АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Е. П. ОЖИГОВА

ЕГОР ИВАНОВИЧ ЗОЛОТАРЕВ

1847–1878

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД
1966

Ответственный редактор
профессор И. Я. Депман

2-2-1
136-65 (н. б.)

«Это был гениальный математик, труды которого останутся в науке, и в то же время обаятельный молодой человек».

(Из письма Шарля Эрмита А. Н. Коркину 19 февраля 1880 г.).

«Безусловная преданность его науке, редкая неутомимость в труде, разнообразие усвоенных им знаний, проницательный взгляд и быстрая сообразительность в труднейших вопросах анализа — все предвещало ему будущность мощного двигателя избранной им науки».

(Из речи вице-президента Академии наук В. Я. Буняковского, посвященной памяти Золотарева [35, стр. 52]).

ВВЕДЕНИЕ

Выдающийся русский математик академик Е. И. Золотарев был одним из самых талантливых представителей петербургской математической школы, созданной П. Л. Чебышевым. За свою короткую жизнь, трагически оборвавшуюся на 32-м году, он успел внести большой вклад в математику и оказал влияние на многих последующих ученых. Наибольшей известностью пользуются его работы по теории делимости целых алгебраических чисел и совместные с А. Н. Коркиным исследования о минимумах положительных квадратичных форм. Направление исследований Золотарева по теории делимости алгебраических чисел привело к созданию так называемых p-адических чисел.

[1] ААН, ф. 759, оп. 4, д. 84/8 (Л.).

Свою теорию делимости он применил к решению вопроса, поставленного Чебышевым, о выражении в логарифмах некоторых интегралов. Золотарев продолжил исследования Чебышева по теории наилучшего приближения функций многочленами. Кроме Чебышева, большое влияние на творчество Золотарева оказали французский математик Ш. Эрмит и А. Н. Коркин. Сам Эрмит высоко оценивал труды Золотарева и Коркина. Известно его высказывание, сделанное им в письме к Борхардту: «Два в высшей степени выдающихся русских математика г. Коркин и г. Золотарев недавно опубликовали в „Математических Анналах" г. Неймана глубокие исследования. . .» [116, т. 3, стр. 190—193]. Через несколько лет после смерти Золотарева, в 1891 г. Эрмит писал А. А. Маркову, что он не может передать, какое сожаление испытывает, вспоминая о Золотареве, с которым он подружился в Париже и талант которого внушал ему одновременно восхищение и глубокую симпатию. Он считал, что талант Золотарева поставил бы его, будь он жив, в ряд величайших математиков.[2] Ученик Эрмита Шарв писал Коркину из Марселя в 1881 г.: «Мосье, я очень хотел бы прочитать мемуар, который вы опубликовали совместно с покойным Золотаревым в „Mathem. Annalen" о кватернарных формах. В публичной библиотеке Марселя нет коллекции „Mathem. Annalen", и, не зная, куда адресоваться, чтобы прочесть Вашу работу, которую г. Эрмит мне очень хвалил, я беру на себя смелость обратиться к Вам». Позже, благодаря за присылку статей, Шарв пишет: «Г. Эрмит очень хвалил ваши работы, и, просмотрев ваши мемуары, я уже вижу, что они будут для меня чрезвычайно интересны. Введение в рассмотрение экстремальных форм показалось мне исключительно удачным, и следствия, которые вы из этого извлекаете, внушили мне большое желание углубить вашу работу. Говорят, что именно в теории чисел познается гений математиков, и, кажется, русские геометры обладают им в самой высокой степени».[3]

Работы Золотарева и Коркина по теории квадратичных форм послужили исходным пунктом исследований для многих математиков, в первую очередь А. А. Маркова и Г. Ф. Вороного.

---

[2] ААН, ф. 173, оп. 1, д. 38, л. 10 (Л.).
[3] ААН, ф. 759, оп. 4, д. 84/7, лл. 1—1 об., 3—3 об. (Л.).

О жизни Е. И. Золотарева до сих пор было известно очень мало. Здесь делается первая попытка описать жизненный путь этого ученого. Первая часть книги посвящена биографии Золотарева, во второй — рассматриваются его труды. Содержание их излагается, по необходимости, очень кратко, даются ссылки на другие источники, из которых о работах Золотарева и его продолжателей можно узнать более подробно. О работах советских математиков в направлениях, идущих от Золотарева, можно узнать из сборников «Математика в СССР за 30 лет» [208] и «Математика в СССР за 40 лет» [209].

При подготовке очерка использовались, кроме печатных работ Золотарева и опубликованной переписки его с Коркиным, материалы Архива Академии наук, Государственного исторического архива Ленинградской области, Центрального Государственного исторического архива в Ленинграде, Музея-квартиры Д. И. Менделеева, Музея ЛГУ, архива Н. В. Бугаева в Научной библиотеке МГУ. Небольшой объем издания не позволяет подробнее осветить многие вопросы творчества Золотарева. За небольшим исключением, приводимые в очерке архивные материалы о Золотареве не публиковались.

В приложениях дан список литературы, включающий общую литературу, сочинения Золотарева, рефераты, написанные Золотаревым. Ссылки на литературу заключены в квадратные скобки.

Кроме списка литературы, в приложениях дается именной указатель и список принятых в книге сокращений.

ЧАСТЬ I

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ ЕГОРА ИВАНОВИЧА ЗОЛОТАРЕВА

Глава 1

ГОДЫ УЧЕНИЯ

Гимназия

31 марта 1847 г. у Агафьи Изотовны Золотаревой родился сын Георгий (Егор).[1] Запись об этом событии была сделана в метрической книге церкви лейб-гвардии Измайловского полка в Петербурге.[2] Отец ребенка Иван Васильевич Золотарев, купец третьей гильдии, был хозяином часового магазина на углу Екатерингофского проспекта и Садовой улицы.

Десяти лет Егор Золотарев поступил во 2-й класс 5-й гимназии [1, 2], находившейся на окраине Петербурга, в Коломне. О населении этой части города директор гимназии писал: «Состав населения, окружающего 5-ю гимназию, имеет также неблагоприятное влияние на изучение древних языков в этом заведении: части Коломенская и Нарвская, для которых 5-я гимназия служит почти единственным казенным (а потому и дешевым) учебным заведением, населены по преимуществу очень небогатыми чиновниками ведомств морского, военного, интендантского, комиссариатского, служащими и отставными» [1, стр. 45].

---

[1] Позднее у Егора появились сестры Вера, Елена, Анна и брат Петр.

[2] ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 6663-а, л. 28.

Гимназия занимала трехэтажное здание с примыкающим к нему флигелем и находилась у Аларчина моста на Екатерингофском проспекте, 73. Здание это сохранилось и сейчас. В гимназии чувствовался уклон в сторону точных наук. Директор гимназии А. Н. Беляев, сам являвшийся кандидатом математических наук, особое внимание обращал на подбор хороших учителей математики и физики, на уровень преподавания этих предметов. Он сам преподавал математику с года открытия гимназии (1845). В программе преподавания математических наук он писал [1, стр. 14]: «При прохождении каждого арифметического действия и при исследовании алгебраических количеств ученикам будет предлагаться как можно более задач, преимущественно практических, причем соблюдено будет по возможности разнообразие задаваемых вопросов».

Кроме Беляева, математику в гимназии вели и другие опытные и знающие учителя: А. Д. Дмитриев (1820—1899), автор ряда учебников, в дальнейшем член Ученого комитета Министерства народного просвещения, К. В. Закржевский, кандидат Петербургского университета. Наибольшее влияние на учеников оказывал преподаватель физики и математики К. Д. Краевич, товарищ Д. И. Менделеева по Главному педагогическому институту, впоследствии (с 1872 г.) работавший в Николаевской Морской академии. Беляев писал о нем: «Главное внимание преподавателя обращено постоянно на мыслительную способность учащихся и сознательное усвоение ими изучаемого; чтение учениками не одних только учебников, но и специальных сочинений по этим предметам доказывает, что наставник успел возбудить в своих слушателях любовь к предмету и к самостоятельному труду» [1, стр. 50].

Беляев и Краевич создали в гимназии хороший физический кабинет,[3] но из-за недостатка помещения днем в кабинете располагалась учительская, а демонстрацию опытов проводили по вечерам и в воскресные дни. С 1849 г. в гимназии проводились два раза в месяц литературные беседы. Во время бесед ученики читали подготовленные ими сочинения, затем их обсуждали. Темы сочинений были

---

[3] К. Д. Краевич и в Морской академии сумел создать прекрасный физический кабинет. О влиянии Краевича на А. Н. Крылова см. [3].

самыми разнообразными: «Рафаэль», «Вильгельм Телль», «О пользе физики». Михаилу Авенариусу принадлежало, например, сочинение на тему: «Взгляд на постепенное развитие естественных наук».

К сожалению, архивные материалы 5-й гимназии за эти годы погибли во время наводнения 1924 г. Поэтому данных о том, как учился в гимназии Золотарев, почти нет. Но хороший состав преподавателей физики и математики и математический дух гимназии говорят о том, что Егор Золотарев получил в ее стенах прочные математические знания и развил умение самостоятельно мыслить.

О хорошей постановке преподавания точных и естественных наук свидетельствует также большое число выпускников гимназии, посвятивших себя этим наукам. Упомянем в первую очередь академика А. А. Маркова, окончившего гимназию в 1874 г., и его брата, В. А. Маркова, рано умершего талантливого ученого-математика, окончившего гимназию в 1888 г. Выпускниками 5-й гимназии были профессор Казанского университета А. В. Васильев, профессор Киевского университета физик М. П. Авенариус, химики В. Е. Тищенко и А. К. Крупский и другие известные ученые. Одновременно с Золотаревым окончили гимназию будущий ботаник Иван Парфеньевич Бородин и будущий физик В. В. Лермантов. Все трое поступили на физико-математический факультет Петербургского университета и многое сделали для науки, каждый в своей области.

Егор Иванович Золотарев окончил гимназию в 1863 г. с серебряной медалью.

Петербургский университет

20 августа 1863 г. Егор Иванович Золотарев подал прошение исполнявшему должность ректора Петербургского университета И. И. Ивановскому: «Желая поступить для окончательного образования в имп. СПб-ский университет по физико-математическому факультету по отделению математических наук и представляя при сем следующие документы: 1) метрическое свидетельство о рождении и крещении, 2) аттестат об успешном окончании гимназического курса и 3) свидетельство об увольнении от купеческого общества, покорнейше прошу, Ваше Превосхо-

Константин Дмитриевич Краевич (1833—1892).

дительство, зачислить меня в студенты СПб-ского импер. университета. Егор Золотарев».[4]

Золотарев был принят вольнослушателем университета. На следующий год попечитель разрешил зачислить Егора Золотарева в 1864/65 учебном году студентом на 2-й курс разряда математических наук. Первого сентября 1864 г. Золотарев получил от инспектора свидетельство для свободного проживания в С.-Петербурге сроком по 26 января 1865 г.

Егор Иванович Золотарев принадлежал к тому поколению студентов, о котором впоследствии его современник К. А. Тимирязев писал: «Поколение, для которого начало его сознательного существования совпало с тем, что принято называть шестидесятыми годами, было, без сомнения, счастливейшим из когда-либо нарождавшихся на Руси. Весна его личной жизни совпала с тем дуновением общей весны, которое пронеслось из края в край страны, пробуждая от умственного окоченения и спячки, сковывавших ее более четверти столетия» [4, стр. 139].

Период мрачной николаевской реакции сменился кратковременным периодом реформ и отмены различных ограничений. В университеты принимают «разночинцев» — молодых людей всех сословий. После студенческих волнений 1861 г. [5], вызванных новыми правилами для студентов, и расправы со студентами университет был закрыт и оставался закрытым до августа 1863 г. (физико-математический факультет начал работать осенью 1862 г.). В это время происходило публичное обсуждение нового устава для университетов. Он был принят в 1863 г. [6, 7]. Год поступления Золотарева в университет был первым годом действия нового устава. Впоследствии этот устав «урезался» правительственными распоряжениями и новыми правилами для студентов. Устав предоставлял большую самостоятельность советам университетов.

За студентами устанавливался строгий надзор. В университете «ближайшее наблюдение» возлагалось на инспектора. Много лет им являлся бывший унтер-офицер гренадерского полка Н. В. Озерецкий.[5] Инспектору предписывалось «иметь постоянно в дежурной комнате шнуро-

---

[4] ГИАЛО, ф. 14, оп. 5, д. 2753, лл. 1—5. Золотареву было 16 лет, а по уставу в университет принимали лишь с 17 лет. Поэтому его зачислили вольнослушателем.

[5] ЦГИАЛ, ф. 733, оп. 120, д. 537, л. 332.

вую книгу для внесения. . . в оную каждый раз замеченных. . . со стороны студентов или посторонних слушателей СПб-ского университета нарушений установленных для них правил».[6]

Первым преподавателем математики, с которым встретился в университете Золотарев, был Я. Я. Цветков. Он читал на первом курсе аналитическую и начертательную геометрию, а на втором — высшую алгебру и сферическую тригонометрию. Преподаватель был очень молод, сам только в 1860 г. окончил университет, получив почетный отзыв за сочинение по астрономии. Он был принят временным преподавателем вместо посланного за границу А. Н. Коркина и вел его курсы в 1862/63 и 1863/64 гг. В 1864 г. Цветков успешно защитил магистерскую диссертацию, заслужив похвалу П. Л. Чебышева.[7] Позднее он был профессором в Москве.

Физику первокурсникам читал доцент Ф. Ф. Петрушевский [9]. В его лекциях Золотарев встречал те же мысли, что и на уроках Краевича — о значении математики для других наук. Петрушевский говорил: «Опыт ведет к открытию законов, но для достижения заключений большей частью требуются вычисления, иногда весьма сложные; для соединения явлений разнородных нужна еще более деятельная помощь математики. Таким образом, если физика начинается наблюдением, то продолжается при помощи математики . . . Научиться владеть математической логикой — значит приобрести могущественное орудие для разработки физики; впрочем, высокое значение математики для наук наблюдательных настолько известно, что дальнейшее рассуждение о том не нужно» [10, предисловие]. В то же время Петрушевский отмечал и важность практики для теории: «Если математика освещает путь наблюдательной физике, то и эта последняя также руководит математическим анализом; и та и другая играют роль то самостоятельную, то подчиненную» [10, предисловие].

Химию читал профессор А. А. Воскресенский, учитель Д. И. Менделеева по Главному педагогическому институту. Э. Х. Ленц, известный более как физик, читал первокурсникам физическую географию [9, стр. 191—194; 11].

---

[6] ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 6148, л. 207.
[7] Там же, оп. 3, д. 14741, лл. 1—16 [9, стр. 362—363].

Часы распределялись так:[8] физики было 4 лекции в неделю, химии — тоже 4, аналитической геометрии — 3 лекции, начертательной геометрии — 1, физической географии — 1, богословия — 1 лекция в неделю. Лекция продолжалась час. Иногда лекции сдваивали (например, по физике). С 9 до 10 часов ежедневно — занятия иностранными языками. Дифференциального и интегрального исчисления на первом курсе не читали. Практических занятий не было.

Золотарев отлично сдал все экзамены, кроме неорганической химии (по ней получил «хорошо»). Ходил он и на лекции старших курсов. В его тетрадях перемежаются записи лекций по аналитической геометрии, высшей алгебре, дифференциальному исчислению (его читал на втором курсе О. И. Сомов). Здесь же таблица интегралов и английские слова. На одном из листов нарисована картинка и написано: «Закон божий» — это, по-видимому, запись лекции профессора богословия Палисадова.

В следующем году Золотарев слушает лекции А. Н. Коркина по высшей алгебре (по 2 лекции в неделю) и интегральному исчислению (по одной), О. И. Сомова по дифференциальному исчислению (по 3 лекции в неделю), А. Н. Савича по общим основаниям астрономии (по 2 лекции). В программу курса высшей алгебры (Коркина) входили: доказательство существования корня в алгебраическом уравнении, различные способы отделения корней и приближенное вычисление корней, симметрические функции корней алгебраического уравнения и различные способы их вычисления, непрерывные дроби, двучленные уравнения, Абелевы уравнения, решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени и другие вопросы.[9]

Программа курса интегрального исчисления содержала темы: определенный и неопределенный интеграл, основные теоремы интегрального исчисления, способы интегрирования. Рассматривались интегралы от рациональных и от иррациональных функций. Подробно излагалась теорема Чебышева об интегрировании двучленных дифференциалов. Затем изучались интегралы от трансцендентных функций, методы приближенного интегрирования,

---

[8] Там же, д. 14744, программы и расписания лекций (1863/64).

[9] Там же, оп. 1, д. 14763, л. 13—13 об., программа курса высшей алгебры.

Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894).

причем среди них был и метод разложения интеграла в непрерывную дробь. Изучалось также дифференцирование интегралов по параметрам и приложение этого метода к вычислению некоторых интегралов. В качестве приложений интегрального исчисления давались выводы остаточных членов в формулах Тейлора и Маклорина. Затем шли «ряд Лагранжа с дополнительным членом П. Л. Чебышева и особенная формула интегрирования, на которой основано доказательство П. Л. Чебышева». Курс заканчивался геометрическими приложениями интегрального исчисления, среди которых были и приложения, связанные с понятием двойного и тройного интеграла.[10]

А. Н. Коркин (1837—1908) только что вернулся из заграничной командировки. Он слушал в Берлине Куммера, Кронекера, Вейерштрасса, в Париже — Лиувилля, Бертрана. Особенно заинтересовали его лекции Кронекера о приложениях анализа бесконечно малых к теории квадратичных форм и лекции Бертрана по дифференциальным уравнениям. Свежими знаниями он старался поделиться со своими слушателями. Программы его курсов были составлены в соответствии с современным состоянием науки. В программу высшей алгебры входили вопросы теории деления круга, решение Абелевых уравнений, занимавшие тогда умы математиков и оказавшие влияние на творчество Золотарева. Более подробно можно ознакомиться с содержанием лекций Коркина по его литографированному курсу [12].

Будучи учеником П. Л. Чебышева, Коркин всегда упоминал результаты своего учителя, что отразилось и в программе интегрального исчисления.

Слушатели высоко ценили лекции Коркина. Академик А. Н. Крылов писал об изяществе математических выводов в лекциях Коркина, об оригинальности его курсов. Вспоминая о лекциях А. Н. Коркина, он говорил, что в них кроется причина, почему ученики Коркина, сами становясь профессорами, придерживались методов изложения своего учителя, разносили их по всей России и создавали таким образом ту школу многих русских математиков, которая работает и поныне по традиции Коркина [13, стр. 415].

---

[10] Там же, д. 6066, лл. 85—86, программа курса интегрального исчисления.

На III курсе теорию чисел читал П. Л. Чебышев (1821—1894). Он же читал интегральное исчисление для III и IV курсов. Имя Чебышева [25, 31] было к тому времени уже хорошо известно в России и в Европе. Он являлся признанным главой петербургских математиков. Особенно прославили его две работы о простых числах [14, 15], значительно приблизившие теорию чисел к полному решению вопроса о распределении простых чисел в натуральном ряде, вопроса, поставленного еще Евклидом. Не ограничиваясь собственными научными достижениями, Чебышев много сил уделял воспитанию молодых математиков. В Петербургском университете он преподавал с 1847 г. (года рождения Е. И. Золотарева), а простился с ним спустя четыре года после смерти Золотарева, в 1882 г. Программы различных курсов, читанных Чебышевым, напечатаны в 5-м томе Полного собрания его сочинений. Теорию чисел Чебышев читал, придерживаясь своей «Теории сравнений» [16]. И в теорию чисел, и в интегральное исчисление им был внесен огромный вклад. Поэтому слушание этих курсов, представлявших исключительный интерес, по-видимому, и определило выбор Золотарева. В черновых тетрадях Золотарева преобладают (в студенческие годы) записи по теории чисел и интегральному исчислению.

Другим крупным ученым, также оказавшим некоторое влияние на направление трудов Золотарева, был Осип (Иосиф) Иванович Сомов (1815—1876). Сомов [17, 231] читал на III курсе механику (по 2 лекции в неделю). А. Н. Савич [18] продолжал читать астрономию и геодезию. Теорию упругости (желающим) читал Н. С. Будаев. Ф. Ф. Петрушевский вел спецкурс теории физики, М. Ф. Окатов — практическую механику и механическую теорию теплоты.

Большое значение для Золотарева имели лекции приват-доцента А. В. Бесселя (1839—1870), позднее профессора Новороссийского университета, по теории эллиптических функций. Как и Коркин, Бессель недавно вернулся из заграничной командировки (в начале июля 1864 г.). Он только что защитил магистерскую диссертацию и с марта 1865 г. был допущен к чтению лекций в качестве приват-доцента. Курс Бесселя включал разделы: свойства тригонометрических и показательных функций, определение эллиптических функций, соотношения между ними и их производными, теорема Абеля, сложение эллиптических функций, различные способы изложения теории эллиптических функций, функции мнимой переменной, сходимость рядов, интегралы между мнимыми пределами, разложение функций в ряды по целым степеням переменной, исследование функций, определяемых дифференциальными уравнениями, приложения их к простым периодическим функциям, двойная периодичность эллиптических функций, свойства двояко-периодических функций, разложение эллиптических функций в ряды и в бесконечные произведения, Якобиевы функции, интегрирование рациональной функции переменной и корня квадратного из полинома 3-й и 4-й степени, эллиптические интегралы 2-го и 3-го рода.[11]

В курсе Бесселя отразилось его близкое знакомство с исследованиями Вейерштрасса, Якоби, Абеля. Он посещал в Берлине лекции Вейерштрасса, Кронекера, Куммера, причем особенно интересовался именно эллиптическими функциями. Их он избрал своей специальностью и именно о них читал курс. Золотарев хорошо усвоил основы теории эллиптических функций и в дальнейшем часто ею пользовался, посвятив приложениям этих функций несколько работ.

