замечательными страницами встречаются отличающиеся почти детской наивностью, — замечает она. Она мечтает о том, чтобы познакомиться с Толстым, но понимает, что это нелегко и что звание ученой женщины в его глазах вряд ли является хорошей рекомендацией.

Миттаг-Леффлер проводит сравнение между Толстым и Ибсеном. Философия Толстого его не привлекает; у Ибсена нет никакой философии, тогда как Толстой имеет очень ярко выраженное позитивное мировоззрение, которое к тому же в своих основных чертах почти совпадает с типичным русским мировоззрением, — говорит он (письмо от 21 июня 1885 г.). Ибсен является более универсальным, но он аристократический писатель, и ни в какой стране никто не будет понимать его, кроме высшей интеллигенции. Толстой же вряд ли получит широкое признание вне России, — думает Миттаг-Леффлер.

Сигне уехала в Гельсингфорс, а Миттаг-Леффлер отправился в Интерлакен, на курорт Бад Ленк для лечения носоглотки.

Миттаг-Леффлер начинает думать о своих лекциях в предстоящем учебном году. Возможно, осенью он будет читать теорию чисел и элементарную алгебру, а весной — приложения анализа к теории чисел и дифференциальные уравнения. Сама теория чисел его мало привлекает, но он ценит ту ее часть, где наиболее глубокие ее положения выступают как следствия аналитических формул. К сожалению, из-за плохого состояния здоровья он не решается и не может много работать.

Теперь он изучает лекции Кронекера по теории чисел (они были опубликованы позднее в книге [149]) и пришел к заключению, что исследования Дирихле о предельных значениях ряда величин из области теории чисел невозможно сделать вполне точными без применения идей Вейерштрасса и Кантора, а сам Кронекер неточен.

Миттаг-Леффлер сообщает печальную новость: скончался молодой талантливый математик, ученик Кантора, Карл Шееффер, приват-доцент Мюнхенского университета.

Миттаг-Леффлер мечтает о новом мероприятии — проведении Ковалевской в академики. В Беатенберге 23 июня 1885 г. он узнал, что скончался профессор Лундского университета, академик Экелунд. Освободилось место академика, и Миттаг-Леффлер уже написал письмо Мальмстену с просьбой поддержать выдвижение Ковалевской и сейчас же сообщить об этом секретарю Академии наук Линдхагену. Однако ставится непременное условие: к осени Ковалевская должна стать шведской подданной. Действовать надо быстро.

Если Ковалевская войдет в Академию наук, то они вдвоем могут сделать многое для математики. А если (но это под секретом) Миттаг-Леффлеру удастся стать преемником Линдхагена на посту непременного секретаря академии, то это было бы совсем замечательно. Ведь непременный секретарь всемогущ в Академии наук, которая, в свою очередь, господствует над научной жизнью Швеции. Миттаг-Леффлер считает, что тогда из академии «можно было бы сделать нечто совершенно другое, гораздо более великое, чем то, что она представляет собою в настоящее время» [207. с. 101]. Впрочем, считает Миттаг-Леффлер, маловероятно, что он станет непременным секретарем, так как им хочет быть Норденшельд.

Миттаг-Леффлер ждет, что Сигне вместе с отцом приедет к нему в горы в середине августа и они вместе попутешествуют. А потом, если его здоровье позволит, он хотел бы поехать в Эбердин на съезд Британской ассоциации распространения полезных знаний, который будет в сентябре: ему нужно завязать связи с англичанами в интересах журнала, главным образом для его распространения. Не хочет ли и Ковалевская поехать в Эбердин?

В ответ на проект о введении ее в число членов

Шведской академии наук Ковалевская пишет шутливо (7 июля 1885 г.): «Боже мой! Сколько у нас вновь прекрасных проектов! Видение прекрасного мундира академика постоянно проходит теперь перед моими глазами» [207, с. 103]. Она, в сущности, довольно равнодушна к почестям, которые выпадают на ее долю, но очень чувствительна к знакам внимания со стороны друзей, и особенно благодарна за них Миттаг-Леффлеру.

В дальнейших письмах Миттаг-Леффлер напоминает Ковалевской о шведском подданстве и о вакансии в академию.

В одном из июльских писем Ковалевская говорит, что чем больше она думает о вакантном месте, тем больше приходит к заключению, что не нужно хлопотать о нем для нее. Не прошло еще года, как она назначена профессором. Этой зимой она, вероятно, будет занимать место двух профессоров. Если к этому еще добавится избрание в академию, то это может возбудить зависть и недоброжелательство к ним. «Если мы восторжествуем теперь, то эта победа очень дорого обойдется нам в будущем» [207, с. 111].

Плохое впечатление произведет также то, что Ковалевская станет шведской подданной перед самыми выборами. Нужно подождать: «то, что отложено, еще не потеряно», — пишет она (Ковалевская не стала ни шведской подданной, ни шведским академиком).

На курорте Бад Ленк Миттаг-Леффлер стал поправляться. Местный врач сказал ему, что у него запущенная болезнь, были затронуты верхушки легких, и заживление прошло совсем недавно. Теперь его закаляют холодными, очень кратковременными душами.

Миттаг-Леффлер уже решил, что поедет в Женеву на съезд Астрономического общества, который будет проходить с 19 по 22 августа. (Еще раньше он писал о съезде в Эбердине, который будет с 9 сентября и куда он собирается вместе с Сигне. Если Софья Васильевна не сможет поехать с ними, то непременно в другой раз она должна побывать в Англии, чтобы поработать там для «Acta».)

Беспокойный Миттаг-Леффлер не может долго оставаться на одном месте, и в августе он уже в швейцарском городе Церматте, высокогорном климатическом курорте — вместе с Анной-Шарлоттой он ждет Сигне. В начале сентября Миттаг-Леффлер все еще в Швейцарии, но теперь уже в Вилларе на Олоне, в кантоне Во.

Ковалевская же вернулась в Стокгольм, где стала готовиться к лекциям. Она отказалась от намерений путешествовать и сидит у себя в квартире «наедине с письменным столом» (письмо от 3 сентября 1885 г.).

Ковалевская узнала, что Я. Хольмгрен скончался. Его место в Технической школе уже занято. Что касается Высшей школы, то Правление предлагает Ковалевской читать курс механики в следующем семестре. Вопрос о постоянном кандидате на должность профессора механики еще окончательно не снят. Миттаг-Леффлер в следующем письме просит Ковалевскую дать оценку Рунге как кандидату на эту должность. В конце концов она дает отрицательный ответ: раньше она была высокого мнения о Рунге, но потом поняла, что у него сильно развита «шишка тщеславия». Когда Миттаг-Леффлер написал ей о возможных скандинавских кандидатах: Силове, Меллине, Фольке и Бергере, то она высказалась за Меллина. Однако пока еще никто не требовался. Впоследствии, с 1886 г., Андерс Линдстедт, астроном и механик, стал профессором математики и теоретической механики в Высшей технической школе Стокгольма.

В конце 1885 г. Миттаг-Леффлер был избран ректором на 1886 г. И сразу же, в декабре, на каникулы уехал в Гельсингфорс к своему тестю. Ковалевская 29 декабря 1885 г. посылает срочное письмо с изложением разных важных для Высшей школы событий. «Чрезвычайно жаль, — пишет она, — что в такой серьезный момент, и как раз на другой день после Вашего избрания ректором, Вы сочли возможным отсутствовать. Можете себе представить, что все наши товарищи хорошенько посудачили об этом... В общем, во всем Стокгольме по поводу последних выборов ректора циркулирует большое число легенд, неблагоприятных для Вас и тем более для меня» [207, с. 127].

Первого января 1886 г. Миттаг-Леффлер отправляет Ковалевской телеграмму о том, что приедет в воскресенье и просит передать Брёггеру и Леке, чтобы они пришли к нему в понедельник утром, — вероятно, он будет с ними разговаривать уже как ректор университета.

Еще в октябре 1885 г. Ковалевская получила от Угглаcа сообщение о том, что Правление Высшей школы Стокгольма решило поручить ей в наступающем учебном году наряду с ее собственным предметом преподавание механики с оплатой 3000 крон в год.

Летом 1886 г. Миттаг-Леффлер посылает Ковалевской телеграмму с сообщением, что ее чтение курса механики будет продолжаться осенью. За телеграммой следует письмо с объяснением: Миттаг-Леффлеру пришлось похлопотать, чтобы собрать деньги для оклада Ковалевской на осенний семестр. Получены 500 и 300 крон от двух лиц, не пожелавших быть названными, 200 крон были отложены Миттаг-Леффлером за счетную работу для государственной конторы.

Одновременно с Ковалевской на осень для чтения лекций назначили молодого физика Кнута Юхана Ангстрёма, сына знаменитого Андерса Ангстрёма. Линдхаген передал от неизвестного жертвователя 550 крон, что составило половину оклада К. Ангстрёма за осень. На дополнительную оплату существовал некоторый общий фонд. Ревизоры утвердили представленные платежи.

Ковалевская читала курс теории движения твердого тела не только осенью 1886 г., но и весной 1887 г. К. Ангстрём стал постоянным преподавателем физики в Высшей школе.

Иногда Миттаг-Леффлер просит у Ковалевской «мудрого» совета. Так, он спрашивает, выставлять ли ему свою кандидатуру в риксдаг, сам он не хочет этого, но некоторые шансы пройти у него есть.

Летом 1886 г. Ковалевская была в Париже. Там она делала доклад о своих исследованиях по задаче о движении твердого тела перед французскими математиками: Эрмитом, Дарбу, Бертраном и Жорданом. Бертран предложил выдвинуть ее работу на большую премию Парижской академии наук. Все четверо были членами комиссии по выдвижению премий на 1888 г.

Миттаг-Леффлер написал, что если бы он был завистлив, то завидовал бы ее успеху — выступать перед самой изысканной математической аудиторией. Но он не завистлив и рад за Ковалевскую. Самому ему не удается заниматься математикой так, как он хотел бы, так как занят разными другими делами.

Ковалевская в июньском письме 1886 г. дает Миттаг-Леффлеру отчет о своих встречах с французскими учеными. Она была с визитом у Эрмита, Липмана и Пуанкаре. Последний пригласил ее на обед, где она видела Жюля Таннери и философа Эмиля Бутру,

**Софья Ковалевская
и Анна-Шарлотта Леффлер**

мужа сестры Пуанкаре Алин. С Пуанкаре всегда очень интересно беседовать.

В первые месяцы 1887 г. Миттаг-Леффлер неодобрительно наблюдал, как Софья Васильевна вместе с Анной-Шарлоттой с увлечением сочиняет пьесу «Борьба за счастье». Идея пьесы принадлежала Ковалевской, писала ее Анна-Шарлотта после обсуждения отдельных частей.

Миттаг-Леффлеру не нравилось, что Соня (как он стал называть в письмах Ковалевскую) отрывается от своей математической работы. Он подверг критике пьесу и счел надуманными характеры действующих лиц. Ковалевская послала ему письмо, в котором частично соглашается с его критикой, но защищает правдивость изображения главных героев пьесы.

Весной 1887 г. Миттаг-Леффлер посетил свою alma mater — университет в Упсале по случаю открытия в нем актового зала[8]. Старейший в Швеции[9] Упсальский университет открылся в 1477 г., а в 1877 г. торжественно отмечалось его 400-летие. Как и в других государствах Европы, в школах Швеции широко сначала проявлялось влияние римско-католической церкви, в университете главными предметами были философия и теология. Затем курс обучения стал последовательно расширяться, число факультетов увеличивалось. С появлением протестантизма в Швеции верх взяла лютеранская церковь, влияние которой и на дела высшей школы стало большим.

Во второй половине XIX в., как мы уже говорили, происходило оживление шведского общества. Оно коснулось и студентов. В 1882 г. возникло среди студентов Упсалы «Общество Верданди», стремившееся к проведению социальных реформ (Общество вердандистов существует до сих пор.) Они требовали свободы мысли, слова и религии. Название общества произведено от имени Верданди — одной из трех норн — богинь судьбы в скандинавской мифологии. Один из профессоров, поддерживавших вердандистов, — экономист Кнут Виксель читал в Упсале лекции о необходимости реформ, в частности о контроле рождаемости, что вызвало бурю негодования у реакционной части профессуры и духовенства. Возмутителями спокойствия были и датский писатель Георг Брандес, выступавший в университете Упсалы, и шведский социал-демократ Яльмар Брантинг, издатель газеты «Социал-демократ», оштрафованный за ругательную статью. Вердандисты заплатили штраф за Брантинга, и их всех вызвали к ректору университета Салину, который прочитал им назидательную лекцию. Некоторые студенты получили выговор, двое были лишены стипендии.

---

[8] *Sven Lindroth.* A History of Uppsala University 1477–1877. Uppsala, 1976.

[9] Напомним, что первые университеты в Европе появились в XII–XIII вв. Самый первый из них в Болонье (Италия) возник в 1158 г., затем в Кембридже (1209 г.), в Париже (1215 г.) и т. д. В них изучалась юриспруденция, главные предметы составляли римское право и философия. У славянских народов первыми были университеты в Праге (1348 г.) и Кракове (1368 г.). Шведы для получения высшего образования ездили в разные города Европы, в том числе и в Прагу. Преподавание велось на латинском языке.

В 1887 г. университету Упсалы исполнялось 410 лет, и к этому времени был построен упомянутый зал, открытие которого состоялось 17 мая. На стене зала были написаны слова: «Думать свободно — вели́ко, но еще более вели́ко — думать правильно». Миттаг-Леффлер в письме Ковалевской от 22 мая 1887 г. [207, с. 147] слегка иронично описывает торжества по случаю открытия. Он пишет об Упсале.

Нигде не умеют устраивать такие празднества, как там, а теперь еще отечество подарило своей старейшей Высшей школе лучшее на всем Севере помещение для празднеств — актовый зал. Он великолепен и почти может соперничать с «Эдемом», «Альказаром», или как они там называются, большие парижские кафе. Отделка актового зала произведена по образцу этих кафе. Широкая публика в восторге.

Собрались на холме, на котором возвышается Carolina rediviva (библиотека). Оттуда двинулась действительно торжественная процессия из 1500 белых фуражек [10] с флагами и штандартами. За ними — профессора со сморщенными как от горького миндаля лицами или краснощекими петерсоновскими физиономиями. За ними — превосходительства в мундирах с орденами и лентами, затем — обыкновенные достопочтенные лица более низкого ранга. Здесь и там служители в мундирах и с жезлами. Процессия спустилась в Рощу Одена и поднялась опять на холм, на котором высится здание университета. Яркое майское солнце, гул соборных колоколов, оживленное настроение. Все в целом в высшей степени импозантно. Затем мы, свыше трех тысяч человек, заняли места в актовом зале. Превосходный хор из молодых свежих голосов пропел короткий, переложенный на стихи компендий философа Бострёма из К. Д. Вирсéна. Затем величаво и изящно взошел на кафедру архиепископ. Он в самом деле замечательно красиво ходит. Он возблагодарил господа бога нашего и предостерег от науки и учености. После этого он спустился с кафедры так же эффектно, как и вошел на нее. Затем пели псалом, который архиепископ пел с часами в руке — следил за тем, чтобы это не заняло слишком много времени. Потом просеменил на кафедру ректор Сали́н. Невольно вспомнились слова датчанина на юбилее в Упсале: «Жаль, что бельмановские типы вымерли в Швеции, я видел в Швеции только одного-единственного — великолепного ректора в Упсале». Затем благодарили короля и кронпринца, а потом нам пришлось в течение часа слушать несколько более пространный компендий Вирсéна о бострёмовской философии, о Сократе, Платоне, Христе, Лейбнице, Канте и, наконец, о великом, чье имя слишком свято, чтобы упоминаться при таком случае (Бострём). Науке порядочно-таки досталось, предостерегали от публикаций. Это, мол, одно лишь высокомерие! Ученость восхвалялась. Молодежи напоминали, что она не может обладать знаниями зрелого возраста и поэтому должна послушно учиться у зрелых людей. Задача университета — дать молодежи плоды науки. ⟨...⟩

Наконец, Сали́н просеменил с кафедры вниз, и тот же пре-

[10] Студенты в Швеции носят белые фуражки.

