АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Н. Ф. Канунов

Федор Эдуардович
МОЛИН

1861—1941

Издательство «Наука»
Москва
1983

К а н у н о в Н. Ф. Федор Эдуардович Молин (1861—1941). М.: Наука, 1983.

В книге освещены жизнь и научная деятельность выдающегося математика и представителя русской культуры Ф. Э. Молина, с именем которого связаны основные результаты в теории алгебр и представлений групп. Показана многосторонняя педагогическая работа ученого в Дерптском (ныне Тартуском) и Томском университетах.

Для всех интересующихся историей развития отечественной науки.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

$К\frac{170201000\text{-}136}{054(02)\text{-}83}50\text{-}82$ НП

От автора

Эта книга посвящается жизни и творчеству выдающегося русского алгебраиста Федора Эдуардовича Молина. Он был одним из немногих первых специалистов по алгебре в России конца XIX в. Слово «первый» вообще во многих отношениях применимо к Ф. Э. Молину. Его докторская диссертация (1892 г.) была первым наброском общей теории ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, в котором с различной степенью полноты впервые сформулированы и обоснованы основные три структурные теоремы числовых алгебр, частью усовершенствованные Э. Картаном и затем обобщенные Дж. Веддерборном. В ней впервые столь полно рассматривается теория уравнений таких алгебр; исследуется и развивается (введенное А. Кэли на примере) понятие линейного (и регулярного) представления алгебры и связи его строения с разложением характеристического многочлена (общего элемента алгебры) на неприводимые множители. По свидетельству Дж. Веддерборна, Молин первым изучил композиционный ряд инвариантных подмодулей рассматриваемого им модуля (линейных форм) представления и пришел к выводу о том, что матрица общего элемента числовой алгебры может быть представлена в треугольно-блочной или даже диагонально-блочной форме. Поэтому Молип оказался первым (в Европе) из тех, кто показал пользу матричного исчисления А. Кэли. Несомненно он был первым автором гиперкомплексного аспекта (по выражению Бурбаки) теории представления конечных групп (т. е. представлений с помощью групповой алгебры). Этот список первооткрытий Ф. Э. Молина мог бы быть продолжен.

Ф. Э. Молин был первым профессором математики в Сибири. Он первым ввел в обычай практические занятия после лекций.

Его приватиссимум и затем его работа с отдельными студентами первых наборов физико-математического факультета Томского университета с целью подготовки наиболее способных из них к преподавательской и научной деятельности явились прообразом будущей аспирантуры, учрежденной позже.

При работе над вторым и четвертым разделами (гл. вторая), затрагивающими научно-педагогическую деятельность Ф. Э. Молина в Томском технологическом институте и Томском университете, автор отчасти использовал материал, собранный К. Ф. Агаповой. Автор выражает ей глубокую благодарность.

Автор особо признателен Э. Ф. Молиной — дочери Ф. Э. Молина — за предоставленную возможность использования личного архива ученого и ее воспоминаний о нем. Считаю приятным долгом сердечно поблагодарить И. Г. Башмакову, Б. А. Розенфельда и С. С. Демидова, взявших на себя нелегкий труд прочтения рукописи, сделавших ряд ценных замечаний, улучшивших ее содержание.

Глава 1

Дерптский период жизни и творчества Ф. Э. Молина

1. Детство и отроческие годы

В 1751 г. прапрадед Ф. Э. Молина — Иоганн Молин из шведского городка Гётеборга (Göteborg) — навечно переселился в Россию на север Лифляндской губернии, где в небольшом местечке недалеко от Ревеля (ныне г. Таллин) занял место учителя приходской школы и органиста местной евангелической церкви.

Его сын Андрей учился часовых дел мастерству в Риге. Став позднее искусным часовых дел мастером, он пользовался известностью далеко за пределами города. Первого из своих сыновей — Густава — А. И. Молин определил по торговой части, второму — будущему отцу ученого — Эдуарду, обладавшему незаурядными способностями к наукам, решил дать образование. В 1839 г. после окончания Рижской гимназии Эдуард поступил на философское отделение [1] Дерптского университета в качестве студента филологии и в 1843 г. окончил его, сдав экзамен на звание домашнего учителя. После нескольких лет неустанного труда и совершенствования знаний он приобрел известность знатока классических языков и занял сравнительно независимое положение учителя частных гимназий Риги. К концу жизни Эдуард Андреевич возглавлял одну из них.

В 1859 г. Эдуард Молин женился на домашней учительнице Гертруде Гартман, происходившей из семьи, занимавшей видное положение в среде трудовой рижской интеллигенции.

Гертруда Гартман отличалась мягким и отзывчивым характером, получила прекрасное воспитание в духе пе-

[1] Философское отделение Дерптского университета было разделено на физико-математический и историко-филологический факультеты лишь в 1850 г.

редовой интеллигенции того времени. Она знала и любила музыку, классиков отечественной и иностранной литературы, владела несколькими иностранными языками и была талантливым педагогом. У Эдуарда и Гертруды Молиных было трое детей: Анна, Федор и Мария.

Федор Эдуардович Молин родился 11 сентября (29 августа) 1861 г. Детство Федора не было веселым и беззаботным. Годы напряженной, скудно оплачиваемой, полной унижений работы репетитором в домах местных богатеев и частных гимназиях, необходимость всегда экономить сказались на гордом и независимом характере Эдуарда. В семье он был строгим человеком, сторонником неукоснительного порядка, дисциплины и строжайшей экономии. У детей Молиных было, пожалуй, больше занятий и книг, чем игрушек и игр. Дети Молиных получали вначале домашнее образование, как было тогда принято в большинстве семей городской интеллигенции.

Федор и его сестренки побаивались занятий с отцом, проводившихся по расписанию, строго регламентировавшему каждый их день с раннего возраста. Зато добрым ангелом семьи была мать, умевшая ласковым словом, шуткой доставлять радость детям, скрасить их существование. Она умело преподавала им начатки знаний: занятия с нею носили скорее характер увлекательных путешествий в непознанное, ежедневно продолжающейся игры, соревнования, чем скучной обязанности. Федор с удовольствием воспринимает правила этой игры: много читать, размышлять о прочитанном и всегда самостоятельно искать решение трудных вопросов. Особенно он любит решать трудные арифметические задачи и постигать незнакомые языки. Уже к поступлению в гимназию Федор в совершенстве овладел эстонским, шведским, немецким и французским языками. В 1867 г. Федор поступает в Рижскую гимназию.

Гимназист Федор Молин рос сосредоточенным, с виду застенчивым мальчиком, но был неожиданно смелым и решительным, когда требовалось защитить свои убеждения или достоинство. Товарищи по классу любили Федора не только за независимость поступков, суждений, отсутствие желания выделить свою особу первого ученика на первый план, но и за его отзывчивость и постоянную готовность помочь каждому.

В младших классах Федор в равной степени был увлечен как гуманитарными, так и точными науками.

Унаследовав от отца и матери интерес к филологии, он уже в гимназии в совершенстве овладел классическими языками (древнегреческим, древнееврейским, латинским) и свободно читал древних авторов в подлинниках. Из новых языков он изучил французский, английский и итальянский языки. У гимназиста Ф. Молина выработался свой метод овладения незнакомыми языками, сходный с методом Шлимана и заключающийся в чтении возможно большего количества произведений на вновь изучаемом языке с одновременным постижением его грамматических тонкостей, а если возможно, и разговорной речи. «Прочитайте сто романов на каком-либо языке,— любил говорить он позднее,— и Вы будете знать этот язык». Интерес к языкам Федор Эдуардович пронес через всю свою жизнь. В зрелые годы он, кроме классических, в совершенстве владел почти всеми европейскими языками: немецким, французским, итальянским, испанским, португальским, английским, голландским, шведским, норвежским.

В 1871 г. семью Молиных постигло большое несчастье — умер кормилец семьи Эдуард Молин. Опекуном семьи стал разбогатевший и ставший к тому времени видным рижским купцом его брат Густав.

Пенсии Гертруде не полагалось, и она вынуждена была содержать семью на скромные сбережения, оставшиеся после смерти мужа. Единственно чем мог поддержать мать в несчастье десятилетний Федор — это порадовать ее успехами в учении.

С недетской серьезностью погружается он в занятия. В сохранившихся матрикулах гимназиста Молина за 1872, 1873 и 1878 гг. мы видим постоянную отметку «Recht gut» по математике и большинству остальных предметов. По мнению педагогов, у гимназиста старших классов Молина обнаруживается несомненная талантливость, соединенная с прилежанием, но законоучителя и учителя немецкого языка озадачивает прорывающаяся иногда небрежность к их предметам, неожиданная для такого дисциплинированного и способного мальчика.

В 1879 г. Федор Молин оканчивает Рижскую гимназию с отличными оценками, кроме закона божьего и немецкого, по которым в его аттестате стоит отметка II[2]. Встает вопрос о его будущем. Якш, богатый рижский ку-

---

[2] Соответствует современной оценке 4.

пец и дальний родственник Молиных, ставший опекуном Федора после Густава, настоятельно советует определить Федора в торговлю. По его мнению, это надежнее обеспечит будущее Федора, чем университетский диплом. Однако Федор твердо заявляет о своем желании учиться дальше. Это и то, что мать стала на сторону сына, убедило опекуна, и он снял свои возражения.

2. Студенческие годы. Первые шаги в науке

В 1880 г. Федор Эдуардович поступает на физико-математический факультет Дерптского университета. Чтобы быть поближе к сыну и не вести непосильные расходы на два дома, Гертруда вместе с семьей переезжает в Дерпт на постоянное жительство.

Главной достопримечательностью Дерпта, старинного города, основанного на месте эстонского поселения Тарбату еще Ярославом Мудрым и названного им тогда городом Юрьевом, был, конечно, Дерптский университет. Именно по университету Дерпт носил поэтические названия «города муз на берегу Эмбаха», или «Эстонских Афин». Дерптский университет был единственным университетом в России, учрежденным в 1802 г. по образцу немецких университетов для сыновей прибалтийского дворянства, сохранившим свои традиции и в 80-х годах XIX в. Делопроизводство и преподавание в нем велось на немецком языке. Его устав резко отличался от устава остальных университетов России, являясь несколько видоизмененным вариантом статута немецких университетов с их академической автономией, замкнутой в себе корпорацией профессоров в большинстве немецкого происхождения и пришельцев из Германии и корпорациями студентов с их собственным статутом (в котором отмечено: «Корпорации отнюдь не должны преследовать никаких политических целей» [3]), собственными домами-клубами, знаменами, факельными шествиями, цветными лентами отличий и рапирами. Образ жизни студентов-корпорантов в начале 80-х годов ничем не отличался от

[3] Пункт 2 статута корпораций, утвержденного попечителем Дерптского учебного округа Брадке.

«буршикозного» быта корпорантов 50-х годов, заполненного кутежами, сомнительными приключениями, описанного Боборыкиным в романе «В путь-дорогу». Правда, если в 50-х годах в корпорациях состояло 50%, то в 80-х — уже 30% от числа студентов университета (до 500 из 1812 студентов на 1880 г.). Остальное студенчество стояло вне корпораций.

Студент Ф. Молин держался в стороне от шумной братии корпорантов. Своею специальностью он избрал астрономию. По учебному плану студенту-астроному в течение шести семестров предстояло прослушать: аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, высшую алгебру, физику, химию, механику, теоретическую общую и практическую астрономию, историю русской литературы, логику и ряд спецкурсов по выбору (новейшая геометрия, теория аналитических и эллиптических функций, теория чисел, теория дифференциальных уравнений и др.). Кафедра прикладной математики была одной из самых сильных кафедр физико-математического факультета. Ею тогда руководил (вплоть до своей отставки в 1883 г.) известный ученый Фердинанд Миндинг (1806—1885), получивший крупные результаты в дифференциальной геометрии и оставивший заметный след в ряде других областей математики. У него Федор Молин слушал механику, теорию упругости, общие курсы математики; аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, а также теорию чисел Молин слушал у профессора Петера Гельмлинга (1817—1901), занимавшего тогда кафедру чистой математики; физику вместе с практикумом, механическую теорию тепла — у профессора Артура Эттингена; теорию определителей, теорию потенциалов, математические главы физической географии и метеорологию — у профессора Карла Вейрауха (1841—1891), занимавшего кафедру физической географии и метеорологии. Кроме того, студент Молин прослушал химию (у профессора К. Шмидта) и историю русской литературы (у экстраординарного профессора П. А. Висковатова).

Наибольшее же влияние на Ф. Э. Молина оказали директор университетской обсерватории профессор Л. Шварц и астроном-наблюдатель А. Линдстедт. Людвиг Шварц (1822—1894) получил среднее образование в Петербурге, а в 1846 г. блестяще окончил Дерптский университет, учась на стипендию, собранную его петербургскими учителями. С 1846 г. он — ассистент Дерптской обсерватории. В качестве астронома Шварц участвует в трудной географической экспедиции в Забайкалье и на Амуре 1849—1853 гг. Через год командируется в Восточную Сибирь в качестве начальника астрономо-географической экспедиции 1855—1858 гг. С 1865 г. занимает должность астронома-наблюдателя университетской обсерватории, а с 1872 г. назначен профессором астрономии. В 80-х годах Л. Шварц читал курсы общей астрономии, геодезии, теоретической и практической астрономии.

Ф. Э. Молина особенно заинтересовал курс «Определение элементов путей планет и комет», прочитанный Л. Шварцем во втором семестре 1880 г. Этот курс и те астрономические наблюдения над кометой 1880_{III}, которые Молин производил под руководством А. Линдстедта, легли в основу первой научной работы Федора Эдуардовича.

Андерс Линдстедт (1854—1936), молодой астроном-наблюдатель Дерптской обсерватории, окончил Упсальский университет в 1874 г. со степенью кандидата. В 1877 г. за работу по астрономии получил степень доктора философии в Лунде, где работал приват-доцентом, пока в 1879 г. не был приглашен в Дерпт на должность астронома-наблюдателя. Наблюдая звезды для составлявшегося тогда астрономическим обществом звездного каталога, Линдстедт в то же время занимался небесной механикой (проблема трех тел) и классами дифференциальных уравнений и интегралов, которые встречались ему при исследовании интересовавших его вопросов. Все это позволило ему занять в то время почетное место в научном мире. В наше время с его именем связан один из способов отыскания периодического решения класса дифференциальных уравнений 2-го порядка, известный под именем процесса Линдстедта. А. Линдстедт читал обычно специальные курсы. У него Молин слушал: дифференциальные уравнения, новейшую геометрию и алгебру, теорию аналитических и эллиптических функций и абелевых интегралов. А. Линдстедт оказал немалую услугу преподаванию математики в Дерпте, введя в обычай со второго семестра 1880 г. работу студенческого математического семинара, призванного содействовать научным успехам самостоятельной работы студентов и научного руководства ими. Позже, уже после избрания его в 1884 г. ординарным профессором кафедры прикладной математики вместо ушедшего на пенсию Ф. Миндинга, А. Линдстедт совершенствовал работу названного семинара, изучив в специальной командировке опыт семинаров учебных заведений Лейпцига, Гейдельберга и Кёнигсберга.

С детства привыкший все делать основательно, Ф. Молин не пропускал ни одного наблюдения в обсерватории, назначенного Линдстедтом. Естественно, обозначались контуры первой научной работы Молина, связанной с вычислением орбиты движения кометы 1880_{III}. Но неожиданно семью Молиных снова постигло страшное несчастье. Во многих местечках Прибалтики тогда свирепствовала черная оспа. Заразившись этой болезнью, Гертруда Молина заболела и вскоре умерла. Велико было горе, но Федор твердо решил закончить образование, и прежде всего начатую под руководством Линдстедта работу. Юноша занимается с еще большим упорством, всегда в срок и с повышенными оценками сдает экзамены, участвует в семинаре Линдстедта и особенно тщательно изучает содержание спецкурсов последнего.

В то же время он заканчивает работу «Определение траектории кометы 1880_{III}» [1], представленную в журнал «Astronomische Nachrichten», редактируемый известным астрономом Крюгером из Киля. Когда работа уже печаталась в одном из номеров журнала, Крюгер в письме к Молину от 30 мая 1883 г., поблагодарив его за предоставление статьи, просил сделать к ней еще дополнение. Молин немедленно исполняет просьбу Крюгера, и дополнение под названием «Добавление к моей статье, опубликованной в № 2519» [2], было напечатано в том же № 2528 журнала за 1883 г.

Л. Шварц и А. Линдстедт нашли работу Ф. Э. Молина достойной для представления в качестве кандидатской, а его самого способным вести научную работу. В частности, А. Линдстедт, представляя факультету Ф. Э. Молина в качестве соискателя на степень кандидата, указал на «несомненно, совершенно необыкновенную научную одаренность» своего студента. В октябре 1883 г. на основании представленной Молиным работы собрание физико-математического факультета решает присвоить Федору Эдуардовичу степень кандидата астрономии и «оставить его для подготовления к профессорскому званию». К этому времени сестры Федора Эдуардовича покинули его: младшая вышла замуж и уехала на Украину, чуть позже туда же перебралась и старшая.

3. В семинаре Ф. Клейна. Магистерская диссертация

В ноябре 1883 г. Дерптский университет откомандировал кандидата астрономии Ф. Э. Молина на зимний семестр в Лейпциг для продолжения образования. Под рукопожатие[4] он дает ректору торжественное обещание о послушании и подчинении законам университета и зачисляется в разряд «академических граждан» Лейпцигского университета. Здесь Молин слушает курс аналитической механики у К. Неймана (1832—1925), эллиптические функции и теорию поверхностей у Ф. Клейна (1849—1925), предполагая, видимо, вначале, как и его учитель А. Линдстедт, заниматься небесной механикой. Однако еще в Дерпте Молин не ограничивался обязательными для студента-астронома старшего курса дисциплинами и одновременно изучал новейшую алгебру и теорию эллиптических функций. В Лейпциге под влиянием семинара и лекций Клейна научные интересы Молина окончательно смещаются в область чистой математики. Он решает продолжить учебу в Лейпциге и просит физико-математический факультет Дерптского университета оказать ему в этом финансовую поддержку. Прошение о денежной субсидии явилось одновременно своего рода отчетом о результатах учения Молина у Клейна (подтвержденным отзывом последнего). «Я,— писал Молин,— посещаю лекции и семинары профессора доктора Ф. Клейна. У меня большое желание изучить под его руководством теорию аналитических функций, чему послужат лекции и семинары летнего семестра по эллиптическим функциям... Продолжение моих занятий в Берлине, Париже под руководством Вейерштрасса, Кронекера, Нетто в направлении аналитической теории чисел, с другой стороны, под руководством Эрмита, Дарбу, Пуанкаре, Пикара в том же направлении я буду рассматривать как цель своих стремлений».

В своем отзыве Ф. Клейн характеризовал Молина с лучшей стороны: «Я могу высказать свое одобрение по поводу его прилежания, стремления и понимания». А. Линдстедт целиком согласен с Клейном. Более того, он подчеркивает, что желание Молина посвятить себя

---

[4] Бытовавшая тогда форма приема вновь вступающих в Лейпцигский университет.

чистой математике и выбор дисциплин в ней «наилучшим образом соответствуют исключительным способностям Молина, который занимался частично под моим руководством с большой усидчивостью и необычайным успехом. Поэтому я должен назвать или считать его человеком с большой перспективой, который за короткое время сумел овладеть доверием своих новых руководителей (К. Неймана, Ф. Клейна.— Н. К.), на что указывает отзыв проф. Клейна».

Факультет, одобрив намерения и отчет Молина, просит Совет Дерптского университета ходатайствовать перед министром просвещения о предоставлении Молину возможности продолжения обучения в Лейпциге «для изучения чисто математических дисциплин с целью повышения квалификации к должности профессора», поскольку «Ф. Молин с выдающимся успехом посвятил себя чистой математике». В результате Молин еще два семестра 1884/85 г. учится у Ф. Клейна.

Создатель Эрлангенской программы, неутомимый пропагандист значения новой тогда идеи группы и ее теории для решения важнейших задач геометрии, алгебры и анализа Ф. Клейн, начиная с 1883 г. почувствовал себя плохо и выбыл из творческого соревнования с А. Пуанкаре по созданию основ теории автоморфных функций. Он решил целиком посвятить себя педагогической и организационной деятельности, понимая под последней не столь напряженное, как прежде, создание новых работ, показывающих значение группы как некоторого общего принципа, связывающего отдаленные, как тогда казалось, проблемы геометрии и анализа.

Как известно, еще зиму 1869/70 г. юные С. Ли (1842—1899) и Ф. Клейн провели в научном общении с К. Жорданом — самым значительным комментатором идей Галуа и создателем знаменитого «Трактата о подстановках» (29), вышедшем в 1870 г. От него они восприняли теорию Галуа и идею группы. Уже в совместных работах 1870—1871 гг. по теории кубических кривых С. Ли и Ф. Клейн отчетливо поняли значение теории группы для решения проблем геометрии и анализа. В дальнейшем С. Ли, задавшись целью обобщить теорию Галуа до аналога ее в теории дифференциальных уравнений, пришел к необходимости изучения групп, названных им непрерывными группами преобразований. Клейн уже в 1872 г. создал свою знаменитую Эрлангенскую программу под названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», в которой понятие группы вводится как единый принцип, объединяющий в одно целое ранее разрозненные разделы геометрии, относящиеся до того к различным или даже враждующим школам геометров. Согласно принципу Клейна, каждая геометрия по существу рассматривает инварианты той группы преобразований, которая лежит в основе этой геометрии. В соответствии с этим научные интересы Ф. Клейна в 70—80-х годах сосредоточиваются вокруг дискретных групп линейных преобразований и проективных преобразований над полем комплексных чисел. К описываемому времени (1883—1885 гг.) пребывания Молина в Лейпциге Ф. Клейн издает свои известные «Лекции об икосаэдре» (1884), вынашивает план и подготовку к печати «Лекций по теории эллиптических и модулярных функций», написанных им с помощью его ученика Р. Фрике (1861—1930), первый том которых издан в 1890 г. Как пишет сам Клейн, большую часть своих работ он подготавливал к печати так, что сначала представлял их в виде семинарских лекций, а затем редактировал текст их, записанный одним из слушателей семинара [28, с. 428]. Поэтому указанные книги Клейна дают нам вполне определенное представление о содержании его семинарских лекций, которые слушал у него в то время Ф. Э. Молин вместе со своими соучениками. Среди них были Эдуард Штуди [1862—1930], Адольф Гурвиц (1859—1919), в научной и личной дружбе с которыми Молин состоял до конца их жизни. В семинаре Ф. Клейна Молин глубоко изучил теорию групп подстановок и дискретных групп линейных преобразований и ознакомился с клейновской проблемой форм, состоящей в том, чтобы для данной группы подстановок переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти все формы этих переменных, остающиеся инвариантными после применения к ним подстановок названной группы.

Естественно, тема магистерской диссертации, предложенная Молину Ф. Клейном, касалась линейных преобразований, а именно линейных преобразований θ-функций Якоби. Задача линейного преобразования эллиптической функции $f(u, \omega_1, \omega_2)$ с периодами ω_1, ω_2 состоит в унимодулярном преобразовании

$$\omega_1^1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2^1 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \pm 1$$

(где α, β, γ, δ — целые числа в периодах ω_1, ω_2) так, чтобы решетка периодов исходной функции преобразовалась в решетку периодов преобразованной функции $f(u, \omega_1^1, \omega_2^1)$. Сами эти функции, вообще говоря, различны, но связаны алгебраическими соотношениями.

Еще Якоби в 1828 г. встретился с необходимостью линейного преобразования $\varkappa$-модуля нормальной формы Лежандра и линейных преобразований θ-функций. Эрмит (1822—1901) в 1858 г. исследовал поведение функции $\varphi(\omega) = \sqrt[8]{\varkappa^2}$, $\psi\,\omega = \sqrt[8]{1-\varkappa^2}$ и позднее функции $\chi(\omega) = \sqrt[24]{\varkappa^2(1-\varkappa^2)}$ при линейном преобразовании их периодов. Аналогичный вопрос относительно функций $\sqrt{\varkappa^2}$, $\sqrt{1-\varkappa^2}$, $\sqrt{\varkappa^2(1-\varkappa^2)}$ в конце 70-х годов решал Клейн.

Задача, предложенная Молину Ф. Клейном в качестве темы магистерской диссертации, состояла, в том чтобы дать наиболее полный список формул линейных преобразований θ-функций и изучить при этом роль и поведение функций $\sqrt[24]{\Delta}$, где Δ — дискриминант $4x^3 - g_2(\omega_1, \omega_2)x - g_3(\omega_1, \omega_2)$; $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$ — коэффициенты известного соотношения, связывающего $(\pi')^2$ с γ. Молин получил эту задачу, по-видимому, в декабре 1883 г. и уже в следующем году написал и сдал на отзыв Клейну работу «Об известных корнях из единицы, встречающихся в теории эллиптических функций» [3], напечатанную в январском номере Лейпцигских «Berichte». Эту работу, значительно расширив ее, Молин кладет в основу своей магистерской диссертации «О линейных преобразованиях эллиптических функций» [4], законченную в апреле 1885 г. и опубликованную в конце того же года отдельным изданием в Дерпте.

В ней в терминах символа Лежандра (квадратичных вычетов и показательных множителей, зависящих от чисел α, β, γ, δ). Молин дает 18 формул, связывающих исходные и преобразованные θ-функции, и 18 формул, выражающих

$$w_1 = \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \qquad w_2 = \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}{e^{\frac{\pi i}{24}}\cdot\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}},$$

$$w_3 = \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$$

через указанные значения функции $\sqrt[24]{\Delta}$ и значения корня 24-й степени из единицы с точностью до множителя, равного значению корня 24-й степени из единицы. Функция Δ, как оказалось, вполне определяет функции Эрмита $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$. При этом $\varphi(\omega) = \frac{w_1}{w_2}$, $\psi(\omega) = \frac{w_3}{w_2}$, $\chi(\omega) = \frac{1}{w_2}$. Названные выше формулы линейного преобразования θ-функций Молин получил с помощью $\sqrt[24]{\Delta}$, $\sqrt[8]{\varkappa^2}$, $\sqrt[24]{\varkappa^2(1-\varkappa^2)}$. Он также указал связи σ-функций Вейерштрасса с функциями w_1, w_2, w_3 и θ-функциями.

Значение описанных работ Молина состоит в том, что теория θ-функций всегда играла важную роль в теории эллиптических функций благодаря быстрой сходимости рядов, выражающих θ-функции. После А. Кнезер (1862—1930) в своем отзыве о творчестве Ф. Э. Молина, касаясь упомянутых выше двух работ последнего, пишет: «Содержание этих работ можно охарактеризовать следующим образом. При линейном преобразовании θ-функций легко установить общую структуру формул, но труднее определить известные константы, в частности, определенные корни из единицы, появляющиеся в этих формулах. Молин определяет их при помощи оригинальной комбинации теоретико-числовых и функциональных методов и дает в виде нового результата исключительно полное развитие упомянутых формул. Он, таким образом, успешно привнес новое в развитие вопросов, поставленных Ф. Клейном, в теорию эллиптических функций...».

Одновременно с написанием магистерской диссертации Ф. Э. Молин готовит и в мае 1885 г. успешно сдает в Дерпте магистерские экзамены, а 25 октября 1885 г. там же защищает магистерскую диссертацию. Оппонентами Молина выступали профессора А. Линдстедт, П. Гельмлинг и кандидат математики П. Х. Кадикис. После этого Молину предстояло устроиться на работу. Но в Дерпте на две математические кафедры по штату полагалось лишь две должности доцента. Не желая лишаться своего талантливого питомца и стремясь освободить от чтения лекций по чистой математике членов других кафедр (астрономии, прикладной математики), руководство факультета просит Совет университета ходатайствовать перед попечителем Дерптского учебного округа о назначении факультету еще одной штатной единицы доцента чистой математики, на должность которого выдвигается Ф. Э. Молин. В этом постановлении, подписанном деканом факультета Артуром Эттингеном, в частности, говорится: «Факультету Молин известен как человек исключительной способности, ясного мышления и невероятной трудоспособности и одержимости. Факультет надеется, что он проявит себя в качестве доцента и преподавателя, ибо он доказал и обнаружил в математическом семинаре, коллоквиумах умение излагать свои мысли. В математическом семинаре особенно было видно, как педагогический талант (его) в течение нескольких лет непрерывно развивался, что также подтверждает отзыв проф. Клейна из Лейпцига». Ходатайство факультета было удовлетворено. Совет университета избрал Ф. Э. Молина на должность доцента кафедры чистой математики.