На IV курсе Бессель читал приложения эллиптических функций, Чебышев — теорию вероятностей. Сомов, Окатов, Будаев продолжали свои курсы. Савич, кроме лекций по астрономии, небесной механике и геодезии, по пятницам при благоприятной погоде проводил вечерами упражнения в производстве астрономических наблюдений на малой астрономической обсерватории. Астрономия также интересовала в это время Золотарева. В отчете о состоянии университета за 1867 г. Д. И. Менделеев указывал: «Студенты: Золотарев, Верещагин и Орлов сделали большие вычисления для определения путей некоторых комет» [19].

После успешного окончания экзаменов Золотарев представил кандидатскую диссертацию «Об интегрировании уравнений волчка» [12] и 13 ноября 1867 г. был утвержден в степени кандидата. Уплатив 6 рублей, он получил на руки диплом об окончании университета следующего содержания:

---

[11] Там же, д. 6257, л. 17.
[12] Это сочинение пока не найдено.

Осип Иванович Сомов (1815—1876).

Д И П Л О М № 3290

Совет императорского Санкт-Петербургского университета сим объявляет, что Егор Иванов сын, Золотарев, из купеческого сословия, 21 года от роду, православного вероисповедания, поступив в число студентов сего Университета в октябре месяце 1863 года, выслушал полный курс наук по математическому разряду физико-математического факультета и оказал на испытаниях следующие познания: в богословии, высшей алгебре, аналитической геометрии и сферической тригонометрии, начертательной геометрии, дифференциальном исчислении, интегральном исчислении, теории чисел, теории вероятностей, аналитической механике, физике, физической географии, теоретической астрономии, практической астрономии и геодезии — отличные; в неорганической химии и французском языке — хорошие, за которые физико-математическим факультетом по представлении диссертации признан достойным ученой степени к а н д и д а т а и, по исключении из податного состояния, утвержден в этой степени Советом Университета 13 ноября 1867 года. Почему предоставляются З о л о т а р е в у все права и преимущества, законами Российской империи со степенью к а н д и д а т а соединяемые. В засвидетельствование чего дан сей диплом от Совета императорского Санкт-Петербургского университета с приложением университетской печати. Санкт-Петербург, 30 декабря 1867 г.[13]

Вскоре Золотарев поступает на службу преподавателем аналитической механики в Строительное училище.[14] Одновременно он готовит диссертацию pro venia legendi — на право чтения лекций в университете. Диссертацию эту — «Об одном вопросе о наименьших величинах» — Золотарев защитил 22 сентября 1868 г. На основании диссертации и двух пробных лекций, прочитанных в присутствии профессоров и преподавателей факультета («О теореме Абеля» и «О приведении эллиптических функций к нормальному виду»), Золотарев был допущен к чтению

[13] ГИАЛО, ф. 14, оп. 5, д. 2757, л. 16.

[14] О Строительном училище см. [20]. Золотарев работал в нем с 1868 по 1871 г. Там же учился (1872—1878) его брат Петр.

лекций в университете в качестве приват-доцента. Вознаграждения приват-доцентам официально не полагалось. Его выделяли из средств, собранных со студентов за слушание лекций. Так как на большую семью Золотаревых отцовского заработка не хватало, Егор Иванович в 1869 г. становится также преподавателем аналитической механики Института инженеров путей сообщения.

Глава 2

Е. И. ЗОЛОТАРЕВ — УЧЕНЫЙ И ПЕДАГОГ

В Петербургском университете

Время вступления Е. И. Золотарева в ряды профессоров и преподавателей Петербургского университета было временем большого подъема науки, литературы, искусства. В Петербургском университете работали знаменитые ученые Д. И. Менделеев, П. Л. Чебышев, А. Н. Бекетов, А. С. Фаминцын. В 1869 г. по предложению Менделеева на кафедру химии был избран один из замечательнейших русских ученых А. М. Бутлеров. Позднее, в 1876 г., в университетский коллектив вошел «отец русской физиологии» И. М. Сеченов. В «Автобиографических записках» Сеченов писал о Петербургском университете 70-х годов следующие строки [21, стр. 146—147]: «К Петербургскому университету того времени и к его физико-математическому факультету в особенности я преисполнен по сие время глубокого уважения. Не говоря о том, что сидеть рядом с такими людьми, как Чебышев, Менделеев и Бутлеров, было для меня большой честью, — университетская коллегия того времени представляла поразительный пример дружного единодушия по всем насущным вопросам университетской жизни. Посещая аккуратно заседания факультета и Совета, я за все одиннадцать лет не был свидетелем ни там, ни здесь ни единого враждебного столкновения, ни единого грубого слова. А между тем университет переживал тогда очень трудные времена и ему приходилось заниматься иногда очень щекотливыми вопросами».

Группа профессоров физико-математического факультета С.-Петербургского университета. 1868 г.

Сидят слева направо:

А. В. Советов, П. Л. Чебышев, К. Ф. Кесслер, А. Н. Савич. П. А. Пузыревский. Ф. В. Овсянников, А. Н. Бекетов.

Стоят слева направо:

Р. Э. Ленц, Н. А. Меншуткин, А. С. Фаминцын, О. И. Сомов, Ф. Ф. Петрушевский, Д. И. Менделеев, А. Н. Коркин.

Совет университета принимал смелые решения, а иногда выступал даже против правительственных постановлений. Так, 27 апреля 1870 г. Совет слушал соображения комиссии по вопросу об отношении университетского начальства и общей полиции к проступкам, совершаемым студентами университета вне его зданий. Выводы комиссии были подвергнуты обсуждению, и Совет представил «на благоусмотрение высшего начальства» свое мнение. В «Предложении» министра говорилось, что необходим двойной надзор за студентами: университетской и общей полиции в связи с многочисленными студенческими сходками. Говорилось также, что сведения о проступках студентов вне здания университета совершенно «необходимы университетскому начальству для соображений при удостоении студентов учеными степенями и выдаче им одобрительных свидетельств о поведении».

В протоколе заседания Совета записано [22, стр. 62—68]: «Соображая все эти обстоятельства, Совет не может не найти, что университетское начальство вводится в совершенно новый для него круг дел, на которые оно по уставу не имеет никакого права и которые не связаны тесно с прямыми его обязанностями. Кроме того, и это самое важное, университетское начальство будет поставлено в весьма фальшивое положение относительно учащейся молодежи». (Разрядка моя, — *Е. О.*).

В 60-е годы XIX в. влияние университета на общественную жизнь России было исключительно велико. Своей главной задачей передовые профессора университета считали воспитание у слушателей любви к истине, науке, труду. О благородном труде профессоров и преподавателей Петербургского университета Менделеев писал: «Малая только часть этой деятельности ясна, ее можно более или менее полно исчислить, другая часть неуловима, на нее можно указать, но нельзя выразить ее числами. Нельзя исчислить ни количество, ни качество того труда, который состоит в чтении и усвоении лекций, в возбуждении любви к труду, истине, свету и науке, что составляет первую задачу университетов. Результаты этой деятельности не сосредоточиваются в университетских стенах; о существовании ее, однако, знает всякий, иначе университеты потеряли бы в общественном значении, не имели бы своего положения» [19, стр. 15—16].

Несомненно, что университетская атмосфера благоприятно повлияла на формирование общественных и научных взглядов Золотарева. Особенно сильное влияние оказал на молодого ученого его учитель П. Л. Чебышев, которого Золотарев высоко ценил. «В математике, — говорил он однажды в дружеской беседе, — найти и верно поставить вопрос несравненно труднее, чем его решить; как скоро вопрос поставлен и поставлен верно — решение его так или иначе отыщется. Пафнутий Львович отличается изумительной способностью и уменьем ставить новые вопросы в математике. Это умение ученого-математика. . . служит несомненным признаком его гениальности» [23, стр. 64—68].

14 марта 1869 г. приват-доцент Золотарев начинает сдавать магистерские экзамены. На первом экзамене — по чистой математике — ему были заданы следующие вопросы: о геодезической линии, об интегрировании иррациональных дифференциалов, об эллиптических функциях, о вариационном исчислении. В протоколе экзамена, написанном рукой Чебышева, сказано: «На все эти вопросы кандидат Золотарев отвечал удовлетворительно. *П. Чебышев*».[1]

4 апреля Золотарев сдает экзамен по механике. На вопросы «способ Гамильтона» и «вращательное движение около точки» его ответы также признаны удовлетворительными.

Сохранился протокол экзамена 11 апреля и ответ Золотарева на вопрос: «О вспомогательном множителе» [2] (такой же вопрос был задан на магистерском экзамене самому Чебышеву профессором Зерновым). Последний экзамен — по теории вероятностей — Золотарев сдает 12 апреля. Чебышев задал ему три вопроса: «о повторении событий», «закон Бернулли» и «способ наименьших квадратов» — и снова нашел ответы удовлетворительными.

Все лето Золотарев посвятил работе над магистерской диссертацией.

---

[1] ГИАЛО, ф. 14, оп. 3, д. 14798-а, л. 30.
[2] Там же, лл. 46—48.

Защита ее состоялась 7-го декабря 1869 г. Оппонентами были П. Л. Чебышев и Ю. В. Сохоцкий. Неофициальным оппонентом на защите выступил А. Н. Коркин. В отзыве об этой работе Чебышев писал, что диссертация магистранта Золотарева «О решении одного неопределенного уравнения третьей степени

$$x^3 + Ay^3 + A^2z^3 - 3Axyz = 1»$$

содержит результаты самостоятельных изысканий автора о квадратичных формах и приложение их к решению одного из замечательнейших уравнений в теории чисел.[3]

Среди черновых тетрадей Золотарева есть тетрадь с замечаниями по его магистерской диссертации.[4] Вскоре после защиты молодой магистр и его учитель и оппонент Коркин становятся друзьями и предпринимают ряд совместных работ. Об этом рассказывают их письма и совместные труды. Коркин, бывший на десять лет старше Золотарева, читавший ему некогда лекции, искренно восхищался талантом молодого ученого, верил в его творческие возможности и делал для Золотарева все, что было в его силах. Он представляет Золотарева в доценты, а затем в экстраординарные профессора, замещает его, чтобы он смог поехать в заграничную командировку, дает ему советы и поддерживает его начинания. В одном из писем Коркина читаем: «Милостивый государь, Егор Иванович! Я получил в последнем Вашем письме доказательство теоремы о единственности таблицы с определителями Δ, равными 0 или ± 1. Оно меня весьма обрадовало, потому что необыкновенно просто и изящно, я никогда не думал, чтобы доказательство этого предложения могло быть так просто» [254, стр. 282]. В конце письма Коркин снова вспоминает поразившее его доказательство: «Я не могу налюбоваться, если можно так выразиться, Вашим доказательством теоремы об U_n, так оно просто и остроумно».

О глубоком уважении Коркина к своему бывшему ученику свидетельствует и его «Записка»,[5] написанная вскоре после смерти Золотарева и содержащая краткий очерк его деятельности.

---

[3] Там же, л. 43. В ПСС Чебышева, т. 5, стр. 297 и в книге В. Е. Прудникова [25, 1-е изд., стр. 70] отзыв Чебышева приводится с опечаткой в записи уравнения.

[4] ААН, ф. 289, оп. 1, № 3 (Л.).

[5] ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 6663-а, л. 38—38 об., 41.

Александр Николаевич Коркин (1837—1908).

Е. И. Золотарев с таким же уважением относился к своему бывшему учителю А. Н. Коркину. Он часто обращается к нему за советом, предлагает на его одобрение планы своих работ. Из писем Золотарева Коркину мы узнаем, как менялся план его докторской диссертации. Последний вариант плана был одобрен Коркиным, желавшим, чтобы Золотарев скорее защитил эту диссертацию: «Кончайте скорее редакцию Вашей диссертации и представляйте в Университет. Как содержание, так и расположение выйдут великолепно. Вы хорошо сделали, что выпустили разложение радикалов в непрерывную дробь. Хотя оно и составляет весьма интересный предмет, но, кажется, Ваши результаты выходят из теории комплексных чисел более, чем из этого разложения. Оно может составить предмет отдельной статьи» [254, стр. 215].

Золотарев в одном из писем благодарит Коркина за лестный для него отзыв и сообщает, что также с нетерпением ждет того времени, когда будет в состоянии представить на его оценку свой труд полностью [254, стр. 213].

Бóльшая часть писем посвящена вопросам математическим. Но здесь же встречаются высказывания обоих ученых и по некоторым другим темам. Коркин сообщает [254, стр. 313], что в газетах нет ничего о преобразовании университетского устава, «видно этот вопрос отложен в долгий ящик и, следовательно, совсем стушуется, что и весьма желательно». Мнения Коркина и Золотарева по этому вопросу совпадали — оба были против таких изменений устава, которые могли бы ухудшить положение университетской науки.[6]

В письмах часто упоминаются мать и сестры Золотарева. Егор Иванович был очень привязан к своей семье. После смерти отца он стал ее единственной опорой. Каждое лето он вывозил семью на дачу и очень заботился о том, чтобы им там понравилось. Коркин находился в дружеских отношениях с родными Золотарева.

Из этих же писем мы узнаем о том, что Золотареву нравился Виктор Гюго. Он с большим удовольствием читал «93-й год» и другие его сочинения.

Несколько раз Золотарев вспоминает в письмах о своей знакомой. Кто она, неизвестно, но на основании письма

---

[6] Мнения Коркина и Золотарева об уставе см. также: ААН, ф. 101, оп. 1, ед. хран. 102, л. 31—31 об., 34—35 (Л.).

Коркина можно судить, что это молодая женщина, которая хотела учиться на Высших женских курсах [254, стр. 319].

Много труда отдали оба ученых делу популяризации русской науки. Оба участвуют в реферировании статей для «Jahrbuch» [7] в Русском энциклопедическом словаре И. Н. Березина. Оба были очень обеспокоены, когда киевский профессор В. П. Ермаков допустил ошибку в статье, опубликованной за границей [26]. Коркин писал по этому поводу: «Досадно будет, если кто-нибудь из немцев поправит это доказательство. Не перепишетесь ли Вы насчет этого с Ермаковым?» [254, стр. 188]. Ермаков по настоянию Золотарева и Коркина исправил впоследствии свою ошибку [27, 28, 29].

1 сентября 1873 г. Коркин доложил факультету: [8]

«В настоящее время вследствие нового распределения математических предметов, сделанного в мае настоящего года, аналитическая геометрия и часть интегрального исчисления остались без преподавателей. Так как эти предметы суть одни из главнейших и обязательных, является существенная необходимость поручить кому-либо их преподавание. Желательно, чтобы они по причине их важности читались штатными преподавателями . . .Я имею честь предложить факультету учредить штатную доцентуру, в особенности потому, что это не требует лишних расходов из специальных средств Университета, и баллотировать приват-доцента Золотарева на это место.

Несмотря на то что магистр Золотарев очень недавно начал свою ученую карьеру, он успел уже заявить себя в науке как один из способнейших ученых. По первым его работам («Об одном неопределенном уравнении третьей степени» [212], «Об одном вопросе о наименьших величинах» [211], в особенности по второй) можно было уже видеть его глубокие познания в анализе и искусство владеть им. Еще более показал он свои силы в последующих работах: „Sur la méthode d'intégration de M. Tchébycheff" [219], „Sur la loi de réciprocité de Legendre" [215] и „О функциях, встречающихся при

---

[7] См. гл. 10, стр. 122.

[8] ГИАЛО, ф. 14, оп. 3, д. 14813-б, л. 39—39 об., 84.

делении круга“ [217]. Наконец, приведу наши общие работы о квадратичных формах и о некоторых минимумах, напечатанные в трех статьях: „Sur les formes quadratiques positives quaternaires“ [214], „Sur les formes quadratiques (premier mémoire)“ [220], „Sur le certain minimum“ [223]. Все эти работы относятся к одним из самых трудных предметов, которыми занимались многие ученые, и содержат, кроме весьма многих новых результатов, новые методы для доказательства трудных предложений. Я надеюсь, что факультет примет во внимание ученые заслуги Золотарева и его преподавательскую деятельность в нашем Университете, где он читал в продолжение пяти лет по поручению факультета одну из весьма важных частей анализа, бывшую прежде обязательным предметом, а именно теорию эллиптических функций».

Золотарев был избран доцентом и затем утвержден в этой должности 25 февраля 1874 г.

28 IV 1874 Золотарев защищает в университете докторскую диссертацию «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению». Оппонентами были Чебышев и Коркин.

Они высоко оценили замечательный труд своего ученика. В статье о Чебышеве профессор К. А. Поссе вспоминал, как Чебышев начал свою речь на докторском диспуте Е. И. Золотарева.

«Ваша работа, — сказал он, — отличается от многих других тем, что в ней мы почти совсем не встречаем выражений вроде следующих: „это очень интересно, очень замечательно, очень важно“; а не встречаются они потому, что ваше исследование на самом деле очень интересно, замечательно и важно» [30].

Другой оппонент, Коркин, говорил: «Ваше сочинение представляет одно из самых замечательных явлений в математической литературе последнего времени. В нем Вы решаете два вопроса, на которых остановился анализ. Первый вопрос — распространение теории идеальных чисел Куммера, которая, как известно, была установлена для частного случая, на какие угодно комплексные числа, зависящие от корней уравнений с целыми коэффициентами. В первой части рассуждения Вашего Вы в первый раз дали полную теорию комплексных чисел и этим [с одной стороны] расширили область величин, составляющих предмет теории чисел, и, с другой — дали метод для их исследования. Ваша теория не имела бы, однако, такого значения, если бы она не была оправдана весьма важным приложением к интегральному исчислению, которое Вы [ей дали] во второй части Вашего рассуждения».[9]

В конце речи Коркин сказал: «Ученые тем более оценят эту часть Вашего труда, что из весьма немногих приложений теории чисел к исследованию функций Ваше приложение есть первое, где эта теория таким решительным образом входит в интегральное исчисление».

Через два года после защиты докторской диссертации Коркин представляет Золотарева в экстраординарные профессора [32, стр. 35—37]. 22 марта 1876 г. он был избран. Как видно из бюллетеня голосования, 34 голоса были за него и 1 против.

В университете Е. И. Золотарев проработал десять лет — с 1868 по 1878 г.

Первую лекцию он прочитал 17 октября 1868 г. для студентов III и IV курсов математического разряда по курсу теории эллиптических функций. Три первых года Золотарев читал теорию эллиптических функций по одной лекции в неделю для III и IV курсов математического разряда и дифференциальное исчисление по 2 лекции в неделю для I курса разряда естественных наук. По дифференциальному исчислению был издан литографированный курс.

В 1871/72 учебном году он читал теорию круговых и эллиптических функций (по 2 лекции в неделю) студентам математического разряда II курса.

Летом 1872 г. Золотарев впервые ездил за границу. Поездку решил начать с посещения Берлина. В Берлин он ехал через Варшаву, где повидался с местными математиками — М. А. Андреевским, Н. Н. Алексеевым и И. А. Востоковым.

В Берлин Золотарев попал во время каникул, поэтому лекций не застал. 11/23 мая первый раз слушал лекции Вейерштрасса и Куммера. Вейерштрасс читал теорию аналитических функций и вариационное исчисление, а Куммер аналитическую геометрию. «Куммер, действительно, читает превосходно. Он умеет говорить так, что

[9] ААН, ф. 289, оп. 1, № 11, л. 58—58 об. (Л.).

ни одно его слово не пролетит мимо ушей», — писал Золотарев Коркину [254, стр. 179]. О Вейерштрассе он ничего не писал.

В Лейпциге Золотарев передал Нейману (издателю журнала «Mathemat. Annalen») свои с Коркиным совместные статьи о квадратичных формах. В Гейдельберге он познакомился с профессором Кенигсбергером, читавшим в этом семестре теорию функций комплексного переменного. «Я был на нескольких лекциях; ничего особенного нет — все старенькое, известное. Гораздо интереснее лекции Кирхгофа из общей физики; хотя в этом курсе Кирхгоф сообщает только результаты опытов, но все-таки умеет заинтересовать слушателей. Так что я прослушал его лекцию с удовольствием» [254, стр. 180].

В Париже Егор Иванович перевел на французский язык две свои заметки: «Об уравнении $Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2=4X$» [217] и «О законе взаимности Лежандра» [215] для журнала «Nouvelles Annales».

В 1872/73 учебном году Е. И. Золотарев снова читал курс теории круговых и эллиптических функций студентам II курса (по 3 лекции в неделю). На следующий год ему поручили читать лекции по интегральному исчислению для студентов II курса математического разряда (по 3 лекции в неделю). В 1874/75 г. он продолжил чтение интегрального исчисления на III курсе и снова начал читать его студентам II курса. 1875/76 год ознаменован тем, что впервые в университете Золотарев начал вести упражнения по интегральному исчислению (на II курсе). Лекций было три часа, упражнений — час в неделю. Кроме того, он читал необязательный курс теории эллиптических функций для студентов III и IV курсов (математического разряда).

12 марта 1876 г. доцент Золотарев обратился в факультет с прошением о предоставлении ему командировки за границу. Он писал, что заграничная поездка предпринимается им с целью войти в сношения с некоторыми известными математиками и переговорить с ними о работах, приготовляемых им к печати. Кроме того, так как с этого года он начал заниматься со студентами практическими упражнениями по интегральному исчислению, то он хотел узнать ближе, каким образом ведутся практические занятия в некоторых из иностранных университетов.