восходный хор пропел действительно прекрасные стихи из К. Д. Вирсéна, в которых он предостерегал против вердандистов и говорил, что новый актовый зал — концертный зал в Упсале — станет той твердыней, о которую разобьется испорченность нашего времени. Затем мы отправились принять участие в прекрасном, превосходно организованном торжественном обеде. В присутствии его величества произносились тосты, в которых мы чествовали короля, королеву, кронпринца и принцев, благодарили министерство и риксдаг и напоминали обоим последним учреждениям об их обязанностях и предостерегали от превышения их. Король по-королевски и звучно провозгласил тост, комментирующий высказанные ранее мысли, кульминационной точкой которых были достопримечательные слова об актовом зале: «Мыслить свободно — это вели́ко, мыслить правильно — еще более вели́ко!» Я слышал, как многие говорили, что следовало бы добавить третью фразу: «Поступать правильно — это превыше всего!». Слова «мыслить правильно» истолковывались всеми как «мыслить правильно с моральной точки зрения». Король был чрезвычайно милостив ко мне и особенно к моему тестю. Ужин был у губернатора — графа Гамильтона, на него были приглашены король и Вы. Мой тесть и я попали в число гостей в последнюю минуту.

Празднества следующего дня я уже не в состоянии описывать. Я сделал несколько интересных знакомств, расточал похвалы Соне Ковалевской, усердно рекламировал «Acta», допустил сорваться с языка неосторожным выражениям об Упсале и здании университета и, как всегда, перемешивал умно рассчитанные, благоприятно действующие шахматные ходы с необдуманными, опрометчивыми, действующими в противоположном направлении.

Миттаг-Леффлера очень утомило пребывание в Упсале, и не столько из-за самих торжеств, сколько, как он считал, из-за тестя, который, когда Гёста, уже усталый, возвращался в гостиницу, не давал ему ни минуты покоя: «обеды, кафе, театры, коньяк, шампанское, сигары — все, чего я не переношу» — писал он Ковалевской в том же письме.

После Упсалы Миттаг-Леффлер собирался с женой поехать в Лондон, но поездку пришлось отложить, отчасти по материальным соображениям, отчасти по соображениям здоровья: «Мой тесть, наверно, поехал бы с нами, а я лягу костьми, если мне придется носиться с ним по всем увеселительным местам Лондона» [Там же].

Ковалевская летом собиралась поехать в Париж, но получила неприятное известие из Петербурга: мужу ее сестры, Виктору Жаклару, бывшему активному деятелю Парижской Коммуны, было предложено в четыре дня выехать из России в связи с событием 1 марта 1887 г. — покушением на царя. Ей пришлось ехать в Петербург и хлопотать об отсрочке отъезда Жаклара в виду очень тяжелого состояния здоровья его жены Анны Васильевны. Осенью 1887 г. Анна Васильевна Жаклар скончалась.

Миттаг-Леффлер все-таки съездил в Англию. Две недели он был в Лондоне, посетил также Оксфорд и Кембридж. Он пишет на пароходе «Дёбельн», на пути в Гельсингфорс, 22 июня 1887 г. о том, что в Гельсингфорсе он пробудет до среды, 29 июня, вернется в Стокгольм, а 3 июля поедет в Швейцарию на курорт Ленк, кантон Берн, куда английский доктор Морел Макензи советует ему ехать и где он уже бывал раньше. Там друг Миттаг-Леффлера доктор де Жонкьер будет лечить его.

На август намечена поездка Миттаг-Леффлера с Сигне и Анной-Шарлоттой в Далярне — местность на севере Швеции. Впоследствии Миттаг-Леффлер построил там дачу, в 1925 г. у него там гостила Софья Владимировна Ковалевская.

Миттаг-Леффлеры приглашают Соню (теперь фигурируют обращения Соня и Гёста) в Далярне, но она пишет, что начала серьезно работать, и хочет к 15 июля вернуться из России в Стокгольм с дочкой и серьезно позаниматься. «Ведь немного наработали мы в Емтланде, хотя я и Гёста воображали, что работали прилежно» (письмо к Гёсте и Сигне от 27 июня 1887 г.). Фуфа считает, что в Стокгольме, в семье Гюльденов, среди детей которых был ее товарищ Эйнар, гораздо веселее, чем в России, у доброй мамы-крестной Ю. В. Лермонтовой.

Обратимся к летнему письму Миттаг-Леффлера от 2 июля 1887 г. Он одобряет намерение Ковалевской вернуться в Стокгольм и работать над задачей о вращении. Хорошая работа ей нужна, чтобы упрочить положение в Стокгольме. Сам он попытается поработать в Бад Ленке, у него есть несколько идей, и он уверен, что они хорошие. (В 1887—1889 гг. Миттаг-Леффлер занимался теорией линейных дифференциальных уравнений, по которой им опубликован ряд статей в 1889 г. в «Comptes rendus», шведских изданиях и в «Acta mathematica».)

Миттаг-Леффлер добился средств на то, чтобы Ковалевская получила место профессора механики осенью 1887 г., хотя это было нелегко, и как будет дальше, было неизвестно. Основной же оклад ей обеспечен до лета 1889 г. Ковалевской при одном основном окладе не хватало средств на ее многочисленные поездки. Она уже заговорила о том, что ей хочется работать, если не в России, то во Франции. Великодушный Гёста пишет, что присуждение премии увеличит шансы на получение ею работы во Франции. Тема ее работы подходит и для премии короля Оскара — задача № 1, движение n тел. «Был бы бесподобный триумф, если бы Вы получили обе премии». В письме от 3 августа 1887 г. из Бад Ленка Миттаг-Леффлер пишет о своем заболевании уха, из-за которого он боится потерять слух, боли в ухе оказались такими, что он «даже не представлял себе ничего подобного», врачи «сильно мучали». Но все это он забудет, лишь бы вернулся слух в больном ухе. (Слух восстановился.)

Ковалевская получила это письмо в Стокгольме, куда ехала из Петербурга с остановкой в Гельсингфорсе, у генерала Линдфорса и Сигне, и где ее встретили очень хорошо.

У Миттаг-Леффлера неприятность: пропали записки по теории абелевых функций, сделанные по лекциям Вейерштрасса, которые он передал Фрагмену. Между тем Ковалевская еще не закончила своих лекций по этому предмету. В следующем письме, от 12 августа 1887 г., Миттаг-Леффлер говорит, что она обязательно должна дочитать курс абелевых функций, а то среди учеников распространится слух, что она не заканчивает курса, потому что пропали записки. Ковалевская должна была излагать работы Пуанкаре о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, и Миттаг-Леффлер советует ей чередовать эти лекции с лекциями по абелевым функциям, но начать с работ Пуанкаре. А потом найдутся записки, или И. Кноблаух, ученик Вейерштрасса, пришлет свои записки.

Ковалевская пишет, что она много работает, ищет себе квартиру на зиму, ежедневно навещает в 4 часа больного Фрица Леффлера и все же успевает по вечерам прогуляться с А. Линдстедтом, который с 1886 г. читал курс механики в Высшей технической школе Стокгольма. Они вместе ужинали, были в цирке и даже один раз танцевали! В связи с этим Миттаг-Леффлер просит ее побудить Линдстедта снова начать писать научные статьи. Бедняге приходится много подрабатывать для поддержания большой семьи.

Миттаг-Леффлер пишет, что он порядочно поработал над проблемой, о которой у них шла речь весной, и предлагает Ковалевской математический вопрос, вероятно, связанный с этой проблемой: возможно ли представление функции действительного переменного x, однозначной, непрерывной и дифференцируемой, для каждого конечного значения x в форме

$$a_1e^{\lambda_1 x} + a_2e^{\lambda_2 x} + a_3e^{\lambda_3 x} \ldots, \qquad *$$

где a_1, $\lambda_1 \ldots$ — действительные постоянные. Он сомневается в этом, но не знает, как доказать невозможность [11]. Миттаг-Леффлер сообщает ряд новостей, причем научные чередуются с бытовыми: у Пуанкаре родилась дочь, у Аппеля — сын.

Главная научная новость: Пуанкаре работает над первой задачей на премию «Acta», по астрономии. Он нашел новые, неожиданные результаты, примыкающие к результатам Болина и Хилла.

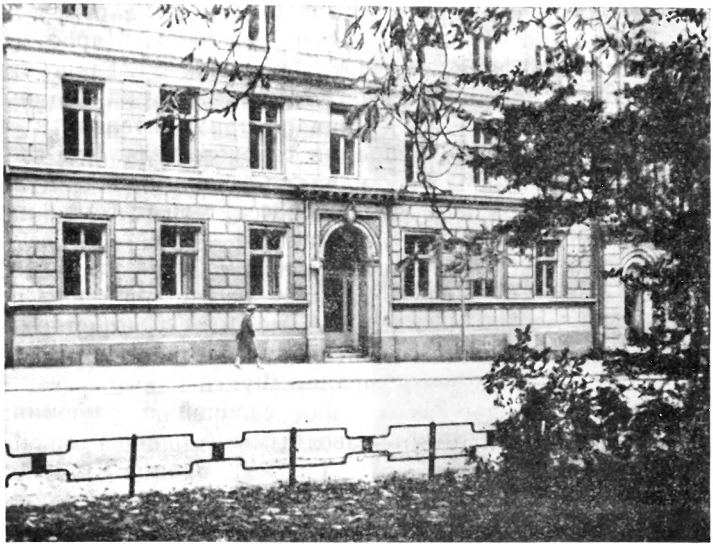
Вейерштрасс полностью решил проблему, решение которой ищут в разных работах Пикар и М. Нетер, он показал, что самый общий абелев интеграл x_{n+1} является функцией n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такой, что между производными $\partial x_{n+1}/\partial x_N$ и x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $N=1, 2, \ldots, n$, всегда имеет место алгебраическое уравнение. Новые общие абелевы интегралы могут быть выражены с помощью отношения общих θ-рядов. Принципиально все становится очень простым,— говорит Миттаг-Леффлер,— но требуется большое, юношеское мужество, чтобы *вычислить* новые случаи, более общие, чем обычные. (Известно, что Вейерштрасс был не вполне доволен полученными результатами и не считал свою теорию абелевых функций вполне завершенной.)

Далее Миттаг-Леффлер сообщает, что Кронекер опубликовал давно обещанную критику вейерштрассовой математики [148], Гельмгольц опубликовал статью с той же целью [138]. Кантор написал резкую, по мнению Миттаг-Леффлера, несколько слишком философскую, критику математики[125].

Ковалевская в ответном письме (12 августа 1887 г.) выражает беспокойство по поводу состояния здоровья

---

[11] Исследованию рядов экспонент вида (*) и вопросу о разложении целых функций в такие ряды посвящена книга А. Ф. Леонтьева «Целые функции. Ряды экспонент» [202].



Дом, в котором жила С. В. Ковалевская в Стокгольме (Стурегатан, 56)
Фото В. Н. Николаевского

Миттаг-Леффлера, связанного в основном с воспалением барабанной перепонки, она советует взять отпуск на осенний семестр. Но он не принял этого совета, несмотря на то, что в августе ему было сделано еще несколько операций.

В августе Ковалевская вернулась в Швецию и поселилась рядом с семьей Гюльденов в деревне Сёдерсунд, от Стокгольма в 10 часах езды на пароходе. Жизнь там была довольно дешевой, воздух хороший, в часе ходьбы находилось Оландское море с прелестными берегами, откуда была видна Финляндия. Фуфа все время с детьми Гюльденов, ей весело и хорошо. Ковалевская встает около половины седьмого, все утро работает, после обеда гуляет с Гюльденами, а потом опять работает. Ковалевская пишет, что 1 сентября она думает вернуться в Стокгольм, но ее дочка еще останется с Гюльденами до 13 сентября, а потом также приедет в Стокгольм и начнет ходить в школу.

Ковалевская в городе недалеко от дома Миттаг-Леффлеров и Анны-Шарлотты нашла себе квартиру на пятом этаже за 850 крон в год; на более далеком расстоянии она могла бы снять гораздо лучшую квартиру за ту же цену, но она боится порицания Анны-Шарлотты.

Миттаг-Леффлер отвечает Ковалевской 21 августа 1887 г. Он думает о ее и своих лекциях; он рад, что она может читать о работах Пуанкаре применительно к ее собственной работе о вращении твердого тела. Что следует написать Кноблауху, начиная с какого места нужно переписать лекции Вейерштрасса, может быть, начиная с θ-функций? — спрашивает он.

Сам Гёста, по желанию многих, будет читать об обыкновенных дифференциальных уравнениях, или по работе Эрмита об уравнении Ламе, или о гипергеометрических рядах, или о работе Брио и Буке. Во всяком случае, он начнет с исследований Фукса.

Миттаг-Леффлер думал над задачей о решениях уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0,$$

которые вдоль заданной линии обращаются в бесконечность предписанным образом или становятся сингулярными. Имеет ли это какое-нибудь применение? Не может ли Соня указать ему какую-нибудь задачу физики с такими условиями?

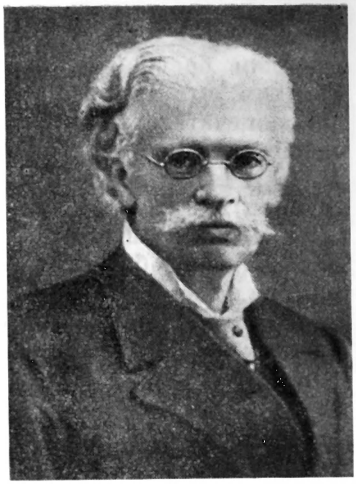
Он предлагает расписание лекций такое же, как раньше: по средам и субботам, от половины одиннадцатого до двух часов, ей — первые два часа, ему — один час, от часу до двух. Возможно, что он приедет только 16 сентября и начнет читать 17-го. Прием учащихся происходит раньше, 14-го, и ей придется одной принимать их.

На досуге Миттаг-Леффлер читал русских авторов. О «Братьях Карамазовых» Достоевского он говорит, что это «чудовищное, ужасное и вместе с тем гениальное произведение»; у Достоевского типично русские черты выступают ярче, чем у Тургенева и Льва Толстого. Он восхищен «Властью тьмы» Толстого, но ему кажется, что здесь автор хотел достигнуть другого впечатления, чем чисто художественное. По мнению Миттага-Леффлера, «выражение „искусство для искусства“, равно как и выражение „наука для науки“ являются единственными принципами, которые создают художественные произведения и действительно значительные научные работы» [207, с. 159].

Из Стокгольма 2 сентября 1887 г. Ковалевская пишет письмо Гёсте и Сигне, в котором кратко отчитывается об исполнении поручений Гёсты и говорит, что ей нужна запись лекций Вейерштрасса начиная с θ-функций, т. е. около 150 последних страниц.

С середины сентября Миттаг-Леффлер и Ковалевская начали свою работу в Высшей школе.

За 1888 г. сохранилось лишь два письма Миттаг-Леффлера, в то время как от Ковалевской их девять, некоторые очень длинные. Только в одном из этих писем (3 апреля 1888 г.) говорится непосредственно о самом Миттаг-Леффлере. С него мы и начнем.



Г. Миттаг-Леффлер

Дело в том, что в апреле проходила научная конференция народов африканских стран в Оране — городе Средиземного моря, в северо-западной части Алжира. На конференцию приехал также английский математик Джеймс Сильвестр. Они оба, Сильвестр и Миттаг-Леффлер, были избраны почетными председателями. В математической секции, по словам Миттаг-Леффлера, болтали только ерунду. Сильвестр был недоволен, что его не чествуют особо. Однако им всем, включая дам — Сигне и Анну-Шарлотту, оказывают гостеприимство.

Были организованы интересные экскурсии. Во время грандиозных инсценировок нападения 1000 арабских всадников Гёста чуть не потерял своих дам. Все они подумали, какую храбрость проявила бы при этом Соня, боявшаяся лошадей.

Леффлеры собираются побывать в Тлемсене (департамент Оран), наиболее сохранившем свои черты из всех арабских городов, и затем поедут в Алжир, где пробудут до 18 апреля.

В этом же письме он вспоминает о делах Высшей школы и просит Ковалевскую написать ему, что́ было на семинарах во время его отсутствия, как идут дела с экзаменами на степень доктора у Фрагмена. Он пишет о студентке Лагерборг, которая должна сдать экзамен по математике и механике: «Ее нельзя выпускать, пока она не будет вполне подготовленной, иначе это будет слишком большим скандалом для нас», — говорит он. Заметим, что Нанни Лагерборг-Содеркрейц впоследствии напечатала две статьи, одна из которых была посвящена задаче о вращении твердого тела. Спрашивал Миттаг-Леффлер Ковалевскую и о том, что́ было на заседании 13-ти.

У Миттаг-Леффлера в годы 1886—1888 не было опубликованных работ. Но, как видно по письмам, он думал над какими-то интересными задачами. Судя по тому, что в 1889 г. он опубликовал три статьи об инвариантах линейных дифференциальных уравнений [38—40] и эта тема была продолжена в 1891 г. [43], в предыдущие годы он размышлял именно над вопросами, относящимися к теории линейных дифференциальных уравнений.