4. Магистр Ф. Э. Молин — доцент Дерптского университета. Подготовка к защите докторской диссертации

Двадцатичетырехлетний магистр, доцент Ф. Э. Молин приступил к работе в родной альма-матер, полный энергии и радужных надежд. Однако условия работы в Дерптском университете были намного тяжелее, чем в других русских университетах.

Царское правительство, справедливо опасаясь центробежных тенденций и пангерманизма прибалтийского дворянства, издавна вело борьбу с последним за «приведение и течение дел ближе к общему устройству». В зависимости от политической конъюнктуры эта борьба то усиливалась, то затихала, но всякий раз это сказывалось и на Дерптском университете с его немецким образом устройства. Следствием восстания декабристов явился устав 1835 г., подчинявший университеты попечителям соответствующих учебных округов, распространенный на Дерпт в 1837 г. После революции 1848 г. гонения на университеты выразились в замене выборности ректоров, деканов и других, их назначении свыше и в строгом политическом надзоре за духом лекций. Следствием освободительных веяний явился устав 1863 г., возвращавший университетам автономию, правда, в урезанном виде.

В 1857—1865 гг. разгорелась борьба между прибалтийской и правительственной бюрократией министерства народного просвещения в связи с предложением последнего о присоединении Дерпта к общему уставу и штатам российских университетов. Попечители Дерптского учебного округа Брадке и его преемник Кейзерлинг настояли на сохранении особого уклада Дерптского университета. Министерство просвещения, уступив попечителям в их притязаниях, оставило университету прежние штаты и ассигнования. В результате штаты университета Дерпта оказались на 50% урезанными по сравнению с другими провинциальными университетами России, а оклады дерптских профессоров стали значительно меньше окладов их коллег из других университетов. Дерптский университет оказался бедняком среди университетов России. Бедственное материальное положение сказывалось во всем: не хватало оборудования, приборов, реактивов для лабораторий, отопления, освещения, воды. Здание начало ветшать. Зимой в аудиториях стоял мороз. Профессора входили в аудиторию в шубах и шапках и т. д. Этим, в частности, объясняется и текучесть профессорско-преподавательского состава Дерптского университета. Так, с 1865 по 1888 г. в нем сменилось 16 профессоров, из них четверо прослужили по году, семь человек — по два и пять человек выдержали три года.

В виде своеобразного протеста или «патриотизма» в Дерпте сравнительно легко присуждались звания начинающим немецким ученым. Последние, получив в Дерпте ординария, после немногих лет службы обычно уезжали в Германию. Зато на оставшихся ложилась тяжелейшая нагрузка. Например, доцент Ф. Э. Молин, получая 900 руб. годового жалования вместо 1200 руб., определенных доценту иных российских университетов, в 1886 г. первый и второй семестр читал курс теории аналитических функций по 6 ч в неделю при ежедневной часовой консультации студентов; в 1887 г. к этому добавились пять еженедельных часов теории чисел и теории деления круга и часовая консультация студентов в первый семестр и новейшая алгебра и геометрия — во втором в том же объеме; в первом семестре 1888 г. он читает алгебраический анализ, во втором семестре — теорию определителей и уравнений при пяти часах в неделю.

В итоге за 15 лет преподавания в Дерпте Молин читал: теорию аналитических функций, теорию эллиптических функций, алгебру, теорию определителей, алгебраический анализ, теорию деления круга, новейшую алгебру, новейшую геометрию, элементарную математику, теорию чисел, историю математики, определенные интегралы, кватернионы, теорию подстановок, метод наименьших квадратов, теорию вероятностей, проекции карт, высшую геодезию. Кроме того, он являлся одним из ближайших помощников профессора Шварца: ассистировал ему, помогал в астрономических наблюдениях и обработке их. Таким образом, в бытность свою доцентом Дерптского университета Молин прочитал, за малым исключением, все университетские математические курсы и часть астрономических. Для Дерптского университета оригинальными и новыми курсами являлись теория деления круга, кватернионы.

Природная добросовестность Молина и понимание нужд студентов заставляли его подготавливать подробный конспект курса, который мог переписать или по нему исправить свой конспект любой желающий студент. Учебных пособий по большинству читаемых университетских курсов тогда почти не было, так как издавались они либо литографированным способом, либо крайне ограниченным тиражом. В сохранившихся конспектах лекций 1888 г. по алгебраическому анализу Молин ведет изложение по следующему плану. Вначале рассматриваются комплексные числа. Затем способы решений (Хюдде, Эйлера, Декарта) уравнений 3-й и 4-й степени. После этого разбираются теорема о модуле старшего члена многочлена и теорема о существовании корня многочлена с комплексными коэффициентами. Далее изучаются особенности многочлена с действительными и рациональными коэффициентами. Подробно и четко излагается учение о результате многочленов от двух переменных и применении его к проблеме исключения. Потом вновь доказывается основная теорема классической алгебры с применением свойств результанта (используется доказательство П. Гордана, помещенное в «Mathematische Annalen», 1876, N 10).

В то же время он не оставляет своих научных занятий. Каникулы (летние 1886 г., летние и зимние 1887 и 1888 гг. и летние 1889 г.) он проводит за границей, жадно усваивая все новое в движении математической мысли: во время работы в библиотеках Лейпцига и других городов Европы, присутствуя на семинарах, в результате личных контактов с научными друзьями. По-прежнему Молин наиболее тесно связан с Лейпцигом, где с 1886 г. работает Софус Ли (1842—1899), занявший место Ф. Клейна, переехавшего в Гёттинген.

С. Ли после окончания Христианийского университета[5] в 1869—1870 гг. учится в Берлинском университете вместе с Ф. Клейном, ставшим его другом. В 1871 г. С. Ли возвращается в Христианию, где становится ассистентом университета. После упомянутых выше совместных работ с Ф. Клейном Ли сосредоточил свое внимание и усилия на создании основ теории групп непрерывных преобразований (называемых сейчас группами Ли) и их применении в механике, геометрии и теории дифференциальных уравнений. Работая в Христиании с необычной интенсивностью, он вскоре получает докторскую степень и назначается профессором Христианийского университета, где в 1877 г. для него создается кафедра. В 1886 г. он принимает почетное приглашение Лейпцигского университета на должность ординария с тем, чтобы, как пишет он, его «труды стали известны более широкому кругу студентов и ученых». Здесь Ли создает свою знаменитую школу и живет вплоть до 1898 г.— года возврата в Христианию вследствие болезни, приведшей его к кончине в 1899 г.

Однако в 1886 г. С. Ли находится в расцвете творческих сил и читает лекции на созданном им семинаре. Постоянными участниками семинара Ли стали ближайшие его сотрудники и студенты Лейпцигского университета: экстраординарный профессор Ф. Шур (1856—1932), приват-доцент Ф. Энгель (1861—1941) и студент второго курса Г. Шефферс (1866—1945). Они же составили основное ядро Лейпцигской школы Ли, сложившейся в следующее за 1886 г. пятилетие, в орбиту научных интересов которой были вовлечены также В. Киллинг (1847—1923) из Брауншвейга, Э. Штуди (1862—1930), работавший в Мюнхене, Э. Картан из Франции. Содержание семинарских лекций С. Ли и ряд результатов работ его и участников семинара достаточно полно отражены в двухтомном труде [30, 31], изданном соответственно в 1891 и 1893 гг., написанном Ли при помощи Г. Шефферса.

---

[5] Христиания — старое название столицы Норвегии — г. Осло.

По-видимому, еще до приезда в Лейпциг Ли ознакомился с заметкой [32] А. Пуанкаре, в которой устанавливалась связь между числовой алгеброй и определенной группой непрерывных преобразований, обещавшая новую область применения теории, создаваемой Ли.

В 1884 и 1885 гг. были опубликованы известные статьи Вейерштрасса [33] и Дедекинда [34]. Они имели одинаковое название — «К теории комплексных величин, составленных из n главных единиц» — и были посвящены рассмотрению коммутативных гиперкомплексных систем (числовых алгебр) с единицей, размерности n соответственно над полями действительных и рациональных чисел. В статьях содержался и старый результат (начала 60-х годов XIX в.) Вейерштрасса о месте системы комплексных чисел среди гиперкомплексных систем над полем действительных чисел, и итоги исследований Дедекинда конечных алгебраических расширений поля рациональных чисел. Обе они вызвали повышенный интерес к гиперкомплексным системам и интенсивное их изучение в ряде последующих работ многих ученых Германии и других стран. Поэтому естественно то сильное впечатление, которое оказала упомянутая выше работа Пуанкаре на С. Ли. В своих семинарских лекциях он неоднократно и настоятельно советует слушателям углублять и уточнять связи между числовыми алгебрами и группами Ли, намеченные Пуанкаре. Сам Ли и Ф. Энгель в 1888—1889 гг. уточнили эту связь в терминах непрерывных групп и групп инфинитезимальных преобразований (алгебр Ли).

На призыв Ли первым отозвался статьей [35] от 1888 г. Ф. Шур. Затем Э. Штуди независимо от статьи Пуанкаре, с которой он ознакомился позже, но под влиянием дружеских контактов с Ф. Энгелем, рядом своих статей (1889—1891 гг.) значительно углубил и расширил проблему, поставленную Ли, и получил существенные результаты для ее решения. Наконец, Г. Шефферс серией статей 1889—1891 гг. внес свой вклад в становление самой теории гиперкомплексных систем. При этом последователей Ли воодушевляла, как они полагали, возможность развития теории гиперкомплексных систем в рамках учения Ли. Г. Шефферс в 1891 г. писал: «Через новейшие исследования Г. Штуди стало ясным, что теория комплексных числовых систем с ассоциативным умножением является частью теории Ли конечных групп преобразований и прогресс в одной из этих областей означает прогресс в другой» [36]. Тем самым лекции Ли и работы его последователей явились также побудительным толчком и одним из источников интенсивного изучения числовых алгебр в Германии второй половины 80-х — начала 90-х годов. Конечно, в то же время основным направлением трудов школы Ли остается развитие создаваемых в ней теорий групп и алгебр Ли и их применение.

Молин, как он говаривал (по словам его студентов), принимал участие во многих заседаниях семинара Ли, состоял в личной (Э. Штуди) и научной дружбе со всеми участниками семинара, изучал основы учения Ли и некоторые работы ученых школы Ли, о чем свидетельствуют сохранившиеся в архиве Молина его конспекты лекций по теории непрерывных групп, прочитанных Ф. Энгелем, и заметки Молина на полях работы [36] Г. Шефферса. Но было бы неправомерным относить Ф. Э. Молина к последователям Ли, поскольку Молин не написал ни одной работы по теории групп или алгебр Ли и никогда не пытался этого делать. В то же время учение о гиперкомплексных числах и их системах, прошедшее почти полувековую историю своего развития, накопившее большое количество разрозненных, иногда противоречивых результатов, увлекло Молина обилием и важностью задач. Важнейшей из них была проблема создания единой теории гиперкомплексных систем. Вопрос о строении общих (гиперкомплексных) систем в 80-х годах XIX в. стал центральным во всех исследованиях, посвященных рассмотрению числовых систем произвольной размерности. Однако найти метод, позволяющий объединить в единую научную теорию разрозненные результаты, накопившиеся к тому времени в учении о гиперкомплексных числах, не удалось ни одному из ученых (Фробениус, 1849—1917, Дедекинд, 1831—1916 и др.), пытавшихся это сделать. Молодой Молин дерзко берется за решение этой проблемы. Летние и зимние каникулы 1887 и 1888 гг. он посвящает изучению литературы по гиперкомплексным числам. При этом он обращает внимание на теорию матриц Кэли (1821—1895) и эффективность метода регулярных представлений, конкретные примеры которого мог встретить у Кэли, Сильвестра (1814—1887), а общую идею уловить из названных выше работ Пуанкаре, Вейерштрасса, Дедекинда, исследования Фробениуса [37]. Одновременно Молин внимательно следит за работами ученых школы Ли, в частности, его внимание привлекает работа Киллинга [38] 1888 г., посвященная изучению структуры конечномерной алгебры (инфинитезимальной группы) Ли — проблеме, родственной той, в которую воплотился замысел Молина относительно числовых систем. Особенное внимание Молин обратил на систематическое использование Киллингом понятий характеристического и минимального уравнений линейного преобразования (инфинитезимального оператора) алгебры Ли в целях выяснения структуры последней. Несмотря на резко отрицательную характеристику, данную Ли обоснованию и доказательствам структурных теорем, открытых Киллингом в упомянутой и последующих статьях [39—41], Молин отчетливо осознает их значение как образца аналогичных теорем в задуманной им теории числовых систем, и особенно значение понятия простой алгебры Ли. Под влиянием упомянутой работы Киллинга [38], а также замечания Ли и Энгеля о числовых системах, соответствующая группа которых G_n обладает простой подгруппой G_{n-1}, у Молина возникло понятие первоначальной системы (простой алгебры) и затем сопровождающей системы (фактор алгебры), ставших основными в создаваемой им теории.

В апреле 1888 г. Ф. Шур, будучи избранным на вакантную после Гельмлинга должность заведующего кафедрой чистой математики, переезжает из Лейпцига в Дерпт и становится коллегой и руководителем Молина по кафедре. Следует отметить, что, согласно университетскому уставу, Молин в то же время имел право на занятие должности экстраординарного профессора, но был обойден в этом. И все же у Ф. Шура (как и у Гельмлинга) Молин находит моральную поддержку своих творческих замыслов и полное понимание их, тем более что незадолго до этого Ф. Шур закончил названную выше единственную в его творчестве статью, касающуюся гиперкомплексных систем. Объединенные в то время общими научными интересами Молин и Шур, по-видимому, часто обсуждали полученные ими результаты и вообще вопросы, относящиеся к числовым системам, группам и алгебрам Ли, освещаемые во вновь выходящих статьях. Видимо, в 1888—1889 гг. Молин уже начал систематизировать и записывать свои мысли и получать первые результаты создаваемой им общей теории систем. Судя по ряду признаков, именно к указанному времени относится сохранившаяся в личном архиве Молина неоконченная рукопись, охватывающая часть первой главы его докторской диссертации.

Летние каникулы 1889 г., которые он провел в заграничной командировке, и 1890—1891 гг. Молин посвящает окончательной редакции своих исследований строения числовых алгебр. Он завершает их в августе 1891 г., оформив в виде рукописи под названием «О системе высших комплексных чисел». 7 сентября он представляет эту работу физико-математическому факультету Дерптского университета в качестве докторской диссертации.

Оппонентами были назначены профессор А. Кнезер (1862—1930) и магистры (оба приват-доценты Дерптского университета) Г. Грофе (1848—1895), П. Кадикис (1857—1923). Защита диссертации задерживалась. Кнезер и оппоненты соглашались рецензировать диссертацию лишь при условии предоставления им времени, достаточного для ознакомления с ее содержанием. Пока ее изучали все оппоненты, миновал почти год.

Тем временем с февраля по октябрь 1892 г. Федор Эдуардович был откомандирован в Московский университет для усовершенствования в русском языке, ибо в Дерпте с 1893 г. преподавание должно было вестись на русском языке. Была и другая, негласная причина командировки Ф. Э. Молина в Москву. Ф. Шур, не желая приспосабливаться к новым условиям, 17 июля подал прошение об увольнении. Он считал (и на факультете склонялись к тому), что Молин будет достойным его преемником по кафедре. Поэтому Молину вменялось в обязанность познакомиться с постановкой преподавания чистой математики в Московском университете.

Здесь Молин посещал лекции П. А. Некрасова (теория вероятностей), Б. К. Молодзеевского (геометрия), Л. К. Лахтина (дополнительный курс теории чисел), В. В. Бобынина (история математики). Одновременно он продолжал свои исследования и готовился к защите диссертации. Получив 41-й том «Mathematische Annalen», где была опубликована его диссертация [5], он в ответ на критику доказательства теоремы 26 (со стороны А. Кнезера или, быть может, редакции названного журнала) пишет добавление [6], помещенное в 42-м томе того же журнала, вышедшего в 1893 г.

9 сентября на заседании Московского математического общества Молин выступил с сообщением «Об одном предложении Сильвестра». Оно касалось понятия дефекта

матрицы и было использовано Молиным в диссертации. На основании этого доклада Молин был принят в члены Московского математического общества.

Однако, наконец, приблизился назначенный срок защиты. Молин возвращается в Дерпт, где 29 сентября 1892 г. защищает докторскую диссертацию и утверждается в ученой степени доктора чистой математики. Еще в августе Молин получил разрешение на продолжение командировки в Московский университет по декабрь 1892 г.

Подав 5 октября прошение на имя попечителя Дерптского учебного округа Н. А. Лавровского о назначении на вакантное после Ф. Шура место, Молин вновь отбыл в Москву. Однако это место получил приват-доцент Московского университета Л. К. Лахтин. Молин же вновь был обойден по службе.

Первыми, кто высоко оценил докторскую диссертацию Молина, были С. Ли и лейпцигские товарищи Молина Г. Шефферс и Ф. Энгель.

В книгах С. Ли «Теория групп преобразований», т. 3 (в соавторстве с Ф. Энгелем) и «Лекциях о непрерывных группах с геометрическими и другими приложениями» (в соавторстве с Г. Шефферсом), изданными в 1893 г., содержится краткое изложение некоторых результатов диссертации Молина и их высокая оценка. Э. Штуди, ставший в то время признанным знатоком теории гиперкомплексных систем, в своих лекциях в университете Джона Гопкинса неоднократно подчеркивает существенность вклада Молина в теорию числовых систем [108].

По представлению научных друзей во Франции в 1894 г. Молину была вручена медаль, выбитая по случаю 70-летия Ш. Эрмита (1822—1901). Он получил ее за особые заслуги в математике того времени. Так исследования Молина стали известны научному миру всех континентов.

5. Доктор Ф. Э. Молин — доцент Юрьевского университета

Как известно, реакция 80-х годов уничтожила последние остатки университетской автономии. Либеральный университетский устав 1863 г. был упразднен и заменен реакционно-полицейским уставом 1885 г. Согласно последнему всякая общественная деятельность студентов, начиная с устройства студенческих балов, столовых и т. п., категорически запрещалась. Инспекции университетов были вменены в обязанность полицейские функции. В студенческой и профессорской среде поощрялись взаимная слежка, доносы. Свою благонадежность (удостоверением от полиции или в иной форме) должен был доказать каждый — от студента до ректора. Выборность профессоров, деканов отменялась и заменялась назначением свыше. Уваровская триединая формула «самодержавие, православие, народность» сократилась в двуединую: «самодержавие и православие». Во главе министерства просвещения был поставлен архиреакционный Делянов. Печально известный сентенцией о кухаркиных детях, он высказался и о принципе подбора профессоров: «Лучше иметь на кафедре преподавателя со средними способностями, чем особенно даровитого, который, однако, несмотря на свою ученость, действует на умы молодежи растлевающим образом». В соответствии с этим «принципом» производилось «обновление» профессорского состава: профессора, замеченные в либеральных взглядах, несмотря на научные заслуги, терпели гонения или просто удалялись и заменялись людьми, доказавшими приверженность престолу, независимо от их способностей.

Дерптский университет всегда испытывал двойную тяжесть реакции: немецкого баронства и царского правительства. Как уже было сказано, рядом циркуляров на нет была сведена академическая автономия Дерптского университета, и он оказался в буквальном смысле на положении бедного родственника среди университетов России. К этому добавилась жестокая русификация. Формально распоряжения о внедрении русского языка в университете следовали в 1836, 1841, 1842, 1869 гг., но были резко отвергнуты немецкими баронами, управляющими краем. Однако в 1885—1887 гг. Александр III двумя указами распорядился перевести все делопроизводство и преподавание в Прибалтике на русский язык. Дерптскому университету предписывалось перейти на русский язык к январю 1895 г., но сделано это было лишь в 1898 г. Царское правительство в силу классовой солидарности терпело вызывавшего подозрение высокорожденного барона, но отнюдь не склонно было делать этого по отношению к эстонцам или иным «инородцам». Последним легче было получить образование или продвинуться по службе в других областях России, чем в Прибалтике, ибо, кроме правительства, здесь на них обрушивалась тяжелая рука немецких баронов. Федор Эдуардович как раз оказался в таком положении. Его демократизм в отношениях со студентами, острый ум, независимость и резкая прямота не снискали ему друзей среди той части профессуры, которая показала себя преданной «власть-предержащим» и стала вершить судьбы факультета и его членов. В результате руководство факультета, как уже говорилось, предпочло доктору Молину приват-доцента Московского университета Л. К. Лахтина, не имевшего тогда даже степени магистра. Конечно, после этого назначения отношения между руководителем кафедры Л. К. Лахтиным и ее членом Ф. Э. Молиным оставляли желать лучшего.

В те годы доносы в Юрьевском университете стали средством продвижения для некоторых его членов [6]. Обстановка для работы на физико-математическом факультете была тяжелой. Молин находил отдых лишь в общении с друзьями: астрономами Л. Шварцем, Л. Струве и магистром минералогии Левинсоном-Лессингом. Последний, будучи деканом факультета с 1893 г., во многом облегчал положение Ф. Э. Молина.

В 1893 г. Федор Эдуардович обручился с девицей Элизой Карловной Браниус, известной в то время в Дерпте преподавательницей иностранных языков.

Осенью 1896 г. Л. К. Лахтин после опубликования докторской диссертации был переведен экстраординарным профессором в Москву. На его место пришел еще один ученик Н. В. Бугаева — Н. В. Бреви, защитивший в том же 1896 г. магистерскую диссертацию. Надо сказать, что к ученикам Н. В. Бугаева, человека глубоко религиозного, преданного монарху, занявшегося в 80-х годах философскими «изысканиями» в математике, министр Делянов определенно питал «слабость»: из четырех лиц, назначенных с 1892 по 1893 г. на кафедру чистой математики в Дерпте-Юрьеве, трое были учениками Н. В. Бугаева. Эта симпатия возникла главным образом благодаря энергической деятельности на поприще мракобесия П. А. Некрасова — старшего товарища (по выпуску) Л. К. Лахтина, Н. В. Бреви и П. Г. Алексеевского, ставшего с 1883 г. ректором Московского университета. По праву считаясь

---

[6] Трудную обстановку работы в то время на физмате Юрьевского университета осветил на IV Всесоюзном математическом съезде И. Я. Депман, изучавший этот вопрос.

«Правой рукой Делянова», Некрасов довел философские «опусы» своего учителя до скандального математического обоснования разваливающейся двуединой основы «самодержавие и православие», заменившей триединую «самодержавие, православие, наука».

В конце 1895 г. Федор Эдуардович пришел к мысли распространить развитый им для алгебраических систем метод регулярных представлений на конечные группы. Следуя логике рассуждений своей докторской диссертации, он должен был связать группу с алгеброй (числовой системой) так, чтобы таблица умножения последней совпала с таблицей умножения представляемой группы. Видимо, именно этот переход от группы к алгебре составлял главную трудность для него в то время.

Нашел ли он определение групповой алгебры в одном из сочинений [42] Кэли, остается неясным: сам Молин об этом ничего не говорит, хотя всегда педантичен в ссылках на источники. После этого ему оставалось лишь применить свою теорию представлений алгебр к групповой алгебре, чтобы получить сравнительно быстро почти все существенные результаты теории представлений конечных групп. Во всяком случае, видимо, уже в декабре 1896 г. он оформил свое открытие в работе «Одно замечание к теории группы однородных подстановок» [7], а в январе-феврале 1897 г. закончил «О числе переменных неприводимой группы подстановок» [8]. Об этих работах он доложил на апрельском заседании Дерптского общества естествоиспытателей, в том же 1897 г. они были опубликованы в дерптских «Sitzungsberichte». В этих двух работах с предельной даже для Молина лаконичностью впервые полностью изложен «гиперкомплексный» аспект теории представлений групп. В них содержались все существенные результаты этой теории,

Оттиски работ Молин послал своим ученым друзьям, в том числе Э. Штуди. Г. Фробениус, начавший свои известные исследования по теории представлений групп несколькими месяцами ранее Молина (в 1896 г.) методом так называемого группового детерминанта (идущего от Дедекинда), осенью 1897 г. через посредство Э. Штуди познакомился с упомянутыми двумя работами Молина и с удивлением обнаружил, что самые существенные результаты его исследований содержатся в работах русского математика. А доказательство одного из предложений, трудностей которого Фробениус в то время не мог преодолеть, уже имеется в докторской диссертации Молина. После этого в ряде своих публикаций [43, 45], выходивших в «Sitzungsberichte» Берлинской академии наук, Фробениус неоднократно и с самой высокой похвалой отзывается о трудах русского алгебраиста. Будучи академиком названной академии, он представляет к печати очередную работу Молина «Об инвариантах линейных групп подстановок» [9] в названные выше «Sitzungsberichte», что само по себе считалось тогда высоким признанием ее научной значимости. По поводу напечатания последней работы между Молиным и Фробениусом завязывается переписка. В одном из сохранившихся писем Фробениус подтверждает независимость их подходов в открытии и развитии представлений групп.

Тем временем кафедра чистой математики в Дерпте с 1898 г. вновь оказалась свободной в связи с болезнью Бреви. Друзья Молина считают, что последний имеет полное право на занятие ординатуры по кафедре чистой математики. Они решают ходатайствовать за Молина перед министерством просвещения. А. Кнезер, занимавший с 1892 г. кафедру прикладной математики в Дерптском университете, просит Г. Фробениуса и Ф. Шура дать отзывы о работах Ф. Э. Молина. Об этом хлопочет и сам Федор Эдуардович. Семья ученого к тому времени выросла до четырех человек, и изменение его служебного и материального положения стало настоятельной необходимостью. Вместе с ним свои претензии на освободившееся после Бреви место заявили магистры П. П. Граве из Казани и Е. В. Борисов из Петербурга.

Отзывы Фробениуса и Шура о трудах Молина были получены в мае 1897 г. Ф. Шур писал, что «Молин рядом своих математических работ, особенно своей докторской диссертацией, составил себе почетное имя в научном мире» и «о соответствии научной квалификации Молина для профессуры, таким образом, нет ни малейшего сомнения». В своем пространном отзыве Фробениус называет докторскую диссертацию Молина «полным мысли, богатым будущим, основополагающим исследованием», подчеркивая, что Дедекинд долго пытался проникнуть в закономерности строения некоммутативных числовых систем, «но не получил результатов, относящихся к общей теории», так же как не смогли этого сделать Ф. Шур, Ч. Пирс, Э. Штуди, Г. Шefферс, что «только Молину удалось рассеять мрак, который окутывал этот вопрос, и дать одним ударом почти полное разрешение всех наиболее важных вопросов этой области», и, по его мнению, все работы Молина выделяет «исключительная оригинальность их исполнения». Кроме того, Фробениус разобрал работы Молина, относящиеся к теории представлений групп, объяснив их незаслуженно малую известность в то время трудностью темы, оригинальностью метода Молина и чрезвычайной лаконичностью его изложения.

А. Кнезер направляет копии отзывов Ф. Шура и Г. Фробениуса попечителю учебного округа для последующих рекомендаций министру просвещения, присоединив к ним свой отзыв следующего содержания:

«I. Молин был в здешнем университете учеником Миндинга, в Лейпциге — членом известного семинара, руководимого Ф. Клейном, и начал свою научную деятельность астрономической работой, которая содержит полное вычисление траектории кометы и свидетельствует о полном знакомстве ее автора с методами практической астрономии.

По указанию Ф. Клейна, Молин написал исследование, напечатанное в „Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften“ и впоследствии в более распространенной и дополненной форме принятое здешним физико-математическим факультетом как магистерская диссертация. Содержание этих работ можно охарактеризовать следующим образом: при преобразовании эллиптических функций, в частности θ-функций, легко установить общую структуру формул, связывающих первоначальные и преобразованные функции, однако — труднее определение известных констант, появляющихся в этих формулах, и в частности определенных корней из единиц. Молин определяет последние при помощи оригинальной комбинации теоретико-числовых и теоретико-функциональных методов и дает в качестве нового результата исключительно полное развитие формул линейных преобразований. Таким образом, он успешно привнес новое в развитие вопросов, поставленных Ф. Клейном в теории эллиптических функций, и рекомендует себя как математик, который умеет пользоваться уверенно и успешно самыми различными методами современной чистой математики.