На время командировки с 15 мая по 15 сентября обязанности Золотарева по университету согласились принять на себя профессора А. Н. Коркин и Ю. В. Сохоцкий.[10]

Попечитель доложил о просьбе факультета министру и поездка была разрешена. На этот раз путешествие началось с Парижа. О нем сохранились свидетельства Золотарева и Эрмита. Золотарев писал из Парижа Коркину: «Вскоре по приезде я увидел Эрмита в Institut'е. Он принял меня чрезвычайно любезно и расспрашивал о наших работах. Он был удивлен чрезвычайно, узнавши, что мы имеем доказательство точного передела минимума для форм с пятью переменными» [254, стр. 308—309]. В разговорах с Эрмитом Золотарев касался наиболее волнующих его математических вопросов. Интересна часть того же письма, в которой Золотарев передает мнение Эрмита о трудах немецкого математика Римана, выражая при этом мнение о нем петербургских математиков: «Разговор зашел, между прочим, об Абелевых функциях и о Римане. Насчет Абелевых функций Эрмит сомневается, чтобы мы когда-либо дошли до такого знакомства с ними, как с эллиптическими функциями, и отрицает значение Абелевых функций для теории чисел. Что касается Римана, то Эрмит его защищает. Лучшею работой Римана он считает обращение Абелевых функций. На мое замечание, что это было сделано и раньше Римана, он заметил, что Риман рассматривает интегралы от самых общих алгебраических функций, а до него рассматривались только интегралы от рациональных функций, содержащих корень квадратный из полинома некоторой степени. Кроме того, Эрмит привел одно замечание Римана относительно аргументов в эллиптических функциях. Вы видите, что защита довольно слабая, и мне кажется, что Эрмит отчасти защищает потому, чтобы не сказали, что он против немцев.[11] Это чрезвычайно добродушный и симпатичный человек. Он жалеет, что теперь пренебрегают теориею чисел и занимаются геометриею. Он также объясняет это, как и мы, трудностями теории чисел».

---

[10] ГИАЛО, ф. 14, оп. 3, 14817, л. 29.

[11] Золотарев ошибался в этом отношении. Эрмит очень ценил Римана. См., например, предисловие Эрмита к переводу на французский язык сочинений Римана (1898). Эрмит писал в нем: «L'oeuvre de Bernhard Riemann est la plus belle et la plus grande de l'Analyse à notre époque» [116, t. 4, pp. 563—566].

В другом письме Золотарев сообщает: «С Эрмитом вижусь почти каждый понедельник. Ему очень понравилось мое доказательство одной теоремы [12] относительно модулей эллиптических функций. . . Мне кажется, что Эрмит действительно увлекается теорией функций комплексной переменной. Я это заключил из тех вещей, которыми он думает теперь заняться, как он говорил. Он, действительно, слишком утомляется различными экзаменами; он даже должен поправлять различные задачи по тригонометрии. Поэтому понятно, что он выбирает для занятий вещи более легкие».[13]

Затем Золотарев сообщил план своей дальнейшей поездки: «Думаю в самом скором времени уехать из Парижа. Поеду в Швейцарию, потом в Лейпциг и Берлин. Сделаю визиты Кронекеру, Борхардту, Куммеру и Вейерштрассу. В конце августа думаю быть в Петербурге. Я еще думаю провести некоторое время в Либаве (там теперь моя знакомая)». Этот план был, видимо, осуществлен. Во всяком случае, визит Борхардту Золотарев нанес (об этом писал Борхардт) [33].

По возвращении из-за границы Золотарев, кроме прежних курсов, читал в университете «Дополнения к курсу интегрального исчисления» для II и III курсов (по 2 часа в неделю).

В 1877/78 учебном г. Золотарев приступил к чтению нового курса «Введение в анализ». Тогда же был издан литографированный курс того же названия. Он продолжал также вести интегральное исчисление (лекции и упражнения) на II курсе.

Золотарев был прекрасным преподавателем. У многих студентов он сумел вызвать живой интерес к творческой научной деятельности. Он помогал им советами, рассматривал их первые труды.

По свидетельству К. А. Поссе [34], И. Л. Пташицкий с особенной благодарностью вспоминал Е. И. Золотарева, который оказывал ему деятельную поддержку на первых шагах его научной деятельности [35, стр. 52]. Пташицкий (1845—1912) окончил университет в 1876 г. В год окончания университета он получил премию в 110 руб., учрежденную в память I съезда русских естествоиспытателей

---

[12] ААН, ф. 289, оп. 1, № 4, л. 214 (Л.).

[13] ААН, ф. 759, оп. 4, д. 84/2, лл. 7—8 об., письмо от 5/17 июля 1876 г. (Л.).

за сочинение «Об интегрировании алгебраических дифференциалов в конечном виде». Тема близка к работам самого Золотарева. В протоколах заседаний Совета Санкт-Петербургского университета [36] имеется подробный отзыв о ней. Возможно, что он написан Золотаревым.

В 1877 г. факультет предложил студентам тему по математике [37] «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей с приложением к уравнению $(1+x^2)\,\frac{dy}{dx}=n\,(1+y^2)$». За лучшие сочинения присуждались золотые и серебряные медали. Было представлено 8 сочинений. Отзывы о них написаны Золотаревым [38].

Особенно понравилось ему сочинение под № 11:

«В диссертации № 11-й автор поместил вместо девиза соотношение из теории непрерывных дробей. Эта диссертация содержит большею частью самостоятельные исследования автора, обнаруживающие его большие познания и талант к математическим исследованиям. В первой главе автор поместил вещи, не относящиеся собственно к теме, но на которые он ссылается в дальнейших местах своего рассуждения.

Здесь он выводит новый признак сходимости бесконечных непрерывных дробей и доказывает свойства корней некоторых алгебраических уравнений, имеющих связь с непрерывными дробями. Во II главе изложена метода Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей, а в следующей главе она приложена к заданному в теме примеру.

В главе IV и V рассматривается довольно общее дифференциальное уравнение I порядка, имеющее связь с известным уравнением гипергеометрического ряда. Автор находит разложение в непрерывную дробь интеграла этого дифференциального уравнения при помощи последовательных преобразований, выводит из этого разложения разнообразные следствия; между прочим, признаки существования рациональных интегралов для исследуемого уравнения.

Наконец, в последней главе автор снова обращается к уравнению, заданному в теме. Здесь он сообщает, следуя Борхардту, некоторые свойства корней знаменателей подходящих дробей для непрерывной дроби, выражающей частный интеграл предложенного уравнения.

Конечно, разбираемое сочинение, как содержащее самостоятельные изыскания, не могло бы быть без недостатков. Так, в главе IV и V автор не только не изучил, но и не указал на связь, существующую между дифференциальным уравнением, на котором он остановился, и известным уравнением гипергеометрического ряда. Кроме того, некоторые места его сочинения утомительны для чтения вследствие недостатков в изложении; но нельзя не сказать, что вообще изложение автора отличается строгостью и точностью. Без сомнения, в ряду студентов по математике, награжденных в различное время медалями, рассуждение № 11 займет видное место. По сим соображениям автор диссертации ст. 4-го курса Андрей Марков удостоен награды золотой медалью».[14]

Отзывы о других сочинениях более кратки. Сочинение Николая Артемьева также было удостоено золотой медали. Оно называлось «О непрерывных дробях, получаемых из гипергеометрического ряда». Серебряные медали получили Николай Ливанов, Евгений и Аркадий Борисовы. Трое получили почетные отзывы.

Имя Маркова встречается в протоколах в связи с Золотаревым еще раз — в протоколе заседания факультета 31 мая 1878 г. На нем было зачитано заявление профессора Золотарева и постановлено ходатайствовать перед Советом о продолжении стипендии Дымана Андрею Маркову еще на один год с 1 июля.[15] Золотарев на этом заседании не был.

29 сентября того же года, уже после смерти Золотарева, профессор Коркин ходатайствовал об оставлении Маркова, Артемьева, Ливанова, обоих Борисовых и Селиванова при университете. Предложение это было принято единогласно.[16]

---

[14] [38, стр. 83—84]. В ААН, ф. 289, оп. 1, № 7, л. 156 (Л.), черновики отзывов, написанные Золотаревым; текст их несколько отличен от печатного (Л.).

[15] ГИАЛО, ф. 14, оп. 3, д. 15262, л. 17.

[16] Там же, л. 19 об.

Андрей Андреевич Марков в автобиографии говорит: «Из университетских профессоров М[аркова] следует упомянуть П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева и в особенности А. Н. Коркина. Последние два в бытность М[аркова] студентом университета, кроме обычных лекций, посвящали особые часы разнообразным задачам, решение которых в аудитории и на дому предоставлялось самим студентам» [39, стр. 16—18].

Приведем некоторые сведения об учениках Е. И. Золотарева.

А. А. Марков (1856—1922) уже через два года после окончания университета защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», являющуюся одним из лучших достижений петербургской математической школы. Тогда же (в 1880 г.) стал приват-доцентом университета. С Петербургским университетом была связана затем вся его жизнь. В 1886 г. избран экстраординарным профессором (позднее — ординарным) и адъюнктом Академии наук (позднее — академиком). Наибольшей известностью пользуются его замечательные работы по теории вероятностей и теории квадратичных форм. А. А. Марков был не только выдающимся ученым, но и одним из наиболее передовых людей своего времени.

Александр Васильевич Васильев (1853—1929), сын известного ученого-китаеведа, также получил золотую медаль за сочинение «Об отделении корней». Окончив университет в 1874 г., он вместо поездки за границу для подготовки к профессорскому званию, на которую мог претендовать, решил вернуться в Казань, чтобы в своем родном городе возможно скорее начать трудиться на благо своей родины. Став профессором Казанского университета, Васильев являлся горячим пропагандистом идей Лобачевского, одним из основателей Казанского математического общества, автором многих книг и статей. Он знакомил читателей с новейшими достижениями математики и с ее историей.

Иван Львович Пташицкий (1854—1912) позднее был профессором университета. Он читал лекции в Михайловской артиллерийской академии и в Михайловском училище. В университете читал аналитическую геометрию, приложения интегрального исчисления к геометрии, теорию эллиптических функций, начертательную геометрию. С 1908 г. — заслуженный профессор университета.

Братья Евгений Васильевич и Аркадий Васильевич Борисовы (Евгений Васильевич родился 28 февраля 1854 г., Аркадий Васильевич — 10 октября 1856 г.) оба окончили 1-ю Петербургскую гимназию и в 1874 г. поступили в Петербургский университет. За сочинения на тему, данную факультетом, оба были награждены серебряной медалью, а после окончания университета оставлены при нем. Е. В. Борисов преподавал математику во 2-й Петербургской прогимназии. После защиты магистерской диссертации «О приведении положительных квадратичных форм по способу Зеллинга» (связанной с трудами Золотарева) в 1891 г. стал преподавать в университете. О диссертации его Марков писал: «Магистерская диссертация Е. В. Борисова может служить новым доказательством того, как трудолюбиво и серьезно относится он к научным вопросам. Тот, кто как мой покойный брат, займется изучением положительных тройничных квадратичных форм, будет весьма благодарен Е. В. Борисову за составленные им таблицы приведенных форм и за обстоятельное объяснение способа составления подобных таблиц» [35, стр. 35]. Е. В. Борисовым написано несколько учебников, статьи. Он преподавал также в Константиновском артиллерийском училище, был членом Петербургского математического общества.

Об А. В. Борисове известно, что он преподавал аналитическую механику с 1882 г. в Институте гражданских инженеров.

Николай Федорович Ливанов родился в 1854 г. в семье священника. После окончания университета был оставлен при нем. В январе 1879 г. назначен был преподавателем математики в 4-ю прогимназию и в том же году — сверхштатным консерватором кабинета практической механики в университете. В 1881 г. он должен был поехать за границу, но в начале того же года умер. (Это он сообщил А. Н. Коркину о смерти Золотарева).

Дмитрий Федорович Селиванов (1855—1932) также был оставлен при университете в 1878 г. В 1885 г. защитил магистерскую, а позднее докторскую диссертацию (последнюю при Московском университете). Много лет преподавал в Петербургском университете, в Технологическом институте и на Высших женских курсах. Член Петербург-

Андрей Андреевич Марков (1856—1922).

ского математического общества. Им написан ряд литографированных курсов, учебников, статей.

Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918), поступивший в университет в 1876 г., вспоминал впоследствии о «блестящих лекциях» Золотарева, которого он слушал в университете [40, стр. 314—315].

Сохранилось несколько литографированных курсов лекций Золотарева, читанных им в Петербургском университете.

Курс «Дифференциальное исчисление» [233] не датирован, но можно отнести его издание к 1870—1871 г., когда Золотарев читал студентам разряда естественных наук в университете дифференциальное исчисление. Вначале автор говорит о необходимости знакомства с математикой для представителей естественных наук. Лекции напоминают часть современного курса высшей математики для технических вузов. Они начинаются с определения переменной и постоянной величин и понятий функции и независимой переменной. Определения сопровождаются примерами из геометрии и механики. Сразу же вводится и понятие функции нескольких переменных. Потом автор определяет алгебраические и трансцендентные действия, относя к алгебраическим шесть действий алгебры и решение уравнений. В примечании он говорит: «Решение уравнений составляет особенное алгебраическое действие потому, что для решения уравнений первых четырех степеней, имеющих общие виды: a) первой степени: $ax+b=0$, b) второй степени $ax^2+bx+c=0$, c) третьей степени: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, d) четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+$ $+dx+g=0$, имеются общие формулы, в которые входят шесть алгебраических действий; уравнения же пятой степени $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+gx+h=0$ и вообще уравнения высших степеней, как показал шведский математик Абель,[17] не могут быть решены помощью общих формул, а корни их вычисляются рядом особенных действий» [233, стр. 1—2]. «Переходя к рассмотрению трансцендентных действий, нельзя дать точного определения и числа их перечесть невозможно; поэтому все трансцендентные действия определяются как действия, не подходящие под определение алгебраических действий. При этом необ-

[17] Золотарев ошибочно назвал норвежца Абеля шведским математиком.

ходимо сделать оговорку: многие трансцендентные действия, как мы впоследствии увидим, можно заменить алгебраическими, повторенными бесконечное число раз, подобно тому, как иррациональное количество приближается рядом бесконечных десятичных дробей». Далее производится разбиение всех функций на алгебраические и трансцендентные, а алгебраических — на рациональные (целые и дробные) и иррациональные.

Затем рассматривается понятие непрерывности (до введения понятия предела). Золотарев, начиная с пояснения этого понятия, пишет: «Переменная величина называется вообще непрерывною между некоторыми пределами, если она переходит от начального значения к конечному через все промежуточные значения. Относительно функции говорят, что она непрерывна, если с непрерывным изменением независимой переменной переходит от начального значения к конечному через все промежуточные величины» [233, стр. 10].

Приведены два примера: разрез реки, где глубина увеличивается постепенно, проходя через все промежуточные значения, и другой, где глубина в одном месте изменяется внезапно, обрывом, — как примеры понятий непрерывности и разрыва.

После этого предварительного рассуждения Золотарев дает строгую математическую формулировку понятия непрерывности функции в точке x: рассматривает приращения независимой переменной h и функции $k=f(x+h)-f(x)$, «если теперь станем h последовательно уменьшать до нуля и в этом случае k будет тоже стремиться к нулю, то функция $y=f(x)$ непрерывна». Затем следуют примеры непрерывных и разрывных функций. В качестве приложения понятия непрерывности автор отделяет корни уравнения $x^5-7x+1=0$.

Теорема Коши, на которой основано отделение корней, не формулируется, а используется как очевидное следствие непрерывности функций. После вопроса о геометрическом представлении функции автор переходит к изложению аналитической геометрии на плоскости и в пространстве (примерно в современном объеме курса втуза). Только после этого он переходит к главе «О пределах». Даются определения предела и бесконечно малой величины, свойства пределов, основные теоремы о пределах, говорится о порядках бесконечно малой величины, затем рассматриваются приложения теории к проведению касательных и к вычислению площадей. Площадь фигуры вычисляется непосредственно (без введения понятия и символа определенного интеграла) как предел суммы площадей прямоугольников. Последняя глава посвящена дифференцированию. Рассматривается дифференцирование простых и сложных функций от нескольких переменных. Глава заканчивается вопросом об убывании и возрастании функций.

Интересный курс «Введение в анализ» [237] Золотарев прочел всего один раз (1877/78 учебный год). В том же году курс был издан дважды литографским способом. Издания несколько отличаются друг от друга. В первом издании имеется «Программа для экзамена», являющаяся в то же время перечнем содержания книги. В курс входили: отношения по Евклиду, определение иррационального числа как предела, радикалы, логарифмы, мнимые величины и формула Муавра, формулы для синусов и косинусов кратных дуг, вывод формул для различных степеней синуса и косинуса простой дуги, число e и его разложение в ряд, обобщение тригонометрических и показательной функции для мнимых аргументов, обратные тригонометрические функции и их обобщение для мнимых аргументов, числовые ряды с положительными членами и знакопеременные, признаки сходимости рядов, обобщение отрицательных и дробных показателей и приложение биноминального ряда к извлечению корней, разложение в бесконечные ряды функций e^x, $\sin x$, $\cos x$.

В конце давались приложения рядов к вычислению логарифмов и арктангенса и формулы для вычисления числа $\frac{\pi}{4}$. Для вычисления $\frac{\pi}{4}$ Золотарев применяет способ Эйлера, как более удобный.

Золотарев не только руководил научной работой студентов, он часто снабжал их книгами из своей библиотеки, а в случае нужды помогал им найти работу. Об этом пишет Коркин. Об этом же говорится в письме Николая Ливанова [41, стр. 342—343]: «Много потерял наш факультет в лице этого профессора. Многим из нас, молодых людей, он был неоценимо дорог. Он обещал также и меня устроить в Петербурге, но не успел. Без него я пробовал просить места у Яновского, но слишком много затруднений представляется для получения места. . .».

Е. И. Золотарев участвовал также в защитах диссертаций, в заседаниях факультета, в приеме экзаменов. Им написан отзыв о докторской диссертации Д. К. Бобылева по физике.[18]

В последний раз имя Золотарева упоминается в протоколах Совета в речи профессора М. И. Горчакова, читавшего отчет на торжественном акте 8 февраля 1879 г. [42, стр. 64—68]: «Ученые труды Золотарева с уважением ценились Университетом, его сотрудниками и друзьями по науке и, в частности, его знаменитым учителем профессором Чебышевым. Преподавательская деятельность, которой покойный Золотарев предавался с увлекательным воодушевлением, отличавшим его молодую, живую и благородную натуру, по содержанию своему вполне соответствовала его талантливой и солидной учености». Более подробно и точно говорит о деятельности Золотарева в университете Коркин в уже упоминавшейся записке (стр. 26, прим. 5).

В Институте инженеров путей сообщения [43, 44]

Когда ординарный профессор О. И. Сомов, преподававший в Институте инженеров путей сообщения с 1848 г. математику, а после смерти М. В. Остроградского аналитическую механику, подал прошение об увольнении его от службы при институте по болезни, на вакантное место был предложен Золотарев. Рекомендовал его профессор Коковцев, сослуживец Золотарева по Строительному училищу. Золотареву было предложено прочитать пробную лекцию на тему «Общая теория движения системы точек и закон живых сил для этой системы».[19] Заслушав лекцию, конференция института решила: «Не открывая конкурса на кафедру аналитической механики, баллотировать в настоящем же заседании конференции г. Золотарева на должность временного преподавателя аналитической механики. . .».[20] Золотарев был избран единогласно. Ему было поручено чтение лекций по аналитической механике на III курсе по 4 часа в неделю. Содержание назначено было по 100 рублей в месяц. 20 октября следующего 1870 г. он был утвержден в должности преподавателя аналитиче-

[18] ГИАЛО, ф. 14, оп. 3, д. 14821, л. 22—22 об.
[19] ГИАЛО, ф. 381, оп. 1, д. 162, лл. 136 об.—137.
[20] Там же, лл. 144—145, 154 об.

ской механики в институте с 15 августа с жалованьем 1200 рублей серебром в год.

Как и другим преподавателям и студентам института, Золотареву приходилось выполнять все распоряжения институтского начальства. Среди них было и такое: [21] «Прошу всех гг. служащих в Институте по совершении ими в настоящем Великом посту говения по обрядам своей религии доставить в канцелярию Института свидетельство об исповеди и святом причастии от священника или пастора. За сим же гг. служащие Института, которые будут говеть в церкви Института путей сообщения, не обязываются представлять означенных свидетельств». Вообще религия здесь почиталась. Главный наблюдатель за преподаванием закона божия хвалил институт.[22] Университет же, напротив, заслужил порицание главного наблюдателя митрополита Санкт-Петербургского [45].

Правила для учащихся в институте были очень строгие. Особенно жестким было «Положение о взысканиях».[23] Приведу выдержки из него. «§ 19. За подпись под объявлением, жалобой или прошением, поданными от лица нескольких учащихся, виновные подвергаются увольнению или удалению из Института... § 21. За неповиновение начальству, оказываемое сообща несколькими учащимися или за нарушение порядка в помещениях Института сообща шумом, криком или иными действиями зачинщики и подстрекатели подвергаются исключению из Института, а менее виновные — увольнению, удалению или выговору. . .».

