АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Р. И. ГАЛЧЕНКОВА,
Ю. Г. ЛУМИСТЕ,
Е. П. ОЖИГОВА,
И. Б. ПОГРЕБЫССКИЙ

Фердинанд МИНДИНГ

1806 • 1885

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Ленинградское отделение
Ленинград • 1970

УДК 92 Миндинг: 51 «18»

Фердинанд Миндинг. Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б. Изд-во «Наука», Ленингр. отд., Л., 1970, 1—225.

Книга представляет собой очерк жизни и деятельности крупного математика XIX в. профессора Дерптского университета Ф. Г. Миндинга (1806—1885). В монографии использованы материалы архивов нашей страны и ГДР. Главы о научном творчестве Ф. Г. Миндинга освещают его многогранную деятельность в разных областях математики и механики. Прослеживается развитие идей Миндинга до нашего времени. Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся историей математики. Рис. — 13, табл. — 2, библ. — 289 назв.

Ответственный редактор

д-р физ.-матем. н. И. Б. ПОГРЕБЫССКИЙ

2-2-1
9-БЗ-29-70

Фердинанд Миндинг.
1806—1885.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена жизни и деятельности профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Фердинанда Готлибовича Миндинга (1806—1885), члена-корреспондента и почетного члена Петербургской Академии наук. Он родился в польском городке Калише, учился в Галльском и Берлинском университетах, преподавал в Берлине, а с 1843 г. и до конца своих дней жил и работал в России, в Дерпте. Поэтому материалы о Миндинге находятся в архивах городов разных государств.

Миндинг был ученым-энциклопедистом. Особенно успешно он работал в области геометрии, вариационного исчисления, интегрирования алгебраических функций и интегрирования дифференциальных уравнений. Но ему не были чужды и другие области математики, а также геодезия и механика. Для того чтобы осветить более или менее полно его научное творчество, нужно было объединить усилия ряда специалистов. Таким образом, книга о Миндинге является плодом совместной работы математиков и историков математики разных городов. До сих пор творчество Миндинга освещалось лишь в статье А. Кнезера [135] и отчасти в работах И. Я. Депмана, Г. Ряго и др.

Первая часть книги — «Жизненный путь Ф. Г. Миндинга» — написана Ю. Г. Лумисте (главы 1—4) и Е. П. Ожиговой (глава 5) на основе собранных ими материалов эстонских архивов, Архива Академии наук СССР и ЦГИАЛ (Ленинград) и архивов университетов Галле и Берлина (ГДР). Во второй части — «Научное творчество Ф. Г. Миндинга» — главы 6, 7, 10 написаны Ю. Г. Лумисте, главы 8, 9, 14 принадлежат Е. П. Ожиговой; главы 11, 12 и 13 написаны Р. И. Галченковой, а глава 15 (раздел о работах по механике) — И. Б. Погребысским. Библиографию подготовили к печати Р. И. Галченкова и Е. П. Ожигова. Материалы из архивов ГДР собраны при содействии доктора К.-Р. Бирмана (Берлин), которому авторы выражают свою признательность. Они благодарят также сотрудников архивов АН СССР, ЦГИАЛ, Эстонии и Германской Демократической Республики за большую помощь и внимание.

Авторы надеются, что их коллективный труд принесет пользу как историкам математики, так и интересующимся наукой XIX в. специалистам в области математики и механики.

В книге имеется библиография, состоящая из трех разделов: 1) работы Ф. Г. Миндинга, 2) литература, связанная с трудами или биографией Миндинга, на иностранных языках, 3) литература, связанная с трудами или биографией Миндинга, на русском языке. Нумерация в списке литературы единая. Работы Миндинга занумерованы до № 72 включительно. Литература в списках 2) и 3) расположена в алфавитном порядке. Ссылки на литературу даются в квадратных скобках (например, [27, стр. 172]).

Ссылки на архивные материалы даны подстрочно. Кроме библиографии, в книге имеются именной указатель и список сокращений.

Часть I

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ

Глава 1

ДЕТСТВО И ГОДЫ УЧЕБЫ

В беспокойные годы наполеоновских войн начала XIX столетия в маленьком польском городе Калише (Kalisz) начался жизненный путь человека, которому посвящена эта книга. Город Калиш располагался в центральной части так называемой Великой Польши, которая в 1793 г. по второму разделу Речи Посполитой перешла под власть Пруссии.

В Великую Польшу хлынул поток немецких переселенцев. В этом потоке был молодой юрист Эрнст Готлиб Миндинг, который через некоторое время получил место юрисконсульта города Калиша. 23 января 1806 г. его супруга, урожденная Хольст, родила сына, которому родители дали имя Эрнст Фердинанд Адольф.

Уже в следующем году положение немецкого населения в Великой Польше коренным образом изменилось. С Тильзитским миром (26 июня 1807 г.) Пруссия потеряла земли, захваченные при разделе Польши. Из них образовалось Варшавское герцогство. По-видимому, эти события были причиной того, что Эрнст Миндинг с супругой и годовалым сыном двинулись на запад. Новым местом жительства он избрал небольшой город Гиршберг в Силезии.[1]

В 1740—1742 гг. большая часть Силезии, в частности и Еленогорская долина, была захвачена Пруссией, которая начала проводить политику систематической гер-

---

[1] После второй мировой войны город принадлежит Польше и называется Еленя Гура (Jelenia Góra).

манизации населения. В 1807 г., когда в Гиршберг переехала семья Миндинга, там уже торжествовали немецкий дух и немецкий образ жизни. По своему географическому положению город находится в живописной долине, которую с юга окружает самая высокая горная группа Судет — Крконоше, с севера — Качавские горы, с запада — невысокие склоны Изерских гор, вплотную приблизившиеся к городу, с востока — Каменна-Гура. Долину пересекает река Бобрава — левый приток Одры, в которую у самого города впадает река Кам.

В этом городке протекали детские и школьные годы Фердинанда Миндинга. В Гиршберге его отец был асессором уездного и городского суда,[2] в подчинении которого находилось двенадцать окружных судов прилежащих районов.

Фердинанду было всего десять лет, когда умер его отец. Мать вышла замуж вторично — за коллегу отца, асессора юридической коллегии Гиршберга Людвига Томаса. Впоследствии Миндинг с большим уважением вспоминал своего отчима, который заменил ему родного отца. В автобиографии, написанной по случаю представления докторской диссертации в Галле,[3] он отмечал, что «связан с ним наивысшим уважением на всю жизнь».

Путь Миндинга к знанию начался в Гиршбергской гимназии, в учебном заведении, имевшем более чем столетнюю историю (она была основана в 1712 г.). В своей автобиографии Миндинг впоследствии вспоминал: «Образование получил в Гиршбергской гимназии, которая в то время процветала под руководством превосходнейшего мужа Кёрбера». Ректор Кёрбер был, по-видимому, выдающейся личностью в тогдашнем Гиршберге — его помнили спустя целое столетие.[4] Он был специалистом по древним языкам, и образование, которое давала в то время гимназия, было более классическим, чем реальным. Миндинг учился в гимназии очень успешно и окончил ее

---

[2] В книге поступивших в университет Галле за 1824 г. после фамилии отца Ф. Миндинга стоит: Asessor bei Land-und Stadtgericht.

[3] Archiv des Martin-Lüther-Universitäts Halle-Wittenberg, Rep. 21, 11, 31 Dissertat. Minding.

[4] Когда в 1912 г. праздновали 200-летие Гиршбергской гимназии, то в торжественном шествии следовала группа гимназистов, которая изображала сцену прощания ректора Кёрбера с его учениками, добровольно уходившими на войну с Наполеоном.

в 1824 г. первым учеником. В его аттестате зрелости по каждому предмету стояла наивысшая оценка. Вероятно, еще в гимназии он превосходно овладел латинским языком, на котором им написаны многие документы и ученые труды.

По окончании гимназии перед Миндингом встал вопрос о продолжении образования. Ректор Кёрбер уговорил юношу посвятить себя изучению древних языков, причем специализироваться по древнееврейскому языку [268]. Такой план был одобрен семьей Миндинга.

В 1824 г. он записался в студенты Галльского университета, выбор которого был не случайным. Университет в Галле, основанный в 1694 г., был одним из лучших германских университетов. С этим учебным заведением была связана деятельность математика и философа-идеалиста Христиана Вольфа (1679—1754), математические руководства которого были очень популярны в XVIII в. Свой «математический» метод Вольф применял не только в физических и технических науках, но и в теологии, и в юриспруденции. Любовь к точным наукам и смелые взгляды Вольфа вызвали недовольство властей и в ноябре 1723 г. последовал приказ, обязывавший Вольфа покинуть Галле в течение 48 часов. Изгнанный из Пруссии, он устроился в Марбургский университет, где в 1736—1739 гг. был учителем М. В. Ломоносова [245].

В Галльском университете в 1783—1806 гг. работал филолог-классик Фридрих Август Вольф (1759—1824). Он превратил классическую филологию в некую самостоятельную «науку о древности», охватывающую все стороны античной жизни.

В начале XIX в. университет в Галле сильно пострадал от французской интервенции. После Тильзитского мира 1807 г. Галле был отрезан от Пруссии, студенты разъехались, многие профессора покинули город. Лишь в 1813 г. после освобождения от оккупации университет восстановил свою деятельность. В 1817 г. к нему был присоединен Виттенбергский университет, основанный в 1502 г., который славился в XVI в. как центр реформизма и как место деятельности Мартина Лютера,[5] основателя протестантизма в Германии.

---

[5] В настоящее время Галле-Виттенбергский университет в ГДР носит имя Мартина Лютера (Martin-Lüther-Universität Halle-Wit-

Слава Галле как центра классической филологии была восстановлена благодаря деятельности молодого способного ученого Карла Рейсига (1792—1829), получившего в 1820 г. место ординарного профессора в Галльском университете. С 1817 г. Рейсиг читал лекции в Иене, где встретился с Фр. Вольфом, который заметил его способности и посоветовал переехать в Галле.

Известность Галльского университета, особенно в области древних языков, а также сравнительная близость Галле к Гиршбергу были, по-видимому, основными причинами, вследствие которых выбор Миндинга пал именно на этот университет. 18 мая 1824 г. в книге поступающих в университет появилась следующая запись (под № 66):

Имя и фамилия студента — Эрнст-Фердинанд-Адольф Миндинг
Родина и место рождения — Калиш в королевстве Польском
Возраст — 18
Специальность — филология
Фамилия и имя отца — Эрнст Готлиб М[индинг]
Должность или занятие отца — асессор уездного и городского суда
Место жительства отца — г. Гиршберг
Из какой школы или университета и под каким номером выдан аттестат — Гиршберг, № 1
Улица и номер дома — Альтмаркт № 696

Наряду с филологией на философском факультете Галльского университета преподавали также математику, естественные науки, историю и политико-экономические науки. Кроме философского, были еще медицинский, юридический и теологический факультеты. Избранную специальность Миндинг изучал у К. Рейсига [174].

В этом университете Миндинг слушал лекции только два семестра. В своей автобиографии он отмечает, что слушал лекции Герлаха и Гинрикса по философии, Кемтца — по физике, Рейсига — по филологии.

---

tenberg), оказавшего сильное влияние на процесс формирования единого языка немецкого народа.

Из лекций, прослушанных Миндингом в Галльском университете, наиболее полезными для него оказались впоследствии лекции Людвига Фридриха Кемтца (1801—1867), тогда еще молодого лектора, который начал свою преподавательскую деятельность в 1823 г. как помощник профессора физики И. С. Х. Швейгера (Schweigger). Быть может, именно он возбудил у Миндинга интерес к точным наукам. Позже Кемтц приобрел известность в научном мире благодаря своей трехтомной монографии по метеорологии (1831—1836). Спустя 20 лет Миндинг и Кемтц снова встретились в России как профессора Дерптского университета.

Полного удовлетворения от занятий гуманитарными науками в Галле Миндинг, видимо, не получил. Освободившись от постороннего влияния и обнаружив, что классическая филология не отвечает его интересам, юноша начал искать свой собственный путь в науке. Весной 1824 г. Миндинг оставил Галле, переехал в Берлин и записался в студенты Берлинского университета.

Созданный в трудные дни наполеоновского нашествия, Берлинский университет был значительно моложе Галле-Виттенберского. После Тильзитского мира вся территория западнее Эльбы вышла из состава Пруссии, которая тем самым потеряла большинство своих университетов. Интересы страны настоятельно требовали создания нового университета в центре страны, в Берлине, где для этого уже давно были самые благоприятные условия. В Берлине действовали Академия наук, учрежденная благодаря заботам Лейбница еще в 1700 г., Медико-хирургическая коллегия, Королевская библиотека, Академия художеств, Обсерватория и др. Здесь собрались такие выдающиеся мыслители своего времени, как И. Г. Фихте, Фр. Шлейермахер, филолог Фр. Вольф, покинувший Галле, и др. [175]. Акт основания университета был подписан 16 августа 1809 г., но открытие его состоялось лишь в октябре 1810 г. Большую работу по организации университета проделал Вильгельм фон Гумбольдт, филолог, искусствовед и философ-гуманист, вошедший в правительство как заведующий отделом просвещения.[6] Он приложил немало

---

[6] В честь В. Гумбольдта и его брата Александра фон Гумбольдта, знаменитого естествоиспытателя, Берлинскому универ-

усилий, чтобы пригласить в университет наиболее выдающихся немецких ученых. Многие специальности действительно были представлены очень сильно. На философском факультете нового университета с самого начала читали лекции философы Фихте и Шлейермахер (в 1816 г. к ним присоединился Гегель), филологи Фр. Вольф и Бек (Boeckh), физики Турте (Tourte) и Эрман (Ermann), минералог Вейс (Weiss) и др.

В менее надежных руках в Берлинском университете в первые два десятилетия его существования была математика. К. Гаусс отказался переехать в Берлин и предпочел остаться в Геттингене. В самом Берлине крупных математиков тогда не было. Первые преподаватели математики в Берлинском университете — члены Берлинской Академии наук Грюсон (Grüson) и Бурья (Burja), а также профессора университета Траллес (Tralles) и Эйтельвейн (Eytelwein) — ограничивались в своих лекциях и нередко даже в своих научных работах в основном элементарной математикой [151]. В 1824 г. профессором математики в Берлинском университете стал Э. Х. Дирксен (Dirksen, 1792—1850). После опубликования в 1823 г. работы по аналитическому изложению вариационного исчисления он был назначен ординарным профессором, а в 1825 г. был избран в члены Берлинской Академии наук [89].

В Берлинском университете Миндинг учился три года (1825—1828). А. Кнезер указывает, что Миндинг, как и К. Г. Якоби, был самоучкой в математике. В Берлине он больше занимался философией и филологией: слушал четыре больших курса у Гегеля, историю у Ранке, греческие древности у Бека, латинский стиль у Лахманна; наряду с этим он посещал некоторые естественнонаучные лекции Эрмана, Митчерлиха и Энке [136]. В своей автобиографии, приложенной к заявлению о допущении к чтению лекций по математике, Миндинг писал: «Закончив курс учебы в Гиршбергской гимназии и получив аттестат зрелости, я вступил в 1824 г. в Галльский университет, в котором, причисленный к философскому факультету, больше всего занимался упорно филологией и физикой. Через год, переехав в Берлин, я пользовался лекциями знаменитых мужей: Дирксена, Энке, Митчерлиха, Вейса.

ситету в настоящее время присвоено имя Гумбольдта (Humboldt-Universität).

Я занимался также философией, читавшейся знаменитым Гегелем, суждения которого охотнее всего считал самым глубоким фундаментом всей науки».[7]

Таким образом, Миндинг слушал всего лишь один небольшой курс, имевший отношение к его будущей специальности, — курс статики у Дирксена. Эпизодически в Берлинском университете в 1835 г. читал лекции молодой и талантливый К. Г. Якоби; возможно, что Миндинг бывал на них.

Глава 2

ПЕРВЫЕ ГОДЫ НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В 1827 г. Миндинг сдал в Берлине экзамен на право преподавания в гимназиях (pro facultate docendi). Затем он устроился преподавателем реальной гимназии в Кёльне (пригороде Берлина), где в течение одного семестра читал геометрию на латинском языке (см. прим. 3, стр. 8). В следующем учебном году (1828/29) Миндинг покинул Пруссию и некоторое время преподавал на западе Германии. По этому поводу он писал: «я отправился в Эльберфельд, где в течение немногим больше года был преподавателем в гимназии математики и других дисциплин».[8] В течение первых двух лет преподавательской деятельности Миндинг самостоятельно изучал математическую литературу. В 1829 г. он писал: «Что касается плана моих занятий, то я уже давно решил полностью посвятить себя математическим и физическим наукам, так как узнал, что их соединение принесет большую пользу» (см. прим. 3, стр. 8).

Начались и первые его самостоятельные научные исследования. Внимание Миндинга привлекла одна работа К. Г. Якоби о приближенном вычислении определенного интеграла [131]. Миндинг предпринял попытку распространить метод Гаусса в изложении Якоби на случай двукратного интеграла и добился определенного успеха. Результаты

---

[7] Berlin, Archiv Humboldt-Universitäts. Acten Philos. Facult. Lfd. n° 1201, Bd. 4 (Habilitation von Privatdozenten, 1828—1833).

[8] Среди этих предметов А. Кнезер [136], использовав неизвестные нам источники, а вслед за ним и Г. Ряго [267] указывают историю и немецкий язык.

своих изысканий Миндинг оформил в виде рукописной работы на латинском языке [1] и в октябре 1829 г. представил ее в Галльский университет как диссертацию на соискание ученой степени доктора философии. К диссертации Миндинг приложил краткую автобиографию, обращение к факультету, свидетельства о благонадежности и прилежании от Галльского и Берлинского университетов и свидетельство от королевской экзаменационной комиссии в Берлине о сдаче экзамена на право преподавания.

По существовавшим в то время порядкам официальное обсуждение диссертации перед профессорским составом факультета сопровождалось еще экзаменом, назначенным на 15 октября (ст. ст.). Профессор физики Швейгер (Schweigger, 1779—1857) поручил проверку математических знаний Миндинга профессорам математики Гартцу (Gartz) и Шерку (Scherk); последний должен был изучить также и диссертацию (см. прим. 7, стр. 13).

Протокол экзамена начинается записью профессора Шерка. Он отмечал, что «читал диссертацию с особым удовольствием, так как в ней дается остроумное изложение нового предмета» (см. прим. 7, стр. 13). На экзамене «в труднейших разделах чистой математики, даже в тех, которые излагаются в трудных работах (например, учение об особых решениях дифференциальных уравнений, интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными и т. д.)» Шерк нашел «кандидата превосходно знающим. Если в редких случаях ему было что-нибудь неизвестно, то он мог даже при самой незначительной помощи найти нужный результат». Профессор Швейгер, который спрашивал Миндинга об учении о теплоте, о поляризации света и об электромагнетизме, отмечал, что «все эти предметы были известны кандидату из литературы», хотя он еще «не имел возможности ознакомиться с ними экспериментально». Профессор Шютц (Schütz) проверил знания Миндинга о классиках античности, спросив его о числах у греков и римлян, об Евклиде и потребовав перевода отрывка из «De Oratore» Цицерона. Ответ был удовлетворительным. Все экзаменаторы единогласно решили, что Миндинг заслуживает диплома доктора философии по математике и физике с отличием. Такой диплом и был ему выдан.

Перед Мингингом открылся путь к научной деятельности. Он усиленно занялся математическими исследованиями. Его внимание привлекла одна задача, поставленная в журнале Крелле в 1828 г. (т. 3, тетр. 1, задача 6). Суть задачи была в следующем: на данной кривой поверхности охватить наикратчайшей линией площадь заданной величины. В работе Миндинга [2], датированной декабрем 1829 г. и опубликованной в журнале Крелле в 1830 г., сделаны первые шаги к решению этой проблемы на произвольной поверхности. Указанной работой Миндинг начал основной цикл своих исследований по внутренней геометрии и изгибанию поверхностей, в котором он проявил себя наиболее значительным продолжателем идей Гаусса. В своей следующей статье [3] Миндинг применил барицентрическое исчисление Мёбиуса к решению некоторых простых задач аналитической геометрии. В эти годы Миндинг по-прежнему работает в гимназии, но уже в Берлине.

Работа в качестве учителя гимназии не могла удовлетворить Миндинга, который испытал уже свои силы в исследованиях по любимому предмету и поверил в свои способности. В начале 1830 г. Миндинг подал заявление декану философского факультета Берлинского университета с просьбой допустить его к испытаниям на право чтения лекций в университете. К заявлению он приложил краткую автобиографию, справки о прохождении учебы в Галльском и Берлинском университетах, два удостоверения о работе учителем гимназии, диплом доктора философии, выданный в Галле, и два сочинения: докторскую диссертацию [1] и работу на латинским языке о применении барицентрического исчисления при изучении треугольников и тетраэдров: «De trianguli ac tetraedri determinatione ope calculi bariycentrici perficienda».[9]

Декан факультета 22 марта 1830 г. направил эти сочинения на отзыв Дирксену, Иделеру и Ольтману. Отзыв, который через месяц дал Дирксен, был для Миндинга не совсем благожелательным. Изложение первой работы Дирксен счел слишком кратким и местами неясным. Правда, результаты работы он признал правильными и одобрил подход автора, применявшего метод Гаусса для вычисления обыкновенных интегралов к вычислению значений двойных интегралов. Вторую работу Дирксен счел не вполне

---

[9] Архив Берлинского университета (см. прим. 7, стр. 13). За получение фотокопий архива авторы благодарят К. Р. Бирмана.

удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к диссертациям на право чтения лекций.

Указывая, с одной стороны, что первая работа была уже использована как докторская диссертация и что автор по справкам о прохождении академического курса прослушал лишь несколько математических предметов, и учитывая, с другой стороны, что автор несомненно обнаружил свои математические способности и прилежание, Дирксен делает следующее заключение (см. прим. 7, стр. 13): в силу повышенных требований, предъявляемых в подобных случаях, факультет считает недостаточным обоснование автора для получения должности и рекомендует ему в новой работе лучше показать свои математические способности. Иделер и Ольтман присоединились к мнению Дирксена. Но среди некоторых других членов факультета это заключение вызвало дискуссию. Например, Вейс указывал, что малое число прослушанных математических курсов не является в данном случае аргументом, поскольку математику можно с успехом изучать самостоятельно. Более того, это обстоятельство скорее говорит не против автора, а за него. Заключение Дирксена, по мнению Вейса, выражает недоверие к профессорам Шерку и Розенбергеру из Галле, которые сочли первую работу Миндинга достойной докторской степени, и ему непонятно, почему она, если бы даже не было второй работы, не может дать право на чтение лекций.

На сторону Дирксена стал Гегель, который подчеркнул, что доцент математики должен иметь весьма обширные познания в своей области; он заявил, что надо потребовать новую работу, причем не на произвольно выбранную, а на заданную тему. Остальные члены факультета присоединились к мнению Дирксена, так что Мидингу пришлось, оставаясь учителем в гимназии, думать о составлении новой работы.

К началу июня новая работа была уже готова. 1 июня 1830 г. декан философского факультета сообщил своим коллегам, что доктор Миндинг представил еще одно пробное сочинение: «Observationes circa curvas in data superficia delineatas» — и повторяет свое желание получить право на чтение лекции.

На этот раз возражений ни у кого не было. Отзыв о работе опять давал Дирксен. О предмете исследования он отмечал лишь, что им является «малоизвестная задача в теории изгибания кривых поверхностей, что-то собственно новое». Далее следовали два замечания: в первом Дирксен отметил, что вывод формулы для радиуса кривизны дал ранее Лакруа, причем в более общей форме; во втором замечании указывалось, что способ задания поверхности тремя уравнениями сам Гаусс считает известным. Эти замечания, к сожалению, не раскрывают нам содержания этого раннего исследования Миндинга, сущность и значение которого, видимо, остались непонятыми Дирксеном. Можно лишь предполагать, что в этой работе были даны уже основы тех замечательных результатов, которые Миндинг впоследствии получил в теории поверхностей. Перспективность затронутых проблем понял все же и Дирксен, одобрив выбранное автором направление исследований и отметив, что «автор способен открывать научные истины». Свое заключение он на этот раз выразил недвусмысленно, высказавшись за допущение автора к чтению лекций. К этому мнению 21 июня 1830 г. присоединились все члены факультета и тем самым вопрос был решен в пользу Миндинга. Тематика лекций была одобрена на заседании факультета 20 июля. В качестве темы пробной лекции Миндинг предложил «Некоторые пункты из теории неопределенных уравнений второй степени», а открытую лекцию он предполагал прочитать на тему «Аналитическо-геометрические исследования об эволютах».

Заседание факультета, на котором Миндинг прочел свою пробную лекцию на латинском языке, состоялось 6 ноября 1830 г., и Берлинский университет выдал ему соответствующий диплом на право чтения лекций и зачислил в приват-доценты [79].

Глава 3

В БЕРЛИНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Регулярное чтение лекций в Берлинском университете Миндинг начал в летнее полугодие 1831 г. (с 25 апреля по 24 октября). Первыми объявленными им курсами были стереометрия, алгебра и барицентрическое исчисление (по Мёбиусу). См. [186], 1831).

Математические науки в Берлинском университете делали тогда только первые шаги. Преподаватели в своих курсах редко выходили за пределы элементарной математики.

Коллегами Миндинга по Берлинскому университету были И. Ф. Грюсон (Grüson, 1768—1857), ординарный профессор Дирксен (Dirksen, 1792—1850), экстраординарный профессор М. Ом (Ohm, 1792—1872), младший брат известного физика Г. С. Ома. В свое время он приобрел известность своим девятитомным сочинением по теоретической арифметике. Клейн характеризует его следующим образом: «Ом, вообще не глубоко мыслящий математик, создал все же полную последовательную систему основ арифметики» [135, стр. 178]. Другим приват-доцентом в университете, кроме Миндинга, долгое время был С. Ф. Люббе (Lubbe, 1786—1846), который вообще не занимался научной работой.

Но в университете было одно исключение — молодой приват-доцент П. Г. Лежен-Дирихле (Lejeune-Dirichlet, 1805—1859), который на год раньше Миндинга начал свою деятельность в Берлине. Дирихле был единственным выдающимся математиком, с которым Миндингу удалось работать в тесном сотрудничестве. Дирихле оставил глубокий след в истории математики не только своими выдающимися исследованиями по теории чисел и алгебраических числовых полей, по математическому анализу, механике и математической физике, но и своими исключительно ясными лекциями. Г. Минковский характеризовал эти достоинства Дирихле в 1905 г. следующим образом [223, стр. 132]: «Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячей мысли» и называл это «настоящим принципом Дирихле». Несомненно, что влияние Дирихле положительно сказалось на формировании Миндинга как ученого и педагога, тем более что они были тесно связаны дружескими отношениями и общей целью приблизить уровень преподавания математики в Берлинском университете к современным требованиям. Они оба первыми стали читать специальные курсы по новым направлениям в математике, содержавшие, в частности, и результаты их собственных исследований.

С первых лет пребывания в Берлинском университете Миндинг погрузился в напряженную работу. Из основных математических курсов он регулярно читает алгебру с теорией уравнений, дифференциальное и интегральное исчисление, теоретическую механику. В 1831—1834 гг. он

П. Г. Лежен-Дирихле. 1805—1859.

дважды читал двухсеместровый курс истории математики [186], который в летнем семестре 1833 г. сопровождался «общим введением в основания и в конечную цель математических наук» [186].

Многие предметы Миндинг читал по своим собственным учебникам или научным статьям. Уже в первый год работы в университете он принялся за составление своего первого учебника «Начала высшей арифметики» [8], о появлении которого объявил в журнале Крелле в июне 1831 г. [7]. Книга вышла в 1832 г. и в следующем зимнем семестре 1832/33 г. Миндинг прочел по ней небольшой курс, который затем повторил в 1834/35 и 1841/42 г.

Внимание Миндинга в эти годы привлекла одна проблема в статике твердого тела. Уже со времен Архимеда было известно, что систему параллельных сил, приложенных к твердому телу, можно заменить одной равнодействующей в некоторой точке (в центре сил), не зависящей от общего направления сил. Миндинг занялся случаем непараллельных сил и нашел интересную теорему, характеризующую общее положение в этом случае. Этот результат был опубликован в 1835 г. в журнале Крелле [15].

Указанная работа Миндинга привлекла внимание Александра Гумбольдта, выдающегося естествоиспытателя и путешественника. В Берлин А. Гумбольдт вернулся в 1827 г. после 20-летнего пребывания в Париже, где он публиковал свои труды о путешествиях по Америке и был в тесных научных контактах с парижскими академиками. Обладая энциклопедическими знаниями, Гумбольдт немало содействовал выдвижению молодых талантливых ученых разных специальностей, в том числе и математиков [90]. А. Гумбольдт писал Миндингу из Парижа 31 октября 1835 г.: «Мне было приятной обязанностью передать Вашу несомненно очень интересную статью Академии наук. Я списал собственноручно конечный результат и даже, против моей привычки, разборчиво. Вы найдете представление напечатанным в здешних журналах. Понселе (Poncelet), Пуассон (Poisson), Либри (Libri) назначены комиссарами».

В 1834 г. Миндинг, не оставляя работы в университете, занял должность доцента в Берлинской высшей строительной школе (Bauschule), где преподавал математический анализ, теорию кривых и аналитическую механику. В связи с этим Миндинг создал учебное руководство по дифференциальному и интегральному исчислению [19]. Первый том этого сочинения, содержащий дифференциальное и интегральное исчисление с применением к геометрии, вышел в 1836 г. и был использован автором при чтении соответствующего курса как в университете, так и в Строительной школе. На нем был основан также курс вариационного исчисления, который Миндинг объявил в университете в зимнем семестре 1837/38 г. [186].

Второй том, содержащий теоретическую механику [22], вышел в 1838 г. и также сразу был применен в учебной работе. По этому пособию Миндинг читал в университете курс статики и механики в зимнем семестре 1838/39 г. и статику твердых и жидких тел в 1839/40 г.

1838 г. был примечательным и в личной жизни Миндинга. Летом этого года он женился на Августе Реглер

(Augusta Regler, род. 13 января 1810 г. в Берлине). В следующем году 9 (21) мая у них родился сын Бернгард.

В это время Миндинг был уже зрелым мастером в своей специальности. Он автор ценных исследований в различных областях математики и механики, читает ряд специальных курсов на основе собственных исследований, например, в течение зимнего семестра 1839/40 г. в курсе, озаглавленном «Некоторые избранные разделы высшей геометрии, а именно, учение об изгибании кривых поверхностей», Миндинг излагал свои результаты, опубликованные в журнале Крелле в 1838—1839 гг. в нескольких статьях [23—25].

Как для Дирихле, так и для Миндинга отправным пунктом многих исследований явилось творчество Гаусса. Если Дирихле интересовался работами Гаусса по теории чисел и, по словам Клейна [135, стр. 97], «был первым понимающим читателем „Disquisitiones arithmeticae“ (1801), то Миндинг исходил из другого классического мемуара Гаусса „Disquisitiones generales circa superficies curvas“» (1827).

А. Кнезер справедливо отмечает [136], что новое развитие общей теории кривых поверхностей начинается с «Disquisitiones circa superficies curvas» Гаусса, а Миндинга можно назвать первым его последователем, который, хотя и двигаясь по следам мастера, превзойдет Гаусса в существенных пунктах.

Подход к этой тематике был намечен уже в первой печатной работе Миндинга [2], опубликованной в 1830 г. В ней Миндинг показал постоянство некоторой величины (которой Бонне в 1848 г. дал название «геодезическая кривизна») вдоль кривой наименьшей длины, охватывающей заданную площадь. В одной из следующих статей [5] Миндинг обнаружил инвариантность этой величины при изгибании поверхности. Из работ в этой области особенно важна статья [25], в которой Миндинг обнаружил существование двух случаев изгибания поверхностей. Внутренней геометрии поверхностей Миндинг посвятил в 1840 г. специальную статью [28], которая спустя 27 лет сыграла важную роль в истории распространения идей Лобачевского. Вероятно, именно эти новые результаты Миндинга легли в основу его курсов «Высшая геометрия» и «Избранные разделы теории поверхностей», которые он читал в зимние семестры 1840/41, 1841/42 и 1842/43 г.

В летнем семестре 1841 г. Миндинг читал курс «Политическая арифметика». Специальные вопросы, связанные с проведением государственных лотерей, он изложил в книжке, вышедшей в 1842 г. [31].

В начале 1840-х годов Миндинг вел теоретические исследования в двух направлениях. В 1841 г. он опубликовал в журнале Крелле статью [29], которой предшествовала заметка [26]. В статье, сразу же переведенной Лиувиллем на французский язык [29], дается новый, очень простой способ определения точного значения степени уравнения, получаемого исключением одного неизвестного из двух уравнений с двумя неизвестными.

Другой областью, которой занимался Миндинг в эти годы, была теория алгебраических функций и их интегралов. В этой области Миндинг опубликовал еще в 1833 г. заметку [10], но основная его работа — обширная статья на латинском языке «Некоторые предложения об интегралах от алгебраических функций одной переменной, полученные на основе принципов Абеля» вышла в 1842 г. [30].

Все это свидетельствует о творческой силе Миндинга, проявившейся в различных областях математики — в теории поверхностей, в статике твердого тела, в теории исключения, в теории интегралов алгебраических функций, которые Миндинг обогатил многими существенными результатами. Но настоящего признания они ему тогда не принесли. Миндинг был в то время либо одинок в своей области (как в задаче изгибания поверхностей, которая привлекла всеобщее внимание лишь в 1860 г., когда она была поставлена Парижской Академией наук), либо достиг ценных результатов, которые впоследствии оказались уже полученными другими авторами (как в теории абелевых интегралов). Лишь работы по статике и теории исключения сделали его имя известным еще в те годы.

К началу летнего семестра 1841 г. исполнилось 10 лет непрерывной работы Миндинга в качестве приват-доцента Берлинского университета. Статут философского факультета этого университета (§ 52) давал ему право обратиться в факультет с просьбой, чтобы его положение в университете стало предметом специального обсуждения. Такое обращение Миндинг представил 24 марта 1841 г. [10] К нему

---

[10] Berlin, Archiv Humboldt-Universitäts. Acten Philos. Facult. lfd. n° 1431, Bd. 1 (Privatdozenten, 1819-1841; Fotokopien von Bericht Mindings).

он приложил отчет о курсах, прочитанных им с лета 1837 г. по 1840/41 г., а также список опубликованных работ. Отчет интересен тем, что в нем Миндинг приводит, кроме данных, содержащихся в ежесеместровых объявлениях о лекциях [186], также данные о числе слушателей отдельных курсов. В указанные годы особым успехом пользовались его курсы сферической геометрии и теории уравнений.

Список опубликованных работ, приведенный Миндингом, является далеко не полным. Он указывает только важнейшие статьи, отсылая к 10-му и 20-му томам журнала Крелле, где можно найти полный список его работ (стр. 387 и 368), напечатанных в этом журнале.

Реакция факультета на обращение Миндинга была весьма положительной. Декан и большое число профессоров 14 апреля подписали письмо министру просвещения Эйхгорну, в котором, в частности, говорится: «Факультет после обычного обсуждения единогласно пришел к мнению, что как научная квалификация, так и преподавательская деятельность приват-доцента доктора Миндинга заслуживают полного признания со стороны факультета, и что его особенно следует поощрить на расширение и продолжение лекций по истории математики, которых раньше не читали в здешнем университете. Поэтому факультет позволяет себе покорнейше рекомендовать Вашему Превосходительству учесть так или иначе скромную просьбу подателя прошения; при этом факультет не считает, что теперь число ординарных и экстра-ординарных профессоров математики является слишком большим и что нужно воздержаться от добавления еще одного высокого назначения» (см. прим. 10, стр. 22). Министр в своем решении ограничился лишь награждением Миндинга суммой в 150 рейхсталеров.

Лежен-Дирихле, который с 1830 г. был членом Берлинской Академии наук и до 1855 г., когда он унаследовал кафедру Гаусса в Геттингене, являлся центральной фигурой в математической жизни Берлина, сделал в феврале 1842 г. попытку открыть Миндингу путь в Берлинскую Академию наук. Он составил документ о выдвижении кандидатуры Миндинга в члены Академии, который, кроме него, подписали Дирксен, Крелле и член Академии профессор университета крупный геометр Якоб Штейнер (1796—1863). Это представление [91] содержит интересную характеристику исследований Миндинга в трех направлениях (основная работа об абелевых интегралах еще не была напечатана). Приведем некоторые выдержки из этого документа.

«Подписавшие позволяют себе представить преподавателя Строительной школы и приват-доцента университета господина доктора Ф. Миндинга в члены Физико-математического класса.

Многочисленные труды, сделавшие уже более 10 лет имя г. Миндинга известным и свидетельствующие как о продуктивном таланте, так и о неутомимой деятельности автора, несомненно свидетельствуют, что Миндинг может с большим успехом участвовать в работах Королевской Академии, и склоняют нас к сделанному здесь представлению, которое мы для большей убедительности сопровождаем кратким обзором его наиболее значительных работ. Прежде всего мы хотим отметить исследования г. Миндинга по статике, которые возбуждают тем больший интерес, что дают существенное дополнение к учению, от которого вряд ли что-либо можно было ожидать...

В другой области г. Миндинг касается теории кривых поверхностей, которую он рассматривает преимущественно с точки зрения, на большую важность которой обратил внимание Гаусс в своем знаменитом исследовании по этому предмету... В новейшее время г. Миндинг ввел в теорию исключения новый метод, обещающий существенные облегчения в исследованиях, в которых эта операция играет роль» [91].

Заседание Физико-математического класса Берлинской Академии, где обсуждалось это представление, состоялось 14 февраля 1842 г. Кроме Миндинга, в члены Академии были представлены специалист строительного дела Г. Хаген (1797—1884) и физик Р. Ф. Рисс (1804—1883). Сначала было решено, что в принципе можно заполнить все три вакантные места. Однако через месяц, 14 марта, Дирихле на заседании Физико-математического класса, идя навстречу пожеланию своих коллег — оставить одно место ординарного члена вакантным, — взял представление обратно, имея согласие остальных подписавшихся членов. Правда, учитывая признание заслуг Миндинга, Дирихле сохранил за собой право повторить представление Миндинга, как только не будет мешать указанное обстоятельство. Так освещают события протоколы Физико-математического класса, выдержки из которых имеются в статье К. Р. Бирмана [91].

Дополнительную информацию о представлении Миндинга можно почерпнуть из письма берлинского астронома И. Ф. Энке [91]:

«Представление прошло бы без промедления, если бы не ограничение новым статутом — оставлять некоторые места свободными для особых соображений». Естественно, что, если надо было решать, кого из трех представленных ученых не избирать в члены академии на этот раз, выбор пал на Миндинга, как на самого младшего и по возрасту, и по чину.

Повторить представление Дирихле не пришлось, так как на следующий год Миндинг навсегда покинул Германию, приняв приглашение занять место профессора прикладной математики в Дерптском университете. Дальнейшая судьба Миндинга связана с Россией, где его талант развернулся с новой силой и где он был избран в члены-корреспонденты, а затем в почетные члены Петербургской Академии наук.

Глава 4

ДЕРПТСКИЙ ПЕРИОД

Приглашение занять кафедру прикладной математики в Дерптском университете Миндинг, как свидетельствуют письма, цитируемые ниже, принял не колеблясь.

Город Дерпт (б. Юрьев, нем. Dorpat, ныне Тарту в Эстонской ССР), в котором располагался Дерптский университет, — один из древнейших городов Прибалтики. До XI в. здесь было поселение древних эстов, которое называлось Тарпату. В начале XI в., когда юго-восточные земли Эстонии были включены в состав Древнерусского государства, киевский князь Ярослав Мудрый превратил это поселение в укрепленный город и назвал его Юрьев. В 1224 г. немцы захватив город, переименовали его в Дерпт (Dorpat). Дальнейшая история города была довольно сложной. Многие десятилетия он находился во власти ордена меченосцев, Польши, Швеции. В 1704 г. русские войска заняли город, который в XVIII в. стал значительным культурным центром России. Тем не менее правящую верхушку этого края составляли остзейские немцы-помещики, стремившиеся к онемечиванию коренных жителей этого края, вследствие чего господствовавшим языком продолжал оставаться немецкий.

Открытие в 1802 г. Дерптского университета[11] явилось чрезвычайно большим событием в жизни прибалтийского края. Преобладающая масса студенчества вновь учрежденного университета состояла из местной немецкой аристократии, поскольку исконному населению этого края — эстонцам — с большим трудом удавалось поступать в высшие учебные заведения. Вследствие этого преподавание в университете велось на немецком языке. Что касается первоначального профессорско-преподавательского состава университета, то он в основном был укомплектован за счет профессоров, приглашенных из-за границы (в первую очередь из Германии), а также за счет привлечения некоторой части преподавателей учебных заведений самого края.

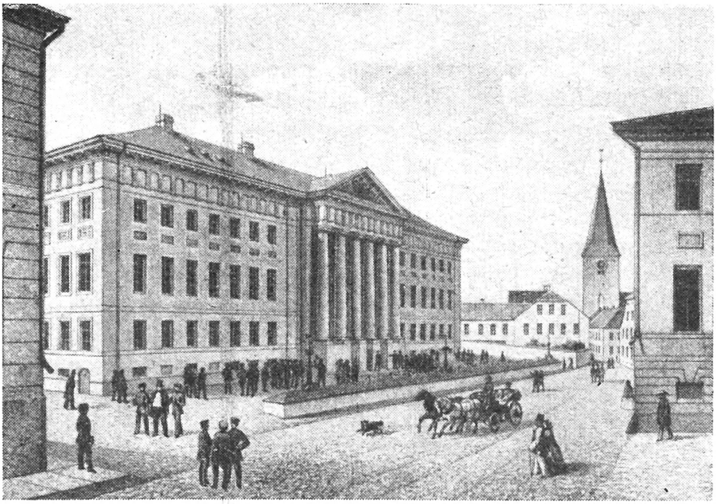
Первым ректором университета стал Г. Ф. Паррот (1767—1852), секретарь лифляндского экономического общества. Его ученые труды, в том числе докторская диссертация, обеспечили ему кафедру физики в открывшемся университете, ректором которого он избирается.[12] Благодаря некоторой близости к императору Александру I Паррот добивается для университета бо́льшей автономии и других привилегий, которых не имели открытые спустя два года университеты Казани и Харькова.

В университете было четыре факультета: философский, юридический, медицинский и богословский. Высшим органом управления был Совет университета. Все должностные лица выбирались. Совет имел большие полномочия и подчинялся непосредственно министру народного просвещения. В 1828—1838 гг. при университете работал Профессорский институт, единственный в своем роде институт в России, куда направляли усовершенствоваться для будущей преподавательской деятельности талантливых юношей из всех других отечественных университетов [264].

---

[11] С 1893 г. университет носил название Юрьевского, а с 1919 г. — Тартуского.

[12] В университете Паррот пробыл до 1826 г., когда был избран академиком Петербургской Академии наук. Его научные работы относятся к физике, химии, технологии и др.



Главное здание Дерптского университета (середина XIX в.).

Математические предметы преподавались в университете в рамках философского факультета и были представлены лишь элементарной математикой [264].

Переломный период в преподавании математических наук в университете начинается с вступления на педагогическое поприще В. Струве (1793—1846) [250], воспитанника Дерптского университета, ученика Пфаффа и Паррота. Основательно изучив математику по сочинениям Эйлера и Кестнера, астрономию по Шуберту и другим авторам, Струве в 1813 г. защищает диссертацию по астрономии и назначается астрономом-наблюдателем, совмещая эту должность в иные годы с преподаванием математических предметов. На протяжении 1816—1820 гг. Струве прочитал пять семестровых курсов дифференциального и интегрального исчисления, два семестровых курса приложений анализа к геометрии и три курса высшей геометрии. Таким образом, начиная со Струве преподавание высшей математики в Дерпте прочно вошло в систему университетского образования, вытеснив элементарные математические курсы.

В 1820 г. вместо одной должности профессора чистой и прикладной математики было учреждено две. Профессором астрономии был избран В. Струве, на место профессора математики был приглашен из Казани М. X. Бартельс (1769—1836). Бартельс как опытный педагог скоро сумел поднять преподавание математики на современный ему уровень. Правда, в Дерпте он не встретил такого интереса к математике и его деятельность не дала здесь таких блестящих результатов, как в Казани.[13] С другой стороны, в Дерпте Бартельс начал систематизировать свой богатый опыт. Он издает курс математического анализа и публикует две научные работы. Бартельс и Струве работали в Дерпте в тесном содружестве.[14] К ним присылали совершенствоваться молодых офицеров флота, а в Профессорском институте у них повышали квалификацию многие будущие русские профессора математики и астрономии. В 1826 г. Струве был избран почетным членом, а Бартельс—членом-корреспондентом Петербургской Академии наук. В 1832 г. Бартельс направил в Кенигсберг своего ученика К. Э. Зенффа, окончившего Дерптский университет в 1830 г. Зенфф посетил и другие германские университеты, в частности Берлинский, где познакомился с Миндингом и Дирихле. В 1834 г. он вернулся в Дерпт со степенью доктора философии и, представив научную работу по практической астрономии, получил право на чтение лекций в качестве приват-доцента. После смерти Бартельса (1836) Зенфф на протяжении семи лет (1836—1843) один читал все математические курсы, сначала в должности экстраординарного, а с 1839 г. — ординарного профессора.

В октябре 1842 г. кафедра чистой и прикладной математики разделилась на две самостоятельные кафедры. Кафедру чистой математики возглавил Зенфф, а кафедра прикладной математики осталась вакантной.

Зенффу, астроному И. Г. Медлеру и физику Л. Кемтцу было поручено приискать достойного кандидата на место профессора прикладной математики.[15] В переговоры включились и другие официальные лица. В частности, непременный секретарь Петербургской Академии наук П. Н. Фусс обратился в Кенигсберг к К. Г. Якоби с просьбой предло-

---

[13] Как известно, в Казани Бартельс был учителем Н. И. Лобачевского [212]. В 1836 г. Лобачевский приезжал в Дерпт, чтобы навестить своего учителя.

[14] Они были связаны также семейными узами — Струве был женат вторым браком на дочери Бартельса.

[15] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 9, № 494, л. 147.

И. Ф. Энке.

жить кого-нибудь из известных ему германских ученых. Как потом указал Фусс, Якоби «между прочим с жаром рекомендовал Г. Миндинга».[16] Представители факультета обратились также в Берлин к директору Берлинской обсерватории И. Ф. Энке.[17] На запрос Энке о задачах нового профессора Совет поручил Медлеру ответить, что он «должен преподавать теоретическую механику и математическую физику».[18]

В своем следующем письме Энке усиленно рекомендует Миндинга. В частности, Энке пишет:[19] «После любезного объяснения о том, что будут требовать в Дерпте от профессора прикладной математики, которое Вы, высокочтимый господин профессор, изволили дать в своем последнем письме от 30 января, позволю себе теперь назвать

---

[16] ЦГИАЛ, ф.733, оп. 57, № 205, л. 5.

[17] И. Ф. Энке (1791—1865), профессор астрономии Берлинского университета, почетный член Петербургской Академии наук с 1829 г.

[18] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 9, № 507, л. 280.

[19] Там же, лл. 285—286.

Вам доктора Фердинанда Миндинга, который был здесь долгое время приват-доцентом; его я, по моему полному убеждению, могу считать подходящим к этому делу... Миндинг всегда находил слушателей для своих лекций по алгебре, теории чисел, аналитической геометрии, по дифференциальному и интегральному исчислению, вариационному исчислению, исчислению вероятностей с применением к статистике, лекций по механике и истории математики, которые он непрерывно читал... С 1834 г. Миндинг все время читает лекции по высшему анализу и теоретической механике в здешней Королевской строительной школе... В этой должности Миндинг руководствовался, кроме его собственного учебника механики, также сочинениями Кориолиса, Навье, Добюссона, Памбура... и использовал их в преподавании, что может подходить для новой должности. Эти курсы побудили его издать „Курс дифференциального и интегрального исчисления с приложением к геометрии", Берлин, 1836 г. [19] и „Курс теоретической механики", Берлин, 1838 г. [22]. Посылаю Вам по Вашей просьбе мой личный экземпляр его последнего труда... Это руководство имеет особую ценность, так как оно не подражает другим... К тому же весь курс, как показал опыт в Строительной школе и в Университете, очень нравится учащимся, они чувствуют к нему вкус и занимаются серьезно, несмотря на то что экзамена по механике от студентов не требуют.

Кроме того, Миндинг издал курс „Начальные основы высшей арифметики", Берлин [8], который как элементарный учебник высшего учения о числах вызвал, как я сам узнал, одобрение со стороны Гаусса. Очень интересны многие статьи Миндинга в журнале Крелле. Например, исследования о наложимости и изгибании кривых поверхностей, которые примыкают к „Disquisitiones generales circa superficies curvas" Гаусса. Одну статью об исключении перевел и опубликовал в 20-м томе своего журнала Лиувилль.

В заключение я думаю, что могу упомянуть... о том, что два года тому назад господа Дирихле и Дирксен представили доктора Миндинга в члены здешней Академии наук. Представление и прошло бы без промедления, если бы не ограничение новым статутом о численности членов, которое требует оставлять некоторые места вакантными для особых соображений. Поэтому выборы Миндинга отложены до следующей вакансии.

Поскольку я знаю господина Дирихле как строгого критика необходимых для академика свойств, то это внушает мне очень высокое мнение о знаниях и способностях доктора Миндинга, которые во многих частях его специальности мне чужды.

Господин Миндинг — ему примерно 36 лет — является очень общительным и скромным человеком, с которым я оставался непрерывно знакомым почти 17 лет, с тех пор, когда он был здесь еще студентом... Он происходит, насколько я знаю, из Силезии.

Приведенная здесь характеристика не охватывает всех отраслей знаний Миндинга. По его способности ясного понимания, я полагаю, что более свободное положение с большим временем для своих нужд будет очень полезно его таланту, и я не могу отрицать, что моим искренним желанием является то, чтобы он мог найти в Дерпте свое место. Несомненно, что он принял бы приглашение, если бы оно последовало. Добавлю еще, что он женат».

Столь лестная рекомендация со стороны известного ученого рассеяла возможные сомнения, и Совет предпочел Миндинга другим кандидатам. Миндингу было направлено соответствующее письмо, на которое был получен следующий ответ:[20] «Высокочтимый господин профессор и декан. К прилагаемому официальному письму добавлю только еще немногие слова благодарности за Ваше столь же быстрое, сколь и дружеское сообщение, которое меня приятно поразило. Если я действительно буду приглашен в Дерпт, то рассчитываю на Ваше дружеское отношение, которым Вы меня почтили в Вашем письме. Далеко от родины дружеское отношение должно иметь в десять раз более высокую цену. Будьте добры напомнить обо мне господину проф. Кемтцу, который может быть помнит меня еще по Галле, где я (1824) слушал у него лекции, покорно прошу также передать мой привет господину проф. Зенффу; мне помнится, что я видел его и беседовал с ним у проф. Дирихле лет 10 тому назад, если мое воображение не смешивает чего-нибудь, чего я все же не думаю. Еще любезно напомните обо мне господину проф. теологии Филиппи, которого я очень хорошо знал в Берлине и который незадолго до его отъезда отсюда позаботился о том, чтобы я тоже мог перейти

---

[20] Там же, л. 289.

в Дерпт. . .[21] Статут Дерптского университета я посмотрел в здешней Королевской библиотеке и предполагаю, что, согласно Вашему письму к господину Энке от 24 дек. 1842 г., условия для новой должности будут таковы же, как и для старых должностей. Я имею в виду пенсию и страхование моей семьи на случай моей смерти. Если дела пойдут в желаемом направлении, я возьму с собой жену и двух мальчиков. Прошу передать Вашей супруге почтение мое и моей жены. Остаюсь с высочайшим уважением Вам преданный. . . Берлин, 8 марта 1843 г.».[22]

После получения этого письма Совет философского факультета на своем заседании 5 (17) марта вынес решение предложить кандидатуру Миндинга для утверждения попечителю. Уже 6 (18) марта попечитель писал министру народного просвещения: «Философский факультет Дерптского университета доносит вследствие данного мною предписания приискать соответственных ученых для замещения вновь учрежденных по дополнительному штату сего университета кафедр, что для кафедры прикладной математики имеется в виду рекомендованный с весьма выгодной стороны известным ученым Энке частный преподаватель Берлинского университета и преподаватель Королевского архитектурного училища доктор Фердинанд Миндинг».[23]

После краткого изложения основных сведений о преподавательской и научной деятельности Миндинга, почерпнутых из письма Энке, попечитель продолжает: «По собрании таковых сведений и одобрительных отзывов о нравственных качествах Ф. Миндинга, засвидетельствованных также профессором Дерптского университета Кемтцем, философский факультет сделал означенному ученому предложение занять в Дерптском университете кафедру прикладной математики, на что он и изъявил свое согласие. О чем я имею честь представить на благоусмотрение Вашего превосходительства: угодно ли Вам будет разрешить приступить к формальному избранию г. Миндинга, или заблагорассудите сделать по сему предмету другое распоряжение».

---

[21] Пропущены несущественные части письма.

[22] Подпись Миндинга отрезана, однако авторство Миндинга, установленное графологическим путем, несомненно.

[23] ЦГИАЛ, ф. 733, оп. 57, № 205, лл. 1 и 2.

В ответном письме факультету от 2 апреля 1842 г. Миндинг выражает благодарность за полученное известие и продолжает:[24] «Мне было очень приятно узнать, что господин попечитель одобрил представление и что последнее уже отправлено в Петербург. Моим желанием является, чтобы там теперь не возникли какие-нибудь трудности». Далее он интересуется, имеются ли в Дерптской библиотеке основные сочинения по математике и ее применениям (такие как труды Лапласа, Лагранжа, Фурье и Лежандра), и спрашивает, действительно ли в Дерпте требуется, чтобы в основу каждого курса был положен какой-либо учебник. Он опасается, что во многих случаях это трудно сделать, например в исчислении вероятностей, для которого достаточно много работ, но нет ни одного подходящего компендиума.

В Петербурге министр народного просвещения С. С. Уваров направил письмо попечителя к непременному секретарю Академии наук П. Н. Фуссу, чтобы узнать, «с какой стороны известен Академии Миндинг». В ответ Фусс сообщил 10 апреля следующее:

«Милостивый государь Павел Иванович,[25]

На почтеннейшее отношение Вашего превосходительства от 6 апреля за № 3909 честь имею уведомить Вас, что г. Миндинг известен многими учеными статьями, помещенными в Математическом журнале г. Крелле и доказывающими основательные познания его по всем частям чистой математики и приложениям анализа к задачам высшей физики.