II. Оригинальным, идущим по собственному пути исследованием рекомендует себя Молин в своей докторской диссертации и в трех статьях, примыкающих к ней. Напечатание одной из этих работ в „Sitzungsberichte

Berliner Akademie" должно рассматриваться как особое отличие, которого удостоила их автора эта корпорация, так как в названных „Berich. Berl." редко печатаются работы молодых ученых, не относящихся к академии. Чтобы охарактеризовать содержание докторской диссертации, надо напомнить следующие известные математикам факты. Важнейшее нововведение в анализе нашего века — расширение понятия числа при помощи введения так называемых мнимых или комплексных величин — привело к вопросу, уже рассматриваемому Гауссом: чем выделяется успешное применение комплексных величин в отличие от других возможных расширений числовой области?

В последнее десятилетие Дедекинд, Вейерштрасс и Фробениус нашли характеристические свойства, согласно которым обычным комплексным числам и кватернионам Гамильтона отдается предпочтение перед другими родственными образованиями. В связи с этим возник вопрос об общей систематике всех систем комплексных чисел, операции над которыми совпадают полностью или частично с операциями обычной алгебры. Оказывается, этот вопрос стоит в тесной связи с важнейшими проблемами алгебры, теории уравнений и теорией групп преобразований. Молин является первым математиком в России, который занимается в этой важной области и достиг в ней существенных успехов. Он дал основы совершенно новой систематики комплексных чисел, которая общностью и широтой охвата далеко превосходит прежние попытки Шефферса и других, сделанные в этом направлении. Молин особо образует понятия, которые здесь не подлежат характеристике,— понятия сопровождающих и первоначальных числовых систем, причем последние должны рассматриваться, собственно, как простейшие элементы всей теории. Следует отметить теорему, что число основных чисел первоначальной системы обязательно равно квадрату некоторого целого числа и что формулы умножения всегда могут быть приведены к некоторой всегда определенного вида форме.

III. Так как вопросы, которые тут поднимаются, исключительно абстрактны и их полное понимание представляет трудности и для математика, который не является специалистом в этой области, то я считаю необходимым привести несколько высказываний исследователей, обогативших собственными трудами область, в которой работает Молин. Фробениус, проф. университета и член Академии в Берлине, в письме (перевод которого прилагается) к нижеподписавшему после того, как он неодобрительно высказался о других работах в той же самой области, пишет: „Тем больше было мое удивление при изучении этого полного мыслями, богатого будущим основополагающего исследования".

Ф. Шур, ранее бывший профессором чистой математики нашего университета, ныне проф. технической высшей школы в Карлсруэ, который также работал в означенной области, пишет: „О докторе Ф. Э. Молине, доценте императорского Юрьевского университета, я с удовольствием могу засвидетельствовать, что он рядом своих математических работ, особенно своей докторской диссертацией, составил себе почетное имя в научном мире".

Последующие работы, которые Молин опубликовал в здешнем обществе естествоиспытателей, дают применение теории, развитой им в докторской диссертации, к важному и трудному вопросу о возможности представления любой группы при помощи группы линейных преобразований. Молин перекликается здесь с Фробениусом, который характеризует эти работы в прилагаемом письме так же, как и работу, напечатанную в Берлинской академии, насколько возможно, без алгебраических формул.

IV. Согласно всего приведенного я должен объявить Молина весьма одаренным математиком, который, по суждению компетентных специалистов, с блестящим успехом работал в весьма трудной области анализа и доказал владение различными методами современной математики. В особенности я отмечаю, что его работы оригинальностью методов и важностью темы, по-моему, превосходят работы Борисова и Граве, относительно которых мы недавно говорили на факультете. Если принять во внимание, что Молин в течение ряда лет в нашем университете много раз читал различные обязательные предметы, в особенности геометрию и алгебру, теорию чисел, теорию алгебраических уравнений, элементарную математику, то Молин должен казаться вполне квалифицированным, чтобы занять профессуру чистой математики, будь это здесь или в другом университете. Если бы он достиг этого положения, то это было бы продвижением для его работ, и поэтому следовало бы приветствовать это продвижение как содействие успеху самой математики».

Но отзывы не произвели впечатления на министра просвещения. Вскоре попечитель сообщил о назначении на вакансию учителя казанской гимназии доктора П. П. Граве.

Этот акт вызвал возмущение многих профессоров и студентов Юрьевского университета. Но единственное, что могла сделать научная общественность,— это высоко оценить научные заслуги Федора Эдуардовича. Ему была присужденая стипендия Роберта Геймбюргера за 1899 г., состоявшая в годовой научной командировке за границу.

В течение 1899 г. Федор Эдуардович находился за границей, главным образом в Италии, где знакомился с подлинными рукописями математиков Средневековья и Возрождения, хранящимися в библиотеке Ватикана. В том же году Ф. Э. Молина избрали членом общества немецких естествоиспытателей и врачей. В качестве делегата он участвовал в работе очередного съезда общества, проходившего в Мюнхене. По пути в Мюнхен Молин останавливался в Цюрихе, где встречался с А. Гурвицем, высоко оценивавшим исследования Федора Эдуардовича. На съезде Молин встретился со многими своими друзьями-математиками.

Молин понимал, что на продвижение в Юрьеве у него не осталось никаких надежд. От своего друга астронома Л. Струве, перешедшего в Харьковский университет, он узнал о имеющейся там вакансии по кафедре чистой математики. Федор Эдуардович подал заявление на это место, не зная, что туда уже приглашен Д. А. Граве, в то время занимавшийся дифференциальными уравнениями и вопросами приложений геометрии к построению географических карт. Поэтому его научные интересы были ближе и понятнее А. М. Ляпунову и В. А. Стеклову, имевшим решающее слово в конкурсной комиссии, куда входили еще М. Ф. Ковальский и (с совещательным голосом) Л. Струве. Комиссия отклонила кандидатуру Федора Эдуардовича. В ее постановлении говорилось: «К сожалению, комиссия не могла составить себе самостоятельного суждения о степени оригинальности и научного значения работ г. Молина, так как работы [7]... относятся к области, с которой, как стоящей в стороне от важнейших научных

[7] Речь идет о работах [5—9] Ф. Э. Молина.

дисциплин, члены комиссии знакомы лишь поверхностно... Теория высших комплексных чисел представляет весьма сложное и искусственное построение, вызванное известным стремлением к обобщению понятия о числе, не оправданному насущными потребностями...».

Л. Струве сообщил Федору Эдуардовичу о том, что директор вновь организуемого Томского технологического института, профессор Е. Л. Зубашев, набирает профессоров и преподавателей. Для Ф. Э. Молина наступили дни тяжелых раздумий.

Устройство в любом университете европейской части России оставляло возможность быть в курсе алгебраических новостей, откликаться на них своими работами, увлечь алгеброй слушателей, иметь учеников. Отъезд же в Томский технологический институт, где нет еще ни библиотеки, ни физико-математического факультета при университете, был равносилен почти полному разрыву научных связей и, следовательно, прекращению научной работы вообще. Но иного выхода у Молина не оставалось. Его обращения к министру были гласом вопиющего в пустыне. Правда, он мог устроиться за границей — такие предложения были. Однако Молин отверг их: Россия была его родиной и он никуда не хотел уезжать из нее. Молин пишет на имя Зубашева официальное заявление о своем желании занять кафедру математики Томского технологического института. Вскоре он получил извещение о зачислении в личный состав названного института в качестве профессора математики. Из Италии Федор Эдуардович возвратился в Юрьев только для оформления увольнения и подготовки к переезду с семьей в Томск.

Глава 2

Томский период жизни и педагогической деятельности Ф. Э. Молина

1. Томск начала XX века. Первый коллектив преподавателей Томского технологического института и студенческое революционное движение

Томск, куда семья Молиных переехала в 1900 г., был главным городом Томской губернии. Кроме него, на огромной территории были разбросаны пять уездных городов (Барнаул, Бийск, Кузнецк, Канск, Мариинск) и два заштатных (Нарым и Колывань) города. Расположенный вдоль Томи, разделенный сильно загрязненной р. Ушайкой, окруженный вплотную подступавшей тайгой, скрывавшей целые его районы, он был городом преимущественно деревянных зданий. На восьми квадратных верстах, занимаемых в то время Томском (не считая акватории Ушайки), разместились 13 000 его строений, из которых 7000 являлись фабрично-заводскими (208), правительственными и общественными учреждениями, монастырскими и культовыми сооружениями, питейными заведениями и в большей части — магазинами и хранилищами товаров и материалов, что позволяло называть Томск центральным торговым городом и складом товаров купеческих фирм Сибири. В остальных домах обитали 63 335 человек его жителей: 150 лиц духовного звания, 3000 дворян и почти такое же количество купцов и почетных граждан, свыше 4500 военных и около 4000 ссыльных (из них большая половина политических), свыше 30 000 мещан и около 16 000 крестьян и, наконец, около 2000 мастеровых.

Хотя в Томске насчитывалось свыше двух десятков церквей и еще большее количество питейных заведений, все же он по праву считался сибирскими Афинами. Из 90 учебных заведений Сибири в Томске находилось 59 и в их числе — гордость томичей Томский университет, открытый в 1888 г., с его двумя факультетами (медицинским и юридическим), где обучалось свыше 400 студентов, и Томский технологический институт (ТТИ) — 203 студента. Последний открылся в октябре 1900 г. и состоял из механического и химического отделений, разместившихся в главном корпусе. По мере готовности других зданий в ТТИ открывались горное (1901 г.) и инженерно-строительное (1902 г.) отделения.

Открытие ТТИ совпало с подъемом в городе революционного движения накануне революции 1905 г. Уже в феврале 1901 г. технологи прекратили занятия, присоединившись к протесту против «временных» правил об отдаче студентов в солдаты за участие в «беспорядках», а спустя несколько дней устроили ликующую демонстрацию, одобряющую возмездие, постигшее инициатора названных правил, реакционного министра просвещения Боголепова. Студенческие волнения не прекращались вплоть до нового революционного подъема в 1910 г. С самого начала они были тесно связаны с деятельностью подпольного Сибирского союза РСДРП (в котором, как известно, в 1904—1907 гг. принимал участие С. М. Киров), имели чаще политический, чем академический характер и вскоре слились с революционным движением рабочих. В 1905 г. и в первом семестре 1906 г. по воле революционного студенчества ТТИ был открыт лишь для митингов и собраний.

Первый коллектив профессоров и преподавателей ТТИ, состоявший главным образом из разночинной интеллигенции, поддерживал студенческое революционное движение. О первом директоре ТТИ в анонимной книжке [46] негласного соглядатая среди профессоров и студентов института, изданной по распоряжению попечителя Западно-Сибирского учебного округа мракобеса Лаврентьева, говорится, что «склонный к постоянным революционным выступлениям, Зубашев и состав профессоров и преподавателей подбирал с открытия института такой же» [46, с. 112]. За редким исключением преподаватели и профессора ТТИ действительно были под стать своему директору. Многие из них, подобно Ф. Э. Молину, уже испытав притеснения и произвол царизма, понимали, что предоставленная им возможность работать только в Томске — негласная форма подозрения в неблагонадежности и ссылки их за пределы европейской части России. В названной выше книжке коллектив преподавателей ТТИ аттестуется корпорацией «профессоров, поддерживающих антиправительственное, антигосударственное течение в России» [там же, с. 119]. Правда, автору этой книжки, крайнему черносотенцу, даже небезызвестный П. Милюков казался революционером, однако приведенная им характеристика преподавателей и профессоров в известной мере кажется оправданной. Зубашев вместе с несколькими коллегами в феврале 1906 г. по распоряжению генерал-губернатора был отстранен от должности и в 48 ч выслан из Томска. В 1907 г. после неоднократных, настойчивых требований коллектива и Совета ТТИ он возвратился в институт, однако вскоре по требованию Лаврентьева был снова отстранен от должности и удален из Томска.

Е. Л. Зубашев и члены Совета ТТИ, среди которых были Ф. Э. Молин, В. А. Обручев (в будущем академик), И. И. Бобарыков, А. А. Потебня и другие, в ответ на требования министерства просвещения применить к «бунтовщикам» дисциплинарные меры заявили: «Совет считает своей задачей не кару студентов...» (из протоколов Совета ТТИ за 1901 г.). Зубашев и Совет отказываются выдать список зачинщиков студенческих волнений 1903 г., считая это внутренним делом. Совет высказывается против предложения министерства о предоставлении привилегий детям дворян при поступлении в высшие учебные заведения. Члены Совета горячо восприняли события 9 января 1905 г. и разгон в Томске демонстрации, сопровождавшийся избиениями и арестами (в том числе 14 студентов-технологов). Они были убеждены, что студенческие беспорядки — отражение общественного недовольства существующим строем и что «успокоение студенчества, как и всего общества в целом, возможно только путем широких реформ». Совет ходатайствует о расследовании действий полиции, избивавшей студентов-технологов, поддержав требование революционных студентов о закрытии института, члены Совета отнеслись отрицательно к предложению властей проводить занятия под охраной полиции, справедливо считая, что чтение лекций под полицейским надзором унижает профессоров и студентов. В сентябре 1905 г. Совет ТТИ приветствует политическую забастовку студентов и, следуя их желанию, упраздняет инспекцию и профессорский дисциплинарный суд, отменяет справки о благонадежности, необходимые при поступлении в институт, и отказывается возобновить занятия в связи с тем, что 19 профессоров выразили намерение подать немедленно в отставку в случае их начала. В апреле 1906 г. после высылки Зубашева члены Совета обратились в министерство просвещения с требованием отменить ограничения в приеме женщин в институт, исключить из учебной программы богословие и историю религии. В 1907 г. Совет под председательством вернувшегося Зубашева отвергает временные правила министерства, допускающие полицейский контроль за действиями администрации института. Вскоре после этого Е. Л. Зубашев вновь был уволен с должности и уехал из Томска, но студенческие волнения продолжались.

2. Научно-педагогическая деятельность Ф. Э. Молина в Томском технологическом институте

Деятельность на посту члена Совета и председателя профессорского суда (в 1903 г.), дружба с Е. Л. Зубашевым и популярность в среде студенчества — все это во многом помогло Ф. Э. Молину преодолевать трудности постановки преподавания математики в ТТИ. Они возникли еще со дня открытия института, и их было много. Прежде всего не было программ и учебных пособий, недоставало подготовленных преподавателей-математиков. У Молина был всего лишь один помощник — приехавший с ним воспитанник Казанского университета, молодой кандидат математики Л. В. Некрасов.

Участвуя в составлении первых учебных планов будущего ТТИ, Молин стремится определить место и удельный вес математического образования в системе подготовки будущих инженеров. С этой целью он изучает математический аппарат, который предполагается использовать в процессе обучения студентов всех специальностей. Он просматривает десятки томов технической литературы, советуется с коллегами-инженерами.

Общими для всех специальностей дисциплинами, по мнению Молина, должны были стать аналитическая геометрия и анализ. При этом он считает, что первую дисциплину необходимо читать всем первокурсникам еженедельно (2 ч теории и 1 ч практики). У студентов механического и строительного отделений (а затем и у горняков) Молин ввел курс исчисления бесконечно малых (в течение четырех первых семестров по 3 ч лекционных и 2 — практических занятия в неделю). С 1903 г. по настоянию Молина на горном и инженерно-строительном отделениях было введено преподавание теории вероятностей и теории погрешностей. Позднее оба эти курса стали факультативными. С 1904/05 учебного года для студентов горного отделения был еще введен курс сферической тригонометрии. Все эти три дисциплины преподавались на старших курсах, а с 1904 г. им читался также необязательный курс элементарной математики (по часу в неделю). Ф. Э. Молин составил подробные программы математических дисциплин для каждой специальности. Судя по их основательности, он был сторонником фундаментальной математической подготовки будущего инженера.

Огромен вклад Ф. Э. Молина в дело разработки и подготовки учебных пособий. Судя по каталогу библиотеки ТТИ, уже к 1906 г. он написал восемь томов учебных пособий (насчитывающих около 1600 страниц), посвященных дифференциальному интегральному исчислению, интегрированию дифференциальных уравнений, определенному интегралу. Все они изданы главным образом литографским способом. Всего за десятилетие своей работы в институте Молин издал 11 курсов своих лекций, содержащих около 3000 печатных страниц. Одновременно он проделал огромную работу по организации математического раздела библиотеки института. В результате библиотека ТТИ по подбору математической литературы во многом превзошла большинство библиотек провинциальных институтов России.

Начиная с 1902 г., когда в ТТИ уже были открыты четыре отделения, Ф. Э. Молину и В. Л. Некрасову стало трудно вести практические занятия одновременно на всех факультетах. Молин смело привлекает к этому делу преподавателей других дисциплин. Несмотря на непривычность новых обязанностей, институтские коллеги охотно работали с Молиным. Он не только лично знакомил нового ассистента с курсом и вводил его в первые занятия. Молин вообще считал, что «профессор должен готовиться к лекции вместе с ассистентом», т. е. одновременно с работой над курсом вместе с ассистентом составлять, подбирать задачи, намечать наиболее интересные пути их решения и т. д. При этом он был твердо убежден, что к практическому занятию необходимо готовиться значительно больше, чем к лекции.

Молин всегда сам вел практические занятия своего или некрасовского курсов. К каждому практическому занятию он вместе с ассистентом на особом листе готовил 5—8 предварительно прорешенных задач, расположенных по степеням трудности, причем по меньшей мере одну из них требовалось решить до числового результата. Листы с заданиями размножались на литографе и вручались студентам на практических занятиях. Студенты быстро оценили пользу такой организации практических занятий и, несмотря на необязательность их посещения, охотно приходили на них в полном составе. Более того, они неоднократно просили о дополнительных занятиях в праздничные дни, «чтобы успеть прорешать задачи и идти параллельно с курсом». Со временем студенты сами комплектовали листы задания в увесистые тома, а иногда даже переиздавали их. Так, студент Новокрещенов осуществил литографическое издание «Решения задач по исчислению бесконечно малых за 2-й семестр 1906/07 академический год, проверенных Ф. Э. Молиным». Несколько томов задачников Молина сохранились до наших дней.

Образцовая постановка практических занятий, бывших тогда в вузах Сибири методической новинкой, заменившей «репетиции», привлекала на занятия Ф. Э. Молина профессоров других дисциплин (физики, механики). Некоторые из них, например профессор физики Томского университета Ф. Я. Капустин, вслед за Молиным вел практические занятия в ТТИ, чтобы в дальнейшем использовать этот опыт в университете. Вскоре в ТТИ профессора механики, физики, начертательной геометрии, сопротивления материалов и других дисциплин, следуя Молину, также ввели в обычай практические занятия после своих лекций.

Лекции Ф. Э. Молина, тщательно подготовленные, читаемые с огромным подъемом, живым, образным языком, изобиловавшие историческими экскурсами, неизменно собирали полные аудитории и снискали ему огромную популярность и славу одного из лучших лекторов института. Прежде всего Молин учил студентов умению мыслить самостоятельно, познавать развитие идей и выбирать логически верное решение. С особо любознательными студентами Молин часто беседовал по разным вопросам математики и астрономии. Нередко он настолько увлекал слушателей, что они переходили на физико-математический факультет того или иного университета. Например, под влиянием бесед с Молиным студент Н. П. Каменщиков перевелся из ТТИ в Петербургский университет и в дальнейшем стал там профессором астрономии.

Федор Эдуардович пользовался исключительным уважением своих коллег — молодых инженеров и выпускников института. Для них неизменно он прежде всего был доброжелательным, но строгим помощником при подготовке дипломных или диссертационных работ. Молин являлся постоянным членом государственной экзаменационной комиссии, считал своей обязанностью помочь будущим инженерам и ученым математически оформить свои дипломные проекты и диссертации. Постоянно творчески общаясь с коллегами-инженерами, Ф. Э. Молин настолько постиг тонкости инженерно-математических дисциплин и технического образования, что в 1909 г. Совет института единогласно избрал его деканом инженерно-строительного факультета.

В 1910 г. праздновался 25-летний юбилей научно-педагогической деятельности Ф. Э. Молина. Переполненная аудитория, горячие речи, поздравления и адреса, преподнесенные Федору Эдуардовичу, отражали ту теплоту и сердечность, с которой относились к нему его ученики и коллеги. В одном из адресов, в частности, говорилось:

«Глубокоуважаемый Федор Эдуардович!

День 25-летия Вашего служения науке и обществу мы, студенты инженерно-строительного отделения, не можем пройти молчанием, так как Ваша светлая личность вызывает в нас глубокое уважение и преклонение перед Вами. Вы, Федор Эдуардович, с первых шагов наших в высшей школе своим знанием и личным отношением к науке вселили в нас веру в авторитет человеческой мысли и человеческого гения; Вы показали нам, что истинная человеческая мысль свободна, независима и не может быть ограничена никакими внешними условиями. Когда грубая сила пыталась вторгнуться в стены высшей школы, Вы заявили тогда, что Вы не ручаетесь за целость знания, и решили уйти. Но условия изменились, и Вы остались среди нас. Вы остались на стороне нашей, мы знали это и шли к Вам легко и просто со всеми нашими нуждами, так как мы видели во всем Вашу поддержку. Пусть же наши теплые чувства, наша вера в Вас послужит некоторым удовлетворением работы Вашей среди нас».

Дружба Молина с Е. Л. Зубашевым, его широкая популярность среди студенческой молодежи и солидарность с ее революционной частью давно настораживали попечителя — ярого монархиста Лаврентьева. Молин был в числе 19 профессоров, заявивших об отставке в 1905 г. в случае возобновления занятий под надзором полиции; он входил в комиссию, члены которой ездили в Петербург с протестом против самоуправной высылки директора ТТИ и требованием о его возвращении. В «Записках старого томича» Ив. Лясоцкий пишет: «...среди институтских профессоров были такие, как профессор Молин, демонстративно отказавшийся подать руку Лаврентьеву в 1905 году» [48, с. 54]. Попечитель обычно здоровался с каждым из профессоров, одновременно отчитывая их за нерадивость и упущения в присутствии студентов. В ответ на его протянутую руку Молин отвел свои руки за спину и учтиво поклонился. С тех пор он стал личным врагом Лаврентьева.

Еще одно столкновение попечителя с деканом Молиным произошло в январе 1911 г. 17 января в институте состоялась студенческая сходка, объявившая забастовку. Полиция окружила и переписала присутствовавших, и вскоре 373 человека по представлению Лаврентьева были исключены из института. Когда же спустя два дня Лаврентьев посетил ТТИ, то вместо «должных быть там экзаменов» его встретили студенческие пикеты, не допускающие их проведения. Здесь находилась и часть профессоров, среди которых был Молин. В ответ на просьбу попечителя сообщить ему фамилии пикетчиков и воздействовать на непослушных «часть профессоров скрылась, а профессор Молин стоял и как-то странно улыбался» [22, с. 126]. После этого Ф. Э. Молин недолго оставался в институте, для которого он так много сделал.

3. Увольнение. Приватиссимум. Учительские курсы. Высшие женские курсы

В декабре 1911 г. институт представил Молина к званию заслуженного профессора, а в январе 1911 г. министр просвещения утвердил представление и соответствующее удостоверение было послано в канцелярию Лаврентьева для занесения присвоенного звания в служебный формуляр.

По существовавшим тогда правилам 25 лет выслуги давали ученому право на пенсию, получение аттестата и отставку, а присвоение к тому же звания заслуженного профессора — вместе с правом на пенсию и продолжать профессорскую деятельность в институте или другом высшем учебном заведении России. Однако Лаврентьев утаил от института факт присвоения Ф. Э. Молину упомянутого звания. В то же время он настойчиво рекомендовал новому директору ТТИ Карташову уволить Федора Эдуардовича за выслугой лет. В сентябре 1911 г. Молин был уволен со службы.

Лишь в 1913 г. из письма Е. Л. Зубашева, проживавшего тогда в Петербурге, Молин узнал, что в звании заслуженного профессора он утвержден еще два года назад и соответствующий документ находится у попечителя. После этого почти год длится переписка Молина с канцеляриями института, попечителя, министерства просвещения и между последними — по поводу неоднократных прошений Молина о выдаче принадлежащего ему документа и формулярного списка с записью о присуждении звания ранее пометы об отставке. Лишь после осуждения произвола Лаврентьева в петербургской газете «Речь» Федору Эдуардовичу вручают упомянутое удостоверение. Формуляра ему все же не выдают: это означало бы восстановление на службе. Он получает всего лишь аттестат уволенного со службы.

Тем временем Ф. Э. Молин, идя навстречу желаниям молодых научных работников, интересовавшихся, правда, в основном вопросами прикладной математики, организует у себя на дому приватиссимум — семинар, явившийся прообразом аспирантуры. В приватиссимуме Ф. Э. Молин читал, по-видимому, курс анализа и дифференциальных уравнений. Участниками этого первого математического семинара в Сибири были В. Д. Кузнецов (впоследствии известный физик), В. П. Зылев (позднее профессор МИСИ) и др.

Не забывают Молина и его ученые друзья за границей. В 1912 г. профессор Ден из Киля в письме жене Молина благодарит Федора Эдуардовича за внимание к его работам, считая, что «многие бы очень обрадовались, если бы Ваш муж приехал сюда и применил бы свои силы здесь на математической работе». В том же году Молин получает приглашение на 5-й Международный математический конгресс в Кембридже. В то же время Федор Эдуардович принимает участие в 1-м Всероссийском съезде преподавателей математики.

В 1914 г. Уфимская уездная управа просит Ф. Э. Молина подготовить общий обзор арифметики и тригонометрии на общеобразовательных курсах народных учителей. В течение нескольких месяцев он с присущей ему тщательностью готовит названный обзор, куда включает:

исторический очерк развития арифметики и алгебры, основные законы алгебры и арифметики, основы общей арифметики, задачи арифметики и алгебры рациональных величин, арифметическую и алгебраическую теории иррациональных величин. Этот обзор, содержащий изложение систем счисления, теории делимости, уравнений (первой, второй степени и двучленных), рациональных и иррациональных чисел, непрерывных дробей, трансцендентных уравнений, логарифмов и т. д., был построен в плане исторического развития понятия о числе и алгебраической операции и напоминал курс оснований арифметики.

В конце 1914 г. Ф. Э. Молин, наконец, допускается к работе на математическом отделении Сибирских высших женских курсов, открытых в 1910 г. По замыслу устроителей курсов математическое отделение должно было дать своим слушателям математическое образование в объеме университетских программ и таким образом сыграть роль отсутствующего в Томском университете физико-математического факультета. С приходом Федора Эдуардовича математическое отделение стало полностью отвечать своему назначению. Он составляет программы по курсам дифференциальных уравнений с частными производными; теории чисел; теории конечных разностей; вариационного исчисления; дифференциального исчисления. Чтение самых трудных из них он взял на себя, остальные предоставил слушателям приватиссимума: В. П. Зылеву, В. И. Шумилову и своему старому товарищу В. Л. Некрасову.

В апреле 1917 г. Совет ТТИ обратился к Ф. Э. Молину с посланием, в котором выражал сожаление по поводу преждевременного ухода Молина из института и просил его согласиться «возобновить академическую деятельность в институте».

Федор Эдуардович оставляет курсы и возвращается в институт. Но вскоре при Томском государственном университете (ТГУ) открывается физико-математический факультет. Это помогло сбыться давней мечте Молина — он становится профессором университета.

4. Ф. Э. Молин в Томском университете

Физико-математический факультет ТГУ, первыми студентами которого стали в основном слушательницы математического отделения Сибирских высших женских курсов и выпускницы местных гимназий, открылся 1 июля 1917 г. Было принято около 100 человек, но уже в 1919 г. число поступивших на первый курс достигло почти 400. Факультет состоял из трех кафедр: чистой математики, теоретической и практической механики, астрономии и геодезии и двух отделений: физико-математического и естественнонаучного. Для чтения лекций на факультет из ТТИ были приглашены профессора В. Л. Некрасов и М. И. Иванов. С осени 1918 г. к работе в Томском университете приступил и Ф. Э. Молин. Позже (в 1919 г.) здесь работали также И. М. Виноградов (ныне академик) и Р. О. Кузьмин.

В условиях гражданской войны, разрухи, молодой факультет испытывал большие трудности. Прежде всего не хватало квалифицированных научных кадров. Ф. Э. Молину как наиболее эрудированному математику пришлось решать главную задачу подготовки недостающих кадров для факультета. Уже в 1920 г. он организует первый в Сибири математический семинар из числа слушателей первого приема в ТГУ, посвященный дифференциальной геометрии. Успешной работе семинара во многом способствовала тщательно и любовно подобранная Молиным математическая библиотека ТТИ. Вначале участники семинара изучали известную тогда книгу Бьянки [49], затем перешли к реферированию журнальных статей.