«Правила» и «Положение о взысканиях» были приняты в 1869/70 г., как раз к началу работы Золотарева в институте. Состав студентов к этому времени стал довольно пестрым. По положению 1864 г. в институт могли поступать и не дворяне. К ним, в основном, и были обращены новые правила.

Каждый год Золотарева включали в комиссию по приему в институт. В 1870 г. в связи с большим набором было открыто еще одно, параллельное, отделение I курса. Читать математику в нем поручили Золотареву, добавив

---

[21] Там же, д. 196-б., л. 4.
[22] ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 164, л. 9.
[23] ГИАЛО, ф. 381, оп. 1, д. 163, лл. 8—11; д. 162, лл. 174—180, правила.

к содержанию 125 рублей в год. В 1870/71 г. у Золотарева была очень большая нагрузка в институте: в сентябре он прочитал 5 лекций, в октябре 17, в ноябре 34, в декабре 32, в январе 1871 г. — 35. В 1871 г. уволился по болезни профессор И. С. Янушевский и Золотареву пришлось взять и его часы по математике. Жалованье в связи с этим было увеличено до 1500 рублей в год. Егор Иванович очень уставал, жалел, что зимой не может заниматься научной работой, но большая семья требовала средств и он продолжал работать в трех местах.

Среди поступивших в институт в 1871 г. был выпускник Новгород-Северской гимназии Николай Кибальчич. Он успешно сдал приемные экзамены и был зачислен в параллельное отделение I курса, где математику читал Золотарев. С III курса он перешел в Медико-хирургическую академию. Дальнейшая судьба этого выдающегося революционера и мыслителя хорошо известна.

В 1872 г. Золотарева освободили от части лекций по математике на I курсе, передав их К. А. Поссе. Но зато ему пришлось теперь читать механику и второму, параллельному отделению III курса. Жалованье его было увеличено до 1700 руб. 30 сентября 1874 г. он был избран экстраординарным профессором института. В 1876 г. Золотарев просил освободить его от преподавания высшей алгебры в параллельном отделении I курса (от аналитической геометрии он освободился раньше). В дальнейшем он читал только аналитическую механику в параллельном отделении III курса. После смерти Е. И. Золотарева аналитическую механику читал Д. К. Бобылев.

С содержанием лекций, прочитанных в институте Золотаревым, можно ознакомиться по его литографированным курсам.

«Лекции высшей алгебры», изданные в 1874/75 г. [236], начинаются с некоторых замечаний о предмете высшей алгебры и замечаний исторического характера. Золотарев говорит о роли Абеля, доказавшего, что «формул для решения общих уравнений степеней выше четвертой. . . быть не может». Знакомство с алгеброй читатель начинает с рассмотрения мнимых чисел. Затем вводится понятие комплексного числа $a+bi$ и рассматриваются действия над этими числами. Так как извлечение корня из комплексного числа связано с решением двучленных уравнений, автор переходит к этой теме. Подробно рассмотрены методы решения уравнений третьей и четвертой степени. Затем Золотарев излагает свойства многочленов, в том числе свойство, что уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, имеет хоть один корень α в промежутке (a, b), если $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков. В качестве дополнения дан способ Декарта решения уравнения четвертой степени. После этого излагается вопрос о разложении многочленов на множители, о зависимости между коэффициентами и корнями многочлена, способ определения общего наибольшего делителя двух многочленов и отделение кратных корней. Интересен раздел о преобразовании уравнений. «Преобразовать уравнение значит из данного уравнения $f(z)$ [$=0$] вывести новое, корни которого находились бы с корнями данного в известной зависимости. Здесь будет самый простой случай, когда каждый корень у требуемого уравнения выражается рациональной функцией корня данного уравнения, т. е. функцией, равной частному двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$». Примеры преобразований: «По данному уравнению составить новое, корни которого превышали бы корни первого на некоторое число h, положительное или отрицательное», т. е. в уравнении $f(z)=0$ делается замена $y=z+h$ и рассматривается новое уравнение $f(y-h)=0$. Оно получается двумя способами (второй — с помощью формулы Тейлора). Другой пример: замена $y=\alpha z$. Затем Золотарев переходит к определению пределов вещественных корней многочлена, отделению корней по способу Штурма и способу Ньютона, исправленному Фурье, для вычисления корней. Заканчивался курс вопросами исключения неизвестных из системы уравнений по способу Безу. В книге 172 страницы. Она значительно меньше «Курса» Коркина для университета и сильно отличается от него по содержанию. Заметим, что ни «Курс» Коркина, ни «Лекции» Золотарева не упоминаются в большом обзоре А. К. Сушкевича «Материалы к истории алгебры в России», напечатанном в Историко-математических исследованиях [179], хотя оба выдающихся ученых оказали большое влияние на русскую математику. Особенно важен курс лекций Коркина, много лет преподававшего в Петербургском университете.

Следующий литографированный курс «Аналитическая геометрия. Лекции профессора Е. И. Золотарева» [234] не датирован. Но так как Золотарев читал аналитическую геометрию в Институте инженеров путей сообщения в 1870/71 учебном году (а в университете никогда не читал ее), то лекции относятся к этому же времени.

Лекции начинаются следующим вступлением: «Аналитическая геометрия занимается изучением свойств протяжений всех трех родов (линий, поверхностей и объемов) при помощи анализа и отличается, следовательно, от синтетической геометрии, т. е. геометрии древних, только своим методом. Математический анализ дает несколько средств для решения геометрических задач. Мы прежде всего и больше всего будем пользоваться уравнениями, впоследствии же обратимся к помощи дифференциального исчисления». Как пример решения геометрических вопросов с помощью уравнений Золотарев рассматривает задачу: «Из данной точки C провести секущую к данному кругу так, чтобы хорда AB имела длину c». Решив задачу, автор делает вывод: «В каждой задаче, подобно тому как в предыдущей, будут данные и неизвестные величины; выражая связь между ними, мы получим уравнение, решение которого и определит неизвестную величину. Может случиться, что получится несколько решений, тогда мы должны исследовать, которые из решений соответствуют вопросу и которые надо отбросить. При этом отброшенные решения могут быть очень полезны, ибо они могут соответствовать решаемой задаче, только при иных условиях» [234, стр. 3—4].

В этом курсе излагалась только геометрия на плоскости. После введения координат на прямой и на плоскости и решения простейших задач методом координат Золотарев переходит к формулировке основных задач аналитической геометрии: «1) когда фигура определена геометрически, найти ее уравнение, 2) построить фигуру, выраженную уравнением, и, наконец, 3) отыскать зависимость между геометрическими свойствами фигур и аналитическими свойствами уравнений этих фигур». Автор рассматривает вывод уравнений окружности, циссоиды, лемнискаты, конхоиды (имеющих алгебраические уравнения разных степеней) по их геометрическим определениям и строит график трансцендентной кривой — синусоиды. После примеров он приступает к систематическому изучению прямой. Рассмотрев затем вопрос о преобразовании координат, Золотарев переходит к теории кривых второго порядка, сначала излагая общую теорию, потом частные случаи. Для каждой из кривых второго порядка рассматриваются задачи: построить касательную к кривой из данной точки (для различного расположения точек). В заключение кривые второго порядка рассматриваются как конические сечения. В курсе даны задачи для самостоятельного решения (в конце разделов). Следующий раздел посвящен приложениям дифференциального исчисления к геометрии (касательные и нормали, асимптоты, выпуклость и вогнутость кривой, кривизна, эволюта). Вывод условий выпуклости и вогнутости делается, как и сейчас, с помощью формулы Тейлора. В курсе много хорошо подобранных примеров, исторических замечаний. В нем 237 страниц. Мы знаем, что Золотарев слушал аналитическую геометрию у Цветкова, однако их курсы совершенно различны.

«Лекции аналитической механики, читанные в Институте инженеров путей сообщения профессором Золотаревым», издал студент В. Машевский [235]. Курс состоит из нескольких частей: «Статики», «Динамики материальной точки» и «Динамики системы». Первое известное нам издание этого курса вышло в 1873/74 г. В 1874/75 г. была издана в переработанном виде основная часть материала этого курса. В последующие годы курс переиздавался. Золотарев определяет аналитическую механику как приложение анализа к исследованию законов равновесия и движения тел. Условия равновесия сил, приложенных к неизменяемой системе, т. е. к твердому телу, по словам Золотарева, были изложены раньше. В этом курсе выводятся общие условия равновесия сил, приложенных к произвольной системе материальных точек. Есть раздел «Гидростатика» с рядом интересных примеров. В динамике точки давались понятия абсолютного и относительного движения. Формулировались основные начала динамики. Затем рассматривалось прямолинейное и криволинейное движение, движение точки в среде с сопротивлением, движение точки по поверхности, движение точки, остающейся на данной кривой, различные виды маятников. Подробно изложена динамика системы. Говорилось об устойчивом равновесии плавающего тела, об ударе тел, о различных видах вращательного движения твердого тела, в частности о вращении твердого тела около неподвижной точки. В следующие издания некоторые разделы не вошли, расположение материала другое.

Об этом курсе Золотарева и о преподавании им аналитической механики в Институте инженеров путей сообщения не упоминается в обзорах развития механики в России в 19 веке [180—183]. Сохранившиеся курсы аналитической механики О. И. Сомова и Д. К. Бобылева [184—186] значительно отличаются от курсов Золотарева.

Золотарев в Академии наук [46, 47]

Впервые имя Золотарева встречается в изданиях Академии наук в связи с его заметкой «Note relative à une formule de m. Liouville» [213], посвященной доказательству одной формулы Лиувилля с помощью некоторых соотношений между эллиптическими функциями. Ее представил академик Сомов.

Пятого октября 1876 г. Е. И. Золотарев был представлен в адъюнкты Академии наук по части прикладной математики. К этому времени в физико-математическом отделении было два академика по чистой математике: ординарный академик В. Я. Буняковский (1804—1889) и экстраординарный академик Д. М. Перевощиков (1790—1880), а по прикладной математике один — ординарный академик П. Л. Чебышев. Представление писал П. Л. Чебышев. Оно приложено вместе со списком трудов Золотарева к § 244 протокола заседания физико-математического отделения Академии наук за 1876 г.[24]

Приводим этот документ полностью.

В физико-математическое отделение императорской С.-Петербургской Академии наук

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В нынешнем году отделению нашему суждено было перенести весьма чувствительную потерю: в лице Иосифа Ивановича Сомова мы потеряли ученого, соединявшего в себе обширные и глубокие познания по двум отраслям математики — по чистому анализу и по аналитической механике. Последняя наука особенно много ему обязана, и большая часть мемуаров, читанных им в Академии наук, принадлежит этой части

[24] ААН, ф. 2, оп. 17, № 50, лл. 1—4 (Л.).

прикладной математики. В настоящее время, за смертью М. В. Остроградского и И. И. Сомова, в нашей Академии нет никого специально занимающегося аналитической механикой, так как в разряде прикладной математики мы имеем только одного члена, всецело посвятившего себя практической механике. Такой пробел в личном составе нашего отделения должен быть пополнен безотлагательно, и это может быть сделано вполне удовлетворительно избранием в члены его доктора математики, профессора С.-Петербургского университета и Института Корпуса инженеров путей сообщения Егора Ивановича Золотарева, который, подобно бывшему нашему достославному академику И. И. Сомову, представляет в себе также замечательное соединение познаний по чистой математике и по аналитической механике и которому наука уже обязана многими весьма важными трудами, доставившими его имени лестную известность и у нас и за границей. Эти труды, которых список при сем прилагается, служат достаточным ручательством, что Е. И. Золотарев может заменить И. И. Сомова, подобно тому, как он заменил его по должности профессора аналитической механики в Институте Корпуса инженеров путей сообщения и в нашем Университете, где ему препоручено было дочитать курс динамики, начатый нашим академиком.

Мы не будем входить в подробности относительно всех опубликованных доселе работ Е. И. Золотарева, хорошо известных всякому занимающемуся чистой и прикладной математикой. Мы считаем достаточным обратить внимание отделения на то, что эти работы обнимают собой не только весьма важные и особенно трудные части математического анализа и аналитической механики, но также касаются вопросов, имеющих тесную связь с практической механикой: сочинение г. Золотарева, представленное им для защищения pro venia legendi, под заглавием «Об одном вопросе о наименьших величинах» [211] заключает в себе полное решение вопросов, которые по трудности своей оставлены были без решения одним из нас в мемуаре под названием «Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes» (Mémoires des savants étrangers, t. VII) [48].

На основании вышеизложенного мы надеемся, что отделение признает г. Золотарева достойным избрания в адъюнкты по части прикладной математики.

Академик *Чебышев*
Академик *В. Буняковский*
Академик *Савич*
Академик *Д. Перевощиков*

Золотарев был утвержден в звании адъюнкта с 3 декабря 1876 г. 4 марта 1877 г. он впервые присутствовал на заседании общего собрания Академии, а 8 марта — на заседании физико-математического отделения. Уже со следующего заседания (5 апреля) он активно включился в деятельность Академии: представляет и читает свою работу «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наиболее и наименее отклоняющихся от нуля» [227]. В протоколе этого заседания сказано: «В этом труде предложено решение при помощи эллиптических функций четырех задач, составляющих новое приложение этих функций к алгебре». Решено было напечатать этот труд в «Записках» Академии, а извлечение из него — в «Бюллетене» [49]. На этом же заседании академик Е. И. Золотарев по приглашению членов математического разряда принял на себя составление статьи о жизни и ученых трудах покойного академика О. И. Сомова для прочтения ее на торжественном заседании Академии 29 декабря 1877 г. Кроме того, новому академику поручили рассмотреть записку коллежского асессора Воеводского «Об общем способе уничтожения трех членов в уравнениях 6-й, 5-й и всех высших степеней».

Е. И. Золотарев, заменив в Академии Сомова, продолжил здесь традиции Остроградского и Сомова. Он стал их преемником и в Институте инженеров путей сообщения. В университете Золотарев закончил чтение курса механики, начатого Сомовым, а в 1877 г. редактировал 2-й выпуск 2-й части его же курса «Рациональная механика» [194].

В том же 1876 г. был избран членом-корреспондентом Академии и Дмитрий Иванович Менделеев.

На следующем заседании 19 апреля Золотарев прочел «донесение» о записке Воеводского. По-видимому, отзыв был неблагоприятным, так как печатать эту записку не стали. На заседании 3 мая Чебышеву и Золотареву было передано «письмо г. Корденонса из Ровиго от 29 апреля с приложенными к нему: 1) печатным мемуаром о воздухоплавании, 2) тремя чертежами предлагаемого им воздушного корабля, 3) письмом к нему г. Офенгейма из Вены».

Рассмотрев все эти материалы, Золотарев и Чебышев доложили на следующем заседании, что «из этих сообщений не видно, чтобы г. Корденонсу удалось хоть сколько подвинуть вперед вопрос о воздухоплавании. Из его статей видно только, что он успел сделать машинку, действующую амониакальным газом, силою в пол-лошади, весом в 85 кг, и крылья, длиною в 3 м, весом в 15 кг, достаточно крепкие при употреблении двигателя в поллошади. Считая возможным вес своей машинки уменьшить более чем вдвое, г. Корденонс думает, что она будет достаточна для того, чтобы двигать при помощи крыльев аэростат[25] по всякому направлению в горизонтальной плоскости, а также и по вертикальному направлению.

«При этом, очевидно, г. Корденонс упускает из виду, что работа, необходимая для движения аэростата против ветра, потребует гораздо более, чем силу полулошади. До какой степени он ошибочно понимает затруднение, представляющееся при воздухоплавании против ветра, видно из того, что он прямо высказывает мнение, будто сопротивление, встречаемое аэростатом при движении, будет одно и то же, будет ли сообщено аэростату движение по направлению ветра или против ветра.

«На основании вышеизложенного академики полагают, что работы г. Корденонса по воздухоплаванию не заслуживают внимания Академии» [50].

На заседании 31 мая Золотареву были переданы две записки доктора математики Гельсингфорского университета Бонсдорфа: «Über das Polarsystem einer Curve dritter Ordnung», «Über die Entwickelung von einigen Covarianten der binären Formen». Кроме того, академик О. В. Струве на этом же заседании представил от имени наблюдателя при Дерптской обсерватории Баклунда записку под заглавием «Zur Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $1-2yU+y^2$». Записку было решено передать для рассмотрения Струве и Золотареву. На полях протокола запись: «Е. И. Золотареву, 2 мая, 1877, № 1143». Следующее заседание состоялось уже после летнего перерыва, 23 августа

[25] В протоколе записано всюду вместо «аэростат» «ареостат».

1877 г. Рассмотрев по поручению Отделения работы профессора Бонсдорфа, Золотарев доложил,что «в одной из них («Über das Polarsystem einer Curve 3. Ordnung») автор сообщает свое решение весьма важной задачи в теории кривых 3-го порядка; его решение основано на теории ковариант тройничной кубичной формы и представляет особый интерес. Во второй записке («Über die Entwickelung von einigen Covarianten der binären Formen») ученый профессор развивает некоторые формулы, при помощи которых можно одни ковариaнты бинарных форм выразить через другие, и прилагает их к примерам». Обе записки было решено напечатать в «Бюллетене» [51, 52].

Подробного отзыва о работах Баклунда в протоколах нет. Сказано только, что Золотарев на заседании 13 сентября от имени своего и академика Струве предложил напечатать эту статью в «Бюллетене» [53].

23 августа Золотареву передали на отзыв еще одну работу — статью профессора Дерптского университета Миндинга о некоторых изопериметрических задачах («Über einige isoperimetrische Aufgaben»). На заседании 13 сентября Золотарев доложил, что «в этой записке рассматриваются некоторые частные случаи известной задачи вариационного исчисления: „Найти на данной поверхности кривую данной длины, окружающую наибольшую поверхность“. Эти случаи именно те, когда данная поверхность есть шар и когда часть контура состоит из данных кривых. Г. Миндинг уже не в первый раз занимается вопросами этого рода. Его предыдущая работа (Bulletin de l'Académie, t. 21) посвящена тому же вопросу вариационного исчисления. В конце настоящей записки г. Миндинг упрощает вывод уравнения искомой кривой, данный в предыдущей работе. Кроме того, весьма интересен найденный им результат, что к тем же кривым можно прийти, разрешая следующую механическую задачу: „Определить на данной поверхности кривую, по которой расположится однородная гибкая и нерастяжимая нить, закрепленная в своих концах, если на элементы этой нити будут действовать силы, перпендикулярные к ним и лежащие в касательных плоскостях к поверхности“. Конечно, математики прочтут настоящее исследование г. Миндинга с таким же вниманием, каким пользуются и другие труды этого известного ученого». Труд профессора Миндинга был напечатан в «Бюллетене» [54].

Со времени сообщения Золотаревым о его работе [227] прошло 5 месяцев. 13 сентября 1877 г. он представил новую работу «Sur les nombres complexes» [229], которая была напечатана в Бюллетене. Золотарев подготовил ее по материалам большой статьи, переданной им в июле 1876 г. издателю журнала Лиувилля — Резалю. Большая статья еще не была опубликована. Ее напечатали лишь в 1880 г., после смерти Е. И. Золотарева [232].

Летом 1877 г. Золотарев подготовил статью о деятельности О. И. Сомова, которую должен был читать на годичном собрании Академии 29 декабря. В письме Коркину 12 июня 1877 г. Золотарев сообщает: «В последнее время я обдумываю записку о Сомове. Приходится просматривать различные его сочинения. Из них самые лучшие — „Теория эллиптических функций" и мемуар о малых колебаниях» [254, стр. 315—316]. Записка о Сомове [231] была представлена Золотаревым 14 декабря 1877 г. Но на годичном собрании прочитать эту записку Золотареву, видимо, не пришлось: речь по случаю столетнего юбилея Александра I читал М. И. Сухомлинов [55], а К. С. Веселовский читал отчет за 1876—1877 г.

О записке Хвольсона, посвященной задаче магнитной индукции («Über das Problem der magnetischen Induction auf zwei Kugel»), переданной Золотареву 3 января 1878 г., он сообщил 17 января, что в изданиях Академии записка напечатана быть не может.

В протоколе заседания 14 марта 1878 г. сказано, что священник Иоанн Первушин письмом от 24 января сообщает о новом случае делимости числа формы $2^{2^m}+1$. Положено передать для рассмотрения академику Золотареву. После проверки вычислений И. М. Первушина Золотарев передал его письмо В. Я. Буняковскому, уже рассматривавшему раньше работы этого священника. На следующем заседании Буняковский сообщил свое мнение об исследовании, содержавшем новый случай делимости чисел вида $2^{2^m}+1$. Буняковский отметил при этом, что «Наш уважаемый товарищ Е. И. Золотарев принял на себя утомительный по длинноте своей труд проверить этот интересный результат и подтвердил его верность» [56], [57], [58]. (Первушин доказал, что $2^{2^{23}}+1$ делится на простое число $167\,772\,161=5.2^{25}+1$). О записках Воеводского из Мурома и Добролюбова из Симбирска Золотарев дал отрицательные отзывы.

На этом же заседании (4 апреля 1878) было зачитано представление Золотарева в экстраординарные академики, составленное и написанное Чебышевым [59]. В нем говорилось:

«Отделению хорошо известно, до какой степени оправдалась надежда, что г. Золотарев вполне может быть представителем в нашей Академии и теоретической механики и чистой математики. Состоя членом по прикладной математике, он принимал самое деятельное участие в вопросах, касающихся чистой математики, что требовало от него постоянных занятий по двум различным специальностям.