Знаменитый кенигсбергский математик г. Якоби, к которому я несколько месяцев тому назад по приказанию г. Министра обратился с просьбою предложить кого-нибудь из известных ему германских ученых для занятия кафедры чистой математики в Дерптском университете (ибо тогда предполагалось, что профессор Зенфф займет кафедру прикладной математики) между прочим рекомендовал с жаром г. Миндинга. В какой мере г. Мин-

---

[24] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 9, № 507.

[25] Письмо адресовано П. И. Гаевскому (ЦГИАЛ, ф, 733, оп.57, № 205, лл. 5—5 об.). П. И. Гаевский (1797—1875) при С. С. Уварове был директором департамента Министерства народного просвещения.

динг способен преподавать практическую математику, о том я судить не могу, ибо труды его по сей части мне не известны. Впрочем, рекомендация г. Энке и то обстоятельство, что г. Миндинг преподает сию часть в Королевском архитектурном училище в Берлине, достаточно ручаются в способностях его, и я совершенно убежден, что Дерптский университет не будет иметь случая раскаиваться в выборе своем, если он падет на г. Миндинга».

Рекомендательное письмо на имя министра народного просвещения С. С. Уварова поступило и от Александра Гумбольдта:[26]

«Милостивый государь,

Сегодня я осмелюсь обратиться как член Императорской Академии наук к покровительству моего Президента[27] в пользу одного весьма достойного математика этого города, представленного (я надеюсь) для занятия новой кафедры прикладной математики в Дерпте. Господин Миндинг, автор Трактата по механике и другого Трактата по интегральному исчислению, был в течение десяти лет превосходным профессором в Строительной школе (Gewerb-Schule) господина Бэйта (Beuth).

Его очень уважают наш великий геометр Дирихле и астроном г. Энке. Сверх того, это человек трудолюбивый, скромный, целиком преданный науке. Я уверен, что это будет очень и очень хорошее приобретение для Дерптского университета, мы его теряем с сожалением, но мы недостаточно богаты, чтобы предложить г. Миндингу то, что он может получить от Вашей щедрости. Я осмеливаюсь умолять Ваше превосходительство почтить нашего математика своим высоким покровительством и соблаговолить утвердить результаты выборов факультета в Дерпте. . .

Берлин, 10 апреля 1843 г.».

Вопрос обсуждался на заседании Комитета министров 27 апреля 1843 г. Было положено испросить высочайшее соизволение на определение Миндинга ординарным профессором Дерптского университета. «Соизволение» было

---

[26] Там же, л. 3. Это письмо не упоминается в [258].

[27] С. С. Уваров (1786—1855) — министр народного просвещения (1833—1849) был также президентом Академии наук (1818—1855).

дано 11 (23) мая и было разрешено выдать Мindингу 150 червонцев на путевые издержки. С этого же дня он был утвержден ординарным профессором Дерптского университета. Обо всем этом попечитель известил Совет университета 21 мая (2 июня) 1843 г.[28]

20 июня Миндинг пишет из Берлина,[29] что предполагает прибыть в Дерпт или в июле, или по крайней мере в середине августа. Он благодарит Дерптский университет за официальное приглашение на место ординарного профессора прикладной математики и уверяет, что его «ревностное стремление должно быть направлено к тому, чтобы добросовестно исполнять доверенные ему лекционные занятия и как члену университета всеми силами содействовать его процветанию».

В Дерпт Миндинг прибыл в начале августа 1834 г. и уже 12 (24) августа участвовал в заседании Совета университета. В этот же день он принял присягу и вступил в должность.

Прибытие Миндинга в качестве профессора прикладной математики позволило перестроить и значительно улучшить преподавание математических предметов в Дерптском университете. Миндинг взял в свои руки все прикладные дисциплины, а Зенфф мог теперь ограничиться преподаванием только чистой математики. Чтение параллельных курсов несколькими лицами, как было принято в Берлине, в Дерпте не имело никакого смысла вследствие малочисленности студентов. Вообще жизнь и работа Миндинга протекали в Дерпте более спокойно и с меньшим напряжением, чем в Берлине, где от Миндинга требовалось немало усилий, чтобы найти слушателей для своих лекций по предметам, которые нередко одновременно читал еще один из профессоров. Дерпт был маленьким провинциальным городом, где все поручения в университете были четко разделены между профессорами. Волнения и конфликты, вызванные конкуренцией и столь частые в больших научных центрах, здесь отсутствовали.

Миндинг, в первые годы занятый устройством своей жизни на новом месте, можно думать, наслаждался спокойствием и более обеспеченной жизнью. Он купил в Дерпте, недалеко от университета, на Садовой улице (Garten-

---

[28] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 2, № 1125, л. 1.

[29] Там же, л. 3.

strasse) небольшой деревянный дом с садом. Дом этот располагался в так называемой профессорской части города на высоком берегу долины реки Эмайыги. Недалеко от университета раскинулась живописная Домская гора (Domberg, Toomemagi) с университетской библиотекой, построенной на развалинах бывшей домской церкви, с университетскими клиниками, анатомическим театром и обсерваторией.

Миндинг прибыл в Дерпт с женой и двумя сыновьями — четырехлетним Бернгардом и годовалым Вильгельмом, который родился в Берлине 1 июля 1842 г. и умер 9 сентября 1846 г. На следующий год после прибытия в Дерпт, 23 (11) января 1844 г., у них родилась дочь Клара.

Работа Миндинга в Дерпте была менее напряженной, чем в Берлине, где он преподавал одновременно в двух вузах. Первыми объявленными им курсами на осенний семестр 1843 г. были статика (по собственному руководству) и теория вероятностей (по Лапласу). Эти курсы он читал регулярно и в дальнейшем. В следующем семестре он преподавал начертательную геометрию (по Монжу) и теорию уравнений высших степеней и вел упражнения по интегральному исчислению. Первый из названных курсов, начертательную геометрию, новый для него, он в дальнейшем уже не повторял, а ко второму вернулся лишь значительно позже, когда рядом с ним уже не было Зенффа, также время от времени читавшего этот курс. В 1845 г. Миндинг читал два новых курса: интегрирование дифференциальных уравнений (по Фурье, в весеннем семестре) и впервые в России [247] теорию эллиптических функций (по Якоби, в осеннем семестре), а также курсы гидравлики и теории машин (по Навье) и катоптрики и диоптрики (по Литтрову). Последние два курса стали регулярными, но первые повторялись только изредка. Следует отметить еще два курса Миндинга в первые годы его деятельности в Дерпте: теорию кривых поверхностей (по Гауссу, в 1846 г.) и интегрирование уравнений с частными производными (по Фурье, в 1847 г.).

Общая математическая подготовка студентов входила в обязанность профессора Зенффа, который читал аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, высшую геометрию, теорию алгебраических уравнений, вариационное исчисление, теорию кривых и поверхностей, историю математики. Мы знаем, что многие из

К. Э. Зенфф.
1810—1849.

этих курсов были хорошо знакомы Миндингу, он читал их неоднократно в Берлине, но в условиях тогдашнего Дерптского университета в параллельном чтении курсов не было необходимости.

В Дерпте у Миндинга было значительно больше времени для научных исследований, чем в Берлине, и он вскоре устанавливает тесные научные контакты с Петербургской Академией наук, систематически публикуя в изданиях Академии результаты своих исследований. Очень хорошие отношения установились у Миндинга и с петербургскими академиками, в особенности с В. Я. Струве и В. Я. Буняковским, с которыми он находился в научной переписке.

Однако вскоре и в Дерпте наступило более напряженное для Миндинга время. 31 декабря 1849 г. внезапно умер в 39-летнем возрасте профессор К. Э. Зенфф. Миндингу пришлось взять на себя чтение его курсов и позаботиться о приискании достойного кандидата на вакантное место. Решение последней задачи было осложнено новыми обстоятельствами, затруднявшими приглашение заграничных ученых, и затянулось надолго.

В первую очередь Миндинг обратился в Петербург. Через две недели после смерти Зенффа 13 (25) января 1850 г. он отправил В. Я. Струве письмо следующего содержания:[30]

«Глубокоуважаемый господин действительный статский советник! Печальные вести о судьбе нашего Зенффа должно быть уже давно дошли до Вас... Вы хорошо его знали и мне не приходится Вам говорить, что̀ его родные, университет и я сам в нем потеряли... С тех пор, как я здесь, я был с ним в самых дружеских отношениях; он был моим ближайшим коллегой, и я могу быть счастлив тем, что им был именно этот честный, основательный в науке и многосторонний человек, которого я тем больше любил, чем больше узнавал.

Теперь предстоит скорее заместить его очень важное и крайне необходимое для университета место. Поскольку в настоящее время нежелательно обращаться за границу, как это раньше часто здесь бывало, и вообще теперь необходима осведомленность о наличии собственных сил, то я решил направить Вашему превосходительству и одновременно господину статскому советнику фон Фуссу просьбу, нельзя ли помочь университету путем Вашего любезного посредничества. Так как дело касается ординарного профессора чистой математики, то избран может быть только человек, который имеет отечественную степень доктора, уже выгодно известен своими математическими трудами и на деле показал свои преподавательские способности. Само собой разумеется, что он должен достаточно владеть немецким языком; так как в России числится сравнительно много ученых немецкого происхождения, то это условие не может оказаться слишком большим препятствием...

Воспользуюсь еще случаем спросить, будут ли из моей статьи об основных формулах геодезии, которая должна была уже появиться в Бюллетене, но еще не попала мне на глаза, сделаны отдельные оттиски, присылка, которых доставила бы мне удовольствие...

---

[30] ААН, ф. 703, оп. 1, ед. 196, № 1411/7, л. 2.

Остаюсь всегда искренне преданным Вашему превосходительству

Др. Фердинанд Миндинг,
профессор прикладной математики.

Дерпт, 13 января 1850 г.».

В ответе, дататированном 2(14) февраля 1850 г., В. Струве[31] в качестве преемника Зенффа предлагает своего зятя В. К. Деллена, воспитанника и с 1839 г. помощника астронома Дерптского университета, которого весной 1844 г. В. Струве пригласил к себе в Пулково. Однако Деллен в то время был только кандидатом и не мог поэтому претендовать на должность профессора. В письме к В. Струве от 11(23) марта 1850 г. Миндинг объясняет эти препятствия и подобные же трудности, вставшие перед факультетом при рассмотрении кандидатур А. Ю. Давидова и Т. Клаузена.

Миндинг оказался в затруднительном положении. Ему одному приходилось отвечать за преподавание всех математических курсов, рушились планы его научных исследований. По этому поводу он писал к В. Струве в том же письме:[32]

«В настоящее время я очень стеснен и угнетен разными внешними делами, которые перешли ко мне от нашего Зенффа, выполнявшего их всегда с большим чувством долга. Поэтому не сбываются некоторые планы, которые я наметил себе для собственных работ, рвутся ослабевшие нити, на которые могла бы быть нанизана какая-нибудь идея. Но я также иногда думаю; большая ли это беда? Расположен ли мир в целом серьезно к науке, может ли она быть непосредственно важной для жизни? Я далек от того, чтобы серьезно в этом сомневаться».

Летом 1850 г. состоялась поездка Миндинга с семьей на родину, по-видимому, с целью посещения родителей в Гиршберге.

С осени 1850 г. в жизни философского факультета Дерптского университета произошли большие изменения:

---

[31] Там же, № 1411/9, л. 3.
[32] Там же, № 1411/7, лл. 4—5.

на его базе возникли два новых факультета — физико-математический и историко-филологический. Первый факультет включал в себя кафедры чистой математики, прикладной математики, астрономии, теоретической и экспериментальной физики, ботаники, минералогии, зоологии и сравнительной анатомии, экономики и технологии. В 1851г. на очередные четыре года деканом физико-математического факультета был избран Миндинг. В этом же году была, наконец, замещена должность профессора чистой математики доктором П. Гельмлингом. Окончив университет в Гейдельберге, Гельмлинг осенью 1845 г. сдал в Дерпте у Зенффа и Миндинга экзамен на звание старшего учителя. Степень доктора Гельмлинг получил еще в Гейдельберге в августе 1850 г. за работу «О разложении полиномов». В августе 1851 г. он получил степень магистра чистой математики в Дерпте за сочинение «Преобразование и вычисление определенных интегралов». Пробная лекция состоялась 17 октября и уже на другой день декан факультета Миндинг обратился к попечителю с просьбой, чтобы Гельмлингу разрешили читать в университете лекции по математике. Разрешение попечителя было получено в марте 1852 г.

Таким образом, наконец кончилось трудное для Миндинга время, длившееся более двух лет. Гельмлинг возглавил с этого времени кафедру чистой, а Миндинг продолжал возглавлять кафедру прикладной математики. Миндинг рекомендовал Гельмлинга[33] в экстраординарные (1854), а вскоре и в ординарные профессора (1855). В этой должности он был утвержден только через три года, после защиты в Дерпте докторской диссертации (1858). Гельмлинг был способным и уважаемым педагогом и немало сделал для повышения уровня преподавания в Дерптском университете.

В 1855 г. истек срок пребывания Миндинга в должности декана и начался более спокойный период его деятельности. Он смог наконец вернуться к научным исследованиям. Еще в 1853 г. он опубликовал в Бюллетене Петербургской Академии наук свое решение задачи Лагранжа о колебании гибкой, свободно висящей нити [40], которое через два года напечатал в журнале Крелле [41]. В 1856 г. появилась и одна из небольшого числа научно-

---

[33] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 3, № 410, лл. 36, 37, 54.

П. Гельмлинг.
1817—1901.

популярных статей Миндинга[34] — об истории развития паровой машины и «парового вагона» [42]. В 1858 г. вышли две статьи Миндинга: одна посвящена несобственным интегралам, а вторая — вариационному исчислению [44, 45]. В 1861 г. он закончил большую работу, относящуюся к интегрированию дифференциальных уравнений [48], за которую Петербургская Академия наук удостоила его Демидовской премии. В 1865 г. Миндинг был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук. Это были годы расцвета творческих сил ученого.

Вместе с тем Миндинг продолжает интенсивную педагогическую деятельность. Он читает все новые и новые курсы. В 1854 г. он прочел курс математической теории упругости и курс теории уравнений высших степеней. Много времени Миндинг уделяет занятиям с наиболее способными студентами, среди которых был К. Петерсон

---

[34] Эта статья не указана в списке опубликованных работ Миндинга, приводимом А. Кнезером [136].

(1828—1881), окончивший Дерптский университет в 1852 г. Он был оставлен при университете для получения степени магистра [213]. Защитив в 1853 г. диссертацию, — выдающееся исследование по изгибанию поверхностей, — излюбленной Миндингом проблеме, — Петерсон продолжил свою педагогическую деятельность в Москве.

Летом 1857 г. Миндинг совершил вторую поездку в Германию на этот раз и с научной целью. В своем прошении он пишет, что предпринять эту поездку его заставляют семейные обязанности, но добавляет: «Кроме того, желаю в это хотя и короткое пребывание за границей использовать время в научных целях, особенно для некоторых приобретений для математического кабинета».[35]

В начале следующего года Миндинг совершил кратковременную поездку в Петербург, куда он был командирован вместе с профессором физики Л. Кемтцом и профессором химии К. Шмидтом «для участия в опытах над гальванической цепью, производимых в Михайловской Артиллерийской академии» (как отмечается в отчете Дерптского университета за 1858 г.).[36] Командировка была запланирована на 10 дней, но для Миндинга она длилась на 6 дней дольше срока. Причиной такой отсрочки явился несчастный случай, следствием чего у Миндинга был перелом левого плеча.[37]

Очередную заграничную командировку Миндинг предпринял в 1867 г. В феврале этого года он обратился в Совет университета со следующим письмом:[38] «После того как я долгое время непрерывно выполнял свои преподавательские обязанности, становилась все более настоятельной потребность узнать о многочисленных новых явлениях в области механических наук не только по печатным работам, но также путем собственных наблюдений. Выставка в Париже представляет собой благоприятный случай для достижения этой цели. Поэтому я позволю себе обратиться в Высокопоставленный Совет с просьбой об исходатайствовании для меня у высшего начальства разрешения на научную поездку за границу во время летних каникул и дополнительных четырех недель». В дальнейшей части письма речь идет о получе-

---

[35] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 2, № 1125, л. 69.

[36] ЦГИАЛ, оп. 57, ед. 667, л. 57 об.

[37] ЦГИА Эст. ССР, ф. 402, оп. 2, № 1125, лл. 73—75.

[38] Там же, л. 83.

нии денег на приобретение предметов, нужных для математического кабинета.

Разрешение было получено, и Миндинг был командирован за границу. К сожалению, нет данных, встречался ли Миндинг в Париже с французскими математиками и по пути в Париж — с немецкими.

В 1868 г. исполнилось 25 лет службы Миндинга в Дерптском университете. По уставу он имел право на пенсию, но мог быть при этом избран и для дальнейшего прохождения службы еще на пять лет. Миндинг был крепко связан с Россией. В 1864 г. он вместе с детьми принял русское подданство, его старшая дочь, выйдя замуж, жила в Петербурге.

12 (24) августа 1868 г. декан физико-математического факультета Гельмлинг обратился в Совет университета с представлением, в котором указывал, что Миндинг «исполнял, как мы знаем, обязанности своей преподавательской деятельности с большой верностью и чувством коллегиальности, и в то же время рядом своих трудов во многих отраслях математических наук завоевал высокое уважение к своему имени, обладающему все расширяющейся известностью у отечественных и иностранных математиков».[39] После приведения списка наиболее важных работ, выполненных Мипдингом в Дерпте, Гельмлинг указывал: «Признавая столь исключительную деятельность и учитывая бодрость и свежесть мысли нашего коллеги, физико-математический факультет имеет честь представить Высокопоставленному Совету избрать бывшего до сих пор на кафедре прикладной математики проф. д-ра Фердинанда Миндинга снова на ту же должность на следующие 5 лет».

Результаты избрания в Совете были утверждены министром 27 сентября (9 октября) 1868 г. Миндингу присвоили звание заслуженного профессора и он начал получать сверх оклада (2400 руб. в год) годовую пенсию (в размере 1429 руб.). Знаком уважения к Миндингу было его многократное избрание заседателем университетского ревизионно-апелляционного суда (1868—1878 гг.).

Своими научными исследованиями Миндинг заслужил высокую честь быть избранным в почетные члены Петербургского университета (1869 г.).

---

[39] Там же, л. 88.

В это время имя Миндинга действительно было известно всем отечественным и иностранным математикам. Этому способствовали его научные труды, публиковавшиеся в Бюллетене Петербургской Академии и в журнале Крелле, а также статья итальянского геометра Э. Бельтрами, обнаружившего [83] замечательную связь между результатами Миндинга о внутренней геометрии на поверхности постоянной кривизны и исследованиями Н. И. Лобачевского. Бельтрами показал, ссылаясь на работу Миндинга «Дополнения к теории кратчайших линий на кривых поверхностях» [28], что тригонометрия Лобачевского совпадает с развитой Миндингом тригонометрией на поверхности постоянной отрицательной кривизны и тем самым совпадает с геометрией на такой поверхности.

Стремясь к установлению личных научных связей в России и за ее пределами, Миндинг 17 марта 1871 г. снова обращается в Совет университета со следующим ходатайством: «Желание и надобность вступить в сношения с некоторыми товарищами по специальности за границей, с которыми я надеюсь встретиться либо до наступления каникул в их местах жительства, либо на съезде естествоиспытателей в Ростоке, который состоится в сентябре с. г., приводят меня к покорнейшей просьбе: прошу Высокопоставленный Совет выступить в мою пользу перед высшим начальством для получения командировки во время предстоящих каникул и шести недель сверх того для поездки за границу. . .».[40]

Поездка эта была предпринята Мшгдингом 22 июня 1871 г. С ним поехали его супруга и дочь Агнес. К сожалению, мы не располагаем данными о встречах Миндинга с немецкими учеными и об его участии в работе съезда.

Когда в 1873 г. исполнилось 30 лет работы Миндинга в Дерптском университете, факультет предложил избрать его на следующие пять лет. В представлении говорилось о том, что способность Миндинга к преподавательской деятельности нисколько не уменьшилась за последние пять лет, и приводилась характеристика его научных работ, опубликованных за этот период. О большом уважении к Миндингу в Дерптском университете свидетельствует факт его единогласного избрания.

---

[40] Там же, л. 98.

Несмотря на преклонный возраст, Миндинг сохранил способность к напряженной педагогической деятельности и в течение очередного пятилетия (1873—1878) объем его работы даже увеличился. Кроме постоянных семестровых курсов статики и динамики, он читал и специальные курсы, список которых весьма велик: теория высших уравнений, исчисление вероятностей, интегрирование дифференциальных уравнений, теория упругости, геодезия, сферическая тригонометрия, теория эллиптических функций, теория поверхностей, диоптрика. Им был введен и новый курс — уравнения с частными производными и их применения в физике (1876, 1877).

В эти годы число студентов, изучающих математику, возросло настолько, что Миндинг и Гельмлинг вынуждены были привлечь к чтению математических дисциплин новых лекторов.

Первым из них был доцент физической географии и метеорологии Ф. Вейраух (1841—1891). Он начал преподавать в Дерптском университете с 1871 г., защитив незадолго до того (1869) в Дерпте магистерскую диссертацию. С 1875 г. он становится экстраординарным, а с 1877 г. ординарным профессором. Научные интересы его до 1881 г. были чисто математическими. В 1877—1881 гг. он опубликовал ряд статей по диофантову анализу.

Ряд специальных математических курсов Миндинг и Гельмлинг доверили в 1870-е годы астрономам-наблюдателям. Среди них были одаренные молодые ученые, которые, продолжая свою научную деятельность в области теоретической астрономии, стали впоследствии известными. Одним из них был ученик Вейерштрасса по Берлинскому университету Г. Брунс (1848—1919). В 1872 г. Брунс был приглашен в Пулково, а через год в Дерпт. Он читал в 1874 г. курс теории аналитических функций и ее применений и опубликовал в виде отдельной брошюры работу «О периодах эллиптических интегралов первого и второго рода» (1875). В 1876 г. Брунс покинул Дерпт, получив приглашение на должность профессора в Берлин. С 1882 г. он — профессор астрономии и директор обсерватории в Лейпциге.

В 1876—1879 гг. астрономом-наблюдателем в Дерпте работал питомец Упсальского университета И.-О. Баклунд (1846—1916). Он читал алгебраический анализ (1877) и теорию эллиптических функций (1878). Из Дерпта Баклунд переехал в Пулково, где затем был избран академиком (1883), а в 1895 г. стал директором Пулковской обсерватории.

Миндинг, признанный глава представителей математических наук в Дерптском университете, читая разные специальные предметы и смело привлекая молодых лекторов, поднял преподавание математики в Дерпте на весьма высокий уровень, который вполне соответствовал требованиям времени. Не прекратились и собственные научные исследования Миндинга. В эти годы он вернулся к тематике своих первых работ — к изопериметрической проблеме на поверхностях, и опубликовал свои результаты в виде трех статей в Бюллетене Петербургской Академии наук [59].

В 1878 г. исполнилось 35 лет непрерывной преподавательской деятельности Миндинга в Дерптском университете; декан физико-математического факультета профессор астрономии Л. Шварц, ссылаясь на соответствующее положение статута университета и отмечая заслуги Миндинга, должен был представить его к увольнению. Но ввиду того что достойной замены Миндингу на становившееся вакантным место профессора прикладной математики не находилось, факультет в лице Шварца ходатайствовал о том, чтобы профессор Миндинг продолжал свою преподавательскую деятельность и в течение следующего пятилетия. На это он получил согласие Миндинга. Попечитель учебного округа обратился с этим вопросом к министру народного просвещения, который разрешил избрать Миндинга еще на одно пятилетие. На этом основании физико-математический факультет сделал соответствующее представление Совету университета. В нем, в частности, говорилось следующее:[41] «Факультет мог бы воздержаться от мотивировки избрания, потому что он имел уже несколько раз случай представить Совету свидетельства о плодотворной деятельности г. профессора доктора Миндинга в нашем университете, но он чувствует себя обязанным именно в настоящем случае повторить то же самое и указать на то, что г. профессор доктор Миндинг самым выдающимся образом умеет открывать перед своими слушателями дух математической науки, что с благодарностью признают его многочис-

---

[41] Там же, л. 145.

ленные ученики, из которых многие преподают и занимаются в университетах, научных институтах и гимназиях всего государства».

Укажем здесь, что автор этих строк, Людвиг Шварц, сам учился в 1841—1846 гг. в Дерптском университете и имел возможность слушать лекции Миндинга. Далее он продолжает: «О том, что г. профессор доктор Миндинг еще полностью сохранил свои духовные силы, свидетельствуют работы, которые он опубликовал в последние годы». (Далее перечислены заглавия некоторых статей Миндинга). «Уже закончена, направлена в печать и скоро появится в журнале Борхардта[42] статья о линиях кратчайшего периметра при заданной площади на кривых поверхностях, в которой предмет излагается с еще более общей точки зрения, чем в предыдущих исследованиях. Краткость изложения, завершенная точность выражения и изящность математического развития изумительны; богатство содержания и важность результатов дали бы иному автору повод составить из этих статей, занимающих только небольшое число страниц, обширные книги». В заключение предлагалось избрать Миндинга на должность профессора прикладной математики еще на одно пятилетие. При баллотировании в Совете университета Миндинг получил 22 избирательных и 9 неизбирательных голосов и 27 января 1879 г. был утвержен в этой должности министром народного просвещения.

15 октября того же года Дерптский университет торжественно отметил 50-летие со дня присуждения Миндингу степени доктора. Ему был вручен диплом почетного доктора, выданный университетом в Галле. Профессор Гельмлинг посвятил ему сочинение на немецком языке «Об интегрировании уравнения Риккати», напечатанное в виде отдельной брошюры в университетской типографии. По представлению академиков В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышева он был избран почетным членом Петербургской Академии наук. Таким образом, научные заслуги Миндинга нашли достойное, хотя и несколько запоздалое признание.

---

[42] После смерти А. Л. Крелле (1780—1855) основанный им журнал начал редактировать (с 1856 г.) К. В. Борхардт (1817—1880); статья Миндинга вышла в 1879 г.

В том же 1879 г. в журнале Крелле вышло из печати последнее исследование Миндинга [62], посвященное проблеме, с которой он начал свою ученую карьеру — проблеме изопериметрии на кривых поверхностях. В конце статьи ученый завещает эту проблему будущим исследователям.

Но годы брали свое. Не было уже прежнего размаха и в преподавательской деятельности. Если раньше Миндинг читал неизменно три лекционных курса в семестр, то теперь он делал это редко, ограничиваясь обычно двумя курсами. Но это не привело к снижению уровня преподавания в Дерптском университете. Кроме Миндинга и Гельмлинга, математические лекции продолжал читать Вейраух, а в 1879 г. к ним присоединился еще один молодой способный лектор астроном-наблюдатель Дерптского университета Андерс Линдстедт (1854—1939). Вскоре после защиты в Лунде докторской диссертации он был в 1879 г. приглашен в Дерпт на место астронома-наблюдателя. Здесь Миндинг поручил ему чтение ряда математических предметов: теорию аналитических функций (эллиптических и абелевых), новую геометрию и алгебру, теорию алгебраических кривых, интегрирование дифференциальных уравнений с применениями в механике. В 1880 г. молодой Линдстедт организовал первый в Дерптском университете математический семинар, где он руководил самостоятельными занятиями студентов. Миндинг всячески поощрял активность Линдстедта и предоставил ему полную свободу, видя в нем своего преемника по кафедре прикладной математики.

Всеми уважаемый, провел Миндинг последние годы своей жизни в Дерпте, в маленьком доме на Садовой улице, с супругой и младшей дочерью Агнес, посещая в летние месяцы сына Бернгарда, жившего неподалеку от города.

В 1883 г., когда исполнилось 40 лет работы в университете, Миндинг просил с 12 августа уволить его на пенсию. Соответствующее представление декана факультета профессора А. Эттингена датировано 13 (25) мая, приказ министра последовал 21 августа (2 сентября) 1883 г. Миндингу была назначена пенсия в размере 2287 руб. 36 коп. в год. На его место профессора прикладной математики был избран и утвержден Линдстедт.

Фердинанд Миндинг скончался на 80-м году жизни 1 (13) мая 1885 г. в Дерпте и был со всеми академическими почестями похоронен 17 мая на Марийском (ныне Раадиское) кладбище. Гроб сопровождало факельное шествие, прощальные слова от университета сказал профессор К. Шмидт [161].

Глава 5

МИНДИНГ И ПЕТЕРБУРГСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

С первых же дней своего пребывания в России Миндинг был связан с Петербургской Академией наук. С 1844 по 1878 г. в изданиях Академии было напечатано 18 его сочинений. Некоторые из них печатались также в журналах Крелле и Лиувилля. Сохранились отзывы о некоторых из этих работ, написанные академиками А. Н. Савичем, Е. И. Золотаревым, В. Я. Буняковским. Основное место среди сочинений Миндинга в изданиях Академии занимают работы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. За исключением одной статьи, все работы этого цикла были напечатаны в изданиях Петербургской Академии наук. Четыре статьи посвящены вариационному исчислению, две—теории вероятностей, две—исчислению конечных разностей, одна — теории чисел, одна — алгебре и три — вопросам механики.

Сочинение Миндинга «Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» было удостоено Демидовской премии в 1861 г. Разбор этой работы был сделан академиком М. В. Остроградским [258].

Статья «К методу наименьших квадратов» [58] (1871) содержит упрощение формулы Гаусса, данной им в работе [128]. 23 февраля 1871 г. А. Н. Савич представил эту статью Миндинга в Физико-математическое отделение. В отзыве об этой работе Савич писал: «В этой записке уважаемый автор приводит любопытные объяснения правил, предложенных Гауссом для исследования весов при определении искомых количеств по способу наименьших квадратов».[43] (В записке имеется опечатка:

---

[43] ААН, ф. 1, оп. 2—1871, ед. 22, § 45, л. 1

вместо «квадратов» написано «количеств»). Спустя два года в Бюллетене Академии появилась статья О. И. Сомова, относящаяся к тем же формулам Гаусса [181].

Первой работой Миндинга по теории уравнений в конечных разностях была статья «О ходе коня на шахматной доске» [37]. Решение шахматной задачи он приводит к решению разностных уравнений. Как отмечал С. С. Урусов [276], Миндинг не только привел вопрос к уравнению, но и показал, что существует возможность теоретического решения задачи.

Последняя из работ Миндинга в изданиях Академии «Об одном приложении разностного исчисления» [61] (1878) связана с исчислением конечных разностей. По отзыву академика В. Я. Буняковского, «этот труд заключает в себе любопытное приложение конечных разностей к суммированию особенного вида ряда».[44]

30 ноября 1864 г. академики Сомов, Буняковский и Савич представили Миндинга в члены-корреспонденты Петербургской Академии наук. Приведем текст этого представления.

«В физико-математическое отделение императорской Академии наук

Представление

Профессор Дерптского университета Миндинг обогатил математическую литературу многочисленными трудами, способствовавшими к развитию разных частей математического анализа и его приложений. Он был постоянным сотрудником Крелле в издании его математического журнала и поместил в этом журнале 30 мемуаров. Некоторые из его мемуаров были напечатаны в Бюллетене и Записках нашей Академии. Сверх того он издал несколько отдельных сочинений в виде руководств: 1) Высшую арифметику, 2) Дифференциальное и интегральное исчисление, 3) Теоретическую механику, 4) Собрание таблиц интегралов.

Многие исследования Миндинга составляют весьма важное приращение в Анализе, как-то: 1) способ узнавать с точностью степень конечного уравнения, получающегося от исключения одного неизвестного из двух уравнений

---

[44] Там же, оп. 2—1878, ед. 22, § 152, 5 сентября 1878 г.

с двумя неизвестными, 2) исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными, 3) открытие линейчатых поверхностей, накладывающихся на данную линейчатую поверхность. За сочинение об интегрировании дифференциальных уравнений Миндинг получил полную Демидовскую премию.[45]

Мы напомним лестный для автора отзыв, который сделал покойный академик Остроградский в своем донесении комиссии, назначенной для разбора сочинений, представленных для соискания демидовских премий в 1861 г.: „Способы ученого геометра преимущественно прикладываются к тому случаю, когда производная неизвестной выражается рациональным образом через самую неизвестную и через переменную независимую. Такое ограничение весьма естественно объясняется трудностью предмета, оставшегося почти нетронутым от Эйлера до нашего времени, так что изыскания г. Миндинга составляют, по нашему мнению, самый важный шаг, сделанный в интегрировании дифференциальных уравнений после названного великого геометра“. В заключение Остроградский говорит, что „труд г. Миндинга есть труд оригинальный, значительный в науке, заслуживающий полного одобрения Академии и полной демидовской премии“. На основании приведенных нами ученых заслуг г. Миндинга имеем честь представить его как кандидата для замещения имеющейся вакансии члена-корреспондента нашей Академии. 1864 года ноября 30 дня. И. Сомов, В. Буняковский, А. Савич».[46]

В 1879 г. Миндинг был избран почетным членом Академии наук по представлению В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышева, обративших внимание Общего собрания на важность ученых заслуг профессора Миндинга. Тогда же Академия послала приветственный адрес Миндингу по случаю его 50-летнего докторского юбилея:

«Императорская Академия наук радостно приветствует Вас, глубоко почитаемый Фердинанд Готлибович, с исполнившимся сегодня полувековым периодом Вашего достохвального многополезного служения науке. В течение

---

[45] Миндинг получил не полную, а половинную премию.

[46] ААН, ф. 2, оп. 17, ед. 6, л. 178—178 об.

почти 40 лет наша Академия пользовалась высокоценимым ею преимуществом украшать свои издания многочисленными, всегда замечательными, Вашими трудами. Изящество приемов, находчивость, встречавшиеся в многосложных Ваших исследованиях, поставили Ваше имя наряду с именами первостепенных математиков нашего времени. Разнообразие предметов глубоких Ваших изысканий поистине изумительно: математическая литература, как ученая, так и педагогическая, обязаны Вам исполнением классических трудов по теории чисел, по высшей алгебре и геометрии, дифференциальному, интегральному (и разностному) исчислениям, по механике, диоптрике, геодезии и другим отраслям математики. Все эти превосходные работы отличаются глубиною соображений и своеобразностью. При этом нельзя умолчать о глубоких образцовых Ваших исследованиях, относящихся к весьма трудной теории изопериметрических линий на кривых поверхностях.

Особенно радует ныне всех людей науки та счастливая исключительность, что рука времени не ослабила Вашей плодотворной деятельности и не коснулась Ваших умственных усилий. Весьма недавние труды, опубликованные Вами в нашем Бюллетене, неопровержимо свидетельствуют о том: в них, как и в давнишних Ваших произведениях, видим ту же сообразительность, тот же светлый взгляд и прежние искусные аналитические приемы.

Более 15 лет Академия наук с гордостью считает Вас в числе наиболее деятельных своих членов-корреспондентов. Ныне, в ознаменование своего глубокого уважения и сочувствия к важным и многочисленным ученым заслугам Вашим, она единогласно избрала Вас в почетные члены.

Да продлит Провидение дни Ваши на долгие, долгие годы для блага науки и к искренней отраде друзей и почитателей Ваших. 3 сентября 1879 г.».[47]

Упоминания о Миндинге имеются в трудах академиков О. И. Сомова и Е. И. Золотарева. Рассматривая сочинение Сомова «Рациональная механика» [272], Золотарев

---

[47] Там же, ф.1, оп.2-1879, № 7, § 79, лл. 2—3.

останавливается на характеристике главы, посвященной вопросам о силах, приложенных к твердому телу и сохраняющих свои направления и величины при всяких перемещениях этого тела: «Вопросами такого рода с успехом занимались Мебиус и Миндинг. После них Сомов в своем мемуаре [179] . . .поставил и решил два общих вопроса, к которым сводятся все вопросы о силах подобного рода. . .» [218].

Сомов упоминает Миндинга также в мемуаре «Об алгебраическом способе доказательства Гамильтонова начала, относящегося к интегрированию уравнений динамики» [180]. В протоколе Физико-математического отделения Академии наук 19 января 1871 г. сказано: «Профессор Дерптского университета Миндинг в мемуаре. . . [51], посвященном Пулковской обсерватории в день празднования ее 25-летнего юбилея, дал сходное с Лиувиллевым доказательство Гамильтонова начала, но более обстоятельное, имеющее алгебраический характер, так как в нем устраняется начало наименьшего действия и общепринятый прием вариационного исчисления».

Золотареву принадлежат два отзыва о работах Миндинга, представленных им Академии. 23 августа 1877 г. ему передали на рассмотрение статью Миндинга о некоторых изопериметрических задачах [57]. На заседании 13 сентября Золотарев доложил, что «в этой записке рассматриваются некоторые частные случаи известной задачи вариационного исчисления: „Найти на данной поверхности кривую данной длины, окружающую наибольшую поверхность.“ Эти случаи именно те, когда данная поверхность есть шар и когда часть контура состоит из данных кривых. Г-н Миндинг уже не в первый раз занимается вопросами этого рода. Его предыдущая работа [58] посвящена тому же вопросу вариационного исчисления. В конце настоящей записки г. Миндинг упрощает вывод уравнения искомой кривой, данный в предыдущей работе. Кроме того, весьма интересен найденный им результат, что к тем же кривым можно прийти, разрешая следующую механическую задачу: „Определить на данной поверхности кривую, по которой расположится однородная гибкая и нерастяжимая нить, закрепленная в своих концах, если на элементы этой нити будут действовать силы, перпендикулярные к ним и лежащие в касательных плоскостях к поверхности“. Конечно, математики прочтут настоящее исследование г. Миндинга с таким же вниманием, каким пользуются и труды этого известного ученого».[48]

16 мая 1878 г. Золотарев сообщил о рассмотренной им работе Миндинга [60], в которой «изложены весьма важные дополнения к прежним исследованиям автора о том же предмете».[49] Обе эти статьи были напечатаны в Бюллетене Академии.

К изложенному, можно добавить, что Миндинг находился в переписке с академиками В. Я. Струве, В. Я. Буняковским, О. И. Сомовым. Через них он представлял свои работы в Петербургскую Академию наук. Писем Миндинга к Буняковскому, так же как и ответов последнего, обнаружить не удалось, хотя о существовании переписки говорится в других письмах Миндинга.

Первое из сохранившихся писем Миндинга к В. Струве датировано 30 января 1849 года. Оно гласит:[50]

«Глубокоуважаемый господин государственный советник!

Прилагаемая маленькая статья, которую позволю себе представить в первую очередь Вам, является, собственно говоря, своего рода геодезической и негеодезической всячиной, не дающей для практики ничего и для теории мало, но все же я надеюсь на кое-что, иначе бы не стал ее отсылать. Мне было очень трудно дать ей в целом удовлетворительное заглавие; выбранным, наконец, я также не удовлетворен. Предложение, касающееся минимальных поверхностей, было для меня неожиданным.

Излагаемому в заметке маленькому улучшению наблюдаемого угла, которое исходит от Бесселя, мне кажется не уделяется в учебниках достаточного внимания; по крайней мере я не нашел упоминания о нем в подробном трактате по геодезии Пюиссана [L. Puissant]. Поэтому я разработал вопрос, может быть, более, чем нужно. Поскольку я мог ошибиться в вышесказанном мнении, то умолчал о нем в самой заметке.

Если Академия, которой прошу эту заметку представить, если Вы с этим согласны, примет ее к печати, то

---

[48] Протоколы заседаний Физико-математического отделения имп. Академии наук, 1877, СПб.

[49] Там же, 1878, СПб.

[50] ААН, ф. 703, оп. 1, ед. 196, № 1411/9, л. 36.

прошу об отправке обычного числа экземпляров, как я обычно от Вас получал...

Всегда с благодарностью вспоминая дружбу, с которой Вы встретили меня при Вашем пребывании в Дерпте, остаюсь с просьбой о продолжении Вашего покровительства.

Вашему Превосходительству весьма преданный
Фердинанд Миндинг».

Заметка [38], о которой упоминает Миндинг в начале письма, вышла в том же 1849 г. в Бюллетене Петербургской Академии наук.

Большая переписка была у Миндинга и с О. Струве по вопросу о переводе на русский язык и об издании работы об интегрировании дифференциальных уравнений [48]. Из этой переписки видно, что Миндингу пришлось взять перевод сочинения и его издание на свой счет. В письме к О. Струве он выразил желание купить 200 оттисков немецкого издания этого сочинения (вдобавок к тем 50 экз., которые он мог получить бесплатно), с тем чтобы он мог сделать свою работу, представляющую дополнительную главу к учебнику по интегрированию уравнений, доступной более широким кругам. Последнее желание Миндинга было выполнено Академией в наиболее приемлемой для него форме: сочинение Миндинга в достаточном числе экземпляров дали в открытую продажу в виде отдельной брошюры.

В одном из писем к О. Струве Миндинг писал, что еще в ноябре 1860 г. он получил письмо от Буняковского, который сообщал о том, что передал представление конкурсной работы Миндинга М. В. Остроградскому; последний дал высокую оценку сочинению Миндинга, который, видимо, мог надеяться на то, что Остроградский примет участие в чтении его корректур.

В письме от 26 января (7 февраля) 1862 г. Миндинг выражает свое прискорбие по случаю смерти Остроградского и добавляет: «Я уверен, что эта заметка (приложение) показалась бы ему еще более интересной, так как уже предыдущая (работа) вызвала его живое участие».

Сохранившаяся переписка с О. Струве интересна еще тем, что в ней обсуждаются вопросы подготовки будущих астрономов, в частности сотрудников Пулковской обсерватории. До Миндинга дошло известие, что О. Струве выразил Гельмлингу свое неудовольствие, вызванное тем, что молодые астрономы, окончившие Дерптский университет, не справляются с вычислениями. Миндинг на это ответил в июне 1862 г. следующими строками, которые освещают некоторые стороны и его преподавательской деятельности:[51]

«Приходится сожалеть, что в настоящее время вряд ли возможно этому существенно помочь. Ведь это должно быть преимущественно задачей астрономического преподавания, настоящее состояние которого мы не в силах изменить. В университете стоят на короткой ноге с популярной и исторической астрономией, изучают названия и орбиты всех известных планет, спутников и комет, но, если даже их знать наизусть, теория ничуть не выиграет от этого.

В моих лекциях по механике я до сих пор при случае излагал в основных чертах вычисление орбиты планеты по трем наблюдениям, хотя для этого мог выделить лишь немного времени. Из Вашего замечания я сделал вывод, что надо быть в будущем более основательным. Правда, слушателями этого предмета являются не только астрономы или математики, но и физики и химики, которым эти исследования менее близки. Верно и то, что даже прилежные молодые люди обычно исходят из принципа лишь прослушать (характерное выражение!) все предметы, предписанные учебным планом, и подготовиться к экзамену лишь с помощью тетради. Так получается известная энциклопедическая многосторонность, которая лишь изредка бывает соединена с изрядными специальными знаниями. В прошлом семестре я читал теорию уравнений высших степеней, но не мог моих слушателей довести до численного решения уравнения 5-й степени. Они ограничивались изложенными примерами вычислений, и на мои повторные призывы к самостоятельным вычислениям ответили, что им не хватает времени.

Тот, кто посвящает себя астрономии, должен быть или стать особенно хорошим вычислителем, и поэтому должен сам упражняться в этом, не надеясь на лекции, которые и без того никак не могут заменить собственные упражнения. Я по крайней мере не буду упускать случая, чтобы настойчиво и многократно указывать на эту

---

[51] Там же, ф. 286, оп. 1, ед. 391, л. 13.

необходимость молодым людям, желающим посвятить себя астрономии».

Уже после Великой Октябрьской социалистической революции имя Миндинга встречается в материалах Академии наук. Так, в 1919 г. академики А. А. Марков, В. А. Стеклов и А. Н. Крылов предлагали создать Математический кабинет имени П. Л. Чебышева при Академии наук.[52] В кабинете, по их плану, должно быть отделение всякого рода математических таблиц и справочных изданий; при этом в первую очередь упоминается «Справочник» Миндинга [39].

В протоколах заседаний Совета Математического института АН СССР от 25 сентября 1932 г. указано, что А. Н. Крылов сообщает о своих переговорах с украинским издательством (с Н. И. Яковченко) о возможности переиздания таблиц интегралов Миндинга.[53]

---

[52] Там же, ф. 162, оп. 3, № 55. (Протоколы заседаний Физико-математического отделения Академии наук, 1919, § 25, 18 января 1919 г.).

[53] ААН (М.), ф. 383, оп. 1, ед. 4, лл. 5—6.

Часть II

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО

Глава 6

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Теория поверхностей является областью, которой Миндинг занимался наиболее интенсивно и в которой он оставил наиболее глубокий след. Важность его работ в этой области отмечается многими авторами. Так, например, А. Кнезер [136] писал в 1900 г.: «Новое развитие общей теории поверхностей начинается, как известно, с „Disquisitiones circa superficies curvas“ Гаусса; Миндинга можно назвать первым продолжателем, который, хотя и двигался по путям мастера, но зашел во многих существенных пунктах дальше Гаусса». В своем известном очерке истории дифференциальной геометрии Д. Дж. Стройк [274, стр. 43, 44] указывает следующее: «Гаусс сделался учителем математиков всего мира, но он не создал непосредственной школы, как это сделал Монж. Условия в Германии были отличны от тех, которые были во Франции. Единственным исключением, поскольку речь идет о дифференциальной геометрии, был Фердинанд Миндинг (1806—1885) в далеком Дерпте, который восполнил пробел, оставленный Гауссом, и опубликовал работу о геодезической кривизне».

Классический труд Гаусса по теории поверхностей вышел в 1828 г., первые работы [2] и [5] Миндинга в этой области — в 1830 г.[54] Несомненно, что молодой

---

[54] Миндинг был тогда преподавателем гимназии в Берлине, так что Стройк, говоря о «далеком Дерпте», ошибается. Первая печатная работа Миндинга [2] датирована: «Берлин в декабре 1829».

Миндинг внимательно изучил сочинение Гаусса. Однако непосредственным поводом к возникновению его первых работ, восполняющих «пробел, оставленный Гауссом», была одна задача из третьего тома журнала Крелле, которая гласит: «Найти на данной кривой поверхности кратчайшую кривую, ограничивающую заданную площадь». Автор задачи не указан; по объяснениям на стр. 395 второго тома журнала можно заключить, что она была поставлена самим Крелле.

Задача, как видно, принадлежит к задачам вариационного исчисления и представляет собой обобщение известной изопериметрической проблемы, в классической постановке которой рассматриваются лишь кривые на плоскости и решением которой является тогда окружность.

В своей первой печатной работе «О кривых кратчайшего периметра на кривых поверхностях» [2] Миндинг, используя необходимые условия, известные из вариационного исчисления, показал, что кривые, являющиеся решениями поставленной задачи, если они существуют, должны удовлетворять условию $h \cos i = R$, где i — угол между соприкасающейся плоскостью кривой и касательной плоскостью к поверхности, R — радиус кривизны кривой, а $h = \mathrm{const}$. Более детальный разбор этой статьи дан в главе 10 (см. стр. 119). Таким образом, уже в этой работе Миндинг дал важный результат.

В 1830 г. он опубликовал в журнале Крелле небольшую заметку «Замечание о развертывании кривых линий, принадлежащих поверхностям» [5], в которой показал, что величина $\frac{\cos i}{R}$ (которая должна быть постоянной у кривых, являющихся решениями предыдущей вариационной задачи) не изменяется при изгибании поверхности. При этом он делает ссылку на сочинения Гаусса, утверждая, что эта величина «может быть выражена подобно тому, как была представлена мера кривизны (mensura curvatura) в „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ Гаусса» (цит. по: [253]), т. е. она может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их частные производные.

Выкладки Миндинга, доказывающие это предположение, можно представить, если перейти к векторной записи следующим образом. Он исходит из уравнения $dx = x_p\, dp + x_q\, dq$ [здесь $x = x(p; q)$ является радиусом-вектором произвольной точки поверхности, отнесенной к параметрам $p,q]$. Нормаль к поверхности определяется вектором $[x_p;x_q]$, а нормаль соприкасающейся плоскости кривой вектором $[dx;\ d^2x]=[x_pdp+x_qdq;\ dx_pdp+dx_qdq+x_pd^2p+ + x_q\,d^2q]$. Для вычисления $\cos i$ надо найти скалярное произведение z этих векторов, которое, в силу тождества Лагранжа, выражается в виде

$$z=(x_p,\ x_pdp+x_qdq)\,(x_q,dx_pdp+dx_qdq+x_pd^2p+x_qd^2q)-$$
$$-(x_q,\ \ x_pdp+x_qdq)\,(x_p,\ \ \ dx_pdp+dx_qdq+x_pd^2p+x_qd^2q).$$

Так как

$$x^2{}_p=E,\ \ (x_p,\ x_q)=F,\ x^2{}_q=G,$$

то

$$x_px_{pq}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\qquad x_px_{qq}=\frac{\partial F}{\partial q}-x_{pq}x_q=\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$
$$x_qx_{pp}=\frac{\partial F}{\partial p}-x_{pq}x_p=\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}$$

и

$$z=\left\{E\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq+\frac{\partial F}{\partial p}dp-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\,dp\right)-\frac{1}{2}F\,dE\right\}dp^2+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}FdG-G\left(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\,dp+\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq\right)\right\}dq^2+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\,EdG-\frac{1}{2}\,GdE+F\left(\frac{\partial F}{\partial p}dp-\frac{\partial F}{\partial q}dq+\frac{\partial G}{\partial p}\,dq-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial E}{\partial q}\,dp\right)\right\}dpdq+(EG-F^2)\,(dpd^2q-dqd^2p).$$

С другой стороны,

$$R=\frac{ds^3}{|\,[dx,\ d^2x]\,|}\,,\quad [x_p,\ x_q]^2\ =\ EG-F^2,$$

следовательно,

$$\frac{\cos i}{R}=\frac{1}{\rho}=\frac{z}{\sqrt{EG-F^2}\ ds^2}\,. \tag{1}$$

Отсюда и следует, что $\frac{1}{\rho}=\frac{\cos i}{R}$ является инвариантом изгибания.

Далее Миндинг рассматривает частный вид этой формулы в случае полугеодезической системы координат, когда $E=1$, $F=0$, $G=\varphi^2$ (он говорит о полярных координатах $p=r$, $q=\psi$, но его выкладки справедливы и в более общем случае). Тогда в этих обозначениях из [1] следует, что

$$\frac{ds^2}{\rho}=2\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\psi dr^2+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}d\psi^2 dr+\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\psi^3+\varphi(drd^2\psi-d\psi d^2r).$$

Для ортогональных траекторий $r=\mathrm{const}$ семейства геодезических (линии r) отсюда следует, что

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

В заключение Миндинг отмечает, что на поверхностях постоянной кривизны K, где $\varphi=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin r\sqrt{K}$, величина $\frac{1}{\rho}$ для линий $r=\mathrm{const}$ равна $\sqrt{K}\,\mathrm{cotg}\,r\sqrt{K}$, т. е. является постоянной. Статья заканчивается следующим указанием: «Поэтому на таких поверхностях справедливо утверждение, к установлению которого я был приведен моим предположением, основания которого кратко сформулированы на стр. 303 предыдущего тома» [2]. Миндинг имеет в виду предположение, сделанное им в статье [2] о том, что кривые кратчайшего периметра (при заданной охватываемой ими площади) являются геодезическими окружностями, т. е. множествами точек, находящихся на постоянном геодезическом расстоянии от некоторого центра (подобно обычным окружностям в случае плоскости). Правда, он не был совершенно уверен в справедливости этой догадки в общем случае, так как добавил потом, что «стоит исследовать, всегда ли и в каких случаях имеет место сделанное здесь предположение». Понятно удовлетворение Миндинга, обнаружившего, что его утверждение справедливо, что оно имеет место по крайней мере на поверхностях постоянной кривизны. Что все геодезические окружности являются линиями с $\frac{1}{\rho}=\mathrm{const}$ только на этих поверхностях, он еще не мог знать — это было строго доказано лишь в 1920-х годах В. Бляшке и Б. Бауле, хотя было предугадано уже Г. Дарбу в 1890-е годы.[55]

---

[55] В третьем томе своего известного трактата по теории поверхностей [107] Г. Дарбу на стр. 151 в подстрочном примечании упоминает (без доказательства): «Кривые постоянной

Введенная Мındингом величина $\frac{1}{\rho}$ получила впоследствии (впервые в работе О. Бонне [95] в 1848 г.) название «геодезическая кривизна». После изучения наследия Гаусса выяснилось, что эта величина рассмотрена еще в одной его неопубликованной работе 1825 г. под названием «боковая кривизна» (Seitenkrummung) [125]. Гаусс доказал также инвариантность этой величины при изгибании. Мındингу же принадлежит приоритет в опубликовании этого результата.

К этой величине Миндинг вернулся в 1837 г. в заметке «Доказательство одной геометрической теоремы» [21], где ввел понятие развертывания кривой на плоскость и показал, что геодезическая кривизна кривой на поверхности равна кривизне развернутой кривой. Такой вывод он мог бы сделать из своего прежнего результата об инвариантности геодезической кривизны при изгибании, но в данной заметке Миндинг, по-видимому, ставил перед собой другую цель — дать совершенно самостоятельный вывод этого факта. Результат формулируется следующим образом: «Пусть вдоль кривой A на поверхности описана развертывающаяся поверхность и таким образом кривая развернута. Пусть R — радиус кривизны кривой A в некоторой точке, i — угол между касательной плоскостью к поверхности и соприкасающейся плоскостью, ρ — радиус кривизны развернутой кривой в соответствующей точке; тогда, как известно, между тремя указанными величинами имеет место очень простая зависимость, именно $\rho \cos i = R$. В доказательстве, которое Миндинг дает на одной странице, рассматривается некоторый бесконечно малый сферический треугольник и желаемая зависимость получается из теоремы косинусов сферической тригонометрии после отбрасывания бесконечно малых высшего порядка. Ценным в этой заметке является новое понятие развертывания кривой. С помощью этого понятия впоследствии Т. Леви-Чивита ввел понятие параллельного перенесения вектора на поверхности.

геодезической кривизны $\left(\text{т. е. кривые с } \frac{1}{\rho} = \text{const}\right)$ являются замкнутыми только на поверхностях постоянной кривизны». Полное доказательство этого утверждения дал в 1921 г. Б. Бауле в статье [80].