Семинар работал раз в неделю. Очередной докладчик после предварительной подготовки был обязан проконсультироваться у Молина. Эти консультации, продолжавшиеся обычно 3—4 ч, оставили неизгладимый след в памяти участников семинара. На них Федор Эдуардович разъяснял, как изучать математическую литературу и критически осмысливать прочитанное, учил поискам наиболее кратких путей решения задач, объяснения возникших вопросов. Свои беседы Молин сопровождал впечатляющими экскурсами в историю вопроса. На семинаре рассматривались и другие темы, например: «Исследование свойств чисел в связи с работами Л. Е. Диксона и И. Шура». В результате все участники семинара выполнили свои первые исследования, большинство которых было опубликовано в «Известиях Томского университета» за 1924 г. в разделе «Работы математического семинара под руководством Ф. Э. Молина». Среди них следует отметить работы: В. А. Соколовой «Определение вещественных минимальных поверхностей переноса и изучение линий переноса» [50], Е. Н. Аравийской «К вопросу о геодезическом изображении поверхностей» [51], Л. С. Богословской «О системе минимальных поверхностей» [52].

Стремясь углубить знания слушателей этого семинара и быстрее подготовить их к защите права на самостоятельную научно-педагогическую работу, Молин в 1921 г. прочел ряд факультативных курсов («Теория групп», «Теория эллиптических функций» и др.) и организовал новый, повышенного типа семинар по теории эллиптических функций и их применениям к аналитической механике. Занятия в этом семинаре, который действовал до 1924 г., проводились с той же интенсивностью, что и в первом. Например, с 10 января по 11 февраля 1921 г. его участники заслушали пять сообщений по темам, относящимся к связи эллиптических функций со сферической тригонометрией и теории вращения твердого тела около его центра тяжести. В дальнейшем они прореферировали работу С. В. Ковалевской «О вращении твердого тела около неподвижной точки» и рассмотрели ряд связанных с этой областью вопросов. Важным итогом семинаров Молина было то, что все их участники получали право читать лекции и вести научную работу в университете.

В связи с отменой в то время научных степеней и званий соискатель, претендующий на право чтения лекций в высшем учебном заведении, должен был прочесть две вступительные публичные лекции. Предварительно в местной печати давалось объявление о времени, когда эти лекции состоятся. Темы лекций определяла Предметная комиссия, игравшая тогда роль кафедры. Она предлагала соискателю на выбор одну (из трех) тему, другая назначалась лишь за две недели до дня выступления. Отметим некоторые из предложенных тем: «Правильные интегралы линейных дифференциальных уравнений», «Приведение уравнение Пфаффа к нормальному виду», «Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных по методу Пфаффа», «Сходимость точечных множеств», «Теория огибающих поверхностей», «Теория линейных конгруэнций» и др. Самими соискателями были избраны следующие темы: «Введение в теорию Галуа» (Л. С. Богословская), «Изотермическая система параметрических линий» (Е. Н. Аравийская), «Теория плоских кривых» (М. А. Дунина).

Все участники семинаров Ф. Э. Молина, набранные из первых двух приемов физико-математического факультета, стали первыми научными работниками Томского университета. Широта курсов и тем занятий семинаров Молина, его блестящее знание астрономии, механики, математической физики способствовали тому, что некоторые из них в дальнейшем избрали физику своей основной специальностью. Молодые лекторы вели в основном такие спецкурсы, как «Вариационное исчисление», «Дифференциальные уравнения в частных производных», «Теория множеств» и др.

Глубокий знаток небесной механики, Ф. Э. Молин по просьбе астрономов университета в 1924 г. совместно с Н. Н. Горячевым организовал и провел семинар, посвященный задаче трех тел. На следующий год он открывает студенческий семинар по теории поверхностей, который действовал до 1930 г. Параллельно с ним Молин в 1926/ /27 учебном году вводит семинар по основаниям геометрии, которые тогда еще не являлись предметом учебного плана университетов. Молин вел его в течение двух лет.

Все эти семинары были обусловлены необходимостью подготовки кадров научных работников для физико-математического факультета Томского университета. Следует отметить, что Ф. Э. Молин вел их во внеучебное время. Он сразу обращал внимание на способных первокурсников и начинал готовить их к участию в работе своих семинаров. С этой целью он рекомендовал студентам темы рефератов и периодически заслушивал их сообщения. Среди тем рефератов можно назвать такие, как «Теория комплексных чисел», «Высшие комплексные числа» и др.

Напряженная педагогическая деятельность Ф. Э. Молина на первых порах не оставляла ему ни времени, ни сил для ведения своей собственной научной работы. Такое положение сохранялось до начала 30-х годов, когда в ТГУ стали сосредоточиваться значительные кадры профессоров и преподавателей, а семинары Молина вошли в учебный план университета. И все же он в 1927 г. был членом оргкомитета и участником 1-го Всероссийского съезда математиков, где председательствовал на одной из секций и выступал по поводу доклада А. К. Сушкевича. Осенью 1929 г. ученый пишет работу «Об известных трансцендентных уравнениях» [10], опубликованную в 103 т. «Mathematische Annalen».

В 1932 г. Молин организует для своих аспирантов семинар по уравнениям математической физики, который ведет до 1936 г. Между тем в мае 1932 г. по решению Совнаркома РСФСР при ТГУ был открыт Научно-исследовательский институт математики и механики (НИИММ), объединивший значительно возросший к этому времени коллектив математиков и механиков университета. Федору Эдуардовичу была поручена организация в новом институте математического сектора, который он возглавлял до 1934 г. При этом Молин руководил в секторе группой «Приближенного анализа», в которую входили Н. П. Романов, П. П. Куфарев, Е. Н. Аравийская и др.

В 1933 г. Ф. Э. Молин решает задачу, предложенную болгарским математиком Л. Чакаловым. Результаты этой работы «Решение задачи 148» [11] он публикует в журнале «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung» [44].

В том же 1934 г. он в качестве ответственного редактора готовит к выпуску первый в Сибири математический журнал «Известия НИММ» при ТГУ.

К этому времени в Томске сложился сильный коллектив ученых-математиков. Кроме коренных томичей — профессоров Ф. Э. Молина, Л. А. Вишневского, В. А. Малеева, Н. Н. Горячева и М. Н. Иванова, здесь успешно работали профессора А. С. Кованько, И. И. Чистяков, С. Б. Бергман, Ф. Нетер (последние двое эмигрировали из фашистской Германии) и молодые ученые: Н. П. Романов, П. П. Куфарев, В. А. Фукс, А. А. Темпляков, А. К. Минятов и др. Работы этого научного коллектива, творчески весьма активного в разнообразных направлениях, привлекли внимание математической общественности. Не удивительно, что в «Известиях Томского НИММ» пожелали опубликовать свои статьи многие видные советские (А. Н. Колмогоров, С. Н. Бернштейн, И. И. Привалов, Д. А. Райков, А. Я. Хинчин, С. П. Фиников, Н. С. Кошляков, Н. А. Селиванов и др.) и зарубежные (Дж. Нейман, П. Эрдеш, П. Туран, А. Ейнштейн, Н. Розен, К. Заранкевич и др.) ученые.

В процессе подготовки журнала Молин проделал большую редакторскую работу, в частности, написал резюме ко многим статьям на различных языках. В 1935 г. вышли первый и второй выпуски первого тома журнала. Молип выступает на его страницах и как автор, публикуя работу [12], посвященную старой теме своих исследований.

Радостным событием в жизни Ф. Э. Молина явилась высокая оценка его научно-педагогической деятельности

Советским правительством. В 1934 г. постановлением Президиума ВЦИК ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки, а в следующем году по совокупности работ — степень доктора физико-математических наук.

В связи с введением с 1934 г. положения об ученых степенях и званиях Томский университет получил право принимать к защите кандидатские и докторские диссертации. Ф. Э. Молин активно включается в дело подготовки квалифицированных математических кадров для вузов Сибири. Он деятельно участвует в работе математической экзаменационной подкомиссии при квалификационной комиссии университета. Одновременно с 1934 г. Молин — бессменный председатель Государственной квалификационной комиссии по выпуску окончивших физико-математический факультет Томского педагогического института (ТПИ). В 1935 г. он организовал для научных работников этого института семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений. Семинар, действовавший до 1937 г., помог многим преподавателям ТПИ повысить свою квалификацию и профессиональное мастерство. Так, одна из участниц его семинара — Н. В. Оранская выполнила работу «Интегрирование уравнения Спарра» [53]. Ученица Молина по геометрическому семинару В. А. Соколова подготовила и еще две работы [54, 55], за которые позже ей была присуждена кандидатская степень. Другая его ученица — Л. С. Богословская-Фрейман защитила кандидатскую диссертацию на тему «Об одной системе минимальных поверхностей». Под влиянием Ф. Э. Молина определился интерес к дифференциальной геометрии и теории поверхностей у Н. Г. Туганова, учившегося в начале 20-х годов в Томском университете, а затем окончившего Ленинградский университет. В 1939 г. Туганов возвратился в Томск, где стал заведующим кафедрой геометрии университета. Работая доцентом, он в 1940 г. защитил кандидатскую диссертацию. Можно сказать, что с трудов Молина для Туганова начинается Томская геометрическая школа.

Тем временем Федор Эдуардович по-прежнему с увлечением и много читает в университете. В 1937 г. он прочитал: Спецкурс по высшей алгебре; Проективную геометрию; Элементы высшей геометрии; Теорию функций комплексного переменного; Курс анализа на физмате. Кроме лекций, руководства дипломниками, аспирантами, Молин ведет интенсивную редакторскую работу. В 1937 г. он издает 3-й выпуск первого тома «Известий НИИММа», а в 1938 г.— два выпуска второго тома. Одновременно он пишет последнюю свою работу [13], опубликованную в «Ученых записках ТПИ» за 1939 г. По-видимому, тогда же Молин подготовил обзор теории гипергеометрических функций.

В связи с выходом в свет на русском языке сборника статей [56] Г. Фробениуса по теории представлений групп, с которым Федор Эдуардович когда-то так успешно вступил в научное соревнование, он начинает обещавшую быть интересной статью о представлении групп Галуа, имевшую целью найти «полное представление группы Галуа в виде неприводимых групп подстановок». Его мысль и полная движения и труда жизнь не знают усталости. Но смерть, наступившая 25 декабря 1941 г., оборвала круговорот его, казалось, вечно кипучей энергии, неутомимого труда и могучего таланта, так много давшего всем тем, кто имел счастье работать с ним, учиться у него и следовать ему.

Глава 3

Алгебраические труды Ф. Э. Молина

К середине 80-х годов XIX в. учение о гиперкомплексных числах, возникшее из желания изучить гиперкомплексное расширение поля действительных чисел, трудами У. Р. Гамильтона (1805—1865), А. Кэли (1821—1895), Дж. Сильвестра (1814—1897) — в Англии; Б. Пирса (1809—1880), Ч. Пирса (1839—1914) и того же Дж. Сильвестра — в Америке; Э. Лагерра (1834—1886), А. Пуанкаре (1854—1912), Ш. Эрмита (1822—1901) — во Франции; Г. Грассмана (1809—1877), Г. Ганкеля (1839—1873), К. Вейерштрасса (1815—1897), Р. Дедекинда (1831—1916), Г. Фробениуса (1849—1919) — в Германии и некоторых других ученых накопило большое количество частных примеров числовых алгебр и целый ряд важных, но разрозненных результатов. В частности, было сформулировано определение числовой алгебры (Грассман, Пирсы и др.); выяснено понятие делителя нуля и ряда связанных с ним понятий (Вейерштрасс, Пирсы); подчеркнуты особенности и место поля комплексных чисел (Вейерштрасс) и тела действительных кватернионов (Фробениус, Ч. Пирс) среди других числовых алгебр; открыты матричное исчисление (1858, А. Кэли), примеры матричных алгебр (А. Кэли) и так называемые квадратные алгебры (Пирсы, Клиффорд), изоморфные матричным; определены понятия линейной зависимости и независимости (Грассман; в неявной форме у многих авторов), понятие ранга матрицы (Сильвестр, Кронекер, Фробениус), понятие линейного преобразования, сложившееся вместе с понятием характеристического уравнения у многих авторов (Гамильтон, Кэли, Сильвестр, Пирсы и др.); осознано отношение между матрицами и билинейными формами вместе с отношением их к линейным преобразованиям и понятию ранга билинейной формы (Фробениус; в неявной форме у ряда предшествующих авторов). В то же время многими авторами было изучено строение числовых алгебр небольших порядков; получен ряд общих, но разъединенных результатов, требующих объяснения их взаимной связи в рамках единой теории гиперкомплексных систем, которую предстояло еще создать.

В трудах последователей Ли (Штуди, Шефферса) второй половины 80-х годов, появившихся в связи с упомянутой выше работой Пуанкаре [32], были уточнены и углублены его результаты, обсужден ряд понятий и получены новые результаты (минимальный многочлен системы, в частности полного кольца матриц; неприводимость этого многочлена; его взаимоотношение с характеристическим многочленом и другие вопросы — у Штуди; понятие разложимости системы в прямую сумму систем и разложение минимального многочлена такой системы в произведение минимальных многочленов, соответствующих прямым слагаемым; деление систем на кватернионные, содержащие подсистему, изоморфную алгебре кватернионов, и на некватернионные — у Шefферса). Исследования Штуди и Шефферса касались систем произвольного ранга и, как большинство работ описываемого времени, относящихся к общим системам, имели целью создание метода, позволяющего судить о строении таких систем. Однако, кроме отдельных результатов, относящихся к общим системам, попытки отыскания такого метода оказались безуспешными и вопрос построения общей теории числовых систем остался открытым вплоть до появления в свет (1892 г.) докторской диссертации Ф. Э. Молина «О системе высших комплексных чисел», явившейся исторически первым очерком научной теории числовых систем (алгебр).

Диссертация Молина состоит из четырех частей. Первая часть — «Числовые системы и билинейные формы» — посвящена основным понятиям (сопровождающей и первоначальной сопровождающей систем) и методу (регулярных и матричных представлений) вместе с теорией о строении полупростой алгебры. Вторая — «Числовые системы и алгебраические уравнения» — содержит непревзойденную тогда по полноте теорию уравнений системы вместе с теоремой о строении первоначальной (простой) системы и теоремами, устанавливающими связи особенностей уравнений (минимального, характеристического) системы с особенностями ее регулярного представления. Здесь же содержится критерий полупростоты системы. Третья часть — «Числовые системы и им принадлежащие группы» — представляет исследование групп и полугрупп линейных преобразований определенного модуля линейных форм, восходящие к работам школы Ли, но содержащие важные результаты, принадлежащие Молину, в частности первый набросок теоремы о выражении произвольной алгебры через ее радикал и простую подалгебру, вместе с рассмотрением убывающей цепочки максимальных модулей и соответствующей треугольно-блочной формой матриц представления, перекликающихся с последующими исследованиями Э. Нетер. Четвертая — «Числовые системы и матрицы» — включает классификацию числовых систем над полем комплексных чисел C и перевод ряда результатов Молина на матричный язык, считавшийся тогда непопулярным. Каждая часть начинается параграфом, в котором Молин кратко излагает результаты, полученные до него в этой области другими авторами; остальные параграфы каждой части посвящены собственным его результатам.

Основным методом Ф. Э. Молина является используемый и в значительной степени им развиваемый метод регулярных и матричных представлений вместе с введенными им основными понятиями (сопровождающей и первоначальной сопровождающей) и использованными неявно многими другими понятиями (обертывающей алгебры, приводимости и неприводимости представлений, следа представления и др.), восходящими к различным авторам, давшим возможность объединить все полученные до него теоремы о системах в рамки единой научной теории числовых алгебр.

В первом параграфе (часть I) «Определение числовых систем» Молин отклоняется от общепринятого тогда в Германии интуитивно-аксиоматического (полуформального) определения алгебры, имеющегося, например, у Шефферса [36], идущего от Грассмана, Ганкеля, Пирса. Естественно, определив правила сложения, вычитания гиперкомплексных чисел $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \overset{df}{=} x_i e_i$[1], для каждого из которых комплексные числа $x_1, \ldots, x_n$ называются параметрами числа $x(e_1, \ldots, e_n$ — база системы), и правило умножения их на комплексные числа, т. е. определив сначала исследуемую систему гпк чисел[2] как n-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел C, Молин тотчас рассматривает формулы неособенного линейного преобразования баз этого пространства вместе с соответствующими формулами линейного преобразования параметров гпк чисел. Отметив дистрибутивный и ассоциативный законы умножения чисел, он рассматривает произведение чисел $x = x_i e_i$, $u = u_k e_k$ в виде билинейной формы

$$x_i' = \overset{i}{a}_{jk} u_k x_j \tag{I}$$

параметров перемножаемых чисел, называя ее «уравнениями произведений» числовой системы, где $\overset{i}{a}_{jk}$ — структурные константы, удовлетворяющие условию ассоциативности

$$\overset{i}{a}_{sm} \overset{s}{a}_{kj} = \overset{i}{a}_{ks} \overset{s}{a}_{jm}. \tag{II}$$

Выполнимость деления $x' = xu$ на x или на u он вслед за Шефферсом характеризует соответственно условиями

$$\det\left(\overset{i}{a}_{jk} x_j\right)_n \neq 0, \qquad \det\left(\overset{i}{a}_{jk} u_k\right)_n \neq 0. \tag{III}$$

---

[1] В дальнейшем знак суммы ради краткости записей опустим. Число одинаковых пар индексов в выражении будет указывать на число опущенных знаков сумм. Если не оговорено иное, множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ обычно обозначает область значений индексов.

[2] Вместо «гиперкомплексные числа» здесь и далее — гк или гпк числа или же просто числа.

Затем доказывается, что в определенной таким образом системе существует единица. Уравнения произведений I вместе с последующими условиями по Молину определяют систему с базой $e_1, \ldots, e_n$ над C и таблицей умножения $e_i e_j = a_{ij}^{s} e_s$. Произведение xu он толкует как линейное преобразование U: $x \to xu$. Поскольку им исследуются системы с единицей, постольку изучаемое им отображение $u \to U$ общего элемента u системы на общий элемент U алгебры линейных преобразований является изоморфизмом системы на систему линейных преобразований. При этом Молин, следуя Кронекеру, рассматривает расширение A (исходной системы над полем C) над полем $K = C(u_1, \ldots, u_n)$ рациональных функций от переменных $u_1, \ldots, u_n$ параметров общего элемента $u = u_i e_i$ системы, присоединенных к C. Следовательно, Молин изучает, по существу, алгебры матриц над K, изоморфные системе A, и матричные представления исходной системы над полем C реализуются посредством таких же представлений ее расширения A над полем K.

Во введении к диссертации Молин пишет: «Также не увенчались успехом имевшиеся до сих пор попытки толкования общих числовых систем, хотя он и мог быть достигнут при помощи действительного вспомогательного средства. В первую очередь здесь стоит теория матриц г. Кэли, являющаяся по существу теорией линейных преобразований...». Следовательно, он вполне осознает силу примененного им метода. Представления $(a_{ij}^{s} u_j)_n$, $(a_{ij}^{s} u_i)_n$ Молин рассматривает в виде уравнений произведений или билинейных форм $x'_s = a_{ij}^{s} u_j$, $x'_s = a_{ij}^{s} u_i$. Эквивалентные представления и изоморфные системы он отождествляет. В заключение Молин ставит проблему отыскания всех классов изоморфных систем, заданных неэквивалентными представлениями. Для этого, пишет он, нужно найти некоторые нормальные формы уравнений произведений систем, зная которые, можно описать все системы.

Основное понятие сопровождающей систему системы («Сопровождающие числовые системы») Молин вводит посредством теоремы: если после подходящего выбора базы уравнения (1) произведений системы представляется в виде

$$\begin{aligned} x'_i &= a_{jk}^{i} x_j u_k && (i, j, k = 1, \ldots, r), \\ x'_{i+r} &= a_{jk}^{i+r} x_j u_k && (j, k = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n-r), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\overset{i}{a}_{sm}\overset{s}{a}_{kl}=\overset{i}{a}_{ks}\overset{s}{a}_{lm}$; i, k, l, m, $s=1, \ldots, r$ при $i<r+1$, т. е. r первых уравнений произведений определяется билинейной формой, образующейся исключительно с помощью r первых параметров перемножаемых чисел, то принадлежат эти первые r уравнений произведений к некоторой числовой системе. Последнюю Молин называет сопровождающей данную систему системой.

Иначе говоря, если после перехода $(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n)T$ от базы $(e_1, \ldots, e_n)$ алгебры A над K к базе ее $(e_1', \ldots, e_n')$ матрица $p(u) = (\overset{i}{a}_{kl}u_l)_n$ регулярного представления преобразуется в блочном виде записанной матрицы

$$T^{-1}p(u)\,T = \begin{pmatrix} (\overset{i}{a}_{kl}u_l)_r & (0)_{r\times(n-r)} \\ (\overset{i+r}{a}_{kl}u_l)_{(n-r)\times r} & (\overset{i+r}{a}_{l+k,l+r}u_{l+r})_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

т. е. представление приводимо, то матрице $(\overset{i}{a}_{kl}u_l)_r$ соответствует общий элемент подалгебры (алгебры A), называемой Молиным сопровождающей алгебру A. Итак, если в алгебре A ранга n над K найдется такая база $e_1, \ldots, e_r$, $e_{r+1}, \ldots, e_n$, что $e_ke_l = \overset{i}{a}_{kl}e_i$; i, k, $l=1, \ldots, r$; $e_ke_l = \overset{i+r}{a}_{kl}e_{i+r}$; $i=1, \ldots, n-r$; $k, l=1, \ldots, n$, $\overset{i}{a}_{kl}=0$ при $i\leqslant r$, $k>r$ или $l>r$, а также при $k>r$, $l>r$, то подалгебра ранга r с базой $e_1, \ldots, e_r$ называется сопровождающей алгебру A алгеброй.

Таким образом, понятие сопровождающей у Молина, по существу, вытекает из понятия приводимости регулярного представления.

Молин отчетливо сознает, что вместе с сопровождающей ранга r в алгебре A обнаруживается подалгебра I (названная им смежной системой) ранга $n-r$ с базой $e_{r+1}, \ldots, e_n$, общий элемент которой представляется матрицей $(\overset{i+r}{a}_{r+k,r+l}u_{l+r})_{(n-r)\times(n-r)}$. Эту инвариантную подалгебру I начиная с Э. Картана (1898) стали называть идеалом алгебры A. Названная выше сопровождающая является подалгеброй A, изоморфной фактор алгебре A/I с базой $e_1+I, \ldots, e_r+I$. Однако Молин оставляет в тени понятие идеала тем, что элементы A, отличающиеся на идеал I, он отождествляет, т. е. считает $a=b$, если $a\equiv b(\operatorname{mod} I)$. После, в 1908 г., в своей поворотной работе Веддерборн напишет: «Если I идеал алгебры A, то посредством отождествления тех ее элементов, которые отличаются на элементы I, в ней можно найти новую алгебру. Эта основная теорема дана Молиным» [57].

В дальнейшем обсуждении мы примем обозначение A/I для сопровождающей (системы A) в смысле Молина. Из определения сопровождающей следует: 1) Если $r=n$, то A совпадает со своей сопровождающей и 2) сопровождающая сопровождающей системы A является сопровождающей последней. В терминах идеалов Веддерборн в [57] формулирует это следствие в виде теоремы 4: «Если I_1, I_2 — идеалы A и $I_2 \in I_1$, то A/I_1 — идеал A/I_2»; 3) среди сопровождающих систему A систем существует такая, которая никакой сопровождающей, кроме себя, не сопровождает. Систему, не имеющую сопровождающих (кроме себя), Молин назвал первоначальной системой. Касаясь происхождения этого второго основного понятия своей теории, Молин в предисловии к [5] пишет: «Ли как-то обратил внимание на числовые системы, соответствующая группа которых G_n обладает простой подгруппой G_{n-1}. Это те самые системы, которые я называю первоначальными. Я, правда, исхожу из другого определения...». Тем самым понятие простой алгебры Ли явилось прообразом понятия первоначальной системы.

Понятие сопровождающей эквивалентно понятию идеала в том смысле, что система тогда и только тогда имеет нетривиальную сопровождающую, когда (эта система) обладает собственным идеалом. С другой стороны, понятие сопровождающей позволяет Молину в первых двух частях диссертации ограничиться рассмотрением полупростых и простых алгебр. Очевидно, система (числовая алгебра) тогда и только тогда первоначальная, когда она простая. Следовательно, понятия первоначальной и простой системы эквивалентны. Отметим, что лишь Э. Картан во втором после диссертации Молина очерке [58] научной теории числовых алгебр, опубликованном в 1898 г., вводит явно понятие идеала, простой и полупростой алгебр.

Если система A имеет сопровождающую A/I, то A — прямая сумма I и A/I. Следовательно, каждое $x \in A$ однозначно представится в виде $x = s + i$, где гк числа $s \in A/I$, $i \in I$ называются соответствующими числу x. Далее устанавливается, что сопровождающие A/I_1, A/I_2 систему A имеют общую сопровождающую $A/I_3 = A/I_1 \cap A/ /I_2$ ранга q тогда и только тогда, когда между параметрами чисел $s_1 \in A/I_1$, $s_2 \in A/I_2$, соответствующих любому $x =$

$= s_1 + i_1 = s_2 + i_2 \in A$, имеется q линейных соотношений. Отсюда $A/I_1 \cap A/I_2 = 0$ тогда и только тогда, когда параметры соответствующих чисел s_1, s_2 линейно-независимы. В частности, линейно независимы параметры соответствующих чисел двух неизоморфных, первоначальных подсистем, системы. Вообще, если попарное пересечение нескольких сопровождающих систему A равно нулю. то параметры соответствующих чисел этих подсистем линейно независимы. В частности, если $A/I_1, \ldots, A/I_t$ — максимальная цепь таких первоначальных сопровождающих, что множества их параметров соответствующих чисел линейно-независимы, то каждая первоначальная сопровождающая систему A находится среди указанных. При этом если $r_1, \ldots, r_t$ соответственно размерности $A/I_1, \ldots, A/I_t$ и $r = r_1 + \ldots + r_t$, то матрица $(\overset{s}{a}_{ij} u_j)_n$ регулярного представления имеет блочно-диагональный вид с блоками $(\overset{s}{a}_{ij} u_j)_{r_1}, \ldots, (\overset{s}{a}_{ij} u_j)_{r_t}$.

Первая из перечисленных матриц регулярного представления соответствует общему элементу $u = u_1 + \ldots$ $\ldots + u_t$, следующие t блочных матриц представляют соответствующие u общие элементы $u_1 \in A/I_1, \ldots, u_t \in A/I$. Последняя блочная матрица отвечает такому идеалу I системы A, что сопровождающая A/I изоморфна прямой сумме перечисленных выше сопровождающих.

В итоге устанавливается следствие: «База всякой (полупростой) алгебры A может быть выбрана так, что r_1 первых уравнений произведений будут уравнениями произведений некоторой первоначальной сопровождающей, r_2 вторых уравнений произведений — уравнениями произведений некоторой второй первоначальной сопровождающей и т. д. до тех пор, пока среди уравнений произведений системы не найдутся уравнения произведений каждой первоначальной, сопровождающей систему».

Иначе говоря, в A можно найти такую базу $e_1^{(1)}, \ldots,$ $e_{r_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(2)}, \ldots, e_{r_2}^{(2)}, \ldots, e_1^{(\alpha)}, \ldots, e_{r_\alpha}^{(\alpha)}$, что ее регулярное представление в этой базе будет иметь блочно-диагональный вид с блоками $(a_{kl}^{(1)} u_l)_{r_1}, (a_{kl}^{(2)} u_l)_{r_2}, \ldots,$ $(a_{kl}^{(\alpha)i} u_l)_{r_\alpha}$, соответствующими первоначальным сопровождающим $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, прямой сумме которых равна A или $A = A_1 + \ldots + A_\alpha$. Если n — ранг A, то $n = r_1 + \ldots + r_\alpha$.

Так как для каждой первоначальной системы A_i, $i =$

$=1, 2, \ldots, \alpha$ требуется выполнение условий (III), т. е. разрешимости уравнения $x' = xu$ относительно x и u для каждой фиксированной системы значений параметров, то A_i суть тела и, следовательно, полупростая алгебра A над полем комплексных чисел является прямой суммой тел. Обсужденная теорема стала первым наброском теоремы о строении полупростой алгебры как прямой суммы простых алгебр — с одной стороны, и теоремы о разложимости приводимого регулярного представления такой алгебры — с другой. Ею изучение (полупростых) алгебр сводилось к изучению простых.

Параграф «Формы с полярным свойством» посвящен критериям простоты и полупростоты систем. Но, судя по тому, какую значительную роль впоследствии будет играть выдвинутая здесь идея линейной оболочки образов представления системы, или идея обертывающей алгебры, важность освещенных в этом параграфе вопросов (и их продолжение в 3-й части) превзошла значение поставленной в нем задачи.