Мемуары, представленные г. Золотаревым в Академию, свидетельствуют также, что он соединяет в себе глубокие познания по самым разнородным частям математики, начиная с предметов, имеющих приложение к практической механике, и кончая предметами самыми отвлеченными, как идеальные числа.

Так, в мемуаре под заглавием «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» [227], представленном им в прошлом году, он дает полное решение тех вопросов, которые одним из нас [48] по трудности их были оставлены без разрешения в мемуаре о механизмах, известных под именем параллелограммов.

В мемуаре же под заглавием «Sur les nombres complexes» [229], представленном в нынешнем году, он дал полную теорию тех особенных чисел, при помощи которых он успел вполне решить тот вопрос интегрального исчисления, который одним из нас решен только для случая соизмеримых коэффициентов.

На основании всего вышеизложенного мы полагаем, что адъюнкт наш Е. И. Золотарев вполне заслуживает повышения в звание экстраординарного академика.

Академик *П. Чебышев*
Академик *В. Буняковский*
Академик *Савич*

3 апреля 1878 г.[26]

[26] ААН, ф. 2, оп. 17, № 50, лл. 11—17 (Л.). В представлении говорится о работах Золотарева [227] и [229].

Баллотирование Золотарева было намечено на следующее заседание физико-математического отделения. На этом заседании — 2 мая 1878 г. — Золотарев не присутствовал. В § 116 протокола заседания сказано, что Золотарев был избран единогласно. На этом же заседании Чебышев и Золотарев были назначены в комиссию по присуждению премий имени В. Я. Буняковского, председателем которой являлся сам Буняковский. Баллотирование Золотарева в экстраординарные академики на общем собрании наметили на 18 августа.

До конца мая состоялось еще два заседания отделения. На первом (16 мая) Золотарев сообщил о рассмотренной им работе Миндинга «Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings auf krummen Flächen» [60], в которой «изложены весьма важные дополнения к прежним исследованиям автора о том же предмете», и ее решено было напечатать в «Бюллетене». Золотареву были переданы для рассмотрения еще два письма И. М. Первушина от 15 и 28 апреля «О делимости чисел вида $2^n \pm 1$», его же записка о делимости чисел вида $2^{2^m} + 1$ (на заседании 30 мая) и заметка преподавателя математики Полесского-Щипило.

Золотарев принимал участие в работе Академии с 4 марта 1877 г. по 30 мая 1878 г., т. е. немногим более года. (Официально он являлся ее членом с 3 декабря 1876 г. по 7 июля 1878 г.). За короткий срок он представил Академии три своих труда и статью о Сомове, рассмотрел 10 сочинений других авторов по различным вопросам математики и механики — от теории квадратичных форм до воздухоплавания. Он с честью продолжил традиции своих предшественников по Академии М. В. Остроградского и О. И. Сомова.

Безвременный конец

После летнего перерыва академики собрались 18 августа 1878 г., но вместо ожидавшегося баллотирования Золотарева они услышали речь вице-президента академика Буняковского, посвященную памяти погибшего ученого [61]:

> «В сегодняшнем заседании общего собрания предстояло произвести баллотирование в экстраординарные академики нашего молодого сочлена Егора Ивановича Золотарева, единогласно избранного в это

звание 2 мая физико-математическим отделением. Радостно готовились мы встретить этот день, в который единодушное признание ученых заслуг нашего даровитого, высоконравственного и симпатичного товарища должно было вместе с тем послужить и доказательством нашей сердечной к нему приязни. Но не осуществились наши ожидания: вместо предполагавшегося торжества мы сегодня же с чувством искреннейшей скорби должны занести в академическую летопись горестную, тяжелую утрату, понесенную и ученым миром и всеми, знавшими покойного. Егор Иванович от последствий катастрофы, постигшей его 26 июня на железной дороге, скончался в полном цвете лет, силы и здоровья. Безусловная преданность его науке, редкая неутомимость в труде, разнообразие усвоенных им знаний, проницательный взгляд и быстрая сообразительность в труднейших вопросах математического анализа — все предвещало ему будущность мощного двигателя избранной им науки. Роковой случай положил конец улыбавшимся ему и нам надеждам.

10 июля мы похоронили незабвенного товарища при горестном сознании, что могила уносит одну из выдающихся у нас молодых умственных сил, обладавшую всеми задатками для того, чтобы украсить своим именем семью отечественных ученых, и, в частности, нашу Академию. На близкую полную замену понесенной нами утраты едва ли можно надеяться: истинные избранники науки представляют собой явление слишком редкое; и если бы даже нам посчастливилось при выборе преемника Егора Ивановича, мы все, однако ж, я в том убежден, сохраним навсегда теплое, глубоко сочувственное воспоминание о нашем достойнейшем товарище, так безвременно сошедшем в могилу».

Эти слова были встречены общим сочувствием членов конференции.

Кто знает, сколько еще замыслов зрело в уме Егора Ивановича Золотарева, успевшего сделать так много за столь краткую жизнь. Нелепая случайность привела к внезапному концу. Утром 26 июня 1878 г., направляясь к родным на дачу, Золотарев попал под поезд. Через несколько дней, 7 июля он скончался в Александровской больнице от заражения крови.

Об этом печальном событии сохранилось несколько версий. Ходили слухи, вызванные, по-видимому, сообщением газеты «С.-Петербургские ведомости» от 27 июня 1878 г., что причиной смерти Золотарева было самоубийство. Газета писала: «Нам сообщают, что в Царском Селе [27] перед отходом в 10 часов утра 26 июня поезда под колеса паровоза бросился профессор С.-Петербургского университета Золотарев, причем ему раздробило ступень левой ноги. . .». По другим данным, Золотарев попал под поезд случайно. По-видимому, он задумался и не заметил свистков, а когда увидал, что поезд двинулся, то было уже поздно. Об этом говорится в письме студента К. Россикова профессору М. И. Горчакову, сохранившемся в архиве университета. Он пришел в Царское Село из Пулкова спустя полчаса после катастрофы, видел Золотарева, лежавшего в пассажирской комнате на носилках, и сопровождал его в багажном вагоне в Петербург. На его вопросы начальник станции сообщил, что раненому сделана перевязка, «что же касается, каким образом произошло несчастье, то могу лишь передать: когда поезд двинулся и дал уже полный ход, в этот момент машинист увидел человека, предотвратить опасность было нельзя, несмотря на все усилия машиниста, и хотя поезд был остановлен, но локомотив и первых два вагона прошли через жертву; из-под 3-го вагона вынули человека без чувств». «На все расспросы, каким образом он попал под поезд, отвечал: „Не знаю, ничего не помню. . .“». В вагоне Золотарев попросил подготовить родных, прежде чем сообщить им о несчастье. «Он старался улыбнуться; я воспользовался минутой и скорее машинально, чем обдумав, спросил о его несчастье, и тут же заметив, как изменилось выражение его лица, не досказал последнего слова. Между тем профессор, с усилием подняв руку и задыхаясь от волнения, произнес едва слышно: „Не спрашивайте, сберегите мой рассудок“ и затем громко отчетливо произнес: „Да Вы не давайте меня никому, отстраняйте всех с подобным вопросом. Я столько времени не спал, находился в напряженном состоянии, мог ли

[27] В некрологе, напечатанном в газете «С.-Петербургские ведомости», сказано, что Золотарев попал под поезд на станции Александровская (что противоречит всем остальным сообщениям — двух студентов и самой газеты «С.-Петербургские ведомости»). Однако некоторые авторы повторяют эту ошибку даже в самое последнее время.

я помнить хоть что-нибудь. . .“». На вокзале в Петербурге к Егору Ивановичу подбежали мать и сестра, приехавшие с тем же поездом. Россиков с негодованием пишет о докторе, который «своими изящными кончиками пальцев едва прикасался к бинту» и очень небрежно сделал перевязку. Россиков отправился искать врачей, потом зашел на квартиру к Золотаревым, куда вскоре принесли Егора Ивановича. «Когда его еще вносили в зал, он, полный радости, произнес: „Опять я вас вижу, дорогие; вот мамаша, серденько, мамаша“, и он ее стал целовать и обнимать. . . „И вы опять здесь, — обратился он ко мне, — вы теперь мне родной. . .“».[28]

Из некролога в «С.-Петербургских ведомостях» 11/23 июля 1878 г. известно, что у Золотарева было глубокое ранение стопы и двойной перелом правого бедра. Никаких грустных мыслей в предыдущий приезд к родным у него не замечалось: «22 июня Егор Иванович был на Сиверской, где его видели Г. А. Орлов и М. Д. Лохвицкий полным здоровья и сил и веселым. 26-го числа он поехал вновь, захвативши необходимые вещи, с целью пожить с родными». Поэтому версия о самоубийстве, по-видимому, неоправдана.

Из письма выпускника университета Н. Ливанова [41, стр. 342—343] Коркину узнаем, что в больнице пострадавший на ампутацию не согласился. Там, в больнице, в пятницу 7 июля Е. И. Золотарев скончался от заражения крови и в понедельник 10 июля похоронен на Митрофаниевском кладбище. До самого кладбища гроб несли на руках.

Пенсии Егор Иванович выслужить не успел, и после его кончины семья осталась без всяких средств к существованию. В прошении Правления университета управляющему Петербургским учебным округом 13 июля 1878 г. говорилось, что «после смерти экстраординарного профессора Егора Ивановича Золотарева. . . остались мать и три сестры в крайне бедственном положении», и постановлено было «выдать в пособие матери его Агафье Золотаревой 1000 рублей из сметы специальных средств Министерства народного просвещения по отделу II, статьям I и II сбора за слушание лекций».[29]

---

[28] Письмо К. Россикова (ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 6663-а, лл. 34—40). Об этом письме сообщила автору Н. И. Невская.

[29] ГИАЛО, ф. 14, оп. 1, д. 6663-а, л. 61.

ЧАСТЬ II

ОЧЕРК ТВОРЧЕСТВА Е. И. ЗОЛОТАРЕВА

Глава 3

Е. И. ЗОЛОТАРЕВ КАК ПРЕДСТАВИТЕЛЬ ПЕТЕРБУРГСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Крупнейшим петербургским математиком после Л. Эйлера являлся Пафнутий Львович Чебышев. Он занимался различными областями математики — теорией чисел, теорией вероятностей, интегрированием алгебраических дифференциалов, интерполированием, приближенными методами интегрирования. Им создана теория наилучшего приближения функций многочленами. В теории чисел, теории вероятностей и в других разделах математики им получены важнейшие для развития математики результаты. Напомним, что идеи работы Чебышева «О простых числах» [15] вместе с числовыми тождествами (общая теория которых содержалась в трудах московского математика Н. В. Бугаева [62]) легли в основу современного элементарного доказательства закона распределения простых чисел [1] Сельберга-Эрдеша [63, 64]. Работы по теории наилучшего приближения функций, продолженные Золотаревым, братьями Марковыми и другими математи-

[1] Как было показано в сообщении А. А. Киселева и Е. П. Ожиговой на межвузовской конференции по истории физико-математических наук в Москве (1963 г.), элементарное доказательство закона распределения простых чисел состоит из двух частей, причем первая часть получается на основании тождества, содержащегося в одном общем тождестве Н. В. Бугаева; вторая часть могла бы быть осуществлена методами Чебышева.

ками, послужили источником для создания конструктивной теории функций, в области которой успешно трудятся многие современные ученые (С. Н. Бернштейн и др.). Работы Чебышева по теории вероятностей породили русскую школу теории вероятностей — А. А. Марков, А. М. Ляпунов, современные математики.

Кроме больших достоинств ученого, Чебышев обладал и качествами выдающегося педагога. Он подготовил много блестящих математиков. Среди его учеников — А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. В. Васильев и др., не говоря уже о многочисленных учениках этих ученых. Чебышева и его учеников, прославивших русскую науку, обычно называют петербургской математической школой [65—71].

Творчество Чебышева и петербургской школы характеризуется некоторыми общими чертами: конкретностью постановки задач, доведением решения задачи до «числа» (получение удобной формулы или хорошего алгоритма, удобного для практики способа вычисления). В работах представителей этой школы ярко выражен основной принцип научного творчества, высказанный Чебышевым в речи «Черчение географических карт» [255, т. 5, стр. 150].

«Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных» [255, т. 5, стр. 150—152].

Чебышев выделял особенно важный круг практических задач, для решения которых науке, по его мнению, недостает многих и различных методов. «Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека. Как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?. . Решение задач этого рода составляет предмет так называемой теории наибольших и наименьших величин. Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи, весомой и невесомой, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических. . .».

В трудах математиков петербургской школы всегда проявлялась эта особенность: задачи самого различного характера, из самых различных отделов математики рассматривались ими как задачи о наибольших и наименьших величинах.

Справедливость этого принципа подтверждают и плодотворные исследования современных ученых в области линейного и динамического программирования, по математической теории оптимальных процессов и т. д. В предисловии к книге «Математическая теория оптимальных процессов» [72] говорится: «Физические процессы, имеющие место в технике, как правило, управляемы, т. е. могут осуществляться различными способами, в зависимости от воли человека. В связи с этим возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или другом смысле, или, как говорят, оптимального, управления процессом. Речь может идти, например, об оптимальности в смысле быстродействия, т. е. о достижении цели процесса в кратчайшее время, о достижении этой цели с минимальной затратой энергии и т. п.» [72, стр. 5]. То есть снова приходится решать задачи, о которых Чебышев сказал: «Как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?».

Творчеству Золотарева, ученика Чебышева и Коркина, конечно, присущи многие черты этой школы. Большинство его исследований, особенно первого периода, — это исследования, связанные так или иначе с задачами о наибольших и наименьших величинах. Такова его диссертация на право чтения лекций 1868 г. и последующие работы этого направления. Работами чебышевского типа являются совместная с Коркиным статья Золотарева «О некотором минимуме» [233] и исследования по вопросам отыскания минимумов квадратичных форм. Привычка сводить вопрос к решению задачи о наименьших и наибольших величинах заметна и в других сочинениях Золотарева. Но его творчество отличается и некоторыми чертами, чуждыми петербургской школе. Методы решения задач у Чебышева большей частью арифметические или алгебраические, иногда с использованием математического анализа, но почти нигде он не применяет теории функций комплексного переменного и теории эллиптических функций. Золотарев широко использует эллиптические функции. Он знаком с работами Вейерштрасса, Римана, Жордана.

В работах по интегрированию алгебраических функций Золотарев использует утверждения из статьи Вейерштрасса. Черновые тетради Золотарева говорят о том, что он внимательно изучал теорию групп и другие непривычные для петербургской школы вопросы. Наконец, в докторской диссертации и дополняющих ее позднейших работах Золотарев создает абстрактнейшую теорию целых комплексных чисел, причем ему создание этой теории приятнее, чем то, что он сумел решить очень трудную конкретную задачу, поставленную Чебышевым. По-видимому, проживи он подольше, и петербургская школа могла во многом изменить свое лицо.

Теория алгебраических чисел, созданная Золотаревым, породила в России ряд работ того же направления (Ю. В. Сохоцкого, И. И. Иванова, Д. А. Граве, В. П. Вельмина, Н. Г. Чеботарева).

Работы по теории квадратичных форм (совместные с Коркиным и самостоятельная) вызвали к жизни сочинения А. А. и В. А. Марковых, Г. Ф. Вороного, повлияли на творчество Г. Минковского и многих современных математиков, в том числе Б. А. Венкова и Б. Н. Делоне. Интерес к различным вопросам теории квадратичных форм, идущий еще от Эйлера и возрожденный прекрасными работами Золотарева, не пропал и сейчас. Много результатов по теории квадратичных форм (в других направлениях) дали математики Ленинграда. Продолжаются и исследования по неопределенным уравнениям (Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, В. А. Тартаковский и иностранные авторы).

Глава 4

РАБОТЫ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА В ОБЛАСТИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Начало занятий Золотарева вопросами наилучшего приближения функций относится еще к студенческим годам. В одной из своих позднейших работ [227] он указывает, что этот вопрос был ему рекомендован Чебышевым.

Работы этого направления особенно характерны для чебышевской школы. В них яснее всего видна роль практики при постановке математических проблем. История этого вопроса такова. Уатт изобрел механизм для преобразования прямолинейного движения поршня во вращательное движение коромысла. Механизм этот называется параллелограммом Уатта. Желая «вывести правила для устройства параллелограммов прямо из свойства этого механизма», Чебышев встретился с вопросами анализа, о которых до сих пор знали очень мало [255, т. 5, стр. 248—249; 74, 75]. Оказалось, что теория параллелограммов основывается на решении следующего вопроса: «Определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $(x-a)$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x=a-h$ и $x=a+h$, где h — величина не очень значительная» [48, стр. 26].

Иными словами, для функции $f(x)$, определенной в промежутке $[a, b]$, надо подобрать коэффициенты a_k многочлена n-й степени

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

так, чтобы

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$$

был возможно меньшим. (Функция, очевидно, предполагается разлагающейся в ряд Тейлора). Если обозначить

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

и положить в частном случае

$$a = -1, \ b = 1, \ f(x) = x^{n+p}, \ p = 1,$$

то

$$R_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

где

$$T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

т. е.

$$P_n(x) = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

так как $f(x) = x^{n+1}$. Одновременно Чебышев решил задачу: найти полином степени n с данным коэффициентом σ_0 при x^n, который в $[-1, 1]$ возможно меньше уклоняется от нуля. Он равен

$$\frac{\sigma_0}{2^{n-1}} T_n(x).$$

При $p = 2$

$$R_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} T_{n+2}(x).$$

В случае $p \geqslant 3$ Чебышев не решает задачу до конца, а указывает путь решения, причем использует результаты своей диссертации pro venia legendi «Об интегрировании помощью логарифмов» [255, т. 5, стр. 88—145].

Через несколько лет Чебышев представил в Академию наук новую, уже чисто теоретическую работу [73], где изложил общую теорему, относящуюся к решению задач, которые сформулированы им так: «Для некоторой функции $F(x)$ данного вида с n произвольными параметрами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ надо подходящим выбором значений $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сделать наименьшим предел ее отклонений от нуля между $x = -h$ и $x = h$» [73, стр. 152].

Затем Чебышев применил полученную им общую теорему к трем частным случаям, когда данную функцию в заданном промежутке требуется приближенно представить: 1) многочленом данной степени; 2) дробно-рациональной функцией, у которой многочлен в знаменателе задан, а в числителе задана лишь степень многочлена, коэффициенты же неопределенные; 3) дробно-рациональной функцией, если даны степени многочленов в числителе и в знаменателе, коэффициенты же неопределенные.

В этой работе Чебышев другим способом снова решает задачу о нахождении многочлена n-й степени с заданным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля. Автор указывает ряд приложений: алгебраические теоремы, результаты, касающиеся интерполирования. В. Л. Гончаров писал об этом мемуаре Чебышева: «В нем Чебышев выступает как основоположник особого, ныне широко распространенного и прочно утвердившегося стиля в математике, характерной чертой которого является систематическая разработка и разрешение экстремальных проблем» [74, стр. 500].

Первой работой Золотарева в области приближения функций была диссертация на право чтения лекций «Об одном вопросе о наименьших величинах» [211]. Коркин пишет: «В рассуждении этом он делает приложение теории эллиптических функций к одному из вопросов, приемы для решения которых в первый раз указаны были нашим геометром Пафнутием Львовичем Чебышевым» (см. стр. 26, прим. 5).

В работе давалось решение следующей задачи: «В целой функции

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

где σ — некоторый данный коэффициент, найти остальные коэффициенты так, чтобы эта функция имела по возможности наименьшее значение для x в пределах от -1 до $+1$, и найти maximum этой функции» [211, стр. 130]. Этот вопрос был решен Чебышевым для частного случая $\sigma = 0$ в работе «О механизмах, известных под именем параллелограммов» [48]. Искомая функция в этом случае была равна

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x.$$

При $\sigma \neq 0$ она выражается через эллиптические функции.

В своей диссертации Золотарев решил и более общий вопрос: «Подобрать коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ так, чтобы целая функция

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

в пределах для x от $-h$ до h была по возможности меньше, если количества p_1, p_2, $\ldots$, p_n связаны между собой одним уравнением

$$\varphi_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0\text{» [211, стр. 130].}$$

Отзыв Чебышева об этой работе имеется в представлении Золотарева в адъюнкты Академии наук (см. стр. 50, прим. 24).

Эта диссертация содержала идеи последующих работ Золотарева. С помощью эллиптических функций он решил поставленную задачу, приложив ее затем к вопросам алгебры.

Следующей работой этого направления была статья «Приложения эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» [227]. Золотарев писал в начале статьи: «Несмотря на уже имеющиеся в высшей степени замечательные приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого. Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым». Далее Золотарев замечает: «Десять лет тому назад этот вопрос был мне рекомендован для занятий П. Л. Чебышевым и разобран мною в литографированном рассуждении „Об одном вопросе о наименьших величинах“. Здесь я представляю решение его в совершенно переработанном виде» [227, стр. 1—2].

Изложение результатов этой статьи Золотарев дал в небольшой заметке «Sur l'application des fonctions elliptiques aux questions de maxima et minima» [230], где говорилось: «Я ограничиваюсь здесь изложением результатов, которых я достиг. Что же касается доказательств, то их можно найти в моем мемуаре по тому же предмету, который я имел честь представить Академии, эта заметка является лишь извлечением оттуда» [230, стр. 369]. Мы приведем результаты первой статьи Золотарева в его же формулировках из второй заметки. При этом заметим, что наибольшим отклонением функции от нуля в $[a, b]$ он называет «наибольшую численную величину функции» для $x \in [a, b]$. Аналогично определяется наименьшее отклонение функции от нуля.