Эти первые исследования по теории поверхностей привели Миндинга к его основному циклу работ по изгибанию поверхностей. Сюда относятся две небольшие статьи: «Об изгибании некоторых поверхностей» [23] и «Об изгибании кривых поверхностей» [24], а также большой мемуар «Как установить, наложимы ли друг на друга две кривые поверхности; с замечаниями о поверхностях постоянной меры кривизны» [25]. Они были опубликованы в журнале Крелле в 1838—1839 гг. Д. Дж. Стройк характеризует их как работы выдающейся важности; «во всех них, — писал он, — ощущается глубокое понимание гауссовских идей. В них рассматривается „проблема Миндинга“, т. е. вопрос о наложимости одной поверхности на другую» [274, стр. 44].

В статье [23] Миндинг дает впервые конкретный пример изгибания неразвертывающейся поверхности, именно изгибание линейчатой поверхности в классе таких же поверхностей. Он сам пишет: «До сих пор была доказана изгибаемость только развертывающихся поверхностей; здесь показывается, что она имеет место для всех поверхностей, образуемых движением прямой линии». Содержание статьи можно в современной векторной записи передать следующим образом.

Пусть линейчатая поверхность задана уравнением

$$x = a(u) + vb(u),$$

где $|b(u)| = 1$. Ее первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = (\alpha + 2\beta v + \gamma v^2)\, du^2 + 2\varepsilon du dv + dv^2, \tag{2}$$

где

$$\alpha = a'^2,\ \beta = (a',\ b'),\ \gamma = b'^2,\ \varepsilon = (a',\ b').$$

Миндинг доказывает, что условиями (2) при заданных левых частях вектор-функции $a(u)$ и $b(u)$ с $|b(u)| = 1$ определены неоднозначно, причем произвольной будет одна функция одного аргумента. Он исходит из условия $b'^2 = \gamma$, которое позволяет определить именно с таким произволом: годографом вектор-функции $b(u)$ может быть произвольная кривая на единичной сфере, остается только избрать подходящую параметризацию. Далее Миндинг докажет, что при каждом выборе $b(u)$, когда удовлетворяются остальные условия (2), вектор-функция $a(u)$ существует и определяется с точностью до произвольного постоянного вектора. Миндинг составляет $A = [b,\ b']$ и показывает, что a' однозначно выражается через попарно ортогональные векторы b, b' и A:

$$a' = \xi A + \eta b + \zeta b'.$$

Коэффициенты здесь, очевидно, следующие:

$$\xi = \frac{(A, a')}{A^2}, \quad \eta = (b, a') = \varepsilon, \ \zeta = \frac{(b',\ a')}{b'^2} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Так как $A^2 = b'^2 = \gamma$, то остается только найти выражение для $(A,\ a')$:

$$[A,\ a'] = [[b,\ b'],\ a'] = b\beta - b'\varepsilon,$$

$$(A, a')^2 = A^2 a'^2 - [A, a']^2 = \gamma\alpha - \gamma\varepsilon^2.$$

Таким образом, при каждом $b(u)$ ($|b| = 1,\ \ b'^2 = \gamma$) действительно найдется вектор-функция $a(u)$, так что удовлетворяются (2).

Дополнительно Миндинг отмечает, что подходящим преобразованием $v = \tilde{v} + f(u)$ можно обратить в нуль величину β, но геометрической интерпретации соответствующей линии с $\beta = 0$ (которой Шаль год спустя в 1839 г. дал название «линия сжатия») Миндинг еще не дает. В этой его работе встречаются также линейчатые поверхности, все образующие которых параллельны данной плоскости. В одном частном случае, когда все образующие проходят через неподвижную прямую, их рассматривал еще Монж в «Приложении анализа к геометрии» [159]. В более общей постановке они были исследованы Э. Каталаном [99] в 1843 г., поэтому впоследствии их стали называть «поверхностями Каталана». У Миндинга они встречаются в рассматриваемой статье 1838 г. в связи со следующим вопросом: существует ли в классе линейчатых поверхностей, на которые изгибается данная линейчатая поверхность, некоторая «простая» поверхность, какой в случае развертывающихся поверхностей является плоскость? Миндинг указывает, что такой является поверхность, для которой годограф вектор-функции $b(u)$ представляет собой окружность. Он показывает, что любая линейчатая поверхность изгибаема на некоторую такую поверхность и приводит явные параметрические уравнения последней. В качестве примеров он рассматривает изгибание прямого геликоида и линейчатого гиперболоида.

Продолжением этой работы является вторая из названных выше статей [24] в том же томе журнала Крелле. В ней Миндинг сообщает найденный им пример семейства изометричных поверхностей вращения, налагаемых на прямой геликоид. Затем он дает некоторую схему частного вида для нахождения поверхностей, налагаемых на данную общую поверхность. В качестве приложения этой схемы он рассматривает изгибание поверхности вращения.

Пример, приведенный Мингингом, это семейство поверхностей вращения:

$$x = \left(\frac{1}{a}\sqrt{n^2+q^2}\cos ap, \quad \frac{1}{a}\sqrt{n^2+q^2}\sin ap, \right.$$

$$\left. \frac{1}{a}\int\limits_0^q \sqrt{\frac{a^2n^2+(a^2-1)\,q^2}{n^2+q^2}}\,dq \right),$$

где a — параметр семейства. Все поверхности семейства имеют одинаковую первую квадратичную форму

$$ds^2 = (n^2+q^2)\,dp^2 + dq^2,$$

совпадающую с аналогичной формой прямого геликоида. Среди них имеется катеноид (соответствует значению $a=1$). Таким образом, Миндинг впервые указывает наложимость катеноида на геликоид — пример, ставший теперь классическим. Он анализирует также случаи $a>1$ и $a<1$, рассматривая тем самым изгибание катеноида.

Переходя к более общему анализу, Миндинг впервые ставит проблему в следующем общем виде: «Вообще имеется очень привлекательная, но при этом крайне трудная задача: определить все возможные изгибания данной поверхности». Он делает первую попытку общего подхода к этой задаче — дает схему, которая при некоторых условиях позволяет найти частные изгибания данной поверхности, отнесенной к ортогональной параметрической сети.

Тогда

$$ds^2 = Edp^2 + Gdq^2.$$

Положив $z = z(q)$, Миндинг заметил, что

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2 = Edp^2 + (G - z'^2)\,dq^2 =$$

$$= (\sqrt{E}\cos\psi\, dp + \sqrt{G - z'^2}\sin\psi\, dq)^2 + (\sqrt{G}\sin\psi dp -$$

$$- \sqrt{G - z'^2}\cos\gamma dq)^2,$$

где $\psi = \psi(p, q)$ — некоторая пока неизвестная функция. Далее он принимает

$$dx = \sqrt{E}\cos\psi dp + \sqrt{G - z'^2}\sin\psi\, dq,$$

$$by = \sqrt{E}\sin\psi\, dp + \sqrt{G - z'^2}\cos\psi\, dq$$

и пишет условия интегрируемости правых частей в виде

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} = \sqrt{G - z'^2}\,\frac{\partial\psi}{dp}, \qquad \frac{\partial\sqrt{G - z'^2}}{\partial p} = -\sqrt{E}\,\frac{\partial\psi}{\partial q}.$$

Выражая отсюда $\frac{\partial\psi}{\partial p}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ и учитывая, что $\frac{\partial\psi}{\partial p\partial q} = \frac{\partial\psi}{\partial q\partial p}$, он получает после ряда преобразований следующее дифференциальное уравнение для нахождения функции $z'(q) = Q(q)$:

$$Q\frac{dQ}{dq} = MQ^2 + N,$$

где

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial q^2} + \frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{d^2G}{\partial p^2} - \frac{1}{2E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right\},\\ N &= \left(4\sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\right)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\,\frac{\partial G}{\partial q} - G(M)\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эта схема позволяет найти семейство поверхностей, изгибаемых на заданную поверхность, если M и N оказываются функциями только от q. В этом случае можно определить $Q(q)$ из (4) и затем $\psi(p, q)$ из (3).

В качестве примера применения этой схемы Миндинг рассматривает поверхность вращения $x = x(\varphi(q)\cos p, \varphi(q)\sin p, f(q))$, у которой $E = \varphi^2$ и $G = \varphi'^2 + f'^2$ являются функциями только от q, а $F=0$. Следовательно, схема применима и дает семейство поверхностей вращения

$$x=\left(a\varphi(q)\sin\frac{p}{a},\quad a\varphi(q)\cos\frac{p}{a},\quad \int\sqrt{f'^2+(1-a^2)\varphi'^2}\,dq\right),$$

изгибаемых на заданную поверхность, содержащее последнюю при $a=1$. Таким образом, Миндинг впервые доказал изгибаемость произвольной поверхности вращения.

При $\psi=\cos q$, $f=\sin q$ получается изгибание сферы (проколотой в полюсах) или ее полосы. В связи с этим последним примером Миндинг отмечает следующее: «Чтобы устранить недоразумения, отмечу еще, что замкнутая в себе выпуклая поверхность как единое целое является, как известно, неизгибаемой» [24]. По-видимому, это просто его собственная гипотеза. Во всяком случае работа Эйлера, в которой также содержится это утверждение в качестве гипотезы, вышла только в 1862 г. в томе его посмертных работ, хотя была написана между 1766 и 1775 гг. Неизгибаемость в целом выпуклых поверхностей впервые доказал в случае регулярных поверхностей Г. Либман в 1899 г., а в самом общем случае — в 1959 г. А. В. Погорелов.

Наиболее существенной среди работ Миндинга, заложивших основы теории изгибания поверхностей, является его большая статья «Как установить, наложимы ли друг на друга две кривые поверхности; с замечаниями о поверхностях постоянной меры кривизны» [25], которая появилась в журнале Крелле в 1839 г. В ней Миндинг ставит задачу следующим образом: надо решить, можно ли поставить в соответствие точкам одной поверхности точки другой поверхности так, чтобы линейные элементы между каждой парой бесконечно близких соответственных точек были равны. Далее он отмечает: «Это можно сделать с помощью прекрасной теоремы, установленной Гауссом в знаменитом сочинении о кривых поверхностях, а именно, что при изгибании поверхности остается неизменной мера кривизны в каждой точке (т. е. числовое значение среднего геометрического из кривизн обоих главных сечений в этой точке)». Он выясняет, во-первых, геометрический смысл этой теоремы, используя такие нестрогие понятия, как бесконечно малый элемент w поверхности и его сферический образ w', многогранный угол с бесконечным числом граней, описанный около w, и т. п. Затем он приводит аналитическое доказательство теоремы, которое отличается от доказательства Гаусса лишь тем, что за независимые параметры взяты координаты x и y. Таким образом, Миндинг приходит к необходимому условию изгибания: в соответствующих точках (x, y) и (x', y') должно быть $K(x, y) = K'(x', y')$.

Далее он отмечает: «Следует различать два случая: это уравнение выполняется либо тождественно, либо нет».

В первом случае, когда уравнение должно быть удовлетворено при независимых $x, y; x', y'$, «меры кривизны обеих поверхностей постоянны и равны друг другу». Миндинг формулирует и доказывает следующее утверждение: «Две поверхности равной постоянной меры кривизны могут быть наложены одна на другую и притом бесконечным числом способов». Его доказательство в настоящее время излагается почти во всех современных учебниках дифференциальной геометрии, оно сводится к интегрированию уравнения Гаусса в полугеодезических координатах

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p^2} + K\sqrt{G} = 0 \qquad (K = \text{const}).$$

Следующий раздел статьи Миндинг посвящает задаче нахождения поверхностей постоянной кривизны. Используя известное выражение для K, он сводит эту задачу к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = K\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right],$$

при $K = \text{const}$, и далее отмечает следующее: «Это интегрирование, за исключением случая $K = 0$, до сих пор не произведено. Между тем, принимая во внимание геометрическое значение этого уравнения, представляет интерес даже нахождение его частного интеграла; этого всего проще достичь путем введения полярных координат».

С помощью перехода к цилиндрическим координатам r, ψ и z, т. е. путем преобразования $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, Миндинг приводит это уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = Kr^2\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2\right\}^2,$$

из которого «легче усмотреть вышеупомянутый частный интеграл». Именно, он полагает, что $\frac{\partial z}{\partial \psi} = h = \text{const}$ и обозначает $u = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$, после чего уравнение принимает легко интегрируемый вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2h^2}{r^3} = 2Kr\left\{1 + u + \frac{h^2}{r^2}\right\}^2$$

(здесь левая часть — частная производная от выражения, заключенного в скобках). Отсюда

$$1 + u + \frac{h^2}{r^2} = \frac{1}{a - Kr^2},$$

где $a = \text{const}$; следовательно,

$$dz = hd\psi \pm \sqrt{\frac{1}{a - Kr^2} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\,dr.$$

При $h = 0$ отсюда получаются все поверхности вращения постоянной кривизны; но, кроме них, Миндинг рассматривает также случай $h \neq 0$ и описывает общий способ образования движением кривой $\psi = \text{const}$ поверхностей с $\frac{\partial z}{\partial \psi} = h \neq 0$. Итог анализа он выражает словами: «Кривая порождает поверхность так, как прямая порождает винтовую поверхность».

В случае постоянного положительного K Миндинг полагает $K = 1$ и так как должно быть $a > 0$, то обозначает $a = \alpha^2$. Далее он показывает, что преобразование

$$p = \arc\sin\sqrt{\frac{r^2 + h^2}{\alpha^2 + h^2}}, \quad dq = \sqrt{\alpha^2 + h^2}\left(d\psi + \frac{hRdr}{r^2 + h^2}\right),$$

где $R = \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 - r^2} - \frac{h^2}{r^2} - 1}$, приводит первую квадратичную форму поверхности к виду

$$ds^2 = \sin^2 p dq^2 + dp^2.$$

Миндинг отмечает, что при $h = 0$ отсюда получаются все поверхности вращения кривизны $K = 1$; их геометрическое строение он характеризовал еще в предыдущей статье [24]. При $h \neq 0$ из выражения R видно, что r может изменяться только между значениями r_0 и a, где

$$r_0^2 = \sqrt{h^2\alpha^2 + \frac{1}{4}(h^2 + 1 - \alpha^2)} - \frac{1}{2}(h^2 + 1 - \alpha^2) ,$$

и, следовательно, $r_0^2 < a^2$. Здесь при $r = r_0$ и $\psi = \mathrm{const}$ имеем $\frac{\partial z}{\partial r} = R = 0$. Отсюда Миндинг делает следующий вывод: «Кривая, движением которой будет порождена поверхность, определяется уравнением $dz = Rdr$; если рассмотреть ее ближе, то видно, что она состоит из бесконечного числа конгруентных дуг, касающихся друг друга в точках, где $r = r_0$, однако достаточно рассмотреть лишь одну из них. Такая дуга вогнута к оси z, перпендикулярна к ней в своих крайних точках, где $r = r'$, и параллельна оси z в середине, где $r = 0$; в остальном ее образ не имеет никаких бросающихся в глаза особенностей». «Если развернуть поверхность. . . на шар, то она покроет зону шара между двумя параллельными кругами». Мы видим, что в случае $K = \mathrm{const} > 0$ Миндинг выясняет положение до конца не только для поверхностей вращения, но и для винтовых поверхностей.

В случае $K = \mathrm{const} < 0$ Миндинг полагает $K = -1$, обозначает

$$R = \pm\sqrt{\frac{1}{r^2 + a^2} - \frac{h^2}{r^2} - 1}$$

и отмечает: «Это уравнение содержит три различных случая, смотря по тому, будет ли $h^2 - a$ положительно, нуль или отрицательно; однако, переходя к перечислению этих случаев, я выберу лишь поверхности вращения постоянной отрицательной меры кривизны». Далее он кратко указывает результаты, которые в настоящее время излагаются во многих учебниках и монографиях (см., например, [221]). Он сперва исследует, а затем показывает на чертеже качественный вид меридиана во всех трех случаях (рис. 1). Строение винтовых поверхностей постоянной отрицательной кривизны в трех случаях, указанных Миндингом, исследовал впоследствии У. Дини в 1865 г. [112].

Далее Миндинг переходит к анализу случая, когда уравнение $K(x, y) = K'(x', y')$ не удовлетворяется тождественно при независимых x, y; x', y', т. е. дело идет о поверхностях непостоянной кривизны. Предлагая, что поверхности отнесены к произвольным параметрам p и q, он строит последовательно величины, которые впоследствии (после появления работы Э. Бельтрами [81] в 1864—1865 гг.) стали называть дифференциальными инвариантами Бельтрами [221, ч. 1, стр. 467—470]. Здесь Миндинг впервые рассмотрел общий случай наложения одной поверхности на другую. Данное им решение поставленной задачи является почти полным; последующие авторы мало что дополнили, изменилась только методика изложения. Ниже мы излагаем содержание этой части статьи Миндинга, пользуясь более современными методами тензорного анализа и используя некоторую его специфику в случае бинарной области (см., например, [234]).

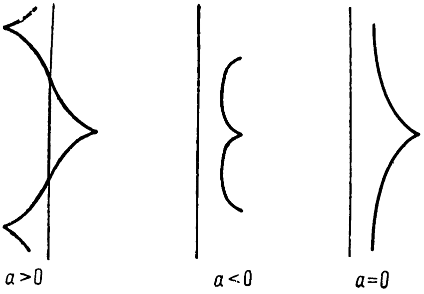


Рис. 1.

Исходя из равенств, выражающих совпадение первых квадратичных форм и полных кривизн в соответствующих точках двух поверхностей $x = x(u^1, u^2)$ и $x = x'(u'^1, u'^2)$

$$g_{ij}du^i du^j = g'_{ij}du'^i du'^j, \tag{5}$$

$$K(u^1, u^2) = K'(u'^1, u'^2) \tag{6}$$

(второе из них в силу теоремы Гаусса является следствием первого), Миндинг постепенно выводит из них следующее следствие:[56]

$$g^{ij}\partial_i K \partial_j K = g'^{ij}\partial_i K' \partial_j K', \tag{7}$$

---

[56] Миндинг записывал его в виде

$$\frac{En^2 - 2Fnm + Gm^2}{EG - F^2} = \frac{E'n'^2 - 2F'm'n' + G'm'^2}{E'G' - F'^2}.$$

При этом

$$dK = mdp + ndq, \qquad dK' = m'dp' + n'dq'.$$

которое с точки зрения тензорного анализа является совершенно очевидным (здесь равные функции — первые дифференциальные инварианты $\Delta_1 K$ и $\Delta_1 K'$ для функций K и K' [234], стр. 115; [221], ч. 1, стр. 467).

Далее он различает следующие два случая: а) уравнение (7) превращается в тождество в силу (6), б) оно является новым независимым уравнением.

Подробного анализа требует случай а). Миндинг использует здесь исключительно остроумный и оригинальный способ, показывая силу проникновения в суть математической проблемы. Он доказал, что

$$(g^{ik}\partial_i K \partial_k K)(g_{jl} du^j du^l) - (dK)^2$$

является полным квадратом. В современном изложении это следует из тождества (см. [234], стр. 22)

$$g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} = e_{ij}e_{kl}$$

(где $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$): нужно обе части этого тождества свернуть с $K^i K^k du^j du^l$ (где $K^i = g^{ih}\partial_h K$).

В результате получается

$$(g_{ik}K^i K^k)(g_{jl}du^j du^l) - (g_{il}K^i du^l)(g_{jk}K^k du^j) = \\ = (e_{ij}K^i du^j)(e_{kl}K^k du^l),$$

которое действительно равносильно с

$$(g^{ik}\partial_i K \partial_k K)(g_{jl}du^j du^l) - (dK)^2 = (e_{ij}K^i du^j)^2. \qquad (8)$$

Поэтому из (1), (2) и (3) вытекает, что[57]

$$e_{ij}K^i du^j = e'_{ij}K^i du'^i. \qquad (9)$$

Миндинг показал, что полученное дифференциальное уравнение (9) не может быть удовлетворено вследствие (6). Таким образом, решение задачи сведено им

---

[57] У Миндинга левая часть этого равенства имеет вид

$$(en - fm)\,dp + (fn - gm)\,dq,$$

где

$$e = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}E, \quad f = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}F, \quad g = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}G \text{ и } \Delta = EG - F^2.$$

к нахождению решения уравнения (9) при дополнительном условии (6). В дальнейшем он, к сожалению, проанализировал только случай полной интегрируемости уравнения (9), не обратив должного внимания на возможность существования особого решения. Однако этот пробел легко устраним и к принципиально новым выводам не приводит. Ниже мы укажем необходимое уточнение.

Таким образом, следуя Мидингу, допустим, что уравнение (9) является вполне интегрируемым и поэтому удовлетворяется условие интегрируемости. К нему Миндинг пришел косвенным путем. Он временно заменил на обеих поверхностях параметры $p\,(=u^1)$ и $p\,(=u'^1)$ параметром K, принимающим в соответствующих точках одинаковые значения (при этом он должен был, конечно, предполагать, что $\partial_1 K \neq 0$). Тогда (9) принимает вид

$$kdK + Qdq + Q'dq' = 0 \qquad (q = u^2,\ q' = u'^2). \tag{10}$$

Миндинг пишет условие интегрируемости этого уравнения и приводит его (после обратного перехода к общим параметрам) к виду,[58] равносильному с

$$e^{kj}\partial_k\,(e_{ij}K^i) = e'^{kj}\partial'_k(e'_{ij}K'^i), \tag{11}$$

где

$$e^{11} = e^{22} = 0,\ \ e^{12} = -e^{21} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}.$$

Результат не является неожиданным: если существуют функции $u'^i = f^i\,(u^1, u^2)$, которые превращают (9) в тождество, то после внешнего дифференцирования этого тождества получается

$$\partial_1(e_{i2}K^i) - \partial_2(e_{11}K^i) = [\partial'_1(e'_{12}K'^i) - \partial'_2\,(e'_{i1}K'^i)]\frac{D\,(u'^1,\,u'^2)}{D\,(u^1,\,u^2)},$$

и так как

$$e'^{ij} = \frac{D\,(u'^1,\,u'^2)}{D\,(u^1,\,u^2)}e^{ij},$$

---

[58] Левая часть получаемого уравнения у Миндинга следующая:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{d\,(en - fm)}{dq} - \frac{d\,(fn - mg)}{dp}\right).$$

то, действительно, справедливо (11). В случае полной интегрируемости уравнения (9) при дополнительном условии (6) оно должно удовлетворяться как следствие из (6).

Покажем, что левая часть полученного условия (11) фактически совпадает со вторым дифференциальным инвариантом $\Delta_2 K$ функции K [251, стр. 119; 221, ч. 1, стр. 470]. Действительно, так как для любого ковектора ξ_i

$$\nabla_k \xi_j = \partial_k \xi_j - G^l_{kj} \xi_l,$$

где $G^l_{kj} e^{kj} = 0$, то левую часть (11) можно писать также в виде

$$e^{kj} \nabla_k (e_{ij} K^i) = e^{kj} e_{ij} \nabla_k K^i = \delta^k_i \nabla_k K^i = \nabla_i K^i = g^{ij} \nabla_j \nabla_i K = \\ = \Delta_2 K.$$

(Здесь мы учитывали, что $\nabla_k e_{ij} = 0$, $\nabla_k g^{ij} = 0$, $K_j = = \partial_j K = \nabla_j K$).

Далее Миндинг показывает, что в рассматриваемом случае, когда из (6) вытекает (7) и (11), левые части уравнений (7) и (11) (т. е. $\Delta_1 K$ и $\Delta_2 K$) являются функциями от K. Действительно, K можно принять за параметр u^1 на обеих поверхностях, а после этого (7) и (11) превратятся в тождества (при независимых $q = u^2$, $q' = u'^2$) лишь в том случае, если их левые части зависят от K. Напомним, что эти выводы были сделаны при предположении, что из (6) следует (7) и полная интегрируемость уравнения (9), т. е. для случая, когда существует однопараметрическое семейство изгибаний двух данных поверхностей.

Существенным результатом Миндинга является то, что он показал не только необходимость, но и достаточность полученных условий для существования однопараметрического семейства изгибаний. При этом он опирался на полученное им тождество (8):

$$\Delta_1 K ds^2 - (dK)^2 = (e_{ij} K^i du^j)^2.$$

Допустим, что на обеих поверхностях первый и второй дифференциальные инварианты $\Delta_1 K$ и $\Delta_2 K$ являются функциями от K и пусть удовлетворяется (6). Тогда поверхности налагаемы друг на друга бесконечно многими способами. Действительно, так как в этом случае из (6) следует (11), то (9) вполне интегрируемо: существует первый интеграл $f(u^1, u^2, u'^1, u'^2) = C$, где C — произвольная постоянная. Кроме того, из (6) тогда вытекает также (7). Тождество (8) приводит теперь, в силу (6) (7) и (9), к (5), т. е. отображение одной поверхности на другую, определяемое уравнениями

$$K(u^1, u^2) = K'(u'^1, u'^2),$$

$$f(u^1, u^2, u'^1, u'^2) = C,$$

является изометрией. Такое отображение зависит при этом от одного постоянного параметра C. Миндинг выясняет также, какими данными это отображение (т. е. значение параметра C) определяется однозначно. Для этого он предлагает заменить на поверхностях параметры u^1 и u'^1 величиной K; тогда второе уравнение превращается в $F(K, u^2, u'^2) = C$. Для однозначного определения C достаточно указать на каких-нибудь двух линиях с одинаковым K по одной точке (т. е. фиксировать значения K, u^2 и u'^2).

К рассмотренному до сих пор случаю а) Миндинг возвращается в одной из своих следующих статей в 1840 г. В рассматриваемой же статье 1839 г. он этим ограничивается и переходит к случаю б), тогда (6) и (7) являются двумя независимыми уравнениями. Здесь он отмечает следующее. Если система, составленная из (6) и (7), совместна и устанавливаемые ей зависимости между u^1, u^2, u'^1, u'^2 превращают в тождество соотношение (9), то поверхности, в силу (8), налагаемы друг на друга, но не более чем счетным множеством способов. Если хотя бы одно из предположений не удовлетворяется, то поверхности не налагаемы.

Миндинг, таким образом, решил задачу до конца в двух случаях: 1) когда на обеих поверхностях, $\Delta_1 K$ и $\Delta_2 K$ оба являются функциями только от K, 2) $\Delta_1 K$ и K функционально независимы. Он пропустил случай, когда 3) $\Delta_1 K$ является функцией от K, но $\Delta_2 K$ и K функционально независимы. Ясно, что этот случай 3), так же как рассмотренный Миндингом случай 2), приводит не более чем к счетному множеству изгибаний. Зависимости между u^1, u^2, u'^1, u'^2 определяются тогда системой, составленной из (6) и (11). Если эта система совместна и получаемые из нее зависимости превращают соотношение (9) в тождество, составляя тем самым его особое решение, то определяется изгибание двух данных поверхностей друг на друга. Если хотя бы одно из предположений не удовлетворяется, то поверхности не налагаемы.

Ниже при разборе следующей заметки Миндинга [27], мы увидим, что возможность существования особого решения уравнения (10) была известна Миндингу. Он, по-видимому, просто отнес ее ко второму случаю б), не обратив на нее должного внимания. Полное изложение метода Миндинга, дополненное и этой деталью, дал в 1865 г. О. Бонне.

Решив почти до конца задачу о наложимости двух поверхностей с аналитической точки зрения, Миндинг затем дает интересное геометрическое истолкование полученных условий.

Он принимает за параметры p и q полную кривизну K и натуральный параметр линий с $K = \text{const}$, обозначает после этого угол между параметрическими линиями через ω и показывает, что тогда (7) и (9) превращаются в

$$\sqrt{E} \sin \omega = \sqrt{E'} \sin \omega' \tag{12}$$

$$\pm (\sqrt{E} \cos \omega dp + dq) = \sqrt{E'} \cos \omega dp + dq' \tag{13}$$

(потому что в этих параметрах $G = 1$, $F = \sqrt{E} \cos \omega$ и $K = p$). Эти условия, как выясняет Миндинг, выражают совпадение проекций двух соответствующих линейных элементов на касательную к линии с $K = \text{const}$ и на ортогональное к ней направление. Действительно, проекциями элемента $dx = \partial_p x dp + \partial_q x dq$ являются суммы проекций слагаемых, т. е. величины (рис. 2) $\sqrt{E} \cos \omega dp + dq$ и $\sqrt{E} \sin \omega dp$. Совпадение этих проекций приводит к совпадению длин соответствующих элементов, т. е. к наложимости двух поверхностей.

Свою основную статью по теории изгибания [25] Миндинг заключает следующим выводом: «На вопрос, можно ли две поверхности, для которых известны уравнения в координатах, налагать друг на друга, всегда можно ответить без помощи интегрирования; для его решения путем вычислений достаточны операции дифференцирования и исключения».

К этой статье тесно примыкает заметка «Об одном исключительном случае при изгибании кривых поверхностей», которая появилась в следующем году (1840) в том же журнале Крелле [27]. Она содержит доказательство красивой теоремы о том, что в случае существования однопараметрического семейства изгибаний двух заданных поверхностей каждая из них всегда изгибаема на некоторую поверхность вращения. Это предложение делает ясным, как получается однопараметрическое семейство изгибаний — остается возможность свободно повернуть ту поверхность вращения, на которую обе поверхности налагаются.

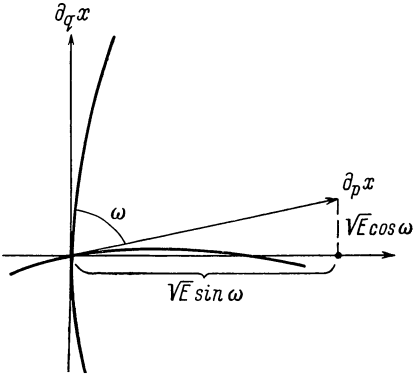


Рис. 2.

При доказательстве этой теоремы Миндинг пользуется условиями изгибаемости, полученными в предыдущей статье [25] для случая, когда обе поверхности отнесены к параметрам p и q, так что $p = K$ и q является натуральным параметром линий $K = \mathrm{const}$ [см. выше (12) и (13)]. Они следующие:

$$E - F^2 = E' - F'^2 \qquad (14)$$

$$\pm (Fdp + dq) = F'dp + dq'. \qquad (15)$$

Когда существует однопараметрическое семейство изгибаний (случай а) предыдущей статьи), то первое условие должно быть удовлетворено тождественно и, следовательно, $E - F^2 = P^2$ является функцией только от p [к этому теперь сводится условие $\Delta K = f(K)$]. Далее Миндинг отвечает: «В этом случае второе уравнение должно либо допускать особое решение, либо быть вполне интегрируемым». Это замечание заслуживает внимания в связи с тем пробелом в рассуждении Миндинга, который был указан выше: выясняется, что возможность существования особого решения уравнения (15) [а следовательно, и уравнения (10)] была ему известна. В рассматриваемой заметке его интересует, конечно, только случай полной интегрируемости уравнения (15), потому что только в этом случае возможно однопараметрическое семейство изгибаний. Так как $F = F(p, q)$ и $F' = F'(p, q')$, то условие интегрируемости сводится к тождеству

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F'}{\partial q'},$$

которое в силу независимости q и q'' возможно только тогда, когда $\frac{\partial F}{\partial q}$ является функцией только от p, т. е. когда $F = M(p)q + N(p)$. Случай $M(p) = 0$ приводит к развертывающимся поверхностям: тогда $F = N(p)$, $E = P^2 + N^2$ и

$$ds^2 = (N^2 + P^2)\,dp^2 + 2\,Ndpdq + dq^2 = P^2dp^2 + (Ndp + {} + dq)^2 = du^2 + dv^2,$$

где $du = Pdp$, $dv = Ndp + dq$. В случае $M(p) \neq 0$ Миндинг определяет функцию $\varphi(p)$ так, чтобы $M\varphi + N + \varphi' = 0$. Тогда после подстановки $q = w - \varphi(p)$ получается

$$ds^2 = P^2dp^2 + (Mwdp + dw)^2,$$

но это и есть метрическая форма поверхности вращения: стоит только сделать замену

$$qe^{\int Mdp} = v,\quad e^{-\int Mdp} = U,\quad P(p)dp = U(u)du,$$

чтобы получить $ds^2 = U^2du^2 + U^2dv^2$ — метрическую форму поверхности вращения

$$x = \arc\cos\frac{v}{a},\qquad y = \arc\sin\frac{v}{a},\qquad z = \int\sqrt{u^2 - a^2}\,du.$$

Так как здесь имеется параметр a, то Миндинг тем самым еще раз доказал изгибаемость поверхностей вращения в их классе.

Если рассматривать работы Миндинга по теории изгибания поверхностей с современной точки зрения, то можно сказать, что им решена проблема эквивалентности римановых пространств в случае размерности 2, причем показана связь этой проблемы с классификацией этих пространств по группам допускаемых движений.

Цикл работ Миндинга по теории поверхностей, относящихся к берлинскому периоду его деятельности, завершает статья «Дополнения к теории кратчайших линий на кривых поверхностях», которая появилась 1840 г. в журнале Крелле [28]. В ней среди материала, не имеющего особой ценности, содержится очень важное утверждение о геодезических треугольниках на поверхности постоянной отрицательной кривизны, которое впоследствии сыграло весьма существенную роль при интерпретации геометрии Лобачевского.

Статья состоит из четырех кратких и мало связанных друг с другом разделов. В первом из них автор, рассматривая дифференциальные уравнения геодезических линий и линий «наименьшего охвата» (т. е. линии с постоянной геодезической кривизной, введенные им самим в [2]), доказывает, что они в случае развертывающихся поверхностей допускают решения в квадратурах.

Во втором разделе дается вышеупомянутое важное утверждение о том, что на поверхности положительной постоянной кривизны соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника, образованного дугами геодезических, совпадают с формулами сферической тригонометрии, а на поверхности постоянной отрицательной кривизны «справедливы те же формулы с тем лишь изменением, что вместо тригонометрических входят гиперболические функции сторон». Первая часть предложения следует из того, что «поверхность этого рода может быть наложена на шар». Доказательства второй части Миндинг не проводит; он ограничивается лишь следующим замечанием: «Действительно, если a, b, c — стороны треугольника, A — угол, противолежащий a, и K — постоянная мера кривизны, безразлично положительная или отрицательная, то нетрудно доказать справедливость следующего уравнения:

$$\cos a\sqrt{K} = \cos b\sqrt{K}\cos c\sqrt{K} + \sin b\sqrt{K}\sin c\sqrt{K}\cos A».$$

В третьем разделе Миндинг приводит некоторые формулы, дополняющие его результаты о поверхностях кривизны $K = -1$, полученные в [25]. Ему теперь удается решить задачу, с которой он в [25] еще не мог справиться: указать для винтовых поверхностей с кривизной $K = -1$ и метрической формой

$$ds^2 = (v^2 + h^2 - a^2)\,dt^2 + \frac{dv^2}{v^2 + h^2 - a^2}$$

конечные преобразования, которыми эта форма приводится к виду $ds^2 = d\sigma^2 + sh^2\sigma d\theta^2$, где σ и θ — геодезические полярные координаты на поверхности.

Наконец, в последнем разделе статьи Миндинг, опираясь на результат Якоби, опубликованный в 19-м томе журнала Крелле, приводит интеграл дифференциального уравнения геодезических линий на эллипсоиде, отнесенном к линиям кривизны, и изучает поведение геодезических.[59] Он показывает также, с помощью каких подстановок можно этот результат перенести на случай гиперболоидов и параболоидов. В случае конусов и цилиндров второго порядка он отсылает к первому разделу статьи.

В дерптский период своей деятельности Миндинг теорией поверхностей занимался эпизодически. Последние его статьи, посвященные изопериметрической проблеме на поверхностях, мы считаем более правильным отнести, следуя А. Кнезеру [136], к вариационному исчислению.

В 1849 г. Миндинг опубликовал в Бюллетене Петербургской Академии наук статью «Об основных формулах геодезии» [38], которая в 1852 г. появилась также в журнале Крелле. Содержание статьи весьма слабо связано с геодезией, оттуда взяты только некоторые постановки задач. Основной свой замысел Миндинг выражает в статье следующим образом: «Вообще говоря для изложения геодезии могло быть полезным производить вычисления, по крайней мере в их основаниях, в форме, свободной от всякого определенного суждения о фигуре Земли». В этом он, конечно, следовал Гауссу.

Первой задачей, рассмотренной Миндингом, является следующая. Пусть через точку A произвольной поверхности проходит геодезическая, которая образует с одним из главных направлений в точке A угол φ. Возьмем на этой геодезической точку B. В геодезии имеется возможность определить не угол φ непосредственно, а угол i,

---

[59] В русском переводе этой статьи [28], где последний раздел опущен, имеется неправильное указание, что он посвящен линиям кривизны на эллипсоиде.

между главным направлением в точке A и вертикальной плоскостью, проходящей через точку B (рис. 3). Требуется найти выражение, хотя бы приближенное, связывающее i и φ. Для случая, когда поверхностью является эллипсоид вращения, решение задачи было опубликовано Бесселем в первом томе «Astronomische Nachrichten». Миндинг рассмотрел самый общий случай и дал формулу, содержащую формулу Бесселя в качестве весьма частного случая. Он отнес поверхность к такой прямоугольной системе координат в пространстве, начало которой помещается в точке A, а оси x и y идут в главных направлениях. Тогда для произвольной точки поверхности

$$z=\frac{1}{2}(K_1x^2+K_2y^2+\ldots.),$$

а для точки B геодезической, как можно проверить,

$$x=s\cos\varphi-\frac{1}{6}s^3K_1K_0\cos\varphi+\ldots,$$

$$y=s\sin\varphi-\frac{1}{6}s^3K_2K_0\sin\varphi+\ldots,$$

где s является длиной дуги AB, а $K_0=K_1\cos^2\varphi+K_2\sin^2\varphi$ — нормальной кривизной геодезической в точке A. Так как $\operatorname{tang} i=\frac{y}{x}$, то после разложения в ряд Миндинг получает желаемую формулу:

$$i=\varphi+s^2(K_1-K_2)K_0\sin\varphi\cos\varphi+\ldots$$

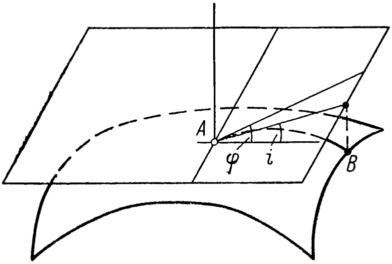


Рис. 3.

Вторая задача, рассмотренная Миндингом в этой статье, ставится следующим образом. Он относит поверхность к некоторому постоянному направлению в пространстве (считая, что этим направлением определяются полюсы на небесной сфере) и вводит «меридианные кривые,... состоящие из всех точек,... зенитные точки которых на небесной сфере лежат на одной меридиане», а также «кривые равного полярного расстояния». Другими словами, он рассматривает сеть, которая при сферическом отображении поверхности переходит в сеть меридианов и параллелей на сфере. На основании выражения для косинуса угла между линиями такой сети Миндинг заключает, что ортогональная сеть подобного рода существует только на поверхностях следующих двух классов: 1) на минимальных поверхностях, где все сети меридианных кривых и кривых равного полярного расстояния, определяемые относительно произвольной оси, являются ортогональными, и 2) на поверхностях, состоящих из ортогональных траекторий однопараметрического семейства плоскостей, параллельных заданному направлению (т. е. на разных поверхностях с цилиндрическими огибающими, в частности на поверхностях вращения).

Это интересное утверждение Миндинга осталось не замеченным последующими авторами. Оно содержало следующие более поздние результаты О. Бонне и Э. Б. Кристоффеля. Бонне доказал в 1860 г. (рассматривая, как и Миндинг, меридианные и параллельные кривые на произвольной поверхности) конформность сферического отображения минимальной поверхности.

Кристоффель установил в 1867 г., что этим свойством, кроме сфер, обладают только минимальные поверхности. Из результата Миндинга легко вывести оба эти утверждения — достаточно заметить: 1) что ортогональность на данной поверхности всех сетей, рассмотренных Миндингом (относительно произвольной оси), равносильна конформности сферического изображения поверхности и 2) что единственной поверхностью, имеющей бесконечно много строений резной поверхности с цилиндрической огибающей, при любом направлении образующих, является сфера. Миндинга удивил полученный им результат: «Предложение, касающееся минимальных поверхностей, было для меня неожиданным» (см. его письмо к В. Струве на стр. 54). Закономерно, что позднее он более подробно исследовал вопросы, связанные с минимальными поверхностями, которые в 1860-х годах, после выхода в свет основополагающих работ Римана, Вейнгартена, Эннепера и Вейерштрасса, привлекли внимание геометров.

В 1863 г. университетская типография выпустила в виде отдельной брошюры работу Миндинга на латинском языке «Вопросы о кривизне поверхностей», посвященную 50-летнему юбилею присуждения докторской степени В. Струве [50]. В ней Миндинг находит выражения полной и средней кривизны поверхности, заданной уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$ через частные производные функции φ, получает уравнения для определения множества точек округлений и т. п. Выражение, найденное для средней кривизны в случае, когда поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, сводится к известному результату, который Миндинг, переходя к параметрическому заданию поверхности, после ряда преобразований приводит к привычной ныне форме:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{GD + ED'' - 2FD'}{(\sqrt{EG - F^2})^3}\,. \tag{16}$$

Таким образом, им найдено выражение средней кривизны через коэффициенты двух квадратичных форм поверхности. А. Кнезер [136] полагает, что это было сделано Миндингом впервые. Относительно вывода формулы это может быть действительно так, но полученный результат, конечно, не был нов. Он фактически содержится во всех работах, где составляется квадратичное уравнение для определения главных радиусов кривизны. По-видимому, первой из них является кандидатская диссертация ученика Миндинга К. Петерсона, написанная в Дерпте в 1853 г.

Последней работой Миндинга по теории поверхностей является опубликованная в 1875 г. в Бюллетене Петербургской Академии наук статья «О средней кривизне поверхностей» [57]. В ней он повторил вывод формулы (16) и применил ее к случаю, когда поверхность отнесена к изометрическим параметрам p и q (т. е. когда $E = G$ и $F = 0$). После некоторых преобразований он вывел для этого случая формулу

$$H^2 = \frac{1}{4E^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)^2\right\}, \tag{17}$$

которую затем использовал для решения задачи нахождения всех минимальных поверхностей, проходящих через заданную линию. Если линия задана уравнением $x = x(p)$, то поверхность он искал в виде

$$x = \frac{1}{2}\{f(p + qi) + f(p - qi) + i[g(p + qi) - g(p - qi)]\},$$

где $g(p)$ — искомая функция. (Разумеется, у Миндинга было выражение в координатах). Так как здесь уже имеет место $x_{pp}+x_{qq}=0$, то для применения формулы (17), чтобы получить желаемое равенство $H=0$, остается только выбрать $g(p)$ так, чтобы параметры p и q были изометрические. Отсюда для нахождения трех координат вектор-функции $g(p)$ получается два уравнения $f'^2=g'^2$, $(f',g')=0$, так что задача имеет бесконечно много решений. Обозначив $g'=M+Ni$, Миндинг находит, что

$$2x=f(p+qi)+f(p-qi)-2\int\limits_0^q Ndq.$$

Но в том же 1875 г. в журнале Крелле появился мемуар Г. А. Шварца [176], в котором аналогичные формулы были получены в более четком и развернутом виде. Что касается задачи проведения минимальной поверхности через заданную линию, то она была уже решена в 1843 г. Э. Бьерлингом и в 1855 г. О. Бонне. Их работы (в которых доказано даже больше: существование и единственность минимальной поверхности, имеющей на заданной аналитической линии заданные нормали) остались, по-видимому, неизвестными Миндингу.

Глава 7

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ МИНДИНГА В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Работы Миндинга по внутренней геометрии поверхностей, являющиеся непосредственным продолжением классического мемуара Гаусса, и в особенности по теории изгибания поверхностей положили начало новому направлению в дифференциальной геометрии. Его методы и результаты излагали и развивали многие последующие авторы, при этом нередко без упоминания их первооткрывателя. Многие из них вошли затем в учебники и монографии, причем принадлежность их Миндингу оставалась иногда неизвестной до самого последнего времени и часто можно встретить совершенно неправильные утверждения об авторах этих результатов.

Первым, кто через 18 лет после Миндинга вновь изложил и развил результаты его первых статей, был О. Бонне. В работе 1848 г. [95] он дал введенной Миндингом величине $\frac{1}{\rho}=\frac{\cos i}{R}$ название «геодезическая кривизна» и показал ее связь с гауссовой кривизной, доказав так называемую интегральную формулу Гаусса—Бонне. Повторяя результат Миндинга о постоянстве этой величины у кривых кратчайшего периметра, он отметил: «Эта замечательная теорема, которая соответствует предложению о том, что радиус кривизны окружности постоянен, не является новой. Она была дана уже довольно давно в первых томах журнала Крелле; г. Делоне (Delaunay) тоже получил ее в последнее время в одной заметке, помещенной в журнале Лиувилля».

Здесь, как мы видим, имя Миндинга даже не упоминается. Переходя к рассмотрению вопроса об изгибании линейчатых поверхностей, Бонне отмечает: «Мы пользуемся одной работой, опубликованной на эту тему г. Миндингом в XVIII томе журнала Крелле [23, 24], и предполагаем, так же как и этот искусный геометр, что прямолинейные образующие двух поверхностей соответствуют друг другу». Это, однако, не помешало Бонне изложить свой метод установления наложимости двух произвольно заданных поверхностей без указания на основную работу Миндинга [25]. Метод Бонне выделяется своей геометрической ясностью, но с аналитической стороны является более сложным, чем метод Миндинга, к которому в дальнейших работах вернулся и сам Бонне.

В конце 1840-х годов теорией поверхностей интересовался Лиувилль. Основную часть своих результатов он опубликовал в 1850 г. в дополнениях к 5-му изданию «Приложений анализа к геометрии» Г. Монжа. Б. К. Млодзеевский, работа [244] которого содержит обстоятельный обзор исторического развития теории изгибания поверхностей до 1885 г., справедливо отмечает в связи с этими работами Лиувилля: «Эти исследования мало продвинули вперед теорию изгибания, так как большая часть их результатов есть уже у Миндинга, о котором, впрочем, Лиувилль нигде не упоминает; последнее обстоятельство было, по всей вероятности, одной из причин того, что работы Миндинга долгое время оставались малоизвестными математикам». Из самостоятельных результатов Лиувилля в этой работе наиболее ценны простые формулы для гауссовой кривизны K и геодезической кривизны k_g:

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial u dv}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right)\right\},$$

$$k_g=\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\Gamma_1\cos\varphi+\Gamma_2\sin\varphi$$

(здесь в первой формуле ω — угол между параметрическими линиями, во второй формуле φ — угол между заданной линией и линией некоторой ортогональной сети, а Γ_1 и Γ_2 — геодезические кривизны линий этой сети).

В конце 1850-х годов задачами изгибания поверхностей интересовались некоторые итальянские математики. Отметим здесь работу Д. Кодацци ([104]; см. также стр. 84), в которой доказано, что непрерывное изгибание с сохранением линий кривизны допускают только развертывающиеся поверхности и резные поверхности. Хотя Кодацци не дал еще соответствующих уравнений изгиба резной поверхности, его работа все же была первой, существенно дополняющей результаты Миндинга об изгибании поверхностей вращения (являющихся, как известно, частными случаями резных поверхностей).

В 1859 г. Парижская Академия наук избрала теорию изгибания поверхностей темой для соискания премии на 1860 год. Особое внимание соискателей обратили на не решенную еще проблему: вывести для произвольно заданной поверхности дифференциальные уравнения всех поверхностей, налагающихся на данную. Требовалось приложить эти уравнения к некоторым частным примерам, в особенности к поверхностям второго порядка. Работы представили Э. Бур (Bour), О. Бонне и Д. Кодацци. Премию получил первый из них, молодой парижский математик, ставший сразу профессором в Политехнической школе. О его работе, опубликованной в 1862 г. [96], Лиувилль сказал, что она «может быть принята за хороший мемуар Лагранжа». Бонне и Кодацци получили почетные отзывы.

Рассматривая произвольную поверхность, Бур отнес ее к полугеодезическим координатам, в которых первая квадратичная форма принимает вид $ds^2=dv^2+g^2du^2$, и нашел систему трех уравнений с частными производными для следующих трех величин: нормальная кривизна геодезических $v = \mathrm{const}$, нормальная кривизна и кручение их ортогональных траекторий $u = \mathrm{const}$. Эти величины вместе с g определяют поверхность однозначно. В качестве применения этих уравнений Бур рассмотрел изгибание линейчатых поверхностей и поверхностей вращения. Относительно первых он доказал результат, который вытекает уже из работы Миндинга, что при изгибании линейчатой поверхности ее образующие можно сделать параллельными образующим произвольного конуса. В случае поверхностей вращения он дополнил результат Миндинга из работы [24], на которую у него имеется прямая ссылка, доказав, что всякая поверхность вращения налагается на винтовую поверхность с любым наперед заданным шагом. Он дал также соответствующие уравнения изгибания, а также уравнение изгибания резных поверхностей, рассмотренного ранее Кодацци.

Изложение проблемы изгибания в работе Бонне, представленной на конкурс, обладает тем недостатком, что вследствие выбора мнимых параметров, в которых $ds^2 = 4\lambda du dv$, и неизвестной функции в виде $z = \frac{1}{2}(y - ix)$, полученное им уравнение не позволяет ему сделать много новых интересных геометрических выводов. Стоит отметить лишь его теорему о том, что при изгибании нелинейчатой поверхности ее асимптотические линии никогда не остаются таковыми. Работа затем вышла в значительно расширенном виде [94]; вторая часть мемуара содержит, в частности, теорему Бонне об однозначной определенности поверхности двумя квадратичными формами.

Работа Кодацци вышла полностью только в 1883 г. [105], однако некоторые извлечения из нее были приложены к мемуару Бонне. В ней наиболее ценна система уравнений в частных производных, которая аналогична системе Бура, но имеет перед ней то преимущество, что поверхность предполагается отнесенной к произвольной ортогональной параметрической сети. Неизвестными функциями считаются нормальная и геодезическая кривизны и геодезическое кручение параметрических линий.

В связи с этими конкурсными работами необходимо обратить внимание на кандидатскую диссертацию «Об изгибании поверхностей» («Über die Biegung der Flächen») ученика Миндинга, выпускника Дерптского университета К. Петерсона, выполненную в Дерпте в 1853 г. Диссертация осталась в свое время неопубликованной и вышла только в 1952 г. в русском переводе [260]. В подготовительной части этой работы выводятся (как правило, в несколько более общей или более компактной форме) некоторые формулы, ранее имевшиеся в работах Бонне и Лиувилля. Затем, переходя к основному содержанию работы, Петерсон выводит новые важные формулы, которые связывают главные радиусы кривизны r' и r'' с геодезическими кривизнами $\frac{1}{\tau'}$ и $\frac{1}{\tau''}$ линий кривизны:

$$\frac{1}{\tau'}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)=\frac{\delta\left(\frac{1}{r'}\right)}{\delta s};\ \frac{1}{\tau''}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{r''}\right)}{ds}$$

(здесь $\frac{d}{ds}$ и $\frac{\delta}{\delta s}$ обозначают дифференцирования по главным направлениям). Вместе с формулой Гаусса, которую Петерсон, усовершенствовав результат Бонне, получает в виде

$$\frac{1}{r''r''}=\frac{\delta\left(\frac{ds}{\tau'}\right)}{\delta s ds}+\frac{d\left(\frac{\delta s}{\tau''}\right)}{\delta s ds},$$

эти формулы составляют полную систему основных уравнений теории поверхностей. Петерсон заметил также возможность применить их при нахождении поверхностей, налагаемых на данную. Он отнес поверхность к произвольной ортогональной параметрической сети, ввел еще угол ν, который одна из линий кривизны составляет с первой параметрической линией, и отметил: «Величины r', r'' и ν определяют изгибание поверхности; они не произвольны, а связаны между собой тремя уравнениями». Однако эти уравнения Петерсон приводит в не вполне отчетливой форме. В конце его диссертации имеются следующие уравнения:

$$\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\nu}{\partial l}=\frac{1}{2u}\left[\frac{\partial v}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{1}{E''}}+\frac{\partial u}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{1}{E''}}\cos 2\nu+\frac{\partial u}{\partial l}\sqrt{\frac{1}{E}}\sin 2\nu\right],$$

$$\frac{1}{\tau''}+\frac{1}{\sqrt{E''}}\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}=\frac{1}{2u}\left[-\frac{\partial v}{\partial l}\sqrt{\frac{1}{E}}+\frac{\partial u}{\partial l}\sqrt{\frac{1}{E}}\cos 2\nu+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{1}{E''}}\sin 2\nu\right],$$

где $u=\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}$, $v=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}$, а $\frac{1}{\tau'}$ и $\frac{1}{\tau''}$ на этот раз обозначают геодезические кривизны линий $l=\text{const}$ и $\lambda=\text{const}$ ортогональной параметрической сети (они могут быть выражены через коэффициенты E и E'' первой квадратичной формы и через их производные). Следовательно, это и есть два дифференциальных уравнения, связывающие функции $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$ и ν с коэффициентами E и E'' первой квадратичной формы. Третье уравнение можно получить из формулы Гаусса, но вывод его окончательной формы в диссертации отсутствует. Тем не менее можно сказать, что Петерсон впервые, за 6 лет до объявления конкурса в Париже, заметил возможность решить поставленную там задачу и сделал наиболее существенные шаги к ее решению. Стоит отметить еще, что диссертация Петерсона содержит также формулировку и краткое доказательство основной теоремы теории поверхностей, которую лишь 14 лет спустя вновь получил и опубликовал Бонне. Она дана Петерсоном в таком виде: «Если же даны шесть величин: E, E', E'', r', r'' и ν, то поверхность определена вплоть до ее положения в пространстве» [260, стр. 109]. К исследованию изгибания поверхностей более конкретных классов Петерсон своих уравнений, к сожалению, не применил. В своем кратком отзыве о диссертации Петерсона Миндинг отметил: «Нужно пожалеть о том, что изложение весьма неясно и затрудняет чтение». Тем не менее Миндинг заключает, что «работа является выдающейся». Остается только пожалеть о том, что диссертация Петерсона не была опубликована при жизни автора и увидела свет только через сто лет после ее написания [213, 260, 267].

Петерсон положил начало новому направлению — теории изгибания поверхностей на главном основании (т. е. при сохранении некоторой сопряженной сети) — своими исследованиями, осуществленными в Москве. Основная его работа по этой тематике вышла в 1866 г. в первом томе «Математического сборника» [261].

Первым же примером такого рода изгибания было рассмотренное Фердинандом Мимдингом изгибание поверхностей вращения. Свое настоящее развитие это направление получило начиная с 1890 г., причем наиболее ценный вклад внесли в XX в. исследования представителей

Московской школы дифференциальной геометрии, ведущей свое начало от исследований Петерсона.[60]

Таково было первоначальное развитие общих проблем той области, которая выросла из первых работ Миндинга по изгибанию поверхностей. В связи с этим получили развитие и результаты Миндинга по изгибанию поверхностей некоторых классов.