Молин рассматривает множество линейных форм $g(x') = g_i x_i'$ от координат неособенных преобразований $x \to x' = xu$, равносильных переходам от базы к базе системы A. Иначе говоря, им рассматривается множество линейных форм $g(xu) = g_i \overset{i}{a}_{kl} x_k u_l$ на модуле билинейных форм $\overset{i}{a}_{kl} x_k u_l$ или на модуле квадратных матриц $(\overset{i}{a}_{kl} u_l)_n$. Каждую из форм $g(xu)$ он называет формой, порождающей числовую систему, определяемую уравнениями произведений $x_i' = \overset{i}{a}_{kl} x_k u_l$. Если $g_1, \ldots, g_n$ выбраны так, что они удовлетворяют уравнениям $g_i(\overset{i}{a}_{kl} - \overset{i}{a}_{lk}) = 0$, то $g(xu) = g(ux)$, т. е. форма $g(xu)$ будет симметрической и полярой квадратичной формы $g(x^2) = g_i \overset{i}{a}_{kl} x_k x_l$. Такую форму Молин называет формой спс[3]. Эта форма обладает рядом свойств. В частности: 1) $g(ax' + by') = ag(x') + bg(y')$ — свойство следа для любых a, b из C и линейных преобразований $x \to x' = xu$, $y \to y' = yu$; 2) $g(xvw) = g(xvw) = g(vwx) = g(wxv)$ — свойство цикличности. Дискриминантом формы спс $g(xu)$ Молин называет дискриминант $\det(g_i \overset{i}{a}_{kl})_n = q_i^n \det(\overset{i}{a}_{kl})_n$ квадратичной формы $g(x^2)$, полярой которой является $g(xu)$.

В работе доказывается, что каждая числовая система A ранга n с единицей порождает хотя бы одну форму

[3] Сокращение выражения «форма с полярным свойством».

спс. Действительно, форма $Sp(xu)=a_{si}^{i}a_{jk}^{s}x_j u_k$ будет именно такой формой тождественно $\neq 0$ в силу наличия единицы в A. Далее он устанавливает, что если дефект дискриминантной матрицы формы спс $g(xu)$ равен $n-r$ (т. е. ранг ее $r\neq 0$), то такая форма порождает сопровождающую A/I ранга r, определяемую уравнениями произведений $u_i=a_{jk}^{i}v_j w_k$; i, j, $k=1$, 2, ..., r. Отсюда легко получается критерий полупростоты[4] алгебры, и в частности элегантный, по выражению Фробениуса [35], критерий простоты ее: система A первоначальна тогда и только тогда, когда она порождается единственной формой спс, которую она сама порождает. Такой формой является $Sp(xu)$ с дискриминантом $\neq 0$.

Рассмотрение замкнутой относительно умножения линейной оболочки регулярных представлений системы (обертывающей алгебры) является одной из научных заслуг Ф. Э. Молина.

В параграфе «Опорные теоремы» (часть 2) Ф. Э. Молин дает свое весьма изящное доказательство теоремы Гамильтона — Кэли, полученное в общем случае тогда лишь Д. Сильвестром (1883) и Эд. Вейером (1884) и некоторыми другими авторами, и теоремы о том, что все ρ, равные разностям всевозможных корней характеристического уравнения $\det(b_{jk}-\delta_{jk}\omega)=0$ матрицы $(b_{jk})_n$ относительно неизвестного ω, получаются исключением c_{jk} из системы уравнений $\rho c_{ik}=c_{jl}b_{lk}-b_{jl}c_{lk}$, восходящей к В. Киллингу (1888).

По-видимому, первый, кто предложил положить в основу классификации групп Ли изучение характеристических уравнений операторов, был В. Киллинг [38]. Характеристическое, минимальное уравнение или одно из них более или менее подробно рассматривали различные авторы, в том числе А. Пуанкаре в 1884 г. в указанной ранее работе [32], Э. Штуди, Г. Шефферс в работах 1889 г. Однако Молин в отличие от Штуди и Шефферса, следуя Кэли, изучает многочлены левого и правого регулярных представлений. При этом Молину принадлежит наиболее полная (для начала 90-х годов) реализация идеи изучения системы в соответствии с особенностями строения названных многочленов. Осветим содержание параграфов последующих частей диссертации суммарно.

---

[4] Система A тогда и только тогда полупростая, когда $S_p(xu)$ неособенная.

Исходя из регулярных представлений $x \to xu$, $x \to ux$, $x \to ux - xu$ системы A над K, Молин приходит соответственно к уравнениям $\omega x = xu$, $\omega x = ux$, и $\omega x = ux - xu$ системы A над K относительно неизвестного ω или соответственно к характеристическим уравнениям $\det\left(a^i_{jk}u_k - \delta_{ij}\omega\right) = 0$, $\det\left(a^i_{jk}u_j - \delta_{ik}\omega\right) = 0$ и уравнению $\det\left(\left(a^i_{jk}u_k - a^i_{kj}u_k\right) - \delta_{ij}\omega\right) = 0$, названному Молиным уравнением Киллинга.

В дальнейшем левые части перечисленных уравнений обозначим соответственно через $h_r = \omega^n - f_1(u)\omega^{n-1} + \ldots \ldots \pm f_n(u)$, $h_l = \omega^n - g_1(u)\omega^{n-1} + \ldots \pm g_n(u)$, k_A, где $f_1(u)$, $g_1(u)$ — соответственно линейные коэффициенты или следы левого и правого представлений; $f_n(u)$, $g_n(u)$ — их нормы.

Пусть $A_1, \ldots, A_\alpha$ — первоначальные (сопровождающие) подсистемы системы A; $r_A = \omega^m - h_1(u)\omega^{m-1} + \ldots \pm h_m(u)$ — минимальный, или ранговый[5], многочлен, по терминологии Молина; h_A, h_{Ai}, k_A, r_A, r_{Ai},— соответственно характеристический, киллингов, ранговый (безразлично левый или правый) многочлены системы A или A_i.

Молин доказывает, что

1) u — корень характеристических многочленов h_r, h_l;

2) коэффициенты характеристических многочленов суть целые рациональные функции параметров $u_1, \ldots, u_n$ числа u;

3) линейные коэффициенты $f_1(u)$ и $g_1(u)$ (или соответственно правый и левый Spur'ы) обладают свойствами: а) если $u^\nu = u_1^{(\nu)}e_1 + \ldots + u_n^{(\nu)}e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — база A, и $f_1(u) = p_1u_1 + \ldots + p_nu_n$, то $f_1(u^\nu) = p_1(u^\nu)_1 + \ldots + p_n(u^\nu)_n$. Поэтому корни многочлена $h_r(\omega, u^\nu)$ — целые ν-е степени корней многочлена $h_r = h_r(\omega, u)$; б) $f_1(zt\cdots uv) = f_1(vzt\cdots u)$, в частности, $f_1(uv) = f_1(vu)$, т. е. правый и левый Spur'ы инвариантны относительно циклической перестановки переменных, от которых они зависят; в) $f_1(u) = a^i_{hl}u_l$, $g_1(u) = a^i_{hl}u_k$ (т. е. правый и левый Spur'ы — формы с полярными свойствами; они порождают систему A и порождаются ею, если система A первоначальна, или порождают сопровождающую системы A в противном случае).

Отметим, что позже, в 1897 г., Фробениус в письме к Молину попросил привести пример системы, у которой правый и левый характеристический многочлены различ-

[5] Термин, сохранившийся у М. Дейринга [36, с. 8].

ны. Молин послал ему пример алгебры ранга 3 с базой e_1, e_2, e_3 и таблицей умножения $e_1^2 = e_1$, $e_3e_2 = e_1e_3 = e_3$, $e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2e_3 = e_3e_1 = e_3^2 = 0$. Фробениус поместил этот пример в своей работе [35] от 1903 г. После этот пример был использован Ван-дер-Варденом в его «Современной алгебре» (с. 170 русского перевода издания 1947 г.);

4) устанавливается свойство норм: $f_n(uv) = f_n(u)f_n(v)$, $g_n(uv) = g_n(w)g_n(v)$. Молин рассматривает также характеристическое уравнение и его свойства для обратного элемента u^{-1} к регулярному u.

Далее перечислим все свойства многочленов алгебры A над K, ее сопровождающих A и ее центра Z_A, найденные Молиным:

1) r_A — делитель h_r и h_l;

2) h_{A_i} — левый делитель h_l; h_{A_i} — правый делитель h_r;

3) r_{A_i} — делитель r_A;

4) оба h_{A_i} (левый и правый) — равные степени одного и того же неприводимого над K многочлена (результат, приписываемый М. Дойрингом [36] Л. Е. Диксону);

5) если r_{A_i} неприводим над K и A_i порождается линейным коэффициентом (Spur'ом) r_{A_i}, то A_i — первоначальная система (простая алгебра);

6) если A_i первоначальна, то r_{A_i} неприводим над K;

7) $r_{A_1}, r_{A_2}, \ldots, r_{A_\alpha}$ — ранговые многочлены всех первоначальных сопровождающих (простых подалгебр) A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$ системы (алгебры) A, и только они являются всевозможными неприводимыми делителями h_r, h_l;

8) любой неприводимый делитель h_r есть делитель и h_l;

9) если A_i первоначальная и m_i — степень ее рангового многочлена r_{A_i}, то $h_{A_i} = r_{A_i}^{m_i}$, где h_{A_i} — левый или правый характеристический многочлен A_i. В итоге получается, что $h_r = h_{A_1}h_{A_2} \ldots h_{A_\alpha} = r_{A_1}^{m_1}r_{A_2}^{m_2} \ldots r_{A_\alpha}^{m_\alpha}$, где m_i — степень r_{A_i} и последний есть ранговый многочлен первоначальной A_i, сопровождающей A.

В дальнейшем Ф. Э. Молин выяснил значение числа α. С этой целью он изучил многочлен Киллинга k_A. Перечислим свойства k_A, найденные Молиным.

1) Корни k_A суть всевозможные разности корней h_r или h_l. Из этой теоремы следует, что если корень k_A есть

разность двух различных корней неприводимого делителя h_r или h_l, то и все остальные разности различных корней этого делителя есть также корни k_A.

2. Опираясь на это следствие, казавшееся очевидным, Молин доказал важную теорему 26 о том, что в случае, когда числовая система A имеет единственную первоначальную сопровождающую A/I (т. е. $A = A/I + I$, где I — максимальный идеал A), k_A равен степени $r_{A/I}$. Один из рецензентов диссертации Молина, по-видимому Кнезер, попросил дать более подробное доказательство теоремы 26. В октябре 1892 г. Молин приводит новое доказательство этой теоремы, опубликованное в работе [6] от 1893 г.

Рассмотрим это доказательство. Пусть характеристический и минимальный многочлены первоначальной системы A/I обозначены соответственно так же, как упомянутые выше многочлены h_r, r_A. Пусть уравнение Киллинга системы A.

$$\det\left(\left(a^i_{kl} - a^i_{lk}\right)u_l - \delta_{ik}\omega\right) = 0, \tag{1}$$

где $i, k, l = 1, \ldots, n$, относительно неизвестной ω имеет вид

$$\omega^n - c_2\omega^{n-2} + \ldots = 0. \tag{2}$$

В нем в силу свойства $a^i_{ij}u_j = a^i_{ji}u_j$ следа коэффициент c_1 при ω^{n-1}, очевидно, равен 0. Пусть M — матрица, составленная из элементов $\left(a^i_{jk} - a^i_{kj}\right)u_k$ при $i, j, k = 1, \ldots, n$ и S_i — сумма i-х степеней корней уравнения (2). Тогда следы $SpM = c_1 = 0$, $SpM^2 = \left(a^s_{tk} - a^s_{kt}\right)\left(a^t_{sl} - a^t_{ls}\right)$. С другой стороны, $SpM^2 = 2c_2 = S_2 - S_1 = S_2$. Поэтому после упрощений получим

$$c_2 = a^s_{tk}a^t_{sl}u_k u_l - a^s_{kt}a^t_{sl}u_k u_l, \tag{3}$$

где $s, k, t = 1, \ldots, n$. Первое слагаемое в (3), очевидно, равно $f_1(u^2)$. С другой стороны, из тождества

$$\left(u^m - h_1(u)\,u^{m-1} + \ldots \pm h_m(u)\right)^n = \left(u^n - f_1(u)\,u^{n-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm f_n(u)\right)^m,$$

где $\rho^m - h_1(u)\rho^{m-1} + \ldots \pm h_m(u) = 0$ — главное уравнение, находим $nh_1(u) = mf_1(u)$, откуда $nh_1(u^2) = mf_1(u^2)$. Следовательно, в силу $h_1(u^2) = S_2 = h_1(u^2) - 2h_2(u)$ из $f_1(u^2) = a^s_{kt}a^t_{sl}u_k u_l$ находим

$$a^s_{tk} a^t_{sl} u_k u_l = \frac{n}{m}(h_1(u)^2 - 2h_2(u)). \tag{4}$$

Вычислим вычитаемое суммы (3). Оно представляет собою след дискриминантной матрицы, т. е. квадратичную форму, поляра которой есть форма спс. Последняя образуется из формы $a^s_{kt} a^t_{sl} v_k u_l$. Как доказано ранее, для первоначальной сопровождающей единственной такой формой является $h_1(u)$. Следовательно,

$$a^s_{kl} a^t_{sl} = \tau h_1(u)^2, \tag{5}$$

откуда и из равенств (3), (4) находим

$$c_2 = \frac{n}{m}(-2h_2(u) + h_1(u)^2) + \tau h_1(u)^2. \tag{6}$$

Чтобы вычислить число τ, заменим u на $u + \lambda u^0$, где u^0 — единица системы, λ — произвольное комплексное число. После этого корни ω_i минимального уравнения

$$\omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \ldots \pm h_m(u) = 0 \tag{7}$$

рассматриваемой простой системы преобразуются в $\omega_i + \lambda$, а корни киллингова уравнения ее не изменятся. Поэтому не изменится и c_2. Из (6) находим

$$c_2 = \frac{n}{m}\{-2h_2(u + \lambda u^0) + [h_1(u + \lambda u^0)]^2\} + \tau[h_1(u + \lambda u^0)]^2.$$

Следовательно, в силу $h_1(u + \lambda u^0) = h_1(u) + \lambda m$ имеем

$$h_2(u + \lambda u^0) = h_2(u) + 2\lambda h_1(u) + \frac{\lambda^2 m(m-1)}{2}.$$

Полагая в последнем $\lambda = 1$ и $u = 0$, получаем $\tau = -\frac{n}{m^2}$.

Поэтому из (6) имеем $c_2 = -\frac{n}{m^2}[-2mh_2(u) + (m-1)\,h_1(u)^2]$.

Так как $SpM^3 = S_3 = 3c_3$, то $3c_3 = \left(a^r_{sj} - a^r_{js}\right)\left(a^s_{tk} - a^s_{kt}\right)\cdot\left(a^t_{rl} - a^t_{lr}\right) u_j u_k u_l$, откуда после перемножения находим $c_3 = 0$. Вообще, продолжая таким образом вычисление, получим, что все c_i с нечетными индексами равны 0.

Далее составим уравнение, имеющее своими корнями всевозможные разности корней минимального уравнения (7). Степень его равна числу размещений из m элементов по два с повторениями, т. е. m^2. В нем коэффициент при неизвестном в степени m^2-1, очевидно, равен 0. Следовательно, это уравнение имеет вид

$$\rho^{m^2}-d_2\rho^{m^2-2}+\ldots+=0. \tag{8}$$

Легко подсчитать, что $d_2=\sum_{i,j}(\omega_i-\omega_j)^2=2mh_2(u)-(m-1)h_1(u)^2$, т. е. $c_2=\frac{n}{m}d_2$. Пользуясь формулами степеней корней, далее Молин доказал, что все коэффициенты нечетных индексов уравнения (7) равны 0, а каждая сумма степеней корней уравнения Киллинга кратна соответствующей сумме степеней корней уравнения (7). В силу $(\rho^n-c_2\rho^{n-2}+\ldots)^{m^2}=(\rho^{m^2}-d_2\rho^{m^2-2}+\ldots)^n$ число $\frac{n}{m^2}$ равно целому числу, указывающему на кратность каждого корня $\rho_i\neq 0$ уравнения Киллинга. Но из последнего тождества ясно, что кратность, с которой в уравнение Киллинга входят нулевые корни, также равна $\frac{n}{m^2}$.

3. Если A порождена формой спс, то k_A имеет столько нулевых корней, сколько существует линейно-независимых чисел, перестановочных с общим элементом u системы A (теорема 19). Иначе говоря, число нулевых корней k_A равно рангу α центра Z_A системы A. Фробениус в [37], заметив недостаточность доказательства Молиным этой теоремы, дал свое доказательство ее для случая, когда A первоначальна.

4. Далее доказывается (теорема 27), что в первоначальной системе A линейно-независимые степени общего числа ее u образуют полную систему линейно-независимых и перестановочных с u элементов. Иначе говоря, ранг центра Z_A такой системы A совпадает со степенью ее главного многочлена.

5. Ранг первоначальной числовой системы A_i над полем K равен квадрату m_i — степени ее рангового многочлена r_{A_i}.

В заключительном параграфе «Нормальная форма первоначальной числовой системы» (часть 2) доказывается структурная теорема. «База всякой первоначальной числовой системы A_i имеет m_i^2 основных (базисных) чисел и может быть выбрана так, что уравнения произведений ее принимают вид $x'_{ik} = x'_{il}u_{lk}$; $i, k, l = 1, \ldots, m_i$». Его Молин называет нормальной формой уравнений произведений первоначальной системы, достигая тем цели, поставленной в диссертации (отыскание нормальной формы записи уравнений произведений гк системы) для частного случая первоначальных систем. При этом, следуя Штуди, базу A_i Молин берет в виде m_i^2 элементов e_{ij}, $i, j = 1, \ldots$ $\ldots, m_i$ с умножением по правилу $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$; $e_{ij}e_{kl} = 0$ при $k \neq j$; $i, l, j, k = 1, \ldots, m_i$.

Регулярное представление $u \to (u_{ik})_{m_i}$ системы A_i в указанной базе имеет матрицу $(u_{ik})_{m_i}$, все m_i^2 элементов которой линейно-независимы. Это представление неприводимое и точное, т. е. первоначальная система A_i изоморфна полному кольцу матриц над полем K.

В первом параграфе «Отношение к теории групп преобразований» (часть 3-я) Молин излагает результаты последователей школы Ли, полученные в исследовании числовых систем, начавшиеся с указанной выше работы [32] Пуанкаре, в которой отметил, что множеству чисел гк системы с единицей ранга n, не являющихся делителями нуля, соответствует группа линейных преобразований от n переменных с линейными коэффициентами от n параметров. Эту группу иногда называют билинейной группой. Позднее, в 1889 г., Э. Штуди уточняет теорему Пуанкаре, доказав, что каждая гк система определяет пару просто транзитивных групп, взаимных друг другу, т. е. таких, у которых каждое преобразование одной коммутативно со всяким преобразованием другой. Верно и обратное, т. е. пара просто транзитивных, взаимных групп определяет гк систему с единицей. Молин пользуется этим и другими результатами, полученными последователями Ли, и в частности резделением последним групп линейных преобразований на транзитивные и интразитивные.

Сначала Молин ставит задачу изучения групп линейных преобразований, имеющих отношение к числовым системам, и не только тех, какие он рассмотрел в предыдущих частях в форме уравнений произведений (группы автоморфизмов систем). Следуя Пуанкаре, Штуди, он исследует мультипликативную группу $H^{\cdot} = (\{U, V, \ldots\}, \cdot)$ линейных однородных преобразований m переменных, где каждое $U \in H^{\cdot}$ есть линейное преобразование $U : x \to x' =$ $= Ux = b_{ij}(u)x_j$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в переменные

$x_1', x_2', \ldots, x_m'$[6]. При этом коэффициенты последних $b_{ij}(u) = \gamma_{1j}^{i} u_2^1 + \ldots + \gamma_{nj}^{i} u_n$ — линейные формы над C от n переменных (в данном случае $u_1, u_2, \ldots, u_n$), называемые в дальнейшем в отличие от названных выше переменных (линейных преобразований) всегда параметрами группы $H^{\cdot}$. Одновременно он рассматривает изоморфную $H^{\cdot}$ группу $H_m^{\cdot} = (\{(b_{ij}(u))_m, (b_{ij}(v))_m, \ldots\}, \cdot)$ всех матриц порядка m линейных преобразований группы $H^{\cdot}$[7].

Среди m^2 элементов $b_{ij}(u)$ каждой матрицы $(b_{ij}(u))_m \in H_m^{\cdot}$ Ф. Э. Молин требует наличия максимальной линейно-независимой системы n форм: $b_{i_1 j_1}(u) = \gamma_{j_1 k}^{i_1} u_k, \ldots, b_{i_n j_n}(u) - \gamma_{j_n k}^{i_n} u_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, через которое линейно выражается каждая $b_{ij}(u)$. Следовательно, $\det\left(\gamma_{j_s l}^{i_s}\right)_n \neq 0$ и каждая матрица $(b_{ij}(u))_m$ линейно выразятся через n линейно-независимых (над C) матриц. После из этого требования и того, что $H^{\cdot}, H_m^{\cdot}$ — группы, он находит соотношения $v_i' = a_{kl}^{i} u_k v_l$ для n^3 коэффициентов a_{jk}^{i}, для которых оказываются верными условия $a_{sl}^{i} a_{jk}^{s} = a_{js}^{i} a_{kl}^{s}$ и ограничения $\det\left(a_{kl}^{i} u_k\right)_n \neq 0$, $\det\left(a_{kl}^{i} v_l\right)_n \neq 0$, согласно которым все такие уравнения произведений образуют группу $H_A^{\cdot}$ автоморфизмов некоторой системы A ранга n над K. Тем самым Молин доказывает теорему Пуанкаре — Штуди, выражая ее в форме соответствия группе $H^{\cdot}$ группы $H_m^{\cdot}$, которая, как показано в части 1, определяет систему $A = Ke_1 + \ldots + Ke_n$ ранга n над K.

Непосредственно Ф. Э. Молин рассматривает соответствие $U \to u = u_i e_i$, сопоставляя каждому $U \in H$ число $u = u_i e_i \in A$ так, что если $U \to u = u_i e_i$, $V \to v = v_i e_i$, то $UV \to uv = a_{kl}^{i} u_k v_l e_i$, $U^0 \to u^0 = u_i^0 e_i$, где U^0 — тождественное преобразование, u^0 — единица системы A. Группу $H_A^{\cdot}$ Молин называет группой параметров группы H. Последнюю он именует группой, принадлежащей системе A.

Рассматривая общую линейную группу $GL(m, K) = G$ от m переменных, каждое преобразование $U: x_i' =$

---

[6] В дальнейшем индексы переменных x_i или x_i' всегда пробегают значения $1, 2, \ldots, m$, а индексы, связанные с параметрами, — $1, 2, \ldots, n$.

[7] В особых случаях или теоремах $H^{\cdot}$ Ф. Э. Молин полагает полугруппой.

$= Ux_i = u_{ik}x_k$ которой имеет все m^2 коэффициентов u_{ik} линейно-независимыми и поэтому уравнения ее группы параметров $G_A^{\cdot}$ принимают вид $v'_{ik} = u_{il}v_{lk}$, являясь одновременно уравнениями произведений первоначальной системы A, он свою теорему об изоморфизме A полному кольцу матриц порядка m формулирует так: уравнения произведений первоначальной системы A ранга m являются уравнениями общей (полной) линейной группы с m переменными.

Возвращаясь к методу Молина, можно сказать, что он рассматривает модуль билинейных форм от mn переменных над C или алгебры H_m матриц $(b_{ij}(u))_m$ порядка m с $b_{ij}(u)$, являющихся линейными формами параметров $u_1, u_2, \ldots, u_n$, где H_m — обертывающая алгебра группы (или полугруппы) $H_m^{\cdot}$. Одновременно им исследуется алгебра H, изоморфная H_m, обертывающая группу (или полугруппу) $H^{\cdot}$. Алгебру H можно рассматривать как подалгебру алгебры $Hom(X_m, X_m)$ модуля линейных форм $X_m = Kx_1 + \ldots + Kx_m$ от m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Соответствие $U \to u = u_ie_i$ или $(b_{ij}(u))_m \to u$, по Молину, определяет изоморфизм $H \to A$ или $H_m \to A$. Тем самым он идет от алгебры H или изоморфной с ней матричной алгебры H_m и отыскивает систему A, для которой H или H_m являются образами точного представления A. Может, конечно, существовать несколько изоморфных алгебр линейных преобразований или матриц, изоморфных системе A; их Молин отождествляет. Изучив свойства или особенности H, H_m, он находит соответствующие свойства системы A. Мы видим, что язык теории Молина в какой-то мере близок методу модулей представления Э. Нетер. Не случайно последняя в [74] высоко оценила значение исследований Ф. Э. Молина.

Далее Молин вводит понятие сопровождающей группу группы $H^{\cdot}$, равносильное понятию приводимости. Если, пишет он, переменные группы $H^{\cdot}$, принадлежащей к некоторой системе A, можно подобрать так, чтобы уравнения (каждого $U \in H^{\cdot}$) группы имели вид

$$\begin{aligned} x'_i &= b_{ik}(u)\,x_k; && k = 1, 2, \ldots, p, \\ x'_{p+i} &= b_{p+i,k}(u)\,x_k; && i = 1, 2, \ldots, m-p, \\ & && k = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{1}$$

то p первых из этих уравнений определяют группу. Условиями этого являются требования замкнутости $b_{ik}(v') =$

$= b_{il}(u)b_{lk}(v)$ и обратимости матриц $(b_{ij}(u))_p$. Одновременно Молин рассматривает смежную с (6) группу, определяемую уравнениями

$$x'_{p+1} = b_{p+i,\,p+k}(u)\,x_{p+k}; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, m - p. \quad (2)$$

Это определение эквивалентно требованию наличия в X_m такой базы $x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_m$, при переходе к которой обнаруживается подпространство X_p, инвариантное относительно любого $U \in H^{\cdot}$, т. е. $UX_p = X_p$ и X_m как модуль представления приводим. Иначе говоря, все матрицы $(b_{ij}(u))_m \in H^{\cdot}_m$ в этом случае оказываются подобными клеточным матрицам

$$T^{-1}(b_{ij}(u))_m T = \begin{pmatrix} P & O \\ Q & R \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где T — матрица перехода к указанным переменным $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m$ пространства X_m; $P = (b_{ij}(u))_p$, $O = (o)_{p\times(m-p)}$, $Q = (b_{i+p,\,k}(u))_{(m-p)\times p}$, $R = (b_{i+p,k+p}(u))_{m-p}$ — подматрицы матрицы вида (3).

Рассматривая мультипликативно-замкнутую линейную оболочку группы $H^{\cdot}_m$ или множество H_m всех линейных форм $\alpha_i x'_i = \alpha_i U x_i = \alpha_i b_{ik}(u)x_k$ при условии $b_{ik}(v') = b_{il}(u)b_{lk}(v)$, Молин находит алгоритм отыскания сопровождающей группу, аналогичный процессу образования сопровождающей систему системы. Он доказывает, что если можно $\alpha_i b_{ik}(u)x_k$ представить как билинейную форму от p линейно-независимых форм $\beta_1(u), \beta_2(u), \ldots, \beta_p(u)$ от p параметров $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и p линейно-независимых форм $z_1, z_2, \ldots, z_p$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то $\alpha_i x'_i$ порождает группу $x'_i = b_{ik}(u)x_k$; $i, k = 1, 2, \ldots, p$, сопровождающую группу $H^{\cdot}_m$. Отметим, что систематическое употребление Молиным процесса получения линейных оболочек H или H_m группы $H^{\cdot}$ или $H^{\cdot}_m$ или обертывающих алгебр последних прочно вошло в обиход теории представлений последующего времени и поэтому является одной из его научных заслуг.