Для Ковалевской же 1888 г. был годом интенсивной работы над задачей о вращении твердого тела, за которую в конце года она получила премию Бордена Парижской академии наук,— годом завершения работы и триумфа.

В мае 1888 г. Ковалевская пишет Гёсте: «Моя голова теперь так полна математикой, что я не могу ни думать, ни говорить о чем-нибудь другом» [207, с. 163]. На шести страницах она описывает результаты, к которым пришла в задаче о вращении твердого тела, добавляя, что вследствие недостатка времени пишет кратко, но все же просит Гёсту вникнуть в вопрос.

Теперь ей предстоит получить окончательные формулы, но она не знает, успеет ли это сделать, ведь работу на премию надо подать к первому июня! Это было бы очень досадно, так как работа стала довольно интересной. «Самое худшее то, что я так устала, так изнемогла, что сижу и размышляю в течение целых часов о какой-нибудь простой вещи, которую я при других обстоятельствах легко могла бы решить в полчаса» [207, с. 166].

Миттаг-Леффлер отвечает Ковалевской 18 мая 1888 г. с острова Капри. Он успокаивает Соню: если статья не будет готова теперь, то не встретится затруднений, чтобы все отложить до будущего года, он напишет об этом Эрмиту. Однако, если статья будет отправлена в Париж теперь, то никто не будет этому радоваться больше, чем он. Для нее же в настоящее время самое важное — полный отдых на два—три месяца. Лучшее лекарство от переутомления нервной системы — горный воздух. Здесь же Гёста пишет про свою сестру: Анна-Шарлотта «безудержно кокетничает с одним неаполитанцем» [12].

В следующем письме (без даты) Ковалевская пишет, что в своей работе все теоретические трудности она преодолела, но не успела по-настоящему выполнить все выкладки. Поэтому она посылает статью не в Парижскую академию наук, а Эрмиту, пусть он решает, что с ней делать. В качестве девиза Ковалевская выбрала: «Говори, что знаешь, делай, что должен, будь, что будет».

Эрмит ответил Ковалевской, что он представил ее работу на конкурс Бордена. Она может написать добавление и прислать его позже — на каникулах академики не станут читать работы.

Вейерштрасс просил Ковалевскую устроить ее дела так, чтобы она могла летом пожить у него несколько недель: он чувствует, что его силы слабеют, а он еще много должен ей сказать. (Напомним, что ему было в то время 73 года.)

5 июля Ковалевская пишет из Парижа, где думает пробыть до 17 июля, а затем поехать в Гарц,— там отдыхает Вейерштрасс.

В Париже французские математики очень хорошо встречают Ковалевскую; Бертран дал обед в ее честь, на котором были Эрмит, Пикар, Альфан и Дарбу, в ее честь произносились тосты. Она виделась с Пуанкаре.

Ковалевская познакомилась с постановкой лечения гипнозом и присутствовала на сеансах знаменитых врачей Шарко, Люиса и Берильона. (Вопрос о гипнотизме интересовал Миттаг-Леффлера в связи с болезнью его брата Фрица.)

Вейерштрасс менял места своего пребывания. Ковалевская поехала к нему в Вернигероде в области Германии Гарце, а потом он переехал в городок Тале. В Вернигероде вокруг Вейерштрасса собрались более молодые математики: Миттаг-Леффлер, Кантор, Шварц, Гурвиц, Хеттнер, Вольтерра.

В 1888 г. Ковалевской присудили премию Бордена. Нотариус Шарль Лоран Борден завещал в 1835 г. Ин-

---

[12] Это был математик дель Пеццо.

ституту Франции ренту в 15 000 франков, которая должна была распределяться поровну между пятью академиями Франции; темы конкурсов должны были иметь целью общественные интересы, благо человечества, прогресс науки и национальную честь.

24 декабря 1888 г. состоялось вручение премии С. В. Ковалевской на торжественном заседании в специальном зале Института Франции. В боковой ложе рядом с Ковалевской сидели М. М. Ковалевский и один из его друзей — социолог де Роберти. Триумф был полный.

1888 г. был годом встречи Софьи Васильевны с Максимом Максимовичем Ковалевским и началом дружбы между ними. М. М. Ковалевский, профессор Московского университета, читал лекции по государственному праву, но за смелые противоправительственные высказывания перед студентами в 1887 г. был уволен из университета. Он стал жить за границей, главным образом в Париже, где позже, в 1901 г. организовал «Русскую высшую школу общественных наук». По его приглашению в ней выступали К. А. Тимирязев, Г. В. Плеханов и др. В Стокгольме существовал Фонд Лорена для изучения общественных наук. Основал его шведский экономист Витор Эдвард Лорен, который завещал капитал в 200 тысяч крон на развитие в Швеции общественных наук. Председателем комитета Фонда Лорена был ректор Каролинского медико-хирургического института, член Королевской шведской академии наук Аксель Кей, членами — А.-Ш. Леффлер, С. В. Ковалевская и другие. По инициативе Ковалевской для чтения лекций по социологии в 1887 г. был приглашен М. М. Ковалевский.

2 февраля 1888 г. Ковалевская получила из Петербурга телеграмму, в которой поздравляли семью Ковалевских с большой золотой медалью Петербургского географического общества. Очевидно, Софью Васильевну считали родственницей Максима Максимовича, хотя они были только однофамильцами. Вскоре и сам М. М. Ковалевский приехал в Стокгольм.

Максим Максимович занял большое место в душе Софьи Васильевны. В конце лета Ковалевский приезжал в Гарц, где собрались друзья Вейерштрасса. В своей статье, посвященной памяти С. В. Ковалевской [196, с. 388], М. М. Ковалевский пишет, что осенью они встретились настоящими друзьями.

1889 г. был полон сложных событий в личной жизни Ковалевской, что находило отражение в мыслях и делах Миттаг-Леффлера.

В самом начале 1889 г., 4 января, она послала Гёсте из Парижа письмо, в котором настоятельно просила его устроить так, чтобы она могла получить отпуск на предстоящий семестр. «Вы не можете себе представить,— пишет она,— в каком я сейчас нервном состоянии. Если я сейчас возвращусь в Стокгольм и буду вынуждена вновь приняться за работу, то уверена, что кончу каким-нибудь тяжким заболеванием ... Вы всегда были мне добрым, преданным другом, дорогой Гёста, но уверяю Вас, что если бы Вы могли устроить мне отпуск на предстоящий семестр, то это была бы самая большая услуга из всех, какие Вы мне когда-либо оказывали» [207, с. 173]. В качестве своего заместителя она предлагает доцента Л. Э. Фрагмена. (Причиной тяжелого настроения Софьи Васильевны была ее серьезная размолвка с Максимом Максимовичем.)

9 января Миттаг-Леффлер отвечает Ковалевской: он только что получил ее письмо и спешит сказать, что, конечно, раз ей требуется отпуск, то он добьется получения его. Правда, «это еще новая и довольно значительная трудность,— добавляет он,— но у меня сейчас столько забот и неприятностей, что добавить еще одну, это все равно, что добавить еще одну единицу к плюс бесконечности» [207, с. 174].

Он дает ряд наставлений, которые Ковалевская должна выполнить, чтобы все получилось: 1. Она должна достать свидетельство о ее нервной болезни от одного из наиболее известных врачей в Париже, например от Шарко или Вуазена. 2. Ковалевская должна узнать — письмом к К. Лёвенгаупту, послу Швеции и Норвегии в Париже,— нет ли в настоящее время в Париже шведского или норвежского врача, и после получения свидетельства от парижского врача должна попросить его посетить ее и выдать свое свидетельство. (Впоследствии, после разговора с А. Кеем, Миттаг-Леффлер изменил мнение и написал, что можно получить свидетельство от любого врача, в том числе русского — П. И. Якоби, жившего в Париже в эмиграции. Ковалевская обратилась к знаменитому парижскому врачу Вуазену.) 3. Соня не должна никому в Швеции сообщать о своем намерении взять отпуск, пока Миттаг-Леффлер не разрешит ей этого.

К своему письму Миттаг-Леффлер приложил текст заявления об отпуске, которое Ковалевская должна была прислать Правлению Стокгольмской высшей школы.

Уже 12 января Ковалевская отвечает на письмо, в котором благодарит Гёсту за дружбу. Она пишет, что сейчас совсем потеряла голову: «Со всех сторон я получаю поздравительные письма, и, по странной насмешке судьбы, никогда в своей жизни я не чувствовала себя столь несчастной, как сейчас. Несчастной, как собака, нет, я думаю, что собаки не могут быть так несчастны, как люди, и особенно, как женщины... Я, может быть, стану более благоразумной через некоторое время. Приложу для этого все усилия. Я снова начну работать, интересоваться практическими делами и тогда я, естественно, буду всецело ориентироваться на Ваши советы и делать все, что Вам будет угодно. В настоящее время все, что я в состоянии сделать — это хранить свою печаль при себе, чтобы о моих ошибках поменьше знали в обществе и не очень болтали об этом» [207, с. 175].

После своего триумфа Ковалевская в Париже получила много приглашений: к Бертрану, Левенгаупту и др., но ей слишком грустно, чтобы описывать эти обеды, а Левенгаупт послал в Стокгольм письмо с описанием своего обеда, и Миттаг-Леффлер сможет ознакомиться с этим письмом.

Гёста пишет 15 января 1889 г. дружеские слова утешения: «Поверьте мне и не смущайтесь тем, что совершенно невозможно, чтобы два человека, и в особенности если один из них мужчина, а другой женщина, в области чувства были бы в совершенно одинаковом настроении, как бы одинаковы ни были у них основания для этих чувств» [207, с. 175].

Опять он рекомендует Ковалевской поговорить с Вуазеном, которого он хорошо знает, и добавляет: «Я вовсе не стараюсь видеть причину огорчений и печалей в нервной системе, но Вы во всяком случае должны признать, что я прав в том, что все переносится гораздо легче, если удается держать свои нервы в порядке» [207, с. 176].

Вскоре, очевидно, Софья Васильевна получила весть от Максима Максимовича и пишет 19 января Миттаг-Леффлеру уже совсем в другом духе. Хотя Вуазен нашел, что ее нервная система в плохом состоянии и предложил серьезное гидротерапевтическое лечение, но она теперь чувствует себя гораздо спокойнее. и стыдится тех писем, которые писала ему на днях.

Ковалевская вернулась к делам, предпринятым Миттаг-Леффлером, которые она несколько запустила. А дела эти составляли хлопоты Миттаг-Леффлера о наградах со стороны шведского правительства для французских математиков, в первую очередь для Эрмита. Кроме того, по замыслу Миттаг-Леффлера, должен быть награжден и Вейерштрасс. И уже выяснилось неприятное положение: Эрмит боится, что Бертран обидится, если не получит награды вместе с Эрмитом, а это плохо отразится на всех — Миттаг-Леффлере, Ковалевской, Вейерштрассе и Эрмите. У Эрмита возник проект — доставить Миттаг-Леффлеру орден Почетного легиона той же степени, какую имеет Гюльде́н,— командора; это было бы полезно Гёсте для его будущих планов во Франции. Эрмит хотел хлопотать о награде для Вейерштрасса — 50 тысячах франков, которые Парижская академия должна была присудить самому заслуженному ученому Европы. Но без поддержки Бертрана, непременного секретаря Парижской академии наук, осуществление этих проектов было бы невозможно. И Ковалевская умоляет Миттаг-Леффлера сделать все, чтобы Бертран получил орден.

В письме от 21 января Миттаг-Леффлер упрекает Ковалевскую в том, что она раньше не сообщила ему «о душевном состоянии Бертрана», тогда ему было бы легче хлопотать об ордене. А вообще-то это дело трудное — хлопотать об орденах для французов, ведь политика короля больше склоняется на немецкую сторону, чем на французскую, между тем во Франции уже получили ордена Эрмит, Серре, Пуанкаре, Пикар, Аппель (очевидно, степени офицера) [13], в Германии — только Вейерштрасс. Французы же мало сделали для орденов шведским ученым.

При всех этих хлопотах Миттаг-Леффлера ожидала неприятность: он получил от французского правительства орден Почетного легиона более низкой степени,

---

[13] Французский орден Почетного легиона (Légion d'honneur) был учрежден в 1802 г. Имеет несколько степеней, начиная с низшей: кавалер (chevalier), офицер (officier), командор (commandeur), кавалер большого офицерского креста (grand officier), кавалер большого креста (grand croix), великий магистр ордена (grand maître de l'ordre). Когда Эрмиту исполнилось 70 лет, он получил степень кавалера большого креста.

чем имевшийся у Гюльде́на и Дунера. Он пытался отказаться от ордена, но это ему не удалось.

Разговаривая с одним из приближенных министра иностранных дел, Миттаг-Леффлер узнал, что его хотели произвести в командоры шведского ордена Северной звезды, но он просил, чтобы на этот раз о нем совсем не упоминали, так как иначе завистники скажут, что он лишь поэтому хлопочет о премии.

Эти длинные письма посылает Миттаг-Леффлер Ковалевской на протяжении января — начала февраля 1889 г. Еще одно дело занимает его в этот период: бракоразводный процесс сестры, в котором он должен был выступать на стороне ее интересов при разделе имущества. А потом придется улаживать дела с Италией из-за различия вероисповеданий Анны-Шарлотты и П. дель Пеццо, сопротивления именитой родни итальянца; может быть, ему придется поехать в Неаполь.

И с премией Оскара II у Миттаг-Леффлера были кое-какие неприятности: некоторые шведские ученые обиделись. Аппель что-то не пишет, не выражает благодарности по поводу присуждения ему премии, между тем как Пуанкаре благодарит.

Но Миттаг-Леффлер, по существу, мог гордиться успехами математической премии, хотя бы потому, что Вейерштрасс высоко оценил работу Пуанкаре, поданную им под девизом: «Nunquam praescriptos transibut sidera fines» (Никогда светила не превзойдут предписанных границ). Великий немецкий ученый написал: «Рассматриваемую работу нельзя, правда, считать решением конкурсной проблемы, но эта работа настолько значительна, что с ее опубликованием, по моему убеждению, начнется новая эпоха в истории небесной механики» [161, т. 7, с. 624].

В начале февраля 1889 г. Миттаг-Леффлер заболел какой-то лихорадкой. Он пишет Ковалевской 6 февраля, лежа в постели: он думает, что его болезнь не заразна для Фуфы, которая живет у них на попечении Сигне.

Миттаг-Леффлер думает, что он заболел из-за всех треволнений последнего времени, но надеется скоро снова быть на ногах.

Его усилия увенчались до некоторой степени успехом: Эрмит и Вейерштрасс, как члены комиссии по премии, получат не ордена, но портреты короля большого формата в соответствующих рамках. Такая награда выдается обычно министрам и послам, у которых настолько высокие ордена, что им нельзя дать больше. И теперь Бертран не может обижаться на то, что король пошлет свое изображение лицам, оказавшим ему личную услугу.

В начале февраля (письмо без точной даты) Ковалевская посылает жизнерадостное письмо из Ниццы, где «сейчас прекрасно, настоящее лето». Пишет, что там существует небольшая русская колония, среди членов которой есть ее знакомые. У нее появилось настроение писать литературные работы. С нетерпением ждет она письма от Гёсты и сведений о Фуфе.

Миттаг-Леффлер отвечает Ковалевской 7 февраля. Он напоминает, что она должна послать через шведское посольство королю экземпляр своей работы в красивом переплете, оформленном лучше всего у парижского издателя Эрмана.

Через два дня Миттаг-Леффлер в коротком письме сообщает, что ее посылка с игрушками для Фуфы пришла, лихорадка у него кончилась. Ей он советует жить спокойно на Ривьере и поскорее выздоравливать. Отпуск для нее на весенний семестр Миттаг-Леффлер исхлопотал.

Ковалевская отвечает из Болье, около Ниццы, где она находилась в гостях у М. М. Ковалевского, в его вилле Батава (на бланке указано: Приморские Альпы). Она принимает упреки Гёсты в том, что уехала из Парижа, ничего не устроив для Эрмита и обещает написать Эрмиту о том, что ей сообщил Гёста, и Левенгаупту, когда у нее будет готов экземпляр ее работы для короля.

Миттаг-Леффлер в письме от 20 февраля 1889 г. наставляет: в письме королю она должна будет объяснить, что вследствие болезни, происшедшей от переутомления работой, она зимой не вернется в Стокгольм и потому разрешает себе послать свою работу «высокому покровителю математических наук, так много сделавшему для прославления своей страны» [207, с. 187]. Далее она должна будет написать: она сама видела, «какое глубокое впечатление произвела работа Пуанкаре, получившего премию короля, на научный мир», и она радуется тому, что «премия короля, таким образом, связывается с работой, являющейся одной из величайших работ, созданных в науке».