«Задача 1. Найти многочлен вида $x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$, где σ задано, такой, чтобы между границами $x = -1$ и $x = +1$ он наименее уклонялся от нуля.

Аналогичная проблема, когда все коэффициенты $p_1, p_2, \dots, p_n$ многочлена $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$ неизвестны, решена. В этом случае многочлен очень просто выражается с помощью круговых функций. Но когда коэффициент p_1 имеет заранее заданное значение, представляется два случая: в первом, который имеет место, если значение σ не превосходит границы $n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$, тогда опять с помощью круговых функций находится решение задачи в самом простом виде. Действительно, полагаем

$$1 + x = 2\left(1 + \frac{\sigma}{n}\right) \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

где φ — новая переменная; тогда функцией, наименее уклоняющейся от нуля, будет

$$f(x) = (-1)^n \frac{\left(1 + \frac{\sigma}{n}\right)^n}{2^{n-1}} \cos n\varphi.$$

Здесь σ предполагается положительным. Но отсюда легко вывести решение для случая отрицательного σ. Действительно, если обозначить σ коэффициент при x^{n-1}, то искомая функция будет

$$(-1)^n f(-x).$$

Во втором случае, когда предполагается, что $\sigma > n\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$, искомая функция выражается очень просто через функции Якоби[1]

$$H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin u - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3u + \ldots$$

$$\theta\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2u + 2q^4\cos 4u - \ldots \text{».}$$

Затем получаются две теоремы о верхних границах для модуля многочлена

$$x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

в обоих случаях.

«Задача 2. Найти целую функцию вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

так, чтобы она принимала данное значение A для $x = a$, где $a > 1$, и чтобы она наименее уклонялась от нуля между границами $x = -1$ и $x = +1$».

Найденные в задаче 1 формулы позволяют решить и эту задачу. Для нахождения коэффициента σ используется условие, что искомая функция должна при $x = a$ принимать значение A.

В статье решены еще две задачи, также связанные с теорией преобразований эллиптических функций.

«Задача 3. Найти рациональную дробь

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$—степени не выше n, так, чтобы для значений x, заключенных между границами -1 и $+1$,

---

[1] Здесь k — модуль, k' — дополнительный модуль функции, K — полный эллиптический аргумент, K' — полный эллиптический аргумент для дополнительного модуля, $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$. Об эллиптических функциях см., например, в [166].

y был <1 по абсолютной величине и чтобы он наиболее уклонялся от нуля, когда x принимает все возможные значения, которые численно провосходят $\frac{1}{k}$, где k — данное значение, меньшее 1. Другими словами, минимум дроби для этих значений x должен быть наибольшим при указанных условиях».

«Задача 4. Найти рациональную дробь

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — степени не выше n, так: 1) чтобы она превосходила 1 для x в границах $x=1$, $x=\frac{1}{k}$, где k — данная постоянная, <1, и была <-1 для x в границах от $x=-1$ до $x=-\frac{1}{k}$; 2) чтобы она наименее уклонялась от нуля между теми же границами».

Таким образом, в работах этого направления Золотарев продолжил исследования Чебышева, решив с помощью теории эллиптических функций многие задачи, о которых Чебышев говорил, что «они по трудности своей были оставлены им без разрешения» [73, 74]. Идеи Чебышева и Золотарева были развиты в первую очередь в трудах братьев Марковых [76—80]. В. А. Марков продолжил исследования Золотарева, рассмотрев полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля при условии линейной зависимости между их коэффициентами. В том же направлении работали А. П. Пшеборский, А. Кирхбергер, Я. Л. Шохат. Труды С. Н. Бернштейна, Де ла Валле-Пуссена, Джексона в области наилучшего приближения функций привели к созданию конструктивной теории функций.

Направление трудов Золотарева—В. Маркова развивали [81—102] Н. И. Ахиезер, И. П. Натансон, Е. В. Вороновская, Б. А. Рымаренко, В. Ф. Бржечка, Д. Г. Гребенюк, И. А. Григорьева, В. Л. Файншмидт. Обзор работ русских и советских математиков в этой области имеется в докладе Б. А. Рымаренко и В. Н. Бурова [102]. Ознакомиться с современным состоянием теории наилучшего приближения функций можно, например, по сборнику «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций» [103]. Среди других работ этого сборника имеется статья Г. Ш. Рубинштейна «О некоторых экстремальных задачах экономического характера, идейно близких к задаче Чебышева о наилучшем равномерном приближении» [104], где рассматриваются две экстремальные задачи, частными случаями которых являются основные задачи линейного программирования, теории игр, а также задача наилучшего равномерного приближения заданной функции обобщенными многочленами на конечном точечном множестве. В заключение говорится: «При некотором видоизменении рассмотренных основных задач к ним удается свести также задачу наилучшего равномерного приближения обобщенными дробно-рациональными функциями. Это позволяет получить некоторые теоретические результаты, а также дать эффективные численные методы решения задачи» [104, стр. 347].

Правда, здесь речь идет о задачах Чебышева, но, по-видимому, можно связать подобным образом и задачи Золотарева с современными экстремальными задачами. С. И. Зуховицкий и другие авторы рассмотрели решение задач чебышевского типа методами линейного программирования [106].

К работам о нахождении наибольших и наименьших величин относится также совместная статья Коркина и Золотарева «Об одном минимуме» [223]. В ней решается задача о минимуме интеграла: требуется найти полином

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

для которого интеграл

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$$

имеет наименьшее значение. Из всех полиномов степени n со старшим коэффициентом 1 наименьшее значение интегралу доставляет полином [99, стр. 425—428]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

или, если обозначить $\cos\varphi = x$, то

$$P_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Как установил Я. Л. Геронимус [107, стр. 445—446], подобную задачу в частном случае для $P_k(t) = t^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ решил еще Чебышев в статье «Об интерполировании в случае большого числа данных» [108]. Эту задачу рассматривали Коркин и Золотарев, Стильтьес, Фудзивара. А. А. Марков в статье 1898 г. «О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием» [109] решил ее в более общем виде. Затем она обобщалась в различных направлениях академиком С. Н. Бернштейном [85], Н. И. Ахиезером, М. Г. Крейном, Я. Л. Геронимусом [110—115].

Глава 5

ТРУДЫ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА и А. Н. КОРКИНА ПО ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Выражение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — вещественные числа, называется квадратичной формой. Большое значение в теории квадратичных форм имеет определитель (дискриминант) формы, равный

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Форма от двух переменных называется *двоичной*, или *бинарной*, от трех — *троичной*, или *тернарной*, от четырех — *четверичной*, или *кватернарной*. Форма *определенная*, если ее значения, кроме нулевого, которое получается только при нулевых значениях переменных, все имеют один и тот же знак. Если значения определенной формы имеют всегда знак плюс, она называется *положительной*, если минус — *отрицательной*, если (при разных значениях переменных) она может менять знак, то называется *неопределенной*. Формы, получающиеся одна из другой при помощи линейной замены переменных с целыми коэффициентами и с определителем подстановки, равным ± 1, называются *эквивалентными*.

Среди значений положительной формы, получаемых при целых значениях переменных, имеется минимальное. Форма может достигать своего минимума при одной или при нескольких системах значений переменных. Система значений переменных, при которой форма достигает минимума, называется **представлением минимума**. Например, форма x^2+xy+y^2 имеет представления минимума, равного 1: (1, 0), (0, 1), (—1, 0), (0, —1), (—1, 1), (1, —1).

Рассмотрим множество положительных форм $f(x, y, z)$ определителя D. Пусть m — любой минимум f. У форм определителя D может быть несколько минимумов. Пусть максимум M минимумов форм определителя D достигается формой $f_*(x, y, z)$. Тогда любой минимум m удовлетворяет неравенству $m \leqslant M$ и для любой формы $f(x, y, z)$ с определителем D при соответствующем выборе целых x, y, z выполняется неравенство

$$f(x, y, z) \leqslant M.$$

С другой стороны, при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $f(x, y, z) \leqslant M - \varepsilon$ может выполняться не для всякой формы с определителем D. Например, оно не выполняется для $f_*(x, y, z)$.

Рассмотрим форму

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Положим $M = \mu(n) \sqrt[n]{D}$.

Задача нахождения наибольшего значения минимумов форм с определителем D равносильна задаче нахождения наибольшего значения $\mu(n)$ такого, что неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \mu(n) \sqrt[n]{D}$$

может быть выполнено для любой формы с определителем D при соответствующих целых значениях переменных. Например, для $n=2$

$$M = \sqrt{\frac{4}{3} D}, \quad \mu(2) = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Равенство выполняется для форм

$$\sqrt{\frac{4}{3}D}\,(x^2 \pm xy + y^2)$$

с определителем D. Золотарев и Коркин ввели понятие предельных (или экстремальных) форм.

Квадратичная форма называется предельной, если ее минимум может только уменьшаться при любых бесконечно малых изменениях коэффициентов формы, таких что ее определитель не меняется. Если данная форма предельная, то любая форма, эквивалентная ей, тоже является предельной.

Каждая из предельных форм дает наибольшее значение минимума их для некоторого множества форм. Все предельные формы, эквивалентные одной и той же, можно считать за одну.

Впервые Золотарев обращается к теории квадратичных форм в своей магистерской диссертации. Содержание этой работы было вызвано к жизни сочинениями Эрмита,[1] особенно письмами Эрмита к Якоби [117]. Эрмит обобщил в них исследования Гаусса [118] на квадратичные формы с любым числом переменных. Что же писал Эрмит?

> «Прежде всего до́лжно задаться целью (в теории приведения) найти целые значения неопределенных (переменных, — *Е. О.*), для которых данная определенная форма имела бы наименьшее возможное значение.
>
> Отсюда получились бы следующие следствия:
>
> 1) если отыскать ряд минимумов бинарной формы
>
> $$(y - ax)^2 + \frac{x^2}{\Delta}$$
>
> для всех положительных значений величины Δ, возрастающей непрерывным образом от 0 до ∞, то различные дроби $\frac{y}{x}$ представили бы множество подходящих дробей непрерывной дроби, эквивалентной a;

[1] Эрмит (1822—1901) — известный французский математик [116].

Шарль Эрмит (1822—1901).

2) если найти ряд минимумов тернарной формы

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

где A и B — две некоторые положительные величины, a и b — две вещественные величины, то все дроби $\frac{z}{x}$ и $\frac{y}{x}$ имели бы важное свойство: если выбрать знаменатель $x_0 < x$, то две другие дроби $\frac{z_0}{x_0}$ и $\frac{y_0}{x_0}$ дали бы необходимо

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2 > A(z-ax)^2+B(y-bx)^2,$$

так как если бы это неравенство не имело места, то выражение

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2+\frac{x_0^2}{\Delta}$$

было бы меньше, чем

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

следовательно, это последнее не было бы минимумом (как предполагалось).

Поэтому, так как всегда можно сделать

$$\frac{x^2}{\Delta}+A(z-ax)^2+B(y-bx)^2 < \sqrt[3]{\frac{2AB}{\Delta}}$$

и, следовательно,

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2 < \sqrt[3]{\frac{2AB}{\Delta}},$$

то видим, что если заставить Δ непрерывно возрастать, то ряд дробей $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$ сходится к пределам a и b и для каждого приближения сумма квадратов ошибок $(z-ax)$, $(y-bx)$, умноженных на постоянные A и B, есть минимум, т. е. эта сумма увеличивается, если общий знаменатель уменьшается. Все это указывает на бесконечное множество других аналогичных следствий, которые все зависят от трудного исследования точной границы минимумов любой определенной формы. Я могу здесь лишь указать предположение. Мои первые исследования в случае формы с n-переменными определителя D дали мне границу

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D};$$

я предполагаю, но не могу доказать, что числовой коэффициент $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ должен быть заменен на $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$» [117, стр. 140—142].

Эрмит сообщает Якоби ряд других важных вопросов, решение которых зависит также от разыскания минимумов квадратичных форм. При этом он говорит: «Мы снова приходим, как Вы видите, мосье, к этому странному отысканию всех минимумов квадратичной формы, соответствующих различным системам значений нескольких параметров, про которые надо предположить, что они проходят через все возможные состояния величины. Таков путь, открывающийся перед нами по предыдущему анализу для решения многочисленных вопросов, среди которых я выберу следующий: если $\varphi(\alpha)$ — целое комплексное число, зависящее от корня α уравнения $F(x)=0$ с целыми коэффициентами и коэффициентом при первом члене, равным 1, требуется найти все решения уравнения Norme $\varphi(\alpha)=1$» [117, стр. 146—147].

Поясним обозначения Эрмита. Целым комплексным числом, зависящим от корня уравнения $F(x)=0$ (неприводимого уравнения степени n с целыми коэффициентами), он называет любой многочлен с целыми коэффицинетами от этого корня. Общий вид целого комплексного числа

$$\varphi(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1},$$

где a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — целые числа. Если α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — все корни уравнения $F(x)=0$, то произведение $\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)$, являющееся целым числом, называется нормой комплексного числа $\varphi(\alpha)$ и обозначается Norme $\varphi(\alpha)$. Например, если i — корень уравнения $x^2+1=0$, а комплексное число $\varphi(\alpha)=2\alpha+3$, то нормой его является произведение $(2i+3)(-2i+3)=9+4=13$ (здесь $\alpha_1=i$, $\alpha_2=-i$). Эрмит не решает вопроса, он только ставит его и связывает его решение с необходимостью отыскания всех минимумов квадратичных форм (см. выше). Золотарев решает этот вопрос для конкретного уравнения

$$x^3+Ay^3+A^2z^3-3Axyz=1, \tag{1}$$

где A — данное целое число, не равное полному кубу.

Решение неопределенных уравнений в целых числах представляет много трудностей. Даже решение в целых числах уравнения вида

$$x^2-ay^2=1 \tag{2}$$

(где a — не равное квадрату данное целое число) явилось предметом долгих поисков знаменитых математиков (Ферма, Эйлер). Полностью оно было решено Лагранжем. Уравнение Золотарева [137, стр. 23 и далее] гораздо сложнее. Из исследований Дирихле было известно, что как для (2), так и для (1) существует бесконечно много решений, которые все могут быть получены из одного основного. Но неизвестно было, как практически искать это основное решение.

Магистерская диссертация Золотарева «Об одном неопределенном уравнении третьей степени» [212] посвящена именно этому вопросу. Она состоит из двух частей. В первой части Золотарев решает вопрос (также поставленный Эрмитом) о нахождении всех последовательных минимумов бинарной формы

$$(y-ax)^2+\frac{x^2}{\Delta}$$

и тернарной формы

$$A(x-az)^2+B(y-bz)^2+\frac{z^2}{\Delta}$$

(где A, B — положительные, a, b — вещественные, причем у Золотарева $A=B=1$) при непрерывном изменении параметра Δ от 0 до ∞. Попутно Золотарев дает более простое доказательство теоремы Эрмита о том, что минимумы определенной квадратичной формы от $(n+1)$-

переменной меньше, чем $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}$. Он доказывает также, что предположение Эрмита относительно коэффициента $2\sqrt[n+1]{\frac{1}{n+2}}$ вместо $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$ верно для $n=2$, приводит квадратичную форму, минимум которой достигает этой границы:

$$\sqrt[3]{2D}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3),$$

и замечает, что всегда можно выбрать квадратичную форму от $(n+1)$-переменных, минимум которой достигает границы $2\sqrt[n+1]{\frac{D}{n+2}}$.

Во второй части диссертации Золотарев решает указанное неопределенное уравнение (1) в целых числах.[2] Для этой цели он использует разработанный им в первой части метод нахождения последовательных минимумов квадратичных форм. Золотарев показывает, что основное решение уравнения (1) найдется в ряду представлений минимумов некоторой квадратичной формы, зависящей от параметра Δ.

Остальные решения (которых будет бесконечно много) получаются из основного по указанным в работе формулам. Так как он имеет способ нахождения последовательных минимумов квадратичной формы, то тем самым получается средство для нахождения основного решения уравнения (1).

Идея Эрмита об использовании непрерывного параметра Δ, с успехом примененная в этой работе, применялась и позже. Использовали и развивали ее и другие математики (Вороной, Успенский).

В магистерской диссертации содержатся в зародыше идеи работ Золотарева двух направлений: 1) исследо-

---

[2] Были и другие работы об этом уравнении. Например, Мэтьюз (Mathews) в статье «On the arithmetical theory of the form $x^3+ny^3+n^2z^3-3nxyz$» (Proc. Lond. Mathem. Soc., 21, 1891, pp. 280—297) показывает, что уравнение это всегда может быть удовлетворено целыми числами x, y, z и что все его целые решения могут быть получены из одного основного. Способа нахождения основного решения он не дает. Работа Золотарева, видимо, ему неизвестна.

ваний по теории квадратичных форм, продолженных Золотаревым совместно с Коркиным; 2) исследований по теории целых комплексных чисел, ибо решение уравнения Золотарева эквивалентно вопросу об отыскании основных единиц в кольце целых комплексных чисел вида $a+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2}$. Комплексными единицами называются комплексные числа, норма которых равна ± 1. Все комплексные числа, норма которых равна -1, выражаются в виде произведений одного из них на различные комплексные единицы, норма которых равна $+1$. Поэтому вопрос сводится прежде всего к нахождению всех решений уравнения

$$\mathrm{Norme}\,\varphi(x)=1.$$

Для случая, рассмотренного Золотаревым, для целых комплексных чисел вида $a+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2}$ (где a, b, c — целые рациональные числа), образующих кольцо, нормой числа $a+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2}$ будет являться произведение

$$(a+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2})(a+b\rho\sqrt[3]{A}+c\rho^2\sqrt[3]{A^2})(a+ \\ +b\rho_1\sqrt[3]{A}+c\rho_1^2\sqrt[3]{A^2}),$$

где 1, ρ, ρ_1 — корни кубического уравнения $\rho^3=1$.

Если перемножить числа

$$(a+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2}),\quad (a+b\rho\sqrt[3]{A}+c\rho^2\sqrt[3]{A^2}),$$
$$(a+b\rho_1\sqrt[3]{A}+c\rho_1^2\sqrt[3]{A^2}),$$

то получим

$$a^3+Ab^3+A^2c^3-3Aabc.$$

Поэтому уравнение Золотарева

$$x^3+Ay^3+A^2z^3-3Axyz=1$$

представляет собой частный случай уравнения

$$\mathrm{Norme}\,\varphi(\alpha)=1$$

и решение его эквивалентно вопросу об отыскании единиц в кольце целых комплексных чисел вида $a+$ $+b\sqrt[3]{A}+c\sqrt[3]{A^2}$.

Работа А. А. Маркова «О целых числах, зависящих от кубического корня из обычного целого числа» [119] посвящена памяти Золотарева. Марков начинает ее словами: «В этом мемуаре я хочу приложить общую теорию целых чисел, зависящих от корня произвольного алгебраического уравнения, установленную трудами гг. Куммера, Дедекинда и Золотарева, к случаю кубического корня из целого обыкновенного (рационального) числа, надеясь что этот частный случай, интересный и сам по себе, может помочь тому, чтобы стал яснее общий случай. В частности, я хочу показать, как, следуя идеям Золотарева, отнятого у науки, к нашему живейшему сожалению, безвременной смертью, легко осуществить разложение на простые множители всякого целого числа, зависящего от кубического корня из обычного целого числа».

Марков рассматривает алгебраические числа вида

$$\xi = x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B},$$

где x, y, z — произвольные рациональные числа, $A = ab^2$, $B = a^2b$, a, b — два обычных целых числа таких, что их произведение не делится ни на какой квадрат обычного целого числа. Иначе ξ можно представить в виде

$$\xi = x + y\sqrt[3]{A} + \frac{1}{b} z\sqrt[3]{A^2},$$

откуда видно, что ξ зависит от корня кубического из A (т. е. от корня кубического уравнения $\rho^3 = A$) [119, стр. 1].

Вслед за Марковым Г. Ф. Вороной в работе «О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения третьей степени» применил результаты общей теории целых алгебраических чисел к другому частному случаю: к случаю чисел, зависящих от корня неприводимого уравнения $\rho^3 = r\rho + s$ [120].

По словам Б. Н. Делоне, „этой работой Золотарев положил начало целому ряду русских работ по кубическому полю, которое сделалось как бы «русской специальностью», принадлежавших Маркову («Sur les nombres dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire», 1892), Вороному (1893, 1896), Делоне (1915, 1922, 1940), Фаддееву (1934, 1940), Венкову (1934), Житомирскому (1935). Докторская диссертация Вороного «Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей» (1896) также относится к теории кубического поля“ [66, стр. 197; 122—124]. Совместные работы Золотарева и Коркина по теории квадратичных форм также были вызваны письмами Эрмита к Якоби: «В тех же письмах поставлен вопрос о точном пределе для наименьших значений положительных квадратичных форм, решение которого было известно только для случая двух и трех переменных. Вопрос этот, один из труднейших, повел к целому ряду исследований, сделанных Золотаревым совместно с профессором Коркиным» (см. стр. 26, прим. 5). Золотарев и Коркин написали три совместные статьи по теории квадратичных форм. В первой из них — «О положительных квадратичных кватернарных формах» (1872) [214] — авторы доказали теорему: Переменным любой положительной кватернарной квадратичной формы определителя D можно придать такие целые значения, что значение формы не будет превосходить величины $\sqrt[4]{4D}$ и существуют такие формы, минимумы которых равны $\sqrt[4]{4D}$. Примером такой формы является форма

$$\sqrt[4]{4D}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4).$$

Т. е. в случае $n=4$ $\mu(4)=\sqrt[4]{4}$.