Рассматривая транзитивную группу $H^{\cdot}$, содержащую $U \in H^{\cdot}$, преобразующую любую систему переменных x_i в произвольно заданную x'_i, следовательно $Ux_i = x'_i$, и полагая инвариантной билинейную форму $c_i x_i$ переменных x_i, c_i или $c_i x_i = c'_i x'_i$, где $c'_i = Uc_i$, $x'_i = Ux_i$, Молин приходит к группе $\overline{H}^{\cdot}$ линейных преобразований $\overline{U}$: $c_k = b_{ik}(u)\, c_i'$. Он называет ее группой, сопряженной с $H^{\cdot}$. Аналогично для $H^{\cdot}_m$ получается сопряженная с ней группа $\overline{H}^{\cdot}_m$. Сопряженные группы $\overline{H}^{\cdot}$ или $\overline{H}^{\cdot}_m$ являются группой сопряженного с X_m пространства $\overline{X}_m$. Имея в виду хорошо известное соотношение между соответствующими U и $\overline{U}$ и матрицами группы $H^{\cdot}_m$ и $\overline{H}^{\cdot}_m$, Молин находит двойственные теоремы: сопряженная группа сопровождающей p переменных будет смежной группой $m-p$ переменных сопряженной, а сопряженная смежной группы $m-p$ переменных будет сопровождающей от p переменных сопряженной.

Этот дуализм позволяет Молину доказать, что всякая интранзитивная группа $H^{\cdot}$, принадлежащая системе A, имеет транзитивную сопровождающую, и тем свести рассмотрение интранзитивных групп к транзитивным. Относительно последних он доказывает, что каждая транзитивная группа $H^{\cdot}$, принадлежащая системе A, может рассматриваться как сопровождающая группу параметров. Общая (полная) группа $G = GL(p, K)$, имеющая для каждого $U: x_i' = u_{ik}x_k$; $i, k = 1, 2, \ldots, p$ из $H^{\cdot}$ все p^2 параметров u_{ik} линейно-независимыми, согласно теореме Молина принадлежит первоначальной системе и не имеет сопровождающей группы. Такие группы Молин называет первоначальными, указывая, что это единственный вид групп, не имеющих сопровождения. Понятие первоначальной группы эквивалентно понятию неприводимости представления или неприводимости модуля представления.

Далее доказывается, что каждая группа $H^{\cdot}$, группа параметров которой $H^{\cdot}_A$ образуется из уравнений произведений нескольких первоначальных систем, сопровождается группой, принадлежащей к некоторой первоначальной системе, и что каждая группа $H^{\cdot}$, относящаяся к первоначальной системе ранга p^2, сопровождается первоначальной группой с p переменным. Отсюда Молин находит, что каждая группа $H^{\cdot}$, принадлежащая системе A, сопровождается первоначальной группой. Если две первоначальные группы принадлежат к одной и той же первоначальной системе, то коэффициенты групп можно взять одинаковыми, т. е. эквивалентные представления он отождествляет. Каждый раз Молин рассмаривает вместе с $H^{\cdot}$ обертывающую ее алгебру H и изоморфизмом $H \rightarrow A$ переносит изученные свойства $H^{\cdot}$ и H на систему

A. Рассмотрев особый случай, когда приводимая группа H имеет первоначальными сопровождающую и смежную, он доказывает, что приводимая группа вполне приводима.

Далее Молин доказывает, что переменные группы, группа параметров которой образована уравнениями произведений одной или нескольких первоначальных систем, могут быть выбраны так, что группа представляется как система первоначальных групп. Молин, рассмотрев, как замечает Веддерборн [33], по существу композиционный ряд инвариантных подмодулей модуля, доказал, что матрица $(b_{ij}(u))_m$ любого $U \in H$ может быть взята в треугольно-блочном виде:

$$\begin{pmatrix} s_{11}(u) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21}(u) & s_{22}(u) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{\alpha 1}(u) & s_{\alpha 2}(u) & s_{\alpha 3}(u) & \dots & s_{\alpha\alpha}(u) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где матрицы $s_{gh}(u) = b_{p_g+i, p_h+k}(u))$, названные Молиным элементарными, имеют размерность $(p_{g+1} - p_g)\times(p_{h+1} - p_h)$; $i = 1, 2, \dots, p_{g+1} - p_g$; $k = 1, 2, \dots, p_{h+1} - p_h$ и коэффициенты с общими g и h либо друг от друга линейно-независимы, либо все обращается в нуль. Диагональные блоки $s_{ii}(u)$ — неприводимые матрицы порядка p_i, имеющие все p_i^2 элементов линейно-независимыми. Два таких блока $s_{ii}(u)$ и $s_{jj}(u)$ полностью совпадают, или между элементами того и другого не существует никакой линейной зависимости. Блоки $s_{ii}(u)$ соответетствуют первоначальным сопровождающим системы A. Матрицы вида (4) Молин называет нормальными и доказывает, что подходящим выбором переменных матрицы (4) можно преобразовать в диагонально-блочные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} s_{11}(u) & & & \\ & s_{22}(u) & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_{\alpha\alpha}(u) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Мы видим, что существо понятий неприводимости, приводимости, полной приводимости (разложимости) представлений алгебр после обобщенных до представлений колец восходит к Ф. Э. Молину. Здесь же он получает доказательство указанной ранее теоремы о выражении системы A/R, где R — радикал системы A, в виде прямой суммы первоначальных ее подсистем. и теоремы о том, что любая система A равна прямой сумме ее радикала R и сопровождающей A/R. В этом историческом первом наброске теоремы о выражении любой алгебры через ее радикал и полупростую алгебру Ф. Э. Молин лишь не устанавливает однозначности слагаемых.

Нормальной формой записи уравнений произведений системы Молин называет уравнение с матрицами вида (4) или (5).

Итак, в 3-й части работы Молин показал, что уравнения произведений $x_i' = a_{jk}^i x_j u_k$ системы A после выбора подходящей базы распадаются на неприводимые уравнения произведений $x_j' = x_{jl} u_{lk}$; $j, k, l = 1, 2, \ldots, m_s$ первоначальных сопровождающих A_s; $s = 1, 2, \ldots, \alpha$, где α — ранг центра Z_A системы A, m_s — степень минимального многочлена A_s. Каждое из последних уравнений произведений встречается (повторяется) среди первых точно m_s раз.

Подытоживая сказанное выше, отметим: результаты Молина о строении полупростой алгебры A над K в связи с разложением ее характеристического многочлена (ее регулярного представления) на неприводимые множители следует сформулировать так: согласно разложению $h_r = h_{A_1} h_{A_2} \ldots h_{A_\alpha} = r_1^{m_1} r_2^{m_2} \ldots r_{\alpha-1}^{m_{\alpha-1}} r_\alpha^{m_\alpha}$ характеристического многочлена h_r на неприводимые над K множители $r_1, r_2, \ldots, r_\alpha$, являющиеся ранговыми (минимальными) многочленами простых подалгебр (простых идеалов) A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$, образ $(a_{jk}^i u_k)_n$ ее регулярного представления и само представление вполне приводимы (разложимы). После перехода к базе, составленной из баз вида e_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots, m_s$, соответствующих базам ее простых слагаемых A_i; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, он будет эквивалентен блочно-диагональной (аддитивно записанной) матрице $m_1 (u_{ij}') + m_2 (u_{ij}^{(2)})_{m_2} + \ldots + m_\alpha (u_{ij}^{(\alpha)})_{m_\alpha}$, в которой каждая неприводимая матрица $(u_{ij}^{(k)})_{m_k}$ неприводимого регулярного представления A_k повторяется m_k раз (иначе говоря, $m_k (u_{ij}^{(k)})_{m_k}$ — аддитивно записанная m_k-кратная матрица регулярного представления $(u_{ij}^{(k)})_{m_k}$ первоначальной сопровождающей A_k системы A). Этому разложению характеристического уравнения и соответственно представления A отвечает разложение $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_\alpha$ в прямую сумму первоначальных сопровождающих (простых идеалов) $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$. Ранг алгебры A, очевидно, равен $n = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\alpha^2$, где m_i^2 — ранг первоначальной A_i, которая согласно теореме Молина изоморфна полному кольцу матриц порядка m_i. Введением понятия сопровождающей изучение произвольных систем сводится к рассмотрению полупростых, которые, согласно Молину, равны прямой сумме всех попарно-различных первоначальных сопровождающих систему систем.

Кроме этих двух структурных теорем, носящих ныне имя Веддерборна, в диссертации Молина имеется и третья структурная теорема (т. 43 по нумерации в [5]) о том, что произвольная система содержит такую подсистему без радикала и радикал, прямой сумме которых равна названная система [8]. Веддерборн, помимо рассмотрения системы над произвольным полем, добавляет еще доказательство однозначности слагаемых. Молин не дает явного определения понятия радикала, однако характеризует (базисные) единицы радикала. В то же время для фиксированной системы значений параметров он постоянно требует выполнения делимости для каждого из прямых слагаемых, прямой сумме которых равна сопровождающая системы по ее радикалу. Тем самым последняя над полем C, по Молину, равна прямой сумме тел.

Заметим, что Шефферс в [36] первым изучал этот случай, но полное описание структуры числовых систем над C дал лишь Молин. В последней главе «Числовые системы и матрицы» диссертации Молин, иллюстрируя удобство и содержательную емкость матричного языка, не пользовавшегося тогда популярностью, дает ряд понятий (матричного представления систем, принадлежащих им групп, нормальных форм) и теорем (теоремы 46—51) на языке матриц, посвященных классификации систем, подробности которой мы здесь обсуждать не будем.

Через 6 лет, в 1898 г., возможно, не зная диссертации Молина, хотя последняя была опубликована в распространенном «Mathematische Annalen», Э. Картан дал второй очерк [58] научной теории систем гиперкомплексных чисел, в котором он впервые ввел в теорию систем понятия двустороннего идеала, радикала (под названием «инвариантная псевдонуль-система»), простой, полупростой системы и дал изложение структурных теорем привычным

---

[8] Впервые на наличие этой теоремы у Молина указал Фробениус в 1903 г. [61].

нам языком идеалов. Картан доказывает единственность прямых слагаемых, входящих в формулировку тех или иных (в том числе структурных) теорем. Но еще до того, в 1897 г., в работе [7] Молин подчеркивает однозначность разложения сопровождающей (полупростой) системы в прямую сумму первоначальных. В этой работе Молин вслед за Кэли вместе с группой S порядка n с элементами $s_1, s_2, \ldots, s_n$[9] рассматривает и исторически первым исследует структуру группового кольца $A_s = Ks_1 + Ks_2 + \ldots$ $\ldots + Ks_n$ с базой $s_1, s_2, \ldots, s_n$ над $K = C(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и таблицей умножения $s_k s_l = a^h_{kl} s_h$, где структурные постоянные a^h_{kl} равны 1 или 0, смотря по тому, $s_k s_l = s_h$ или $s_k s_l \neq s_h$. Произведение элемента $x = x_k s_k$ на произвольный элемент $u = u_k s_k$ является линейным преобразованием $x \to x' = ux$ их алгебры K_s и определяет (по Молину) уравнения произведений

$$x'_h = a^h_{kl} u_k x_l, \tag{1}$$

или левое регулярное представление с матрицей $p(u) =$ $= \left(a^h_{kl} u_l\right)_n$, соответствующей общему элементу $u = u_k s_k$ алгебры A_s над полем K. Полагая в (1) $u_k = 1$, остальные $u_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, получим группу линейных преобразований

$$T_k : x'_h = a^h_{kl} x_l; \qquad kh, l = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

изоморфную группе S. Обратно, каждая конечная группа порядка n гомоморфна группе (2). Далее Молин доказывает, что (дискриминант групповой алгебры A_s) $\det \left(a^h_{lk} a^k_{mh}\right)_n =$ $= \pm n^n$. Следовательно, согласно критерию полупростоты Молина, A_s полупростая и на основании обсужденной выше теоремы существует база, в которой A_s является прямой суммой $A_s = \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_\alpha$ первоначальных (простых) систем $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\alpha$, где α — ранг центра A_s. Этим доказана разложимость регулярного представления A_s. Неприводимое и точное представление, соответствующее каждому простому слагаемому Π_t, имеет образом полное кольцо матриц $\left(u^{(t)}_{ij}\right)_{m_t}$ порядка m_t, все m_t^2 элементов $u^{(t)}_{ij}$ которой линейно-независимы над K.

Таким образом, «уравнения произведений» (1) алгебры A_s распадутся на α «уравнений произведений»

---

[9] s_1 — единица группы S.

$$\bar{x}_{ik}^{(1)} = u_{ij}^{(1)} x_{jk}^{(1)}; \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3}$$
$$\bar{x}_{ik}^{(\alpha)} = u_{ij}^{(\alpha)} x_{jk}^{(\alpha)}; \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, m_\alpha,$$

где $m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\alpha^2 = n$. Иначе говоря, матрица $(a_{kl}^h u_k)_n$ регулярного представления общего элемента $u = u_i s_i$ в аддитивной записи будет иметь клеточно-диагональный вид

$$m_1 \left(u_{ik}^{(1)}\right)_{m_1} + \ldots + m_\alpha \left(u_{ik}^{(\alpha)}\right)_{m_\alpha}, \tag{4}$$

в которой матрица $\left(u_{ik}^{(t)}\right)_{m_t}$ неприводимого представления алгебры A_s соответствующая ее простому слагаемому Π_t, является клеткой, повторяющейся m_t раз. Уравнения (3) можно записать в виде

$$x_{ik}^{(1)} = b_{ij}^{(1)} (u_1, \ldots, u_n)\, x_{jk}; \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5}$$
$$x_{ik}^{(\alpha)} = b_{ij}^{(\alpha)} (u_1, \ldots, u_n)\, x_{jk}; \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, m_\alpha,$$

где $b_{ij}^t = b_{ij}^t(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — линейные формы от u_1, u_2, …, u_n над полем C.

Далее, беря любое неприводимое представление A_s по одному из каждых m_t повторяющихся неприводимых представлений, т. е. $m_1 + m_2 + \ldots + m_\alpha$ представлений вместо $n = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\alpha^2$ их, он записывает уравнения произведений, соответствующие такому представлению A_s в форме группы линейных преобразований:

$$x_i^{(1)} = b_{ij}^{(1)} (u_1, u_2, \ldots, u_n)\, x_j; \; i, j = 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{6}$$
$$x_i^{(\alpha)} = b_{ij}^{(\alpha)} (u_1, u_2, \ldots, u_n)\, x_j; \qquad i, j, = 1, 2, \ldots, m_\alpha.$$

Тем самым каждой простой подалгебре алгебры A_s он сопоставляет одно неприводимое и точное ее представление, отбрасывая остальные, эквивалентные с ним. Молин сосредоточивает свое внимание на отношении группы S, заданной в форме группы линейных преобразований, к группе (6). Из последней он получает группу линейных преобразований T_k:

$$\overline{x_i^{(1)}} = \frac{\partial b_{ij}^{(1)}}{\partial u_k}\, x_j^{(1)}; \qquad i, j, = 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$\vdots \qquad \vdots \tag{7}$$
$$\overline{x_i^{(\alpha)}} = \frac{\partial b_{ij}^{(\alpha)}}{\partial u_k}\, x_j^{(\alpha)}; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m_\alpha,$$

изоморфную группе (2), и заключает, что каждая отдельная неприводимая подгруппа последней определяет группу линейных преобразований, гомоморфную группе S, если последняя непростая. Если же S — простая группа, то указанная неприводимая группа есть точное представление S. Иначе говоря, если H_t — нормальный делитель группы S, являющийся ядром отображения одной из неприводимых групп S_t в (7) при гомоморфизме S на S_t, то последняя изоморфна S/H_t; если $H_t = s_1$, очевидно, S_t изоморфна S. Сумма уравнений произведений $x'_1 + x'_2 + \ldots$ $\ldots + x'_n = a^t_{kl} u_k x_l = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ инвариантна относительно линейных преобразований группы (7). В последней заключены определяющие уравнения всех групп линейных преобразований, гомоморфных группе S.

Пусть дано любое линейное представление S_l:

$$y'_i = c^l_{ik} y_k; \quad l = 1, 2, \ldots, n; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m(a)$$

группы S над C. Спрашивается, в каком отношении находится оно с группой линейных преобразований (6)? Для ответа на этот вопрос Молин рассматривает непрерывную группу линейных преобразований

$$y'_i = c_{ik}(u)\, y_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

где обозначено $c_{ik}(u) = c^l_{ik} u_l$; $l = 1, 2, \ldots, n$, и доказывает теорему:

«Если группа (a) изоморфна группе S и такая, что группа (8) транзитивна (т. е. переводит произвольную систему значений $y^{(0)}_1, y^{(0)}_2, \ldots, y^{(0)}_n$ в произвольно заданную $\overline{y^{(0)}_1}, \overline{y^{(0)}_2}, \ldots, \overline{y^{(0)}_n}$), то уравнения (8) могут быть получены из уравнений (1) линейным преобразованием переменных». Группа (8), очевидно, принадлежит (в смысле Молина) к групповой алгебре A_s. При этом согласно доказанным Молиным теоремам каждая интранзитивная группа, принадлежащая системе, сопровождается транзитивной группой, а каждая из последних может быть реализована как группа, сопровождающая группу параметров. Тем самым рассмотрение интранзитивной группы сводится к случаю транзитивной. Первоначальной системе, очевидно, принадлежит транзитивная группа.

Согласно доказанному в диссертации результату после подходящего выбора базы или линейного преобразования переменных матрица представления, соответствующая общему элементу u группы параметров, принадлежащей к системе (здесь групповой алгебре), может быть взята в нормальной, т. е. клеточно-диагональной, форме. В этой форме клетки (блоки) состоят из линейно-независимых над C элементов и являются образами представлений общих элементов первоначальных систем, сопровождающих данную систему. Молин доказал, что «никаких других линейных однородных подстановок транзитивного вида данной дискретной группы их (изоморфной S.— *Н. К.*) не существует, кроме тех, которые получаются из системы (1) заменой переменных и части их нулями» [7, с. 271]. Иначе говоря, всякое линейное представление конечной группы содержится в ее регулярном прдставлении. Впрочем, тот же результат содержится в диссертации Молина. Рассматриваемую работу Молин заключает: «Из данной структуры дискретной конечной группы можно получить все группы линейных подстановок той же самой структуры» [7, с. 274].

Во второй работе [8], посвященной дальнейшим свойствам (в основном неприводимых) представлений конечных групп, Молин существенно опирается на следующий результат его диссертации. Пусть система уже задана в нормальной форме, т. е. матрица общего элемента группы параметров имеет клеточно-диагональный вид, в котором клеточные (элементарные) матрицы $s_{ii}(u)$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ являются матрицами $s_{ii}(u) = (u_{jk}^{(i)})_{m_i}$ представления первоначальных групп, принадлежащих первоначальным (сопровождающим систему) системам. Следовательно, все m_i^2 элементов $u_{jk}^{(i)}$ линейно-независимы над C. Тогда билинейная форма $f_1(uv)$, равная сумме следов регулярного представления или $f_1(uv) = \sum_{i=1}^{\alpha} Sps_{ii}(u)$, имеет ранг $r = \sum_{j=1}^{k} n_j^2$, где n_j — порядок элементарной клетки $s_{p_jp_j}(u)$; $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$. Следовательно, r — размерность системы A, порожденной $f_1(uv)$.

По Молину, $f_1(uv)$ ранга r порождает сопровождающую систему измерения r, которая после подходяще выбранной базы распадается в прямую сумму (однозначно с точностью до изоморфизма определенных) первоначальных систем. Для групповой алгебры A_s, очевидно, $f_1(uv)$ всегда неособенная. Взяв регулярное представление K_s во вполне разложенном виде (6), Молин замечает, что характеристическое уравнение $\det\left(b_{ij}^{(t)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) - \delta_{ij}\omega\right) = 0$ каждой неприводимой группы (неприводимого представления) G_t из (6) неприводимо над K. Линейные коэффициенты этих характеристических многочленов или характеры $b_{ii}^{(1)} = b_{ii}^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$; $i = 1, 2, \ldots, m_1$; $\ldots$; $b_{ii}^{(\alpha)} = b_{ii}^{(\alpha)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$; $i = 1, 2, \ldots, m_\alpha$ являются линейными функциями от $u_1, u_2, \ldots, u_n$, линейно-независимыми над C. Поэтому задания их, отмечает Молин, достаточно для определения соответствующей неприводимой группы (неприводимого представления) из (6). Представив характеры в форме $\chi_1(u) = \nu_{1j}u_j, \ldots, \chi_\alpha(u) = \nu_{\alpha j}u_j$; $j = 1, 2, \ldots, n$ над полем K и рассматривая характеристические уравнения $\det\left(\frac{\partial b_{ij}^{(t)}}{\partial u_k} - \omega\delta_{ij}\right) = 0$, соответствующие представлению (7), Молин находит, что $\frac{\partial \chi_i(u)}{\partial u_k} = \nu_{ik}$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$; $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\nu_{ik} = \chi_i(s_k)$ являются следами матриц T_k. Ссылаясь на известную теорему [63, с. 65] о том, что корни характеристических уравнений являются корнями из единицы, Молин заключает: $\nu_{ik} = \chi_i(s_k)$ будут «целочисленными» функциями корней из единицы, т. е. целыми алгебраическими числами. Единичному элементу s_1 группы S соответствует тождественное линейное преобразование (6) $x_i' = x_i$; $i = 1, 2, \ldots, m_1$, имеющее характеристическим уравнением $(\omega - 1)^{m_1} = 0$, откуда $\chi_1(s_1) = \nu_{11} = m_1$, и аналогично $\chi_k(s_1) = \nu_{k1} = m_k$; $k = 1, 2, \ldots, \alpha$. Поэтому коэффициенты ν_{i1} при u_1 в $\chi_1(u) = \nu_{ij}u_j$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$; $j = 1, 2, \ldots, n$ равны степеням соответствующих неприводимых представлений или числу переменных тех неприводимых групп из (6), для которых χ_i является следом соответствующих матриц. Таким образом, $\chi_1(u) = m_1u_1 + \chi_1(s_2)u_2 + \ldots + \chi_1(s_n)u_n, \ldots, \chi_\alpha(u) = m_\alpha u_1 + \chi_\alpha(s_2)u_2 + \ldots + \chi_\alpha(s_n)u_n$. Эти свойства $\chi_1(u), \chi_2(u), \ldots, \chi_\alpha(u)$, замечает Молин, делают удобным употребление последних вместо неприводимых групп (представлений), определяемых ими, а так как выведенные свойства $\chi_i(u)$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ не опирались на неприводимость соответствующих им групп (представлений), то след общего элемента $u = u_is_i$ во всей группе (6) запишется в виде $a_1\chi_1(u) + a_2\chi_2(u) + \ldots + a_\alpha\chi_\alpha(u)$, где a_i — целые положительные числа. Таким образом, Молин доказал, что представление групповой алгебры и соответствующей группы с точностью до эквивалентности определяется следами представлений.

После этого Молин рассматривает кронекерово произведение представлений. Произведению образов представлений $\left(\overset{r}{a}_{ik}v_k\right)$ и $\left(\overset{t}{a}_{rl}u_l\right)$ двух элементов u и v алгебры A_s соответствует представление $\left(\overset{r}{a}_{ik}\overset{t}{a}_{rl}v_k u_l\right)$. Следом последнего является билинейная форма $\Omega = \overset{r}{a}_{tk}\overset{t}{a}_{rl}v_k u_l$, являющаяся следом дискриминантной матрицы регулярного представления алгебры A_s. По критерию полупростоты, найденному Молиным, для каждой первоначальной (простой) подалгебры A_t, неприводимое представление которой $(u_{ik})_{m_t}$ $i, k = 1, 2, \ldots, m_t$, ее след $\Omega = \chi_t(u)\chi_t(v) = u_{ii}v_{kk}$; $i, k = 1, 2, \ldots, m_t$. Для групповой алгебры A_s, регулярное представление которой распадается на α неприводимых представлений, форма (след) Ω распадается на α (следов) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\alpha$, соответствующих неприводимым представлениям первоначальных (простых) подалгебр алгебры A_s. Поэтому для групповой алгебры A_s получается $\Omega = \chi_i(u)\chi_i(v)$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$.

Далее Молин доказывает теорему о том, что число неэквивалентных неприводимых представлений группы S равно σ — числу классов сопряженных элементов, т. е. последнее равно порядку α центра групповой алгебры A_s. Рассматривая след $\Omega = \overset{r}{a}_{kt}\overset{t}{a}_{rl}u_k v_l$ дискриминантной матрицы, Молин замечает, что $n_{kl} = \overset{r}{a}_{kt}\overset{t}{a}_{rl} = 1$ только для тех элементов группы S, для которых $s_k^{-1} = s_r s_l s_r^{-1}$, и $n_{kl} = 0$ в остальных случаях. Отсюда, обозначая через n_l индекс нормализатора элемента s_l в группе S, через $C_l(u)$ сумму членов в Ω с теми u, которые соответствуют классу сопряженных элементов с элементом s_l, а через $C_l'(v)$ сумму членов с теми v, которые соответствуют классу сопряженных с s_l^{-1}, он получает формулы

$$\Omega = n_l C_l'(v)\, C_l(u); \quad l = 1, 2, \ldots, \sigma; \qquad n = n_l k_l,$$

где σ — число классов сопряженных элементов в группе S; k_l — порядок нормализатора элемента s_l в группе S. Сравнивая выражение $\Omega = \chi_i(u)\chi_i(v)$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ с последним, Молин находит, что $\sigma = \alpha$. В частности, для $s = s_1$ — единичного элемента группы S, он получает, что $n = n_1$, $C_1'(u) = C_1(u)$. Далее, заметив, что после замены в $\Omega = \chi_i(u)\chi_i(v)$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ характеров их выражениями

$$\chi_1(u) = m_1 u_1 + \chi_1(s_2) u_2 + \ldots + \chi_1(s_n) u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\chi_\alpha(u) = m_\alpha u_1 + \chi_\alpha(s_2) u_2 + \ldots + \chi_\alpha(s_n) u_n$$

след дискриминантной матрицы перейдет в $\Omega = n_l C_l(u) \times \times C_l'(v)$, Молин линейно выражает характеры неприводимых представлений через $C_l(u)$ и $C_l'(v)_{(i)}$, а именно:

$$\chi_i(u) = \chi_k^{(i)}(u) C_k(u); \quad \chi_i(v) = \chi_k^{(i)}(v) C_k'(v), \tag{9}$$

где i — номер неприводимого представления, k — номер класса сопряженных элементов в S; $\chi_i(s_1) = \chi_k^{(i)}(s_1) = m_1$; $i, k = 1, 2, \ldots, \alpha$.

Затем Молин находит соотношения

$$\begin{gathered} n_l \sum_l \chi_l^{(i)}(v) \chi_k^{(i)}(u) = n\delta_{kl}; \quad i, k, l = 1, 2, \ldots, \alpha, \\ \sum_l k_i \chi_l^{(i)}(v) \chi_l^{(k)}(u) = n\delta_{ik}; \quad i, k, l = 1, 2, \ldots, \alpha \end{gathered} \tag{10}$$

и после этого доказывает теорему о том, что число переменных неприводимой группы линейных преобразований, представляющей группу S, является делителем порядка представляемой группы, или, иначе говоря, степени неприводимых представлений конечной группы — делителями порядка группы.

Наиболее известна специалистам третья (по-видимому, не самая значительная) работа Молина [9].

Здесь Молин разбирает множество линейных подстановок

$$x_i' = b_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_n) x_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m,$$

образующих группу линейных преобразований группового кольца, когда n систем

$$s_h\colon\ x_i' = \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_h} x_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

в которых $u_1, u_2, \ldots, u_n$ рассматриваются как независимые, образуют группу G.

Характеристическое уравнение для S_h записывается им в виде $\overline{C}_h(\omega) = \det\left(\delta_{ik} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_h}\omega\right) = 0$. Величину $B(u) = b_{ii}(u)$ он вслед за Фробениусом называет характером группы. Характер, с другой стороны, будет коэффициентом при ω в первой степени в $\overline{C}_h(\omega)$. Характер есть линейная форма относительно $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т. е. $B(u) = b_1 u_1 + \ldots + b_n u_n$, а всякая рациональная функция R от характера будет иметь вид $R(b_k)u_k$.

Как было показано в предыдущих работах Молина, в случае приводимости рассматриваемой группы в α неприводимых групп $B(u) = \lambda_k \cdot f_k(u)$; $k = 1, 2, \ldots, \alpha$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\alpha$ — положительные числа, $f_1(u), f_2(u), \ldots, \ldots, f_\alpha(u)$ — характеры неприводимых групп. Обозначая через (u) характер, обратный к $f_i(u)$, Молин вводит операцию:

$$\theta(f_i, f_k) = \frac{1}{n} \frac{\partial f_i'(u)}{\partial u_h} \frac{\partial f_k(u)}{\partial u_h},$$

применение которой к $B(u)$ дает $\theta(f_i, B) = \lambda_i$. Эту операцию, показывающую, сколько раз неприводимая составляющая повторяется в матрице представления, он называет анализатором. Последний известен в современной теории характеров под названием скалярного произведения характеров $\frac{\partial f_i'(u)}{\partial u_h}, \frac{df_k(u)}{\partial u_h}$. Затем Молин, рассмотрев p-ю кронекерову степень группы G, получает группу G_p линейных однородных форм степени p с числом переменных, равным m^p. Из критерия Молина следует приводимость группы (представления) G_p.