Поскольку в 1889 г. у Ковалевской кончался пятилетний срок ее работы в Высшей школе, Миттаг-Леффлер действует, чтобы возобновить ее назначение на следующий срок. Для этого,— пишет он 23 февраля,— следует пригласить экспертами по ее работам Гельмгольца, сэра Вильяма Томсона и Бриоски или Бельтрами. (На самом деле отзывы были даны Ш. Эрмитом, К. Бъеркнесом и Э. Бельтрами.)

Ковалевская была назначена профессором по высшему математическому анализу à vie, т. е. пожизненно. Этого добился Миттаг-Леффлер, несмотря на то, что Ковалевская — он хорошо это знал — стремится покинуть Швецию.

Из письма Ковалевской от 7 марта 1889 г. видно, что Ковалевская снова в Париже: Максим Максимович должен был уехать по делам своего имения на Украине, в Харьковской губернии, и Софья Васильевна не захотела одна оставаться там, где ей было хорошо. Ее здоровье поправилось и она хочет серьезно работать. Собирается исполнять поручения Миттаг-Леффлера, пойдет к Эрмиту и Бертрану. Она не знает, как благодарить Гёсту и Сигне за заботы о Фуфе.

Однако работать она стала не над математическими задачами, а, под влиянием своих друзей в Ницце, над литературными произведениями. Она послала Миттаг-Леффлеру маленький рассказ из воспоминаний детства и обрадовалась, когда узнала, что он понравился ему. Гёста предложил ей напечатать ее новеллы в виде сборника. В 1889 г. вышла книга Ковалевской «Из русской жизни. Сестры Раевские» [146] в переводе на шведский Вальберг Хедберг.

Ковалевская просит Миттаг-Леффлера поговорить о возможности напечатания ее новелл в издательстве «Stockholms Dagbladet» Э.-В. Монтаном. В частности, это печатание дало бы ей возможность получить корреспондентскую карточку, а затем и пропуск на открытие Всемирной выставки в Париже. Билет на выставку Гёста ей достал.

В ответ на письмо Миттаг-Леффлера Ковалевская пишет 23 апреля 1889 г., что она получила его фотографию, по которой видно, что он похудел и у него усталый вид. Но все же ей нравится выражение его лица, «оно такое доброе и приятное» [207, с. 197].

Всемирная выставка в Париже была открыта для всех 5 мая 1889 г., открытие Эйфелевой башни произошло 6 мая, а 4 мая состоялось предварительное открытие (вернисаж), на которое попала и Ковалевская. Потом она написала очерк об этом событии, оставшийся неоконченным, под названием «На выставке» [197, с. 282—288]. На выставку приехали ее дорогие гости, Гёста и Сигне, и привезли с собой Фуфу. Перед тем Софья Васильевна хлопотала о квартире для Миттаг-Леффлеров, что было нелегким делом из-за наплыва людей, желавших попасть на выставку. Приехала и Ю. В. Лермонтова.

Для Миттаг-Леффлера 1889 г. был годом публикации его трех статей по теории инвариантов линейных дифференциальных уравнений, над которыми он работал в предыдущие годы. В одном из писем Ковалевская предлагает ему быстро перевести его статью на французский язык, вероятно, это была статья [40] в «Comptes rendus». Она не хотела, чтобы Фукс опередил Миттаг-Леффлера в работе.

Вопрос о распространении любимого детища Миттаг-Леффлера, «Acta mathematica», продолжает его волновать, и он написал сам и уговорил Эрмита написать письмо французскому министру просвещения. Эрмит сделал это очень неохотно, так как знал, что состояние французских финансов было плачевным (письмо Ковалевской от 5 июля 1889 г. [207, с. 201]).

Летом Ковалевская жила на даче под Парижем. Оттуда она пишет 25 августа, что ввиду того, что Гёста интересуется русской литературой, она посылает ему русскую пьесу, которая в России считается шедевром, но в пригородном театре Парижа была сыграна очень плохо, с плохими актерами. (Это была «Гроза» Островского.) Софья Васильевна просит Миттаг-Леффлера после прочтения пьесы послать ее Анне-Шарлотте, может быть она почувствует желание поставить ее на шведской сцене.

В сентябре Ковалевская вернулась в Стокгольм и прочитала курс лекций. Во время зимних каникул она опять в Париже и посылает Миттаг-Леффлеру три письма, 22, 24 и 29 декабря (его письма не сохранились).

С Анной-Шарлоттой они посещали русских друзей и скандинавских артистов, навестили норвежского писателя Ионаса Ли и шведского скульптора Вальтера Рунеберга. (После смерти Ковалевской Рунеберг сделал ее скульптурный портрет).

Затем Ковалевская стала навещать математиков, в первую очередь посетила Эрмита. Ее занимает вопрос о вакансии академика, открывшейся после смерти В. Я. Буняковского, на которую она может претендовать как член-корреспондент Академии наук. Эрмит написал письмо П. Л. Чебышеву с просьбой помочь вернуть Ковалевскую России. Он пишет: «Мой дорогой собрат и друг 〈...〉 Пользуясь Вашей добротой, выражаю пожелание, чтобы Вы смогли вызвать в С.-Петербургскую академию наук г-жу Ковалевскую, талант которой вызывает восхищение всех математиков и которая в своем стокгольмском изгнании хранит в своем сердце сожаление и любовь к своей родине — России» [198, с. 270].

Но, как известно, для Ковалевской не нашлось достойного места в России.

Миттаг-Леффлер собирался поехать в Петербург, и Ковалевская надеется на его поддержку и дает ему адрес своего друга С. И. Ламанского. Академиком был избран конкурент Ковалевской А. А. Марков.

За 1890 г. сохранилось всего семь писем Ковалевской и нет ни одного письма Миттаг-Леффлера. Хотя, как видно из писем Софьи Васильевны, он ей писал.

В мае Ковалевская в Петербурге. Там она была представлена великому князю К. К. Романову, поэту и президенту Петербургской академии наук (1889 — 1915). Он показался ей симпатичным, но вряд ли имеющим большое влияние. Ковалевская поддерживала связь со шведской колонией в Петербурге. Ее пригласили на обед к шведско-норвежскому послу в России Георгу Дуэ, который говорил о Миттаг-Леффлере дружески и с симпатией. Она была также приглашена к Акселю Вильгельмовичу Гадолину, разностороннему ученому, генералу от артиллерии. Он был уроженцем Финляндии, членом Петербургской и других академий, в том числе Королевской академии военных наук в Стокгольме. Софья Васильевна любила беседовать с ним о математике.

Ковалевская просит Миттаг-Леффлера послать Гадолину те ее статьи, какие он сможет достать: его интересуют ее докторская диссертация и статья о преломлении света. Просит также достать у издателя Хегстрёма экземпляр ее книги на шведском языке «Из русской жизни» [146] и послать его вице-президенту Петербургской академии наук Я. К. Гроту.

В майском письме она пишет, что вся шведская колония решила женить молодого Нобеля на девице Гадолиной, и все стараются устраивать пикники, обеды, посещение музеев, чтобы дать возможность молодым людям встречаться. От Максима Ковалевского она получила письмо из Оксфорда, где он читал лекции с огромным успехом. Он приглашает Софью Васильевну к 20 июня приехать в швейцарский город Тарасп, куда сам он приедет после 15 июня.

В июне Ковалевская была в Берлине и отмечает, что у Вейерштрасса усталый вид, с ним трудно много говорить о математике. 20 июня она выехала в Тарасп.

Путешествие С. В. и М. М. Ковалевских по Швейцарии, Голландии и Германии было очень интересным. Но Софью Васильевну не покидали мысли о Высшей школе.

У нее возникла забота: на осенний семестр назначен курс ее лекций по теории чисел, которой она специально не занималась, и теперь со страхом думает об этом. Она рассчитывает на лекции Гёсты, «но если они неполные или неупорядоченные, то я пропала», — пишет она (письмо от 7 июля 1890 г.).

Еще одно письмо 12 июля 1890 г. из Тараспа посылает Ковалевская Миттаг-Леффлеру, собиравшемуся ехать в Париж. В него вложены рекомендательные письма к лицам, которые могут дать ему необходимые сведения о финансистах Парижа. Один из рекомендуемых, Г. Н. Вырубов — кристаллограф, председатель Французского минералогического общества. Насколько помнит Ковалевская, Миттаг-Леффлера интересует вопрос о горных выработках. (Уже после смерти Ковалевской Миттаг-Леффлер был связан с компанией по строительству плотины на реке Умеа, в северной части Швеции, кажется, без особого успеха.)

Последнее письмо 1890 г., без даты, отправлено, по-видимому, в июле из Белладжио на озере Комо. Ковалевская удивляется, что не получает никаких известий от Миттаг-Леффлера, и Вейерштрасс ей также пишет, что ничего не слышит от него. В Белладжио очень красиво и не слишком жарко, Софье Васильевне нравится это южное влажное душистое тепло.

В январе 1891 г. Ковалевская во время зимних каникул послала из Генуи письмо, дошедшее до Миттаг-Леффлера лишь после ее смерти. В Генуе Ковалевские должны были встретиться с Анной-Шарлоттой и ее мужем П. дель Пеццо, но произошла путаница с телеграммами, и встреча не состоялась.

В канун Нового года Ковалевские были на кладбище в Генуе, славившемся своими памятниками и живописным расположением на склоне горы. Новый год встречали в мрачном настроении.

Судя по полученному письму, Миттаг-Леффлер побывал в Петербурге, и Ковалевская думала, что для нее еще не потеряна надежда стать русским академиком и вернуться в Россию. Она советуется с Миттаг-Леффлером — какой курс ей читать в весеннем семестре. Может быть, продолжить прочитанный осенью курс теории чисел, — если только продолжение его курса так же хорошо разработано, как начало?

Она спрашивает, к какому сроку должна обязательно вернуться в Стокгольм, а то у нее есть легкомысленное желание присутствовать в Генуе на карнавале 2 февраля, но, вероятно, неудобно приехать так поздно: они с Максимом Максимовичем хотели бы поехать в апреле в Россию (возможно, чтобы справить свадьбу? — *П. К.*) и она думает просить отпуск в апреле.

Софья Васильевна возвращалась в Швецию простуженная. 6 февраля она прочитала лекцию, вечером пошла на званый обед к Гюльденам в Обсерваторию, где они жили. На следующий день ей стало совсем плохо, и она послала Миттаг-Леффлеру записку, в которой писала, что ей очень плохо и что она просит прислать ей врача.

10 февраля 1891 г. в возрасте 41 года Софья Васильевна скончалась.

На похоронах Ковалевской Миттаг-Леффлер сказал прочувствованное слово: «От имени работников на поприще математических наук во всех странах, от имени всех близких и далеких друзей и учеников обращаюсь я к тебе с последним прощанием и благодарностью. Благодарю за глубину и ясность, с которыми ты направляла умственную жизнь юношества, за что потомство, как и современники, будут почитать твое имя. Благодарю и за сокровища дружбы, которыми ты оделяла всех, близких твоему сердцу» [198, с. 176]. Выступил также Максим Ковалевский от имени России, «мирной, справедливой и свободной, той России, которой принадлежит будущее» [Там же]. Фриц Леффлер написал прекрасное стихотворение, текст которого был вручен присутствовавшим на похоронах.

Через год после смерти Ковалевской Анна-Шарлотта Леффлер выпустила книгу о ней [152, 203]. Нена-

Кабинет Миттаг-Леффлера

долго пережила свою приятельницу Анна-Шарлотта Леффлер, она умерла в 1892 г., оставив маленького сына.

Миттаг-Леффлер заказал два мраморных бюста: Софьи Васильевны и Анны-Шарлотты, они стояли в его кабинете.

Связь Миттаг-Леффлера с Россией не прекращалась и после смерти Ковалевской: он дважды был в Петербурге, 21 марта 1894 г. и 16 декабря 1892 г., когда он сделал доклад в Петербургском математическом обществе.

Глава 7

Миттаг-Леффлер как человек

В заключение, в этой небольшой главе хочется рассказать о Миттаг-Леффлере не столько как об ученом, сколько как просто о человеке со своими слабостями, которому «ничто человеческое не чуждо».

Миттаг-Леффлер был интернационалистом. Он устанавливал связи между математиками всех стран, и вместе с тем он был горячим патриотом своей родины. В 1911 г. на II скандинавском математическом конгрессе он обратился к присутствующим с речью, выдержки из которой мы приведем.

Математика, наука чистого мышления, наука всех наук, больше, чем какая-либо другая форма выражения человеческого бытия, свободна от национальных точек зрения.

Если бы я был только математиком, то я мог бы безусловно присоединиться к высказыванию Тихо Браге, великого датчанина, князя ренессанса в мире духа: «Для сильного отечество — земля, а небо есть везде». Однако тонкий слух не может не услышать за этими гордыми и холодными словами их противоположность, гложущую печаль от жизни вне родины, неугасимые воспоминания о Штерненбурге на Хвене [1]...

Далее он продолжает.

И я, швед, швед по рождению и по чувствам, я печалюсь о наших слабостях и радуюсь нашим успехам, как только сын может печалиться и радоваться. И так как я швед, я был и раньше, остаюсь и теперь самым искренним приверженцем духовного единства северных народов, о котором впечатляюще свидетельствует только что открывшийся Конгресс.

Швеция — страна больших широт, со своими землями от равнин Скопена до снежных вершин Лапландии, все реже и реже заселенных народами, связана на востоке землею и морем со старой шведской землей [2], где шведский плуг впервые вспахал землю. Уже целое столетие широкие крылья двуглавого русского орла покрывают эту землю.

Далее Миттаг-Леффлер напоминает исторические события, связывавшие Швецию с Данией, часть земель которой также раньше принадлежала Швеции, и с Норвегией, которая до 1905 г. имела общего со Швецией короля. Он задает вопрос.

Каким же должен быть швед, не сознающий, что должны быть осознаны и сохранены чувства взаимной связи, общности происхождения и одинакового развития среди народов скандинавских стран?

Он отвечает на него.

«Объединенные, мы образуем единство в смене разнообразий, которое делает целое еще богаче и сильнее. Наша общая культура может, если только мы этого захотим, стать таким опорным камнем для движения человечества вперед и вверх так, чтобы даже самые сильные ее не поколебали».

Заканчивается выступление словами.

С пожеланием, чтобы так это и было, я провозглашаю приветствие (Hoch) за единство народов Скандинавского Севера [155, с. XIV—XV].

---

[1] Датский астроном Тихо Браге построил астрономические обсерватории Ураниборг и Стьерненборг близ Копенгагена. В последние годы жизни он был вынужден жить вне родины, в Германии и в Праге.

[2] Финляндия раньше принадлежала Швеции.

Будучи патриотом скандинавских стран, Миттаг-Леффлер оставался интернационалистом в отношениях между математиками и во время первой мировой войны. К концу ее, в 1918 г., он стал готовить к опубликованию переписку Ф. Клейна и А. Пуанкаре, относящуюся к 1880-м годам, и писал об этом Рунге в декабре 1918 г.: «Такая публикация кажется мне вполне своевременной. Она может послужить построению моста взаимопонимания между математиками разных стран. Математики должны, как мне кажется, быть первыми в мире науки, между которыми такое понимание может установиться» [173, с. 170].

Рунге ответил ему: «Я очень рад, что Вы хотите способствовать сближению враждующих наций, и я также верю, что математики первыми могут понять друг друга. Здесь общие научные цели легче всего отделить от политических вопросов. Но ожесточение из-за политических противоречий у нас есть и, вероятнее всего, как я думаю, находится на подъеме...» [Там же, с. 171.]

Кем был Миттаг-Леффлер для Ковалевской, достаточно хорошо выявляется из их переписки, и мы об этом уже много говорили.

Однако при всей тесной дружбе Ковалевской и Миттаг-Леффлера между ними иногда происходили размолвки. Ковалевская обижалась на него и тем или иным способом выражала свою обиду, Миттаг-Леффлер оправдывался, она соглашалась, что обида была преувеличенной, извинялась, и они мирились. В письмах фигурируют два таких случая. Первый произошел 13 января 1886 г., когда Миттаг-Леффлер обещал Софье Васильевне зайти к ней днем, чтобы поговорить о делах, и не зашел. Вечером она сама пришла к нему, но у него были родственники, привезшие больную тетю Миттаг-Леффлера, которая должна была лечиться в Упсале. Миттаг-Леффлер вышел в переднюю, чтобы проститься с гостями, тогда Ковалевская также встала и ушла, не пожелав выслушать, какие причины помешали ему прийти к ней. На следующий день Миттаг-Леффлер написал Ковалевской письмо с подробным описанием того, как он провел день и что помешало ему выполнить его намерение посетить ее. Письмо подписано: «Преданный Ваш друг Г. Миттаг-Леффлер» [130, с. 127].