Для $n=2$ и $n=3$ точные верхние границы минимумов были известны и

$$\mu(2)=\sqrt{\frac{4}{3}},\qquad \mu(3)=\sqrt[3]{2}.$$

Результат этой статьи неоднократно использовался математиками [121].

Вторая статья — «О квадратичных формах» [220] — была опубликована в 1873 г. Здесь Коркин и Золотарев впервые вводят понятие предельной или экстремальной формы. Авторы так рассказывают об истории появления этой работы. Первоначально они хотели убедиться в справедливости гипотезы Эрмита и доказать, что величина $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$ есть точная верхняя граница минимумов форм с n-переменными определителя D. Вместо этого они выяснили, что указанная величина действительно является минимумом экстремальных форм, или, что то же самое, точной верхней границей минимумов некоторой группы форм. Если же рассматривать все множество квадратичных форм с n-переменными данного определителя D, то имеются минимумы, которые эту величину превосходят. Они пришли к заключению, что точной границей для множества всех указанных форм является наибольший из минимумов экстремальных форм, которые в этом множестве содержатся.

Коркин и Золотарев установили, что экстремальная форма с n-переменными имеет не менее $\frac{n(n+1)}{2}$ представлений своего минимума. В этой работе авторы исследуют положительные формы, применяя свой метод приведения положительной квадратичной формы к простейшему виду, названному ими «разложением формы по ее минимумам». Это разложение по минимумам они используют для нового доказательства теоремы Эрмита относительно верхней границы минимумов положительных форм

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt[n+1]{D}$$

и для получения другой, более точной, чем у Эрмита, границы для минимумов форм. Для форм бинарных, тернарных, кватернарных полученная ими граница является точной; при числе переменных $n \geqslant 5$ это уже неверно.

В этой же работе имеется замечание о неопределенных квадратичных формах, явившееся исходным пунктом для исследований А. А. Маркова (магистерская диссертация «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», 1880 [125—128]).

Третья работа Коркина и Золотарева «О положительных квадратичных формах» (1877) [228] дополняет исследование предельных форм, начатое во второй статье. Здесь выясняются некоторые важные свойства предельных форм и найдены все предельные формы с двумя, тремя, четырьмя и пятью переменными. Появлению трех статей Коркина и Золотарева предшествовала длительная и чрезвычайно кропотливая работа обоих ученых. Проследить историю создания этих важных в теории квадратичных форм исследований можно по письмам и черновым тетрадям Коркина и Золотарева, но детального разбора этого материала еще не производилось.

Во второй работе Коркин и Золотарев указали примеры предельных форм и для других n: при $n=6$ с минимумом $2\sqrt[6]{\frac{D}{3}}$ и при $n=7$ с минимумом $\sqrt[7]{64D}$.

Уже в письмах 1872 г. Коркин и Золотарев пишут о предельных формах с пятью и более переменными. В это же время они обдумывают различные приложения теорем о минимумах: к теории уравнений, к доказательству алгебраических теорем, к интегрированию. К сожалению, планы эти остались неосуществленными. Среди других свойств предельных форм Коркин и Золотарев установили следующее полезное свойство: пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — предельная форма определителя D, m — ее минимум, а

$$\begin{matrix} l_{11}, & l_{12}, & l_{13}, & \ldots, & l_{1n}, \\ l_{21}, & l_{22}, & l_{23}, & \ldots, & l_{2n}, \\ l_{\sigma 1}, & l_{\sigma 2}, & l_{\sigma 3}, & \ldots, & l_{\sigma n} \end{matrix} \tag{3}$$

— все представления минимума, т. е. все системы целых значений переменных x_k, при которых форма достигает этого минимума, так что

$$f(l_{si}) = m \quad \begin{matrix} (s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \sigma) \\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{matrix} \tag{4}$$

(при этом если две системы значений отличаются только знаками, то их считают одинаковыми и берут лишь один раз). Тогда уравнения (4), линейные относительно коэффициентов a_{ij} формы f, определяют эти коэффициенты с точностью до общего множителя.

Число строк в таблице (3) не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, т. е. $\sigma \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$ (так как представлений минимума не меньше, чем $\frac{n(n+1)}{2}$) [228, стр. 385].

Много работал в области квадратичных форм Г. Ф. Вороной (1868—1908), являющийся наравне с Г. Минковским (1864—1909) создателем геометрии чисел. Введенные Вороным [129—131], [66] так называемые совершенные формы дают алгоритм решения задачи вычисления всех предельных форм при любом n. Кроме того, совершенные формы имеют большое теоретическое значение. С о в е ршенной формой Вороной называет положительную квадратичную форму, обладающую свойством, что она вполне определяется представлениями своего минимума (т. е. тем свойством, которое Коркин и Золотарев открыли у предельных форм). Предельные формы, рассматривавшиеся Коркиным и Золотаревым и обладавшие, кроме этого свойства, рядом других свойств, оказались частным случаем совершенных форм Вороного.

В 1933 г. Хофрейтер [132] определил все классы предельных форм (в смысле Коркина и Золотарева) для $n=6$. Одним из них оказался класс, имеющий минимум $\sqrt[6]{\frac{64}{3}D}$, указанный в свое время Коркиным и Золотаревым. Блихфельдт [133] в 1934 г. доказал, что

$$\mu(6)=\sqrt[6]{\frac{64}{3}}, \quad \mu(7)=\sqrt[7]{64}, \quad \mu(8)=2.$$

При этом он использовал метод приведения квадратичных форм, принадлежащий Коркину и Золотареву, и некоторые соотношения, установленные ими. Оказалось, что наибольшими значениями минимумов являются минимумы предельных форм, указанные Коркиным и Золотаревым, причем сами эти их результаты также были использованы в работе Блихфельдта.

Герман Минковский не раз упоминал результаты Коркина и Золотарева и использовал их в своем фундаментальном сочинении «Zur Geometrie der Zahlen». Он также нашел предельные формы для $n=6$ [134, т. 1, стр. 217; т. 2, стр. 76]. Как указывал Морделл [135], Т. В. Шонди (T. W. Chaundy) открыл новый простой метод нахождения $\mu(n)$ для $3 \leqslant n \leqslant 10$ и показал, что $\mu(9)=2$, $\mu(10)=$ $=2\sqrt[10]{\frac{4}{3}}$.[3] В другой статье Морделл [136] дал новое, более простое доказательство утверждения $\mu(3)=\sqrt[3]{2}$.

Продолжателями идей Золотарева и Коркина в Советском Союзе [65, 66, 208, 209] являются Б. Н. Делоне, работы которого наряду с теоретическими результатами дают приложения теории квадратичных форм к кристаллографии, Б. А. Венков и их ученики. Квадратичными формами (в несколько других направлениях) много занимались и занимаются в Ленинграде В. А. Тартаковский, Ю. В. Линник, А. В. Малышев и др.

---

[3] Вместо $\mu(n)$ Морделл пишет γ_n.

Глава 6

ИССЛЕДОВАНИЯ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА ПО ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Мы уже видели, что первое знакомство Золотарева с теорией целых комплексных (или алгебраических) чисел произошло во время работы над магистерской диссертацией. Докторская диссертация Золотарева «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению» [224], как видно уже по ее названию, специально посвящена этой теории. Первоначальный замысел диссертации был другим. Как писал Золотарев Коркину 8 июня 1873 г., он начал с разложения в непрерывную дробь квадратного радикала из полинома 4-й степени. Затем он собирался поместить в диссертацию два приложения этого разложения: к вопросу о наименьших величинах, который был предметом диссертации Золотарева на право чтения лекций, и к чебышевскому способу интегрирования алгебраических функций. Дальше Золотарев пишет, что он не успел еще хорошо обдумать, что можно сделать для этого интегрирования в том случае, когда подрадикальный полином имеет иррациональные коэффициенты [254, стр. 209].

Через месяц, 10 июля, Золотарев исполняет свое обещание и пишет Коркину о том, что́ ему удалось сделать [254, стр. 210—212]: «Я обещался Вам сообщить все то, что мне удастся сделать относительно обобщения методы Чебышева [163, 164] на тот случай, когда коэффициенты полинома, стоящего под радикалом, какие-нибудь вещественные числа. Мне, действительно, удалось сделать это обобщение на основании некоторых новых понятий, о которых я и хочу сказать несколько слов в этом письме. Исключение составляют только некоторые случаи, которые, по справедливости, можно назвать особенными. . . Чтобы доказать конечность действий в этом случае, мне пришлось составить новую теорию комплесных чисел, зависящих от корней уравнения (3), которое можно считать неприводимым.[1] Этой теории я приписываю гораздо большее значение, чем обобщению методы Чебышева».

Дальше Золотарев приводит исторические сведения по теории целых комплексных чисел: он упоминает работы Куммера, рассматривавшего комплексные числа, зависящие от корней из единицы. Способ Куммера оставляет мало надежды обобщить его на случай любых неприводимых уравнений с целыми коэффициентами. «Моя теория, — пишет Е. И. Золотарев, — содержит Куммеровскую как частный случай и нисколько не сложнее ее, если выключить некоторые особенные функции, которые требуют новых обобщений. Этих особенных случаев я до сих пор не рассматривал, а потому и сказал, что при моем обобщении метóды Чебышева встречаются некоторые исключения. Эта теория комплексных чисел меня очень заинтересовала. Она настолько обширна, что я не могу ее изложить в письме к Вам, а потому подожду того времени, когда мы увидимся, чтобы изложить ее Вам во всех подробностях. . . Я не сомневаюсь, что эта теория комплексных чисел будет иметь и другие приложения, кроме методы Чебышева» [254, стр. 211—212].

В письме 29 июля Золотарев уже излагает новый план докторской диссертации: «По мере того как работа подвигалась к концу, этот план все изменялся и изменялся. Теперь я остановился на следующем: мое сочинение будет состоять из четырех глав. В первой я излагаю свойства сравнений с целыми функциями. . . Эту статью я приписывал Серре. . .» [142]. Золотарев выражает свое удивление тем, что Гаусс знал это раньше, чем Серре, еще в 1798 г. «Эта статья должна была составить 8-ю главу „Disquisitiones“ [143, 144]. Во второй главе я излагаю свойства комплексных единиц. В третьей — разложение комплексных чисел на множители и в четвертой — приложение теории комплексных чисел к интегральному исчислению, т. е.

[1] Речь идет об уравнении $F(x)=0$, где $F(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшем члене, равным 1.

метóда Чебышева. Большая часть из всего этого уже написана вчерне».

План диссертации остался именно таким, как он изложен в этом письме. Для понимания последующего материала сделаем несколько предварительных замечаний о функциональных сравнениях [142].

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — два многочлена с целыми коэффициентами:

$$A(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m; \quad B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n.$$

Они называются сравнимыми по модулю p, если их коэффициенты при одинаковых степенях x сравнимы по модулю p, т. е. при делении на p коэффициенты при одинаковых степенях x в этих многочленах дают равные остатки.[2]

Например, при делении на 5 числа 7 и 12 сравнимы, так как оба дают остаток 2. Это записывают символически так: $7 \equiv 12 \pmod 5$. И вообще:

$$a \equiv b \pmod p.$$

Таким образом, если

$$a_0 \equiv b_0 \pmod p, \quad a_1 \equiv b_1 \pmod p, \quad \ldots, \quad a_n \equiv b_n \pmod p,$$

то

$$A(x) \equiv B(x) \pmod p.$$

Если все коэффициенты многочлена $A(x)$ делятся на p, то и многочлен $A(x)$ делится на p:

$$A(x) \equiv 0 \pmod p.$$

Над такими соотношениями (сравнениями) можно производить действия как над обычными равенствами: складывать, вычитать, перемножать почленно. Например, если $A \equiv B$, $C \equiv D \pmod p$, то $A \pm C \equiv B \pm D \pmod p$, $AC \equiv BD \pmod p$ и т. д.

Пусть A и B — два данных многочлена, p — простое.

Если $BC \equiv A \pmod p$, то говорят, что A делится на B по модулю p, а C есть частное от этого деления или что функция A равна по $\operatorname{mod} p$ произведению двух функций B и C. Для функций A и B можно найти их

---

[2] О сравнениях можно прочитать, например, в книге И. М. Виноградова «Основы теории чисел» (1952 или другие года изд.).

ОНД[3] по модулю p (это делается процессом, аналогичным алгорифму Евклида):

A делят на B по $\mathrm{mod}\, p$; если деление происходит без остатка, то B и будет наибольшим делителем, если есть остаток C, то делим B на C, и т. д. В конце концов или получается ОНД, или остаток, не содержащий x и не делящийся на p. В последнем случае A и B не будут иметь ОНД и их называют **взаимно простыми**.

Функция, не делящаяся по $\mathrm{mod}\, p$ ни на какую функцию степени низшей, называется **простой по этому модулю**.

Если функция A не есть простая по $\mathrm{mod}\, p$, то ее можно представить как произведение степеней простых функций по $\mathrm{mod}\, p$:

$$A \equiv L^n L_1^{n_1} L_2^{n_2} \ldots L_k^{n_k} \pmod p,$$

где n, n_1, n_2, ..., n_k — целые положительные, а L, L_1, ..., L_k — простые функции. Последнее сравнение можно записать по-другому:

$$A = L^n L_1^{n_1} \ldots L_k^{n_k} + p\varphi(x).$$

Эта форма часто встречается в дальнейшем. Заметим, что в сравнениях по $\mathrm{mod}\, p$ числа можно заменять сравнимыми с ними по этому модулю. Например,

$$(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15 \equiv x^2 - 2x \pmod 5,$$

так как $-15 \equiv 0 \pmod 5$ (15 делится на 5).

К обеим частям сравнения можно прибавлять числа, сравнимые с нулем по $\mathrm{mod}\, p$.

Золотарев излагает в первой главе свойства функциональных сравнений.

Как пишет и сам Золотарев, он использовал здесь книгу Серре «Cours d'algèbre supérieure» [142]. Изложение первой главы следует изложению § 340 и последующих третьей главы второго тома книги Серре. Золотарев применяет другие обозначения, иногда подробнее дает доказательства. Например, в § 8 «Определение кратных множителей» начало параграфа совпадает почти полностью с изложением § 344 книги Серре. Но дальше Золотарев подробно показывает, как теорема применя-

---

[3] ОНД — общий наибольший делитель.

ется к отделению кратных множителей. В конце он поясняет метод отделения кратных множителей примером. Доказательство теоремы у Золотарева гораздо подробнее, чем у Серре. Заканчивается эта глава разложением функции $\frac{x^n-1}{x-1}$ на простые множители по некоторому простому модулю при n простом.

Вторая глава называется «О комплексных единицах». Пусть

$$F(x)=0 \tag{1}$$

— неприводимое уравнение n-й степени с целыми коэффициентами, т. е. $F(x)$ не делится ни на какую целую функцию с целыми коэффициентами степени низшей. Коэффициент высшего члена в $F(x)$ равен единице.

«Целым комплексным числом, зависящим от корней уравнения (1), мы будем называть всякую целую функцию с целыми коэффициентами одного из корней этого уравнения» [224, стр. 196].

Общий вид целого комплексного числа $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_3x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — целые числа, x — любой корень (1).

«Рациональными комплексными числами, зависящими от корней уравнения (1), мы будем называть числа вида:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целые комплексные числа» [224, стр. 197].

Дальше Золотарев дает определение сопряженных целых комплексных чисел. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — корни (1). Комплексные числа $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})$ называются сопряженными, а произведение их

$$\varphi(x_0)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{n-1})$$

(являющееся целым числом) — нормой комплексного числа $\varphi(x)$.

Норму Золотарев обозначает $N\varphi(x)$ и рассматривает затем ее свойства.

Затем вводится понятие действий над целыми комплексными числами.[4]

Комплексными единицами называются комплексные числа, у которых норма равна ± 1. Все комплексные единицы, норма которых равна -1, представляются произведением одной из них на различные комплексные единицы, норма которых равна 1. Поэтому прежде всего надо было найти все решения уравнения

$$N\varphi(x) = 1.$$

В простейшем случае, когда $x_0 = i$, $x_1 = -i$ — корни уравнения $x^2 + 1 = 0$, комплексные числа будут вида

$$\varphi(x_0) = a + bi, \qquad \varphi(x_1) = a - bi,$$
$$N\varphi(x) = \varphi(x_0)\varphi(x_1) = a^2 + b^2.$$

Комплексными единицами будут числа, удовлетворяющие уравнению

$$N\varphi(x) = \pm 1, \text{ т. е. } y^2 = 1 \text{ и } y^2 = -1.$$

Корнями этих уравнений будут $y_1 = +1$, $y_2 = -1$, $y_3 = i$, $y_4 = -i$. Таким образом, в этом случае имеется четыре комплексных единицы: 1, -1, i, $-i$.

Во второй главе Золотарев дает новое доказательство теоремы Дирихле о комплексных единицах, использующее свойства квадратичных форм и метод непрерывного параметра Эрмита.

Третья глава называется «Идеальные множители комплексных чисел». Она начинается краткими историческими замечаниями о комплексных числах. Гаусс ввел в теорию чисел [118, стр. 686—754; 144, стр. 22—29; 143] целые комплексные числа вида $a + bi$, где a, b — целые, а i — корень уравнения $x^2 + 1 = 0$. «Это нововведение по своей важности составило эпоху в этой науке, так как оно дало ключ к решению многих весьма трудных вопросов и повело в свою очередь к замечательным обобщениям» [224, стр. 240].

Далее Золотарев говорит о том, что комплексные числа вида $a + bi$, частным случаем которых являются обыкно-

[4] В дальнейшем называем их (вместе с Золотаревым) просто комплексными.

венные целые числа, сами содержатся как частный случай в комплексных числах, зависящих от корней какого-нибудь неприводимого уравнения с целыми коэффициентами. После того как появилась теория комплексных чисел $a+bi$, математики начали заниматься комплексными числами, зависящими от корней какой-нибудь степени из единицы. Пришли они к этим числам, изучая теорию деления круга на равные части. Золотарев указывает и еще на две причины, заставившие математиков обратиться к этому виду комплексных чисел. Первая причина — это попытки доказать теорему Ферма о том, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ при n целом, $n > 2$, не может быть решено в целых положительных числах. Вторая — поиски доказательств законов взаимности относительно вычетов высших степеней.

Создать теорию комплексных чисел, зависящих от корней любой степени из единицы, пробовали Ламе [145] и Коши [146]. Впервые такую теорию составил Куммер [147—149]. Он ввел так называемые идеальные множители, благодаря которым в его теории оказалась справедливой основная теорема единственности разложения комплексного числа на простые множители. Куммер применил свою теорию для получения ряда важных результатов относительно теоремы Ферма и законов взаимности. Позднее Кронекер применил теорию Куммера к алгебре. Но общей теории комплексных чисел [5] не существовало.

Золотарев говорит: «Я изложу в этой главе теорию комплексных чисел, зависящих от корней неприводимого уравнения

$$F(x)=0$$

какой-нибудь степени с целыми коэффициентами, из которых коэффициент высшего члена равен единице. Для того чтобы не усложнить теории, исключены некоторые особенные функции $F(x)$, которые мы характеризуем ниже и которые рассмотрим при другом случае. Эта теория основана на свойствах функциональных сравнений, изложенных в главе I этого сочинения» [224, стр. 241—242].

---

[5] Попытки создания общей теории были сделаны Дедекиндом [150] и Зеллингом [152]. Комплексные числа общего вида интересовали и Эрмита.

$F(x)$, многочлен степени n, Золотарев раскладывает на простые множители по модулю p:

$$F(x) \equiv V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} \pmod p$$

или

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} + p \cdot F_1(x).$$

Здесь $V = V(x)$, $V_1 = V_1(x), \ldots, V_s = V_s(x)$ — различные, простые функции от x по $\operatorname{mod} p$, $F_1(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами (степени $< n$).

Золотарев предлагает считать, что произведение комплексных чисел $\varphi(x_0)\psi(x_0)$ делится на p, если функция $\varphi(x)\psi(x)$ делится на $F(x)$ по модулю p, и обратно: если функция $\varphi(x)\psi(x)$ делится на $F(x)$ по модулю p, то произведение комплексных чисел $\varphi(x_0)\psi(x_0)$ делится на p.

Например, пусть $p = 13$, $F(x) = x^2 - 3$; корни уравнения $x^2 - 3 = 0$ $x_0 = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\sqrt{3}$. Возьмем комплексные числа $\varphi(\sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$ и $\psi(\sqrt{3}) = 5 + 2\sqrt{3}$.

Требуется проверить, делится ли число $(4 + \sqrt{3}) \times \times (5 + 2\sqrt{3})$ на 13.

Разложим $F(x)$ на множители по mod 13:

$$x^2 - 3 \equiv x^2 - 16 \equiv (x - 4)(x + 4) \pmod{13}.$$

Следовательно,

$$F(x) \equiv V V_1 \equiv (x - 4)(x + 4) \pmod{13},$$

где

$$V(x) = x - 4, \quad V_1(x) = x + 4.$$

Тогда

$$\psi(x) = 5 + 2x \equiv 2V \pmod{13};$$

действительно,

$$5 + 2x \equiv 2(x - 4) \pmod{13},$$

а

$$\varphi(x)\psi(x) \equiv 2VV_1 \pmod{13},$$

так как и

$(x + 4)(2x + 5) = 2x^2 + 13x + 20 = 2x^2 + 7 \pmod{13}$, и $2(x + 4)(x - 4) = 2x^2 - 32 = 2x^2 - 39 + 7 \equiv 2x^2 + 7 \pmod{13}$.