Ряд предложений об изгибании линейчатых поверхностей дали О. Бонне [94] и Э. Бельтрами [82]. Бонне доказал, используя уравнения Кодацци, что единственными линейчатыми поверхностями, допускающими изгибание, при котором прямолинейные образующие не переходят в прямые, являются развертывающиеся поверхности и поверхности, налагающиеся на поверхность второго порядка. Бельтрами показал, что произвольную геодезическую линию на линейчатой поверхности можно путем изгибания последней превратить в прямую, а произвольную линию, не являющуюся ортогональной траекторией образующих, — либо в плоскую линию, либо в асимптотическую, либо в линию кривизны. Интересен его вывод, что существуют пары изометричных линейчатых поверхностей с параллельными соответствующими образующими; однако их нельзя перевести друг в друга изгибанием по Миндингу, не используя, кроме того, отражение одной поверхности от некоторой плоскости.

Интересную связь задачи изгибания поверхностей вращения, впервые рассмотренной Миндингом, с другими проблемами теории поверхностей обнаружил в 1861 г. Вейнгартен. Он доказал следующую теорему [188]: если для всех поверхностей, у которых главные радиусы кривизны R_1 и R_2 связаны одинаковым соотношением $\varphi(R_1, R_2) = 0$, построить поверхности центров кривизны (эволютные поверхности), то последние могут быть получены изгибанием одной и той же поверхности вращения. Так как уравнения многих типов таких поверхностей Вейнгартена (например, минимальных поверхностей: $R_1 + R_2 = 0$, каналовых поверхностей: $R_2 = \text{const}$ и др.) были уже проинтегрированы, то Вейнгартен мог сразу найти все

---

[60] Обстоятельный исторический обзор исследований в этом направлении, включая основополагающие работы Петерсона, содержится в книге С. П. Финикова [279].

возможные изгибания некоторых конкретных поверхностей вращения [189].

Развитие теории изгибания поверхностей в XVIII—XIX в. можно, следуя А. Фоссу [187], разделить на три периода: первый — от И. Бернулли до Г. Монжа,[61] второй — от Гаусса и Миндинга до Вейнгартена и третий — от Бельтрами до первоначального завершения теории квадратичных дифференциальных форм Кристоффелем и Липшицем. Вышеизложенное показывает, что второй период фактически был начат работами Миндинга (Гаусс ввел понятие внутренней геометрии, но изгибания поверхностей в собственном смысле слова он еще не рассматривал), которые во многом определяли содержание исследований этого периода. Если в первое время ссылки на Миндинга были редки, то впоследствии все больше и больше выяснялась основополагающая роль его исследований. С полной ясностью это видно из содержательного обзора А. Фосса [187], в котором имеется около двух десятков ссылок на работы Миндинга. Основные проблемы, поставленные и в существенной части решенные за этот первый период: 1) установить для двух заданных поверхностей, наложимы они друг на друга или нет, и 2) определить все поверхности, налагаемые на данную поверхность, — стали называть соответственно «проблемой Миндинга» и «проблемой Бура».

В течение третьего периода был разработан новый аспект этих проблем. «Проблему Миндинга» Кристоффель [103] и Липшиц [154] трактовали как частный случай более общей проблемы эквивалентности двух квадратичных дифференциальных форм и она утратила свое самостоятельное значение. Был создан специальный аппарат для решения этой проблемы эквивалентности — аппарат так называемых дифференциальных интервалов.[62] С созданием и развитием римановой геометрии эта общая проблема, выросшая из «проблемы Миндинга», получила снова геоме-

---

[61] Обзор исследований этого первого периода дал П. Штеккель [182].

[62] Интересно отметить, что в период создания этого аппарата инварианты некоторого класса, включающего геодезическую кривизну, стали называть «инвариантами Миндинга» [187, стр. 393]. Напомним, что у Миндинга в частном случае двух переменных встречались также так называемые инварианты Бельтрами первого и третьего родов, которые Бельтрами ввел в 1864 г. [81].

трическое истолкование как проблема изометричности двух римановых пространств.

Своеобразную роль в истории развития идей неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского сыграло одно как бы мимоходом сделанное замечание Миндинга о формулах тригонометрии на поверхностях постоянной кривизны. В 1840 г. в статье [28] Миндинг указал, что элементы геодезического треугольника на поверхности с полной кривизной связаны соотношением: $\cos a\sqrt{K} = \cos b\sqrt{K}\cos c\sqrt{K} + \sin b\sqrt{K}\sin c\sqrt{K}\cos A$. При $K > 0$ оно совпадает с теоремой косинусов в сферической тригонометрии, а при $K < 0$ получается из нее заменой тригонометрических функций гиперболическими функциями от сторон, умноженных на $\sqrt{|K|}$.

Тремя годами раньше, в 1837 г., в том же журнале Крелле вышел перевод на немецкий язык статьи Лобачевского «Воображаемая геометрия» [155], в которой имеется указание, что такое же соотношение имеет место между формулами тригонометрии в сферической геометрии и в его «воображаемой» геометрии. Сопоставление этих результатов позволило бы тогда же сделать вывод о том, что на частях поверхностей постоянной отрицательной кривизны реализуется двумерная геометрия Лобачевского. У Миндинга, далекого от круга идей Лобачевского, этого вывода нет. Что касается Лобачевского, то ему прийти к этому выводу помешала чистая случайность. На основании архивных материалов библиотеки Казанского университета было доказано, что Лобачевский, обычно регулярно просматривавший поступавшие в библиотеку номера журнала Крелле, случайно не взял для просмотра именно тот самый том журнала, в котором была напечатана статья Миндинга. Так и случилось, что связь между геометрией Лобачевского и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны установил впервые лишь 28 лет спустя в 1868 г. Э. Бельтрами. В его статье [83] имеется прямая ссылка на статью Миндинга: «Из замечания Миндинга (Journal Crelle, т. XX, стр. 325), подробно развитого Кодацци (Annali Tortolini, 1857, стр. 254 и сл.), известно, что обыкновенные формулы, относящиеся к сферическим треугольникам, превращаются в формулы для геодезических треугольников поверхностей с постоянной отрицательной кривизной, если умножить на $\sqrt{-1}$ отношение сторон к радиусу и оставить без изменения углы, что сводится к замене круговых функций сторон на функции гиперболические». [Обратный переход от этих уравнений к уравнениям сферической тригонометрии был указан Лобачевским («Геометрические исследования», п. 37), но просто как аналитический факт].

«Из предыдущих результатов, нам кажется, вполне выясняется соответствие, существующее между неевклидовой планиметрией и псевдосферической геометрией». Под последней Бельтрами понимает геометрию на поверхностях постоянной кривизны. Напомним, что первые примеры поверхностей этого типа — поверхности вращения с кривизной $K = \text{const} < 0$, в том числе и ту, которую затем стали называть псевдосферой, дал Миндинг еще в 1839 г. [25].

Глава 8

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Миндингу принадлежат четыре работы по теории дифференциальных уравнений, напечатанные в изданиях Петербургской академии наук, и одна работа в журнале Лиувилля. Кроме того, в статье М. А. Андреевского [192] излагается способ Миндинга для определения функции по ее полному дифференциалу.

Начнем с этого способа Миндинга. В статье Андреевского рассматривается вопрос о нахождении функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n — независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по данному полному дифференциалу m-го порядка этой функции $d^m u$. При этом между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должно существовать несколько условных отношений или условий интегрируемости. С помощью комбинаторного анализа автору удалось заключить в одну общую формулу все условия, необходимые для того, чтобы однородное дифференциальное выражение m-го порядка от n независимых переменных было полным дифференциалом m-го порядка некоторой функции u от тех же переменных.

Когда данные дифференциальные выражения 2-го, 3-го и т. д. порядков удовлетворяют всем условиям интегрируемости, то соответствующие им функции u могут быть определены по общим формулам. Эти формулы Андреевский сообщил еще на Петербургском съезде естествоиспытателей.[63] Автор пишет: «В этой статье мы докажем эти формулы, основываясь на способе интегрирования, который письменно сообщил нам Дерптский профессор Миндинг для дифференциального выражения 2-го порядка, ибо этот способ доставляет самое простое доказательство наших формул» [192, стр. 105—106].

Как, известно, условие того, чтобы выражение

$$Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = d^2u, \tag{18}$$

где

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

было полным дифференциалом, состоит в следующем:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}. \tag{19}$$

Поэтому требовалось определить функцию u, удовлетворяющую уравнению (18) или, что то же, уравнениям (19).

Миндинг сообщил следующий простой способ нахождения функции $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

Составим полные дифференциалы первого порядка от функций $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, учитывая, что

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial y^2}{\partial y^2}. \tag{20}$$

Получим

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy = Adx + Bdy,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = Bdx + Cdy.$$

С другой стороны, на основании условий (19) имеет

$$\left.\begin{aligned} Adx + Bdy &= dU, \\ Bdx + Cdy &= dV, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

---

[63] Труды I съезда русских естествоиспытателей, СПб., 1868, 11—13.

откуда U и V разыщутся по известным правилам интегрирования дифференциальных выражений 1-го порядка, удовлетворяющих условиям интегрируемости.

Значит,

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=dU\ ,d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=dV,$$

вследствие чего

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=dU=Udx+Vdy+\alpha dx+\beta dy,$$

где α и β — произвольные постоянные. Далее, из (21) выводим $B=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}$, и, следовательно, по известным правилам можем найти $\int\left(Udx+Vdy\right)$, т. е, интеграл дифференциального выражения 1-го порядка $Udx+Vdy$, удовлетворяющего условиям интегрируемости, а потому найдем и искомую функцию

$$u=\int\left(Udx+Vdy\right)+\alpha x+\beta y+\gamma, \qquad (22)$$

где γ — новая постоянная [192, стр. 121—122].

Дальше автор замечает: «Но с помощью того же способа можно установить и общую формулу для непосредственного интегрирования дифференциального выражения (18) 2-го порядка и при этом встречается особенного рода обстоятельство, значительно упрощающее эту формулу» [64] (там же, стр. 122—123). Это составляет предмет остальной части статьи Андреевского.

Перейдем теперь к основному циклу работ Миндинга по дифференциальным уравнениям.

В первой из этих работ «Замечания об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка между двумя переменными величинами» [35] Миндинг отмечает, что метод использования частных решений дифференциальных уравнений имеет самые широкие возможности среди

---

[64] В книге Н. И. Симонова «Прикладные методы анализа у Эйлера» неправильно дана ссылка на эту работу Андреевского, как на работу, где обобщается метод Миндинга для отыскания интегрирующих множителей [269].

всех методов интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка. Во всяком случае, именно этим путем значительно облегчается интегрирование самых сложных примеров в «Интегральном исчислении»[65] Эйлера, например, в 55-й задаче:

$$ydy + (a + bx + nx^2)\,dy = y\,(c + nx)\,dx. \qquad (23)$$

Эйлер высоко оценивал метод интегрирующих множителей. Так, он говорил: «Я без колебаний утверждаю, что этот метод приведения дифференциальных уравнений к интегрируемому виду с помощью множителей является наиболее широко применимым и наиболее соответствующим сущности вопроса; нет такой до сих пор выполненной интеграции, которая не удалась бы этим путем» [283, т. 3, стр. 389—390].

О связи между интегрирующим множителем и частными решениями Эйлер писал: «По большей части из самих множителей, при помощи которых уравнение становится интегрируемым, можно уже получить частные интегралы, как мы покажем в следующих предложениях» [283, т. 1, 319] и дальше: «Если дифференциальное уравнение $Pdx + Qdy = 0$, будучи умножено на функцию M, становится интегрируемым, то $M = 0$ будет его частным интегралом, если только в этом случае P или Q не становятся бесконечными».

О том же говорится в § 574: «Если $Pdx + Qdy = 0$, будучи разделено на функцию M, становится непосредственно интегрируемым, то частным интегралом будет $M = 0$, если только при $M = 0$ ни P, ни Q не исчезают» [283, т. 3, стр. 321].

Наконец, в § 928, т. 2 Эйлер говорит: «Хотя еще далеко до того, чтобы было можно рассматривать этот метод как достаточно развитый, однако примеры, рассмотренные в этой главе, в полной мере показывают, какие результаты можно от него ожидать, и поэтому, как представляется,

---

[65] L. Euler. Institutiones cals. integr., 1, 1824, p. 269: «Problema 55. § 433. Proposita hac aequatione differentiali:

$$ydy + dy\,(a + bx + nx^2) = ydx\,(c + nx)$$

eam ad separationem variabilium reducere, et integrare [283, т. 1, стр. 319].

следует особенно рекомендовать геометрам развивать этот метод» [283, т. 2, стр. 134].

Эти замечания Эйлера явились толчком для занятий Миндинга вопросом о связи между интегрирующим множителем и частными решениями дифференциальных уравнений.

Якоби снова решил уравнение Эйлера в статье [134] другим способом, но с помощью использования частных интегралов интегрирование уравнения (23) очень упрощается.

Изложим способ интегрирования, предложенный Миндингом. Пусть M и N — два целых многочлена от y, коэффициенты которых — любые функции от x, и

$$Mdx + Ndy = 0$$

— предложенное уравнение. Пусть известно μ частных интегралов этого уравнения: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\mu$, а M_μ, N_μ обозначают $M_\mu = M(y_\mu)$, $N_\mu = N(y_\mu)$.

Тогда

$$M_1dx + N_1dy_1 = 0, \; M_2dx + N_2dy_2 = 0,$$

и т. д.

Обозначим

$$\psi_y = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_\mu)$$

и вычислим значения производных $\psi'(y_1), \psi'(y_2), \ldots, \psi'(y_\mu)$; так как

$$\psi'(y) = (y - y_2)(y - y_3) \ldots (y - y_\mu) +$$
$$+ (y - y_1)(y - y_3) \ldots (y - y_\mu) + \ldots + (y - y_1) \ldots (y - y_{\mu-1}),$$

то, подставив $y = y_1$, $y = y_2, \ldots, y = y_\mu$, найдем, что

$$\psi'(y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_\mu),$$

аналогично

$$\psi'(y_2) = (y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \ldots (y_2 - y_\mu),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi'(y_\mu) = (y_\mu - y_1)(y_\mu - y_2) \ldots (y_\mu - y_{\mu-1}).$$

Теперь разложим дробь $\frac{M(y)}{\psi(y)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{M(y)}{\psi(y)} = \frac{M(y)}{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_\mu)} = G(x) + \frac{M_1}{\psi'_{y_1}(y-y_1)} +$$
$$+ \dots + \frac{M_\mu}{\psi'_{y_\mu}(y-y_\mu)},$$

$$\frac{N(y)}{\psi(y)} = H(x) + \frac{N_1}{\psi'_{y_1}(y-y_1)} + \dots + \frac{N_\mu}{\psi'_{y_\mu}(y-y_\mu)}.$$

Но $M_1dx + N_1dy_1 = 0$, поэтому $M_1dx = -N_1dy_1$,
$M_2dx + N_2dy_2 = 0$, поэтому $N_2dx = -N_2dy_2$,
. . . .
$M_\mu dx + N_\mu dy_\mu = 0$, поэтому $M_\mu dx = -N_\mu dy_\mu$.

Подставим вместо $M_k dx$ выражения $-N_k dy_k$ $(k = 1, 2, \dots, \mu)$ в $\frac{M}{\psi(y)}$ и сложим $\frac{Mdx}{\psi(y)}$ и $\frac{Ndy}{\psi(y)}$.

Получим

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Gdx + Hdy + \frac{-N_1dy_1}{\psi'_{y_1}(y-y_1)} + \frac{-N_2dy_2}{\psi'_{y_2}(y-y_2)} + \dots +$$
$$+ \frac{-N_\mu dy_\mu}{\psi'_{y_\mu}(y-y_\mu)} + \frac{N_1dy}{\psi'_{y_1}(y-y_1)} + \dots + \frac{N_\mu dy}{\psi'_{y_\mu}(y-y_\mu)},$$

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Gdx + Hdy + \frac{N_1d(y-y_1)}{\psi'_{y_1}(y-y_1)} + \dots +$$
$$+ \frac{N_\mu d(y-y_\mu)}{\psi'_{y_\mu}(y-y_\mu)} = 0.$$

Если отношения $\frac{N_k}{\psi'(y_k)} = C_k$ — постоянны, $(k = 1, 2, \dots, \mu)$, то получим полный дифференциал некоторой функции

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Gdx + Hdy + C_1 d\log(y-y_1) + \dots +$$
$$+ C_\mu d\log(y-y_\mu),$$

который легко интегрируется.

Пример (Миндинга). Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(A + By + Cy^2)dx + dy = 0,$$

где A, B, C, — любые функции от x. Здесь $N=1$, $M=$ $=A+By+Cy^2$; очевидно, $N_1=1$, $N_2=1$.

$$\psi(y)=(y-y_1)(y-y_2),\quad \psi'_{y_1}=y_1-y_2,\quad \psi'_{y_2}=y_2-y_1,$$

$$\frac{Mdx+Ndy}{\psi(y)}=Cdx+\frac{d(y-y_1)}{(y_1-y_2)(y-y_1)}+\frac{d(y-y_2)}{(y_2-y_1)(y-y_2)}.$$

Здесь $H=0$, $G=C$ — постоянная

$$Cdx+\frac{d(y-y_1)}{(y_1-y_2)(y-y_1)}+\frac{d(y-y_2)}{(y_2-y_1)(y-y_2)}=0.$$

Умножаем на (y_1-y_2) обе части последнего равенства:

$$C(y_1-y_2)\,dx+\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}-\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}=0.$$

Интегрируем и получаем

$$\int C(y_1-y_2)\,dx+\log\frac{y-y_1}{y-y_2}.\quad C_1=0,\quad \log\frac{y-y_1}{y-y_2}C_1=$$
$$=-\int C(y_1-y_2)\,dx$$

или

$$C_1\frac{y-y_2}{y-y_1}=e^{\int C(y_1-y_2)\,dx}$$

— это общее решение исходного уравнения.

Затем Миндинг рассматривает уравнение Якоби [134]:

$$Mdx+Ndy=0,$$

где

$$M=C_1+C_2x+C_3y-(A_1+A_2x+A_3y)\,y,$$
$$N=(A_1+A_2x+A_3y)\,x-(B_1+B_2x+B_3y)$$

(где A_k, B_k, C_k — постоянные, $k=1,\ 2,\ 3$).

Для определения частных решений делается подстановка: $y=\alpha x+\beta$, где α, β — постоянные. Подставляя $y=\alpha x+\beta$ в дифференциальное уравнение (18) и приравнивая к нулю коэффициент при x и свободный член, автор получает условия для определения α и β. Он находит три значения $\alpha:\alpha_1$, α_2, α_3 и столько же значений $\beta:\beta_1$, β_2, β_3. В соответствии с полученными значениями α и β найдутся три частных решения заданного уравнения:

$$y_1=\alpha_1x+\beta_1,\quad y_2=\alpha_2x+\beta_2,\quad y_3=\alpha_3x+\beta_3.$$

Обозначим $\psi(y) = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ и разложим $\frac{M}{\psi(y)}$ и $\frac{N}{\psi(y)}$ на простейшие дроби, получим

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Qdx + Hdy + \frac{N_1 d(y - y_1)}{\psi'_{y_1}(y - y_1)} + \frac{N_2 d(y - y_2)}{\psi'_{y_2}(y - y_2)} + \\ + \frac{N_3 d(y - y_3)}{\psi'_{y_3}(y - y_3)}.$$

Покажем, что функция $\frac{N_1}{\psi'(y_1)}$ — постоянная (аналогично показывается, что $\frac{N_2}{\psi'(y_2)}$ — постоянная). Для этого надо проверить, что $N_1(y)$ и $\psi'(y)$ одинаковой степени относительно x.

Подставим y_1, y_2, y_3 в уравнение (24). Получим

$$M_1 dx + N_1 dy_1 = 0,$$
$$M_2 dx + N_2 dy_2 = 0,$$
$$M_3 dx + N_3 dy_3 = 0.$$

Так как $y = \alpha x + \beta$, то $dy = \alpha dx$. Поэтому

$$Mdx + N\alpha dx = 0 \text{ или } M + N\alpha = 0. \qquad (25)$$

Возьмем теперь x_1, при котором $y_1 = y_2$. Так как при x_* $y_1 = y_2$, то и $M_1 = M_2$, и $N_1 = N_2$.

Используя условия (25): $M + N\alpha = 0$, получаем

$$M_1 + N_1\alpha_1 = 0,$$
$$M_2 + N_2\alpha_2 = 0,$$
$$M_3 + N_3\alpha_3 = 0$$

или

$$M_1 = -N_1\alpha_1, \quad M_2 = -N_2\alpha_2, \quad M_3 = -N_3\alpha_3$$

и так как $M_1 = M_2$, то $-N_2\alpha_2 = -N_1\alpha_1$ или $N_2\alpha_2 = N_1\alpha_1$.

Отсюда получаем, что $N_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$, и так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $N_1 = 0$ при $x = x_*$. Аналогично, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ при $x = x_*$. Равенство $N_1 = 0$ при $x = x_*$ означает, что N_1 делится на $(x - x_*)$. $N_2 = 0$ при $x = x_*$, т. е. N_2 тоже делится на $(x - x_*)$, N_3 тоже. Таким образом, можно показать, что N_1, N_2, N_3 делятся на $(x - x_2)$ и на $(x - x_3)$, где x_2 — то значение x, при котором $y_1 = y_3$, x_3 — то значение x, при котором $y_1 = y_2$.

Рассмотрим теперь $\psi'(y_1)$:

$$\psi'(y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3).$$

Если подставить сюда $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$ и $y_3 = \alpha_3 x + \beta_3$ и учесть, что при x_2 $y_1 = y_3$, а при x_3 $y_1 = y_2$, то, как указывает Миндинг (без вывода),

$$\psi'(y_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(x - x_3)(x - x_2).$$

Таким образом, N_1 и $\psi'(y_1)$ второй степени относительно x, но $N_1 = N(y_1)$ не может быть степени выше второй, так как по условию

$$N = (A_1 + A_2 x + A_3 y) x - (B_1 + B_2 x + B_3 y).$$

Следовательно, дробь $\frac{N_1}{\psi'(y_1)} = q_1$ должна быть постоянной. Аналогично доказывается, что $\frac{N_2}{\psi'(y_2)} = q_2$, $\frac{N_3}{\psi'(y_3)} = q_3$ — тоже постоянные.

Поэтому найденное выражение

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Qdx + Hdy + q_1 d \log(y - y_1) + q_2 d \log(y - y_2) + q_3 d \log(y - y_3)$$

можно интегрировать, это полный дифференциал. Основной пункт рассуждения Миндинга — доказательство того, что $\frac{N_1}{\psi'(y_1)}$, $\frac{N_2}{\psi'(y_2)}$, $\frac{N_3}{\psi'(y_3)}$ — постоянные.

Следующая по времени работа Миндинга по тому же вопросу напечатана в журнале Лиувилля [46]. В ней Миндинг знакомит европейских математиков со своим методом интегрирования некоторых видов дифференциальных уравнений. Появление этой работы было вызвано статьей Бьерлинга [88] о тех случаях, когда уравнение

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx + (A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy = 0$$

интегрируемо обычными способами. Бьерлинг рассмотрел, в частности, и уравнение Якоби, которое еще в 1845 г. интегрировал Миндинг [35].

В статье [46] Миндинг показывает, что, казалось бы, случайные подстановки, которые Эйлер применял, чтобы отделить переменные, теряют свой случайный характер, если начать с отыскания какого-нибудь частного интеграла предложенного уравнения, и если он найден, то этим способом в ряде случаев (например, для уравнения Эйлера) уравнение можно интегрировать.

Другие частные случаи уравнения (24), рассмотренные Бьерлингом, сводятся к простым уравнениям, для которых Миндинг также указывает способ решения.

Он предлагает также одно обобщение уравнения Якоби и способ его решения с помощью частных интегралов. В этой работе Миндинг показывает свой способ на примере, решает уравнение

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{24'}$$

где

$$M = 1 + 2x + y + 3x^2 + xy - y^2 + 2x^2y + xy^2,$$
$$N = 1 + x + y + 2x^2 + 2xy - 2x^3 - x^2y.$$

Для его решения нужно четыре частных интеграла. Миндинг подставляет в уравнение (24') $y = \alpha x + \beta$ и определяет α и β из условий

$$1 + \beta - \beta^2 + \alpha + \alpha\beta = 0,$$
$$3 + 2\beta + 3\alpha + \alpha\beta + \alpha^2 = 0.$$

Он получает по четыре значения α и β и соответственно четыре частных решения: $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$, $y_3 = \alpha_3 x + \beta_3$, $y_4 = \alpha_4 x + \beta_4$.

Дальнейшее рассуждение аналогично вышеприведенному. Более четко проведено доказательство постоянства дробей $\frac{N_k}{\psi'(y)_k}$. Центральный пункт рассуждения — доказательство того, что числитель и знаменатель такой дроби — одинаковой степени (по x). Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$(y - y_1)^{q_1}(y - y_2)^{q_2}(y - y_3)^{q_3}(y - y_4)^{q_4} = c.$$

Третья работа Миндинга [42] была представлена в 1861 г. в Петербургскую Академию наук на соискание Демидовской премии. Мы уже упоминали известный отзыв М. В. Остроградского, писавшего, что «изыскание профессора Миндинга составляет, по нашему мнению, самый важный шаг, сделанный в интегрировании дифференциальных уравнений после сейчас названного великого геометра» (Эйлера) [258, стр. 328]. Упоминая о методе Миндинга, большей частью ссылаются только на это сочинение.

В этой работе [42] Миндинг сообщает, что пришел к своему труду, изучая сочинение Эйлера и Якоби. Он основывается на эйлеровских решениях нескольких примеров в «Интегральном исчислении». Эйлер применял способ отыскания общего решения дифференциального уравнения, когда известно несколько частных решений.

Целью работы, как указывал автор, было использование частных интегралов при интегрировании обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Кроме того, книга могла быть, по мнению автора, полезна для преподавателей как богатый источник весьма хороших примеров.

Автор начинает с решения простого уравнения

$$(a_0 + a_1x + a_2y)\,dx + (b_0 + b_1x + b_2y)\,dy = 0.$$

Обычно такое уравнение приводят к однородному. Миндинг же подставляет в уравнение функцию y в виде $y = \alpha x + \beta$ с неизвестными коэффициентами α и β. Он получает

$$a_0 + a_2\beta + (b_0 + b_2\beta)\,\alpha + [a_1 + a_2\alpha + (b_1 + b_2\alpha)\,\alpha]\,x = 0.$$

Равенство справедливо при любых x, если коэффициент при x и свободный член равны нулю:

$$a_0 + a_2\beta + (b_0 + b_2\beta)\alpha = 0,$$
$$a_1 + a_2\alpha + (b_1 + b_2\alpha)\,\alpha = 0.$$

Отсюда определяется

$$\beta = -\frac{a_0 + b_0a}{a_2 + b_2a}$$

или

$$\beta = \frac{a_0b - a_1b_0 + (a_0b_2 - a_2b_0)\,a}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Двум значениям α_1, α_2 соответствуют β_1 и β_2. Получается два частных решения: $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$. Дальнейшее рассуждение то же, что и раньше.

Обозначив $\psi(y) = (y - y_1)(y - y_2)$, Миндинг берет в качестве интегрирующего множителя $\frac{1}{\psi(y)}$. Умножив исходное уравнение на $\frac{1}{\psi(y)}$, он получает уравнение в полных дифференциалах. Затем рассматриваются другие случаи, более общие. Формулируется теорема: «Если M и N целые многочлены по x и y, не превышающие (по y) степени n, такого свойства, что уравнение $Mdx + Ndy = 0$ имеет $n + 1$ линейных решений вида $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, и т. д., если в них все α различны и если после составления произведения $\psi = (y - y_1)(y - y_2) \times \times (y - y_3) \ldots (y - y_{n-1})$ ни один из производных многочленов

$$\psi'_{y_1}[= (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_{n+1})], \ \psi'_{y_2}, \ldots, \ \psi'_{y_{n+1}}$$

не делится на квадрат, т. е. на выражение вида $(x + \delta)^2$, то это произведение есть интегрирующий делитель $Mdx + Ndy = 0$, т. е. мы имеем

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} + \ldots + q_{n+1}\text{»} \ldots$$

«Величины же q_1, $q_2, \ldots, q_{n+1}$ выводятся весьма легко; ибо пусть в разложении по степени x

$$N_1 = c_1 x^n + c_2 x^{n+1} + c_3 x^{n+2} + \ldots,$$

тогда

$$q_1 = \frac{c_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_{n+1})},$$

и таким же образом получаются и все остальные q''» [42, стр. 12].

Затем Миндинг применяет свой способ для решения ряда задач из «Интегрального исчисления» Эйлера и их обобщений.

На стр. 7 (§ 2) Миндинг указывает: «Пусть M и N целые многочлены относительно y и положим, что предварительным испытанием нашли некоторые функции x, т. е. y_1, $y_2, \ldots, y_\mu$, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению $Mdx + Ndy = 0$ (частные решения). Тогда указанным выше путем легко находится интеграл этого уравнения в том случае, когда можно представить его в следующем виде, где U обозначает целый многочлен по y:

$$e^U(y - y_1)^{q_1} (y - y_2)^{q_2} \dots (y - y_\mu)^{q_\mu} = \text{const}.$$

Ибо, очевидно, $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ суть частные решения предложенного уравнения, соответствующие значениям 0 или ∞ постоянной произвольной величины, если, что и предполагается, общее решение на самом деле имеет приведенный вид». Дальше он отмечает: «Полезно будет заметить, что трудность нахождения необходимых частных решений почти никогда не будет непреодолима. Во всяком случае она гораздо меньше той трудности, которую составляет нахождение или, так сказать, отгадывание удобных подстановлений — для чего нет никакого основания, и что при большом числе необходимых решений, если виды их не весьма просты, вообще не может удаваться.

Решения, которые в настоящем случае входят в интеграл, как уже сказано выше, суть частные интегралы, соответствующие значениям 0 или ∞ постоянной величины; поэтому они обыкновенно по виду будут проще других решений, соответствующих другим значениям постоянной, что легко видеть и из интегрального уравнения (так Миндинг называет общее решение, — *авторы*).

Впрочем, может случиться, что и очень простые решения, какие найдутся, все-таки не войдут в выражение интеграла; но если все необходимые решения найдены, то не могут помешать и полученные кроме того решения, ибо при более близком рассмотрении их всегда можно будет исключить» [42, стр. 8—9].

Далее автор замечает, что «Объем предложенного здесь способа гораздо обширнее всех до сих пор известных, ибо предыдущим суждениям подчиняются как частные случаи, как правила для однородных, так и правила для линейных уравнений, — первые по крайней мере в таком случае, когда M и N рациональны; причем, мимоходом заметим, что условие, по которому M и N целые многочлены по y, вовсе не необходимо, а только принято для ясности и простоты» [42, стр. 10].

В § 7 Миндинг показывает, каким образом при помощи изложенных приемов решение задач Эйлера [283, т. 1, гл. 3, отд. 2] значительно упрощается и облегчается

[42, стр. 21]. В частности, автор решает и упомянутые примеры Эйлера.

На стр. 29 Миндинг пишет: «Удерживая впредь предположение, что M и N целые многочлены по y, я обращаюсь к исследованию самого общего вида интегрирующего множителя, который мне удалось вывести из частных решений.

Пусть $Mdx + Ndy = 0$ — предложенное дифференциальное уравнение, e^w — интегрирующий множитель его.[66] Следовательно,

$$e^w (Mdx + Ndy) = d\Omega.$$

Положим, функция w состоит из нескольких частей, из которых первая V — целый многочлен по y, произвольный относительно x.

Вторая часть: T_1 пусть будет составлена из данных функций y_1, D'_1, D'_2, $\ldots$, D'_μ переменной x и какой-нибудь постоянной величины ε_1 следующим образом:

$$T_1 = \frac{D'_1}{y - y_1} + \frac{D'_2}{(y - y_1)^2} + \ldots + \frac{D'_{\mu_1}}{(y - y_1)^{\mu_1}} + \varepsilon_1 \log (y - y_1)\text{»}$$

[42, стр. 29].

Аналогично,

$$T_2 = \frac{D''_1}{y - y_2} + \frac{D''_2}{(y - y_2)^2} + \ldots + \frac{D''_{\mu_2}}{(y - y_2)^{\mu_2}} + \\ + \varepsilon_2 \log (y - y_2)$$

и т. д.

$$w = V + T_1 + T_2 + \ldots + T_\nu.$$

Предполагается, что все $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ — различны между собой. Многочлены M и N могут иметь общих множителей, но если бы они оба делились на одну из разностей $(y - y_1)$, $(y_1 - y_2)$, $\ldots$, т. е. имели (например) общий множитель $(y - y_1)^n$, то, записав этот множитель в виде $e^{n \log (y - y_1)}$, присоединим его показатели к логарифмической части w так, чтобы окончательно ни одна из этих разностей не входила общим делителем в M и N. При этих предположениях имеет место следующая теорема (стр. 29):

---

[66] В книге опечатка: e^{-w} вместо e^w.

«Если $e^w(Mdx+Ndy)$ — полный дифференциал, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ представляют столько же частных решений дифференциального уравнения $Mdx+Ndy=0$ или мы имеем

$$M_1dx+N_1dy_1=0,\ M_2dx+N_2dy_2=0,\ \ldots,$$
$$M_\nu dx+N_\nu dy_\nu=0».$$

Затем Миндинг дает ряд приложений своего метода.

Немецкий вариант сочинения Миндинга [49] отличается от русского перевода дополнением в 8 страниц — о приложении метода Миндинга к интегрированию систем дифференциальных уравнений — и имеет список опечаток.

Появление последней работы Миндинга по вопросам интегрирования дифференциальных уравнений [52] было вызвано сочинением С. С. Урусова «Дифференциальные и разностные уравнения» [277]. Шестая глава книги Урусова посвящена изложению метода Миндинга для интегрирования дифференциальных уравнений [277, стр. 113—120]. Урусов указывает, что многие талантливые математики занимались интегрированием уравнения

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0. \qquad (26)$$

«Все методы приложимы к этому уравнению, но всего больше заслуживает внимания метод Миндинга» — писал автор (стр. 116). Излагая метод Миндинга на примере этого уравнения, Урусов делает несколько замечаний: «Во-первых, подстановление, употребленное Миндингом, может доставить решение только в том случае, если M и N будут целые и рациональные функции от x и y. Таковые дифференциальные уравнения разрешаются и всеми другими способами.

Во-вторых, весьма простые уравнения, легко разрешимые всеми известными способами, не разрешаются подстановлением Миндинга, как $(x-y^2)\,dx+2xydy=0$; так что подстановление это не составляет нового способа интегрирования; это просто прием для нахождения множителя к нескольким уравнениям, вполне, разрешаемым иными подстановлениями, иными методами.

В-третьих, поучительная сторона мемуара заключается не в его сущности, не в выкладках и не в уравнениях, которые там исследуются, но гораздо больше в тех вопросах, на которые он наводит; в тех выводах, которые проистекают из подстановления.

Любознательный читатель полюбопытствует, конечно, узнать: как Миндинг угадал, что подстановление $y = \alpha x + \beta$ должно повести к решению? Если же угадать это нетрудно, спрашивается, нельзя ли извлечь из этого подстановления какого-нибудь правила для преобразования других, более трудных функций?» [277].

Урусов предлагает «в виде догадки» правило отыскания частных решений с помощью специальной подстановки. Экземпляр своего сочинения Урусов послал Миндингу, прочитавшему в переводе те места работы Урусова, которые его касались. Миндинг ответил на эти замечания в упомянутой заметке [52] следующим образом.

По первому замечанию (что его подстановка годится только для случая, когда M и N — рациональные функции от x и y, но тогда годятся и все остальные способы) Миндинг указал, что M и N должны быть целыми относительно одной из переменных (у него y), но их коэффициенты могут быть любыми функциями от другой переменной x. Затем он приводит пример уравнения, которое не решается другими методами [52, столб. 49—50].

По второму замечанию Урусова Миндинг сообщает: «Я не собирался дать общего метода интегрирования, но только добавления к известным методам. Поэтому я не претендую, что все уравнения разрешимы моим методом. Напротив, этот метод применим к вполне определенному классу уравнений. Однако, что касается примера, о котором сказано, что этот процесс к нему неприменим, то я должен сказать сначала, что не стоило труда говорить об уравнении

$$(x - y^2)\, dx + 2xydy = 0.$$

Но так как дело идет о методе, я покажу, что мой процесс применим к нему двумя различными манерами» [52, столб. 50—51].

В первом способе Миндинг рассматривает x как функцию от y и меняет обозначения. Получается уравнение

$$2\, xydx + (y - x^2)\, dx = 0. \tag{27}$$

Одно частное решение сразу видно: $y=0$. С помощью этого частного решения Миндинг находит интегрирующий множитель $\frac{1}{y^2}$, так как $\frac{1}{(y-0)(y-0)}=\psi(y)$.

Во втором случае берется подстановка $y^2=z$. Уравнение принимает вид однородного уравнения

$$(x-z)\,dx+x dz=0. \tag{28}$$

Пусть $z=z_1$ — частное решение уравнения (28). Тогда имеем

$$(x-z_1)\,dx+x dz_1=0. \tag{29}$$

Вычтем (28) из (29). Получим $\frac{d(z-z_1)}{z-z_1}=\frac{dx}{x}$, откуда сразу же получается общее решение $\log(z-z_1)=\log c_1x$, $z-z_1=c_1x$.

Миндинг приводит другой пример — задачу из § 497 «Интегрального исчисления» Эйлера [283] — сделать интегрируемым выражение

$$Py^n dx+(Q+y)\,y^{n-1}dy$$

с помощью делителя y^2+My+N, где P, Q, M, N — функции от x, которые надо определить. Эйлер, решая эту задачу, остановился перед сложной системой дифференциальных уравнений. Он говорил только, что может быть изучен случай $n=2$.

Миндинг указывает, что «с тех пор ничего не прибавилось к решению Эйлера» [52, столб. 51]. За исключением случая $n=2$, в течение почти 100 лет задача не была решена. «Этот важный факт увеличил мое доверие к моему процессу, которым я легко смог в этой задаче дойти до конца для любого целого и положительного n. Это изложено в § 8 моего мемуара» [52].

Третье замечание Урусова побудило Миндинга изложить историю развития его идей: «Это было связано с изучением II главы II раздела Institutiones calc. integr. Эйлера «De integratione aequationum ope multiplicatorum» [283], в котором я искал что-то сверх того, что дается в трактатах об этом предмете, очевидно, мало разработанном. Я нашел большое число любопытных примеров, полученных искусно проведенным вычислением; но я не нашел никакого объяснения причины успеха, которую я особенно желал узнать» [52, столб. 51—52]. После долгих поисков Миндинг пришел, наконец, к открытию связи частных решений уравнения с его интегрирующим множителем.

«Дав краткую заметку об этом предмете в Bulletin 1845 г. [35], я оставил его, чтобы снова возвратиться к нему в 1858 г., когда, увидев случайно, насколько этот способ находился во всеобщем пренебрежении, я решил сделать из него объект систематической работы, которая появилась в 1860 г. [67] В ней указан некоторый класс дифференциальных уравнений, для которых можно образовать интегрирующий множитель с помощью некоторых частных решений, которые сначала надо найти» [52].

Сначала Миндинг собирался начать свою работу с общей теоремы, чтобы затем перейти («спуститься») от нее к частным случаям. «Однако этот план, — говорит Миндинг, — казалось, заставлял самые простые случаи, которые допускали специальные упрощения, зависеть от теории, которая являлась необходимой лишь для более сложных случаев. Эта причина заставила меня предпочесть путь, восходящий от простого к сложному. Изменив порядок [изложения], я предотвратил бы критику, которая почти целиком сводится к тому, ... что вся моя работа держится на подстановке $y = \alpha x + \beta$, так как в первом параграфе я показал, чтó можно извлечь из частных интегралов этого вида для интегрирования очень простого и очень известного уравнения» [52].

Еще одно замечание Миндинга о работе С. С. Урусова касалось манеры, с какой этот автор изложил процесс интегрирования уравнения по Миндингу: в ходе изложения без всякого доказательства указывалось, что частное $\frac{M_1}{\psi'(y_1)}$ постоянно, хотя это совсем не очевидно, и представляет в то же время существенное место доказательства.

«Таким образом, я увидел с огорчением, что в изложении моего процесса опущено то, что составляет его сущность», — писал Миндинг [53]. В заключение он рассмотрел несколько примеров на применение своего метода.

---

[67] Речь идет о большом мемуаре 1861—1863 гг. [48], [49].

Глава 9

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ИДЕЙ МИНДИНГА ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В специально посвященной творчеству Ф. Миндинга статье А. Кнезера [136] утверждается, что исследования Миндинга в области дифференциальных уравнений долгое время не привлекали к себе внимания. А. Кнезер объясняет это обстоятельство тем, что незадолго до опубликования основного сочинения Миндинга по этому вопросу (1862) [48] появилась статья Римана о гипергеометрическом ряде [68] и из-за нее внимание математиков было отвлечено от эйлеровских методов и точек зрения. Лишь позднее, независимо от Миндинга, Г. Дарбу в 1878 г. и другие авторы (Эллиот, Гейман, Сонин, Коркин) опубликовали исследования, родственные исследованиям Миндинга.

Это высказывание Кнезера не совсем справедливо, ибо в нем не упоминаются русские авторы, заинтересовавшиеся методом Миндинга сразу же после выхода в 1862—1863 гг. его большого труда [48]. После С. С. Урусова к методу Миндинга обратился в своей магистерской диссертации М. Ф. Ковальский [224, стр. 63]. Пятая глава его диссертации посвящена теме: «Нахождение интегрирующего множителя с помощью частных решений». Автор указывает, что этот способ предложен дерптским профессором Миндингом. «Он состоит из двух приемов: в первом с помощью неопределенных коэффициентов отыскивается система линейных решений (частных интегралов) для данного дифференциального уравнения (если возможно); во-втором берется известная определенная функция этих решений, которая — или сама собой, или с помощью некоторой функции (определяемой характером данного дифференциального уравнения и находящейся иногда в тесной связи со сказанными решениями) — составляет интегрирую-

---

[68] По-видимому, Кнезер имеет в виду статью Римана «Beiträge zur Theorie der durch Gaussche Reihe F (α, β, γ, x) darstellbaren Funktionen». Abhandl. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen, Bd. 7, 1856; Б. Риман. Соч., 1948, стр. 158 — 175. К тому же вопросу относится опубликованная в первом издании сочинений Римана работа «Две теоремы общего характера, касающиеся линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами» (Werke, 1876; Соч., стр. 176 — 186; см. также комментарии, стр. 492 — 495).

щий множитель» [224, стр. 63]. Дальше излагается способ Миндинга.

Рассказывая об уравнении Якоби из 24-го тома журнала Крелле [134], Ковальский отмечает, что «метод Миндинга, разрешающий это уравниние, проще метода, предложенного кенигсбергским геометром» (Якоби) [224, стр. 104]. Ковальский пишет о том, что Миндинг в этом вопросе явился продолжателем Абеля: «Единственный пример этого рода, который мне удалось найти у других писателей, помещен в статье Абеля о дифференциальном уравнении

$$(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0\quad[78].$$

Для задачи Эйлера из § 497 способ Миндинга, по мнению Ковальского, дает решение более общее [224, стр. 99]. «Рассматриваемая теория богатую услугу приносит решению задач, в которых, по данной форме уравнений и интегрирующего их множителя, требуется определить форму входящих функций (одной независимой переменной) — вопрос, которым занимался и Эйлер. Касаясь уравнений, к которым эта теория прикладывается, встречаешь полное изящество: не только чрезвычайно удобно решается уравнение Якоби с коэффициентами 2-й степени, но и распространяется интеграция на соответствующее уравнение с коэффициентами 3-й степени» [224, стр. 112].

В том же 1866 г. в первом томе «Математического сборника» была помещена статья А. В. Летникова [231]. Автор считал,[69] что новых идей для интегрирования дифференциальных уравнений можно ожидать только от развития указанного еще Эйлером способа интегрирующего множителя. В то же время теория интегрирующего множителя даже в приложении к уравнениям первого порядка со времен Эйлера очень мало развилась.

«В последнее время, однако, — отмечал Летников, — был сделан значительный шаг в этом роде Дерптским профессором г. Миндингом в его обширном мемуаре «Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» [48], который, как мне кажется, заслуживает полного внимания геометров в особенности потому, что он указывает на целый класс диф-

---

[69] См, также: Р. Я. Шостак. Алексей Васильевич Летников. ИМИ, вып. 5, 1952, стр. 165—238.

ференциальных уравнений, остававшийся до сих пор почти нетронутым, к которому метод автора прилагается с бо́льшим успехом, чем способ Эйлера в первоначальном своем виде.

Я не буду, конечно, излагать здесь способа г. Миндинга, но постараюсь обратить внимание читателей на некоторые новые стороны того же предмета, оставшиеся, кажется не замеченными автором, и к которым я был приведен отчасти изучением его мемуара. Я полагаю, что наука немало бы выиграла, если бы внимание геометров было обращено на некоторые из замечательных указаний, сообщаемых г. Миндингом в названном выше мемуаре» [231, стр. 297—298].

Класс уравнений, к которому в основном относятся замечания Летникова (о котором он говорит как о классе, рассматриваемом Миндингом), имеет следующий вид:

$$(\alpha_0 y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \ldots + \alpha_n)\, dy + (\beta_0 y^m + \ldots + \beta_m)\, dx = 0, \qquad (30)$$

где коэффициенты — произвольные функции от x (у Миндинга они предполагаются целыми). Летников ищет условия, при которых дифференциальное уравнение (30) имеет интеграл данного вида, содержащегося в общей формула (31)

$$U = e^w \cdot V = \mathrm{const},$$

где

$$w = \frac{A_0 y^p + A_1 y^{p-1} + \ldots + A_p}{B_0 y^q + B_1 y^{q-1} + \ldots + B_q}, \qquad (31)$$

$$V = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} \ldots (y - y_i)^{n_i},$$

коэффициенты A_0, $A_1, \ldots$, $B_0, \ldots$, B_q, y_1, y_2, $\ldots$, y_i — некоторые функции от x, а n_1, $n_2, \ldots$ — постоянные. Кроме того, он хочет определить все функции и постоянные, входящие в этот вид, т. е. ищет общий интеграл, когда найденные условия выполняются.

Летников доказывает несколько утверждений Миндинга. Он обращает внимание на замечание Миндинга о том, что все частные решения, входящие в состав интегрирующего множителя и в состав интеграла, те, которые обращают в 0 и в ∞ интегрирующий множитель, могут быть получены из общего интеграла, если приравнять к нулю или бесконечности входящую в него произвольную постоянную [217, стр. 306]. Сочинение Летникова было издано в переводе в 1867 г. [152].

С. С. Урусов в статье «Об интегрирующем множителе разностных и дифференциальных уравнений» [278], где он решает уравнение

$$(a_1 + b_1x + c_1y) + (a_2 + b_2x + c_2y)\,y' = 0 \qquad (32)$$

по способу Буля (1859 г.), сообщает что постарался учесть в ней все замечания и возражения Миндинга, вызванные его предыдущей работой.

В 4-м томе «Математического сборника» (1869—1870 гг.) опубликованы были две статьи М. А. Андреевского. О первой из них [192] уже говорилось выше (см. стр. 93, 94).

Во второй статье [193] «Об интегрирующем множителе дифференциальных уравнений 2-го порядка, вида

$$A + By' + Cy'^{m} + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0»$$

Андреевский говорит, что после Эйлера дерптский профессор Миндинг открыл новое средство для разыскания интегрирующего множителя дифференциальных уравнений 1-го порядка, основанное на знании частных решений этих уравнений. Но вопрос об интегрирующем множителе дифференциальных уравнений еще мало изучен. В последующем изложении автор более не упоминает о методе Миндинга, говорит о том, что сделали в этом направлении Лагранж, Бертран, Буль и др. [193, стр. 143].

В дальнейшем исследования о связи между общими и частными интегралами и об уравнениях указанных выше видов появляются во Франции. Большая работа Г. Дарбу [109] вышла в 1878 г. В ней излагается метод решения уравнения

$$L\,(ydz - zdy) + M\,(zdx - xdz) + N(xdy - ydx) = 0,$$

где L, M, N — однородные функции m-го измерения от x, y, z.

Дарбу устанавливает связь делителей интегрирующего множителя с частными решениями заданного уравнения. Но о Миндинге, доказавшем существование такой связи значительно раньше, он не упоминает. После Дарбу этими вопросами занимались Пикар, Эллиот, Альфан, Пуанкаре, Пенлеве и другие, в работах которых о Миндинге также не упоминалось.

Интерес к методу Миндинга в России возрождается лишь в конце XIX в.

В 1892 г. на заседании Петербургского математического общества Б. М. Коялович прочитал доклад «Об одном способе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений»,[70] затем этому вопросу было посвящено еще несколько его сообщений (1894, 1895, 1896, 1898 гг.). В 1894 г. Коялович опубликовал магистерскую диссертацию [227] о дифференциальном уравнении[71]

$$ydy - ydx = Rdx. \tag{33}$$

Его привлекла задача: предполагая, что известно несколько частных решений, найти общий интеграл дифференциального уравнения. «Главная наша цель, — говорит автор, — состоит в том, чтобы по мере сил содействовать уяснению и разрешению тех трудностей, которые представляются при интегрировании в замкнутой форме обыкновенных дифференциальных уравнений» [227, стр. V].

Коялович дает необходимые и достаточные условия того, чтобы дифференциальное уравнение (33) допускало общий интеграл вида:

$$(y-\alpha_1)^{m_1}(y-\alpha_2)^{m_2}\dots(y-\alpha_n)^{m_n} = C. \tag{34}$$

В этой же работе дается формулировка теоремы Миндинга в применении к уравнению Эйлера—Кояловича: «Если уравнение $ydy - ydx = Rdx$ допускает общий интеграл формы (34), то все функции $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть частные решения уравнения (33), соответствующие случаю, когда в уравнении (34) мы придаем постоянной C значения 0 или ∞» [227, стр. 74].

Коялович предлагает для интегрирования дифференциальных уравнений «метод частных решений», основная теорема которого формулируется следующим образом.

«Чтобы уравнение (33) допускало общий интеграл формы (34), необходимо и достаточно, чтобы оно допускало n таких частных решений $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$, которые удовлетворяли бы соотношению (7)» [227, стр. 74].

---

[70] Протоколы заседаний С.-Петербургского математического общества. 1890—1899. СПб., 1899; протокол заседания 29 февраля 1892 г., стр. 22—25. См. также: И. Я. Депман. С.-Петербургское математическое общество. ИМИ, в. 13, 1960, стр. 86—87.

[71] Здесь R — функция от x.

Соотношение (7):

$$\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+\frac{m_3}{a_3}+\ \dots\ +\frac{m_n}{a_n}=0.$$

В конце книги дан подробный исторический очерк. Он начинается с упоминания о работах Эйлера, Абеля, Якоби. Рассказано о трех работах Миндинга (кроме последней, — 1866 г.). Говоря о большом мемуаре Миндинга, Коялович указывает на достоинства и недостатки этого труда: «Главная характеристическая черта его работы — это глубокая действенность, проникающая в самые основы его труда. С одной стороны, он искал расширения теории интегрирования уравнений только при посредстве метода множителей, с другой — чувствовал, что рассмотрение частных решений дает начало какому-то совершенно своеобразному методу интегрирования, в котором нет ни одного слова об интегрирующем множителе.

Он попытался помирить эти крайности и стал искать связи между интегрирующими множителями и частными решениями, но не получил самого важного, что могло быть получено — условий для возможности существования интеграла желаемой формы, которые были бы необходимыми и достаточными. Не получил он этого именно потому, что не обратил достаточного внимания на свойства частных решений, входящих в состав множителей. Профессор Миндинг занимается в своей работе вопросом о том, как составлять для уравнения $Mdx+Ndy=0$ интегрирующий множитель из частных решений.

Самая общая из доказанных им теорем следующая (см. стр. 104)».

«Когда эту теорему применяют на практике, встает вопрос: каким условиям должны удовлетворять частные решения $y_1, y_2, \dots, y_\nu$, для того чтобы рассматриваемое уравнение имело множитель желаемой формы, другими словами, как из всего бесчисленного множества частных решений уравнения $Mdx+Ndy=0$ выбрать, если это возможно, те, которые входят в интегрирующий множитель» [227, стр. 236—237].

Дальше автор отмечает, что для уравнения

$$(a_0+a_1x+a_2y)dx+(b_0+b_1x+b_2y)dy=0 \qquad (35)$$

вопрос вполне решен Миндингом. Приведенная выше теорема дает достаточное условие пригодности линейных решений для получения общего интеграла в рассматриваемом случае, но за исключением этих двух примеров Миндингу не удалось определить условия, которым должны удовлетворять требуемые для интеграла частные решения.

«Профессору Миндингу оставался только один шаг до открытия связи между частными решениями, необходимый для того, чтобы вывести условия возможности интегралов желаемой формы. В самом деле, получив общий интеграл уравнения (35), он замечает, что частные решения y_1 и y_2 линейно зависимы друг от друга, и говорит даже, что это обстоятельство составляет именно важнейший результат всего исследования» (на стр. 22 Миндинг писал: «Предложенная задача разрешима только тогда, когда y_2 линейным образом зависит от y_1, т. е. когда $y_2 = my_1 + n$»).

«Во всяком случае, мы обязаны работам профессора Миндинга указанием на связь, существующую между интегрирующим множителем и частными решениями, значение которой он пояснил на примерах, взятых у Эйлера» [227, стр. 235 — 236].

В книге Кояловича упоминаются так же работы Летникова, Вейра, Кенигсбергера, Дарбу и др. При этом Коялович замечает: «Странно только, что он (Дарбу) не упоминает о профессоре Миндинге, доказавшем связь множителя с частными решениями гораздо раньше его» [227, стр. 246].

О работах Миндинга упоминал и Н. Я. Сонин, опубликовавший в Известиях Академии наук (1895) статью «О дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$» [273 а], посвященную нахождению общего решения указанного уравнения при помощи частных решений.

Статья Сонина вызвала ряд возражений Кояловича, выступившего по этому поводу на заседании Петербургского математического общества.[72] В связи с этим Сонин опубликовал еше одну статью, содержавшую исправления к первой [273 б].

С 1896 г. публикуется цикл работ известного петербургского математика А. Н. Коркина (1837 — 1908) [257] об интегрировании обыкновенных дифференциальных урав-

---

[72] Б. М. Коялович. Несколько примечаний об интегрировании уравнения $ydy - ydx = Rdx$. Протоколы заседаний С.-Петербургского матем. общества, 1899; заседание 21 апреля 1895 г., стр. 106 — 110.