Ковалевская ответила запиской, что у нее сильные угрызения совести из-за того, что она упрекала его;

по-видимому, он иначе не мог поступить. Записка кончается вопросом: «Завтра Вы, вероятно, не придете на мою лекцию?» и подпись: «Преданная Вам Соня Ковалевская» [207, с. 127].

Другой случай размолвки, повлекший обмен записками произошел в конце 1887 г. Речь шла о проекте Миттаг-Леффлера организации лекций Оскара Монтелиуса, шведского археолога, основавшего в 1873 г. Шведское общество антропологии и географии. Гёста ничего не сказал Ковалевской об этом проекте, узнала она о нем от других и очень обиделась. Миттаг-Леффлер на следующий день объяснил Ковалевской причины своего умолчания, но вечером не мог успокоиться до тех пор, пока не объяснил ей еще раз в письме, как было дело. Он написал, что не придавал большого значения делу Монтелиуса, которое сведется в конце концов к тому, что его лекции будут происходить в одной из аудиторий Высшей школы, а не в помещении Академии наук.

Гёста напоминает Соне, что на днях она, получив интересное письмо от одной из сестер Вейерштрасса, лишь через два дня показала письмо ему. Он говорит, что «между друзьями должна быть известная терпимость по отношению к вещам, совершенным без злого умысла, а зависящим от различных обстоятельств». В конце письма он с горечью добавляет: «Впрочем, Вы совершенно правы в том, что у меня нет друзей, и я не прав, говоря о том, как бы рассуждали или поступили мои друзья. У меня их нет, а что причина этого лежит во мне самом, в этом Вы, вероятно, также правы. Преданный Вам Гёста» [207, с. 161].

На следующий день Соня написала письмо с извинениями, которое заканчивалось так: «Во всяком случае, могу Вас уверить, дорогой Гёста, что Вы ошибаетесь, когда говорите, что у Вас нет друзей. Один друг у Вас, во всяком случае, есть, хотя последний и не может похвалиться мягкостью и самообладанием. Но этого друга, со всеми ее недостатками, Вы сохраните, хотя бы это Вам не нравилось, на всю Вашу жизнь, и Вам было бы довольно трудно теперь от него избавиться» (письмо от 6 декабря 1887 г.). В постскриптуме Ковалевская просит Гёсту никому не говорить о их мелких размолвках, даже Анне-Шарлотте.

У Миттаг-Леффлера не было детей, у него оставался большой запас неизрасходованных отцовских чувств.

Он тратил их, как мы уже говорили, на своих учеников. Гёста был очень привязан к маленькой Соне, дочери Софьи Васильевны. В письме от 22 мая 1887 г. он пишет об этом Ковалевской в Россию, где она была на каникулах: «Сердечный привет Сонечке, которую я люблю больше, чем она, и Вы это подозреваете». В 1889 г. Фуфа долго жила у Миттаг-Леффлеров. На склоне лет Софья Владимировна вспоминала, как хорошо ей жилось тогда, как тепло относились к ней и Сигне, и Гёста. В 1925 г. она была в гостях у Гюльденов и уже овдовевшего Миттаг-Леффлера.

Занимаясь переводами писем Миттаг-Леффлера, Софья Владимировна говорила, что она узнала много нового, положительного, как о Миттаг-Леффлере, так и о своей матери.

Из переписки становится ясно, насколько Миттаг-Леффлер был озабочен переживаниями Анны-Шарлотты в связи с ее разводом, который мог поставить ее вне общества. В письме от 19 августа 1886 г. Миттаг-Леффлер пишет Ковалевской, что критика в Швеции недружелюбно и несправедливо встретила последнюю книгу Анны-Шарлотты (по-видимому, это была «Летняя сказка» — En sommarsage). В Гетеборгской торговой газете шведский публицист К. Варбург написал, по мнению Миттаг-Леффлера, уничтожающую и глупую рецензию. В то же время в Норвегии книга встретила большое одобрение «как у правых, так и у левых». Так же обстояло дело и в Дании.

Миттаг-Леффлер был человеком сильных и глубоких чувств. Он очень любил свою мать, нежно, по-братски относился к сестре и по-товарищески (некоторые добавляют — по-рыцарски) к Соне Ковалевской. Он был очень привязан к своей жене Сигне.

В письмах к Ковалевской у Миттаг-Леффлера встречаются резкие, отрицательные суждения об отдельных коллегах по работе; эти люди впоследствии добивались определенных результатов в науке или достигали высокого общественного положения. Но в конфликт с ними он не вступал. Однако по отношению к молодым математикам Миттаг-Леффлер всю жизнь проявлял величайшую доброжелательность. Так, Ирис Рунге, дочь Карла Рунге, в своей книге об отце [173] пишет, что Миттаг-Леффлер был очень любезен и добр к Рунге, которого в 1884 г. пригласил в Стокгольм. В Седертелье К. Рунге провел несколько недель с милой парой Миттаг-Леффлеров и С. Ковалевской. «Миттаг-Леффлер,— пишет И. Рунге,— был хорошо сложенным человеком, со свежим, жизнерадостным лицом и львиной гривой. Он проявил теплый интерес к молодому коллеге и дал ему много полезных советов» [173, с. 44].

В несколько другом тоне пишет Андре Вейль о своем посещении Миттаг-Леффлера в последний год его жизни, в 1927 г. А. Вейль говорит, что в общем его пребывание в Дьюрсхольме было приятным. Но его удивила одна вещь: Миттаг-Леффлер, по-видимому, никак не мог запомнить имени своей секретарши, и когда нуждался в ней, то очень громко кричал «Фрёкен, сюда!». А. Вейль объясняет это тем, что секретарши часто менялись, выходя замуж за молодых сотрудников или гостей Миттаг-Леффлера.

В статье художника Оле Эриксона (рисунок которого мы представили здесь) «Капитал Миттаг-Леффлера — для великой математики» [131] дается очень резкая оценка характера Миттаг-Леффлера в последние годы его жизни. Она дана на основе разговоров со старожилами и слабо подкреплена конкретными примерами. Но, по-видимому, действительно, характер Миттаг-Леффлера в пожилом возрасте изменился в худшую сторону. Жена же его названа, по отзывам старожилов, милой.

Можно задать вопрос: отчего портится характер у людей? Может быть, от постоянно плохого состояния здоровья, от неудовлетворенности своим положением или самим собою? Мы видели, что Миттаг-Леффлер считал главным для математика математическое творчество и сердился, что другие дела, часто им же самим придуманные, отвлекают его от собственных занятий. Заслуги его в математике велики, имя Миттаг-Леффлера часто встречается в математической литературе, но сам он не был вполне доволен своими достижениями.

То, что Миттаг-Леффлер много болел, не могло не наложить отпечатка на его характер. Сам о себе он писал 11 июня 1885 г.: «В меланхолическом настроении, в котором я по большей части нахожусь, мне служит утешением мысль о том, как хорошо нам удалось устроить дело с механикой в Высшей школе. Иметь иногда успех все-таки очень важно при странствиях по этой долине скорби» [207, с. 94].

Его настроение, бо́льшая или меньшая степень общительности, зависят от того, здоров он, или нет. Так, 20 июля 1885 г. он пишет: «Мне не хочется общаться со своими друзьями, когда я болен и неприятен. В таких случаях я, как истый северянин, предпочитаю замыкаться в собственной скорлупе». И в том же письме дальше он говорит: «Мне действительно стало настолько лучше, что я уже не хочу оставаться в своей скорлупе, а стремлюсь заглянуть и в другие» [207, с. 109]. Гёста был самокритичен, что мы уже имели случаи заметить и раньше.

На долю Миттаг-Леффлера выпало много почестей, и он любил их, хотя и понимал их бренность (вспомним его рассуждения о Г. Канторе). Воздадим же и мы ему должное за его горение и большие заслуги в области его любимой науки математики.

Приложения

1. Памятная записка «Acta mathematica»

Шведское правительство ежегодно дает 4000 крон (приблизительно 6000 франков) и, кроме того, подписывается на журнал для всех лицеев страны.

Норвежское правительство дает 1000 крон (примерно 1500 франков) в год на подписку 22 экз. журнала, которые распределяются между всеми лицеями Норвегии.

Датское правительство также дает 1000 крон (1500 франков) и, кроме того, подписывается на журнал для лицеев страны.

Правительства Пруссии и Баварии официально рекомендовали журнал всем университетским и гимназическим библиотекам, что повлекло за собой подписку примерно на 250 экз.

Правительство Франции подписывается на журнал для факультетов и лицеев Франции, что составляет абонемент, равный германскому.

Правительство Финляндии дает 1500 франков в год на подписку 22 экземпляров для всех лицеев и всех технических школ страны.

Правительства, оказывающие поддержку журналу, уплачивают, таким образом, стоимость подписки, составляющую по крайней мере 30 франков за том.

В России имеется свыше 400 лицеев, и, так как математические науки там специально культивировались со времен Петра Великого и Екатерины II, то нет сомнения, что как преподаватели лицеев России, так и их лучшие ученики также будут в состоянии пользоваться благами «Acta mathematica» и будут ощущать такую же большую потребность в чтении статей этого журнала, как это имеет место в Швеции, Норвегии, Дании, Германии, Франции и в Финляндии. Но так как библиотеки русских лицеев не получают достаточно крупных субсидий от государства, то необходимо, чтобы журнал был предоставлен им правительством, как это делается в других странах.

Принимая во внимание, что бедная Финляндия нашла возможность подписаться на журнал для всех лицеев Великого Княжества, кажется естественным предположить, что правительство России соблаговолит подписаться на журнал по крайней мере для половины своих лицеев.

Доклад относительно выгоды подписки на «Acta mathematica» для русских гимназий (лицеев) был сделан г-ном Коркиным, профессором С.-Петербургского университета.

Осмеливаемся предположить, что русское правительство подпишется на 200 экз. всего того, что выйдет в течение года, что составит приблизительно 2 тома, и будет меньше, чем подписка Франции и Германии.

Стоимость этих 400 томов, выпускаемых каждый год, составит 12 000 франков. Но необходимо будет купить также 200 экз. каждого из 8 томов, которые вышли до сего времени. Эти экземпляры будут представлены также по цене 30 франков за том, т. е. 48 000 франков за все.

Что касается участия русских математиков в «Acta mathematica», то журнал опубликовал уже мемуары великого математика, известного академика г-на Чебышева, г-жи Ковалевской, г-на Маркова из С.-Петербурга, г-на Сонина из Варшавы, г-на Линделёфа из Гельсингфорса. Многие другие профессора русских университетов прислали мемуары, которые скоро будут напечатаны.

2. О премии Оскара II *

Его величество Оскар II, желая дать новое доказательство интереса, который он проявляет к развитию математических наук, интереса, который он уже показал, поддержав издание журнала «Акта математика», находящегося под Его августейшим покровительством, решил присудить 21 января 1889, к 60-летию Его рождения, премию за важное открытие в области высшего математического анализа. Эта премия будет состоять из медали 80 пробы с изображением Его Величест-

* Acta mathematica, 1885. Т. 7. С. I—VI.

ва стоимостью в тысячу франков золотом и из суммы в две с половиной тысячи крон золотом.

Его Величество соблаговолил поручить реализацию Его намерений комиссии из трех членов: г-на Карла Вейерштрасса в Берлине, г-на Шарля Эрмита в Париже и главного редактора этого журнала г-на Гёсты Миттаг-Леффлера в Стокгольме. Работа комиссии была предметом доклада Его Величеству, и ее заключения, апробированные Его Величеством, таковы:

«Принимая во внимание вопросы, которые с разных точек зрения занимают аналитиков и решение которых представляло бы величайший интерес для прогресса науки, Комиссия почтительно предлагает Его Величеству присудить премию за лучший мемуар по одному из следующих вопросов.

1. Пусть дана система любого числа материальных точек, притягивающихся взаимно по закону Ньютона; предлагается, предполагая, что никогда не будет иметь места столкновение двух точек, представить координаты каждой точки в виде рядов по некоторым известным функциям времени, равномерно сходящимся для всякого действительного значения переменной.

Эта задача, решение которой значительно расширит наши познания системы мира, кажется, может быть решена с помощью аналитических средств, которые мы имеем в настоящее время в нашем распоряжении; по крайней мере это можно предположить потому, что Лежен Дирихле сообщил незадолго до своей смерти одному своему другу математику, что он открыл метод интегрирования дифференциальных уравнений механики и что, применяя этот метод, ему удалось доказать абсолютно строго устойчивость нашей планетной системы. К сожалению, мы ничего не знаем об этом методе, кроме того, что, по-видимому, отправной точкой его открытия была теория бесконечно малых колебаний [1]. Однако можно предположить с уверенностью, что этот метод основан не на длинных и сложных вычислениях, но на развитии фундаментальной и простой идеи, которую можно с уверенностью надеяться вновь найти настойчивым и углубленным исследованием. Однако в случае, когда предложенная задача не поддастся решению ко времени конкурса, можно будет

---

[1] *Kummer E.* Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet // Abhandlungen der *K.* Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1860. P. 35.— *П. К.*

присудить премию за работу, в которой какая-нибудь другая проблема механики была бы рассмотрена указанным образом и полностью решена.

2. Г-н Фукс показал во многих своих мемуарах[2], что существуют однозначные функции двух переменных, которые относятся по способу их происхождения к ультраэллиптическим функциям, но являются обобщением последних, и которые могли бы, вероятно, приобрести большую важность для анализа, если бы их теория получила дальнейшее развитие.

Предлагается получить в явной форме функции, существование которых было доказано г-ном Фуксом, в достаточно общем случае, чтобы можно было узнать и изучить их наиболее существенные свойства.

3. Изучение функций, определяемых достаточно общим дифференциальным уравнением первого порядка вида: целая рациональная функция независимого переменного, функции и ее первой производной равна нулю.

Г-да Брио и Буке открыли путь к такого рода исследованию в их мемуаре по поводу этого предмета (Journal de l' école polytechnique, cahier 36, p. 133—198). Математики, знакомые с результатами, открытыми этими авторами, знают также, что их работа далека до исчерпания трудного и важного вопроса, к которому они подошли первыми. Кажется вероятным, что новые исследования, предпринятые в этом направлении, смогут привести к предложениям высокого интереса в анализе.

4. Известно, какой свет был внесен в общую теорию алгебраических уравнений изучением специальных уравнений, к которым приводит деление круга на равные части и деление на целое число аргумента эллиптических функций. Замечательная трансцендента, которую получают, выражая модуль эллиптических функций через отношение периодов, приводит подобным образом к модулярным уравнениям, которые привели к появлению совершенно новых понятий и к результатам такой большой важности, как решение уравнений пятой степени. Но эта трансцендента является только первым членом, самым простым частным случаем бесконечного ряда новых функций, которые г. Пуанкаре ввел в науку под названием фуксовых функций и приложил с успехом к интегрированию ли-

---

[2] Указано 10 статей Фукса в разных журналах.— *П. К.*

нейных дифференциальных уравнений любого порядка. Эти функции, играющие в Анализе роль, важность которой очевидна, до сих пор еще не рассматривались с точки зрения алгебры, как трансценденты эллиптических функций, обобщением которой они являются. Предлагается заполнить эту лакуну и прийти к новым уравнениям, аналогичным модулярным уравнениям, выясняя, не будет ли только частным случаем образование и свойства алгебраических соотношений, которые связывают две фуксовых функции, когда они имеют общую группу.

В случае если ни один из представленных на конкурс мемуаров на предложенные темы не будет признан достойным премии, последняя может быть присуждена мемуару, представленному на конкурс, содержащему полное решение важного вопроса теории функций, отличающихся от предложенных комиссией».

Мемуары, представляемые на конкурс, должны быть снабжены эпиграфом, а также именем и адресом автора в запечатанном конверте и направлены Главному редактору «Акта математика» до 1-го июня 1888.

Мемуар, которому Его Величество соблаговолит присудить премию, так же как и мемуары, которые комиссия сочтет достойными почетного отзыва, будут опубликованы в «Акта математика», причем никакой из них не должен быть опубликован раньше.

Мемуары могут быть представлены на том языке, какой автор пожелает избрать, но так как члены комиссии принадлежат трем разным странам, автор должен присоединить к оригиналу перевод его на французский язык, если мемуар уже не написан по-французски. Если такого перевода не будет, автор должен согласиться, чтобы комиссия сделала его по своему усмотрению.