Далее ставится задача отыскания характеров G_p. Рассмотрение характеристического уравнения G_p по характеристическому уравнению G позволяет Молину найти простое решение. Характер группы G_p оказывается p-й степенью характера группы G. Молин получает следующий результат. Групповой характер группы, образованной из всех независимых целых рациональных функций p-й степени переменных некоторой группы линейных однородных преобразований, есть коэффициент при ω^p в разложении $\overline{\Omega} = \frac{u_h}{C_h(\omega)}$ по возрастающим степеням ω.

После этого Молин посредством анализатора $\theta(f_i, \overline{\Omega}) = \frac{1}{n} \frac{1}{\overline{C}_h(\omega)} \frac{\partial f_i}{\partial u}$ исследует полученное представление G_p. Коэффициент при ω^p разложения анализатора по степеням ω дает частоту представления неприводимой группы с характером $f_i(u)$ через рациональные однородные функции p-й степени переменных группы G. Среди этих групп, изоморфных с данной группой, найдется тождественная, характер которой равен $\sum_{h} u_h$. Наличие тождественной неприводимой группы означает существование инварианта. Таким инвариантом будет $\frac{1}{n}\sum_{n}\frac{1}{\bar{C}_h(\omega)}$ — выражение, дающее инвариант для любой степени преобразования переменных групп.

Наконец, Молин доказывает, что анализатор не является тождественно равной нулю функцией.

Описанное выше подтверждает, что гиперкомплексный аспект теории представлений конечных групп (т. е. теории, в которой представления последних реализуются через представления группового кольца) вначале был развит Ф. Э. Молиным. Этот аспект Молин разработал в 1895—1897 гг. независимо и почти одновременно с Фробениусом, начавшим публикацию серии своих исследований по теории представлений и характеров конечных групп с июля 1896 г. Труды по теории числовых алгебр и представлений конечных групп составляют наиболее значимую часть творчества Ф. Э. Молина. Их (в завершенной части) следовало бы отнести к классическим: теоремы Молина о строении алгебр над алгебраически замкнутым полем и гиперкомплексный аспект теории представлений конечных групп вошли в учебники по общей алгебре.

Появившиеся в 1892 г. в диссертации Молина основные понятия и структурные теоремы оказались столь актуальными, что были, по-видимому, независимо вновь переоткрыты, а некоторые из них уточнены Э. Картаном в 1898 г. в его втором очерке [58] общей теории гк-систем. Тем самым Э. Картан продолжил исследования Молина. В 1903 г. Фробениус публикует работы [59, 61, 62], в значительной мере посвященные иному изложению структурных теорем Молина — Картана. В [62], в частности, Фробениус уточнил понятие радикала, развив исследования последних. Наконец, в 1908 г. в третьем по времени очерке [57] общей теории алгебр Веддерборн обобщает структурные теоремы Молина — Картана на алгебры, рассматриваемые над произвольным полем. В этой и других своих работах Веддерборн много раз ссылается на диссертацию Молина, подчеркивая, как и Фробениус, основополагающее значение отдельных понятий и теорем Молина, выделяя, в частности, образование им композиционного ряда разностных подалгебр (максимальной цепи подмодулей) алгебры. Четко изложенные труды Веддерборна были наиболее читаемыми алгебраистами того времени. Поэтому неудивительно, что структурные теоремы Молина — Картана вскоре стали называться теоремами Веддерборна.

Нельзя не отметить, что после знакомства с работами Молина осенью 1897 г. Фробениус счел важным существенно изменить акцент в содержании (и даже отчасти терминологию) своих исследований по теории представлений. Фробениус высоко ценил талант Молина, называя исследования последнего «основополагающими», «прокладывающими новые пути» и т. п. В своем отзыве о творчестве Молина, говоря о гиперкомплексном аспекте теории представлений последнего, Фробениус подчеркивал: «Весь способ исследования не оставляет ни малейшего сомнения, что он (Молин.— *Н. К.*) провел его совершенно самостоятельно, независимо от моих работ». Тогда же в письме к Молину он пишет: «С Вашими работами я ознакомился лишь недавно, иначе в своих исследованиях я мог бы избежать лишнего труда. С другой стороны, конечно, является плюсом то, что мы независимо друг от друга работали в одной области, ибо таким образом появились совершенно различные методы исследования групповых детерминантов» [66, 67].

В. Бернсайд (1852—1927), хорошо знавший труды Молина, Картана, Фробениуса, в работах [68—70] от 1898 г. дал свое изложение основных структурных теорем и теорий представлений конечных групп. Результаты этих работ он сводит к блестяще написанной и потому ставшей широко известной книге [71], опубликованной в 1911 г. В ней не упоминается авторство ряда теорем и важных понятий, что давало повод приписать их имени Бернсайда. Хокинс в работе [72] 1972 г. по этому поводу пишет: «Так же структурные теоремы Молина и Картана, рассмотренные в позднейшей работе ([70] — *Н. К.*) Бернсайда, были кем-то объявлены открытиями, сделанными Бернсайдом».

Э. Тамм в [72] от 1954 г. также приводит ряд случаев переоткрытий или, может быть, использований результатов и методов Молина без ссылок на его имя.

Н. Бурбаки в своих «Очерках по истории математики» [74] не принял во внимание важнейшие работы [7, 8] Молина, поэтому вынужден был неполно и неточно осветить историю становления «гиперкомплексного аспекта» теории представлений. То же самое можно сказать о подавляющем большинстве работ современных и старых авторов, касающихся истории создания теории алгебр и представлений. Имеется, видимо, целый комплекс причин, в силу которых имя Молина незаслуженно забыто. Это и трудность тем, трактуемых в трудах Молина; и исключительная лаконичность стиля их изложения, затруднявшая понимание; и малая распространенность дерптских «Sitzungsberichte»; молодость и безвестность автора в момент их написания — причины забвения имени Молина, отмеченные еще Фробениусом, проявившиеся в конце XIX в.

Однако нужно отметить еще следующее. В основополагающих работах Молина [5—9], содержались, кроме разработанных достаточно, также важные, но не до конца исследованные идеи и методы. Он не возвращался к ним до 1934 г., предоставив их развитие последующим авторам. Поэтому не удивительно, что результаты его переоткрывались, совершенствовались, обобщались многими авторами на протяжении сравнительно краткого отрезка времени. Естественно, что эти результаты в более совершенном виде были отнесены к именам Веддерборна, Фробениуса и др. Несмотря на это, гиперкомплексный аспект теории представлений Молина был обобщен и продолжен Э. Нетер в поворотной работе [75] от 1929 г. В предисловии она словами: «Важнейшие общие теоремы о гиперкомплексных системах исходят от Молина» — специально подчеркивает преемственность своей работы исследованиям Молина.

Только в 1930 г. в Томске Молин выступает в печати с работой «О некоторых трансцендентных уравнениях» [10]. В ней он приводит пример трансцендентного уравнения, имеющего корнем алгебраическое число, тогда как не каждое сопряженное с этим корнем алгебраическое число удовлетворяет названному уравнению. В заметке [11] от 1934 г. Молин решает задачу, предложенную болгарским алгебраистом Л. Чакаловым: установить неразрешимость в радикалах уравнения

$$(x+1)^{65}(x-2)^{65}+\alpha(x+\alpha)^{65}(x-2\alpha)^{65}+$$
$$+\beta(x+\beta)^{65}(x-2\beta)^{65}+(3x)^{65}=0,$$

в котором α, β — первообразные корни из единицы. В статье «Системы высших комплексных чисел с одной главной единицей» [12] от 1935 г. Ф. Э. Молин пытается дать некоторую классификацию чисел радикала числовой алгебры (делителей нуля). Подробно обосновывая и обсуждая классификацию чисел алгебры с радикалом, он пишет: «К нулевой ступени причисляются все делители единицы. К первой ступени причисляются делители нуля, непредставимые в виде сумм произведений; ко второй ступени — все нулевые делители, не причисленные к первой ступени и непредставимые в виде сумм произведений из трех или более множителей и т. д.» [12, с. 221].

Отметим, что, по-видимому, в 1935—1938 гг. Молин возвращается также к теме представлений групп. В предисловии к неопубликованной рукописи, сохранившейся в его личном архиве, он подчеркивает, что возвращается к названной теме, поскольку появление работ Фробениуса на русском языке [10] — признак интереса к этой теме. Целью работы он ставит «определение различных линейных групп с линейной группой параметров, для которых данная группа Галуа является подгруппой с дискретными значениями параметров». В другой его рукописи рассматривается группа Галуа и ставится задача полного представления группы Галуа в виде системы неприводимых дискретных групп подстановок. Однако все эти рукописи остались далеко не законченными.

В 1939 г. в последней публикации [13] Молин производит аналитическое продолжение функции, заданной гипергеометрическим рядом. Вместе с тем нужно отметить, что в архиве Молина имеется много заполненных его рукой листов с геометрическим содержанием, относящихся, по-видимому, ко времени ведения им геометрического семинара ТГУ. Частичное описание этой части эпистолярного наследия Ф. Э. Молина сделал в [76] занимавшийся этим Н. Н. Круликовский.

---

[10] *Фробениус Г.* Теория характеров и представлений групп/Пер. с нем. под ред. А. К. Сушкевича. Харьков: НТПУ, 1937.

Основные даты жизни и деятельности Ф. Э. Молина

1861, 11 сентября (29 августа) родился в г. Риге.

1879 — окончил Рижскую классическую гимназию.

1880 — поступил на физико-математический факультет Дерптского университета.

1880 — 1883 — учился в университете; участвовал в семинаре А. Линдстедта; проводил астрономические наблюдения под руководством А. Линдстедта и Л. Шварца: вышли в свет две первые работы [1, 2]; в качестве кандидата астрономии был оставлен при Дерптском университете «для приготовления к профессорскому званию»; был откомандирован в Лейпцигский университет к Ф. Клейну.

1883 — 1885 — участвовал в семинаре Ф. Клейна; сдал магистерские экзамены; опубликовал новые работы [3, 4]; защитил в Дерптском университете магистерскую диссертацию «О линейных преобразованиях эллиптических функций» и был избран на должность доцента кафедры чистой математики.

1886 — был избран в действительные члены Дерптского общества естествоиспытателей; в качестве астронома-наблюдателя работал и читал лекции на физико-математическом факультете; во время летних каникул был откомандирован для научных занятий в Лейпциг.

1887 — 1889 — читал лекции в Дерпте; участвовал в семинаре С. Ли, проявив интерес к изучению строения гиперкомплексных систем; работал в библиотеках Лейпцига; встречался с Г. Шефферсом, Э. Штуди, В. Киллингом, Ф. Клейном и др.; сделал первые наброски своих будущих исследований строения числовых систем (алгебр).

1890 — 1891 — читал лекции в Дерпте; окончил работу над докторской диссертацией, представив ее к защите в Дерптском университете.

1892 — был откомандирован в Московский университет с целью усовершенствования в русском языке; выступил с докладом «Об одном предложении Сильвестра» на заседании Московского математического общества и был избран в члены этого общества; опубликование докторской диссертации «О высших комплексных числах» [5] и ее защита.

1893 — в качестве доцента читал лекции в Дерптском университете; опубликовал ряд работ [5, 6] в журнале «Math. ann.»; высокая оценка результатов докторской диссертации Молина зарубежными учеными: С. Ли (Германия), Э. Штуди (Америка) и др.; обручился с Э. К. Браниус.

1894 — была присуждена медаль Ш. Эрмита «За выдающиеся достижения в математике».

1895 — 1897 — читал лекции в Дерпте; применил методы докторской диссертации к созданию теории представлений конечных групп через введение понятия «групповой алгебры»; выступил с докладом о работах [7, 8] на апрельском заседании Дерптского общества испытателей и опубликовал их в журнале общества.

1898 — читал лекции в Дерпте; блестящие отзывы Г. Фробениуса, Ф. Шура о научном творчестве Ф. Э. Молина.

1899 — получил от Юрьевского университета стипендию Р. Геймбюргера и по положению был направлен в годичную научную командировку за границу; был избран членом Общества немецких естествоиспытателей и врачей и участвовал в работе 71-го съезда этого общества; работал в библиотеке Ватикана над рукописями математиков эпохи Возрождения и средних веков (Л. Пачоли, Кардано, Рудольфа, Штифеля, Феррари и др.); занял кафедру чистой математики в ТТИ.

1900 — переехал с семьей в Томск; работал над подготовкой учебных планов и программ по математике для различных факультетов ТТИ.

1900 — 1905 — читал лекции в ТТИ; организовал первые в Сибири практические занятия по математике; написал ряд учебных пособий [14—21].

1906 — 1908 — продолжал чтение лекций в ТТИ и работу над учебными пособиями [22—24].

1909 — был избран деканом инженерно-строительного факультета ТТИ.

1910 — двадцатипятилетний юбилей научной и педагогической деятельности.

1911 — присуждение звания заслуженного профессора; незаконное отстранение от службы.

1911 — участвовал в работе I Всероссийского съезда преподавателей математики.

1912 — 1914 — организовал на дому приватиссимум по математике — первый в Сибири прообраз аспирантуры; вел курс математики на Уфимских общеобразовательных курсах народных учителей; приступил к работе на Сибирских высших женских курсах.

1915 — 1917 — работал на Сибирских высших женских курсах; возвратился в ТТИ; перешел работать в ТГУ на открывшийся физико-математический факультет.

1917 — 1924 — читал лекции (вплоть до 1941 г.) на физико-математическом факультете ТГУ; организовал работу первого в Сибири математического семинара при физмате ТГУ, посвященного изучению геометрии и подготовке его участников к научной и педагогической деятельности в сибирских вузах.

1924 — организовал семинар, посвященный задаче трех тел; в «Известиях ТГУ» были опубликованы работы первых участников геометрического семинара, руководимого Молиным.

1924 — 1929 — организовал и проводил работу студенческого семинара по теории поверхностей; входил в оргкомитет и участвовал в работе Всероссийского съезда математиков в Москве (27 апреля — 4 мая 1927 г.).

1927 — 1929 — написал еще одну работу [10].

1932 — руководил аспирантами и организовал работу аспирантского семинара по уравнениям математической физики; открытие научно-исследовательского института математики и механики (НИИММ) при ТГУ; организовал и руководил в нем сектором математики.

1933 — опубликовал работу [11].

1934 — стал ответственным редактором «Известий НИИММ» при ТГУ; получил звание заслуженного деятеля науки.

1935 — вышли в свет два первых выпуска 1-го тома «Известий НИИММ»; была присвоена степень доктора физико-математических наук; организовал работу семинара по аналитической теории дифференциальных уравнений.

1936 — 1937 — вел семинары; готовил к публикации третий выпуск 1-го тома «Известий НИИММ».

1938 — вел семинары и готовил публикацию первых двух выпусков 2-го тома «Известий НИИММ»; написал работу [13].

1939 — 1941 — вел лекционные занятия.

1941, 25 декабря — скончался в Томске.

Библиография

Труды Ф. Э. Молина

1. Bahn des Kometen 1880_{III}.— Astron. Nychr., 1883, N 2519, S. 353—362.
2. Zusatz zur Bahnbestimmung des Kometen 1880_{III} in A. N. 2519.— Ibid., 1883, N 2528, S. 112—113.
3. Ueber gewisse, in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln. Vorgelegt von Prof. Klein.— Ber. d. k. Sächs. Ges. Wiss., 1885, Sitzung am 12 Jan. S. 23—38.
4. Ueber die lineare Transformation der elliptischen Functionen. Dorpat, 1885. 23 S.
5. Veber Systeme höherer complexer Zahlen.— Math. Ann., 1893, N 41, S. 83—156.
6. Berichtigung zum dem Aufsatze "Ueber Systeme höherer complexer Zahlen".— Ibid., 1893, N 42, S. 308—312.
7. Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen.— Sitzungsber. d. Naturforsch. Ges. Dorpat, 1897, N 11, S. 259—274.
8. Ueber die Anzahl der Variabeln einer irreductibelen Substitutionsgruppe.— Ibid., S. 277—288.
9. Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen.— Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1897, N 52, S. 1152—1156.
10. Über gewisse transzendente Glechungen.— Math. Ann., 1930, N. 103, S. 35—37.
11. Lösungen der Aufgabe 148 Jahresbericht der Deutschen Math.— Vereinigung, 1934, N 44, S. 35—37.
12. Системы высших комплексных чисел с одной главной единицей.— Изв. НИИММ Том. ун-та, 1935, № 1, с. 217—224.
13. Об одном преобразовании гипергеометрической строки.— Учен. зап. Том. пед. ин-та, 1939, № 1, с. 119—121.
14. Интегральное исчисление. Ч. 1. Неопределенный интеграл. Томск, 1902. 191 с. Литогр.
15. Интегральное исчисление. Ч. 2. Определенный и кратные интегралы. Томск, 1902—1903. 248 с. Литогр.
16. Исчисление бесконечно малых величин. Томск, 1903. 335 с. Литогр.
17. Дифференциальное исчисление. Томск, 1904. 298 с. Литогр.
18. Интегральное исчисление. Томск, 1904. 256 с. Литогр.
19. Исчисление бесконечно малых величин. Ч. 1. Томск, 1904. 231 с. Литогр.
20. Интегрирование дифференциальных уравнений. Томск, 1904. 400 с. Литогр.
21. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 1. Томск, 1907. 172 с. На правах рукописи.
22. Дифференциальные уравнения: Лекции IY семестра. Томск, 1908. 190 с. Литогр.

23. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч. 2. Лекции II семестра 1907—1908. Томск, 1909. 203 с. Литогр.
24. Исчисление бесконечно малых величин. Томск, 1909. 201 с. Литогр.

Использованная литература

25. *Левицкий Г. В.* Биографический словарь профессоров и преподавателей императорского Юрьевского, бывшего Дерптского, университета за сто лет его существования (1802—1902). Юрьев, 1902. Т. 1. 328 с.
26. *Петухов Е. В.* Императорский Юрьевский, бывший Дерптский, университет в последний период своего столетнего существования (1802—1902); Ист. очерк. СПб., 1906. 350 с.
27. *Боборыкин П. Д.* В путь-дорогу.— Собр. соч. СПб.: Изд. М. Вольф, 1885—1887, т. 1. 225 с.
28. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 432 с.
29. *Jordan C.* Traite des Substitutions et des équations algébriques. P., 1870. 382 S.
30. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891. 332 S.
31. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen and anderen Anwendungen. Leipzig, 1893. 358 S.
32. *Poincare H.* Sur les nombres complexes.— C. r. Acad. sci., P., 1884, N 99, p. 740—742.
33. *Weierstrass K.* Zur Theorie der aus n-Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.— Cött. Nachr., 1884, S. 395—414.
34. *Dedekind R.* Zur Theorie der aus n-Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.— Ibid., 1885, S. 141—159.
35. *Schur F.* Zur Theorie der aus n-Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen.— Math. Ann., 1888, N 33, S. 4—60.
36. *Scheffers G.* Zurückführung complexer Zahlen-Systeme auf typische Formen.— Ibid., 1891, N 39, S. 292—390.
37. *Frobenius G.* Ueber lineare Substitutionen and bilinearen Formen.— J. Crelle, 1878, N 84, S. 1—63.
38. *Killing W.* Die Zusammensetzung der endlichen stetgigen Transformationsgruppen. Erster Theil.— Math. Ann., 1888, N 31, S. 252—290.
39. Zweiter Theil.— Ibid., 1889, N 33, S. 1—48.
40. Dritter Theil.— Ibid., 1889, N 34, S. 57—122.
41. Vierter Theil.— Ibid., 1890, N 36, S. 161—169.
42. *Cayley A.* Collected mathematical papers. Cambridge, 1889—1898, vol. 2, p. 129.
43. *Фробениус Г.* О представлении конечных групп через линейные подстановки.— В кн.: Теория характеров и представлений групп. Харьков: ДНТВУ, 1937, с. 106—127.
44. *Фробениус Г.* О соотношениях между характерами группы и характерами ее подгрупп.— Там же, с. 128—152.
45. *Фробениус Г.* О представлении конечных групп через линейные подстановки.— Там же, с. 152—170.
46. Краткий очерк деятельности профессоров и студентов императорского Томского технологического института на поприще «Освободительного движения». Печатается по распоряжению

г. попечителя Западно-Сибирского учебного округа. Томск, 1911. На правах рукописи.
47. Отчеты о деятельности Томского технологического института. Томск, 1901—1920.
48. *Лясоцкий Ив.* Записки старого томича. Томск, 1954, с. 159.
49. *Bianchi L.* Lecioni di geometria differenziale. Pisa, 1894. 259 p.
50. *Соколова В. А.* Определение вещественных минимальных поверхностей переноса и изучение линий переноса.— Изв. Том. ун-та, 1924, т. 74, с. 84—89.
51. *Аравийская Е. Н.* К вопросу о геодезическом изображении поверхностей.— Там же, с. 80—83.
52. *Богословская Л. С.* О системе минимальных поверхностей.— Там же, с. 90—94.
53. *Оранская Н. В.* Интегрирование уравнения de Sparre.— Изв. НИИММ Том. ун-та, 1938, т. 2, вып. 2, с. 187—191.
54. *Соколова В. А.* Аффинные преобразования минимальных поверхностей.— Изв. Том. ун-та, 1928, т. 79, вып. 2, с. 148—149.
55. *Соколова В. А.* Изгибание минимальной поверхности переноса.— Изв. НИИММ Том. ун-та, т. 1, вып. 2, с. 160—167.
56. *Зайченко П. А.* Томский университет им. В. В. Куйбышева [Очерки по истории первого Сибирского университета за 75 лет (1886—1955)]. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960. 478 с.
57. *Wedderburn J. H. M.* Hypercomplex Numbers.— Proc. London Math. Soc., 1908, N 6, p. 77—118.
58. *Cartan E.* Les groupes bilineaires et les Systemes de nombres comlexes.— Ann. Fac. Toulouse, 1898, vol. 12, p. 1—99.
59. *Frobenins G.* Theorie der hyperkomplexen Grössen.— Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1903, N 24, S. 532.
60. Deuring M. Algebren. B., 1935. 143 S.
61. *Frobenins G.* Über die Primfactoren der Gruppendeterminante.— Sitzungsber. Akad. Wiss., Berlin, 1903, N 19, S. 401—409.
62. *Frobenins G.* Theorie der hypercomplexen.— Ibid., N 30, S. 634—645.
63. *Jordan C.* Mémoire sur les équations différentielles lineaires à intégrale algebrique.— J. Crelle, 1878, N 84, S. 89—215.
64. *Dedekind R.* Supplement XI.— In: L. Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie. Braanschweig, 1894. 618 S.
65. *Weber H.* Theorie der Abelschen Zahlkörper.— Acta math., 1886, vol. 8, p. 193—221.
66. *Канунов Н. Ф.* О работах Ф. Э. Молина по теории представлений конечных групп.— Ист.-мат. исслед., 1960, вып. 17, с. 57—88.
67. *Канунов Н. Ф.* Письма Фробениуса к Ф. Э. Молину и А. Кнезеру.— Ист. и методол. естеств. наук, 1971, вып. 9, с. 56—68.
68. *Burnside W.* On the continuous croup that is defined by any given croup of finite order.— Proc. London Math. Soc., 1898, N 29, p. 207—225.
69. *Burnside W.* On linear homogeneous croups whose operations are permutable.— Ibid., p. 325—352.
70. *Burnside W.* On the continuous croup that is defined by any given croup of finite order (Second Paper).— Ibid., p. 546—565.
71. *Burnside W.* Theory of croups of finite order. 2nd ed. Cambridge, 1911. 228 p.
72. *Hawkins T.* Hypercomplex numbers, Lie croups, and the creation of croup representation theory.— Arch. Hist. Exact. Sci., 1972, vol. 8, N 4, p. 243—287.

73. *Тамм М.* Классификация алгебр конечного порядка в связи с трудами Ф. Э. Молина. Дис. ...канд. мат. наук. Тарту, 1954. 114 с.
74. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики/Пер. с фр. И. Г. Башмаковой; Под ред. К. А. Рыбникова. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 115—116, 291.
75. *Noether E.* Hypercomplexe Grössen and Darstellungstheorie.— Math. Zthschr., 1929, N 30, S. 641—692.
76. *Круликовский Н. А.* Об изучении научного наследства и архива Ф. Э. Молина.— Тр. Том. ун-та, 1963, № 163, с. 3—5.
77. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М.: Наука, 1957. 591 с.
78. *Рыбников К. А.* История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974. 454 с.
79. История отечественной математикп. Т. 2, 3. Киев, 1968.
80. *Башмакова И. Г.* Sur l'historie de l'algebre commutative.— In: XIIe Congr. Intern. d'Hist. des Sci. Colloq.: Textes des rap. ser. gén. P., 1968, vol. 89, p. 185—202.
81. *Башмакова И. Г.* Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева.— Ист.-мат. исслед., 1949, вып. 2, с. 233—351.
82. *Круликовский Н. Н.* История развития математики в Томске. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967. 144 с.
83. *Сушкевич Н. К.* Материалы к истории алгебры в России.— Ист.-мат. исслед., 1951, вып. 4, с. 237—451.
84. *Ожигова Е. П.* Развитие теории чисел в России. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1972. 360 с.
85. *Джекобсон Н.* Теория колец. М.: Изд-во иностр. лит., 1977. 287 с.
86. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 408 с.
87. *Диксон Л. Е.* Линейные ассоциативные алгебры. Харьков: ДНТВУ, 1935. 81 с.
88. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336 с.
89. *Чеботарев Н. Г.* Дискретные бесконечные группы.— УМН, 1940, т. 8, с. 337—339.
90. *Чеботарев Н. Г.* О поверхностях, содержащих системы импримитивности.— Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. (263). 415 с.
91. *Мальцев А. И.* Группы и другие алгебраические системы.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 3. 336 с.
92. *Мальцев А. И.* К истории алгебры в СССР за первые 25 лет.— Избр. тр. М.: Наука, 1976, т. 1. 482 с.
93. *Курош А. Г.* Алгебра II (группы, кольца, структуры).— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 1044 с.
94. *Курош А. Г.* Современное состояние теории колец и алгебр.— УМН, 1951, т. 6, вып. 2, с. 250—262.
95. Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики 27 декабря 1911 — 3 января 1912. СПб., 1913, т. 2, с. 355.
96. Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля — 4 мая 1927. М.: Л., ГИЗ, 1928. 311 с.

97. Обозрение полугодовых лекций Дерптского и Юрьевского университета, назначенных для чтения за 1879/1899 г. Юрьев, 1900.
98. Обозрение преподавания наук в Московском университете. 1891 — 92 акад. год. М., 1890. 52 с.
99. Обзоры и отчеты о преподавании в Том. технол. ин-те за 1889—1909 г. Томск, 1889—1910.
100. Проект общего Устава Императорских российских университетов. СПб., 1905.
101. *Латкин Н. В.* Томская губерния. Томск.— В кн.: Энцикл. словарь. Брокгауз и Эфрон, 1901, т. 33, с. 1—70.
102. *Молин Ф. Э.*— В кн.: БЭС. 2-е изд., 1954, т. 28, с. 132.
103. *Морозова Н. Н.* Из истории преподавания математики в Дерптском университете.— Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, 1963, т. 123, вып. 3, с. 115—121.
104. *Галченкова Р. И.* Алгебра в Тартуском университете XIX века.— В кн.: Материалы VI конф. по истории науки в Прибалтике. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1965, с. 11—13.
105. *Депман И. Я.* Математика в Дерптском (Тартуском) университете: Докл. на IV Всесоюз. мат. съезде 3—12 июля 1961 г.
106. *Ряго Г.* Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета (М. Бартельс, Ф. Миндинг, Ф. Молин, Г. Колосов).— Учен. зап. Тарт. ун-та, Таллин, 1955, вып. 37, с. 74—105.
107. *Канунов Н. Ф.* Первый очерк теории алгебр Ф. Э. Молина.— Ист.-мат. исслед., 1975, вып. 20, с. 150—169.
108. *Study E.* Altere und neuere Untersuchungen über systeme complexer Zahlen. Math.— In: Pap. read at the Intern. Congr. (Chicago, 1891). N. Y., 1896, p. 150—162.

Приложение.

Письма и отзывы о творчестве Ф. Э. Молина

Письма Г. Фробениуса

Уважаемый коллега!