нений первого порядка [139 — 142, 225 — 226]. В том же году была опубликована большая статья в немецком журнале [139], в которой Коркин писал, что Миндинг в одном заслуживающем внимания мемуаре (ссылка на немецкий вариант [49]) дает очень важные общие теоремы, касающиеся интегрирующих множителей некоторых уравнений, для которых уравнение Эйлера представляет частный случай, и добавляет несколько новых примеров к примерам Эйлера. Метод работы [139], по словам автора, представляет собой усовершенствованный метод Миндинга.

Еще с большим уважением отзывается А. Н. Коркин о заслугах Миндинга в своем большом сочинении [225]. Изучая мемуар Миндинга [49], Коркин сравнивает его со статьей Абеля [78]. «Sur l'équation $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0$». В этой статье указаны некоторые виды интегрирующих множителей для уравнения Эйлера. Коркин пришел к выводу, что именно множители Абеля могли привести Миндинга к их обобщению. Все виды множителей Абеля входят как частные случаи в множители вида

$$e^U(y-u_1)^{h_1}(y-u_2)^{h_2}\ldots(y-u_l)^{h_l};$$

(где U — рациональная функция от y; u_1, u_2, u_3,. . . — функция только от x; h_1, h_2, h_3,. . .h_l — постоянные), рассмотренные Миндингом. Как отмечает Коркин, Миндинг «дает замечательную теорему, состоящую в том, что функции u_1, u_2, u_3, . . .u_l и корни уравнения $\frac{1}{U}=0$, если принять y за неизвестное, суть решения уравнения $Mdx+Ndy=0$».

Миндинг пробовал найти между этими величинами и коэффициентами многочленов M и N конечные уравнения (т. е. не дифференциальные) в простейшем случае, когда общий интеграл уравнения представляется в виде

$$e^U(y-u_1)^{h_1}(y-u_2)^{h_2}\ldots(y-u_l)^{h_l}=C, \tag{36}$$

где U — целая функция от y, а C — произвольная постоянная. Но Миндингу это не удалось вследствии ошибки, вкравшейся в рассуждения (см. § 2 его мемуара). Решил этот вопрос Коркин [225, стр. 392]. В этой же работе [225] он продолжил прерванные после Миндинга общие исследования о множителях вида (36). Таким образом, основное развитие метод Миндинга получил в работах Коркина.

Зависимость между интегрирующими множителями и частными решениями дифференциальных уравнений была предметом исследования, проделанного В. А. Анисимовым [194]: предполагая, что дифференциальное уравнение 1-го порядка и первой степени и его интегрирующий множитель выражаются алгебраическими функциями, он установил необходимые и достаточные условия, для того чтобы функции, обращающие интегрирующий множитель в ноль или в бесконечность, были частными интегралами уравнения. На примерах он показал как, зная интегрирующий множитель уравнения, найти частные интегралы этого уравнения.

Глава 10

ТРУДЫ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Проблемами вариационного исчисления Миндинг интересовался с самого начала своей научной деятельности. В первой опубликованной им работе «О линиях кратчайшего периметра на кривых поверхностях» [2] он рассматривает задачу, поставленную в третьем томе журнала Крелле: охватить по данной поверхности заданную площадь возможно короткой линией. Это — типичная вариационная задача из класса изопериметрических задач. Удобный прием для нахождения экстремалей был для задач этого класса указан уже Эйлером в 1744 г. [118]; Миндинг мог с ним ознакомиться по учебникам вариационного исчисления берлинских профессоров Дирксена [114] и Ома [165], являющимся единственными учебниками такого рода в начале XIX столетия.

В статье [2] Миндинг, предполагая, что поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, сразу пишет условие экстремали:

$$h\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \delta \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = 0$$

и отмечает, что по правилам вариационного исчисления, отсюда следует:

$$d\,\frac{dy}{ds} + qd\,\frac{dz}{ds} = \frac{vdx}{h}, \text{ где}$$

$$v^2 = 1 + p^2 + q^2,\ p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Далее он интегрирует это уравнение в случае плоскости и сферы и получает в качестве решений окружности. Результат был предугадан еще в древности; аналитически его в случае плоскости доказали впервые Я. Бернулли (1697) и с полной ясностью Эйлер (1732).

В случае общей кривой поверхности эту задачу впервые рассматривает Миндинг. Он называет экстремальные кривые «линиями кратчайшего периметра» и доказывает, что для них «косинус угла отклонения радиуса кривизны от касательной плоскости поверхности пропорционален самому радиусу кривизны» (т. е. что они являются, по сегодняшней терминологии, линиями постоянной геодезической кривизны на поверхности).

Это необходимое условие не дает еще возможности полностью решить задачу. Поэтому Миндинг старается проследить аналогию с решением задачи в случае плоскости и сферы и переходит на поверхности к параметрам s и ψ, которые позже стали называть полярными координатами на поверхности [221, т. 1, стр. 446]. Повторяя (но не вполне точно) прежние рассуждения, он делает заключение, что линии $s = \text{const}$ представляют собой частные решения полученного дифференциального уравнения. Это приводит его к гипотезе, что все кривые кратчайшего периметра состоят из точек, находящихся на постоянном геодезическом расстоянии от некоторой точки поверхности. Рассуждения во второй части статьи Миндинга, на которые опирается сделанная гипотеза, не вполне убедительны, а сама гипотеза, как показал анализ более поздних авторов, является неверной. От нее отказался и сам Миндинг в дальнейших работах. Полную ясность дало исследование Бауле (Baule) лишь в 1921 г. [80] (см. также [93, стр. 154, 175]). Оказалось, что для замкнутости всех линий постоянной геодезической кривизны необходимо, чтобы поверхность имела постоянную кривизну.

Эта первая опубликованная работа Миндинга стала отправным пунктом его дальнейших исследований по внутренней геометрии и изгибанию поверхностей. К изопериметрической проблеме на поверхности он вернулся только в 1876 г. Задачей, однако, интересовались и другие математики. Я. Штейнер, разрабатывая свои геометрические методы для решения изопериметрической задачи на плоскости и сфере, приводит в 1841 г. без доказательства следующее предложение [184]: «Пусть на какой-либо поверхности S задано некоторое число кривых, или криволинейный многоугольник P_1. Требуется в него вписать фигуру F заданного периметра, которая имеет с каждой стороной либо общую точку, либо общую часть, и площадь которой является максимальной; она обладает следующими характеристическими свойствами: 1) если взять развертывающуюся поверхность, касательную к поверхности S вдоль одной части периметра фигуры F, соединяющей две последовательные стороны P_1, и если ее затем развернуть, то эта часть дает дугу окружности; 2) все дуги окружностей, которые получаются таким образом, имеют одинаковый радиус; 3) наконец, две линии, которые являются частями периметра и кончаются на одной стороне P_1, должны ее либо достигать в одной точке под равными углами, либо касаться в двух разных точках».

Хотя Штейнер при формулировке этого предложения не упоминает исследований Миндинга, вряд ли можно сомневаться в том, что высказанное в нем утверждение 1) инспирировано ими (оно вытекает из работ Миндинга [2], [5] и [21]). Остальные утверждения Штейнера новые, но недоказанные. Позднее (1878 г.) Миндинг нашел свой подход к ним, рассматривая кривые кратчайшего периметра как положения равновесия упругой нерастяжимой нити на поверхности при определенных условиях (см. стр. 125).

Результат Миндинга о том, что линии кратчайшего периметра при заданной площади имеют постоянную геодезическую кривизну, вновь доказали в 1843 Ш. Делоне (Delaunay, [110]) и в 1848 г. О. Бонне [95]. При этом Делоне впервые рассматривал задачу в двойственном изложении: охватить на данной поверхности линией заданного периметра наибольшую площадь. Так как двойственные изопериметрические задачи равносильны, то экстремалями этой задачи Делоне — «кривыми наибольшего охвата» — являются те же самые «кривые кратчайшего периметра» Миндинга. Позже этот результат вошел в известный трактат Дарбу [107, стр. 151] и в другие монографии. При этом Дарбу, а вслед за ним и другие авторы уже забыли, что результат принадлежит Миндингу. Линии постоянной геодезической кривизны стали называть «окружностями Дарбу», хотя исторически более правильным было бы их называть «линиями Миндинга», ибо впервые они введены в науку Миндингом.

К этим кривым Миндинг пришел с помощью применения известных приемов вариационного исчисления к одной конкретной задаче. Но Миндингу не были чужды и общие проблемы вариационного исчисления. Его руководство по дифференциальному и интегральному исчислению [19] содержит основные положения этого исчисления.

Важной специальной проблеме было посвящено его исследование «О преобразованиях, служащих в вариационном исчислении для установления наибольших и наименьших значений» [45], в котором он заполнил некоторые мелкие пробелы, оставленные К. Г. Якоби и его последователями в теории достаточных условий экстремума (см., например, [137, 215]).

Якоби в своей статье [133], опубликованной в 1837 г. в журнале Крелле, кратко изложил свой метод, который позволил ему проделать преобразование, указанное для второй вариации еще в 1788 г. Лежандром. Многие свои результаты Якоби дал без доказательства, среди них следующие, сыгравшие существенную роль в его исследовании. Рассматривая вторую вариацию интеграла $\int f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx$, Якоби утверждал, что ее можно представить в виде

$$y = A\delta y + \frac{d}{dx}(A_1\delta y') + \frac{d^2}{dx^2}(A^2\delta y'') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n\delta y^n),$$

где $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — функции от x. Далее он заметил, что подстановка $u = t\delta y$, где δy — частное решение уравнения $y = 0$, позволяет интегрировать выражение

$$\delta y\left[Au + \frac{d\,(A_1u')}{dx} + \frac{d^2\,(A^2u'')}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n\,(A_nu^{(n)})}{dx^n}\right],$$

причем его интеграл имеет форму

$$Bt' + \frac{d}{dx}(B_1t'') + \frac{d^2}{dx^2}(B_2t''') + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1}t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

где $B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ выражаются через функции $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и y. Эти результаты Якоби использовал для преобразования второй вариации к виду $\int \frac{d^2f}{dy^{(n)^2}}\,\omega^2dx$, который позволяет сформулировать достаточный критерий существования экстремума.

Тот факт, что Якоби не дал доказательств указанных выше утверждений, побудил современных ему математиков искать эти доказательства. Первые статьи французских математиков В. А. Лебега, Ш. Делоне и Ж. Бертрана в этом направлении появились в 1841 г. Лебег и Делоне доказали эти утверждения Якоби непосредственными вычислениями, Бертран и затем Ф. Эйзенлор в 1853 г. — с помощью теории интегрируемости. Миндинг в своей статье [45] также провел весьма подробные вычисления, приводящие к доказательству. При этом он был первым, кто указал точные выражения для коэффициентов B, B_1, $B_2, \ldots, B_{n-1}$ через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и y. К проблемам, возникающим в связи с изопериметрической задачей на кривой поверхности, Миндинг вернулся в своих последних публикациях и здесь снова получил результаты большой важности. Первой из этих публикаций является статья «О линиях кратчайшего периметра на поверхностях вращения» [58], которая появилась в 1876 г. в Бюллетене Петербургской Академии наук.

Экстремалями изопериметрической задачи являются, как это впервые доказал Миндинг, линии постоянной геодезической кривизны. Преобразуя в случае ортогональной параметрической сети выражение геодезической кривизны к простой форме (известной еще из работы Лиувилля в 1850 г.) и переходя затем к изотермическим параметрам p и q (в которых $E=G$ и $F=0$), Миндинг получает дифференциальное уравнение линий постоянной геодезической кривизны $\frac{1}{h}$ в следующем виде:

$$\frac{Edp}{h}=d\left(\sqrt{E}\sin\theta\right)-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\,d\sigma.$$

Здесь θ обозначает угол, который искомая линия образует с параметрической линией $q=\mathrm{const}$, а $d\sigma^2=dp^2+dq^2$ Миндинг отмечает один важный случай, когда это уравнение легко интегрируется. Именно, пусть E не зависит от параметра q, т. е. пусть имеется дело с поверхностью вращения или поверхностью, изгибаемой на нее. Тогда

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}=0 \text{ и } \sqrt{E}\sin\theta=\frac{1}{h}\int\limits_{p_0}^{p}Edp.$$

Здесь интеграл выражает площадь части поверхности между линиями с постоянными p_0 и p; при этом $\sqrt{E}$ в случае поверхности вращения можно привести в совпадение с расстоянием r точки поверхности от оси вращения: $\sqrt{E}=r$. Таким образом, Миндинг получает интересный аналог известной теоремы Клеро: для точек линии постоянной геодезической кривизны на поверхности вращения величина $r\sin\theta$ пропорциональна площади полосы поверхности между двумя параллелями, одна из которых проходит через фиксированную точку, где эта величина равна нулю (т. е. либо $r=0$, либо $\sin\theta=0$), а вторая проходит через рассматриваемую точку линии; при этом коэффициент пропорциональности совпадает с геодезической кривизной линии.

При дальнейшем интегрировании Миндинг обнаруживает, что в случае общей поверхности вращения линии постоянной геодезической кривизны, вообще говоря, уже не являются замкнутыми линиями. К этому важному результату он пришел следующим образом. Принимая за параметр длину дуги меридиана s, для которой $ds=rdp$, и обозначив $\int\limits_{s_0}^{s} rds=F(s)$, он находит, что

$$r(s)\sin\theta=\frac{1}{h}F(s). \qquad (37)$$

Отсюда $\operatorname{tang}\theta=\frac{F(s)}{\sqrt{h^2r^2(s)-F^2(s)}}$, и так как, с другой стороны, $\operatorname{tang}\theta=\frac{rdq}{ds}$, то уравнение $q=q(s)$ линии постоянной геодезической кривизны $\frac{1}{h}$ получается в следующем виде:

$$q=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{F(s)\,ds}{r(s)\sqrt{h^2r^2(s)-F^2(s)}} \qquad (38)$$

(если считать, что $q=0$ на этом меридиане, где в точке рассматриваемой линии $F(s)=0$). Следовательно, функция $q(s)$ определена лишь в интервалах (s', s''), где s' и s'' — два последовательных корня уравнения $h^2r(s)-F^2(s)=0$. Миндинг заметил, что при $s\to s'$ и $s\to s''$ из (37) следует, что $\sin\theta\to\pm 1$, т. е. линия стремится к касанию с параллелями $s = s'$ и $s = s''$. Он нашел численными методами значения интеграла

$$I = \int\limits_{s'}^{s''} \frac{F\,ds}{r\sqrt{h^2r^2 - F^2}} \qquad (39)$$

при некоторых конкретных функциях $r(s)$ и обнаружил, что I может оказаться отличным от нуля, т. е. линия постоянной геодезической кривизны $\frac{1}{h}$, вообще говоря, не замыкается. Он предложил дополнить несамопересекающуюся часть этой линии между ее двумя последовательными точками на одной из параллелей $s = s'$ или $s = s''$ дугой этой параллели и добавил следующее: «Таким образом, радиус кривизны развернутой кривой (т. е. плоской кривой, получаемой при развертывании полученной замкнутой линии) остается постоянным, но имеет в разных частях кривой неравные значения — обстоятельство, которое не противоречит понятию постоянной. Все же желательны дальнейшие исследования по этому вопросу, которые нужно оставить на будущее» [58].

Но вопрос этот не давал покоя самому Миндингу и заставил его в более чем 70-летнем возрасте продолжать исследование. В статье «Некоторые изопериметрические задачи» [59], опубликованной в 1878 г. в Бюллетене Петербургской Академии наук, он дал ряд предложений, дополняющих цитированные выше утверждения Я. Штейнера, ограничиваясь случаем сферы. Он утверждал, например, что в предположениях, сделанных Штейнером, хорда дуги окружности на сфере, соединяющей точки на двух заданных кривых, должна составить с ними равные углы. Более интересен один общий результат. В этой статье Миндинг доказал, что изучаемые им замкнутые линии постоянной геодезической кривизны на заданной поверхности являются положениями равновесия замкнутой гибкой нерастяжимой нити, в каждой точке которой действует постоянная сила на касательной плоскости поверхности, перпендикулярная к направлению нити.

В следующей заметке «К теории линий кратчайшего периметра на кривых поверхностях» [60] Миндинг использовал этот результат и вывел из указанного в нем характеристического свойства исследуемых кривых утверждения 2) и 3) Штейнера, используя то очевидное обстоятельство, что в положении равновесия нити напряжение должно быть одинаково во всех точках нити; при этом он доказал, что это напряжение пропорционально геодезической кривизне линии. Такими соображениями Мипдингу удалось подтвердить правильность утверждения Штейнера о сохранении геодезической кривизны при переходе от одной части замкнутой экстремали к другой. Вместе с тем был получен ответ на вопрос, поставленный Миндингом в [58] (и цитированный нами выше). Экстремалями изопериметрической задачи на поверхности вращения могут быть части незамкнутых линий постоянной геодезической кривизны только тогда, когда они замыкаются дугой параллели той же самой геодезической кривизны.

Все основные результаты, опубликованные в указанных выше трех статьях 1876—1878 гг., Миндинг вновь изложил в статье «К теории линий кратчайшего периметра при заданной площади на кривых поверхностях» [62], опубликованной в 1879 г. в журнале Крелле.

Это была последняя статья Миндинга. В ней он снова обратился к предмету своей первой работы [2] по вариационному исчислению.

Прежде чем характеризовать современное состояние проблемы, затронутой Миндингом, добавим некоторые комментарии к его работам, не утратившим своего значения и сегодня. Интеграл (38) при $s = s'$ или $s = s''$ становится несобственным (потому что при s' и s'' знаменатель обращается в нуль). Миндинг не показал, что этот интеграл всегда сходится и что определяемая им линия поэтому всегда достигает параллели $s = s'$ и $s = s''$ (хотя из его работ видно, что он был в этом уверен). Аналогичный интеграл встречается при исследовании поведения геодезических линий на поверхности вращения, впервые подробно проведенном, по-видимому, П. Штеккелем в 1901 г., и там возможен случай, когда интеграл расходится (см., например [183], стр. 227), т. е. когда геодезическая линия асимптотически приближается к параллели, не достигая ее (случай с параллелью минимального радиуса). Не может ли так себя вести и линия постоянной нулевой геодезической кривизны?

Чтобы провести анализ, обозначим $\frac{r(s)}{F(s)} = \rho(s)$. Так как здесь $r(s) = F'(s)$, то

$$F(s) = ke^{\int\limits_{s_0} \rho ds}, \qquad r(s) = k\rho e^{\int\limits_{s_0} \rho ds},$$

и интеграл (38) можно переписать в виде

$$q = c\int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{k\rho e^{\int \rho ds}\sqrt{\rho^2-c^2}},$$

где $c=\frac{1}{h}$. Интеграл становится несобственным, если $\rho \to \pm c$, поэтому в нем целесообразно сделать преобразование $\rho=\rho(s)$ [при этом приходится, конечно, ограничиваться областью монотонности функции $\rho(s)$]. После этого получаем интеграл

$$q = c\int\limits_{\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{k\rho\rho' e^{\int(\rho/\rho')d\rho}\sqrt{\rho^2-c^2}}. \tag{40}$$

Когда при $\rho \to c$ или $\rho \to -c$ имеет место $\rho' \to \alpha \neq 0$, то интеграл по признаку Коши сходится.

Более интересен случай, когда $\rho' \to 0$, т. е. когда на параллели $\rho = c$ или $\rho = -c$, к которой приближается линия, величина ρ стационарна. Напомним, что в аналогичном случае интеграл, встречающийся при исследовании поведения геодезической линии — он отличается от нашего отсутствием множителя $e^{\int(\rho/\rho')d\rho}$ в знаменателе, — становится расходящимся. Несложный анализ покажет, что именно наличие этого сомножителя обеспечивает сходимость интеграла (40) и в этом случае, т. е. линия геодезической кривизны c достигает, как и в случае $\rho' \to \alpha \neq 0$, параллели с $\rho = c$ и $\rho = -c$. Из соотношения (37), принимающего вид $\rho \sin\theta = c$, следует, что в их общих точках $\sin\theta = \pm 1$, т. е. происходит касание линии и параллели.

Условие, $\rho' = 0$ при $\rho = c$ или $\rho = -c$, имеет интересное геометрическое истолкование. Так как

$$\rho' = \frac{r'F - rF'}{F^2},$$

то оно сводится к тому, что при $\rho = c$ или $\rho = -c$

$$\frac{r'}{r} = \frac{F'}{F}.$$

Здесь правая часть, в силу $F' = r$, совпадает с ρ. Левая часть, как нетрудно убедиться, равна геодезической кривизне рассматриваемой параллели. Следовательно, как раз в этом случае осуществляется переход от изучаемой линии на замыкающую дугу параллели с сохранением постоянной геодезической кривизны, что, по Штейнеру и Миндингу, необходимо, чтобы получаемая замкнутая линия могла быть экстремалью поставленной изопериметрической задачи. Получается следующая схема для выделения этих замкнутых экстремалей: при каком-нибудь выборе постоянной s_0 для определения функции F нужно решить уравнение $F''F - F'^2 = 0$ (к которому сводится $\rho' = 0$), взять два его последовательных корня, определить соответствующие им значения величины ρ и по этим значениям, принятым за $c = \frac{1}{h}$, найти линии, определяемые уравнением (38). Из последних можно с помощью дуги на одной из параллелей, определяемых выбранными двумя корнями, составить гладкую замкнутую несамопересекающуюся линию постоянной геодезической кривизны. Таких линий существует, с точностью до вращений, однопараметрическое семейство. Кроме того, существует однопараметрическое семейство параллелей, также имеющих постоянные геодезические кривизны. Только среди линий этих двух семейств и следует искать решение изопериметрической задачи.

Полученное Миндингом решение в квадратурах дифференциального уравнения линий постоянной геодезической кривизны на поверхности вращения вновь нашел в 1883 г. Дарбу, который затем включил эти результаты в свой известный трактат по теории поверхностей [107, стр. 152—153]. Однако Дарбу не дал там столь подробного анализа поведения этих линий и не отметил возможности получить замкнутые экстремали изопериметрической задачи дополнением некоторых частей этих линий дугами параллелей, как это сделал в свое время Миндинг.

Интерес к изопериметрической задаче на кривых поверхностях (т. е. в двумерных римановых пространствах отличной от нуля гауссовой кривизны) возобновился в 1940-х годах. В случае поверхности постоянной кривизны K задача была в 1940 г. полностью решена Э. Шмидтом [173а] (случай $K=\text{const}>0$ рассматривал Ф. Бернштейн еще в 1905 г.). Если на такой поверхности задана замкнутая кривая длины L, ограничивающая область с площадью S, то $L^2 \geqslant S(4\pi - KS)$, причем знак равенства имеет место только в случае окружности.

В 1942 г. Э. Шмидт [173а] поставил и исследовал более общую изопериметрическую задачу, частным случаем которой является задача Миндинга на поверхностях вращения. Шмидт рассматривал (u, v)-плоскость с метрикой

$$ds^2 = du^2 + g(u)^2 dv^2.$$

При заданных положительных, дважды дифференцируемых функциях $g(u)$, $\sigma(u)$ и $\tau(u)$ определяются интегралы

$$L = \int\limits_C \sigma(u)\, ds, \quad F = \int\limits_T \tau(u)\, dS,$$

где C — простая замкнутая кривая, T — ограниченная ею область, s — длина ее дуги, $dS = g(u)\, du dv$ — элемент площади. Требуется при заданном значении L найти C так, чтобы интеграл F имел максимальное значение. При $\sigma(u) \equiv \tau(u) \equiv 1$ получается задача Миндинга. Шмидт проводит очень подробный анализ этой задачи — в частности, обобщает все результаты Миндинга, ссылаясь на [62]. Вместе с тем он делает упрек в адрес Миндинга, отмечая, что через каждую точку в каждом направлении проходит, в силу теоремы единственности решения дифференциального уравнения, единственная кривая с заданной геодезической кривизной, и поэтому касание такой линии с параллелью, имеющей равную с ней геодезическую кривизну, якобы невозможно. При этом, однако, Шмидт забывает о возможности существования особого решения. Данный выше анализ (см. стр. 127) показывает, что в случае, который рассматривает Миндинг, параллель является именно особым решением.

Обычную изопериметрическую задачу в весьма общих двумерных римановых пространствах исследовал в 1940-х годах Ф. Фиала (Fiala). Он рассмотрел полные римановы плоскости знакопостоянной гауссовой кривизны K, на которых каждая линия, содержащая расходящуюся последовательность точек, имеет бесконечную длину. При этом главное внимание Фиала обращает на вопрос существования замкнутой линии заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. В 1943 г. ему удалось доказать следующие предложения [122]: а) если гауссова кривизна K всюду неотрицательна, то среди замкнутых линий заданной длины существует такая, которая ограничивает область максимальной площади; б) если K всюду неположительна, а интегральная кривизна отрицательна, то множество площадей областей, ограничиваемых замкнутыми линиями заданной длины, сверху ограничено, однако точная верхняя грань при этом не достигается (т. е. нет линии, ограничивающей область максимальной площади).

Эти результаты решили при сделанных предположениях только вопрос о существовании решения изопериметрической задачи. Относительно фактического нахождения искомой линии при $K \geqslant 0$ Фиала отметил следующее: «Мы позволим себе еще заметить, что теорема а) не дает нам в случае заданной поверхности никаких указаний относительно конкретных линий, ограничивающих область максимальной площади, кроме того факта, что их существует по крайней мере одна; вполне возможно, что их существует много и даже бесконечно много. Нахождение этих линий может представить еще большие трудности. Даже для таких простых поверхностей, как поверхности вращения, решение не является непосредственным». Фиала, по-видимому, не знал последних работ Миндинга, которые сильно ограничивали запас возможных экстремалей на поверхности вращения. По крайней мере он не дал указаний на них.

В заключение укажем на одно интересное замечание в статье Фиала: «Более глубокий анализ доказательства теоремы а) позволяет видеть, что линии, ограничивающие области максимальной площади, должны содержать, по крайней мере для достаточно малых значений L, хотя бы одну из точек, где гауссова кривизна максимальна» [122]. Это еще более ограничивает запас экстремалей и может даже привести к окончательному решению задачи в случае конкретной поверхности вращения.

Глава 11

РАБОТЫ ПО ИНТЕГРИРОВАНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В научном творчестве Ф. Г. Миндинга немаловажное место занимают исследования по интегрированию алгебраических функций. Этому вопросу он посвятил четыре работы, написанные в берлинский период жизни и опубликованные в журнале Крелле. Работы Миндинга об интегрировании алгебраических функций находятся в самой тесной связи с результатами Абеля по данному вопросу. Чтобы оценить значение результатов Миндинга, проследим развитие этих идей у других математиков, особенно у Абеля.

Вопросы интегрирования иррациональных дифференциалов в конечном виде возникли на заре интегрального исчисления. Еще Ньютон при вычислении длины дуги эллипса и гиперболы столкнулся с так называемыми эллиптическими интегралами. С эллиптическими интегралами вида $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ и $\int \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ пришлось иметь дело и Я. Бернулли при решении задачи об упругой нити [84].

Энергичное изучение свойств эллиптических интегралов началось в XVIII в. И. Бернулли установил, что сумма двух вышеуказанных интегралов может быть выражена дугой эллипса с соответствующими осями, а произведение этих интегралов в пределах от 0 до a равно $\frac{1}{4}$ площади круга диаметра a, т. е.

$$\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}} \cdot \int_0^a \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{\pi a^2}{4} \quad [85].$$

Большое значение имели исследования Фаньяно о дугах эллипсов, гипербол и лемнискат. Исследованиями подобного рода занимались Маклорен, Даламбер и некоторые другие математики. Особенно ценный вклад в изучение эллиптических интегралов в XVIII в. внес Л. Эйлер, который, по словам Лежандра, заложил основы теории эллиптических интегралов. Эйлер первым дал классификацию этих интегралов, а также открыл важную теорему сложения эллиптических интегралов. Эйлер показал, что сумма эллиптических интегралов вида $\int R\left(x;\ \sqrt{f_4(x)}\right)dx$, где $f_4(x)$ — многочлен 4-й степени, сводится к одному интегралу такого же типа плюс алгебраические и логарифмические функции от величин, стоящих под знаком интеграла. К результатам Эйлера довольно близко примыкают исследования Ландена, установившего в 1780 г. соотношение между двумя эллиптическими интегралами с различными модулями. Иначе говоря, Ланден нашел преобразование, которое переводит один из указанных интегралов в другой.

Теория эллиптических интегралов впервые в систематическом виде была изложена Лежандром в «Упражнениях по интегральному исчислению» [150] и «Трактате об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» [149]. Под эллиптическими функциями в трактате подразумевались эллиптические интегралы.

Лежандром были установлены формулы сложения и умножения интегралов 1-го рода, выведены соответствующие дифференциальные уравнения для интегралов 1-го и 2-го рода, был изучен целый ряд интегралов, приводимых к эллиптическим, и т. д. Работы Лежандра послужили отправным пунктом для научных исследований других математиков в данной области.

Большие успехи в изучении эллиптических интегралов были достигнуты в XIX в. Абелем и Якоби, которые широко использовали свойства так называемых эллиптических функций, открытых Абелем в 1823 г. и несколько позже Якоби. Эти ученые создали стройную математическую теорию, в которой задача деления лемнискаты представляла одну из частных проблем.

Не ограничиваясь изучением эллиптических интегралов, Абель занялся изучением свойств интегралов от произвольных алгебраических функций и положил начало созданию общей теории трансцендентных функций, лишь небольшую часть которых составляют эллиптические функции.

Первой посвященной этой теме печатной работой Абеля был опубликованный в первом томе журнала Крелле мемуар «Об интегрировании дифференциального выражения $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, где R и ρ целые функции» [74]. В этом мемуаре Абель сначала выясняет условия, при которых интеграл $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ может быть выражен в виде логарифма

$$A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

где A — постоянная, p и q — многочлены от x.

Таким условием, как находит автор, является квадратное уравнение $p^2 - q^2R = 1$ относительно многочленов p и q, решение которого в многочленах возможно только тогда, когда корень $\sqrt{R}$ разлагается в непрерывную периодическую дробь. Таким образом, Абель показал, что если $\sqrt{R}$ разлагается в непрерывную периодическую дробь, то можно найти такие многочлены p и q, удовлетворяющие указанному уравнению, что интеграл $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ выражается элементарной функцией.

Хотя результат Абеля и давал необходимое и достаточное условие интегрируемости в конечном виде дифференциала $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, однако это условие не было эффективным, так как нельзя было указать заранее число операций, необходимых для выявления периодичности или непериодичности непрерывной дроби, в которую должна разлагаться данная функция $\sqrt{R(x)}$. Таким образом, предложение Абеля не всегда давало возможность решать вопрос об интегрируемости $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ в конечном виде.

В конце мемуара Абель ставил более общий вопрос — о нахождении всех интегралов указанного вида, которые могут быть выражены в логарифмах. Однако исчерпывающего ответа на поставленный вопрос Абель не дал, а ограничился лишь формулировкой теоремы (без доказательства). Впоследствии П. Л. Чебышев обобщил эту теорему Абеля и поставил вопрос о возможности выражения интеграла $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, где R — многочлен не выше 4-й степени, в элементарных функциях. Полное решение этого вопроса было дано в 1874 г. Е. И. Золотаревым [218].

В конце 1826 г. Абель закончил свой знаменитый «Мемуар об общем свойстве некоторого обширного класса трансцендентных функций», который был представлен в Парижскую Академию наук и опубликован лишь после смерти автора, в 1841 г. [75]. В этом мемуаре была сформулирована и доказана теорема Абеля, представляющая собой широкое обобщение теоремы сложения эллиптических интегралов, установленной Л. Эйлером.

Рассматривая интегралы самого общего вида

$$\psi(x) = \int_0^x f(x, y)\,dx,$$

где переменные x и y связаны произвольным алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$, Абель доказал, что сумма любого конечного числа подобных, «абелевых», интегралов, т. е.

$$m_1\psi(x_1) + m_2\psi(x_2) + \ldots + m_n\psi(x_n),$$

может быть выражена посредством суммы постоянной, алгебраической и логарифмической функций от величин x_1; x_2; ..., x_n, если только между ними существует определенная алгебраическая зависимость.

В конце мемуара Абель подробно изучает тот частный случай своей теоремы, когда сумма абелевых интегралов приводится только к постоянной величине. Иначе говоря, Абель дает приложение своей теоремы к интегралам первого рода.

Следствием теоремы Абеля явилась возможность сведения суммы какого угодно конечного числа $m - p$ абелевых интегралов к сумме p интегралов такого же рода, если не учитывать алгебраические и логарифмические функции. При этом число p, как показал Абель, зависит лишь от характера алгебраического уравнения $F(x, y) = 0$.[73]

На долгие годы этот замечательный мемуар Абеля оказался погребенным в архивах Парижской Академии наук. Упоминание о нем содержится в статье Абеля «Замечания о некоторых свойствах одного класса трансцендентных функций» [76], в которой автор излагает вопрос о гиперэллиптических интегралах, т. е. об интегралах вида

---

[73] Число p впоследствии Клебш назвал родом уравнения. Обозначение p принадлежит Риману.

$\psi(x)=\int_0^x f(x, y)\,dx$, где $y^2=R(x)$, а $R(x)$ — многочлен произвольной степени; их частным случаем являются эллиптические интегралы.

В этом мемуаре Абель рассмотрел различные виды функций $f(x, y)$ и доказал, что для всех случаев сумма какого угодно конечного числа $m-p$ гиперэллиптических интегралов, умноженных на рациональные числа, сводится к сумме p интегралов такого же рода плюс логарифмические и алгебраические функции. В отдельных случаях отыскание этого числа p, по замечанию Ф. Клейна, стоило Абелю немалого труда [135, 223]. В частности, если $y^2=f_5(x)$ или $y^2=f_6(x)$, то число p таких интегралов равно 2. В указанной статье Абель с помощью своей теоремы фактически изучил свойства гиперэллиптических интегралов, не вычисляя их.

В 1829 г. в 4-м номере журнала Крелле [77] Абель дал краткое изложение главной теоремы из своего парижского мемуара, получившей самую высокую оценку со стороны Лежандра, Якоби и других математиков, занимающихся вопросами интегрирования алгебраических функций.

Работы Абеля по теории интегралов алгебраических функций явились истоком для многочисленных исследований в этом направлении. Особенно больших успехов здесь добились Лиувилль, Остроградский, Чебышев и некоторые другие математики.

Одними из первых работ, посвященных развитию и приложению идей Абеля, явились исследования Миндинга.

Вопросами интегрирования алгебраических функций Миндинг заинтересовался в результате глубокого изучения вышеуказанных работ Абеля, опубликованных в основном в журнале Крелле, в котором затем публиковал свои многочисленные работы и Миндинг. В своей первой работе [10], посвященной данному вопросу, «Об интегралах вида $\int \frac{P\sqrt[3]{p}}{c-x}\,dx$, где P и p — два целых полинома» Миндинг занялся рассмотрением одного очень специального случая, выбранного среди множества других. Однако эта работа представляет несомненный интерес в свете исследований, связанных с теоремой Абеля о суммировании интегралов от алгебраических функций.

В этой работе Миндинг изучает результат суммирования интегралов вида

$$\psi(x)=\int\limits_0^x \frac{Py}{c-x}\,dx, \qquad (41)$$

где P — целая рациональная функция от x с постоянными коэффициентами, а y удовлетворяет системе следующих двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y^3+p=0 \\ q_2y^2+q_1y+q_0=0, \end{cases} \qquad (42)$$

в которой p — многочлен с постоянными коэффициентами, а q_0, q_1, q_2 — многочлены такого же рода, но с переменными коэффициентами.

Таким образом, Миндинга интересует вопрос о суммировании абелевых интегралов $\int f(x, y)\,dx$, где y удовлетворяет указанной системе алгебраических уравнений. Интересно отметить, что в этой статье Миндинг использует те же обозначения, что и Абель в своих мемуарах 1828 и 1829 гг. Исключая из системы (42) переменную y, Миндинг получает конечное уравнение

$$F(x)=q_0^3+3\,pq_0q_1q_2-pq_1^3+p^2q_2^3=0 \qquad (43)$$

и останавливается затем на том частном случае, когда корни уравнения (43) $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ различны. Очевидно, что каждый из корней x_i порождает соответствующее значение y_i: $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, общее выражение которого может быть получено из системы (42) в виде

$$y=\frac{q_0q_1+pq_2^2}{q_0q_2-q_1^2}. \qquad (44)$$

Отправляясь от уравнений (43) и (44), Миндинг находит выражение ydx, умножает его на $\frac{P}{c-x}$, где $c=\mathrm{const}$, а P — многочлен с постоянными коэффициентами, и находит затем сумму абелевых интегралов с одинаковыми подынтегральными функциями, причем верхние пределы интегралов $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ связаны определенными алгебраическими соотношениями.

Используя в полной мере идеи и методы, изложенные Абелем в указанных мемуарах, Миндинг доказывает, что сумма абелевых интегралов выбранного типа, т. е.

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_\mu),$$

при соответствующих условиях приводится к сумме алгебраической функции и постоянной величины.

В следующей тетради того же тома журнала Крелле Миндинг помещает небольшое добавление [11] к вышерассмотренной статье и доказывает справедливость одного утверждения, принятого в первом мемуаре без доказательства. В этой заметке речь идет о доказательстве интегрируемости выражения, полученного при суммировании дифференциалов вида

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\mu} \frac{P_i y_i}{c - x_i} dx_i,$$

где P_i — целая рациональная функция от x_i.

Больший интерес в свете развития идей Абеля представляет обширный мемуар Миндинга «Исследование о суммировании некоторого числа трансцендентных функций, производные которых определены с помощью алгебраических уравнений 3-го порядка» [13]. Этот мемуар тесно связан с первой работой Миндинга и представляет по существу ее обобщение. Заметим, что под трансцендентными функциями автор понимает интегралы от алгебраических функций, которые не могут быть выражены другими алгебраическими функциями.

Таким образом, в данной работе речь идет о суммировании интегралов вида $\int \varphi(x, y)\,dx$, где переменная y удовлетворяет кубическому уравнению (45):

$$y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0 = 0, \tag{45}$$

а p_0, p_1, p_2 — многочлены от переменной x с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что в силу уравнения (45) заданная подынтегральная функция $\varphi(x, y)$ может быть преобразована к виду

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{A_1 + B_1 y + C_1 y^2},$$

где α, β, γ, A_1, B_1, C_1 — многочлены от x.

После этого автор находит такой многочлен

$$A' + B'y + C'y^2,$$

что произведение

$$(A_1 + B_1 y + C_1 y^2)(A' + B'y + C'y^2) = N(x)$$

дает многочлен, зависящий только от x. Вследствие этого подынтегральной функции $\varphi(x, y)$ может быть придан вид

$$\varphi(x, y) = \frac{A + By + Cy^2}{N(x)},$$

где A, B, C — многочлены от x. Разложив $N(x)$ на простые дроби, можно интеграл $\int \varphi(x, y)\,dx$ заменить суммой интегралов вида

$$\int \frac{A + By + Cy^2}{(c - x)^k}\,dx,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. Но так как дифференциал

$$\frac{A + By + Cy^2}{(c - x)^k}\,dx$$

может быть получен путем дифференцирования по c выражения

$$\frac{A + By + Cy^2}{(c - x)},$$

то автор останавливается на изучении лишь интегралов вида

$$\int \frac{A + By + Cy^2}{c - x}\,dx.$$

В целях упрощения дельнейших вычислений Миндинг освобождается под интегралом от слагаемого $\frac{A}{c - x}$, что легко достигается преобразованием: $y = z - \frac{1}{3} p_2$.

Таким образом, вопрос о суммировании интегралов вида $\int \varphi(x, y)\,dx$, где y удовлетворяет уравнению (45), может быть сведен к вопросу о суммировании интегралов

$$\int \frac{Az + Bz^2}{c - x}\,dx,$$

где z удовлетворяет кубическому уравнению

$$z^3 + p_1 z + p_0 = 0. \tag{46}$$

Присоединяя к уравнению (46) уравнение

$$q_2 z^2 + q_1 z + q_0 = 0, \tag{47}$$

где q_0, q_1, q_2 — многочлены с переменными коэффициентами, Миндинг путем исключения из этих уравнений переменной z приходит к резольвенте

$$f(x) = 0. \tag{48}$$

Корни этой резольвенты $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ являются функциями переменных коэффициентов полиномов q_0, q_1, q_2 и порождают, согласно уравнению (46), соответствующие значения $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$.

После этого автор путем довольно длинных и искусных выкладок устанавливает формулу суммирования интегралов вида

$$\int\limits_0^{x_i} \frac{Az + Bz^2}{c - x}\, dx ,$$

где $i = 1, 2, \ldots, \mu$.

В заключении мемуара Миндинг отмечал, что «кажется трудным получить результат суммирования интегралов в самой общей форме в силу большой сложности вычислений» [13, стр. 383].

Однако спустя семь лет Миндинг преодолевает эти трудности и в 1841 г. заканчивает свой замечательный мемуар «Некоторые предложения об интегралах алгебраических функций одной переменной, выведенные по методу Абеля», опубликованный на латинском языке в 23-м томе журнала Крелле [30]. Этот мемуар явился заключительным этапом исследований Миндинга по интегрированию алгебраических функций. В нем автор дает формулировку теоремы Абеля для самого общего случая и получает еще целый ряд оригинальных результатов по теории абелевых интегралов.

Весьма важным обстоятельством, по замечанию Якоби [132], является тот факт, что работа Миндинга была выполнена еще до запоздавшего на 15 лет появления в печати мемуара Абеля по тому же вопросу.

Рассматриваемая работа Миндинга состоит из трех глав. В первой главе автор устанавливает общую формулу суммирования абелевых интегралов $\int\limits_0^{x_i} F(x, y)\,dx$, где $F(x, y)$ — рациональная функция аргументов x и y, из которых последний представляет собой некоторый корень алгебраического уравнения

$$p_0y^n + p_1y^{n-1} + \ldots + p_n = 0, \tag{49}$$

в котором $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — целые рациональные функции аргумента x. Величина x_i пробегает значения $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, между которыми существует определенная зависимость. Таким образоми, в первой главе автор распространяет результаты, полученные им в предыдущем мемуаре, на случай абелевых интегралов самого общего типа.

Особенно большое внимание Миндинг уделил здесь виду алгебраической и логарифмической части, входящей в формулу Абеля. Весьма примечательным является и тот факт, что эта глава мемуара Миндинга по форме и содержанию имеет много общего с парижским мемуаром Абеля, неизвестным Миндингу к моменту завершения его исследования [132].

Вторую главу мемуара Миндинг посвящает отысканию наименьшего числа интегралов, к которым может быть сведено данное количество интегралов того же вида, Этот фундаментальный в теории абелевых интегралов вопрос о наименьшем числе интегралов, к которым может быть сведена при помощи теоремы Абеля сумма любого конечного числа заданных интегралов, Миндинг решает при помощи своего метода отыскания степени результанта, полученного при исключении одной переменной из двух уравнений с двумя неизвестными [29]. Таким образом, Миндинг, как и Абель, по существу владеет важнейшим понятием рода уравнения.

Последнюю главу своего обширного мемуара Миндинг отводит приложению результатов, полученных в первых двух главах, к изучению гиперэллиптических интегралов $\int F(x, y)\,dx$, где y является корнем двучленного уравнения $Py^n = R$, в котором P и R — многочлены от x.

К моменту завершения замечательной работы Миндинга был опубликован знаменитый мемуар Абеля, который, по словам К. Г. Якоби [132], содержал величайшее математическое открытие своего времени и по своей общности несколько превосходил результаты Миндинга.

Естественно, что мемуар Абеля сразу привлек к себе внимание, а исследование Миндинга на ту же тему осталось в тени, не получив заслуженной оценки. Правда, в 1847 г. работа Миндинга была замечена К. Г. Якоби, который в своем очерке «К истории эллиптических и абелевых трансцендентных» [132] отметил ее неоспоримое научное значение.

Еще более высокую оценку этой работе дадут через 50 лет после ее появления большие знатоки данного вопроса А. Бриль и М. Нетер в своем обзоре развития теории алгебраических функций [97]: «Приходится удивляться тому, насколько глубоко этот одаренный исследователь вник в ход мыслей Абеля и овладел его методами и в скольких существенных результатах он в некотором смысле Абеля опередил. К тому же надо признать, что в смысле ясности, краткости и целесообразности построения доказательств работа Миндинга не уступает абелевой».

Приведенные слова служат лучшей характеристикой научных успехов Миндинга в данном вопросе и дают право на то почетное место, какое Миндинг занимает в истории интегрирования алгебраических функций

Глава 12

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

В 1829 г. Миндинг представил в Галльский университет свою первую научную работу — докторскую диссертацию «О приближенном вычислении двойного интеграла», написанную на латинском языке и занимающую 19 страниц мелкого рукописного текста [1].

Этот вопрос привлек внимание Миндинга благодаря работе К. Г. Якоби «О новом методе Гаусса приближенного вычисления определенного. интеграла», опубликованной в первом томе журнала Крелле [131, стр. 301—308]. В этой работе Якоби дал простой способ приближенного вычисления интеграла, способ, который был ранее получен Гауссом весьма длинным путем, с помощью метода математической индукции [131, стр. 302]. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть имеем определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Можно считать, что $a=0$, $b=1$; это легко достигается заменой переменной $x=a+(b-a)u$. Возьмем n значений, заключенных между 0 и 1: $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots, a_n$ (их выбор остается в нашем распоряжении), и вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках.

За приближенное значение данного интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ автор принимает величину интеграла $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$ с погрешностью

$$\int\limits_0^1 |f(x)-\varphi(x)]\,dx=\int\limits_0^1 v\psi(x)\,dx,$$

где φ (x) — многочлен, имеющий в выбранных точках те же значения, что и функция $f(x)$:

$$\varphi(a_1)=f(a_1), \ \ldots\ ,\varphi(a_\mu)=f(a_\mu), \ \ldots\ ;\ \varphi(a_n)=f(a_n).$$

Чтобы вывести формулу для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$, составим полином n-й степени: $\psi(x)=(x-a_1)\ldots$ $\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_n)$ и разложим рациональную дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ на простейшие:

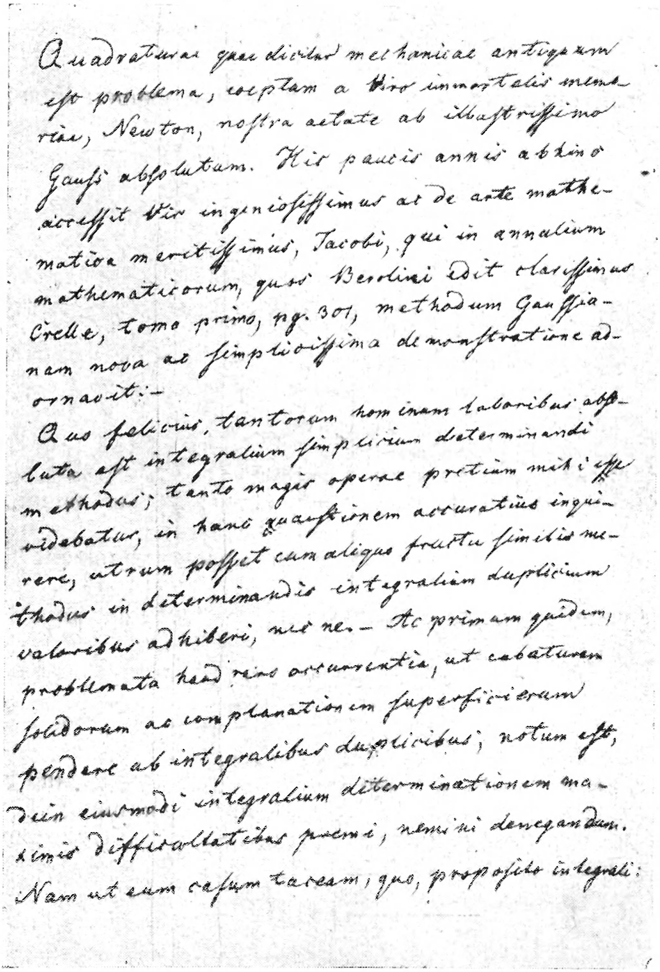
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\varphi(a_\mu)}{\psi'(a_\mu)(x-a_\mu)},$$

откуда

$$\varphi(x)=\psi(x)\sum_{\mu=1}^{n}\frac{f(a_\mu)}{\psi'(a_\mu)(x-a_\mu)},$$

так как

$$\varphi(a_\mu)=f(a_\mu).$$



Quadraturae quae dicitur mechanicae antiquum
est problema, coeptum a viro immortalis memo-
riae, Newton, nostra aetate ab illustrissimo
Gauss absolutum. His paucis annis abhinc
accessit vir ingeniosissimus et de arte mathe-
matica meritissimus, Jacobi, qui in annalium
mathematicorum, quos Berolini edit clarissimus
Crelle, tomo primo, pg. 301, methodum Gaussia-
nam nova et simplicissima demonstratione ad-
ornavit. —
Quo felicius, tantorum hominum laboribus abso-
luta est integralium simplicium determinandi
methodus; tanto magis operae pretium mihi esse
videbatur, in hanc quaestionem accuratius inqui-
rere, utrum posset cum aliquo fructu similis me-
thodus in determinandis integralium duplicium
valoribus adhiberi, nec ne. — Ac primum quidem,
problemata haud raro occurrentia, ut cubaturam
solidorum ac complanationem superficierum
pendere ab integralibus duplicibus; notum est,
dein eiusmodi integralium determinationem ma-
ximis difficultatibus premi, nemini denegandum.
Nam ut eum casum taceam, quo, proposito integrali:

Первая страница рукописи докторской диссертации Ф. Миндинга 1829 г. (Архив университета г. Галле).

Введя обозначение

$$K_\mu = \frac{1}{\psi'(a_\mu)} \int_0^1 \frac{\psi(x)}{x - a_\mu} dx,$$

получаем окончательную формулу в следующем виде:

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \sum_{\mu=1}^{n} K_\mu f(a_\mu)$$

или

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \sum_{\mu=1}^{n} K_\mu A_\mu ,$$

где

$$A_\mu = f(a_\mu).$$

Дальнейшие выкладки сводятся к отысканию функции $\psi(x)$ таким образом, чтобы погрешность вычисления, равная интегралу $\int_0^1 v\psi(x)\, dx$ была возможно меньшей. Таковой функцией является многочлен n-й степени вида

$$\psi(x) = \frac{d^n (x^2 - x)^n}{dx^n},$$

корнями которого и будут $a_1, \ldots, a_\mu, \ldots, a_n$.

Таким образом, в зависимости от числа n можно заранее задать вид функции $\psi(x)$, определить ее корни $a_1, \ldots, a_n$ и вычислить коэффициенты $K_1, \ldots, K_\mu, \ldots K_n$. Например, для $n = 2$

$$\psi(x) = \frac{d^2 (x^2 - x)^2}{dx^2} = 12\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0.21132487,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0.78867513,$$

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{2}.$$

Для примера можно взять определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x} = \int\limits_0^1 \frac{du}{2+u}$. Вычисляя $f(u) = \frac{1}{2+u}$ в точках a_1 и a_2, получим

$$A_1 = f(a_1) = \frac{1}{2+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{12}}}, \quad A_2 = f(a_2) = \frac{1}{2+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{12}}},$$

откуда приближенное значение интеграла при $n=2$ будет равно 0.405405; его точное значение равно $\ln\frac{3}{2} = 0.405465$.

Метод Якоби заинтересовал Миндинга, который впоследствии изложил его с небольшими изменениями в своем курсе по дифференциальному и интегральному исчислению [22]. Этот метод и послужил Миндингу отправным пунктом для его докторской диссертации, в которой он установил формулу для приближенного вычисления двойного интеграла.

Пусть имеем двойной интеграл

$$\int\limits_0^s dx \int\limits_0^\sigma \varphi(x, y)\,dy,$$

где $\varphi(x, y)$ — рациональная функция от x и y произвольной степени. Возьмем n значений x, заключенных между 0 и s: $a_1 s, \ldots, a_\mu s, \ldots, a_n s$, и m значений y, заключенных между 0 и σ: $\alpha_1\sigma, \ldots, \alpha_\nu\sigma, \ldots, \alpha_m\sigma$. Возьмем за приближенное значение заданного интеграла интеграл $\int\limits_0^s dx \int\limits_0^\sigma \varphi_1(x, y)\,dy$, где $\varphi_1(x, y)$ — рациональная функция, принимающая в выбранных точках те же значения, что и функция $\varphi(x, y)$.

Рассмотрим далее полиномы $f(x)$ и $F(y)$, определяемые выражениями

$$f(x) = (x - a_1 s)\ldots(x - a_\mu s)\ldots(x - a_n s),$$
$$F(y) = (y - \alpha_1\sigma)\ldots(y - \alpha_\nu\sigma)\ldots(y - \alpha_m\sigma),$$

и разделим функцию $\varphi_1(x, y)$ сначала на $f(x)$:

$$\frac{\varphi_1(x, y)}{f(x)} = \frac{u_1}{f'(a_1s)(x - a_1s)} + \cdots + \frac{u_n}{f'(a_ns)(x - a_ns)},$$

а затем на $F(y)$:

$$\frac{\varphi_1(x, y)}{f(x)F(y)}.$$

Деление отношения $\frac{\varphi_1(x, y)}{f(x)}$ на $F(y)$ осуществляется путем последовательного деления u_μ ($\mu = 1, \ldots, m$) на $F(y)$:

$$\frac{u_\mu}{F(y)} = \frac{v_1}{F'(\alpha_1\sigma)(y - \alpha_1\sigma)} + \cdots + \frac{v_\nu}{F'(\alpha_\nu\sigma)(y - \alpha_\nu\sigma)} + \cdots +$$
$$\cdots + \frac{v_m}{F'(\alpha_m\sigma)(y - \alpha_m\sigma)}.$$

Подставляя значение

$$\frac{u_\mu}{F(y)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{v_\nu}{F'(\alpha_\nu\sigma)(y - \alpha_\nu\sigma)}$$

в выражение

$$\frac{\varphi_1(x, y)}{f(x)F(y)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{f'(a_\mu s)(x - a_\mu s)} \cdot \frac{u_\mu}{F(y)},$$

автор находит интерполяционную формулу для $\varphi_1(x, y)$, которой в наших обозначениях можно придать вид

$$\varphi_1(x, y) = f(x)F(y) \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{v_\nu}{f'(a_\mu s)(x - a_\mu s)F'(\alpha_\nu\sigma)(y - \alpha_\nu\sigma)}.$$

Отсюда приближенное значение заданного интеграла получается в виде интеграла $\int_0^s dx \int_0^\sigma \varphi_1(x, y)\,dy$ с погрешностью $\iint\limits_{(D)} [\varphi(x, y) - \varphi_1(x, y)]\,dxdy$.