Главный редактор

3. Г. и С. Миттаг-Леффлер
Завещание 16.3.1916 *

Мы, нижеподписавшиеся, изменяя наше общее завещание, составленное 6 января 1883 г., объявляем здесь нашу последнюю волю, что наше общее имуще-

* (Извлечение из завещания, составленного и подписанного 16 марта 1916 г. Г. Миттаг-Леффлером и Сигне Миттаг-Леффлер, урожденной ав Линдфорс.)

ство после смерти нас обоих мы завещаем организации института, который будет называться:

Математический институт супругов Миттаг-Леффлер

Задачей института должно быть сохранение и дальнейшее укрепление в области чистой математики в четырех скандинавских странах: Швеции, Дании, Финляндии и Норвегии, но особенно в Швеции, того положения, которое они занимают в настоящее время, а также ознакомление других стран и создание в них истинной оценки вклада северных стран в самую высокую область жизни разума.

Особенно должно быть отмечено, что при решении этой задачи не преследуются никакие другие соображения, кроме высказанных. Следовательно, не должны приниматься во внимание ни персональные дружеские отношения, ни желание принести кому-нибудь в его трудных обстоятельствах материальную помощь. Не должны приниматься во внимание пожелания или практические потребности, вопросы экзаменов, политические мнения или соображения, иные, чем относящиеся к *чистой* математике.

Институт будет выполнять свою задачу:

1) Проявляя заботу и внимание к поддержанию моей, Г. Миттаг-Леффлера, математической библиотеки со всеми находящимися в ней манускриптами, портретами, семейными коллекциями и сувенирами и другими предметами.

Библиотека должна продолжать располагаться в большой каменной вилле, находящейся в нашем владении, в 16 квартале, Мидгорд, Юрсхольм[1], которая не должна быть занятой никакой другой коллекцией книг. Вилла предназначена и оборудована, чтобы служить библиотекой, и с этой целью содержит несколько комнат для работы, где исследователи могут в полном спокойствии пользоваться ресурсами библиотеки.

Незначительная часть виллы, служащая теперь жилищем, будет после нашей смерти также в распоряжении библиотеки.

Библиотека должна быть открытой для всех математиков, но, во избежание злоупотреблений, с ведома

[1] Юрсхольм — предпочтительный перевод Дьюрсхольм.

председателя Правления или директора Института. Книги не должны выноситься из помещения и ими можно пользоваться только в определенных местах библиотеки.

2) Предоставляя стипендии для изучения в своих странах или вне их молодым людям обоего пола, принадлежащим четырем указанным странам и проявившим действительные способности к исследованиям и открытиям в области чистой математики.

Кроме того, работы, важность которых признана выше средней, авторами которых являются выходцы из этих четырех стран, могут быть отмечены золотой медалью, того же размера и того же достоинства, что и малая золотая медаль Нобеля и, в случае свободных экземпляров, по возможности полным комплектом «Акта математика», тома́ которого, заключенные в красивый переплет, будут носить имя увенчанного автора.

3) Присуждая премии за открытия, действительно достойные этого названия, в области чистой математики. Эти премии должны даваться, не обращая внимания на национальность лауреата. Он может принадлежать какой угодно стране и выходцы из четырех скандинавских стран не будут иметь в этом случае никаких привилегий. Премия может присуждаться только за открытие, содержащее новые идеи такого значения, что наука получает от них новый импульс. Желательно, однако, чтобы премия могла присуждаться по крайней мере раз в шесть лет. Премия будет состоять из большой золотой медали, художественно выполненной, на которой должно быть приведено имя премированного, а также из искусно оформленного адреса, в котором должны быть мотивированы основания для присуждения премии, и, далее, из по-возможности полного собрания «Акта математика» в красивых, прочных переплетах, на которых приведено имя лауреата. Последний должен быть приглашен в Юрсхольм для получения премии. При этом он получает в каждом случае соответствующую компенсацию дорожных расходов. Премия должна ему вручаться во время торжественной церемонии, организованной в большом зале библиотеки.

4) Если годовые доходы Института превысят указанный выше итог, можно будет учредить, кроме поста директора, другие оплачиваемые штатные должности,

целью которых является поднятие активности пера и обучения, исключительно научные, в области *чистой* математики.

Кроме того, определяется:

А. Правление (Дирекция) Института должно состоять из шведских членов первого класса (чистых математиков) Королевской академии наук Стокгольма, а также, в течение их жизни, из господ профессоров Ивара Фредгольма и Н. Е. Нёрлунда. Кроме того, членом Дирекции должен быть упомянутый Директор Института. Дирекция может также присоединять к себе на более или менее длительный период такого шведского математика, действительно выдающегося, который разделял бы полностью идеи, которыми мы руководствуемся, но который еще не принадлежал бы первому классу Академии наук. Такие же математики могут быть привлечены из других северных стран.

В. Как только будет возможно, нужно пригласить занять пост научного директора и администратора Института математика высокого ранга, в частности, кажущегося квалифицированным именно для такого положения, и деятельность которого будет целиком проходить в области собственных научных исследований и быть в то же время направленной на задачи Института. Он должен будет, если предпочтет это делать, но всегда исключительно с научной целью, читать лекции для ограниченного числа слушателей, действительно одаренных и проявляющих живой интерес к его лекциям.

Что касается материальной точки зрения, то ему нужно создать положение более благоприятное, чем положение любого профессора математики в университетах четырех скандинавских стран. Он должен будет жить в Юрсхольме и, если возможно, в непосредственной близости от библиотеки. Пока ему не будет обеспечено собственное жилище, ему должны возмещаться расходы по квартире. Его назначение будет осуществляться, по представлению Дирекции, Его Величеством Королем, если, как мы осмеливаемся надеяться, Его Величество соблаговолит согласиться с ним.

....

Е. По крайней мере через каждые шесть лет Институт будет устраивать свое торжественное заседание.

Математики четырех скандинавских стран получат персональные приглашения для присутствия на них. Мы осмеливаемся думать, что ввиду важности Института для этих стран, по крайней мере если не будет непредвиденных обстоятельств, все будут откликаться на это приглашение.

Было бы желательно, чтобы день торжества был выбран совпадающим с датой проведения в Стокгольме скандинавских математических конгрессов. При этом должно быть сделано сообщение о деятельности Института после предыдущего торжественного собрания. Церемония должна носить торжественный характер, выставляющий в полном свете высокую миссию математических наук и цель деятельности Института.

Заканчивая, я, Г. Миттаг-Леффлер, должен сказать, что модель, которую я имел перед глазами для Института, основываемого моей женой и мною, представляет Институт Пастера в Париже. Лучше, чем любой университет и любая современная академия, этот институт представляется мне исполняющим миссию учреждения, призванного быть исключительно очагом научных исследований. Университеты всюду наряду с их научной целью имеют другую — которая часто вредит первой — выпускать учителей и служащих. Что касается академий, которые раньше отвечали наилучшим образом чисто научным требованиям, то они страдают от двух помех: с одной стороны, собственная активность их членов проходит вне академий и, с другой стороны, даже если в исключительных случаях это не так, им не хватает стимула, который ученый находит для своих исследований, в обязанности вести или побуждать других исследователей. Наш институт не относится к учреждениям, где могут вести экспериментальные исследования, но, наоборот, в нем есть — что соответствует нуждам чистых математиков — специальная очень богатая библиотека.

При доброй воле в нашей стране можно найти достаточные возможности для создания институтов по естественным наукам, в то время как мало людей, кроме специалистов, которые понимают важное значение чистой математики. По этой причине я, Г. Миттаг-Леффлер, всегда хотел иметь возможность основать такой институт, как этот, который мы надеемся создать нашим завещанием.

Наше завещание обязано своим происхождением живому убеждению, что народ, который не оценивает достаточно высоко значение математики, никогда не будет в состоянии выполнять самые высокие культурные задачи и пользоваться поэтому уважением, которое также является действенным средством сохранять наше положение в мире и защитить наше право жить нашей собственной жизнью.

....

В Заключении завещание содержит предписания, по которым Институт должен начать свою деятельность после смерти Г. Миттаг-Леффлера, и некоторые условия, которые должны быть выполнены при жизни г-жи Сигне Миттаг-Леффлер, а также распоряжения по управлению имуществом и о некоторых небольших пожизненных рентах и других пособиях (Acta mathematica. 1916. T. 40, P. III—X).

4. Работа над архивом Г. Миттаг-Леффлера в СССР

В самом конце Великой Отечественной войны С. Я. Штрайх, занимавшийся много биографией братьев А. О. Ковалевского и В. О. Ковалевского, а также биографией С. В. Ковалевской, поднял вопрос о желательности получения копий переписки русской ученой с разными математиками, хранящейся в Институте супругов Миттаг-Леффлер. Президент Академии наук Союза ССР академик С. И. Вавилов интересовался историей науки (он сам написал прекрасную биографию Ньютона) и поощрял исследования в этой области. По его просьбе из Дьюрсхольма (Юрсхольма) были присланы фотокопии писем С. В. Ковалевской к Г. Миттаг-Леффлеру и письма ученых, иностранных и русских, к ней. В то время еще не существовало такого прекрасного аппарата, как ксерокс, и были присланы фотографии на узкой пленке, что составило большое количество рулонов. С. И. Вавилов пришел в восторг от вида этих рулонов.

В Институте Миттаг-Леффлеров письма разложены по конвертам с надписью на шведском языке «Собрание писем Миттаг-Леффлера», причем для каждого конверта перечислено его содержание. С. И. Вавилов поручил мне работу над этим богатым эпистолярным материалом. В то время я работала в Институте механики АН СССР, заведуя отделом гидродинамики. Директором института был член-корреспондент АН СССР Н. Г. Четаев, который стал оказывать мне постоянную поддержку в работе. Во время моего 12-летнего пребывания в Новосибирске работа над архивными материалами была прервана, но по возвращении в Москву она возобновилась в Институте проблем механики АН СССР при полной поддержке со стороны директора института академика А. Ю. Ишлинского.

В самом начале прежде всего надо было перепечатать все письма на бумаге. Это было сделано в ЛАФОКИ (Лаборатория фото- и киносъемки), состоявшей при Отделении технических наук, в которое входил Институт механики. Получилась огромная груда снимков. Чтобы в них разобраться, лаборантки сделали специальные пометки на первоначальных кадрах. Затем фотокарточки из каждого конверта Миттаг-Леффлера у нас были собраны в виде альбома (в двух экземплярах). Эту работу проводил механик лаборатории отдела. Один экземпляр оставался у нас, другой передавался в Архив АН СССР. Там эти альбомы хранятся в фонде 603, опись 1. Переписка Ковалевской размещена в 16 конвертах (10 от Ковалевской, 6 от Миттаг-Леффлера). Кроме того, в архиве имеются письма к Ковалевской от математиков, иностранных и русских: от Вейерштрасса, Эрмита, Кантора, Кронекера, Чебышева, физика Ханземана и ряда других. Есть небольшое число писем от частных лиц. Письма от русских математиков: Д. Ф. Селиванова, П. Л. Чебышева и от некоторых иностранных математиков были мною опубликованы в журналах, а также на ротапринте Института проблем механики АН СССР.

К разбору, обработке и переводу писем на иностранных языках было привлечено много лиц. Особенно следует отметить работу над шведскими и некоторыми французскими письмами, которую провела Софья Владимировна Ковалевская, дочь Софьи Васильевны, с большим интересом разбиравшая письма матери и Миттаг-Леффлера, к которому питала искреннюю симпатию и которого последний раз навестила в Швеции в 1925 г.

Сначала у Миттаг-Леффлера и Ковалевской переписка шла на французском языке, потом язык стал перемежаться: первое письмо на шведском языке Софья Васильевна отважилась написать 22 августа 1884 г., Миттаг-Леффлер же свою первую записку (пригласительную) послал ей уже 3 января 1884 г., когда она начинала изучать шведский язык. После смерти (1952) Софьи Владимировны шведскими письмами занималась Т. И. Лебедкина.

Одной из участниц разбора писем на французском языке была Любовь Андреевна Воронцова, журналист, корреспондентка газеты «Вечерняя Москва». Она так заинтересовалась перепиской, что у нее сложилась прекрасная беллетризованная повесть о Ковалевской. Книга под названием «С. В. Ковалевская» была издана «Молодой гвардией» в 1957 г., переиздана в 1959 г. и пользовалась большим успехом.

Постепенно шел разбор переписки. Почерк Миттаг-Леффлера оказался очень трудным (он сам иногда спрашивал Ковалевскую, понимает ли она, что он пишет). Впоследствии ряд слов расшифровал профессор К. О. Селениус из Упсалы. В сложном почерке Вейерштрасса мы также плохо разбирались, здесь нам оказал большую помощь профессор К.-Р. Бирман. Немецкие письма переводила Е. О. Вильдт, некоторые французские — Е. В. Червоненкис.

Наконец, я стала собирать плоды работы моих многочисленных помощниц: на Общем собрании АН СССР 15 января 1950 г., посвященном столетию С. В. Ковалевской, затем в Математическом обществе МГУ, в своем институте я делала доклады, используя материалы переписки, по случаю памятных дат Вейерштрасса и Ковалевской. Затем печатала в журналах эти доклады. Отдельно были опубликованы 15 писем Эрмита к С. В. Ковалевской на французском и русском языках, затем письма Дж. Дж. Сильвестра к Миттаг-Леффлеру, в которых речь идет о сонете Сильвестра. В нем воспеваются две дамы (их имена не указаны): исполнительница прекрасных арий и та, «чья звезда над Меларом сияет» (Мелар — озеро в Стокгольме), т. е. Ковалевская.

Некоторые из писем С. В. Ковалевской были опубликованы профессором В. В. Голубевым в его книге «Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки» (М., 1953). Мною опубликованы письма К. Вейерштрасса к С. В. Ковалевской на немецком и русском языках. В настоящее время в ГДР готовится новое издание писем Вейерштрасса. Оно будет снабжено комментариями и, надеюсь, не будет содержать опечаток, которые, к сожалению, закрались в опубликованный мною текст.

Самым широким образом использованы материалы архива Миттаг-Леффлера в книге [207], посвященной переписке С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера. Здесь большую работу провела Елена Петровна Ожигова. Она хорошо знает французский язык и проверила переводы всех писем с французского языка (перевод писем со шведского языка был в свое время сделан Т. И. Лебедкиной).

В присланных из Швеции фотокопиях писем имелись некоторые пробелы, поэтому я обратилась с письмом к профессору Леннарту Карлесону, директору Института Миттаг-Леффлеров, с просьбой выслать копии недостающих писем. В этом отношении большую работу провела фрекен Сильвия Юнгквист (впоследствии ставшая фру Карлесон). Она прислала мне не только копии писем, но и ксерокопию ценной книги Миа Леке «Мир наших родителей» (Стокгольм, 1934), которую я не нашла в наших библиотеках. Затем была прислана ксерокопия большой статьи Миттаг-Леффлера об Абеле. Я чрезвычайно благодарна фру Сильвии Карлесон и сотрудникам Института Миттаг-Леффлеров за оказанную в свое время помощь.

Письма Вейерштрасса и переписка Миттаг-Леффлера с Ковалевской широко использованы мною в недавно вышедшей книге о Вейерштрассе *.

Профессор Роджер Кук, побывавший в Дьюрсхольме и работавший в Архиве Миттаг-Леффлера, сообщил мне, что там имеются записи лекций С. В. Ковалевской в неразобранном виде. Он обнаружил, что первые лекции приведены в двух экземплярах: написанные Ковалевской и переписанные Миттаг-Леффлером. Мне был прислан экземпляр первой лекции, он оказался написанным рукою Миттаг-Леффлера, лекция посвящена введению в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Архив, заботливо созданный Гёстой Миттаг-Леффлером, дал и еще продолжает давать богатый материал для истории математики второй половины девятнадцатого века.

---

* *Кочина П. Я.* Карл Вейерштрасс. М.: Наука, 1985. 271 с.

Литература

Работы Г. Миттаг-Леффлера

1868

1. Satsen 43 (G. N. Lindqvist) lost // Tyds. mat. fys. Bd. 1.

1870

2. Integration av differentialekvationen $f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ // Tyds. mat. fys. Bd. 3.

1872

3. Om skiljandet av rötterna till en synektisk funktion av en variabel: Diss. Uppsala Univ. arsskrift 1872. Stockholm, 1872. 68 s.

1873

4. Försök till ett nytt bevis för en sats inom de definita integralernas teori // Övers. Vet.-ak. Stck. Arg. 30, N 8. S. 35—41.