С величайшим удовольствием я соглашаюсь выполнить Вашу просьбу и рекомендовать Вашу работу[1] Академии. Послезавтра, в четверг, Вы получите 50 отдельных оттисков безвозмездно. Если же Вы захотите взять большее число, то это за Ваш счет. В отчетах заседаний, кроме того, будет напечатано резюме о работе. Я предлагаю Вам следующую формулировку: «Автор вычисляет число представлений неприводимой группы подстановок через посредство однородных функций переменных другой группы, с которой первая изоморфна».

Если Вы хотите другую формулировку, у Вас достаточно времени выразить свои пожелания.

С Вашими работами в «Mathematische Annalen» я ознакомился лишь недавно, иначе в своих исследованиях я мог бы избежать лишнего труда. С другой стороны, конечно, является плюсом то, что мы независимо друг от друга работали в одной области, ибо таким образом появились совершенно различные методы для исследования групповых детерминантов.

Я ничего не знаю относительно Вас лично и Вашего положения. Не знаю, где Вы учились, кто были Вашими учителями, сколько Вам лет и какую должность Вы занимаете в Юрьеве, но Вы, вероятно, не обидитесь, если я Вас попрошу в будущем свои результаты давать немного в более детальной форме. Для меня является величайшим трудом следовать за Вашим изложением. Если это трудно для меня, как же это трудно для других, которые не так, как я, уже перед чтением этой работы самостоятельно пришли к подобным результатам. Благодаря слишком краткой форме Вашего изложения Ваши работы читаются очень немногими и не привлекают того внимания, которого они заслуживают по своему значению. Относительно Вашей работы «Замечание к теории групп однородных подстановок» я не мог установить год печатания ее. В библиотеке нашей Академии в последние годы доклады Общества естествоиспытателей в Юрьеве отсутствуют. Правда, в этой библиотеке нет порядка, но раньше это Общество состояло в обмене работами с нашей Академией. Не можете ли Вы узнать сейчас, продолжается ли этот обмен или же прекратился?

На с. 265 Вашей работы Вы без доказательства приводите несколько теорем. Если я Вас правильно понимаю, то Вы доказательства еще не публиковали. Или же я должен понимать, все имеются в Вашей работе в 41 томе «Анналов». Я их там нашел не все, и меня интересует главным образом следующий пункт. Вероятно, Вы уже хоть немного просмотрели мои работы и заметили, что наибольшая трудность, которую я должен был преодолеть, состоит в доказательстве равенства $e=f$ (простые множители группового определителя, § 9), что e делится на f, можно доказать сравнительно легко (§ 10), но теперь я хотел бы знать, как Вы преодолели эту трудность? Из Вашей работы я не получил желаемых сведений. Из тех теорем Ваших, которые касаются этого вопроса, я мог только заключить, что e делится на f.

В «Mathematische Annalen», т. 41, с. 126 (нет ли у Вас, кстати, еще отдельного оттиска этой работы?), Вы требуете, во-первых, чтобы величины $b_{ik}(u)$ нельзя было считать линейными формами u_i меньше, чем от n параметров. Закономерно ли это требование?

Если группы распадаются, как на с. 129, то части ведь не имеют одинакового свойства.

Методы, развитые в § 10 моей работы, применимы к любой числовой системе. Таким образом, можно совершенно отказаться от теоремы Киллинга и вместо этого использовать те теоремы, которые я развил в своей работе «О переместимых матрицах».

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — переменные и пусть $\sum\limits_i a_{kl}^{i} z_i = z_{kl}$. Далее обозначим $\sum\limits_k a_{kl}^{i} u_k = u_{il}$, $\sum\limits_i a_{kl}^{i} u_l = v_{ik}$; если умножить равенство $\sum\limits_s a_{sm}^{i} a_{kl}^{s} = \sum a_{ks}^{i}\, a_{im}^{s}$ на $z_i u_i$ и просуммировать, то получается $\sum z_{sm} v_{sk} = \sum\limits_s z_{ks} u_{sm}$.

Следовательно, можно получить

$$\sum_s (v_{ks} - \delta_{ks}\omega)\, z_{sm} = \sum_s (u_{sm} - \delta_{sm}\omega)\, z_{ks}.$$

Если определители не равны тождественно нулю, то из этого прямо следует равенство обоих характеристических определителей.

Не могу себе представить случая, чтобы они не были равны, или, может, у Вас есть пример противоположного?

В надежде, что я вскоре получу подробное известие от Вас.

С уважением Ваш покорнейший *Фробениус*.

В Вашей подлежащей напечатанию работе я не понимаю такого места: «Существование же такой группы среди неприводимых составных частей равнозначно существованию инварианта».

Шарлотенбург, 14 декабря 1897 г.

Глубокоуважаемый коллега! [1]

Мне доставляет удовольствие выполнить Вашу просьбу и сообщить Вам свое мнение относительно работы Молина.

Его фамилия и его работы были мне неизвестны до конца прошлого года. Тогда в осенние каникулы Штуди [2], который учился с Молиным, обратил мое внимание на его большую работу [3] в 41 т. «Mathematische Annalen». Я взялся за работу с очень небольшим ожиданием, потому что я незадолго до этого просмотрел работы Шефферса [4] на эту же тему, в которых ни автор не знает, чего он хочет, ни тем более читатель. И из этой бедной мыслями, неплодотворной, но тем не менее претенциозной школы Ли выходит Молин!

Тем больше было мое удивление при изучении этого полного мыслями, богатого будущим основополагающего исследования.

Работа так живо заинтересовала меня, что я сразу через посредство Гензеля узнавал у Вас относительно личных условий жизни Молина. Я думал, что он еще молодой человек, и на мгновение предположил, что можно посодействовать ему устроиться на профессуру в Берлине [5]. Но так как это по всем полученным сведениям не выйдет, то я указал своим ближайшим друзьям-ученым, и прежде всего главе математиков, нашему старому маэстро Дедекинду в Брауншвейге, на Молина и его работы и попросил их иметь его в виду, если представится какой-либо случай. Для меня было бы большим удовлетворением, если бы я мог содействовать тому, чтобы нашлась в России должность, соответствующая его знаниям и достижениям.

Главная работа Молина трактует о гиперкомплексных числах. Для случая коммутативного умножения Вейерштрасс и Дедекинд изложили этот вопрос в общем аспекте. Случай некоммутативного умножения встречается впервые в кватернионах Гамильтона, которые в сущности не что иное, как матрицы второго порядка. Первый толчок к изучению этого случая в общем виде, очевидно, был дан моим изложением учения о матрицах. Однако в то время я нашел только теорему, характеризующую кватернионы [6].

Дедекинд долго занимался такого же рода вопросами, он изучил только специальные примеры и не нашел результатов, относящихся к общей теории. То же относится к работам Шура, Пирса, Штуди и Шефферса [7].

Только Молину удалось рассеять мрак, который окутывал этот вопрос, и дать одновременно почти полное решение всех наиболее важных проблем, касающихся этой области. Я могу не говорить Вам, что понятие комплексного, или «мнимого», в математическом исследовании относится только к форме, в которую мы облекаем изложение, в то время как в действительности это касается исключительно проблем алгебры или же анализа. Мнимое как бы облако, которым мы наполняем исследование для начинающего с тем, чтобы блеск чистой теории не ослепил глаза неофита. В подобном случае мы пользуемся и алгебраическими величинами, и Вы сами, следуя за Кронекером, почувствовали в некоторых своих работах [8], насколько усложняется изложение, если принципиально отказаться от применения таких вспомогательных понятий. Но и при применении их исследования Молина относятся к самым трудным, и этим я объясняю, что они до сих пор привлекали мало внимания. Я сам должен был несколько раз проштудировать их основательно, прежде чем мне удалось овладеть до некоторой степени этим трудно дающимся материалом. И я полагаю, что после моих исследований [9] я более подготовлен по этим вопросам, чем кто-либо иной. Работе столь большой оригинальности, которая трактует такую трудную проблему и написана совершенно неизвестным автором, конечно, трудно найти читателей.

В двух работах, которые Молин опубликовал в 1897 г. в изданиях Вашего Общества естествоиспытателей [10], как первый результат его изысканий он дает применение своей теории к учению о групповом детерминанте, к исследованию которого меня самого привели занятия по теории групп. Весь способ не оставляет ни малейшего сомнения, что он провел его совершенно самостоятельно и независимо от моих работ [11].

Важный вопрос, как найти все возможные представления данной конечной группы при помощи линейных подстановок, отличается тем, что он допускает удивительно простое решение. Так же, как и всякое целое число может быть составлено из простых чисел и притом только одним способом, так и всякое такое представление может быть составлено из примитивных [12] представлений только одним путем. Число примитивных представлений является конечным и легко вычисляется в соответствии со строением группы. Как видим, в этом применении теории нет более речи о мнимых вещах.

После того как решена фундаментальная проблема этой неисчерпаемо плодотворной теории, в ней открываются еще и другие различные проблемы. Некоторые из наиболее важных проблем нашли освещение в работе Молина, которую я нашел достойной быть напечатанной в «Докладах» нашей Академии [13].

Однако, чтобы понять их и отдать им должное, нужно быть хорошо знакомым как с теорией линейных подстановок, так и с учением о групповых детерминантах. Я сам пришел к подобным вопросам, смысл которых другим я не умею объяснить иначе как сравнением с композицией форм в теории чисел. Особую важность имеет там специальный случай, когда перемножаемые формы равны между собой, и вопросы, которые как раз аналогичны этому случаю, и разбирает Молин в своей работе.

Что отличает все работы Молина, так это то, что больше всего ценит знаток в достижениях науки и искусства: это совершенная оригинальность их изложения. Профанам, вероятно, понравятся больше такие работы, которые воспроизводят созданное мастерами и имеют очень ясную и очень гладкую форму, как, например, работы Гессе [14].

Само собой разумеется, что Вы всячески можете использовать любое из моих высказываний, которое было бы полезно дальнейшему продвижению Молина. Я прошу Вас передать ему привет от меня и сказать ему, что он забыл прислать мне отдельный оттиск его работы, помещенной в берлинском издании, если у него еще есть некоторый запас их, то я не откажусь и от нескольких экземпляров.

С уверением в совершенном моем почтении имею честь быть Ваш покорнейший коллега.

Фробениус.

Шарлотенбург, 6 мая 1898 г.

Отзыв Ф. Шура

О докторе Ф. Э. Молине, доценте императорского Юрьевского университета, я с удовольствием могу засвидетельствовать, что он рядом своих математических работ, особенно своей докторской диссертацией о системе комплексных чисел (Дерпт, 1892 г., 41 т.), составил себе почетное имя в научном мире. Названная диссертация существенно повлияла на исследования по общим комплексным числам, которыми тогда занимался ряд выдающихся ученых. В доказательство этого могу привести доклад «Старые и новые исследования о системах комплексных чисел», сделанный доктором Штуди, ординарным профессором математики в Грейсфальдском университете, в связи с Всемирной выставкой в Чикаго. Штуди на с. 379 пишет: «Существенное углубление нашего понимания природы систем комплексных чисел, наконец, дала работа Молина. Здесь развивается ряд новых важных понятий...» и т. д. О соответствии научной квалификации г. Молина для профессуры математики, таким образом, нет ни малейшего сомнения.

Д-р Фридрих Шур,
ординарный профессор геометрии
в техническом институте Карлсруэ,
5 мая 1898 г.

Письмо А. Гурвица

Уважаемый коллега!

Из Ваших любезных строк от 22 августа я с удовольствием узнал, что Вы благополучно достигли своей цели [1]. В день Вашего отъезда из Цюриха я старался застать Вас в гостинице, но, к сожалению, это не вышло. Я написал Вам несколько строк, чтобы узнать Ваш мюнхенский [2] адрес с целью письменно поблагодарить Вас за чудесных крокодила и слона, которых Вы прислали Лизе и Эле[3]. Я не знаю, получили ли Вы эти строки, но я повторяю благодарность и сообщаю, что детям Вы доставили величайшее удовольствие. С удовольствием вспоминаю о днях Вашего пребывания здесь и буду особенно счастлив, если наши разговоры будут способствовать тому, что Вы продолжите Ваши прекрасные исследования о числовых системах с линейными подстановками[4]. Случай $n=6$ в моем изложении очень просто решается тем, что имеется лишь 15 линейно-независимых кососимметричных подстановок от 6 переменных, в то время как должно бы их существовать 16, если бы существовала композиция квадратичных форм с 6 переменными[5]. Тем временем я опять возвратился от линейных подстановок к теории функций, чтобы редактировать результаты, которые связаны с моей статьей «К одной теореме Адамара»[6].

При этом я нашел, что теорема Адамара действительна только при известных условиях. В самом деле, ничего нельзя сказать априори относительно особенности функции, которая происходит из ряда

$$u_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 x^2 + \ldots ,$$

если функции, которые определяются рядами

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots , \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots ,$$

имеют естественные границы. Но я не хочу отвлекать Вас от Ваших исторических исследований, которым я желаю успеха. Надеюсь, что Вы скоро получите сообщение о продлении Вашего отпуска.

Привет от меня и детей.

Ваш покорный *Гурвиц*.

Примечания к письмам и отзывам

Из приводимых выше писем и отзывов о творчестве Ф. Э. Молина особенно интересны первые два, принадлежащие Г. Фробениусу. Георг Фробениус родился в 1849 г. в Берлине. В конце 60-х годов он окончил Берлинский университет, где в 1870 г. получил степень доктора, и в 1874 г. стал профессором. В 1875—1893 гг. он работал в Цюрихском политехникуме, откуда после избрания членом Берлинской академии и профессором Берлинского университета вновь возвратился в Берлин, где жил и работал до конца жизни (1917 г.). Его университетские учителя К. Вейерштрасс, Е. Куммер, Л. Кронекер и старший научный друг Р. Дедекинд в равной степени привили ему вкус к исследованиям как в области анализа, так и алгебры. Хотя вначале его аналитические работы 1870—1890 гг. лишь изредка чередовались с трудами по создаваемой тогда теории конечных групп (по одной работе в 1878, 1884, 1886 гг.), линейных и билинейных форм (две работы в 1878 и 1879 гг.), в первой из них открыта известная теория Фробениуса о кватернионах, но именно алгебраические работы его 1890—1895 гг. вместе с трудами по теории представлений конечных групп создали ему славное имя одного из лучших алгебраистов того времени. Однако к его отрицательным оценкам творчества отдельных лиц (С. Ли, Г. Шефферса и др.) следует относиться осторожно.

Обстоятельства, при которых появились публикуемые нами отзывы Фробениуса и Шура, подробно описаны (перед отзывом А. Кнезера) выше.

I. *К письму Г. Фробениуса к Ф. Э. Молину.*

[1] Письмо относится к последней работе [9] Молина, рекомендованной Фробениусом к напечатанию в докладах Берлинской академии наук, что означало особое отличие ценности трудов автора, поскольку лишь в этом случае академия публиковала работы молодых ученых, не имевших отношения к ней, каким был тогда Молин.

Подробные комментарии к этому письму помещены в работе [67].

II. *К отзыву Г. Фробениуса о творчестве Ф. Э. Молина.*

[1] Обращение относится к Адольфу Кнезеру, занимавшему кафедру прикладной математики Дерптского (Юрьевского) университета с 1889 по 1900 г. Осенью 1900 г. (одновременно с Молиным) А. Кнезер ушел в Берлинскую академию горных наук.

[2] Эдуард Штуди (см. о нем выше) учился с Молиным у Ф. Клейна в Лейпциге (1884—1885 гг.). Ранние работы Штуди относятся также и к гиперкомплексным системам. Позднее его научные интересы сместились в геометрию (геометрическая теория инвариантов, геометрия динам).

[3] Речь идет о докторской диссертации [5] Ф. Э. Молина.

[4] Имеются в виду работа [36] и другие более ранние работы Георга Шефферса, посвященные гиперкомплексным системам («К теории комплексных величин, образованных из n главных единиц», «Об исчислении в число-

вых системах» от 1893 г.), Фробениус дает несправедливую оценку этих работ Шефферса.

[5] Ф. Э. Молина несколько раз приглашали на работу в Германию.

[6] Имеется в виду работа [37] Фробениуса.

[7] Речь идет о работах: [33] — Карла Вейерштрасса, [34] — Рихарда Дедекинда и других его исследованиях коммутативных числовых алгебр (в частности, по теории алгебраических чисел), [35] — Фридриха Шура. Имеются в виду также указанные выше (в примечании 4) работы Г. Шефферса; работы «О системах комплексных чисел», «Комплексные числа и группы преобразований» от 1889 г., «О системах комплексных чисел и их применении в теории групп преобразований» от 1890 г. Э. Штуди и, по-видимому, работа «Линейные ассоциативные алгебры» от 1870 г. Бенджамина Пирса.

[8] Имеются в виду работы Адольфа Кнезера от 1877 г.: «Арифметическое обоснование одной основной теоремы» и «К теории алгебраических функций».

[9] Фробениус, по-видимому, имеет в виду вообще свои алгебраические работы, в особенности работу [37] и вышедшие в 1898 г. работы по теории представлений конечных групп (см. в вышеуказанном сборнике работ Фробениуса под редакцией А. К. Сушкевича исследования: «О групповых характерах», «О простых множителях группового детерминанта» от 1896 г., а также работы [43—45], написанные после ознакомления с работами Ф. Э. Молина и под их влиянием).

[10] Речь идет об основных работах [7, 8] Ф. Э. Молина, содержание которых изложено в третьей главе. Работы эти — законченный набросок общей теории линейных представлений конечных групп, в основу которой положены результаты докторской диссертации Ф. Э. Молина о строении гиперкомплексных систем, их регулярного представления и особенностей их в соответствии с особенностями разложения характеристического рангового многочлена на неприводимые множители.

Молин первым с такой обстоятельностью и полнотой рассматривает групповую алгебру, устанавливает ее полупростоту, разложимость в прямую сумму первоначальных (простых) алгебр и в зависимости от этого исследует особенности регулярного представления групповой алгебры, реализующей линейные представления конечной группы, из которой получена групповая алгебра. Такой метод изложения теории представлений конечных групп Н. Бурбаки в своих «Очерках по истории математики» [74] назвал гиперкомплексным аспектом этой теории. Однако он почему-то не упомянул там об указанных выше работах Молина и поэтому дал неполную, искаженную историю создания теории представлений групп. В частности, из [74] нельзя понять, кто явился автором гиперкомплексного аспекта теории представлений групп.

[11] Ф. Э. Молин и Г. Фробениус независимо друг от друга открыли и разработали основы теории представлений конечных групп к осени 1897 г. Как мы видели, способ Молина явился естественным продолжением исследования строения гиперкомплексных систем (алгебр) и их гомоморфизмов. Идея способа Фробениуса, названного методом группового детерминанта, была сообщена ему в апреле 1896 г. Р. Дедекиндом. В том же году Фробениус развил эту идею, т. е. в основном изложил сущность своего метода в двух статьях: «О групповых характерах» и «О простых множителях группового детерминанта».

В первой работе Фробениус, следуя Дедекинду, рассмотрел системы чисел, сопоставляемые классам сопряженных элементов и вводимые так же, как решения определенной системы квадратных однородных уравнений, имеющей точно столько систем решений, сколько существует классов сопряженных элементов группы. Эти системы чисел называют характерами группы. Тем самым характеры здесь — функции от классов сопряженных элементов. Это определение не зависит от представления группы.

Из этого определения Фробениус получает ряд свойств характеров. Если A — элемент некоторого класса сопряженных группы G с единицей E порядка h, элементами E, A, B, ... и χ — ее характер, то, очевидно, имеет смысл выражение и значение характера χ на элементе A, обозначаемого $\chi(A)$ и равного по определению значению характера для класса сопряженных, к которому принадлежит A. Следовательно, если имеется k классов сопряженных элементов, то существует точно k значений характера. Значения характера на всех элементах данного класса сопряженных — равные числа: $\chi(A) = \chi(B^{-1}AB)$ и $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$, $\chi(AB) = \chi(BA)$, $\chi(E) = 1$.

Тем самым Фробениус рассматривает характеры также в качестве функции элементов группы. Используя элементы группы в роли индексов переменных x_E, x_A,

$x_B, \ldots$, Фробениус изучает матрицу $(x_{PQ^{-1}})$ порядка h, в которой P, Q, независимо пробегая группу G, соответственно обозначают номера строк, столбцов матрицы. При этом Фробениус останавливается на том частном случае, для которого $x_{AB} = x_{BA}$. Для абелевой группы G это условие выполняется для любой пары элементов. Ясно, что независимых переменных здесь будет точно k (число классов сопряженных), и можно рассмотреть групповой детерминант h-го порядка

$$|x_{PQ^{-1}}| = \theta(x_0, x_1, \ldots, x_{-1}) = \theta(x),$$

как однородную, целую рациональную функцию от k переменных $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Легко видеть, что $\theta(x)$ равно произведению h линейных функций от названных k переменных. Коэффициенты этих линейных множителей оказываются характерами G. В этой же работе Фробениус рассматривает пропорциональные друг другу числа g и e, связанные соотношением $g = fe$, и доказывает, что g — показатели, с которыми названные линейные множители входят в разложение $\theta(x)$.

Во второй работе понятие группового детерминанта

$$|x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}| = \theta(x_E, x_A, x_B, \ldots) = \theta(x_R) = \theta(x) = \theta$$

обобщается, т. е. не считается обязательным условие $x_{AB} = x_{BA}$, и ставится вопрос о разложении его на простые множители, среди которых могут оказаться также и линейные. Действительно, если к элементам первой строки прибавить элементы всех остальных строк, получим все элементы этой строки равными $\xi = \Sigma x_R$. Следовательно, θ как целая, рациональная функция — однородный многочлен h переменных x_E, $x_A, \ldots$ должен делиться на ξ. Значит, он при $h \neq 1$ разлагается на простые множители. Доказывается, что число их равно k — числу классов сопряженных элементов. Если Φ — простой множитель θ и степень $\Phi = f$, то с той же степенью Φ входит в θ, т. е. $\theta = \Pi\Phi^f$, где f — делитель h, т. е. для $g = ef$ доказывается, что $e = f = \sqrt{g}$.

Следовательно, $h = \Sigma f^2$. При этом доказывается, что линейным преобразованием всегда можно преобразовать каждый простой множитель Φ в многочлен самое меньшее от f переменных. Приравнивая переменные с индексами, входящими в класс сопряженных, получаем k переменных и $\Phi = \xi^f$, где ξ — линейная форма от k переменных. Эти k линейных форм линейно-независимы. Коэффициенты каждой линейной формы ξ составляют характер G. Следовательно, $\theta = \Pi\xi^{f^2}$, и тем самым Фробениус общий случай группового детерминанта сводит к частному случаю, рассмотренному в первой работе.

Кроме того, Фробениус доказывает целый ряд свойств характеров.

Интересно то, что в отличие от работ Молина в обеих работах Фробениуса мы не видим явно введенных понятий: линейных представлений группы, их приводимости или неприводимости, их эквивалентности, группового кольца, композиции характеров и др. Все эти вопросы своим методом он осветил в последующих своих работах [43—45] уже после знакомства с работами [7, 8] Молина. Более подробное изложение подхода Фробениуса см. в работе [66].

[12] Примитивных, т. е. неприводимых.

[13] Речь идет о последней работе [9] Молина по теории представлений конечных групп, посвященной изучению кронекеровских степеней представлений группы, которые Фробениус сравнивает с композицией квадратичных форм.

[14] По-видимому, имеется в виду немецкий математик Отто Гессе (1811—1874). Основные работы по аналитической геометрии (нормальные формы плоскости, прямой и др.), дифференциальной геометрии (кривые и поверхности Гессе и др.), линейной алгебре.

III. *К письму Ф. Шура.*

О Ф. Шуре см. выше (гл. первая, раздел 5). Более подробные комментарии к этому письму см. в журнале «История и методология естественных наук» (1974, вып. 16).

IV. *К письму А. Гурвица* (Цюрих, 26 августа 1899 г.)

Адольф Гурвиц (1859—1919), как и Ф. Э. Молин, учился у Ф. Клейна. Основные работы посвящены алгебре и теории функций. В 1892 г. приглашен Цюрихским политехникумом в ординатуру, где проработал 27 лет до своей кончины.

[1] Ф. Э. Молин направлялся в Рим для работы в библиотеке Ватикана над рукописями математиков Возрождения и более позднего времени.

[2] По пути в Рим Молин заезжал в Мюнхен для участия в происходившем 71-м съезде Общества немецких естествоиспытателей и врачей, членом и делегатом которого он был избран в том же 1899 г.

[3] Дочери Гурвица.

[4] Речь идет о работах [7, 8] Молина.

[5] Речь идет о работе А. Гурвица «О композиции квадратичных форм от произвольного числа переменных», опубликованной в 1898 г. в журнале Гёттингенского общества. В ней Гурвиц рассматривает задачу о представлении произведения двух сумм квадратов действительных переменных в виде суммы квадратов билинейных форм над K названных переменных. Точнее квадратичную форму $\Phi(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ называют обладающей композицией, если $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(z)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — билинейные формы от $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Эта формула для случаев $n = 2$, $n = 4$ восходит к именам Диофанта, Эйлера (1748 г.) и А. Кели (1845 г.). Попытки многих авторов получить аналогичную формулу для случаев $n = 3$, $n = 6$ окончились неудачей.

Гурвиц доказал, что композиция квадратичных форм возможна при $n = 1, 2, 4, 8$ и невозможна для иных n. Если числовую алгебру с единицей 1 (являющейся базисным элементом), имеющую ортонормированную базу, в которой задано такое скалярное произведение, что $(xy, xy) = (x, x)(y, y)$ для любых двух элементов x, y, назвать нормированной, то теорему Гурвица можно сформулировать так: алгебры R (действительных чисел), C (комплексных чисел), Q^* (кватернионов) и O (октав) единственные (с точностью до изоморфизма) алгебры, в которых можно ввести скалярное произведение так, чтобы норма (т. е. (x, x) для любого элемента x) обладала указанным выше свойством.

[6] Статья напечатана в «*C. R.*» (т. 128 от 1899 г.). В ней Гурвиц дает способ образования из двух данных степенных рядов третьего степенного ряда, особенности которого равны сумме соответствующих особенностей данных рядов. Теорема представляет собой аналог известной теоремы Адамара.

Именной указатель

Оглавление

Николай Федорович Канунов

Федор Эдуардович Молин
1861—1941

Утверждено к печати
редколлегией серии «Научно-библиографическая литература»
Академии наук СССР

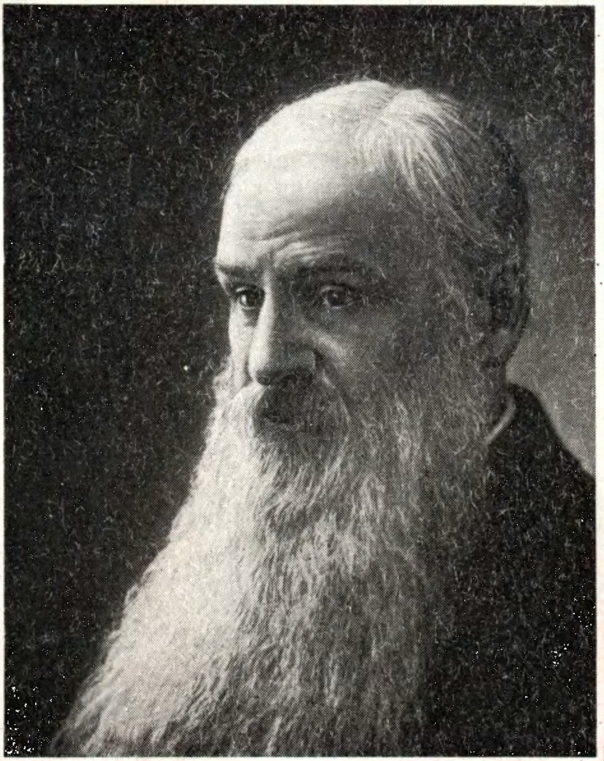
Редактор издательства **В. П. Большаков**
Художественный редактор **Н. А. Фильчагина**
Технические редакторы **Т. А. Калинина, С. Г. Тихомирова**
Корректоры **А. Б. Васильев, Ю. Л. Косорыгин**

ИБ № 24598

Сдано в набор 10.10.82. Подписано к печати 24.02.83.
Т-05145. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 5.88. Усл. кр. отт. 6,1
Уч.-изд. 6,2. Тираж 4200 экз. Тип. зак. 371
Цена 60 коп.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25



Н. Ф. Канунов

Федор Эдуардович МОЛИН

60 коп.