Дальнейшие выкладки сводятся к отысканию функций $f(x)$ и $F(y)$, с тем чтобы погрешность вычисления была возможно меньшей.

Реализуя идеи Якоби, изложенные в упомянутом мемуаре, Миндинг находит многочлены

$$f(x) = \frac{1}{(n+1)\dots 2n} \frac{d^n \left[x^n (x - s)^n\right]}{dx^n}$$

и

$$F(y) = \frac{1}{(m+1)\dots 2m} \frac{d^m \left[y^m (y - \sigma^m)\right]}{dy^m},$$

которые в зависимости от выбранных значений n и m обеспечивают соответствующую точность вычисления.

В конце диссертации Миндинг приводит несколько приближенных значений рассматриваемых интегралов, не излагая процесса их вычисления. Анализ диссертации Миндинга указывает на ее тесную связь с рассмотренной работой Якоби. По существу, в своей первой научной работе Миндинг распространил принадлежащий Якоби метод приближенного вычисления определенного интеграла на интегралы двойные, в чем достиг определенного успеха.

В 1830 г. диссертация Миндинга с небольшими изменениями была напечатана в шестом томе журнала Крелле [4].

Результатом педагогической деятельности Миндинга этого периода явилось двухтомное учебное пособие, первый том которого содержал дифференциальное и интегральное исчисление с приложением к геометрии [22]. Оно было написано по просьбе слушателей Высшей строительной школы в Берлине; однако по объему материала книга далеко выходила за рамки курса этой школы и могла оказаться полезной для многих других читателей [22, стр. V].

Первый том пособия состоит из двух обширных разделов: дифференциального исчисления с приложением к геометрии и интегрального исчисления, включающего приложения к геометрии, а также интегрирование дифференциальных уравнений.

Основное содержание дифференциального исчисления автор усматривает в учении о производной, которую определяет несколько эклектически. Сначала Миндинг трактует производную как «значение известного отношения

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k},$$

члены которого становятся оба нулями», рассматривая, естественно, при этом только непрерывные функции, для которых при $k=0$ приращение $f(x+k)-f(x)$ тоже равно нулю. На конкретном примере линейной функции $f(x)=ax+b$ автор показывает, что отношение нулей приводит к вполне определенной величине равной для данной функции коэффициенту a.

Далее Миндинг уточняет предложенное выше определение, вводя понятие бесконечно малой и предела, в чем приближается к Коши. Прежде всего автор отмечает, что если k «все время приближается к нулю, чем дальше, тем больше, однако, не совпадая с ним, и разность $f(x+k)-f(x)$ также делается меньше любой наперед заданной величины, их отношение приводится к вполне определенной границе, не зависящей от k». Это граничное значение автор и называет производной, которую обозначает через $f'(x)$. Однако в дальнейшем, в целях удобного практического применения введенного понятия, автор полностью разделяет точку зрения Лакруа [4, стр. 231—236] и трактует производную как предел отношения $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, где $\Delta x=k$, $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, который достигается при $\Delta x=0$. Именно этим руководствуется автор и при выводе общих правил дифференцирования, считая бесконечно малые достигнувшими своего «предела уменьшения», т. е. нуля.

В конце § 3 автор дает еще одно толкование производной, рассматривая ее как отношение дифференциалов $df(x)$ и dx: $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$, при определении которых соблюдает известную строгость. Миндинг отмечает, что дифференциал функции не равен приращению функции, употребляя для их обозначения разные символы $df(x)$ и $\Delta f(x)$; однако они сближаются по мере их уменьшения. Иначе: «дифференциал функции есть соответствующее приращение функции в ее исчезновении» [22, стр. 5]. В этом вопросе Миндинг стоит на позициях Лейбница, определявшего дифференциалы как бесконечно малые разности и основавшего на этом дифференциальное исчисление.

В дальнейшем Миндинг показывает, что данное им определение дифференциала функции совпадает с тем, к которому можно прийти при помощи ряда Тейлора

$$f(x+k)-f(x)=f'(x)k+\frac{k^2}{2!}f''(x)+\cdots,$$

приняв за дифференциал, «первый член этого разложения», как это делал Лагранж.

При введении производных высшего порядка Миндинг также не ограничивается одним определением, а предлагает несколько эквивалентных толкований. Во-первых, по аналогии с определением, данным в учебнике Лакруа [145], он вводит вторую производную как определенное значение отношения $\frac{f'(x+k)-f'(x)}{k}$ при $k=0$ и обозначает ее через $f''(x)$. Чтобы получить производную из первоначальной функции $f(x)$, автор вводит понятие конечных разностей второго порядка

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

и определяет искомую производную как результат отношения $\frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}$ при «исчезающем» Δx, откуда получает второе определение и обозначение

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

После введения производных и дифференциалов Миндинг по установившейся традиции учебников того времени выводит формулу Тейлора и дает разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций с приложением к приближенным вычислениям. Между прочим, вывод формулы Тейлора автор проводит по Амперу, формально, путем последовательного дифференцирования по x выражения

$$f(z) = f(x) + Q(z-x).$$

При этом остаточный член им устанавливается как в форме Лагранжа [147], так и в форме Коши [101], учебниками которых Миндинг руководствовался при создании своего пособия. При разложении в ряд Тейлора элементарных функций Миндинг в каждом отдельном случае тщательно исследует вопросы сходимости получаемых рядов.

Дальнейшие страницы пособия освещают вопросы дифференциального исчисления функций нескольких переменных до формулы Тейлора для функции двух независимых переменных включительно. Весь этот материал, как и предыдущий, изложен с достаточной ясностью и снабжен большим количеством конкретных примеров. Используя формулу Тейлора, Миндинг устанавливает правило Лопиталя раскрытия самых разнообразных неопределенностей и дает широкое приложение дифференциального исчисления к исследованию функций на экстремум, к исследованию возрастания и убывания функций, устанавливает формулы для отыскания кривизны как для плоских, так и для пространственных кривых.

Большое место в этом разделе Миндинг отводит решению алгебраических уравнений (§§ 51—66), подробно излагая вопросы отделения и вычисления корней и сопровождая теорию большим количеством детально разобранных примеров. Вся эта алгебраическая часть довольно близко примыкает к известной монографии Фурье [124], которую, очевидно, Миндинг использовал при написании этой главы.

Вторая часть книги, посвященная интегральному исчислению, по своей простоте и ясности может быть отнесена к числу лучших пособий по данному предмету из написанных в первой половине XIX в. В первых параграфах этой части автор вводит понятие неопределенного интеграла как семейства первообразных, после чего путем логических рассуждений устанавливает формулу Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx = \psi(x_1) - \psi(a),$$

где $\psi(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Выражение, стоящее в левой части формулы, Миндинг называет определенным интегралом. Однако он не останавливается на определении интегрирования как действия, обратного дифференцированию, а идет дальше и, приближаясь к определению Коши, вводит понятие определенного интеграла как предела соответствующей интегральной суммы. Особенно ценным здесь является установление условий, при которых существует конечное значение определенного интеграла, на что редко обращали внимание авторы подобных учебников того времени.

Не будем останавливаться на рассмотрении всех методов вычисления интегралов, изложенных Миндингом. Отметим лишь, что при интегрировании алгебраических иррациональностей большое внимание уделено подстановкам Эйлера; при интегрировании тригонометрических и показательных функций широко использованы бесконечные степенные ряды. Дальнейшие главы руководства посвящены приложению интегрального исчисления к различным задачам геометрии: вычислению площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, длин дуг. В заключение Миндингом изложены два приема приближенного вычисления определенного интеграла, из которых он отдает предпочтение методу Якоби, опубликованному в первом томе журнала Крелле [131]. Как сообщал Миндинг в предисловии, при составлении своего руководства он неоднократно пользовался советами Дирихле, по рекомендации которого, в частности, включил в свой курс понятие и свойства гамма-функций.

Последние два раздела этого обширного руководства посвящены интегрированию дифференциальных уравнений и вариационному исчислению. В главе об интегрировании дифференциальных уравнений Миндинг ограничился рассмотрением простых случаев, отсылая читателя к учебнику Лакруа. Миндингом рассмотрены дифференциальные уравнения первого порядка и очень коротко линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

В вариационном исчислении Миндинг, по его словам, отказался от известной всеобщности, которая начинающему читателю кажется несущественной, и приложил усилия к изложению этого вопроса во всей краткости и возможной ясности, в чем он несомненно преуспел. Особенно подробно им освещен вопрос о кривых наименьшей кривизны.

Таким образом, руководство Миндинга имело широкий диапазон — от дифференциального исчисления до основ вариационного исчисления — и было связано единством и последовательностью изложения. Богатство содержания курса Миндинга в соединении с простотой, ясностью и доступностью изложения составляют его главное достоинство.

Весьма полезным добавлением к учебнику Миндинга явился изданный им в 1849 г. «Сборник таблиц интегралов» [39]. За основу составления этих таблиц Миндинг, по его словам, взял опубликованное в 1810 г. «первое собрание формул интегралов Мейера Хирша, которое очень быстро разошлось» [39, стр. 1]. При изложении своих формул Миндинг сохранил обоснованную Хиршем идею постепенного перехода от более простых таблиц к более сложным, но вместе с тем ввел ряд существенных изменений в план построения таблиц.

Сборник таблиц Миндинга состоит из пяти неодинаковых по объему частей. Почти половину книги (85 страниц из 186) занимают таблицы интегралов рациональных функций, а именно таблицы интегралов вида $\int \frac{x^m}{X^\mu} dx$, где μ — число положительное, m — любое целое число, X — многочлен произвольной степени. При составлении этой части автор руководствовался одним из двух следующих принципов. Перед некоторыми группами родственных таблиц Миндинг дает сначала соответствующую общую формулу, а затем предлагает ее частные случаи. Так, например, перед табл. 1—6 автором приведена самая общая формула для интегралов вида $\int \frac{x^m}{X^\mu} dx$, где $X = a + bx$, m — целое положительное, а μ — натуральное число. После этого приводится общая формула для частного случая $m = 0$, т. е. для интеграла $\int \frac{dx}{X^\mu}$, а затем конкретизируется для различных значений μ. Далее дается общая формула для интегралов $\int \frac{xdx}{X^\mu}$ и конкретизируется для различных значений μ и так далее.

По такому же принципу — от общего вида к частным случаям — построены таблицы интегралов 7—8, (в которых предложены интегралы вида $\int \frac{dx}{x^m X^\mu}$, где X, m, μ имеют прежние значения).

В основе составления последующих таблиц первой части лежит другой принцип, а именно переход от возможных частных случаев к более общим, а от них к общей формуле. Так, табл. 14 посвящена интегралам $\int \frac{dx}{X^{\mu+1}}$, где $X = a + bx^2$, μ — целое положительное число; в табл. 15 рассмотрены интегралы $\int \frac{x^{2m}dx}{X^{\mu+1}}$ и так далее до табл. 20, где приводится общая формула для интегралов вида $\int \frac{x^{2m}dx}{X^{\mu+1}}$.

По этому же принципу построены таблицы интегралов

$$\int \frac{x^m dx}{X^\mu} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x^m X^\mu},$$

где m — целое положительное число, μ — натуральное, а

$$X = a + bx^2 \qquad \text{(табл. 14—26)},$$
$$X = a + bx^3 \qquad \text{(табл. 27—36)},$$
$$X = a + bx^4 \qquad \text{(табл. 37—42)}$$

и так далее до табл. 74, в которой X — многочлен произвольной степени.

Второй части таблиц, посвященной интегрированию алгебраических иррациональностей, предшествует доказанная Миндингом теорема о том, что всякий интеграл $\int \varphi(x) X^{m+\mu} dx$, где $\varphi(x)$ — рациональная функция, X — многочлен n-й степени от x, m — любое целое число, а μ — число рациональное, всегда можно свести к интегралам вида

$$\int vX^{\mu} dx \text{ и } \int \frac{X^{\mu}}{x-a} dx,$$

где v — многочлен не выше $(n-2)$-й степени от x, a — постоянное число, не являющееся корнем уравнения $X = 0$.

Данная теорема позволила Миндингу ограничиться таблицами интегралов вида $\int x^m X^{\mu} dx$ и $\int \frac{x^m dx}{X^{\mu+1}}$, где m — число натуральное, μ — положительная дробь, а X — многочлен произвольной степени.

Третью часть Миндинг отводит интегралам показательных и тригонометрических функций, причем основное внимание уделяется интегралам вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$.

Замечательным новшеством таблиц Миндинга явилось введение эллиптических (часть 5) и гамма-функций (часть 4). Источниками для составления четвертой части сборника явились работа Дирихле, опубликованная в 15-м томе журнала Крелле [113], и курс Лежандра [149], в котором впервые интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$ был обозначен через $\Gamma(a)$. Особенно большое значение Миндинг придавал гамма-функциям, поскольку к ним могут быть сведены многие интегралы. Поэтому в 4-й части автор довольно подробно изложил свойства этих трансцендентных функций.

Последнюю часть таблиц Миндинг полностью составил на основе первого тома упомянутого курса Лежандра [149], посвященного эллиптическим функциям.

Таблицы интегралов Миндинга обладают целым рядом достоинств, делающих их весьма удобными в употреблении. Во-первых, почти все приведенные в таблицах интегралы вычислены до конца и нет необходимости в ссылках одной таблицы на другие. Во-вторых, таблицы интегралов весьма компактны, так как автор не дает таких интегралов, которые элементарными подстановками сводятся к более простым, как например интеграл $\int \frac{xdx}{a+bx^4}$ к интегралу $\frac{1}{2}\int \frac{dy}{a+by^2}$. И, наконец, несомненным достоинством таблиц Миндинга является наличие в них таблиц эллиптических и гамма-функций.

Таблицы Миндинга уже после Великой Октябрьской революции были высоко оценены академиками А. А. Марковым, В. А. Стекловым, А. Н. Крыловым, причем последний в 1932 г. даже предпринимал попытки к их переизданию [74] (см. стр. 57). Все это позволяет утверждать, что сборник таблиц интегралов Миндинга не потерял интереса и в наши дни.

В 1858 г. в «Архиве» Грунерта была опубликована еще одна статья Миндинга, относящаяся к интегральному исчислению и посвященная вычислению несобственного интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n} dx$ при различных целых значениях показателей m и n [44]. Конечный результат этого исследования заключается в выводе формул, позволяющих вычислять указанный интеграл при четных и нечетных значениях m и n. Основные этапы работы следующие.

Во-первых, используя одно из свойств гамма-функции, а именно

$$\int\limits_0^\infty e^{-xy}y^{n-1}dy = \frac{\Gamma(n)}{x^n},$$

---

[74] ААН (М), ф. 383, оп. 1, № 4, лл. 5—6.

Миндинг сводит заданный интеграл к интегралу вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty \sin^m x dx \int\limits_0^\infty e^{-xy} y^{n-1} dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty y^{n-1} dy \int\limits_0^\infty e^{-xy} \sin^m x dx.$$

Второй этап доказательства состоит в сведении степенной функции от $\sin x$ к комбинации линейных функций от $\sin x$ и $\cos x$. Это сведение осуществляется посредством известных формул тригонометрии:

$$\sin^m x = \varepsilon\,[\cos mx - m\cos(m-2)x + C_m^2 \cos(m-4)x - \dots$$

$$\dots + (-1)^{m'} \frac{1}{2} C_m^{m'}]$$

для m — четного и

$$\sin^m x = \varepsilon[\sin mx - m\sin(m-2)x + C_m^2 \sin(m-4)x - \dots$$

$$\dots + (-1)^{m'} C_m^{m'} \sin x]$$

для m — нечетного, где m' — наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{m}{2}$, и $\varepsilon = \frac{(-1)^{m'}}{2^{m-1}}$.

На основании последних формул интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-xy} \sin^m x dx$, в зависимости от четности m, распадается на сумму интегралов вида

$$\int\limits_0^\infty e^{-xy} \cos ax dx = \frac{y}{a^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty e^{-xy} \sin ax dx = \frac{a}{a^2 + y^2}.$$

Итак, искомый интеграл для четного m будет иметь вид

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^{\iota}}\,dx = \frac{\varepsilon}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty Y dy,$$

где

$$Y = \frac{y^n}{m^2 + y^2} - \frac{my^n}{(m-2)^2 + y^2} + \frac{C_m^2 y^n}{(m-4)^2 + y^2} + \dots +$$

$$+ (-1)^{m'} \frac{1}{2} C_m^{m'} y^{n-2},$$

и для m — нечетного

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\,dx = \frac{\varepsilon}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty Y_1 dy,$$

где

$$Y_1 = \frac{my^{n-1}}{m^2+y^2} - \frac{m\,(m-2)\,y^{n-1}}{(m-2)^2+y^2} + \frac{C_m^2\,(m-4)\,y^{n-1}}{(m-4)^2+y^2} - \dots +$$

$$\dots + \frac{(-1)^{m'}C_m^{m'}y^{n-1}}{1+y^2}.$$

Дальнейшие выкладки посвящены интегрированию функций Ydy и Y_1dy, что привело Миндинга к установлению четырех формул (в зависимости от четности m и n) для вычисления заданного интеграла.

Вычислим, например, интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx$.

Здесь $m=6$ и $n=4$ — числа четные. Для этого случая имеет место формула

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}\pi}{2^m\Gamma(n)}\,f\,(m;\,n-1),$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx = -\frac{\pi}{2^6\Gamma(4)}\,f\,(6;\,3).$$

Так как $\Gamma(4)=3\,!=6$, а

$$f\,(m;\ n-1) = m^{n-1} - m\,(m-2)^{n-1} + C_m^2\,(m-4)^{n-1} - \dots +$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}-1}\cdot C_m^{\frac{m}{2}-1}2^{n-1},$$

получаем

$$f\,(6;\,3) = 6^3 - 6\,(6-2)^3 + C_6^2\,(6-4)^3 = -48.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, рассмотренная работа Миндинга является отличным дополнением для его таблиц интегралов [39] и представляет интерес и для нашего времени.

Глава 13

ТРУДЫ ПО АЛГЕБРЕ

Ценный вклад был внесен Миндингом и в решение одного из вопросов алгебры — проблемы исключения.

Вопросами исключения неизвестных до Миндинга, занимались многие математики. В 1720 г. Маклорен в «Органической геометрии» [157] сформулировал теорему о том, что две кривые порядка m и n всегда могут пересекаться не более чем в mn точках. Л. Эйлер в 1748 г. придал этой теореме следующий вид: «Две кривые порядка m и n всегда пересекаются в mn точках, если учесть бесконечно удаленные и мнимые точки» [121]. Однако исчерпывающего доказательства этой теоремы ими не было дано. В 19-й главе 2-го тома «Введения в анализ» [284] Эйлер не только формулирует указанную теорему, получившую затем имя Безу, но и излагает два метода исключения одного неизвестного из системы двух уравнений с двумя неизвестными. В одном из этих методов Эйлер впервые образует результант с помощью симметрических функций.

Спустя два года Крамер также делает попытку доказать эту теорему Безу [106]. Подобно Эйлеру, Крамер определяет результант относительно x как произведение разностей корней уравнений, разрешенных относительно y. Используя затем симметрические функции, Крамер устанавливает свое правило отыскания результанта.

Э. Безу в «Курсе математики для гардемаринов» [86] впервые дает доказательство теоремы о числе общих решений двух уравнений высших степеней и совершенствует метод исключения Эйлера. Впоследствии Безу разрабатывает другой метод исключения неизвестного из системы уравнений высших степеней и устанавливает важную теорему о том, что исключение всех неизвестных, кроме одной, из m уравнений, имеющих степени $n_1, n_2, \ldots, n_m$, с m неизвестными приводит к конечному уравнению, степень которого относительно оставшегося неизвестного не выше произведения $n_1 n_2, \ldots, n_m$ [87].

Исчерпывающее доказательство этой теоремы было дано в 1804 г. Пуассоном [171]. Опираясь на теорию симметрических функций и исследования Вандермонда и Крамера, Пуассон предлагает такой метод отыскания резольвенты, который позволяет для двух уравнений с двумя неизвестными составлять результант, дающий сразу обе неизвестные.

Исследования Эйлера, Безу и Пуассона послужили отправным моментом для дальнейших исследований по данному вопросу. Так, Лиувилль распространяет метод Пуассона на случай многих неизвестных, Кэли делает попытку распространить второй метод Эйлера исключения одной переменной из системы двух уравнений на систему уравнений со многими неизвестными [100]. Несколько раньше Лабати предложил метод исключения при помощи общего наибольшего делителя [144], что явилось важной вехой на пути к решению проблемы исключения.

Теорема Безу, которая давала лишь верхнюю границу степени результирующего уравнения, не определяла эту границу точно. К. Бирман в 1960 г. отмечал, что «Миндинг устранил этот недостаток остроумным исследованием, результат которого позволяет простым вычислением определить искомую степень конечного уравнения» [89, стр. 8]. Миндинга интересовал не прием отыскания результирующего уравнения, а его точная степень. Применяя ньютоновские разложения в ряды, он установил очень простое правило, по которому всегда можно точно определить степень конечного уравнения, получаемого в результате исключения одной переменной.

Первая работа Миндинга, посвященная алгебре «Об определении степени уравнения, полученного в результате исключения», была опубликована в 1841 г. в 22-м томе журнала Крелле [29].

В предисловии к своей работе Миндинг отмечал, что ему известны разные способы отыскания уравнения, получаемого при исключении одной неизвестной из двух уравнений с двумя неизвестными. Цель исследований автора: отыскать степень конечного уравнения, не составляя его. Для решения данного вопроса Миндинг использовал начало наибольших показателей — способ определять последовательные члены разложения алгебраических функций в бесконечные ряды по убывающим степеням переменного начиная с члена с высшим показателем. Как известно, этот прием берет начало от Ньютона. Потом он применялся многими исследователями в самых различных целях. Например, Лиувилль применял этот прием для вывода различных теорем теории симметрических функций, Пюизе — для решения вопроса о том, как распределяются алгебраические функции около точек разветвления полюсов и для решения вопроса о подразделении алгебраических функций на группы и подгруппы.

Применяя начало наибольших показателей, Миндинг при этом ссылается на Лакруа [145], который изложил в своем курсе аналитический способ наибольших показателей Лагранжа [146]. . Сущность метода состоит в следующем.

Пусть имеем какое-нибудь уравнение, связывающее x и y: $f(x, y)=0$. Обозначим через (x, α) многочлен степени α относительно x. Будем иметь:

$$(x, \alpha)\, y^{m}+(x, \alpha_1)\, y^{m_1}+\ldots+(x, \alpha_i)\, y^{m_i}+(x, \alpha_{i+1})=0.$$

Обозначив через ax^{λ} старший член разложения функции y в ряд по убывающим степеням переменной x, получим

$$(x, \alpha)\, a^{m} x^{\lambda m}+(x, \alpha_1)\, a^{m_1} x^{\lambda m_1}+\ldots+(x, \alpha_i)\, a^{m_i} x^{\lambda m_i}+$$
$$+(x, \alpha_{i+1})=0.$$

Будем считать x очень большим, тогда можно пренебречь низшими степенями x, сохранив лишь высшие члены. Высшими показателями x в различных членах будут

$$m\lambda+\alpha;\ m_1\lambda+\alpha_1, \ldots, m_i\lambda+\alpha_1. \tag{50}$$

Сравнив эти показатели между собой, получим ряд уравнений:

$$m\lambda+\alpha=m_1\lambda+\alpha_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m\lambda+\alpha=m_i\lambda+\alpha_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_k\lambda+\alpha_k=m_i\lambda+\alpha_i.$$

Решив эту систему уравнений, получим целую серию значений λ: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$. Найденные значения подставим затем в ряд (50). Те значения, которые обращают соответствующие разные величины ряда (50) в наибольшие, оставляем, а остальные отбрасываем. Данные значения λ и будут являться старшими показателями первых членов разложения алгебраических функций в ряд по убывающим степеням переменной x.

Для отыскания коэффициента a приравниваем слагаемые, содержащие переменную x в наивысшей степени, и из этого уравнения находим все величины a для старшего члена разложения. Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2y^3 - (3x^2 + 1)y^2 + xy + x^4 + 1 = 0.$$

Обозначив $[y] = ax^\lambda$, получим

$$f(x) = x^2a^3x^{3\lambda} - 3x^3a^2x^{2\lambda} - a^2x^{2\lambda} + xax^\lambda + x^4 + 1 = 0.$$

Показатели старших членов уравнения имеют вид:

$$3\lambda + 2;\ 2\lambda + 3;\ \lambda + 1;\ 4.$$

Сравнив эти показатели, получаем уравнения

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2 &= 2\lambda + 3, & 2\lambda + 3 &= \lambda + 1,\\ 3\lambda + 2 &= \lambda + 1, & 2\lambda + 3 &= 4,\\ 3\lambda + 2 &= 4, & \lambda + 1 &= 4, \end{aligned}$$

которые дают следующие решения:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -\frac{1}{2};\ \lambda_3 = \frac{2}{3};\ \lambda_4 = -2;\ \lambda_5 = \frac{1}{2};\ \lambda_6 = 3.$$

Результаты подстановки найденных значений λ в ряд (50) запишем в следующем виде (табл. 1).

Таблица 1

λ	1	−1/2	2/3	1/2	3
$3\lambda + 2$	⑤	1/2	4	$3^1/_2$	11
$2\lambda + 3$	⑤	2	$4^1/_3$	④	9
$\lambda + 1$	2	1/2	$1^2/_3$	2	4
4	4	4	4	④	4

Из табл. 1 видно, что $\lambda = 1$ и $\lambda = {}^1/_2$ обращают соответствующие равные величины в наибольшие ($5 = 5$, $4 = 4$). Итак, остаются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1/2$, откуда

$$[y] = ax \quad \text{и} \quad [y] = ax^{1/2}.$$

Для отыскания коэффициента a подставляем $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1/2$ в выражение $f(x)$:

$$f(x) = a^3x^5 - 3a^2x^5 - a^2x^2 + ax^2 + x^4 + 1$$

и

$$f(x) = a^3x^{7/2} - 3a^2x^4 - a^2x + ax^{3/2} + x^4 + 1.$$

Приравнивая слагаемые с одинаковыми показателями, получаем: $a^3 - 3a^2 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 3$; $-3a^2 + 1 = 0$;

$$a_{3,4} = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Итак,} \quad [y_2] = 3x; \ [y_3] = \frac{1}{\sqrt{3}} x^{1/2}; \quad [y_4] = -\frac{1}{\sqrt{3}} x^{1/2}.$$

Используя способ наибольших показателей, Миндинг, по замечанию Ш. Эрмита, «вывел в высшей степени интересный прием, дающий возможность точно получать степень уравнения, получающегося в результате исключения одного неизвестного из двух алгебраических уравнений, связывающих x и y» [282, стр. 265].

Рассмотрим два уравнения:

$$f(x, y) = A_0y^m + A_1y^{m-1} + \ldots + A_{m-1}y + A_m = 0 \qquad (51)$$

$$\varphi(x, y_1) = B_0y^n + B_1y^{n-1} + \ldots + B_{n-1}y + B_n = 0, \qquad (52)$$

где коэффициенты A и B представляют собой целые полиномы от x. Если уравнение (52) решить относительно y и обозначить его корни через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то выражение

$$\psi(x) = B_0^m P = 0, \qquad (53)$$

где

$$P = f(x, y_1) f(x_1, y_2) \ldots f(x_1, y_n), \qquad (54)$$

по утверждению Миндинга, и является конечным.

Как известно, Пуассон представлял результирующее уравнение в виде произведения разностей корней исходных уравнений. В самом деле, если обозначить через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ корни уравнения (52), а через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — корни второго уравнения, то конечное уравнение будет иметь вид:

$$U(x) = (y_1 - \eta_1) \ldots (y_1 - \eta_m)(y_2 - \eta_1) \ldots (y_2 - \eta_m) \ldots \\ (y_n - \eta_1) \ldots (y_n - \eta_m). \qquad (55)$$

Легко убедится, что уравнение (53) равносильно уравнению (55). В самом деле, уравнениям (51) и (52) можно придать вид:

$$f(x, y) = A_0(y - \eta_1) \ldots (y - \eta_m),$$
$$\varphi(x, y) = B_0(y - y_1) \ldots (y - y_n),$$

после чего легко найти выражения $f(x, y_i)$ $(i = 1;\ 2; \ldots n)$:

$$f(x, y_1) = A_0(y_1 - \eta_1) \ldots (y_1 - \eta_m),$$
$$f(x, y_2) = A_0(y_2 - \eta_1) \ldots (y_2 - \eta_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x; y_n) = A_0(y_n - \eta_1) \ldots (y_n - \eta_m).$$

Перемножив эти выражения, получим:

$$f(x, y_1) f(x, y_2) \ldots f(x, y_n) = A_0^n U(x)$$

или

$$P = A_0^n U(x).$$

Отсюда имеем

$$B_0^m P = A_0^n B_0^m U(x) = \psi(x).$$

Итак, конечное уравнение у Миндинга имеет вид:

$$\psi(x) = B_0^m f(x, y_1) \ldots f(x, y_n). \qquad (56)$$

Дальнейшая задача состоит в определении степени данного уравнения. Для этого Миндинг и применяет начало наибольших показателей. Автор разлагает корни $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (52) по убывающим степеням x и заменяет эти корни их разложениями в ряды в выражении (56).

Так как Миндинг отыскивает только степень уравнения, то он заменяет каждый ряд одним его старшим членом:

$$[y_1] = C_1 x^{h_1};\quad [y_2] = C_2 x^{h_2};\quad \ldots;\quad [y_n] = C_n x^{h_n}.$$

Используя начало наибольших показателей, можно найти наивысшие показатели $h_1, h_2, \ldots, h_n$. После этого уже нетрудно определить наибольший показатель x в каждой из функций

$$f(x,\ y_1) = f(x, C_1 x^{h_1});\ \ldots;\ f(x,\ y_n) = f(x,\ C_n x^{h_n}),$$

входящих в конечное уравнение (56), т. е. числа $k_1\ k_2, \ldots, k_n$. Эти показатели степени, как замечает Миндинг, могут быть целыми или дробными, но не отрицательными.

Если теперь обозначить через b степень многочлена B_0, то очевидно, что наивысший показатель степени конечного уравнения (56) будет равен

$$mb + k_1 + k_1 + \ldots + k_n. \tag{57}$$

В заключение автор приводит пример уравнений (51) и (52):

$$f(x,\ y) = x^2y^4 + x^2y^3 + x^4y^2 + x^5y + x^5 = 0,$$
$$\varphi(x,\ y) = x^8y^5 + x^6y^4 + x^9y^3 + x^4y^2 + x^3y + x^4 = 0.$$

Здесь первое уравнение имеет шестую степень, а второе — тринадцатую. По теореме Безу, степень конечного уравнения не будет превосходить числа $6 \cdot 13 = 78$. Однако, согласно результату Миндинга, эта степень далеко не достигает своей границы и равна 58. Докажем это. Из уравнения (52) имеем $B_0 = x^8$, $n = 5$. Разложим корни данного уравнения y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 по убывающим степеням x. Обозначим через $[y_1] = C_1 x^{h_1}$ старший член разложения y_1 в ряд по убывающим степеням x. Аналогично введем

$$[y_2] = C_2 x^{h_2};\quad [y_3] = C_3 x^{h_3};\quad [y_4] = C_4 x^{h_4};\quad [y_5] = C_5 x^{h_5}.$$

Используя начало наибольших показателей, получим:

$$\varphi(x;\ y) = x^8cx^{5h} + x^6cx^{4h} + x^9cx^{3h} + x^4cx^{2h} + x^3cx^h + x^4,$$

откуда получается ряд чисел: $8+5h$; $6+4h$; $9+3h$; $4+2h$; $3+h$; 4. Составляем систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} 8+5h=6+4h, & 6+4h=4, \\ 8+5h=9+3h, & 9+3h=4+2h, \\ 8+5h=4+2h, & 9+3h=3+h, \\ 8+5h=3+h, & 9+3h=4, \\ 8+5h=4, & 4+2h=3+h, \\ 6+4h=9+3h, & 4+2h=4, \\ 6+4h=4+2h, & 3+h=4. \\ 6+4h=3+h, & \end{array}$$

Решая эту систему, получим: $h=-2, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, 3, -1, -\frac{1}{2}, -5, -3, -\frac{5}{3}, 0, 1$.

Результаты подстановки найденных значений h в ряд: $8+5h$; $6+4h$; $9+3h$; $4+2h$; $3+h$; 4, запишем в следующем виде (табл. 2).

Таблица 2

h	-2	$\textcircled{1/2}$	3	1	$\textcircled{-5/3}$
$8+5h$	-2	$\textcircled{21/2}$	23	13	$-1/3$
$6+4h$	-2	8	18	10	$-2/3$
$9+3h$	3	$\textcircled{21/2}$	18	12	④
$4+2h$	0	5	10	6	$2/3$
$3+h$	1	$7/2$	6	4	$4/3$
4	4	4	4	4	④

Итак, $h_1=\frac{1}{2}=h_2$, $h_3=h_4=h_5=-5/3$. Далее определяем наибольший показатель x в каждой из функций $f(x, y_i)=f(x, C_i x^{h_i})$. Имеем:

$$f(x, y)=x^2y^4+x^2y^3+x^4y^2+x^5y+x^5.$$

При $[y]=Cx^{1/2}$ получаем показатели: 4; $\frac{7}{2}$; 5; $\frac{11}{2}$; 5, т. е. $k_1=\frac{11}{2}=k_2$.

При $[y]=Cx^{-5/3}$ получаем: $-\frac{14}{3}$, -3, $\frac{2}{3}$, 4, 5, т. е. $k_3=k_4=k_5=5$.

Подставив в формулу (57), получим: $mb+k_1+$ $+k_2+k_3+k_4+k_5=4\cdot 8+2\cdot\frac{11}{2}+3\cdot 5=58$.

Миндинг отмечал, что уже после окончания статьи он узнал об «Алгебре» доктора Финка, в которой автор давал правило отыскания точной степени конечного уравнения для одного частного случая: все коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m$ уравнения (51) имеют одинаковую степень m_1 относительно x, а коэффициенты $B_0, B_1, \ldots, B_n$ уравнения (52) — степень n_1. Для этого случая Финк предлагает формулу mn_1+nm_1, вывод которой он делает на двух страницах своего учебника. Используя метод Миндинга, можно получить указанную формулу Финка буквально в несколько строк: $h_1=h_2=\ldots=h_i=0$; $k_1=k_2=\ldots=k_n=m_1$; $b=n_1$, откуда $mb+k_1+\ldots$ $\ldots+k_n=mn_1+nm_1$, так как $k_1+k_2+\ldots+k_n=n$.

Как только работа Миндинга появилась в печати, она сразу же привлекла к себе внимание такого знатока проблемы исключения, как Лиувилль, который в том же 1841 г. перевел эту работу на французский язык и опубликовал в своем журнале [29]. Это свидетельствует о высокой оценке этой работы Лиувиллем.

Два года спустя эта же работа Миндинга стала предметом критики со стороны Л. И. Магнуса, опубликовавшего свое возражение на страницах 26-го тома журнала Крелле [158]. В своей критической статье «О методе определять степень уравнения, полученного при исключении», доктор Магнус в очень сжатой форме излагает сущность работы Миндинга. Прежде всего он отмечает, что согласен с утверждением Миндинга о том, что если имеем два уравнения (51) и (52):

$$f(x, y)=A_0y^m+\ldots+A_m=0,$$
$$\varphi(x, y)=B_0y^n+\ldots+B_n=0,$$

в которых A и B — целые полиномы от x, то уравнение (56)

$$\psi(x)=B_0^m f(x, y_1)\ldots f(x, y_n),$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — корни уравнения (52), будет результирующим. Далее Магнус соглашается и с тем, что корни уравнения (52) можно разложить по убывающим степеням x и заменить их в выражении (56) соответствующими рядами. Однако дальнейшие рассуждения Миндинга вызывают у Магнуса возражения. Так как Миндинга интересует только степень уравнения $\psi(x)$, то он заменяет каждый ряд только одним его старшим членом:

$$[y_1] = C_1 x^{h_1}, \ \ldots, \ [y_n] = C_n x^{h_n}$$

и, пользуясь началом наибольшего показателя, определяет наивысшие показатели $h_1, \ldots, h_n$. Магнус считает, что такая замена не всегда приводит к цели и что метод Миндинга, вообще говоря, не всегда дает правильный результат. Свое утверждение он иллюстрирует числовым примером:

$$f(x, y) = y^3 - (7x - 7) y^2 + (14x^2 - 30x + 7) y - 8x^3 + \\ + 20x^2 + 13x - 15 = 0,$$

$$\varphi(x, y) = y^2 - (6x - 4) y + 8x^2 - 12x + 5 = 0.$$

Очевидно, что здесь $B_0 = 1$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 3$.

Разлагая корни y_1 и y_2 уравнения $\varphi(x; y) = 0$ по убывающим степеням x и используя начало наибольшего показателя, Магнус находит, что $[y_1] = C_1 x^{h_1} = 2x$; $[y_2] = C_2 x^{h_2} = 4x$.

Подставляя затем эти выражения последовательно в уравнение $f(x, y) = 0$, Магнус получает полиномы второй степени: $f(x, y_1) = -12x^2 + 27x - 15$; $f(x, y_2) = 12x^2 + 41x - 15$, откуда $k_1 = k_2 = 2$.

Используя затем формулу Миндинга (57), Магнус определяет степень конечного уравнения: $mb + k_1 + k_2 = 4$.

Чтобы показать ошибочность полученного результата, Магнус далее из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ выражает y относительно x и подставляет его в уравнение $f(x, y) = 0$, в результате чего получает конечное уравнение в виде многочлена 3-й степени: $12x^3 - 63x^2 + 100x - 50 = 0$.

После этого, естественно, Магнус делает вывод о несостоятельности самого метода Миндинга.

Достойную отповедь Магнусу дал Миндинг в статье, опубликованной в очередном номере журнала Крелле [34]. Он доказал, что недоумение, возникшее у Магнуса при чтении его статьи [34], есть плод ее поверхностного изучения. В самом деле, после того как Миндинг устанавливает общее правило отыскания степени конечного уравнения без учета специальних соотношений, которые могут существовать между коэффициентами обоих предложенных уравнений, он останавливается на рассмотрении того самого специального случая, с которым встретился Магнус. Миндинг обращает внимание читателей на значение величин C_1, C_2, C_3, $\ldots$, C_n, которые могут оказаться такими, что коэффициенты при старших членах сомножителей $f(x, y_1)$, $\ldots$, $f(x, y_m)$, входящих в конечное уравнение $\psi(x)=0$, станут равными нулю.

В этом случае, замечает Миндинг, необходимо принять во внимание следующие члены рядов для y_1 y_2, y_3, $\ldots$, y_n.

Таким образом, в тех немногих строках, которые Магнус обошел своим вниманием, отчетливо указано средство, устраняющее возражение, выдвинутое Магнусом против метода Миндинга.

Но вернемся к примеру Магнуса. В силу особых значений $C_1=2$ и $C_2=4$ коэффициенты при высшей (третьей) степени x в выражениях $f(x, y_1)$ и $f(x, y_2)$ оказываются равными нулю. По этой причине, в соответствии с указанием Миндинга, следует учитывать не первый, а несколько последующих членов рядов:

$$y_1=2x-2+\ldots \text{ и } y_2=4x-2-\frac{1}{2}x+\ldots$$

В этом случае получаем

$$f(x, y_1)=-8x^2+\ldots \text{ и } f(x, y_2)=6x+\ldots,$$

откуда $k_1=2$ и $k_2=1$.

Итак, степень конечного уравнения будет равна не 4, как нашел Магнус, а $k_1+k_2=3$, как и вытекало из метода Миндинга.

Таким образом, возражение Магнуса оказалось несостоятельным и та «ошибка», которая была подмечена им в методе Миндинга, возникла в результате неправильного применения этого метода.

К вопросу исключения Миндинг возвратился еще раз в 1843 г. и представил 24 ноября 1843 г. Петербургской Академии наук доклад на тему «Разложение симметрического выражения для степени уравнения, полученного при исключении». В 1844 г. работа была опубликована [32] и в 1846 г. перепечатана в журнале Крелле [32].

В этой статье Миндинг дает другое правило отыскания степени результирующего уравнения. Оно отличается от первого тем, что предложенная формула для вычисления показателя степени содержит симметрично коэффициенты данных двух уравнений.

В самом деле, пусть имеем два уравнения:

$$f(x, y) = A_0 y^m + \ldots + A_m = 0, \tag{58}$$

$$\varphi(x, y) = B_0 y^n + \ldots + B_n = 0. \tag{59}$$

Обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ корни второго, а через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — корни первого из них. Тогда конечное уравнение, как следует из первой работы, имеет вид:

$$\psi(x) = A_0^n B_0^m U(x),$$

где

$$U(x) = (y_1 - \eta_1) \ldots (y_1 - \eta_m) \ldots (y_n - \eta_1) \ldots (y_n - \eta_m).$$

После этого Миндинг делает допущение о том, что корни уравнения (59) распределяются в i групп в зависимости от их различных кратностей, т. е. уравнение $\varphi(x, y) = 0$ имеет r_1 корней кратности h_1, r_2 корней кратности h_2, r_i корней кратности h_i. Аналогично корни уравнения $f(x, y) = 0$ распределяются в j групп: p_1 корней кратности ε_1, p_2 корней кратности ε_2 и, наконец p_j — кратности ε_j. Отсюда следует, что $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = n$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_j = m$.

Анализируя степень конечного уравнения, Миндинг устанавливает следующую теорему, позволяющую точно определять искомую степень. «Если расположить корни данных уравнений по убывающему порядку кратностей, то степень конечного уравнения $\psi(x) = 0$ получается путем перемножения кратности каждого корня (или ряда y, или ряда η) на число корней другого ряда, которые следуют за этим корнем в установленном порядке кратностей; при этом необходимо просуммировать произведения аналогичного вида для всех корней y и η, после чего к указанной сумме следует добавить число $na_0 + mb_0$, где a_0 и b_0 обозначают соответственно степени A_0 и B_0».

Эту довольно сложную теорему проиллюстрируем для случая, когда уравнение $\varphi(x, y) = 0$ имеет r_1, r_2, r_3 корней кратности $h_1 > h_2 > h_3$, а уравнение $f(x; y) = 0$ имеет

p_1, p_2, p_3, p_4 корней соответственно кратностей $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$.

Расположим корни по убывающему порядку кратностей, который будет, к примеру, следующим: $h_1 \geqslant \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > h_2 > h_3 \geqslant \varepsilon_3 > \varepsilon_4$ для корней r_1; p_1; p_2; r_2; r_3; p_3; p_4.

Тогда по теореме степень конечного уравнения будет определяться по формуле

$$g = r_1 h_1 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + (r_2 h_2 + r_3 h_3)(p_3 + p_4) + \\ + (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2)(r_2 + r_3) + (p_3 \varepsilon_3 + p_4 \varepsilon_4) \cdot 0 + n a_0 + m b_0,$$

где

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = m$$

и

$$g = n a_0 + m b_0 + r_1 h_1 m + (r_2 h_2 + r_3 h_3)(p_3 + p_4) + \\ + (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2)(r_2 + r_3).$$

Сформулированную и доказанную им теорему Миндинг поясняет на примере двух уравнений:

$$f(x, y) = x^6 y^8 + x^4 y^7 + x^9 y^6 + x^8 y^3 + x^7 y^2 + x^5 y + x^6 = 0,$$
$$\varphi(x, y) = x^3 y^7 + x^8 y^6 + x^4 y^5 + x^6 y^3 + x^5 y^2 + x^4 y + x^2 = 0.$$

Применяя сначала второй, затем первый метод, Миндинг устанавливает, что степень конечного уравнения будет равна 110.

Таким образом, во второй из рассмотренных нами работ Миндинг дает новое правило отыскания степени результанта, которое приводит к формуле, имеющей более симметричное выражение, чем в первом способе. В этом состоит теоретическое преимущество второго способа. Однако для численных приложений предпочтение следует отдать первому способу.

Тот факт, что обе работы Миндинга, относящиеся к теории исключения, были изданы на двух языках (немецком и французском) и тот интерес, который проявил к этим исследованиям Ж. Лиувилль, свидетельствуют о несомненной научной ценности исследований Миндинга, внесшего существенный вклад в ту классическую область алгебры, в которой работали такие выдающиеся математики, как Эйлер, Безу, Пуассон.

Глава 14

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДРУГИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ В ТВОРЧЕСТВЕ МИНДИНГА

В области теории чисел перу Миндинга принадлежат учебник теории чисел «Начала высшей арифметики» [8], автореферат этой книги [7] и две статьи: «О законе образования числителей и знаменателей при обращении цепной дроби в обыкновенную» [55] и «Замечание о решении неопределенного уравнения второй степени» [6].

В первой по времени работе [6, 1831 г.] Миндинг доказывает, что если $A = b^2 - ac$ положительно и не равно квадрату целого числа и если $D < \frac{2}{3}\sqrt{A}$, то можно установить, будет ли уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm D$ разрешимо в целых числах, при помощи разложения корней уравнения $av^2 + 2bv + c = 0$ в непрерывную дробь, допускающую и отрицательные члены. По-видимому, это замечание возникло у Миндинга в связи с подготовкой его книги по теории чисел.

Другая небольшая статья, посвященная непрерывным дробям [55], была написана в 1872 г., через 38 лет после первой. Ее возникновение объяснил сам Миндинг. При применении известных формул для оптической системы линз ему пришлось иметь дело с непрерывными дробями и он получил формулу Эйлера для обращения цепной дроби в обыкновенную в форме, отличной от формы, в какой дал ее Эйлер в статье [119]. Гаусс в «Диоптрических исследованиях» [126] решал задачу об определении пути светового луча после $n+1$ преломлений. При этом он пришел к решению системы неопределенных уравнений с двумя неизвестными (записывая линейные уравнения луча до преломления и после преломления в каждой точке преломления) с помощью непрерывных дробей. Искомые неизвестные величины представляли собой числители и знаменатели подходящих дробей. Миндинг вернулся к этой работе Гаусса, использовал его обозначения и записал фокусное расстояние системы линз $-\frac{1}{k}$ с помощью цепной дроби:

$$k = (u^0 t' u' t'' u'' \ldots t^{(n-1)} u^{(n-1)} t^{(n)} u^{(n)}),$$

где $-\frac{1}{u^0}$, $-\frac{1}{u'}$, ..., $-\frac{1}{u^{(n)}}$ — фокусные расстояния $(n+1)$-й стеклянных линз, расположенных на одной общей оси, а t', t'', t''', ..., $t^{(n)}$ — расстояния второй главной точки каждой линзы от первой. Значения t', t'', t''' ... выражают расстояния между точками u^0 и u', u' и u'' и т. д. Поэтому $t'+t''$ — расстояние между u^0 и u'' и вообще $t^{(\mu+1)}+t^{(\mu+2)}+\ldots+t^{(\mu+\nu)}$ обозначает расстояние между $u^{(\mu)}$ и $u^{(\mu+\nu)}$. Тогда для записи величины k удобно следующее правило. Составим из $n+1$ элементов u произведения по одному, двум, трем и т. д. множителям любыми возможными способами, но без повторений, располагая множители в каждом произведении в порядке возрастания индексов, затем умножим каждое такое произведение на произведение соответствующих расстояний между элементами u, например, произведение $u'u''$ надо будет умножить на t'', а произведение $u'u'''$ — на $(t'+t'')$. Из всех таких произведений и получится при суммировании требуемая величина k. Например,

$$\begin{gathered}k=(u^0t'u't''u''t'''u''')=u^0+u'+u''+u'''+t'u^0u'+\\ +(t'+t'')u^0u''+(t'+t''+t''')u^0u'''+t''u'u''+\\ +(t''+t''')u'u'''+t'''u''u'''+t't''u^0u'u''+t'(t''+t''')u^0u'u'''+\\ +(t'+t'')t'''u^0u''u'''+t''t'''u'u''u'''+t't''t'''u^0u'u''u'''.\end{gathered}$$

Другая форма этого правила: можно записывать вместо $t'(t''+t''')u^0u'u'''$ выражение $u^0t'u'(t''+t''')u'''$; в таком виде оно лучше запоминается. В этом рассуждении предполагалось, что число элементов нечетное. В случае четного числа элементов надо выбрать из значения k только члены с множителем u^0; отбросив u^0, получим в сумме l: $l=(t'u't''u''\ldots t^{(n)}u^{(n)})$. Это выражение Миндинг записывает символически таким образом; $l=\frac{dk}{du^0}$; действительно, способ образования этого выражения напоминает способ составления производной. Из закона образования k у Миндинга сразу же, как и у Эйлера, следует теорема о том, что перестановка элементов не меняет значения k. Принцип составления k Миндинг переносит на произвольную непрерывную дробь

$$Q=a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a^3+\ldots}}}.$$

Объединяя вместе числители с нечетными, а затем с четными номерами (они играют роль u) и обозначая произведение $b_1b_3b_5\ldots b_{2n-1} = B_{2n-1}$ и произведение $b_2b_4\ldots b_{2n} = B_{2n}$, Миндинг получает непрерывную дробь в виде

$$Q = a + \cfrac{b_1}{\cfrac{a_1}{B_1} + \cfrac{1}{\cfrac{B_1a_2}{B_2} + \cfrac{1}{\cfrac{B_2a_3}{B_3} + \ldots}}}.$$

Миндинг указывает, что общий закон образования числителей и знаменателей непрерывной дроби дал Штерн в 10-м томе журнала Крелле. Далее он замечает, что это представление станет еще проще, если применить к нему метод Эйлера. Например, цепная дробь

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4}}}}$$

дает числитель $ab_2b_4 + a_2b_1b_4 + a_4b_1b_3 + aa_1a_2b_4 + aa_1a_4b_3 + aa_3a_4b_2 + a_2a_3a_4b_1 + aa_1a_2a_3a_4$, который можно записать в форме Эйлера следующим образом:

$$(aa_1a_2a_3a_4)\left\{1 + \frac{b_1}{aa_1} + \frac{b_2}{a_1a_2} + \frac{b_3}{a_2a_3} + \frac{b_4}{a_3a_4} + \frac{b_1b_2}{aa_1a_2a_3} + \right.$$
$$\left. + \frac{b_1b_4}{aa_1a_3a_4} + \frac{b_2b_4}{a_1a_2a_3a_4}\right\}.$$

В такой форме формулы для числителей непрерывных дробей при обращении их в обычные дроби приведены в книге Перрона [169, стр. 9] и названы там формулами Эйлера—Миндинга. Как указал сам Миндинг, формулы эти были найдены еще до его работы Штерном. Миндинга же интересовали не сами формулы, а необычный способ их получения — из задачи диоптрики и из свойств диоптрических величин.

Вновь обратились к этому вопросу в 1962 г. Я. А. Габович и А. Н. Хованский, указавшие, что нетрудно перенести формулы Миндинга на тернарные простые дроби [201].

Работа Миндинга показывает, какой сдвиг произошел в его взглядах на теорию чисел со времени написания им первых работ, где он рассматривал теорию чисел как совершенно абстрактную часть математики, не дающую непосредственно вспомогательных средств для приложений.

Взгляды Миндинга на теорию чисел и на ее связь с другими разделами математики выражены в его небольшой заметке — предварительном сообщении о выходе книги [7]. Миндинг писал, что число учебников по алгебре и геометрии все время растет, в то время как чистая арифметика находится в пренебрежении.

Ученик Гегеля, Миндинг считал, что наука не может быть ничем иным, как постоянным развитием понятий, лежащих в ее основе. Таким основным понятием для алгебры является число. Алгебра должна как можно больше искать и выделять отличительные признаки чисел, если она хочет охватить свой предмет как можно лучше. Поэтому Миндинг считал ненаучным и недопустимым при изучении математики оставлять в стороне теорию чисел как якобы ненужную и изолированную часть этой науки. Теория чисел — необходимая часть математики и без ущерба для целого ее нельзя оставлять в пренебрежении.

Основную причину пренебрежительного отношения к теории чисел Миндинг видел в том, что наиболее важной ученые считали прикладную математику, для которой теория чисел, по их мнению, не давала непосредственно вспомогательных средств. Миндинг в то время и сам не мог указать приложений теории чисел вне математики и был впоследствии обрадован, когда нашел такое приложение теории чисел в диоптрике (см. стр. 170).

При обучении, писал Миндинг, необходимо внедрить в сознание учащихся мысль, что математика имеет и самостоятельное научное значение. Эта цель может быть достигнута только с помощью логической строгости, составляющей отличие математической науки. Но как обстоит дело с этой строгостью при обучении алгебре, если первые основные теоремы — фундамент, на котором покоятся все алгебраические операции, часто принимают эмпирически, пренебрегая доказательствами, спрашивает Миндинг.

Например, довольствуются утверждением, что произведение не зависит от порядка сомножителей или что каждое целое число только единственным способом раскладывается на множители. При этом подобные арифметические теоремы освобождают от доказательств, важность которых хорошо понимали древние, а в настоящее время на доказательства дается лишь намек.

Важнейшим препятствием для распространения арифметики, по мнению Миндинга, являлось отсутствие учебников и то, что сочинения Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Лежандра и других авторов разбросаны по различным журналам или представляют собой большие и сложные труды, недоступные для начинающих. Поэтому Миндинг решил написать учебник по теории чисел, где излагались бы важнейшие результаты этой науки и который мог бы до известной степени возместить недостатки отдельных статей и больших трактатов. Он считал, что такой учебник был бы особенно полезен для учителей.

Книга, о которой сообщал Миндинг, вскоре вышла в свет. «Начала высшей арифметики» [8] — небольшого размера книга (200 страниц). Автор говорит в предисловии, что читателю, ознакомившемуся с этим сочинением, будет уже нетрудно изучать затем известные основные труды по теории чисел. Главной своей задачей автор считал — вызвать интерес к теории чисел и облегчить затем ее дальнейшее изучение.