1874

5. Tvenne följdsatser ur Cauchys teorem om rötter // Övers. Vet.-ak. Stck. Arg. 31, N 7. S. 23–31.

1875

6. Beweis für den Cauchy'schen Satz: Ist eine Funktion $f(x)$ in jedem Punkte innerhalb und auf einer gegebenen geschlossenen Linie, welche sich selbst nicht schneidet, welche nicht unendlich viele Ecken hat und welche in der Ebene der complexen Variabeln x lieght, immer eindeutig, stetig und endlich, und hat sie auch in jedem dieser Punkte eine endliche bestimmte Abgeleitete, so ist das Integral $\int f(x)\,dx$ längs dieser Linie gleich Null // Gött. Nachr. S. 65—73.

1876

7. En metod att analytiskt framställa en funktion av rationell karaktär, vilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrivna oändlig hets punkter, vilkas konstanter äro på förhand angivna // Övers. Vet.-ak. Stck. Arg. 33, N 6. S. 3–16.
8. En metod att komma i analytisk besittning av de elliptiska funktionerna. Helsingfors, 96 s.
9. En metod att i teorien för de elliptiska funktionerna härleda de oändlige dubbelprodukterna utur multiplikationsformlerna // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 33. S. 17—24.

1877

10. Ytterligare om den analytiska framställningen av funktioner utav rationell karaktär // Övers. Vet.-ak. Stck. Arg. 34, N 1. S. 17—32.

11. Om den analytiska framställningen av en funktion av rationell karaktär med en godtyckligt vald gränspunkt // Ibid. S. 33—43.
12. Om den analytiska framställningen av en funktion av rationell karaktär med ett ändligt antal godtyckligt förescrivna gränspunkter // Ibid. N 2. S. 31—41.
13. Till frågan om den analytiska framställningen av en funktion av rationelle karaktär genom kvoten av två beständigt konvergerande potensserier // Ibid. N 3. S. 5—13.
14. Om den analytiska framställningen av funktioner av rationell karaktär utav fiera oberoende variabler. Pars 1—2 // Ibid. S. 3—15, 17—31.

1879

15. Integration av en klass av lineära differentialekvationer // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 36.
16. Funktionsteoretiska studier. 1. En ny serientveckling för funktioner av rationell karaktär // Acta Soc. sci. fenn. P. 11. P. 275—293.
17. Extrait d'une lettre à M. Hermite (sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indèpendante // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 3. P. 269—278.
18. О дифференциальных линейных уравнениях // Речи и протоколы VI съезда русских естествоиспытателей и врачей. СПб., 1879/1880. С. 186—188.

1880

19. Analyse de: E. Sourander. Études nouvelles des lignes et surfaces du second degré. Helsingfors, 1879. Anders Donner, Om uttricken för entydiga elliptiska funktioner. Helsingfors, 1879 // Finsk tidscr. Bd. 8.
20. Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce // C. r. Acad. sci. Vol. 90, N 4. P. 177—180.
21. Sur la théorie des équations différentielles linéaires // Ibid. N 5. P. 218—221.
22. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques // Ibid. N 7. P. 299—300.
23. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre // Ibid. Vol. 91, N 24. P. 978—980.
24. Om integrationen av vissa klasser lineära homogena differentialekvationer // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 37.
25. Några funktionsteoretiska undersökninger, anmälda av G. M. L. // Ibid. 1880/1881. Bd. 23. S. 95—99.

1881

26. Integration av en ny klass av lineära differentialekvationer av andra ordningen med dubbelperiodiska koefficienter och integraler, som i allmänhet icke äro entydiga functioner av den oberoende variablen // Acta Soc. sci. fenn. Vol. 12.
27. Om integrationen av de Hermite'ska differentialekvationerna av tredje och fjärde ordningen, vid vilka integralernas oändlighetsställen äro av ordningen ett // Ibid. P. 411—423.
28. Recherches sur la théorie des fonctions // Bull. sci. math. Sér. 2. Vol. 5.

1882

29. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (9 articles) // C. r. Acad. sci. Vol. 94. P. 414—416, 511—514, 713—715, 781—783, 938—941, 1040—1042, 1105—1108, 1163—1166; Vol. 95. P. 335—336.
30. Fullständig analytisk framställning av varje entydig monogen funktion, vars singulära utgöra en värdemängd av första slaget // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 39, N 2. S. 11—45.
31. Om den analytiska framställningen av en entydig funktion, vilken uti omgivningen av varje punkt, som är belägen innanför en viss cirkelperiferi, endast har ett ändligt antal singulära ställen // Ibid. N 4. S. 21—25.
32. Über die Integration der Hermiteschen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung, bei denen die Unendlichkeitsstellen der Integrale von der ersten Ordnung sind // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 2. 1882/83. Vol. 11. P. 65—80.

1883

33. Ett nytt bevis för Laurents teorem // Övers. Vet.-ak. Stck. Arg. 40, N 9. S. 5—13.— Idem // Medd. Stockholms högskola. N 11.
34. Charles Hermite // Nord. familjebok. Bd. 6. 2 s.

1884

35. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante // Acta math. Vol. 4. P. 1—79.
36. Démonstration nouvelle du théorème de Laurent // Ibid. P. 80—88.

1885

37. Démonstration nouvelle du théorème de Laurent // Mém. Soc. roy. sci. Liège. Sér. 2. Vol. 11.

1889

38. Analytisk framställning av integralerna till en lineär homogen differentialekvation för en cirkelring, vilken icke innesluter något sungulärt ställe // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 46, N 7. S. 417—426.
39. Analytisk framställning av invarianterna till en lineär homogen differentialekvation // Ibid. S. 427—446.
40. Sur les invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène // C. r. Acad. sci. Vol. 109.
41. O. J. Broch: Nachruf // Acta math. Vol. 12. P. 367.

1890

42. Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm // C. r. Acad. sci. Vol. 110. P. 279—280.

1891

43. Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogene // Acta math. Vol. 15. P. 1—32.
44. Sur une transcendante romarquable trouvée par M. Fredholm: Extrait d'une lettre de M. Mittag-Leffler à M. Poincaré // Ibid. P. 278—280.

1893

45. Sophie Kovalevsky: Notice biographique // Acta math. 1892/93. Vol. 16. P. 385—392.
46. Sur une équation différentielle du second ordre // C. r. Acad. sci. Vol. 117.

1894

47. Sur l'intégration de l'équation différentielle $y''=Ay^3+By^2+ +Cy+D+(Ey+F)y'$ // Acta math. Vol. 18. P. 233—246.

1895

48. Sur les invariants des équation différentielles linéaires // J. Math. Bd. 114.

1897

49. Weierstrass // Acta math. Vol. 21. P. 79—82.

1898

50. Om en generalisering av potensserien // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 55. S. 135—138.
51. Om den analytiska framställningen av en allmän monogen funktion // Ibid. S. 375—385.— Idem // Medd. Stockholms högskola. N 179, 180, 184.

1899

52. Sulla rappresentazione analitica di un rame uniforme di una funzione monogena // Atti Accad. sci. Torino. Vol. 34.
53. Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique // C. r. Acad. sci. Vol. 128.

1900

54. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Première note // Acta math. Vol. 23. P. 43—62.
55. Über eine Verallgemeinerung der Taylorschen Reihe // Gött. Nachr.
56. Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle: Extrait d'une lettre à M. E. Picard // Rend. Palermo. Vol. 14. P. 1—8.
57. On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function // Trans. Cambridge Philos. Soc. Vol. 18.
58. Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhägigen Veränderlichen // Jahresber. Dt. Math. Ver. Bd. 9.

1901

59. On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series // Proc. London Math. Soc. Ser. 1. Vol. 32.
60. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Deuxième note // Acta math. Vol. 24. P. 183—204.
61. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Troisième note // Ibid. P. 205—244.
62. Charles Hermite // Ibid. P. 395—396.
63. Sur une formule de M. Fredholm // C. r. Acad. sci. Vol. 132.
64. Sur la série de Bernoulli // Ibid.
65. Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène // Ibid.

66. Sur le terme complémentaire de mon développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence // Övers. Vet.-ak. Stck. Årg. 58, N 10. S. 785—790.
67. A criterion for the recognition of the irregular points of analytic functions // Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.

1902

68. Une page de la vie de Weierstrass // C. r. 2e Congr. intern. math. P. P. 131—153.
69. Sur une extension de la série de Taylor // Ibid.
70. Un mémoire d'Abel // Acta math. Vol. 26. P. 1—2.
71. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Quatrième note // Ibid.
72. Sur l'intégrale de Laplace—Abel // C. r. Acad. sci. Vol. 135.
73. Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe // Arch. Math. und Phys. Ser. 3. Bd. 2.

1903

74. Une généralisation de l'intégrale de Laplace — Abel // C. r. Acad. sci. Vol. 136. P. 537—539.
75. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ // Ibid. Vol. 137. P. 554—558.
76. Niels Henrick Abel // Ord och bild. Stck. Årg. 12. S. 65—85.

1904

77. Sopra la funzione $E_\alpha(x)$ // Rend. Acad. Lincei. Ser. 5. Vol. 13, N 1.
78. Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques // C. r. Acad. sci. Vol. 138.
79. Une nouvelle fonction entière // Ibid.
80. Sur le théorème de M. Jensen // Bull. Soc. math. France. Vol. 32.

1905

81. Sur une classe des fonctions entières // Verhandl. 3. intern. math. Kongr. Heidelberg, 1904. Leipzig.
82. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Cinquième note // Acta math. Vol. 29. P. 101—181.

1907

83. O przedstawienii analytycznem jednoznacznej... (польск. пер. С. Дикштейна статей 1—5). W-wa. 173 s.
84. Niels Henrik Abel // Rev. mois. Vol. 4. P. 48.

1908

85. Lorenz Leonard Lindelöf // Acta math. Vol. 31. P. 407—408.

1909

86. Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe // Atti. 4 Congr. intern. math. Roma, 6—11 apr. 1908. Roma. Vol. 1. P. 67—85.

1910

87. Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après Weierstrass // C. r. Congr. math. Stockholm, 1909. Leipzig; Berlin.

88. Sur un problème d'Abel: Extrait d'une lettre à M. Marcel Riesz // Rend. Palermo. Vol. 30. P. 1—2.

1912

89. Zur Biographie von Wierstrass // Acta math. Vol. 35. P. 29—65.

1915

90. Grundläggande satser inom teorien för integralen $I(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\theta(v)t} F(v)\, dv$ // Beretning 3 Skand. Mat. Kongr. Kristiania.
91. Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet // C. r. Acad. sci. Vol. 160.
92. Über die analytische Darstellung eines eindentigen Zweiges einer monogenen Funktion // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl.
93. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Ibid.
94. Les fondements de la théorie des nombres // Rev. gén. sci. pures et appl. Vol. 26.

1916

95. Testament 16 März 1916 // Acta math. Vol. 40. P. III—X.
96. Sur un théorème de M. Serge Bernstein // Tôhoku Math. J. Vol. 9.

1919

97. Om lineär forsattning av analytiska funktioner: Ur ett brev till prof. Nörlund // Nyt. Tidsskrift för Mathematik. Köbenhavn.

1920

98. Discours d'ouverture // C. r. 4^{e} Congr. math. scand. Stockholm, 1916. Uppsala. 11 p.
99. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Sixième note // Acta math. Vol. 42. P. 285—308.
100. Talet. Inledning till teorien för analytiska funktioner // Det. Kgl. Dan. Videnskab. Selskab. Math.-fys. Medd. 65 s.
101. Die Zahl. Einleitung zur Theorie der analytischen Funktionen // Tohoku Math. J. Vol. 17. 53 p.

1921

102. Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre les limites imaginaires // C. r. Acad. sci. Vol. 173. P. 92—97.

1922

103. Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre les limites imaginaires // C. r. Acad. sci. Vol. 174.
104. Cauchys teorem beträffande integralen av en funktion mellan imaginära gränser // Ark. mat. astron. och fys. Bd. 17, N 6. S. 1–9.
105. Der Satz von Cauchy über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen // J. Math. Bd. 152.

1923

106. Weierstrass et Sonja Kowalewsky // Acta math. Vol. 39. P. 133—198.

107. Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre les limites imaginaires // J. Skand. Math. Kongr. Helsingfors.
108. Was ist Zahl. Unendlichkeit und Kontinuität? // Ztschr. med. Chem.
109. An introduction to the theory of elliptic functions // Ann. Math. Vol. 24. 81 p.
110. Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass // Acta math. Vol. 39. P. 1—57.

1924

111. Vad är tal? Oändlighet? Kontinuitet? 1—2 // Ark. math. astron. och fys. Bd. 18—19.
112. An introduction to the theory of analytic functions // The monist. Vol. 34, N 3.

1925

113. Sur la série de Dirichlet et la série de facultés: Extrait d'une lettre à M. N. E. Nörlund // Acta math. Vol. 46.
114. Tale af prof. G. Mittag-Leffler // 6. Skand. Math. Kongr. København.
115. Cauchy's theorem on the integral of a function between imaginary limits // Quart. J. Vol. 50.

1926

116. A method of deriving the infinite double products in the theory of elliptic functions from the multiplication theorems // Ann. Math. Vol. 27.
117. Entstehung und Entwicklung der internationalen und Skandinawischen Mathematischen Kongressen // Communs Soc. Sci. Fenn. N 114.
118. Auszug aus einem Briefe von G. Mittag-Leffler an den Herausgeben dieser Zeitschrift // J. Math. Bd. 157.

1927

119. Zusätzliche Bemerkungen (к статье: Schoenflies, Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen) // Acta math. Vol. 50. P. 25—26.

Другие авторы

120. Académie des Sciences // Le temps. 1886. Mai.
121. *Appell.* Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et leur application aux développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques // Acta math. 1890. Vol. 13. P. 1—174.
122. *Borel E.* Leçons sur les séries divergentes. P., 1901.
123. *Cantor G.* Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten // Math. Ann. 1879. Bd. 15. S. 1—8; 1880. Bd. 17. S. 355—358; 1882. Bd. 20. S. 113—122; 1883. Bd. 21. S. 51—59; 1884. Bd. 23. S. 453—488.
124. *Cantor G.* Sur les ensembles infinis et linéaires des points. I—IV // Acta math. 1883. Vol. 2. P. 349—380.

125. *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Ztschr. Philos. und philos. Kritik. 1887. Bd. 91. S. 81—125. 1888. Bd. 92. S. 240—265.
126 *Carleman T.* Magnus Gustaf Mittag-Leffler/Obituary by F. Carleman. Obituaries memb // Roy. Swed. Akad. Sci. N 123. 8 p.
127. *Casorati T.* Generalizzazione di alcuni teoremi dei Sig[i] Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, Sulle equazioni differenziali lineari der 2° ordine // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 2. 1880—1882. Vol. X. P. 224—232.
127a. Aggiunte a recenti lavori dei Sig[i] Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa // Ibid. Ser. 2a.
128. *Cauchy A.* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. 1[e] pt. Analyse algébrique. P., 1821.
129. *Domar Y.* On the foundation of Acta mathematica // Acta math. 1982. Vol. 148. P. 3—8.
130. *Elfving G.* The history of mathematics in Finland 1828—1918. Helsinki. 1981. 195 p.
131. *Ericksson Åke.* Mittag-Lefflers stiftelse för gränslös matematik // Värt att veta i Danderyd: Aktuell information frän kommunen. 1981. N 3.
132. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. 1815—1865/Hrsg. H. Behnke, K. Kopfermann. Köln; Oplanden: Westdeutsch. Verl. 1966. 612 S.
133. *Fuchs L.* Über Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen // Sitzungsber. Preuss Akad. Wiss. 1884. S. 699—710.
134. *Grattan-Guinness J.* An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung // Acta math. 1970. Vol. 124. P. 65—107.
135. *Grattan-Guinness J.* Materials for the history of mathematics in the Institute Mittag-Leffler // Isis. 1971. Vol. 62. P. 363—374.
136. *Grönfeldt St. G.* Mittag-Lefflers matematiska bibliotek, systematisk förteckning upprättadt av St. Grönfeldt. Stockholm; Djursholm, 1914.
137. *G. H. H.* (*Hardy G. H.*) Obituary notices. Gösta Mittag-Leffler, 1846—1927 // Proc. Roy. Soc. London A. 1928. Vol. 119, N 781. P. V—VIII.
138. *Helmholtz H.* Zählen und Messen Erkenntnistheoretisch betrachtet // Philos. Aufs. 1887. S. 14—52.— Idem // Schriften zur Erkenntnis Theorie. B., 1921. S. 70—108.
139. *Hermite Ch.* Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Brioschi sur l'équation de Lamé // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 2. 1879. Vol. 9. P. 21—24.— Idem // Oeuvres. 1912. Vol. III. P. 475—478.
140. *Hermite Ch.* Cours de M. Ch. Hermite, professée pendant la II semestre, 1881—1882/Rédigée par M. Andoyer. élève de l'Ecole Normale supérieure. P., 1882 (Litogr.).
141. *Hill G. W.* On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta math. 1886. Vol. 8. P. 1—36.
142. *Hille E.* In retrospect // Math. Intell. 1980. Vol. 3, N 1. P. 3—13.
143. *Hille E.* Classical and functional analysis: Selected papers. Cambridge; etc.: MJT press. In Retrospect. 1975. P. XIII—XXVI.