Первый раздел книги посвящен основным понятиям теории чисел: простым и составным числам, теоремам о делимости чисел и о разложении чисел на множители. Методом спуска Миндинг доказывает теоремы: если два числа a и b не делятся оба на простое число p, то их произведение ab не делится на p. Далее доказано следствие этого утверждения: каждое составное число раскладывается на простые множители только единственным способом, если не принимать во внимание порядок сомножителей. Затем решается задача нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), вводится понятие сравнения и излагаются свойства сравнений. Приведено доказательство Евклида теоремы о бесконечности множества простых чисел, рассказано о получении всех простых чисел от 1 до A с помощью решета Эратосфена. С помощью того же решета находится выражение функции Эйлера для количества чисел, взаимно простых с A и $<A$. Аналогичным способом находится количество чисел, меньших B и не делящихся ни на одно из неравных простых чисел $a, b, c, \ldots$

О распределении простых чисел автор пишет: «распределение простых чисел в натуральном ряду могло бы быть предметом дальнейших исследований, если бы не была так велика их трудность» [8, стр. 16]. Затем идут неопределенные задачи 1-й степени, излагается теория вычетов и сравнений (по Гауссу). Для решения сравнения $ax \equiv b \pmod c$ автор прежде всего останавливается на изложении некоторых свойств непрерывных дробей, после чего дает решение сравнений следующих видов:

$$ax \equiv +1 \pmod b, \quad ax \equiv -1 \pmod b, \quad \text{где} \quad (a, \quad b) = 1,$$

потом $ax \equiv c \pmod b$.

Второй раздел посвящен теории степенных вычетов по простому модулю. Отмечается основная роль малой теоремы Ферма в этой теории. Миндинг приводит второе доказательство Гаусса для теоремы существования первообразного корня и подсчитывает количество первообразных корней данного показателя n, равное $\varphi(n)$. Этому вопросу посвящена специальная теорема. Затем без доказательства формулируется теорема (Гаусса) о том, что

$$\sum_{d|A} \varphi(d) = A,$$

где $\varphi(d)$ — функция Эйлера, а d пробегает всех делителей числа A.

Третий раздел посвящен квадратичным вычетам и символу Лежандра. Указана теорема: каждое простое число вида $4n+1$ есть делитель x^2+1; никакое простое вида $4n+3$ не есть делитель x^2+1. Затем показывается, что

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\mu} \pmod p,$$

т. е. q есть квадратичный вычет или невычет для p, в зависимости от того будет μ четным или нечетным. Далее доказано, что $+2$ квадратичный вычет для всех простых чисел вида $8n+1$, $8n+7$, невычет — для всех простых чисел вида $8n+3$, $8n+5$; -2 — квадратичный вычет для простых вида $8n+1$, $8n+3$ и квадратичный невычет для простых вида $8n+5$, $8n+7$. Поэтому:

1) всякое простое $8n+1$ — делитель x^2-2 и x^2+2,
2) всякое простое $8n+3$ — делитель x^2+2,
3) всякое простое $8n+7$ — делитель x^2-2,
4) всякое простое $8n+3$ — делитель x^2+2,
5) всякое простое $8n+7$ — делитель x^2-2,

Затем Миндинг рассмотрел случай $p = -1$.

Дальше автор переходит «к общей теореме, в которой содержится вся теория квадратичных вычетов и которая по праву может быть названа удивительнейшей теоремой высшей арифметики. Эта замечательная и плодотворная теорема называется законом взаимности» [8, стр. 58]. Квадратичный закон взаимности Миндинг доказывает, следуя Гауссу. В качестве важнейших приложений закона взаимности он указывает на его использование при нахождении простых чисел, для которых данное число является квадратичым вычетом. Потом закон взаимности распространяется на составные числа.

Четвертый раздел посвящен обобщению малой теоремы Ферма и теоремы Вильсона. Отмечено, что на теореме Ферма основана вся теория сравнений вида $x^n \equiv a \pmod A$.

На стр. 32 автор дает доказательство малой теоремы Ферма, которое, по словам Диксона, принадлежит Айвори [111, т. 1, стр. 68].

Вторая часть книги начинается разделом о теории квадратичных форм. Даются основные понятия этой теории, общие свойства квадратичных форм. Вводится, в частности, важное понятие эквивалентности двух квадратичных форм и указывается, что каждое число, представленное одной из эквивалентных форм, представляется и другой; что эквивалентные формы имеют всегда равные детерминанты.

Затем вводится понятие приведения квадратичных форм. Миндинг доказывает, что число приведенных форм данного детерминанта всегда конечно (доказательство проведено по Лагранжу). Поэтому любая форма этого детерминанта эквивалентна по крайней мере одной из приведенных. Тогда каждый делитель выражения $t^2—Dy^2$ может быть представлен с помощью квадратичной формы детерминанта D; каждый делитель будет выражаться по крайней мере через одну из приведенных форм. Две не эквивалентные формы одного и того же детерминанта не могут представлять одно и то же число.

В следующем разделе — о квадратичных формах отрицательного детерминанта, автор указывает, что теория для квадратичных форм отрицательных детерминантов проще, чем теория квадратичных форм положительных детерминантов. Миндинг дает два способа для решения в целых числах уравнения $ax^2+2bxy+cy^2=n$ при условии, что $b^2-ac=D$ — отрицательное число.

Восьмой раздел посвящен дальнейшему развитию теории цепных дробей и приложениям этой теории к учению о квадратичных формах с положительным детерминантом, не равным квадрату. Если в первой части книги автор изложил ту часть теории, которая нужна для решения неопределенных уравнений первой степени, то здесь изложена теория, необходимая для исследования квадратичных форм положительного детерминанта.

Специально рассмотрены обратные, симметричные и периодические дроби. Показано, что периодическая дробь

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dotsb \cfrac{}{\dotsb \cfrac{1}{a_n + x}}}},$$

записанная в виде

$$x = \frac{A_{n-1}(a_n + x) + A_{n-2}}{B_{n-1}(a_n + x) + B_{n-2}} = \frac{A_{n-1}x + A_n}{B_{n-1}x + B_n},$$

удовлетворяет квадратному уравнению

$$B_{n-1}x^2 + (B_n - A_{n-1})x - A_n = 0. \tag{60}$$

Так как числа $a_1, a_2, \dots, A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, B_n$ предполагаются положительными, то предыдущее уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. Дробь

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dotsb \cfrac{}{\dotsb \cfrac{1}{a_n + x}}}}$$

положительна, а потому x необходимо является положительным корнем уравнения (60).

Если

$$y = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dotsb \cfrac{}{\dotsb + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + y}}}}},$$

то можно записать y в виде

$$y = \frac{B_n y + A_n}{B_{n-1} y + A_{n-1}}.$$

Следовательно, y удовлетворяет уравнению

$$B_{n-1} y^2 - (B_n - A_{n-1}) y - A_n = 0.$$

Так как $y > 0$, то он равен положительному корню последнего уравнения, который, следовательно, существует, и, очевидно, равен отрицательному корню уравнения (60), взятому с обратным знаком.

Если дробь симметрична, то $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}, \ldots$; $B_n = A_{n-1}$, так что $B_{n-1} = A_n$. В частности, при $a_n = 0$ получаем дроби

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{\dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}}}}; \qquad y = \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + y}}}}$$

или

$$x = \frac{A_{n-1} x + A_{n-2}}{B_{n-1} x + B_{n-2}}, \qquad y = \frac{B_{n-2} y + A_{n-2}}{B_{n-1} y + A_{n-1}}.$$

Отсюда следует

$$B_{n-1} x^2 + (B_{n-2} - A_{n-1}) x - A_{n-2} = 0,$$
$$B_{n-1} y^2 - (B_{n-2} - A_{n-1}) y - A_{n-2} = 0.$$

Поэтому x и $-y$ являются двумя корнями одного уравнения:

$$B_{n-1} x^2 + (B_{n-2} - A_{n-1}) x - A_{n-2} = 0.$$

После нескольких примеров дается метод разложения квадратного корня из целого числа в цепную дробь (по Лежандру). Далее доказана теорема: если разложить оба корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в цепные дроби, то обе дроби будут периодическими и цепная дробь для второго корня имеет период, цифры которого расположены в обратном порядке для первого. Например, если имеем уравнение $6x^2 + 8x - 21 = 0$, корни уравнения будут $x_1 = \frac{\sqrt{142} - 4}{6}$ и $x_2 = -\frac{\sqrt{142} + 4}{6}$. Период первой цепной дроби будет: 3, 7, 1, 1, 1, 3, период второй дроби: 3, 1, 1, 1, 7, 3.

Следующий раздел посвящен квадратичным формам положительного детерминанта. Здесь доказана теорема: если D — целое положительное число не равное квадрату, то уравнение $x^2 - Dy^2 = +1$ бесконечным множеством способов разрешимо в целых числах x, y. Далее идет теорема: если уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$ (где $N > 0$ или < 0 и $D = b^2 - ac$ — положительное не квадратное целое число) имеет одно решение, то из него можно найти бесконечно много других. Затем подробно показано, как из одного решения уравнения Ферма $x^2 - Dy^2 = 1$ можно получить бесконечно много других. Наконец, доказана теорема: если N — положительное или отрицательное целое число, меньшее, чем $\sqrt{D}$, и уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$ (где $D = b^2 - ac$) разрешимо во взаимно простых x и y, то можно найти решение этого уравнения с помощью разложения корня v уравнения $av^2 + 2bv + c = 0$ в цепную дробь. Затем идет следствие этой теоремы: так как уравнение $x^2 - Dy^2 = +1$ всегда возможно, то оно должно быть разрешимо с помощью приближенных значений $\sqrt{D}$. С помощью приближенных значений $\sqrt{D}$ можно найти и решение уравнения $x^2 - Dy^2 = -1$, когда оно возможно.

Чтобы решить уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$ во взаимно простых числах x, y предполагая $N < \sqrt{D}$, рассматривают период непрерывной дроби одного из двух корней этого уравнения: $av^2 + 2bv + c = 0$.

Если уравнение разрешимо, то искомое решение встретится среди приближенных значений внутри периода один раз или многократно. Достаточно найти период одного, любого из двух корней. Затем рассматриваются уравнения, у которых $N > \sqrt{D}$ и уравнения $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$, у которых $D = b^2 - ac = g^2$ — полный квадрат.

В общем виде далее решается задача: даны две приведенные формы с одинаковым, положительным, не квадратным детерминантом. Требуется узнать, эквивалентны ли они.

После этого устанавливается эквивалентность различных частных видов форм. На примерах автор показывает, что с помощью связи теории квадратичных форм и закона взаимности можно найти замечательные теоремы о форме простых чисел, для которых данное число D (детерминант) является квадратичным вычетом и которые поэтому являются делителями формы $x^2 - D$.

В следующем разделе выясняется связь между квадратичными формами простых чисел и остатками их при заданном детерминанте, т. е. между квадратичными и линейными формами простых чисел.

Если составить все квадратичные формы делителей выражения $x^2 - Dy^2$, то в них содержатся все делители $x^2 - Dy^2$. Линейные формы тех простых чисел, которые являются делителями формы $x^2 - Dy^2$, будут найдены с помощью закона взаимности. Далее решается задача: дана приведенная квадратичная форма. Требуется найти линейные формы всех тех простых чисел, которые могут содержаться в этой форме. В частном случае получается известная теорема: каждый делитель $u^2 + v^2$ имеет форму $x^2 + y^2$, или, иначе, каждый делитель суммы двух квадратов сам есть сумма двух квадратов. Делитель формы $x^2 + y^2$ может быть только нечетным числом вида $4n + 1$. Каждое простое число вида $4n + 1$ есть делитель $u^2 + 1$ или $u^2 + v^2$ и т. д. Теоремы для $D = 3$, 5, 6, 7, 10 сведены в таблицу, принадлежащую (по словам Миндинга) Лежандру.

Полученные теоремы затем применяются к различным задачам арифметики: к разложению данного числа на простые множители, к выяснению вопроса, является ли данное число простым. Метод решения основан на том, что или данное число представляют в виде квадратичной формы, или ищут другие квадратичные формы, для которых данное число является делителем. Если детерминант такой формы содержит квадратичный множитель, то последний должен быть отброшен. При этом используется знание всех простых чисел, которые меньше квадратного корня из данного числа и таблицы простых чисел.

Затем указаны некоторые результаты для чисел вида $a^n \pm b^n$, где a, b, n — целые, $(a, b) = 1$. Находят линейную форму тех простых чисел, которые являются делителями $a^n \pm b^n$. Получен ряд теорем, подобных следующей: если n — простое нечетное, то каждый делитель выражения $x^n + 1$ имеет вид $2nx + 1$.

Наконец, излагается доказательство теоремы о разложении числа на четыре квадрата (с использованием формулы Эйлера о произведении двух сумм четырех квадратов). В конце книги дается таблица простых чисел от 3 до 2063 и историческая справка о развитии высшей арифметики.

Особое внимание в этом кратком очерке уделено «Арифметическим исследованиям» Гаусса. В числе новых открытий автор отмечает доказательство, данное Дирихле в журнале Крелле для одного случая «великой теоремы» Ферма ($n=5$).[75]

В известной «Истории теории чисел» Диксона [111] есть несколько ссылок на результаты Миндинга.[76] И хотя теория чисел не являлась основным, «профилирующим», предметом научной деятельности Миндинга, он и в нее внес свой вклад. Как уже указывалось, этот труд Миндинга был одобрен Гауссом и для этого были все основания.

Книга Миндинга основана на глубоком изучении фундаментальных трудов по теории чисел, в особенности сочинений Лежандра и Гаусса, и явилась первым на немецком языке серьезным учебным руководством по теории чисел.

Кроме работ по теории чисел и сочинений, обзор которых был дан в предыдущих разделах, Миндингу принадлежит еще несколько статей по теории конечных разностей, теории вероятностей и другим вопросам математики.

Статья Миндинга «Об одной задаче теории вероятностей, встречающейся при наблюдении за падающими звездами» [54] была вызвана статьей Г. Ньютона «О падающих звездах» [64], в которой решался вопрос: сколько из всех звезд, падающих на землю за определенный промежуток времени, попадает в поле зрения одного произвольно выбранного направления установленного телескопа. Ньютон выразил эту вероятность формулой $\frac{lr}{4\pi}$, где l — средняя длина видимого пути одного метеора, а r — радиус поля зрения.

Миндинг поставил своей целью дать более точное решение той же задачи. Он предполагал, что при непрерывно продолжающемся падении звезд (в противоположность периодически повторяющимся явлениям такого

---

[75] Неудивительно, что Миндинг знал об этом доказательстве. Ведь он был хорошо знаком с Дирихле в период своего пребывания в Берлине.

[76] См. [111, т. I, стр. 68, 116, 363, 185, 382; т. II, стр. 409, 423].

рода) все начальные точки и все направления равновозможны. Кроме того, предполагалось, что путь метеоров совершается по большому кругу и что длина пути не превышает одного квадранта.

Если обозначить ω — вероятность попадания метеора в поле зрения, а $f(l)\,dl$ вероятность попадания длины видимого пути метеора в промежуток между l и $l+\Delta l$, а границы длины пути брать от l^0 до l^1, а r — радиус поля зрения, то общее выражение вероятности того, что метеор появится в поле зрения, будет

$$\int\limits_{l^0}^{l^1} \omega f(l)\,dl.$$

Если все длины от l^0 до l^1 равновозможны, то $f(l) = \frac{1}{l^1 - l^0}$ и искомая вероятность будет равна

$$\int\limits_{l_0}^{l^1} \frac{\omega dl}{l^1 - l^0} = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{l^0 + l^1}{2} \cdot \frac{\sin r}{2\pi}.$$

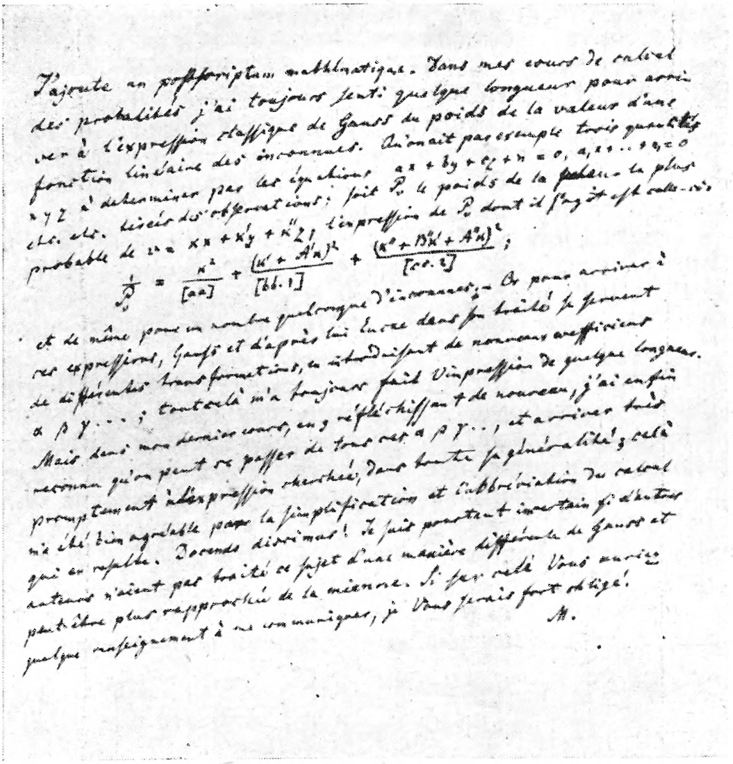
Вторая работа по теории вероятностей посвящена методу наименьших квадратов. В письме к О. И. Сомову (ААН, ф. 256, оп. 1, № 3, лл. 1—2) Миндинг писал о том, что идея этой работы появилась у него в связи с чтением лекций по теории вероятностей: «В моих курсах исчисления вероятностей мне всегда казался слишком длинным путь к достижению классического выражения Гаусса для весов значения линейной функции от неизвестных. Например, пусть имеются три величины x, y, z, которые надо определить из уравнений

$$\begin{gathered} ax + by + cz + n = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + n_1 = 0, \\ \text{etc.}, \end{gathered}$$

полученных из наблюдений. Пусть P_v вес наиболее вероятного значения $v = kx + k'y + k''z$. Выражение P_v, о котором идет речь, таково:

$$\frac{1}{P_v} = \frac{k^2}{[aa]} + \frac{(k' + A'k)^2}{[bb,\ 1]} + \frac{(k'' + B''k' + A''k)^2}{[cc,\ 2]},$$

и то же самое для любого числа неизвестных. Чтобы



J'ajoute un postscriptum mathématique. Dans mes cours de calcul
des probabilités j'ai toujours senti quelque longueur pour arri-
ver à l'expression classique de Gauss du poids de la valeur d'une
fonction linéaire des inconnues. On avait par exemple trois quantités
x y z à déterminer par les équations $ax + by + cz + n = 0$, $a_1x \ldots + n_1 = 0$
etc. etc. tirées des observations; soit P_u le poids de la valeur la plus
probable de $u = \kappa x + \kappa' y + \kappa'' z$, l'expression de P_u dont il s'agit est celle-ci

$$\frac{1}{P_u} = \frac{\kappa^2}{[aa]} + \frac{(\kappa' + A'\kappa)^2}{[bb.1]} + \frac{(\kappa'' + B''\kappa' + A''\kappa)^2}{[cc.2]};$$

et de même pour un nombre quelconque d'inconnues. — Or pour arriver à
ces expressions, Gauss et d'après lui Encke dans son traité se servent
de différentes transformations, en introduisant de nouveaux coefficients
α β γ . . . ; tout cela m'a toujours fait l'impression de quelque longueur.
Mais dans mon dernier cours, en y réfléchissant de nouveau, j'ai enfin
reconnu qu'on peut se passer de tous ces α β γ . . , et arriver très
promptement à l'expression cherchée, dans toute sa généralité; cela
m'a été bien agréable par la simplification et l'abbréviation du calcul
qui en résulte. Docendo discimus! Je suis pourtant incertain si d'autres
auteurs n'aient pas traité ce sujet d'une manière différente de Gauss et
peut-être plus rapprochée de la mienne. Si par cela Vous auriez
quelque renseignement à me communiquer, je Vous serais fort obligé!

M.

Постскриптум письма Ф. Миндинга О. И. Сомову.
3 сентября 1869 г.

прийти к этим выражениям, Гаусс [128] и после него Энке в своем «Traité» [117] пользуются различными преобразованиями, вводя новые коэффициенты α, β, $\gamma\ldots$ Мне всегда это казалось несколько длинным. Но в своем последнем курсе, размышляя над этим, я, наконец, узнал, что можно обойтись без всех этих α, β, $\gamma\ldots$ и прийти очень быстро к искомому выражению во всей его общности. Мне было это очень приятно из-за упрощения и сокращения вычислений, которые отсюда получаются. Docendo discimus![77] Я не уверен, однако, не трактовали ли

---

[77] Уча учимся! (лат.).

этот предмет другие авторы путем, отличным от гауссова и, быть может, более быстрым, чем мой. Если Вы что-нибудь могли бы сообщить мне об этом, я был бы Вам очень признателен».[78]

Заметим, что курс теории вероятностей Миндинг читал в первом семестре через год по три часа в неделю. Он читал его в 1865, 1867 и, по-видимому, в 1869 гг., к которому относится это письмо.

Сомов, должно быть, написал, что другие авторы этим вопросом не занимались, и 23 февраля 1871 г. А. Н. Савич представил в Физико-математическое отделение статью, присланную Мидингом под названием «К методу наименьших квадратов» [57].

В отзыве об этой работе Савич указывал: «В этой записке многоуважаемый автор приводит любопытные объяснения правил, предложенных Гауссом [128] для исследования весов при определении искомых количеств по способу наименьших квадратов».[79] Исследования Миндинга заинтересовали и Сомова, так как спустя два года в Бюллетене Академии появилась его статья по тому же вопросу [181].

В указанной статье Миндинг излагал вначале, в чем состоит метод наименьших квадратов: из ряда уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + n &= u, \\ a_1x + b_1y + c_1z + n_1 &= u_1, \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$
$$\text{etc.},$$

надо найти такие значения неизвестных x, y, z, чтобы сумма квадратов всех u: $[uu] = u^2 + u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ldots$ была наименьшей. Для этого $[uu]$ представляют в виде

$$[uu] = \frac{[au]^2}{[aa]} + \frac{[bu,\ 1]^2}{[bb,\ 1]} + \frac{[cu,\ 2]^2}{[cc,\ 2]} + \cdots + [nn,\ 3], \qquad (62)$$

где обозначения взяты из статей Гаусса [128, т. 4. стр. 22—23, 29—52, 68—71]:

$$[aa] = aa + a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots; \quad [ab] = ab + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots;$$

$$[bb,\ 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}; \quad [bc,\ 1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]};$$

---

[78] ААН, ф. 256, оп. 1, ед. 13, 1869 г., лл. 1—2.
[79] ААН, ф. 1, оп. 2 — 1871, ед. 13, § 45, л. 1.

$$[cc,\ 2]=[cc]-\frac{[ac]^2}{[aa]}-\frac{[bc,\ 1]^2}{[bb,\ 1]};\ [cd,\ 2]=[cd]-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}-$$
$$-\frac{[bc,\ 1]\,[bd,\ 1]}{[bb,\ 1]};\ [dd,\ 3]=[dd]-\frac{[ad]^2}{[aa]}-\frac{[bd,\ 1]^2}{[bb,\ 1]}-\frac{[cd,\ 2]^2}{[cc,\ 2]}$$

и т. д.

С помощью линейной подстановки тождественное равенство (62) преобразуется в другое того же вида (если только определитель преобразования отличен от нуля):

$$[uu]=\frac{[a'u]^2}{[a'a']}+\frac{[b'u,\ 1]^2}{[b'b',\ 1]}+\frac{[c'u,\ 2]^2}{[c'c',\ 2]}+[nn,\ 3]. \tag{63}$$

При этом для наименьшей суммы квадратов получается из (63) такое же самое выражение, что и из (62), потому что вместе с $[au]$, $[bu]$, $[cu]$ обращаются в ноль и $[a'u]$, $[b'u]$, $[c'u]$. Поэтому из (62) и (63) получается тождественное равенство:

$$\frac{[au]^2}{[aa]}+\frac{[bu,\ 1]^2}{[bb,\ 1]}+\frac{[cu,\ 2]^2}{[cc,\ 2]}=\frac{[a'u]^2}{[a'a']}+\frac{[b'u,1]^2}{[b'b',\ 1]}+\frac{[c'u,\ 2]^2}{[c'c',\ 2]}. \tag{64}$$

Если положить в этом равенстве $x=y$, $y=0$, $z=0$, то тогда и новые переменные $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$, так что $u=n$, $u_1=n_1$ и т. д. Поэтому будет

$$\frac{[an]^2}{[aa]}+\frac{[bn,\ 1]^2}{[bb,\ 1]}+\frac{[cn,\ 2]^2}{[cc,\ 2]}=\frac{[a'n]^2}{[a'a']}+\frac{[b'n,\ 1]^2}{[b'b',\ 1]}+\frac{[c'n,\ 2]^2}{[c'c',\ 2]}=$$
$$=[nn]-[nn,\ 3].$$

Отсюда сразу получается общее выражение для веса произвольной функции $\zeta=qx+q_1y+q_2z$, данное раньше Гауссом:

$$\frac{1}{P_v}=\frac{q^2}{[aa]}+\frac{(q_1+A'q)^2}{[bb,\ 1]}+\frac{(q_2+q_1B''+qA'')^2}{[cc,\ 2]}.$$

Чтобы получить значение $\frac{1}{P_v}$, надо только в получаемом из (62) выражении $[nn]-[nn,\ 3]$ писать для $[au]$ только q, для $[bu]$ только q_1, для $[cu]$ только q_2.

Для доказательства теоремы Гаусса полагаем

$$\xi=x,\ \eta=y,\ \zeta=qx+q_1y\ +q_2z$$

или

$$x=\xi,\ y=\eta,\ z=-\frac{q\xi}{q_2}-\frac{q_1\eta}{q_2}-\frac{\zeta}{q_2},$$

где x и y остаются неизменными, а z изменяется. Эта подстановка дает

$$u = ax + by + cz + n = \left(a - \frac{cq}{q_2}\right)x + \left(b - \frac{cq_1}{q_2}\right)y + \frac{c}{q_2} + \zeta + n,$$

так что

$$a_l = a = \frac{cq_1}{q_2}, \quad b_l = b - \frac{cq_1}{q_2}, \quad b' = \frac{c_1}{q_2};$$

$$a'_1 = a - \frac{cq_1}{q_2}, \quad b'_1 = b_1 - \frac{c_1q_1}{q_2}; \ c'_1 = \frac{c_1}{q_2} \text{ и т. д.}$$

Полагая в уравнении (64) $[a'u] = 0$, $[b'u] = 0$, получаем, что и $[b'u, 1] = 0$, $[c'u, 2] = [cu]$. Уравнение (64) после сокращения на общий множитель $[cu]^2$ дает искомое равенство:

$$\frac{q^2}{|aa|} + \frac{(q_1 + A'q)^2}{[bb, 1]} + \frac{(q_2 + B''q_1 + A''q)^2}{[cc, 2]} = \frac{1}{[c'c', 2]} \text{ и } P_\zeta = [c'c', 2].$$

Вопрос о ходе коня на щахматной доске издавно интересовал математиков. Эйлер посвятил ему большой мемуар «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию» [120]. В «Систематическом указателе» к этому изданию трудов Эйлера по теории чисел работа отнесена по своему предмету к геометрии положения, а по методу исследования — к теории чисел. Никаких алгебраических средств, а тем более средств высшей математики Эйлер не применяет и решения задачи, в сущности, не дает. Он использует некоторые подмеченные им свойства и дает решение в некоторых частных случаях.

После Эйлера задачу исследовали Лежандр и Вандермонд. Задача состоит в следующем. Имеется шахматная доска из 64 клеток. Пусть конь находится на какой-нибудь фиксированной клетке доски. Ставится вопрос: сколькими различными способами он может в n ходов достичь другой клетки, если повторное попадание в одну и ту же клетку не разрешается? Есть и другие варианты этой задачи: требуется обойти при этом все клетки, кроме исходной, и не попадать дважды в одну и ту же клетку и др.

Задаче коня посвящена статья Миндинга «О ходе коня на шахматной доске» [37]. О том, что ему удалось сделать здесь, сам автор писал: «До действительного определения чисел или более того до знания средства, с помощью которого оно достижимо во всех случаях, когда это важно, я не дошел; но по крайней мере будет показано, что только в самом деле почти необозримый объем вычисления, ведущего к очень многим и очень большим числам, препятствует его осуществлению» [37, стр. 209—210].

Миндинг обозначает клетки шахматной доски числами, которые можно рассматривать, например, как координаты средней точки каждой клетки. Левая крайняя внизу получает координаты (0, 0), следующая за ней по горизонтали клетка: (1, 0,) затем (2, 0) и т. д. Координаты клетки, находящейся в верхнем правом углу, будут (7,7). По горизонтали откладываем координату x, по вертикали y. Каждая клетка, таким образом, получает свои «координаты» — пару чисел, указывающих ее положение на доске. Произвольная клетка с $x = a$ и $y = b$ обозначается (a, b). Из (a, b) конь одним ходом может достичь любой клетки, которая будет обозначаться $(a \pm 2,\ b \pm 1)$ или $(a \pm 1,\ b \pm 2)$. Координаты x и y могут изменяться в границах $0 \leqslant x \leqslant 7$, $0 \leqslant y \leqslant 7$.

Кроме координат, Миндинг дает каждой клетке номер (какое-то число от 1 до 64), так что каждой клетке соответствует определенный номер и каждому номеру определенная клетка. Пусть α номер какой-нибудь клетки и β, γ, δ. . . — номера всех тех клеток, которых может достичь конь из α одним ходом и которые Миндинг называет соседними с α. Пусть конь находится в клетке A. Сколькими различными способами он может достичь в n ходов клетки α, если повторное попадание в одну и ту же клетку исключено? Обозначим $\overset{\alpha}{W}_n$ число таких способов. Если все клетки разделить на черные и белые (или четные и нечетные), то α должна быть однородной или не однородной с A и в зависимости от этого число n ходов будет четным или нечетным. Если это условие не выполнено, то $\overset{\alpha}{W}_n = 0$. Так как конь может попасть в α только непосредственно из соседних клеток β, γ, δ. . . то для определения $\overset{\alpha}{W}_n$ получается уравнение

$$\overset{\alpha}{W}_n = \overset{\beta}{W}_{n-1} + \overset{\gamma}{W}_{n-1} + \overset{\delta}{W}_{n-1} \cdots, \tag{65}$$

которое сводит n-й ход на $(n-1)$-е. Такое уравнение будет выполняться для каждого α, где α пробегает все значения от 1 до 64. Так как значения $\overset{\alpha}{W}_n$ для первого хода, или для $n=1$, известны и все они равны единице для клеток, соседних с A, а для остальных равны нулю, то можно с помощью 64 уравнений (65) вычислить $\overset{\alpha}{W}_n$ для каждого поля α и для каждого числа ходов, и, таким образом, задача будет решена. Ту же задачу можно дополнить условием, что какая-нибудь клетка во всех ходах остается пустой, «запрещенной». Если β такая запрещенная клетка, то будет для всех n $\overset{\beta}{W}_n=0$ и так как вместе с тем из (65) получается такое уравнение, которое выражает переход от соседних полей к β, имеем в (66) одним уравнением и одной неизвестной меньше, чем до этого. Вообще из системы выпадает столько неизвестных и столько уравнений, сколько будет запрещенных клеток. Пусть число оставшихся клеток i, тогда в системе (65) будет i уравнений и i неизвестных. Обозначим оставшиеся клетки номерами 1, 2, 3,. . ., i. Пусть α одна из них, другое ее обозначение будет (a, b). Миндинг составляет произведение $\overset{\alpha}{W}_n x^a y^b$ для этой, а также и для всех остальных оставшихся клеток и обозначает сумму всех произведений U_n. Таким образом, имеем полином

$$U_n=\sum \overset{\alpha}{W}_n x^a y^b,$$

в котором знак суммы распространяется на все номера от $\alpha=1$ до $\alpha=i$. Это выражение охватывает все возможные при n-м ходе случаи. Чтобы перейти теперь к $(n+1)$-му ходу, надо умножить U_n на множитель U, отражающий ход коня, а именно на

$$U=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right).$$

Из полученного произведения надо выбросить члены, в которых встречаются показатели отрицательные или превосходящие число 7, а также все члены, соответствующие запрещенным клеткам. То, что останется после выбрасывания, обозначаем $[U_n U]$. Таким образом, получается $U_{n+1}=[U_n U]=\sum \overset{\alpha}{W}_{n+1} x^a y^b$.

Рассмотрим пример (рис. 4). Пусть требуется из клетки (0, 0) перейти одиннадцатью ходами в клетку (2, 3). Поэтому клетки (0, 0) и (2, 3) будут запрещенными при остальных десяти ходах. Произведения $[U_n U]$ будут:

$$U_1 = [U] = x^2y + xy^2, \quad U_2 = [U_1U] = x^2 + y^2 + xy^3,$$
$$U_3 = [U_2U] = x^2 + 2y + xy^2 + 2x^2y,$$
$$U_4 = 3x^2 + 3y^2 + 3x^2y^2 + 4xy^3,$$
$$U_5 = 6x + 10y + 7x^2y + 3xy^2 + 3y^3,$$
$$U_6 = 13x^2 + 3xy + 13y^2 + 19x^2y^2 + 17xy^2 \text{ и т. д.}$$

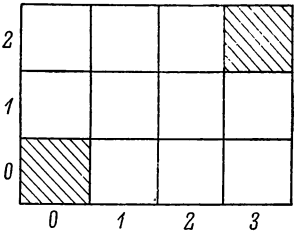


Рис. 4.

Вычисления можно сократить, если заметить, что если обозначить через V аналогичный полином, соответствующий переходу из (2, 3) в (0, 0), то V получается из U заменой x^a на x^{2-a} и y^b на y^{3-b}. Коэффициенты полинома U_6 указывают число способов, которыми можно прийти из (0, 0) в (a, b), индекс у U — число ходов, а показатели степени — соответствующие координаты клеток. Таким образом, мы придем из (0, 0) в (2, 0) тринадцатью возможными способами в 6 ходов, а из (0, 0) в (1, 1) тремя способами за 6 ходов. Теперь можно найти все клетки, достижимые в заданное число ходов, и определить число всевозможных различных путей из указанного числа ходов из клетки A в клетку B. Дальше Миндинг указывает еще некоторые вспомогательные алгебраические средства для решения вопроса: сколькими различными способами может конь в 63 хода из заданной клетки (a, b) или A попасть в другую клетку (a', b') или B, неоднородную с A, не пропуская ни одной из остальных клеток и не попадая ни в одну из них повторно. Миндинг получает уравнения для решения этой задачи. Фактическое же решение задачи было затруднено колоссальным числом вычислений, которые надо было осуществить.

С. С. Урусов, посвятивший проблеме коня раздел в своей книге [277], указал на исключительную трудность задачи и после краткого исторического очерка подробно остановился на работе Миндинга. Он писал: «Один только сочинитель, а именно профессор Миндинг, вполне высказался относительно главного требования проблемы; это требование состоит, по мнению профессора, в определении числа решений для доски $p = 8$..., рассматривает обходы „графически различные между собой". Гениальный профессор — мы говорим о Миндинге — не ограничился заявлением условий проблемы; он предложил также и способ отыскания решения, и это первый и единственный опыт решения алгебраической стороны вопроса... Способ этот столь оригинален и притом так ясно и просто определяет трудности алгебраического решения, что мы считаем необходимым теперь же познакомить с оным читателя... С теоретической точки зрения, изложенный способ составляет полнейшее решение задачи, предложенной Миндингом согласно с Лежандром и другими геометрами, которые в проблеме коня видели чисто алгебраическую задачу... Наиболее же привлекло наше внимание в труде Миндинга то, что относится к приведению проблемы к уравнению, в этом приготовительном вопросе заключается, по нашему мнению, ключ к решению. Иначе сказать: искать надо не самого решения, а упрощения тех уравнений, к коим приводится вопрос» [277, стр. 319—321]. В предисловии к книге Урусова восхищение талантом дерптского профессора выражено еще сильнее: «Мне непонятно, почему столь замечательное сочинение оставалось и остается по сие время неизвестным большинству математиков. Весьма буду рад, если статья моя о решении проблемы коня, помещенная во второй части, послужит прославлению необыкновенного таланта дерптского профессора» [277, стр. 111]. В этой части книги Урусов изложил способ Миндинга.

Последней работой Миндинга, напечатанной в изданиях Академии, была заметка «Приложение разностного исчисления» [61]. По отзыву В. Я. Буняковского, представлявшего Академии эту работу, «этот труд заключает в себе любопытное приложение исчисления конечных разностей к суммированию особенного вида ряда».[80]

Миндинг рассматривает ряд

$$S_m = a^m + (a+1)^m x + (a+2)^m x^2 + \ldots + (a+\mu)^m x^\mu + \ldots,$$

---

[80] ААН., ф, 1, оп, 2 — 1878, № 22, § 152, 5 сентября 1878 г.

где m — целое положительное, a — любая постоянная, $0 < x < 1$. Этот ряд можно просуммировать с помощью соотношения

$$\frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{d\,(x^a S_m)}{dx} = S_{m+1} \cdot$$

Миндинг указывает и другой прием, более простой и эффективный. Он умножает S_m на $(1-x)^{m+1}$, где

$$(1-x)^{m+1} = 1 - C^1_{m+1}x + C^2_{m+1}x^2 - C^3_{m+1}x^3 + \ldots + \\ + (-1)^\lambda C^\lambda_{m+1}x^\lambda + \ldots$$

Получается снова ряд с неопределенными пока коэффициентами:

$$(1-x)^{m+1}S_m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu + \ldots$$

Затем определяются значения коэффициентов C_μ:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = a^\mu;\ C_1 = (a+1)^m - a^m,\ C_2 = (a+2)^m - \\ \qquad - C^1_{m+1}(a+1)^m C^2_{m+1}a, \\ \cdot \\ C_\mu = (a+\mu)^m - C^1_{m+1}(a+\mu-1)^m + \ldots + \\ \qquad + (-1)^\mu C^\mu_{m+1}a^m. \end{array}\right\} \qquad (66)$$

Из исчисления конечных разностей известно обозначение $\Delta(z^m) = z^m - (z-1)^m$ и формула для $\Delta^{m+1}(z^m)$:

$$\Delta^{m+1}(z^m) = z^m - C^1_{m+1}(z-1)^m + C^2_{m+1}(z-2)^m + \ldots + \\ + (-1)^{m+1}(z-m-1)^m = 0.$$

В частности, для $z = a + \mu$ тогда получается

$$(a+\mu)^m - C^1_{m+1}(a+\mu-1)^m + \ldots + \\ + (-1)^{m+1}(a+\mu-m+1)^m = 0.$$

Сравнивая эту формулу со значением C_μ, видим, что для $\mu = m+1$ и для $\mu > m+1$ $C_\mu = 0$, так как $C^\lambda_{m+1} = 0$ как только $\lambda > m+1$. Если же $m = \mu$ или $\mu < m$, то C_μ получает значение, даваемое формулой (66) или, что то же самое:

$$\Delta^{m+1}(a+\mu)^m = C_\mu + (-1)^{\mu+1}C^{\mu+1}_{m+1}(a-1)^m + \ldots + \\ + (-1)^{m+1}(a+\mu+m-1)^m = 0.$$

Отсюда получается другая форма коэффициента C_μ:

$$C_\mu = (m - \mu + 1 - a)^m - C^1_{m+1}(m - \mu + a)^m + \ldots + \\ + (-1)^{m-\mu} C^{\mu+1}_{m+1} (1 - a)^m \qquad (67)$$

и формула для суммы

$$S_m = \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m}{(1 - x)^{m+1}},$$

где C_μ берутся в форме (66) или (67). В частном случае при $a = 1$ из $S_m(a)$ получается ряд

$$S_m(1) = 1 + 2^m x + 3^m x^2 + \ldots,$$

где $|x| < 1$.

Миндинг указывает таблицу, позволяющую находить первые значения $S_m(1)$.

Глава 15

РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ

Механика была предметом занятий Миндинга в течение почти всей его многолетней педагогической и научной деятельности. Он должен был заниматься ею в Берлине, излагал многократно механику в Дерпте, а оригинальные исследования по механике Миндинг публиковал, правда, с большими перерывами, начиная с тридцатых и кончая семидесятыми годами прошлого века.

Первые работы, которыми Миндинг заявил о себе как о механике, были опубликованы в 1835—1836 гг. в журнале Крелле. Это три статьи, объединенные одной темой: «Исследование вопроса о центре непараллельных сил» [15], «О положении совокупности результант систем сил, подвергающихся вращению» [17] и «Некоторые теоремы об изменениях, которые испытывает система сил при их вращении, вместе с применением к веревочному многоугольнику» [18].

В двадцатые-тридцатые годы прошлого века новые геометрические понятия и методы школы Монжа вслед за французскими были восприняты немецкими геометрами. Это отразилось и на статике. К тому же в статике под влиянием блестящего произведения Пуансо «Элементы статики» снова стали популярны геометрические методы.

В течение второй четверти XIX в. благодаря геометрам типа М. Шаля геометрическая статика обновляется. В связи с этим стало возможным обобщение понятия центра паралелльных сил (естественного обобщения понятия центра тяжести). Понятно, что Миндинг, занимавшийся геометрией и преподававший механику, продумывая курс механики, мог поставить перед собой вопрос о понятии центра для системы непараллельных сил. К тому же достаточно элементарный характер вопроса означал, что его решение не только будет научным результатом, но скажется и на преподавании.

В решении вопроса о центре системы непараллельных сил результаты Миндинга пересекаются с результатами другого выдающегося ученого Мебиуса. Их исследования по времени почти совпадают, но не зависят друг от друга и взаимное уважение этих ученых не подлежит сомнению. Процитируем предисловие Миндинга к «Руководству по теоретической механике», изданному в 1838 г. в качестве второй части его «Руководства по дифференциальному и интегральному исчислениям с их приложениями к геометрии и механике» [22]. Заметив, что он помещает здесь в переработанном виде «некоторые статические исследования», которые он уже излагал в 14-м и 15-м томах журнала Крелле, Миндинг продолжает: «Господин профессор Мебиус со своей стороны предпринял подобные исследования и тоже сначала изложил их в извлечении, в журнале Крелле (т. 16), а затем более подробно в появившемся несколько месяцев тому назад Учебнике статики. Такое совпадение, как мне кажется, во всяком случае говорит в пользу дела» [22, стр. VI].

Из современных курсов статики вопрос о центре непараллельных сил выпал, и небесполезно привести то простое и изящное построение, с которого Миндинг начинает изложение вопроса в указанном только что курсе. Рассматривается простейший случай. Две компланарные и непараллельные силы P и Q (рис. 5) приложены в точках A и B соответственно. Их равнодействующая R действует вдоль прямой CM, проходящей через точку пересечения C линий действия сил P и Q. Для того чтобы придать всему вопросу механический колорит, оговорим, что все рассматриваемые линии и точки принадлежат некоторому абсолютно твердому телу или какой-то неизменяемой системе точек.

Будем считать силы P и Q неизменно приложенными в точках A и B соответственно. Проведем окружность через точки A, B, C. Точкой приложения равнодействующей будем считать M—точку пересечения построенной окружности с линией ее действия. Пусть теперь сила P вращается вокруг точки A, сила Q—вокруг точки B, сохраняя взаимный наклон, т. е. поворачиваясь все время на одинаковые углы. Тогда точка пересечения их линий действия C будет описывать окружность ACB, а равнодействующая при любом повороте сил P и Q будет проходить через точку M. Очевидно, что увеличение или уменьшение сил P и Q в одинаковом отношении вызывает соответствующее увеличение или уменьшение их равнодействующей, но никак не сказывается на ее направлении. Таким образом, точка M при зафиксированных точках приложения пересекающихся сил P и Q играет роль, вполне аналогичную центру параллельных сил: она остается возможной точкой приложения равнодействующей сил P и Q при всех поворотах этих сил на один и тот же угол и при всех пропорциональных изменениях их величины.

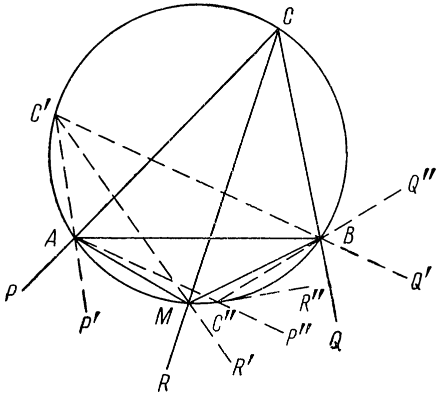


Рис. 5.

Доказательство в достаточной мере очевидно, равно как и обобщение на любую несводящуюся к паре сил систему компланарных сил. Более сложна картина в общем случае пространственной системы сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, постоянно приложенных в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ абсолютно твердого тела. Целесообразно разложить каждую из сил F_i на три составляющие вдоль трех постоянных направлений, которые можно считать направлениями взаимно перпендикулярных координатных осей. Для каждой из трех систем параллельных между собою сил существует свой центр, либо же эта система сводится к паре сил. Далее необходимо проанализировать различные возможные при этом комбинации. Из нескольких полученных при этом результатов приведем для примера следующий: «Если система сил такова, что она может быть заменена одной силой, то при вращении сил системы вокруг своих точек приложения на одинаковые углы их равнодействующая постоянно проходит через точку на некоторой фиксированной окружности (положение которой определяется по координатам точек приложения и по размерам сил) и точку на перпендикуляре, восстановленном из центра этой окружности к ее плоскости» [15, стр. 315].

В общем случае при вращении системы сил вокруг их точек приложения определение заменяющих систему трех сил или главного вектора и главного момента системы приводит к введению новых геометрических образов, связанных с системой сил и определяемых ею: так называемых центральной плоскости (или, в частном случае, центральной оси) и еще двух средних плоскостей, взаимно перпендикулярных и перпендикулярных к центральной плоскости, а также центральной точки — точки пересечения указанных трех плоскостей.

Миндинг устанавливает также тот факт, что если система сил не эквивалентна статически нулю, то при ее вращении описанным образом она всегда может быть переведена в положение, в котором она заменяется одной силой, т. е. имеет равнодействующую, и таких положений бесчисленное множество. Если читатель вооружится приведенной только что терминологией, то ему будет понятна формулировка[81] изящной теоремы, которой Миндинг заканчивает вторую из указанных выше трех работ: пусть силы произвольной неэквивалентной нулю системы одинаковым вращением вокруг своих точек приложения

---

[81] Мы даем ее в несколько модернизированной и более компактной редакции.

переводятся в одно из бесчисленного множества положений, в которых эта система сил имеет равнодействующую; любая из этих равнодействующих пересекается с фиксированными эллипсом и с гиперболой, общим центром которых является центральная точка системы сил, причем эллипс лежит в одной из двух средних плоскостей, гипербола — в другой, и вершины одной из этих кривых совпадают с фокусами другой.

Мы можем только упомянуть здесь, что эти исследования Миндинга вместе с работами Мебиуса и других геометров того времени составили основу для учения о так называемом астатическом равновесии. Это еще одна глава статики XIX в., которая выпала из современных курсов. В ней рассматриваются условия, которым должна удовлетворять система сил, приложенных в одних и тех же точках твердого тела, если она должна быть статически эквивалентной нулю при всех вращениях сил (как неизменяемой системы векторов) вокруг своих точек приложения.

Очевидно, что эти же условия обеспечивают статическую эквивалентность нулю рассматриваемой системы сил, если силы сохраняют свое направление (быть может, пропорционально изменяясь по величине), а тело переносится произвольным образом. Учение об астатическом равновесии является, следовательно, лучшим приближением к действительности, когда рассматриваются условия равновесия твердого тела в поле сил земного тяготения и земного магнетизма при небольших перемещениях тела по поверхности Земли. Понятен интерес к этим вопросам в 20—40-е годы прошлого века — во время организации сети станций для наблюдения земного магнетизма и работы над усовершенствованием приборов, измеряющих магнитное поле Земли. Миндинг занимался и такими вопросами в небольшой работе второстепенного значения, говорить о которой здесь вряд ли целесообразно [20].

Значительным вкладом в аналитическую динамику была работа Миндинга, которая была преподнесена Дерптским университетом в 1864 г. Пулковской обсерватории по случаю ее 25-летия. Работа была написана на латинском языке и издана отдельной брошюрой, на титульном листе которой сказано: «Пулковской императорской астрономической обсерватории, празднующей свое полное двадцатипятилетие в седьмой день августовских ид

1864-го года, императорский Дерптский университет приносит свои поздравления. Содержится здесь исследование Фердинанда Миндинга о настоящем происхождении того вида, к которому британский геометр Гамильтон свел интегралы аналитической механики» [15].

Выбор работы Миндинга для торжественного подношения говорит о том, что и автор, и факультет оценивали ее достаточно высоко. Отдельное издание этой работы не способствовало, однако, ее распространению, и ни в Дерптском университете, ни в Пулковской обсерватории не оказалось никого, кто мог бы содействовать ознакомлению с ней достаточно компетентных лиц. Фактически работа Миндинга, несмотря на доступность изложения, осталась в свое время незамеченной.

Вероятно, А. Кнезер [134] был первым, кто обратил на нее должное внимание и позаботился о ее перепечатке в 1902 г.[82] Одна из последних (если не последняя) значительных работ по математике и механике, написанных на латинском языке, она (хронологически) открывает тот период в развитии аналитической динамики, который можно назвать ее геометризацией. Исторически основными для этой геометризации динамики оказались не исследования Миндинга, опубликованные в труднодоступном издании и не прореферированные ни в одном математическом журнале 60-х годов XIX в., а работы Бельтрами (1869 г.) и Липшица (1871 г.). Мемуары Бельтрами и Липшица читали и комментировали, а о более ранней работе Миндинга даже нельзя сказать, что ее забыли, — ее не знали, и извлек ее из забвения Адольф Кнезер, так как этот выдающийся математик в течение десяти лет работал в Дерптском университете и по-настоящему интересовался, кем были его предшественники.

Идейную сущность исследований, в которых осуществлялась геометризация динамики, можно охарактеризовать, следуя Дарбу, который дал подробное изложение относящихся сюда вопросов в своих знаменитых «Лекциях по общей теории поверхностей» [108].

Он знает и цитирует только Бельтрами и Липшица.

---

[82] Свое вводное примечание на стр. 19 А. Кнезер начинает следующим заявлением: «Перепечатка этой статьи оправдана ее значительным содержанием, находящимся в теснейшей связи с фундаментальными для современной аналитической механики исследованиями Липшица и Бельтрами».

«В двух предыдущих главах, — пишет Дарбу, — мы установили ряд свойств геодезических линий. Мы их определили сначала с помощью свойства их соприкасающейся плоскости, что сводится к тому, чтобы их рассматривать как траектории точки, которая движется по поверхности, не будучи подвержена действию каких-либо сил; затем, с помощью вполне элементарных соображений, мы связали с таким определением свойства ортогональности и минимальности. Представляется интересным применить тот же метод к изучению всех тех проблем механики, в которых существует силовая функция. Чтобы выявить простоту рассуждений, мы начнем с движений, происходящих в одной плоскости» [108, стр. 438].

Родословную той трактовки задач механики, которая дана в приведенной цитате, можно проследить примерно с 30-х годов XIX в., с исследований Якоби. В его «Лекциях по динамике» достаточно ясно видна в общем виде аналогия задачи об определении геодезических линий на заданной поверхности и задачи о движении точки по этой поверхности при наличии соответствия между метрикой на поверхности, с одной стороны, и лагранжианом механической задачи, с другой стороны. Но понадобилось еще упрочение, так сказать, многомерной геометрии и развитие теории дифференциальных форм (тут велика роль Римана), чтобы эти кажущиеся сейчас напрашивающимися аналогии послужили основой для систематически построенной теории. Ход мысли здесь вполне может быть охарактеризован сопоставлением предыдущей цитаты из книги Дарбу со следующей цитатой оттуда же. Заключительная восьмая глава — «Общая проблема динамики» начинается у Дарбу такими словами: «Методы, которые мы применяли в двух предыдущих главах, сами собою распространяются на общую задачу механики. Небесполезно дать здесь этот новый способ изложения фундаментальных результатов, которыми мы обязаны Гамильтону и Якоби, ибо мы, таким образом, придем к некоторым общим свойствам квадратичных форм, которые прольют свет на предыдущие результаты и будут полезны в дальнейшем» [108, стр. 480]. Комментарии почти излишни: квадратичная (дифференциальная) форма (на геометрическом языке) дает метрику некоторой поверхности, и аналогичная форма, которая строится по живой силе и силовой функции, характеризует механическую систему;

в сочетании с соответствующим минимальным принципом это определяет аналогию двух задач — найти геодезические линии на поверхности и определить фазовые траектории системы.

Главная заслуга Миндинга в его работе, на наш взгляд, в том, что он вскрывает алгебраическую основу аналитических исследований Гамильтона, Якоби и Остроградского. Именно эту алгебраическую основу он имеет в виду, говоря о «настоящем происхождении» в заглавии работы [51, стр. 119]. И в этом он, видимо, имел только одного предшественника, чего он, должно быть, и не знал, — Лиувилля, опубликовавшего в 1856 г. сходную по методике работу «Замечательное выражение величины, которая при движении системы материальных точек с любыми связями обращается в минимум в силу принципа наименьшего действия».

Действительно, Миндинг начинает с доказательства теоремы по сути алгебраического характера. Пусть имеем положительно определенную квадратичную форму дифференциалов n величин p_1, $p_2 \ldots, p_n$ с коэффициентами, зависящими от p_i. Обозначим эту форму как бесконечно малую величину второго порядка через Ωdt^2:

$$\Omega dt^2 = \sum_{i,k=1}^{n} E_{ik} dp_i dp_k. \qquad (68)$$

Утверждается, что форму (68) можно представить в виде суммы n квадратов так, что один из них есть квадрат полного дифференциала. А именно,

$$\begin{aligned} \Omega dt^2 = dV^2 + (C_{11}dp_1 + C_{12}dp_2 + \ldots + C_{1n}dp_n)^2 + \\ + (C_{22}dp_2 + \ldots + C_{2n}dp_n)^2 + \ldots + (C_{n-1,\,n-1}dp_{n-1} + \\ + C_{n-1,\,n}dp_n)^2, \end{aligned} \qquad (69)$$

где V и C_{ik} — функции аргументов p_i, и все дело сводится к определению этих функций. Из алгебраических соотношений, которым должны удовлетворять C_{ik} и V, коэффициенты C_{ik} можно исключить, что дает уравнение в частных производных для определения V. Таким образом, в выражение для V входят $n-1$ произвольных постоянных α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-1}. Обозначив дифференциальные формы первого порядка, возводимые в квадрат в (69), через $L_1 dt, \ldots, L_{n-1} dt$, соответственно представим (69) в виде

$$\Omega dt^2 = dV^2 + (L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_{n-1}^2)\, dt^2. \tag{70}$$

Дифференцирование по α_k дает

$$dV d\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + dt^2 \sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\partial L_i}{\partial \alpha_k} = 0 \tag{71}$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$.

Если наложить на p_i условие удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$L_i = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1), \tag{72}$$

то будем иметь

$$dV^2 = 0,$$

откуда

$$dV \cdot d\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0,$$

т. е.

$$d\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0,$$

что дает $n-1$ интегралов

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{73}$$

где β_k — новые постоянные.

Можно предположить также, что в Ω входит некоторая константа h, которая, следовательно, должна входить и в правую часть (68) и (70). Тогда, при наличии уравнений (72), получаем, что

$$\frac{\partial \sqrt{\Omega}}{\partial h} dt = d\frac{\partial V}{\partial h}. \tag{73'}$$

Во все предыдущие выкладки можно ввести вместо Ω, произведние $F\Omega$. Тогда, в частности, вместо (73) мы получим

$$\frac{\partial \sqrt{F\Omega}}{\partial h} dt = d\frac{\partial V}{\partial h}, \tag{74}$$

и если предположить, что h входит только в F, отсутствуя в Ω, из (74) будет следовать, что

$$\frac{\sqrt{\Omega}}{2\sqrt{F}}\frac{\partial F}{\partial h}dt = d\frac{\partial V}{\partial h}. \qquad (75)$$

Установив все вышеизложенное, Миндинг показывает затем, что в этом содержится доказательство теоремы Гамильтона—Якоби. Действительно, обозначим через T живую силу механической системы, положение которой, с учетом наложенных на нее связей, определяется n обобщенными координатами $p_1, \ldots, p_n$, введем скорости $q_i = dp_i/dt$ и допустим существование потенциальной функции $U + h$. Итак, пусть $T = 1/2 \sum E_{ik}q_iq_k$ и положим $Tdt^2 = \frac{1}{2}\Omega$. Множителем F будет $2(U + h)$. Тогда приходим к выражению

$$F\Omega = 4(U + h)Tdt^2 = 2(U + h)\sum(E_{ik}q_iq_k).$$

Применяя к этому выражению преобразование к сумме квадратов, как это было предварительно доказано, мы, очевидно, придем к теореме Гамильтона—Якоби.

Миндинг этим не ограничивается: он показывает что введенные им алгебраические преобразования применимы к выводу уравнений Лагранжа второго рода, и устанавливает также связь изложенных результатов и методов с определением геодезических линий. Работа заканчивается такими словами: «Но уже близок торжественный день, которому надлежит посвятить эти страницы, и остальное мы отложим на будущее, а вышеизложенного достаточно для объяснения чисто алгебраического принципа, из которого сразу следуют и основные результаты и следствия гамильтоновой теории [51]».

Миндинга в механике всегда интересовал вопрос о центре параллельных сил. Он достаточно подробно излагает его в своем курсе механики [22] и в обзоре новых работ по механике [33], о котором мы будем говорить ниже. Но и в работе 1856 г. [43] «О некоторых теоремах статики» он возвращается к своим прежним результатам, выделяя самое существенное и упрощая доказательства. Одним из поводов для этого было, как пишет Миндинг, то, что норвежский профессор Брох опубликовал в 1854 г. в Христиании (ныне Осло) учебник механики, в котором подробно изложил вопрос о центре параллельных сил, широко используя курс Миндинга [20], но не указав источник [43, стр. 217]. Кроме того, статья [43] содержит упрощенное доказательство одной из статических теорем М. Шаля и некоторые замечания о приведении системы сил к статически эквивалентной системе двух сил.

В 1868 г. Миндинг публикует в Бюллетене Петербургской Академии наук статью «Доказательство одной теоремы статики» [53], снова пытаясь привлечь внимание ученых к своим результатам относительно центра параллельных сил.[83] Он и в этой работе сумел достичь новых упрощений доказательств.

Не лишена интереса работа Миндинга 1855 г. «О колебаниях свободно висящей гибкой нити» [41] (она перекрывает содержание предыдущей работы [40]). Миндинг в ней обращается к вопросу, подробно рассмотренному Лагранжем в одном из его ранних мемуаров и в его знаменитой «Аналитической механике»: свободно подвешенная за свои концы идеально гибкая и невесомая нить несет на себе в любых точках любые точечные грузы; как будет колебаться такая система? Лагранж начинает с вопроса в такой общей постановке, переходя почти сразу же к частному случаю, когда все грузы равны и помещены на равных расстояниях друг от друга. Предельным переходом отсюда получается решение задачи для непрерывного (но однородного) распределения масс, т. е. задачи о колебаниях однородной струны.

Миндинг ставит перед собой и решает ту же задачу, но в более общем случае неравных грузов, размещенных на различных расстояниях друг от друга, откуда предельным переходом в случае непрерывного распределения масс можно получить решение задачи о колебаниях неоднородной струны.

Курс механики Миндинга [22] для своего времени был в достаточной мере ярким явлением благодаря изложению в нем вопроса о центре параллельных сил, четкости и компактности изложения, но должного внимания он к себе не привлек. Не раз в своих позднейших работах

---

[83] Мы находим там фразу: «Итак, я осмеливаюсь еще раз вернуться к этому вопросу, который, по-видимому остается почти что неизвестным большинству математиков» [53, стр. 234].

Миндинг, в очень скромной форме, упоминал об этом курсе, отмечая при этом, что его книга не стала сколько-нибудь известной.

В 30—50-е годы XIX в. видной фигурой в научном мире Германии был физик Генрих-Вильгельм Дове (Dove), разносторонний ученый, занимавшийся оптикой, цветоведением, метеорологией и другими областями физики и к тому же наделенный организаторскими способностями. Он был инициатором издания и редактором пятитомного «Реперториума по физике», который должен был дать, как сказано в подзаголовке этого издания, «полное изложение новейших успехов этой науки».

В пятом томе (1844 г.) «Реперториума» Дове была опубликована написанная Мипдингом «Механика». Мы приведем перечень вопросов, которые автор включил в этот обзор, чтобы показать характер его интересов и широту эрудиции Миндинга в области механики. Обзор состоит из восьми разделов. Первый — «Общая статика» — включает в себя принцип наименьшего принуждения Гаусса, учение о парах сил Пуансо, результаты Мебиуса и самого Миндинга относительно центра системы параллельных сил. Указаны также накоторые усовершенствования в решении вопроса о равновесии упругой гибкой нити, данные в курсе статики Мебиуса и в курсе механики Миндинга [22], приведены результаты Бесселя о влиянии силы тяжести на форму стержня, подпертого в двух точках, находящихся на одной высоте.

Во втором и третьем разделах Миндинг привел результаты классического труда Гаусса по теории ньютоновского потенциала и результаты, достигнутые в задаче о притяжении эллипсоидов (по закону Ньютона).

В четвертом разделе прореферирован мемуар Ламе и Клапейрона [148] о равновесии упругих однородных тел. Мемуар этот, по оценке историков механики, представляет собой первое систематическое изложение основ молодой тогда математической теории упругости и ее применение к ряду задач.

Пятый раздел посвящен теории капиллярности. В нем изложено содержание двух монографий — Гаусса [127] и Пуассона [172]. В небольшом шестом разделе мы находим результаты, полученные в задаче об относительном равновесии тела, подвешенного на нити и приведенного в равномерное вращение, забытым ныне ученым Пагани (Pagani, [176]).

Последние разделы — седьмой и восьмой — носят прикладной характер. В седьмом («О применении закона живых сил в учении о машинах») рассказано о только что опубликованных в то время исследованиях Прони, Понселе, Кориолиса и других по динамике машин. В восьмом разделе сообщается о некоторых улучшениях, внесенных в теорию паровых машин английским инженером Памбуром [168].

Таков этот весьма содержательный и полезный для своего времени обзор механики. В упрек автору можно было бы поставить лишь то, что он не упомянул о результатах Гамильтона по аналитической механике. Рассмотренная выше работа Миндинга 1864 г. [51] свидетельствует о том, что позже он оценил эти результаты Гамильтона в должной мере.

Оставляя в стороне несколько второстепенных работ по механике нашего автора, мы можем с уверенностью сказать, что независимо от них Миндингу обеспечено почетное место в истории этой науки изящными исследованиями по геометрической оптике и выдающейся работой 1864 г. по аналитической динамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Ф. Г. Миндинга

(1—72)

1. De valore integralium duplicum quam proxime inveniendo. (Докторская диссертация, представленная в Галльский университет в 1829 г., рукопись на 20 страницах, хранится в Архиве университета в Галле: Archiv der Martin-Lüther-Universität Halle-Wittenberg, Dissert. Minding).
2. Ueber die Curven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe 6, Bd. 3, H. 1, S. 99. J. reine und angew. Math., Bd. 5, 1830, SS. 297—304.
3. Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie vermittelst des barycentrischen Calculs. J. reine und angew. Math., Bd. 5, 1830, SS. 397—401.
4. Ueber die Berechnung des Näherungswertes doppelter Integrale. J. reine und angew. Math., Bd. 6, 1830, SS. 91—95.
5. Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 6, 1830, SS. 159—161. (Пер. на русск. яз. А. П. Широкова в кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 162—165).
6. Observatio pertinens ad solutionem aequationum indeterminatorum secundi gradus. J. reine und angew. Math., Bd. 7, 1831, SS. 140—142.
7. Anzeige. J. reine und angew. Math., Bd. 7, 1831. SS. 414—416. (Проспект подготовлявшейся книги «Anfangsgründe der reinen Zahlenlehre». Книга вышла под другим названием [8]).
8. Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Verlag G. Reimer, Berlin, 1832.
9. Théorème relatif à une certaine fonction transcendante. J. reine urd angew. Math., Bd. 9, 1832, SS. 295—296.
10. Sur les intégrales de la forme $\int \frac{dxP\sqrt[3]{p}}{c-x}$, p et P étant deux polynomes entiers. J. reine und angew. Math., Bd. 10, 1833, SS. 195—199.

11. Addition à l'article 12, cahier precedant. J. reine und angew. Math., Bd. 10, 1833, SS. 292.
12. Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui, à partir d'un point donné, coupent sous un angle determiné une courbe algébrique. J. reine und angew. Math. Bd. 11, 1834, SS. 20—25.
13. Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes dont les derivées sont determinées par des équations algébriques du troisième degré. J. reine und angew. Math., Bd. 11, 1834, SS. 373—383.
14. Beantwortung der im 11. Bande diesen Journals S. 200 vorgelegten Frage Nr. 4. J. reine und angew. Math., Bd. 14, 1835, SS. 179—180.
15. Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte. J. reine und angew. Math., Bd. 14, 1835, SS. 289—315.
16. Recherches sur ce qu'il y a d'analogue au centre des forces parallèles, dans un système à forces non parallèles. Comissaires M. M. Poissòn, Libri, Poncelet. C. R., t. 1, 1835, p. 282.
17. Ueber den Ort sämtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften. Als Fortsetzung der Untersuchung über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte. J. reine und angew. Math., Bd. 15, 1836, SS. 27—38.
18. Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon. J. reine und angew. Math., Bd. 15, 1836, SS. 313—316.
19. Handbuch der Differential- und Integralrechnung, nebst Anwendung auf die Geometrie. Verlag von F. Dümmler, Berlin, 1836.
20. Bemerkung über astatische Magnetnadeln. Poggendorffs Annalen der Physik, Bd. 40, 1837, SS. 151—153.
21. Beweis eines geometrischen Satzes. J. reine und angew. Math., Bd. 16, 1837, S. 351 (Пер. на русск. яз. А. П. Широкова в кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. [236, стр. 165—166]).
22. Handbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Zweiter Theil, enthaltend die Mechanik. Handbuch der theoretischen Mechanik. Verlag von F. Dümmler, Berlin, 1838. (Реф.: Jahrbücher für wissenschaftlicher Kritik. Berlin, November 1838, Sp. 669—678. Schellbach).
23. Ueber die Beigung gewisser Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 18, 1838, SS. 297—302.
24. Ueber die Biegung krummer Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 18, 1838, SS. 365—368.
25. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse. J. reine und angew. Math., Bd. 19, 1839, SS. 370—387. (Сокр. пер. на русск. яз. А. П. Широкова в кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей [236, стр. 166—176]).

26. Bemerkungen über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. J. reine und angew. Math., Bd. 20, 1840, SS. 168—170.
27. Ueber einer besonderen Fall bei der Abwickelung krummer Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 20, 1840, SS. 171—172.
28. Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien. J. reine und angew. Math., Bd. 20, 1840, SS. 323—327. (Сокр. пер. на русск. яз. А. П. Широкова в кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей [236, стр. 176—179]).
29. Ueber die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung. J. reine und angew. Math., Bd. 22, 1841, SS. 178—183. (Пер. на франц. яз.: J. de mathém. pures et appl., sér. 1, t. 6, 1841, pp. 412—418).
30. Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, ex principiis Abelianis derivatae. J. reine und angew. Math., Bd. 23, 1842, SS. 255—274.
31. Die Einrichtung der Klassenlotterie mit Freilosen in Hinsicht auf ihren durchschnittlichen Erfolg für Unternehmer und Spieler arithmetisch beleuchtet. Ein Beitrag zur politischen Arithmetik. Verlag Veit & Co, Berlin, 1842.
32. Developpement d'une expression symétrique du degré d'une équation resultant de l'elimination. Bull. phys.-math. de l'Académie sci. St.-Pétersbourg, t. 2, 1844, pp. 273—288 (Пер. на нем. яз.: J. reine und angew. Math., Bd. 31, 1846, SS. 1—11).
33. Mechanik. Repertorium der Physik, Bd. 5, 1844, SS. 1—88.
34. Erwiderung auf den Artikel 23 im 26. Bande dieses Journals. J. reine und angew. Math., Bd. 27, 1844, SS. 379—380.
35. Bemerkungen zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Bull. phys.-math. de l'Acad. sci. St.-Pétersbourg, t. 4, 1845, pp. 378—382. (То же см.: J. reine und angew. Math., Bd. 40, 1850, SS. 361—365).
36. Ein neuer Ausdruck des Hauptsatzes der Dioptrik. Bull. phys.-math. de l'Acad. sci. St.-Pétersbourg, t. 5, 1845, pp. 113—115 (То же см.: Annalen der Physik, Bd. 70, SS. 268—272)
37. Ueber den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (sogenannten Rösselsprung). Bull. de la classe phys.-mathém. de l'Acad de St.-Pétersbourg, t. 6, 1847, pp. 209—220. То же см.: J. reine und angew. Mathem., Bd. 44, 1852. SS. 73—82. The Cambrige and Dublin Mathem. Journ., v. 7, 1852, pp. 147—156.
38. Ueber einige Grundformeln der Geodäsie. Bull. phys.-math. de l'Acad. sci. St.-Pétersbourg, t. 8, 1849, pp. 88—92. (То же см.: J. reine und angew. Math., Bd. 44, 1852, SS. 66—72).
39. Sammlung von Integraltafeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule. Berlin, 1849.
40. Auflösung einer Aufgabe aus der Mecanique analytique von Lagrange. Melanges. 1853, t. 1, pp. 580—592; Bull. cl. phys.-mathém. de l'Acad. Sci. St.-Pétersbourg, t. 12, 1854, pp. 75—84.

41. Ueber die Schwingungen eines freihängenden, biegsamen Fadens. J. reine und angew. Math. Bd. 50, 1855, SS. 243—262.
42. Ein Blick auf die Geschichte der Dampfmaschine, insbesondere des Dampfwagens. Das Inland. Eine Wochenschrift für Liv-, Ehst- und Kurlands Geschichte, Geografie , Statistik und Literatur, Nr. 18, 1856, SS. 277—286.
43. Ueber einige Lehrsätze der Statik. Grunert's Archiv für Mathematik, Bd. 27, 1856, SS. 214—223.
44. Über den Wert des Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind und $m > n$ oder $m = n$ ist. Grunert's Archiv für Mathematik, Bd. 30, 1858, SS. 171—184.
45. Über die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werte dienen. J. reine und angew. Math., Bd. 55, 1858, SS. 300—309.
46. Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville. J. math. pures et appl., sér. 2, t. 4, 1859, pp. 274—280.
47. Über eine angebliche Berichtung der Formel für barometrische Höhenmessung. Kämtz Repertorium der Meteorologie, Bd. 2, 1862, SS. 32—35.
48. Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными. С.-Петербург, 1862. (Русск. пер. Мюллера).
49. Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erstes Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Mém. de l'Acad. sci. St.-Pétersbourg, 7 sér., t. 5, Nr. 1, 1863, pp. 1—95.
50. De curvatura superficierum questiones. Dorpat, 1863.
51. Disquisitio de formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina. Dorpat, 1864. (То же с комментариями А. Кнезера см.: Math. Ann. Bd. 55, 1902, SS. 119—135).
52. Quelques remarques analytiques à l'occasion de l'ouvrage de Mr. le Prince S. S. Ouroussof. Bull. Pét. Acad., t. 9, 1866, pp. 48—59. (То же: Melanges, t. 3, 1866, pp. 655—666).
53. Démonstration d'un théorème de statique. Bull. Pét. Acad., t. 12, 1868, pp. 233—239. (То же: Melanges, t. 4, 1872, pp. 245—252. Реф.: Jahrbuch, Bd. 1, 1871, SS. 314—315).
54. Über eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bull. Pét. Acad., t. 13, 1869, pp. 203—208. (То же: Melanges, t. 4, 1872, pp. 325—333. Реф.: Jahrbuch, Bd. 2, 1873, S. 117).
55. Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche. Bull. Pét. Acad., t. 13, 1869, pp. 524—528. (То же: Melanges, t. 4, 1872, pp. 343—349. Реф.: Jahrbuch, Bd. 2, 1873, S. 105).
56. Zur Methode der kleinsten Quadrate. Bull. Pét. Acad., t. 16, 1871, pp. 305—308. (То же: Melanges, t. 4, 1872, pp. 711—715).
57. Über die mittlere Krümmung der Flächen. Bull. Pét. Acad., t. 20, 1875, pp. 531—537. (То же: Melanges, t. 5, 1881, pp. 248—256. Реф.: Jahrbuch., Bd. 7, 1877, S. 470).
58. Über die Kurven kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen. Bull. Pét. Acad., t. 21, 1876, pp. 252—261. (То же: Melan-

ges, t. 5, 1881, pp. 297—308. Реф.: Jahrbuch, Bd. 8 (1876), S. 225).

59. Einige isoperimetrische Aufgaben. Bull. Pét. Acad., t. 24, 1878, pp. 398—409. (То же: Melanges, t. 5, 1881, pp. 443—458).

60. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings auf krummen Flächen. Bull. Pét. Acad., t. 25, 1878, pp. 190—193, (То же: Melanges, t. 5, 1881, pp. 575—579, Реф.: Jahrbuch, Bd. 10, 1880, S. 271).

61. Eine Anwendung der Differenzenrechnung. Bull. Pét. Acad., t. 25, 1878, pp. 225—228. (То же: Melanges, t. 5, 1881, pp. 581—588. Реф.: Jahrbuch, Bd. 11, 1881, S. 190).

62. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächenhalt, auf krummen Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 86, 1879, SS. 279—289. (Реф.: Jahrbuch, Bd. 11, 1881, S. 585).

Рефераты, написанные Ф. Г. Миндингом для «Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik. Herausgegeben von der Societät für wissenschaftliche Kritik zu Berlin».[84]

63. J. C. E. Schmidt. Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. 2 Bde. Göttingen, 1829 und 1830. Jahrbücher, Mai 1832.

64. J. Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methode, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, Reciprocität u. s. w. Erster Theil, Berlin, 1832, Jahrbücher, Mai 1833, Sp. 673—686.

65. G. C. Th. Francke. Lehrbuch der reine Elementar-Mathematik, zunächst für die oberen Classen Schleswig—Holsteinscher Gelehrtenschulen. Hamburg, 1833. Jahrbücher, September 1833, Sp. 327—328.

66. J. A. Grunert. Supplemente zu Georg Simon Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik. Erste Abteilung, A bis D. Leipzig, 1833. Jahrbücher, September 1833, Sp. 396—403.

67. J. P. Brewer. Lehrbuch der Hydrostatik, Aerostatik und Hydraulik. Düsseldorf, 1832. Jahrbücher, December 1833, Sp. 861—864.

68. C. Chr. Fr. Krause. Nova theoriae curvarum originaliae et vere scientificiae specimena quinque prima. Monachii, 1835. Jahrbücher, Januar 1836, Sp. 91—95.

69. A. Peters. Neue Curvenlehre. Grundzüge einer Umgestaltung der höheren Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode. Dresden, 1835. Jahrbücher, Januar 1836, Sp. 96.

70. J. H. T. Müller. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen, nebst vielen Uebungsaufgaben und Excursen. Erster Teil, die gesamte Arithmetik enthaltend. Halle, 1838. Jahrbücher, August 1839, Sp. 259—272.

71. Bourdon. Application de l'Algèbre à la Géometrie. Cinquième édition. Bruxelles, 1838. Jahrbücher, Juni 1840, Sp. 862—864.

---

[84] В список членов и сотрудников этого Берлинского общества Ф. Миндинг был включен в июне 1833 г.

72. De Pambour. A practical treatise on locomotive engines upon railways etc. London, 1836. De Pambour. Théorie de la machine à vapeur. Paris, 1839. Jahrbücher, Mai 1842, Sp. 785—791.

Общая литература

73. N. H. Abel. Oeuvres complêtes, t. 1, 2. Christiania, 1881.
74. N. H. Abel. Sur l'intégration de la forme différentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières. J. reine und angew. Math., Bd. 1, 1826, SS. 185—221; Oeuvres complêtes, t. 1, 1881, pp. 104—144.
75. N. H. Abel. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes (1826). Mémoires présentés par divers savants, t. 7, 1841, Paris. Oeuvres complêtes, t. 1, 1881, pp. 145—211.
76. N. H. Abel. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. J. reine und angew. Math., Bd. 3, 1828; Oeuvres complêtes, t. 1, 1881, pp. 444—456.
77. N. H. Abel. Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes. J. reine und angew. Math., Bd. 4, 1829; Oeuvres complêtes. t. 1, 1881, pp. 515—517.
78. N. H. Abel. Sur l'équation différentielle $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$. Oeuvres complêtes, t. 2, 1881, pp. 26—35.
79. J. Asen. Gesamtverzeichnis des Lehrkörpers der Universität Berlin, Bd. 1. 1810—1945. Leipzig, 1955.
80. B. Baule. Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum, 1, Math., Ann. Bd. 83, 1921, SS. 268—310.
81. E. Beltrami. Ricerche di analisi applicata alla geometria. Giorn. mat., t. 2, 1864, pp. 267—282, 297—306, 331—339, 355—375; t. 3, 1865, pp. 15—22, 33—41, 82—91, 228—240, 311—314.
82. E. Beltrami. Sulle flessione delle superficie rigate. Ann. mat., t. 7, 1865, pp. 105—138.
83. E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclides. Giorn. mat., t. 6, 1868, pp. 284—312.
84. Jacob Bernoulli. Curvatura laminae elasticae (1694). Opera omnia, t. 1, 1744, Genevae, pp. 576—600.
85. Johann Bernoulli I. Clar. Taylori Mathematici angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-anglis proposuit, solutum a Ioh. Bernoulli. Opera omnia, t. 2, 1742, Lausannae—Genevae, pp. 402—418.
86. E. Bezout. Cours de mathématiques à l'usage des gardes de Pavillion, t. 3, 1766, Paris, pp. 209.
87. E. Bezout. Théorie générale des équations algébriques. Paris, 1779, 4 éd.
88. E. G. Björling. Sur l'intégration de l'équation différentielle. J. mat., pures et appl., (2), t. 3, 1858, pp. 417—442.
89. K.-R. Biermann. Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie. Abhandlung. Deutsch. Akad.

Wissensch. zu Berlin, Kl. Mathem., Phys. und Techn., Bd. 3, 1960, SS. 1—75.

90. K.-R. Biermann. Über die Förderug deutscher Mathematikern durch Alexander von Humboldt. Alexander von Humboldt Gedenksschrift zur 100. Wieder seines Todestages. 1959, Berlin, S. 159.

91. K.-R. Biermann. Der Mathematiker Ferdinand Minding und die Berliner Akademie. Monatsber. Deutsch. Akad. Wissensch. zu Berlin. Bd. 3, H. 2, 1961, SS. 128—133.

92. K.-R. Biermann. Thomas Clausen. Mathematiker und Astronom. J. reine und angew. Math., Bd. 216, H. 3/4, SS. 159—198.

93. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Bd. 1, 3. Auflage, Berlin, 1930.

94. O. Bonnet. Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. J. École polytechn., t. 24, cah. 41, 1865, pp. 209—230; 2-me partie, t. 25, cah. 42, 1867, pp. 1—151.

95. O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. J. École polytechn., t. 19, cah. 32, 1848, pp. 1—146. См.: pp. 111—120.

96. E. Bour. Théorie de la déformation des surfaces, J. École polytechn., t. 22, cah. 39, 1862, pp. 1—148.

97. A. Brill und M. Nöther. Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinigung, Bd. 3, 1892—1893.

98. Briefwechsel zwischen C. G. Jacobi und M. H. Jacobi. Herausgegeben von W. Ahrens. Leipzig, 1907, S. 5.

99. E. Catalan. Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur. J. École polytechn., t. 17, cah. 29, 1843, pp. 121—156.

100. A. Cayley. On the theory of elimination. Cambridge and Dublin Mathem. Journal, v. 3, 1843.

101. Au. L. Cauchy. Resumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, t. 1. Paris, 1823.

102. Au. L. Cauchy. Leçons sur le calcul différentiel. Paris, 1829.

103. E. B. Cristoffel. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. J. reine und angew. Math., Bd. 70, 1869, SS. 46—70.

104. D. Codazzi. Intorno delle superficie le quali deformandosi ritegono de stesse linee di curvatura. Annali di matem., (1), t. 7, 1866, p. 410.

105. D. Codazzi. Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres. Mémoires présentés par divers savants, t. 27, 1883, Paris, pp. 1—47.

106. G. Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Geneva, 1750.

107. G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. 3-me partie, Paris, 1894,

108. G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. 2-me partie, Livre 5, ch. 6—8, Paris, 1889, p. 438 et suiv.

109. G. Darboux. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du I ordre et I degré. Bull. sci. math. et astr., (2), t. 2, 1878, pp. 60—96.

110. Ch. Delaunay. Sur la ligne de longeur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface. J. math. pures et appl., t. 8, 1843, pp. 241—244.
111. L. E. Dickson. History of theory of numbers, v. 1—3, 1919—1923, Washington.
112. U. Dini. Sulle superficie nelle quali la somms dei due raggi di curvatura principale e costante. Ann. mat., t. 7, 1865, pp. 5—18.
113. P.-G. Lejeune-Dirichlet. Sur les intégrales euleriennes. J. reine und angew. Math., Bd. 20, 1836, SS. 258—263. Werke, Bd. 1, 1889, Berlin, SS. 271—278.
114. E. H. Dirksen. Analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten. Berlin, 1823.
115. J. Eckenstein. Der akademische Mentor für die Studierenden der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Berlin, 1835, S. 280.
116. Z. Elliot. Sur une équation du I ordre et l'équation de Jacobi. Ann. École normale, (3), t. 7, 1890, pp. 101—134.
117. J. F. Encke. Über die Methode der kleinsten Quadraten. Berliner Astronom. Jahresbericht (1832, 1833, 1834); Gesammelte mathem. und astronom. Abhandl., Bd. 2, Berlin. 1888, S. 12.
118. L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausanne—Genf, 1744.
119. L. Euler. Specimen algorithmi singularis. Novi Commentarii Acad. Petropolit., t. 9, (1762—1763), Petropoli, 1764, pp. 53—69.
120. L. Euler. Solution d'une question curieuse qui ne parait soumise à aucune analyse. Commentationes arithm. coll., t. 1, 1849, S.-Pétersbourg, pp, 337—355.
121. L. Euler. Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1748, t. 4, pp. 234—248.
122. F. Fiala. Le problème des isopérimètres dans le plan de Riemann à courbure de signe constant. Comment. math. Helv. t. 15, 1943, pp. 249—264.
123. P. Y. E. Finck. Note relative à l'élimination. J. math. pures et appl., t. 9. 1844, Paris, pp. 334—335.
124. J. B. J. Fourier Analyse des équations determinées. Paris, 1831.
125. C. F. Gauss. Nachlass. (Die Seitenkrümmung). Werke, Bd. 8, Leipzig, 1900, SS. 386—395.
126. C. F. Gauss. Dioptrische Untersuchungen. Göttingen, 1841.
127. C. F. Gauss. Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibri. Gottingae, 1830.
128. C. F. Gauss. Theoria combinationis observatorium erroribus minimis obnoxiale. Pars 1, 1821, Pars 2, 1823. Supplem. 1826. Werke, Bd. 4, 1873, Göttingen, SS. 1—108.
129. W. Heymann. Zur Integration der Differentialgleichungen. Z. Mathem. und Phys., 27. Jahrgang., Leipzig, 1882, SS. 1—40.
130. W. Heymann. Integrable Fälle der Differentialgleichung. J. reine und angew. Math., Bd. 113, 1894, SS. 84—88.

131. C. G. Jacobi. Ueber Gauss's neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. J. reine und angew. Math., Bd. 1, 1826, SS. 301—308.
132. C. G. Jacobi Gesammelte Werke. Bd. 1—8. Berlin, 1881—1891.
133. C. G. Jacobi. Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differentialgleichungen. J. reine und angew Math., Bd. 17, 1837, SS. 68—82.
134. C. G. Jacobi De integratione equationes differentialis $(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$. J. reine und angew. Math., Bd. 24, 1842, SS. 1—4.
135. F. Klein. Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, 1926, S. 178. См. [223].
136. A. Kneser. Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen. Z. Mathem. und Phys., Bd. 45, Histor.-litterarische Abteilung, 1900, SS. 113—128.
137. A. Kneser. Variationsrechnung. Enzyklopädie mathem. Wissenschaft., Bd. 2, 1900. SS. 572—625.
138 Königliches Gymnasium zu Hirschberg in Schlesien Östern 1913. Nachrichten über das Schuljahr 1912/1913, S. 17.
139. A. Korkine. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Math. Ann., Bd. 48, 1896, SS. 317—364.
140. A. Korkine. Étude des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre. St.-Pétersbourg, 1902, pp. 1—171.
141. A. Korkine. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. C. R., t. 123, 1896, pp. 1183—1185.
142. A. Korkine. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. C. R., t. 123, 1896, pp. 38—40.
143. G. Kowalewski. Grosse Mathematiker. Eine Wanderung durch die Geschichte der Mathematik vom Altertum bis zur Neuzeit. Berlin, 1938.
144. L. Labatie. Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur. Paris, 1835.
145. S. F. Lacroix. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, éd. 2, t. 1, 1810, Paris. p. 102.
146. J. L. Lagrange. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. Nouv. Mémoires de l'Académie de Berlin, 1776. Oeuvres, t. 4, 1869, pp. 301—332.
147. J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1797. Oeuvres, t. 9, 1881.
148. G. Lamé et B. Clapeyron. Mémoire sur l'équilibre interieur des corps solides homogènes. J. reine und angew. Math., Bd. 7, 1831, SS. 145—169, 337—352, 381—413.
149. A. M. Legendre. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes. T. 1—3. Paris, 1827—1832.
150. A. M. Legendre. Exercices de calcul intégral. Paris, t. 1—3, 1811—1819.
151. M. Lenz. Geschichte der Königlichen Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin, Bd. 2. Halle, 1910.
152. A. Letnikow. Ueber die Bedingungen der Integrabilität einiger Differentialgleichungen. Dresden, 1867, SS. 1—40.

153. J. Liouville. Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système à liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action. J. math. pures et appl. (2), t. 1, 1856, pp. 297—304.

154. R. Lipschitz Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von Differentialen. J. rein eund angew. Math., Bd. 71, 1870, SS. 274—287, 288—295.

155. N. I. Lobatschevsky. Géometrie imaginaire. J. reine und angew. Math., Bd. 17, 1837, SS. 295—320.

156. G. Loria. Eugenio Beltrami e le sue opere matematice. Bibl. mathem., t. 2, 1901, pp. 392—440; см. p. 403, 404, 408.

157. C. MacLaurin. Geometria organica. London, 1720.

158. L. I. Magnus. Ueber eine Methode, den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung zu finden. J. reine und angew. Math., Bd. 16, 1843, SS. 365—367.

159. G. Monge. Application de l'analyse à la géometrie. Paris, 1807.

160. H. O. Müller. Geschichte and Verfassung «des kaiserlichen Landgerichts der ehemahligen Grafschaft Hirschberg». Heidelberg, 1911.

161. Neue Deutsche Zeitung, Nr. 101—103, Dorpat, Mai 1885.

162. E. Netto, R. Le Vavasseur. Les fonctions rationnelles. Encycl. sci. mathém. pures et appl., t. 1, vol. 2, fasc. 1, 9, pp. 73—232. «Règle de Minding», pp. 124—126.

163. F. Neumann. Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach denen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflektiert und gebrochen wird. Abhandl. der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1835, SS. 1—160.

164. H. A. Newton. On shooting stars. Memoirs of the national Acad. of sciences, v. 1. Washington, 1866, pp. 291—312.

165. M. Ohm. Die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Berlin, 1825.

166. G. M. Pagani. Sur l'équilibre d'un corps solide suspendu à un cordon flexible. J. reine und angew. Math., Bd. 19, 1839, SS. 185—204.

167. P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre. C. R., t. 122, 1896, pp. 1319—1322; C. R., t. 123, 1896, pp. 88—91.

168. Chev. de Pambour. A practical treatise on locomotive engines upon railways. London, 1836.

169. O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig-Berlin, 1913.

170. E. Picard. Sur un théorème de M. Darboux. C. R., t. 100, 1885, pp. 618—620.

171. S. D. Poisson. Mémoire sur l'élimination dans les équations algébriques. J. École polytechn. (1), cah. 11, 1804, Paris, p. 199.

172. S. D. Poisson. Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris, 1831.

173a E. Schmidt. Die isoperimetrische Ungleichung in der hyperbolische Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolischen Raum. Math. Z., Bd. 46, 1940, SS. 204—230.

173б. E. Schmidt. Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Grossen. Math. Z., 1942, Bd. 47, SS. 489—642.

174. W. Schräder. Geschichte der Friedrich-Universität zu Halle. 2-e Theil, Berlin, 1894.
175. K. Schröder. 150 Jahre Humboldt-Universität zu Berlin. Des Werden einer jungen Universität. «Forschen und Wirken. Festschrift zur 150-Jahr-Feier der Humboldt-Universität zu Berlin 1810—1960», Bd. 1, Berlin, 1960.
176. H. A. Schwarz. Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. J. reine und angew. Math., Bd. 80, 1875, SS. 280—300.
177. K. E. Senff. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Gesetze der doppelenten Strahlenbrechung und Polarisation des Lichtes in den Crystallen des zwei und eingliedrigen Systems. Dorpat, 1837.
178. J. Serret. Cours de calcul différentiel et intégral, t. 2, 1868, p. 431; 5 éd. Paris, 1900, p. 430.
179. J. J. Somoff. Mémoire sur les forces qui ne changent pas d'intensité et de direction quand leurs points d'application formant un systéme invariable reçoivent un deplacement fini quelconque. St.-Pétersbourg, 1876.
180. J. J. Somoff. Sur un moyen algébrique de démontrer le principe de Hamilton relatif à l'intégration des équations de la dynamique. Bull. Acad. sci. St.-Pétersbourg, t. 16. 1871, col. 87—97.
181. J. J. Somoff. Note relative au moyen employé par Gauss dans la méthode des moindres carrés, pour reduire une fonction homogène quadratique à une somme de carrés. Bull. Acad. sci. St.-Pétersbourg, t. 18, 1873, col. 438—442.
182. P. Stäckel. Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Leipzig. Berichte, Bd. 45, 1893, SS. 444—467.
183. P. Stäckel., K. Peterson. Bibliotheca mathematica, (3), Bd. 2, 1901, Leipzig, SS. 121—132.
184. J. Steiner. Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'èspace en général. J. mathém. pures et appl., t. 6, 1841, pp. 105—170.
185. V. D. Taube, H. Issen. Alexander Keyserling. Berlin, 1902.
186. Verzeichnis der Vorlesungen an der Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin, 1831—1843.
187. A. Voss. Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander abwickelbarer Flächen. Enzyclopädie mathem. Wissenschaft., Bd., 3, D6a, 1903, SS. 355—440.
188. J. Weingarten. Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. J. reine und angew. Math., Bd. 59, 1861, SS. 382—393.
189. J. Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist. J. reine und angew. Math., Bd. 62, 1863, SS. 160—173.
190. A. Winckler. Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. Sitzungsberichte Akad. der Wissenschaften zu Wien, Mathem.-Naturwiss. Kl., Bd. 99, Abt. 2-a, 1890, SS. 457—479, 875—898.
191. Алексеев Н. Н. Интегрирование дифференциальных уравнений. М., 1878.
192. Андреевский М. А. Об интегрировании однородных дифференциальных выражений высших порядков между несколь-

кими переменными независимыми. Матем. сб., т. 4, 1869—1870, стр. 105—138.

193. Андреевский М. А. Об интегрирующем множителе дифференциальных уравнений второго порядка вида $A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0$. Матем. сб., т. 4, 1869—1870, стр. 143.

194. Анисимов В. А. Об условиях необходимых и достаточных для того, чтобы нули или бесконечности эйлерова множителя для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка и 1-й степени с коэффициентами алгебраического характера были частными интегралами этого уравнения. Матем. сб., т. 25, 1904, стр. 509.

195. Биографический словарь профессоров и преподавателей имп. Юрьевского университета за 100 лет его существования (1802—1902), тт. 1, 2, 1902, стр. 188—192. (Статья Левицкого о Миндинге).

196. Биографический словарь деятелей естествознания и техники, т. 2. Изд. БСЭ, М., 1959, стр. 38. (Статья «Миндинг»).

197. Бугаев Н. В. Различные применения начала наибольших и наименьших показателей в теории алгебраических функций. Матем. сб., т. 14, 1888—1890, т. 16, 1891—1893.

198. Бугаев Н. В. Решение одного шахматного вопроса с помощью числовых функций. Матем. сб., т. 9, в. 3, 1879, стр. 355—360.

199. Васильев А. В. Математика, Пгр., 1921.

200. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. А. П. Юшкевича. Физматгиз, М., 1960.

201. Габович Я. А., Хованский А. Н. Ф. Г. Миндинг, и его вклад в теорию цепных дробей. Наука в Прибалтике в XVIII—начале XIX в. Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1962, стр. 55—56.

202. Гайдук Ю. М. Ф. Клаузен как математик. Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Изд. АН Лит. ССР, Вильнюс, 1965, стр. 9.

203. Гайдук Ю. М. Томас Клаузен и его математическое творчество. Matemaatika ja Kaasaeg, т. 12, Тарту, 1967, стр. 116—122. (на эст. яз.).

204. Галченкова Р. И. Математика в Ленинградском (Петербургском) университете. ИМИ, в. 14, 1961, стр. 355—399.

205. Галченкова Р. И. Алгебра в Тартуском университете XIX века. Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Изд. АН Лит. ССР, Вильнюс, 1965, стр. 11—13.

206. Галченкова Р. И. О работах Миндинга по алгебре. Научные связи Прибалтики в XVIII—XIX в. Изд. «Зинатне», Рига, 1968, стр. 59—62.

207. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. ГИТТЛ, М., 1952.

208. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. Изд. АН СССР, М., 1963.

209. Григорьян А. Т. Михаил Васильевич Остроградский. Изд. АН СССР, М., 1961.

210. Депман И. Я. Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете. Приглашение К. Ф. Гаусса на кафедру

математики и астрономии. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. инст., 1955, т. 14, стр. 128—137.

211. Депман И. Я. К. Ф. Гаусс и Дерптско-Юрьевский университет. Вопросы истории естествознания и техники, в. 1. М., 1956, стр. 241—245.

212. Депман И. Я. М. Ф. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского. ИМИ, в. 3, 1950, стр. 475—485.

213. Депман И. Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. ИМИ, в. 5, 1952, стр. 134—164.

214. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. 1863—1939. Изд. «Наука», М., 1968.

215. Дорофеева А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций. ИМИ, в. 14, 1961, стр. 101—180.

216. Ермаков В. П. Дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие данный интегрирующий множитель факториальной формы. Сообщ. Харьковск. матем. общ., 2-я сер., т. 9, 1906, стр. 35—50.

217. Ермаков В. П. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сообщ. Харьковск. матем. общ., 2-я сер., т. 8, 1904, стр. 113—122.

218. Золотарев Е. И. Об ученых трудах академика О. И. Сомова. Полн. собр. соч. Е. И. Золотарева, т. 2. Изд. АН СССР, Л., 1932, стр. 67.

219. История отечественной математики, т. 2. «Наукова думка», Киев, 1967.

220. Каган В. Ф. Лобачевский. Изд. 2. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

221. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., ч. 1, 1947; ч. 2, 1948.

222. Кенкмаа Р. и Эрингсон Л. Из истории Academia Gustaviana в Тарту (1632—1656). Скандинавский сб., т. 2. Эст. гос. изд., Таллин, 1957, стр. 137—175.

223. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. ОНТИ, М., 1937.

224. Ковальский М. Ф. Теория интегрирующего множителя дифференциальных уравнений вида $f(x,y)\,dx + F(x,y)\,dy = 0$. Магист. соч. Харьков, 1866.

225. Коркин А. Н. Изыскания о множителях дифференциальных уравнений 1-го порядка. Матем. сб., т. 24, в. 2, 3, 1903—1904, стр. 194—416. (Пер. с франц. Г. С. Зернова).

226. Коркин А. Н. По поводу статьи В. П. Ермакова под заглавием «Дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие данный интегрирующий множитель факториальной формы». Сообщ. Харьковск. матем. общ., 2-я сер., т. 9, 1906, стр. 51—59.

227. Коялович Б. М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$. Магист. дисс. СПб., 1894.

228. Крамар Ф. Д., Молюков И. Д. Иосиф Иванович Сомов. Математик, механик, педагог. Изд. Казахск. гос. унив., Алма-Ата, 1965.

229. Лаптев Б. Л. О библиотечных записях книг и журналов, выданных Н. И. Лобачевскому. Усп. матем. наук, т. 14, в. 5, 1959, стр. 153—155.

230. Латышева К. Я. О работах Ермакова по теории дифференциальных уравнений. ИМИ, в. 9, 1956, стр. 691—722.

231. Летников А. В. Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений. Матем. сб., т. 1, 1866, стр. 297—350.

232. Логинова Г. П. и Селиханович В. Г. Алексей Николаевич Савич. Изд. «Наука», М., 1967.

233. Лумисте Ю. Г. О связях математиков Тартуского университета XIX века с Лобачевским. Eesti Loodus, 1959, № 3, стр. 162—165. (На эст. яз.).

234. Лумисте Ю. Г. Предвосхищение формул Френе в сочинении К. Э. Зенфа. Вопр. истории физ.-матем. наук, изд. «Высшая школа», М., 1963, стр. 141—147.

235. Лумисте Ю. Г. Дополнения к биографии Т. Клаузена. Matemaatika ja Kaasaeg, т. 12, Тарту, 1967, стр. 123—124. (На эст. яз.).

236. Лумисте Ю. Г. Тартуский университет и начало дифференциально-геометрических исследований в России. Наука в Прибалтике в 18-м—начале 19-го в. Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1962, стр. 47—50.

237. Лумисте Ю. Г. К истории физико-математических наук в Тартуском университете в середине XIX века. Из истории естествознания и техники Прибалтики, т. 1 (VIII). Изд. «Зинатне», Рига, 1968, стр. 19—24.

238. Любарский А. Свет русской науки (очерки). Эст. гос. изд., Таллин, 1952.

239. Материалы научной конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Г. Ф. Паррота (Тарту, 1—2 июля 1967). Изд. Тартуск. гос. унив., 1967.

240. Мартинсон Э. Э. История основания Тартуского (б. Дерптско-Юрьевского) университета. Изд. ЛГУ, 1954.

241. Мартинсон Э. Э. Исторические связи Тартуского (б. Юрьевского) университета с русской наукой. Эст. гос. изд., Таллин, 1951.

242. Млодзеевский Б. К. Карл Михайлович Петерсон и его геометрические работы. Матем. сб., т. 24, в. 1, 1903, стр. 1—21.

243. Млодзеевский Б. К. Об изгибании поверхностей Петерсона. Матем. сб., т. 24, в. 2, 1904, стр. 417—474.

244. Млодзеевский Б. К. Исследования об изгибании поверхностей. Уч. зап. Московск. унив., отд. физ.-матем. наук, в. 7, 1887, стр. 1—141.

245. Морозов А. А. Михаил Васильевич Ломоносов. Изд. «Молодая гвардия», М., 1955.

246. Морозова Н. Н. Из истории преподавания математики в Дерптском университете. Уч. зап. Московск. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 123, 1963. Высш. алгебра, элементарн. матем., методика математики, в. 3, стр. 115—121.

247. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах русских математиков XIX и начала XX в. ИМИ, в. 17, 1966, стр. 362—369.

248. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах Е. И. Золотарева. ИМИ, в. 16, 1965, стр. 191—206.

249. Никифорова Т. Р. Осип Иванович Сомов. Изд. «Наука», М.—Л., 1964.

250. Новокшанова (Соколовская) З. К. Василий Яковлевич Струве. Изд. «Наука», М., 1964.

251. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.

252. Обзор деятельности императорского Дерптского университета. На память о 1802—1865 годах. Составлен по отчетам и донесениям, представленным попечителю Дерптского учебного округа. Дерпт, 1866.

253. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. ГИТТЛ, М., 1956.

254. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев. Изд. «Наука», Л., 1966.

255. Ожигова Е. П. Ф. Миндинг и Петербургская Академия наук. Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Изд. АН Лит. ССР, Вильнюс, 1965, стр. 49—50.

256. Ожигова Е. П. Теория чисел в исследованиях профессоров Тартуского университета. Научные связи Прибалтики в XVIII—XX веках. Изд. «Зинатне», Рига, 1968, стр. 58—59.

257. Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин. Изд. «Наука», Л., 1968.

258. Остроградский М. В. Разбор сочинения г. проф. Миндинга под заглавием «Изыскания, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными». Тридцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград 16 июня 1861 г. СПб., 1861, стр. 49—54; М. В. Остроградский, Полн. собр. тр., т. 3. Изд. АН Укр. ССР, Киев, 1961, стр. 328—329.

259. Переписка Александра Гумбольдта с учеными и государственными деятелями России. Изд. АН СССР, М., 1962.

260. Петерсон К. М. Об изгибании поверхностей. ИМИ, в, 5, 1952, стр. 87—112.

261. Петерсон К. М. Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями. Матем. сб., т. 1, 1866, стр. 391—438,

262. Петерсон К. М. О кривых на поверхностях. Матем. сб., т. 2, 1867, стр. 17—44.

263. Петерсон К. М. Об изгибании поверхностей второго порядка. Матем. сб., т. 10, 1882, стр. 476—523.

264. Петухов В. Е. Императорский Юрьевский, бывший Дерптский университет за сто лет его существования (1802—1902). Юрьев, 1902.

265. Погребысский И. Б. Математики Тартуского (Дерптского) университета в середине XIX века. Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Изд. АН Лит. ССР, Вильнюс, 1965, стр. 59.

266. Прудников В. Е. В. Я. Буняковский — ученый и педагог. Учпедгиз, М., 1954.

267. Россинский С. Д. Комментарии к диссертации К. М. Петерсона. ИМИ, в. 5, 1952, стр. 115 — 117.

268. Ряго Г. Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета (М. Бартельс, Ф. Миндинг, Ф. Молин, Г. Колосов). Уч. зап. Тартуск. гос. унив., в. 37, Таллин, 1955, стр. 74—105,

269. Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. ГИТТЛ, М., 1957.
270. Синцов Д. М. Рациональные интегралы линейных уравнений. Казань, 1898.
271. Соловьев С. М. История России с древних времен. Книга 8 (тт. XV, XVI). 2-е изд. Изд. соц.-экон. лит., М., 1962.
272. Сомов О. И. Рациональная механика. Ч. 2. Статика. СПб., 1877.
273. Сонин Н. Я. О дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$. а) Изв. СПб. АН, 1895, № 2, стр. 93—128; б) Изв. СПб. АН, 1895, № 3, стр. 339—359.
274. Стройк Д. Дж. Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия. Гостехиздат, М.—Л., 1941.
275. Суворов Ф. М. О характеристиках систем трех измерений. Уч. зап. Казанск. унив., т. 7, 1871, Казань, (см. [281], стр. 260).
276. Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России. ИМИ, в. 4, 1951, стр. 258, 298.
277. Урусов С. С. Дифференциальные и разностные уравнения. М., 1863.
278. Урусов С. С. Об интегрирующем множителе разностных и дифференциальных уравнений. Матем. сб., т. 1, 1866, стр. 225—290.
279. Фиников С. П. Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи. ОНТИ, М.—Л., 1937.
280. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, М., 1952.
281. Хилькевич Э. К. Из истории распространения и развития идей Н. И. Лобачевского в 60—70-х годах XIX столетия. ИМИ, в. 2, 1947, стр. 168, 179, 229.
282. Эрмит Ш. Курс анализа. ОНТИ, М., стр. 256. (Пер. с 4-го франц. изд. 1894 г.).
283. Эйлер Л. Интегральное исчисление Гостехиздат, М., т. 1, 1956, т. 2, 1957; Физматгиз, М., т. 3, 1958.
284. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных, т. 2. Физматгиз, М., 1962, стр. 238—255.
285. Эрингсон Л. Из истории Academia Gustavo Carolina (1690—1710). Скандинавский сб., т. 7. Эст. гос. изд., Таллин, 1963, стр. 184—218.
286. Юбилейный акт С.-Петербурского унив. 8 февраля 1869. СПб., 1869.
287. Юшкевич А. П. Математика. В кн.: История естествознания в России в первой половине XIX века. Изд. АН СССР, М., 1957, стр. 33—89.
288. Юшкевич А. П. История математики в России. Изд. «Наука», М., 1968.
289. Языковский архив, в. 1. Письма Н. М. Языкова к родным за дерптский период его жизни. СПб., 1913.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ААН — Архив Академии наук СССР, Ленинградское отделение
ААН (М) — Архив Академии наук СССР, Москва
ЦГИАЛ — Центральный государственный исторический архив Ленинграда
ЦГИА Эст. ССР — Центральный государственный исторический архив Эстонской ССР
ИМИ — Историко-математические исследования
Журнал Крелле — Journal für die reine und angewandte Mathematik
Журнал Лиувилля — Journal de mathématiques pures et appliquées
Bull. Pét. Acad. — Bulletin de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg
C. R. — Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris
Jahrbuch — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
Math. Z. — Zeitschrift für Mathematik und Physik.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Римма Ивановна Галченкова, Юло Гориевич Лумисте,
Елена Петровна Ожигова, Иосиф Бенедиктович Погребысский

ФЕРДИНАНД МИНДИНГ

Утверждено к печати Редколлегией серии
«Научно-биографическая литература» АН СССР

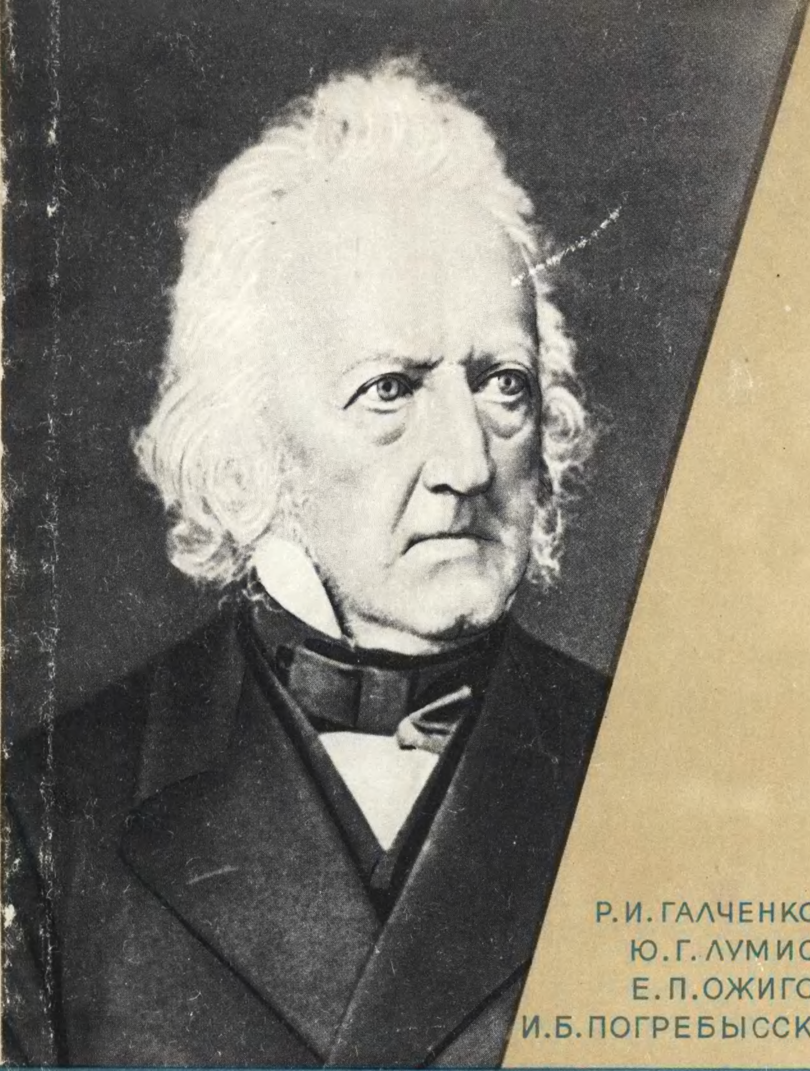
Редактор издательства *А. А. Борисов.* Художник *Д. С. Данилов*
Технический редактор *М. Н. Кондратьева.* Корректор *Г. А. Мошкина*

Сдано в набор 12/III 1970 г. Подписано к печати 9/XI 1970 г. Формат бумаги $84\times108^{1}/_{32}$. Бум. л. $3^{17}/_{32}$. Печ. л. 7+1 вкл. ($^{1}/_{16}$ печ. л.) = 11,86 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 12.10. Изд. № 4223. Тип. зак. № 837. М-31739. Тираж 3200.
Бумага № 1. *Цена 76 коп.*

Ленинградское отделение издательства «Наука»
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1

1-я тип. издательства «Наука». Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

ФЕРДИНАНД МИНДИНГ



Р. И. ГАЛЧЕНКОВА
Ю. Г. ЛУМИСТЕ
Е. П. ОЖИГОВА
И. Б. ПОГРЕБЫССКИИ

Фердинанд
МИНДИНГ

76 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