144. *Jentsch W.* Die Leopoldina und ihre halleschen Mathematiker. 100 Jahre Leopoldina in Halle, 1878—1978. Halle (Salle): Dt. Akad. Naturforsch. Leopoldina, 1979. 51 S.
145. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert. B., 1926. Bd. 1. 385 S.
146. *Kovalevsky S.* Ur ryska lifvet: Systrarna Rajevski. Stockholm, 1889. 277 s.
147. *Kovalevskya S.* A Russian childhood/Transl., ed. and introd. by B. Stillman. With an analysis of Kovalevskaya's mathematics by P. Y. Kochina. N. Y. etc.: Springer, 1978. 252 p.
148. *Kronecker L.* Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen // J. Math. 1886. Bd. 99. S. 329—371.
149. *Kronecker L.* Vorlesungen über Mathematik. I Abschnitt. Bd. 1, H. 2. Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig, 1901.
150. *Laurent A.* Extention du théorème de Mr. Cauchy, relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable // C. r. Acad. sci. 1843. Vol. 17.
151. *Leche-Löfgren Mia.* Våra föräldrars värld. Stockholm, 1934. 232 s.
152. *Leffler Anna Carlotta, Dissa di Cajanello.* Sonja Kovalevsky // Hvad jag upplefvat tillsammans med henne och hvad hon berättat mig om sig själf. Stockholm, 1892. 196 s.
153. *Linder G.* Sällskapliv i Stockholm under 1880 och 1890-talen. Stockholm, 1918. 174 s.
154. Mittag-Leffler G. et S. Testament 16/3 1916 // Acta math. 1916. Vol. 40. P. III—X.
155. *Nörlund N. E.* G. Mittag-Leffler // Ibid. 1927. Vol. 50. P. I—XXIV.
156. *Osgood W. F.* Lehrbuch der Functionentheorie. 2. Aufl. Teubner, 1912. Bd. 1.
157. *Picard É.* Sur les fonctions entières // C. r. Acad. sci. 1879. Vol. 88. P. 1024—1027; Vol. 89. P. 662—665.— Idem. // Ann. sci. École Norm. sup. 1880. Vol. 9. P. 145—166.
158. *Picard É.* Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques // C. r. Acad. sci. 1880. Vol. 90. P. 293—295.
159. *Picard É.* Sur une classe d'équations différentielles linéaires // Ibid. N 3. P. 128—131.
160. *Picard É.* Lectures on mathematics // Clark Univ. Decenn. Celebration. 1899.
161. *Poincaré H.* Oeuvres. P., 1952. Vol. 7. 654 p.
162. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta mathem. 1885. Vol. 7. P. 259—380.
163. *Poincaré H.* Sur les fonctions fuchsiennes // Acta mathem. 1882. Vol. 1. P. 193—294. (Рус. пер.: Избр. труды. М., 1974. Т. 3. С. 63—144.)
164. *Poincaré H.* Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique // Acta math. 1890. Vol. 13. P. 1—270.
165. *Poincaré H.* Sur les groupes des équations linéaires // Acta math. 1884. Vol. 4. P. 201—311.

166. *Poincaré H.* Sur les courbes définies par les équations différentielles // C. r. Acad. Sci. 1884. Vol. 98. P. 287—289.
167. *Poincaré H.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta math. 1886. Vol. 8. P. 295—344.— Idem // Избр. труды... 1971. Т. 1.
168. *Riemann B.* Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass: 2 Aufl. Leipzig; Teubner, 1892.
169. *Riesz Marcel.* Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen // Acta math. 1916. Vol. 40. S. 349—361.
170. *Runge C.* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen // Ibid. 1885. Vol. 6. P. 229—244.
171. *Runge C.* Zur Theorie der analytischen Funktionen // Ibid. P. 245—248.
172. *Runge C.* Über die Darstellung willkürlicher Functionen // Ibid. Vol. 7. P. 387—392.
173. *Runge I.* Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk. Göttingen, 1949. 214 S.
174. *Schoenflies A.* Zur Erinnerung an Georg Cantor // Jahresber. Dt. Mathematikverein. 1922. Bd. 31. S. 99, folg.
175. *Schoenflies A.* Die Krisis in Cantor's mathematischen Schaffen // Acta math. 1927. Vol. 50. P. 1—23.
176. *Schering K.* Über das Borchardt'sche arithmeticogeometrische Mittel aus 4 Elementen // J. Math. 1878. Bd. 85.
177. *Stillman B.* Sofya Kovalevskaya: Growing up in the sixties // Rus. Litterat. Triquart. 1973. N 9. S. 275—302.
178. *Tchebycheff P. L.* Sur la représentation des valeurs limites des integrales par les résidus intégraux // Acta math. 1887. Vol. 9. P. 35—56.
179. *Tchebycheff P. L.* Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs. Une lettre adressée à M-me Sophie Kowalevsky // Ibid. P. 182—184.
180. *Tchebycheff P.* Angenäherte Darstellung der Quardratwurzel einer Veränderlichen mittels einfacher Brüche // Ibid. 1894. Vol. 18. P. 113—132.
181. *Weierstrass K.* Mathematische Werke. 1894—1927. Bd. I—VII.
182. *Weierstrass K.* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. B., 1876.
183. *Weierstrass K.* Abhandlungen aus der Funktionenlehre. B., 1886. 262 S.
184. *Weierstrass K.* Über einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1880. S. 707—717.
185. *Weierstrass K.* Über die analytische Darstellung sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Erste Mitteilung // Berlin. Sitzungsber. 1885. S. 354.— Idem // J. math. pures et appl. 4e sér. 1886. Vol. II.
186. *Weierstrass K.* Zur Functionenlebre // Ibid. Aug. S. 719—743; Nachtrag 1881. S. 228—230.
187. *Weierstrass K.* Sur la théorie des fonctions elliptiques/Trad. par A. Pautonnier // Acta math. 1885. Vol. 6. P. 169—228.
188. *Weil André.* Mittag-Leffler as I remember him // Acta math. 1982. Vol. 148. P. 9—13.
189. *Wussing H., Arnold W.* Biographien bedeutender Mathematiker. B.: Volk und Wissen, 1975. 534 S.
190. [*Вейерштрасс К.*] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. 1871—1891. М.: Наука, 1973. 312 с.

191. *Голубев В. В.* О звезде Миттаг-Леффлера // Мат. сб. 1913. Т. 29, вып. 1. С. 171—181.
192. *Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции: Автоморфные функции. М.: Физматгиз, 1961. 455 с.
193. *Гурвиц А.* Теория аналитических и эллиптических функций/Пер. Ю. В. Икорникова Ред. Н. Е. Кочин. Л.; М.: Гостехтеориздат, 1933. 344 с.
194. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ГОНТИ, 1937. Ч. 1. 432 с.
195. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с. (Классики науки).
196. *Ковалевская С. В.* Воспоминания и письма/Отв. ред. М. В. Нечкина; коммент. С. Я. Штрайха. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 576 с.
197. *Ковалевская С. В.* Воспоминания. Повести/Отв. ред. П. Я. Полубаринова-Кочина. М.: Наука, 1974. 559 с.
198. *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981. 312 с.
199. *Кочина П. Я., Кук Р.-Л.* Неизвестное письмо П. Л. Чебышева С. В. Ковалевской // Вопр. истории естествознания и техники. М., 1983. Вып. 2. С. 162—166.
200. *Лагерлёф С.* Полное собрание сочинений: В 12 т. М., 1909—1911.
201. *Лагерлёф С.* Чудесное путешествие Нильса Хольгерсона по Швеции: В 2 т. М., 1908—1909.
202. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 176 с.
203. *Леффлер А.-К.* Софья Ковалевская: Что я пережила с нею и что она сама рассказала мне о себе: Воспоминания А.-К. Леффлер, герцогини ди Кайянелло/Пер. со швед. М. Лучицкой. СПб.: Изд. ред. журн. «Северный вестник», 1893. 315 с.
204. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. 2-е изд. М., Т. 1. 1967; Т. 2. 1968.
205. Математика XIX века: Геометрия: Теория аналитических функций/Ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1981. 269 с.
206. Математическая энциклопедия/Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия. Т. 1. 1977; Т. 2. 1979; Т. 3. 1982; Т. 4. 1984.
207. Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера/Сост. П. Я. Кочина и Е. П. Ожигова. Отв. ред. А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1984. 312 с.
208. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Из переписки С. В. Ковалевской.— Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, вып. 4 (50). С. 103—125.
209. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К биографии С. В. Ковалевской: (По материалам ее переписки) // Историко-математические исследования. М.: Гостехтеориздат, 1954. Вып. 7. С. 666—712.
210. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Письма Ш. Эрмита к С. В. Ковалевской // Тр. Ин-та истории естествознания и техники. 1957. Т. 19. С. 650—689.
211. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Дж. Дж. Сильвестр и С. В. Ковалевская // Вопр. истории естествознания и техники. 1957. Вып. 5. С. 156—162.
212. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3 т./Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда. И. Б. Погребысского. М., 1971—1974.

213. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехтеоризддат, 1948.
214. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иност. лит., 1951. 504 с.
215. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968. 279 с.
216. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений: В 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947—1951.
217. *Эрмит Ш.* Курс анализа/Пер. В. М. Озерецкого. Под ред. Н. М. Гюнтера. Предисловие А. Н. Крылова. М., 1936. 383 с.
218. *Dugac P.* Eléments d'analyse de K. Weierstrass.— Arch. Hist. Exact. Sci. 1973. Vol. 10.

Даты жизни и деятельности Г. Миттаг-Леффлера

1846 г. 16 марта — родился Густав (Гёста) Магнус Леффлер, впоследствии Миттаг-Леффлер.

1865—1870 гг.— студент, затем оставленный[1] при университете города Упсалы.

1872 г.— получил ученую степень доктора философии в Упсале.

1872—1873 гг.— доцент математики в университете Упсалы.

1873—1876 гг.— годы ученья во Франции и Германии в качестве стипендиата Упсальского университета.

1877—1881 гг.— профессор математики в Гельсингфорсском университете.

1881—1911 гг.— профессор математики в Высшей школе Стокгольма.

1882 г.— женитьба на Сигне Юлии Эмилии Линдфорс.

1882 г.— основание журнала «Acta mathematica».

1883 г.— избран членом Шведской королевской академии наук.

1885—1886 и 1891—1892 гг.— ректор Высшей школы в Стокгольме.

1896 г.— избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

1896 г.— избран иностранным членом Лондонского королевского общества.

1899 г.— избран иностранным членом Академии деи Линчеи в Риме.

1900 г.— избран членом-корреспондентом Парижской академии наук.

1926 г.— избран почетным членом Академии наук СССР.

1927 г. 12 июля — Г. Миттаг-Леффлер скончался.

Г. Миттаг-Леффлер получил почетные звания доктора наук (honoris causa) от шести университетов: Болоньи (1888), Оксфорда (1894), Кембриджа (1899), Христиании (1902), Абердина (1906) и университета св. Андрея (1911).

Звания почетного члена или члена-корреспондента академий наук Г. Миттаг-Леффлер получил от 45 академий наук и математических обществ. Список их см. [155. С. XXII—XXIII].

---

[1] В современном понятии — аспирант.

Указатель имен *

* В указателе нет ссылок на страницы при очень часто встречающихся именах: Вейерштрасса, С. В. Ковалевской, С. Миттаг-Леффлера.

Оглавление

Пелагея Яковлевна Кочина

Гёста Миттаг-Леффлер

1846—1927

Утверждено к печати
Редколлегией серии
«Научно-биографическая литература»
Академии наук СССР

Редактор **В. А. Никифоровский**
Редактор издательства **И. М. Столярова**
Художественный редактор **В. Ю. Кученков**
Технический редактор **И. В. Бочарова**
Корректоры **Н. Б. Габасова, Н. И. Казарина**

ИБ № 35236

Сдано в набор 20.05.87
Подписано к печати 28.10.87
Т-21349. Формат $84 \times 108^1/_{32}$
Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная новая
Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76.
Усл. кр. отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,9.
Тираж 7900 экз. Тип. зак. 691
Цена 50 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

В издательстве «Наука» готовится к печати:

Ветров Г. С.

С. П. Королев в авиации: Идеи. Проекты. Конструкции

10 л. 70 к.

В книге рассказывается о событиях в авиационной жизни нашей страны, с которыми были связаны творческие поиски основоположника практической космонавтики С. П. Королева. Рассказывается об особенностях проектов С. П. Королева планеров и самолетов, о зарождении у него интереса к реактивным летательным аппаратам. В книге охвачен период с 1923 по 1935 г.

Для читателей, интересующихся историей советской авиации и космонавтики.

Воспоминания об академике И. В. Курчатове

36 л. 4 р. 10 к.

Сборник содержит более 60 статей – воспоминаний ученых, инженеров, рабочих, видных деятелей нашей страны о выдающемся организаторе советской науки, ученом-физике, трижды Герое Социалистического Труда, лауреате Ленинской премии, академике И. В. Курчатове (1903–1960). Статьи охватывают практически все периоды жизни и творчества И. В. Курчатова и дают достаточно полное представление о развитии направлений в науке, которые он возглавлял.

Для физиков, читателей, интересующихся историей развития советской науки.

Воспоминания об академике Л. А. Арцимовиче.

2-е изд.

18 л. 2 р. 30 к.

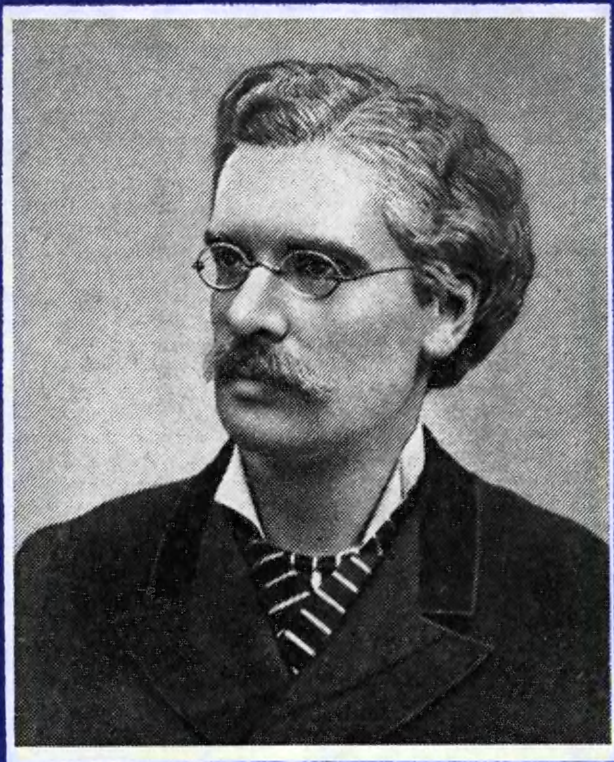
Книга посвящена жизни и деятельности известного советского ученого-физика, организатора науки, разносторонне одаренного человека Льва Андреевича Арцимовича (1909–1973). Первое издание вышло в 1981 г. Настоящее издание дополнено воспоминаниями крупных советских ученых-академиков А. П. Александрова, Е. П. Велихова, А. Б. Мигдала, Ю. А. Осипьяна, Б. К. Вайнштейна и др. В качестве приложения в книге помещены документы и статьи, написанные самим Л. А. Арцимовичем, отражающие его разностороннюю научную и общественную деятельность.

Для широкого круга читателей, интересующихся развитием науки.

Для получения книг почтой заказы просим направлять по одному из адресов: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

480091 **Алма-Ата**, 91, ул. Фурманова, 91/97;
370005 **Баку**, 5, Коммунистическая ул., 51;
690088 **Владивосток**, Океанский проспект, 140;
320093 **Днепропетровск**, проспект Ю. Гагарина, 24;
734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95;
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4;
277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148;
343900 **Краматорск**, Донецкой области, ул. Марата, 1;
443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2;
220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72;
630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской проспект, 22;
620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137;
700185 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6;
450059 **Уфа**, 59, ул. Р. Зорге, 10;
720000 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42;
310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87.

П. Я. Кочина Гёста МИТТАГ-ЛЕФФЛЕР



П. Я. Кочина

Гёста
МИТТАГ-ЛЕФФЛЕР

50 коп.