Поэтому функция $\varphi(x)\psi(x)$ делится на VV_1 по $\operatorname{mod} p$, а потому комплексное число $(4+\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})$ делится на 13.

В следующем параграфе Золотарев исследует вопрос, как узнать, делится ли норма комплексного числа $\varphi(x_0)$ на p, не вычисляя этой нормы [x_0 — корень уравнения (1)].

Необходимое и достаточное условие того, чтобы норма какого-нибудь комплексного числа $\varphi(x_0)$ делилась на p, состоит в том, чтобы функция $\varphi(x)$ делилась по модулю p на одну из функций V, V_1, $\ldots$, V_s.

Отсюда следует теорема, которую автор доказывает в § 42.

«Если норма одного из комплексных чисел $V(x_0)$, $V_1(x_0)$, $\ldots$, $V_s(x_0)$, например $NV(x_0)$, делится на p в степени, высшей ν, то она содержит p в степени, кратной ν» [224, стр 246]. В § 43 автор снова обращается к уравнению

$$F(x)=V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}+pF_1(x).$$

Он доказывает, что если какое-нибудь из чисел m, m_1, $\ldots$, m_s равно единице, то можно предположить, что $F_1(x)$ не делится по $\operatorname{mod} p$ на ту функцию, которая имеет этот показатель.

Если же $F_1(x)$ делится по модулю p на какую-нибудь из функций (например, $V(x)$) с показателем $m>1$, то комплексные числа, зависящие от корней таких уравнений $F(x)=0$, обладают особыми свойствами, и, «желая в настоящем сочинении представить теорию комплексных чисел в самом простом виде, мы исключим такие комплексные числа из нашего исследования и изложим свойства их при другом случае» [224, стр. 249].

Следующий параграф (§ 44) назван «Постановка главного вопроса, решение которого содержится в этой главе».

Главная задача сформулирована так: «Узнать, делится ли одно комплексное число на другое, не производя деления на самом деле, а рассматривая каждое из этих чисел отдельно» [224, стр. 250]. Для комплексных чисел вида $a+bi$ эта задача решается с помощью разложения числа на простые множители. Здесь это неприменимо, так как рассматриваемое комплексное число может быть разложено на простые множители несколькими способами. Так, если рассматривать комплексные числа, зависящие от корней уравнения $x^2+11=0$, число 15 можно представить как произведение чисел 5 и 3 т. е. $15=3\cdot 5$, и как произведение чисел $(2+\sqrt{-11})$ и $(2-\sqrt{-11})$ т. е. $15=(2+\sqrt{-11})(2-\sqrt{-11})$.

Сами числа 3, 5, $2+\sqrt{-11}$ и $2-\sqrt{-11}$ не могут уже быть разложены на множители вида $a+b\sqrt{-11}$. Для того чтобы разложение на простые множители стало единственным, в следующих параграфах вводится понятие идеальных множителей.

Золотарев классифицирует простые числа [224, стр. 250—251] следующим образом: «Всякое обыкновенное простое число p, относительно которого $F(x)$ есть простая функция, будем считать простым и в ряду комплексных чисел, зависящих от корня уравнения $F(x)=0$ (неприводимого, степени n).

Остальные обыкновенные простые числа в ряду этих комплексных чисел считаем сложными. Первые простые p не делятся ни на какие комплексные числа, кроме p и комплексных единиц». Напомним, что простой функцией по модулю p Золотарев называет функцию, не делящуюся по модулю p ни на какую функцию меньшей степени.

Пусть относительно p функция $F(x)$ не является простой.
Тогда

$$F(x)\equiv V^m V_1^{m_1}\ldots V_s^{m_s} \pmod p$$

или

$$F(x)=V^m V_1^{m_1}\ldots V_s^{m_s}+p\cdot F_1(x),$$

где $F_1(x)$ не делится по модулю p ни на одну из функций $V, V_1, \ldots, V_s$, а $V, V_1, \ldots, V_s$ — простые функции по mod p степеней $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_s$. Такое число p мы будем считать сложным в ряду комплексных чисел и состоящим из m одинаковых простых множителей, принадлежащих функции V, из m_1 одинаковых простых множителей, принадлежащих функции V_1, и т. д. Это определение относительно p принимается независимо от того, разлагается ли p в действительности на столько комплексных множителей.

Эти множители могут оказаться комплексными числами, могут оказаться не существующими. В обоих случаях их называют идеальными множителями. Пусть $f(x_0)$ — комплексное число. Говорят, что $f(x_0)$

делится на простой идеальный множитель числа p, принадлежащий функции V, если $f(x)$ делится на V по $\mathrm{mod}\ p$. Дальше доказывается несколько теорем об идеальных числах, и среди них такие.

1. Если комплексное число $\varphi(x_0)$ содержит идеальный множитель числа p, принадлежащий функции V, λ раз, а комплексное число $\psi(x_0)$ не делится на этот множитель, то произведение $\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$ содержит этот множитель равно λ раз.

2. Произведение комплексных чисел $\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$ содержит идеальный множитель числа p, принадлежащий функции V, ровно столько раз, сколько оба множителя $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$ вместе.

Дальше рассматривается разложение комплексного числа $\varphi(x_0)$ на простые множители (единственное):

$$\varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots d_l^{\lambda_l} \varphi_1(x_0),$$

где $\varphi_1(x_0)$ — какая-нибудь комплексная единица, а d_1, $d_2, \ldots, d_l$ — различные простые идеальные множители, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — их кратности. Это обобщение обыкновенного разложения на простые множители для чисел вида $a+bi$. Затем Золотарев перечисляет некоторые теоремы, аналогичные тем, которые имеют место для обычных целых чисел.

В следующих параграфах Золотарев выводит теории целых комплексных чисел Гаусса и Куммера как частные случаи из теории своих комплексных чисел. Дальше Золотарев говорит о том, что всегда можно найти конечное число идеальных чисел, таких что произведение одного из них и какого угодно идеального числа будет существующим комплексным числом. Затем Золотарев устанавливает, что все идеальные числа распределяются в определенное и конечное число классов, так что каждое идеальное число относится к одному определенному классу. Утверждается, что каждое идеальное число возвышением в некоторую целую степень можно обратить в существующее, т. е. каждое идеальное число можно представить как корень из существующего.

В четвертой главе дается приложение теории комплексных чисел к одному вопросу интегрального исчисления (об этой части работы см. в разделе «Работы Золотарева по интегрированию алгебраических функций»).

Следующая работа о комплексных числах «Sur les nombres complexes» [229], представленная Академии 13 сентября 1877 г., была напечатана в 1878 г.

В докторской диссертации были исключены из рассмотрения простые числа p, такие что $F_1(x)$ делится по модулю p на одну из функций $V, V_1, \ldots, V_s$, которой соответствует показатель степени, больший единицы, в равенстве

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} + pF_1(x).$$

Функции $F(x)$, для которых существуют такие простые числа p, рассматриваются как исключительные среди всех целых функций с целыми коэффициентами. Кроме того, для каждой из этих функций количество таких чисел ограничено. «Я должен рассмотреть разложение на множители этих особенных простых чисел», — пишет Золотарев. Он доказывает здесь основную теорему для исключительного случая, не приводя всех ее следствий. Эта небольшая статья, вышедшая в 1878 г. в Петербурге, за границей оставалась почти неизвестной, хотя реферат ее, написанный Поссе, был опубликован в Jahrbuch'е рядом с рефератом работы Дедекинда «Sur la théorie des nombres entiers algébriques» [151]. Поссе писал, что в статье рассмотрен особый случай, исключенный из рассмотрения в докторской диссертации, что «автор расширяет область целых комплексных чисел, рассматривая как целые комплексные числа вида

$$\frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}}{Q}$$

(где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, Q$ — целые числа), удовлетворяющие уравнению

$$\zeta^l + \varphi_1\zeta^{l-1} + \ldots + \varphi_{l-1} = 0$$

с целыми коэффициентами». Приведена была формулировка основной теоремы, доказанной в статье.

Во время поездки во Францию летом 1876 г. Золотарев передал Резалю, издателю журнала Лиувилля, свою статью о комплексных числах, где подробно рассматривался случай, исключенный из рассмотрения в докторской диссертации. Статья была готова еще весной. Об этом свидетельствуют слова Коркина в представлении Золотарева в экстраординарные профессора: «В последнее время он пополнил совершенно один пробел, существовавший до сих пор и в теории Куммера и в его собственной, так что теперь теория г. Золотарева является совершенно общею и не претерпевает никаких исключений» [32, стр. 35—37].

5 июля 1876 г. Золотарев сообщает Коркину из Парижа: «Я сдал Resal'ю мемуар о комплексных числах. Случаи дополнительные, которые я прежде исключил, заняли довольно много места. Я очень рад, что покончил с этой работой и что все случаи разобраны».[6]

Заботы и труды, связанные с избранием в Академию, отвлекли его внимание от этой статьи. Потом — неожиданный конец. Статья продолжала лежать у Резаля. В то же время (с 1871 г.) выходят работы Дедекинда [150]. Первоначально Дедекинд пытался обосновать общую теорию делимости целых алгебраических чисел с помощью функциональных сравнений, но потерпел неудачу и пошел по другому пути. В статье [153] Дедекинд писал:

> «Новые принципы, с помощью которых я пришел к строгой и не имеющей исключений теории идеалов, я развил вначале в появившемся 7 лет назад втором издании „Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet" [150] (§§ 159—170) и снова в „Bull. des sciences math. et astronom". [151] (t. XI, p. 278; t. I (2-e sér.), pp. 17, 69, 144, 207), более подробно и в несколько измененной форме. Этим предметом я занимался уже до этого на протяжении многих лет, привлеченный к нему великим открытием Куммера, причем исходил из совсем другого основания, а именно из теории сравнений высших степеней. Однако, хотя эти исследования подводили меня очень близко к желанной цели, я все же не мог решиться на их опубликование, потому что построенная таким образом теория страдала двумя существенными несовершенствами. Первое состояло в том, что исследование области целых алгебраических чисел основывается в первую очередь на рассмотрении одного определенного числа и определяющего его уравнения, которое должно быть

[6] ААН, ф. 759, оп. 4, д. 84/2, лл. 7—8 об. (Л.), письмо Золотарева; см. также: ААН, ф. 289, оп. 1, № 7, л. 3 об., примечание (Л.).

понимаемо как сравнение, и что полученные таким образом определения идеальных чисел (или, вернее, делимости на идеальные числа) вследствие этого не сразу позволяют установить характер инвариантности этой выбранной формы представления, который в действительности присущ этим понятиям.

Второе несовершенство этого вида обоснования заключается в том, что иногда встречаются исключительные случаи, требующие особого рассмотрения. Моя новая теория, напротив, основывается исключительно на таких понятиях, как понятие поля целых чисел, понятие идеала, определение которых вовсе не нуждается в установленных формах представления чисел, и благодаря этому отпадает сам собой первый из указанных недостатков. Сила этих чрезвычайно простых понятий проявляется также в том, что при доказательстве общей теоремы делимости не возникает необходимости рассмотрения многих случаев. О связи между обоими видами обоснования я поместил в „Göttingische gelehrten Anzeigen“ [7] 20 сентября 1871 г. (стр. 1488—1492) некоторые замечания и теоремы без доказательства, вскрыв также основу, на которой покоится появление упомянутых случаев. С тех пор в 1874 г. появилась „Теория идеальных чисел“ Золотарева на русском языке, сообщение о которой и краткое изложение под заглавием „Théorie des nombres entiers complexes avec une application aux calcul integral“ имеется в „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ (Bd. 6, S. 117). (Только на нем я могу основываться, хотя у меня есть и сама работа, которую я после долгих напрасных попыток приобрести в книжных магазинах получил благодаря любезности г. профессора Вангерина, но при моем незнании русского языка, к большому сожалению, я смог понять лишь то немногое, что ясно из вида формул). Из этого сообщения следует, что теория Золотарева также основана на теории сравнений высших степеней, но как раз рассмотрение упомянутых исключительных случаев пока исключено и оговаривается их изложение в будущем. Я не знаю,

[7] «Gesammelte mathem. Werke», Bd. 3, 1932, S. 399—407.

было ли опубликовано это имевшееся в виду дополнение. . .».

Позднее Дедекинд ознакомился и со статьей Золотарева 1880 г., но не отметил, что Золотарев рассмотрел в ней исключительные случаи. В предисловии к 3-му изданию книги Дирихле [150] Дедекинд обращает внимание читателя на работы Зеллинга и Золотарева, «в которых теория идеалов основана на теории сравнений высших степеней. . .» (стр. 93, прим. 5). Интересно отметить, что книга эта вышла, судя по дате на обложке, в 1879 г., а предисловие Дедекинда помечено 11 ноября 1880 г.

Коркин был обеспокоен судьбой работ своего покойного друга. Он написал Резалю письмо. Тот ответил 3 октября 1879 г.: «Спешу уведомить Вас о получении письма. . . Так как я, разумеется, не получал писем от г. Золотарева, о смерти которого я не знал, то его мемуар был отложен в сторону, с тем бо́льшим основанием, что я не знал, как быть с корректированием. В этом году я получил. . . от г. Владимира Максимовича, который мне сообщил о кончине г. Золотарева. Я собрал мемуар как будто полностью. Г-н Максимович, который сейчас в отъезде, обещал исправить ошибки по своем возвращении. Мемуар сможет появиться по частям в № журнала за 1880 г.».[8]

Таким образом, пролежав 4 года в редакции журнала Лиувилля-Резаля, статья Золотарева, наконец, увидела свет. Золотарев блестяще преодолел в ней трудности, которые остановили на этом пути искусного и опытнейшего математика Дедекинда. Но иностранные математики, знавшие уже теорию алгебраических чисел Дедекинда, не обратили на статью Золотарева особого внимания. Те, кто знал его докторскую диссертацию, подумали, что статья ничего нового не содержит.

В первой части статьи «Sur la théorie des nombres complexes» [232] Золотарев рассматривает целые комплексные числа, определенные совершенно так же, как в докторской диссертации. Изложение результатов, полученных в докторской диссертации по теории целых комплексных чисел, несколько усовершенствовано и более кратко. В §§ 15—21 Золотарев показывает, каким образом из его

---

[8] ААН, ф. 759, оп. 4, д. 84/6, л. 1—1 об. (Л.).

теории получаются как частные случаи теории комплексных чисел Гаусса и Куммера.

В § 22 Золотарев говорит, что осталось рассмотреть исключительные случаи, когда

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} + pF_1(x),$$

где $F_1(x)$ делится по модулю p на одну из функций V, показатель которой $m > 1$.

Для таких чисел не выполняется свойство, доказанное в § 13, а именно: если $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ — не целое, то оно не может удовлетворять никакому уравнению вида

$$z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Напротив, пусть

$$\zeta = \frac{V^{m-1} V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}}{p}$$

— комплексное число исключительного вида. Оно удовлетворяет уравнению

$$\zeta^N + q_1 \zeta^{N-1} + \ldots + q_N = 0 \qquad (2)$$

с целыми коэффициентами.

Из-за этого свойства исключительных модулей приходится обобщить понятие целых комплексных чисел. Дается новое определение: «Каждое комплексное число

$$y = a + bx + \ldots + lx^{l-1}$$

(a, b, ..., l — рациональные числа) будет называться целым, если оно удовлетворяет уравнению вида (2):

$$\zeta^N + q_1 \zeta^{N-1} + \ldots + q_N = 0$$

с целыми коэффициентами»[9] [232, стр. 105—106].

В дальнейших параграфах Золотарев рассматривает теорию делимости этих новых комплексных чисел.

Подробный разбор исследований Золотарева по теории делимости целых комплексных чисел, историю вопроса

---

[9] Золотарев делает замечание, что если y — рациональная функция с целыми коэффициентами, то степень уравнения (2) можно предположить равной степени уравнения (1).

и установление связи этой теории с современными методами алгебраической теории чисел можно найти в работе И. Г. Башмаковой [139]. Сравнение и установление эквивалентности теорий Дедекинда и Золотарева было произведено И. И. Ивановым [154, 155]. Он показал, что теория идеальных множителей Золотарева эквивалентна теории идеалов Дедекинда. «Однако если результаты обеих теорий и одинаковы, что вполне естественно, то идеи и методы, положенные в основании обеих теорий, глубоко различны» [139, стр. 331].

Замечания об исследованиях Золотарева, Дедекинда и других математиков по теории алгебраических чисел имеются в примечаниях О. Оре к работе Дедекинда [156, стр. 230—232]. Изложение теории делимости алгебраических чисел по Золотареву дано в сочинении Ю. В. Сохоцкого [157].

Исследования в области алгебраической теории чисел были продолжены в работах Д. А. Граве, В. П. Вельмина, Н. Г. Чеботарева [140], [141], [158—161].

Причиной почти одновременного появления теорий Золотарева, Дедекинда, а несколько позднее Кронекера, является то обстоятельство, что почва для этих исследований была уже подготовлена работами Эйлера, Гаусса, Коши, Ламе, Куммера, Дирихле, Зеллинга. Так же случилось некогда с трудами Абеля и Якоби по теории эллиптических функций, с открытием неевклидовой геометрии Лобачевским, Бойяи и Гауссом.

Глава 7

РАБОТЫ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА ПО ИНТЕГРИРОВАНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вопросам интегрирования алгебраических функций посвящены статья «О методе интегрирования Чебышева» [219] и четвертая глава докторской диссертации Золотарева. Задача сформулирована Золотаревым так: «Узнать при помощи конечного числа действий, можно ли подобрать в дифференциале

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}}, \tag{1}$$

где γ, δ, ε, ζ — некоторые вещественные коэффициенты, параметр A таким образом, чтобы этот дифференциал интегрировался в логарифмах» [219, стр. 280].

Пусть $R(x)$ — многочлен степени $2n$.

Абель показал [162], что если $\sqrt{R(x)}$ разлагается в непрерывную периодическую дробь, то при помощи подходящих дробей можно найти многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$P^2(x)-Q^2(x)\,R(x)=C, \quad (C=\mathrm{const}),$$

а тогда и многочлен $\rho(x)$, для которого интеграл $\int\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ выражается через элементарные функции. Но будет дробь периодической или нет — определить трудно. Общего критерия для этого нет. Золотарев указывает: «Несмотря на все значение упомянутых исследований Абеля для анализа, следует все-таки заметить, что они прямо не дают желаемого критериума для того, чтобы узнать, выражается ли в логарифмах некоторый данный дифференциал вида $\frac{\rho dx}{\sqrt{R(x)}}$, потому что как бы мы много ни вычисляли неполных частных непрерывной дроби, в которую разлагается $\sqrt{R(x)}$, мы никогда не можем сказать, что периодичность не обнаружится далее. До сих пор мы не имеем относительно общего дифференциала $\frac{\rho dx}{\sqrt{R(x)}}$ такого критериума, при помощи которого можно было бы решить после конечного ряда действий, интегрируется ли этот дифференциал в логарифмах» [219, стр. 282].

Золотарев занялся этим вопросом, желая установить связь метода Чебышева интегрирования таких дифференциалов с исследованиями Абеля и Якоби. Для частного случая, когда коэффициенты многочлена 4-й степени γ, δ, ε, ζ — рациональные числа, Чебышев изложил без доказательства свой метод интегрирования таких дифференциалов [149]. Он указал последовательность операций, которая приводит к вычислению интеграла $\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ в том случае, когда он может интегрироваться в конечном виде. Если же после конечного числа шагов операции не приводят к цели, то интегрирование невозможно. Число операций по методу Чебышева ограничено, оно не превышает числа решений в целых числах некоторой системы неопределенных уравнений с заданными коэффициентами.

В своей статье «О методе интегрирования г. Чебышева» Золотарев дал доказательство метода Чебышева для случая, когда многочлен $R(x)$ имеет рациональные коэффициенты. При этом он использовал условия интегрируемости дифференциала (1), отличные от тех, которые были даны Абелем. Это были условия интегрируемости, указанные в статье Вейерштрасса [165] для общего случая, когда рассматривается интеграл от рациональной функции от x и квадратного корня из полинома 4-й степени. Условия, приведенные в статье Вейерштрасса, устанавливают связь задачи интегрирования указанных дифференциалов с задачей из теории эллиптических функций.

В докторской диссертации Золотарев решил ту же задачу для случая, когда многочлен $R(x)$ имеет вещественные коэффициенты. Правда, из рассмотрения исключался случай, когда коэффициенты γ, δ, ε, ζ зависят от корней уравнений, исключенных Золотаревым из рассмотрения в третьей главе. Позднее Золотарев изложил теорию делимости целых алгебраических чисел без всяких исключений, но не успел дать ее применение к задаче об интегрировании.

Метод Золотарева существенно отличен от методов, применявшихся Чебышевым. В то время как Чебышев пользуется чисто алгебраическими преобразованиями, Золотарев использует теорию эллиптических функций. Вначале он приводит дифференциал

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}} \tag{1}$$

к виду

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}, \tag{2}$$

где $1<\alpha<\beta$. Затем интеграл от (2) выражает в эллиптических функциях с помощью подстановки

$$x=\frac{\mathrm{sn}^2(u,k)}{\mathrm{sn}^2(u,k)-\mathrm{sn}^2(a,k)},$$

где

$$\mathrm{sn}^2 a=\frac{\beta-1}{\beta}; \quad k^2=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{\beta-1}; \quad \alpha=\frac{1}{dn^2 a}; \quad \beta=\frac{1}{cn^2 a}.$$

От дифференциала (2) он переходит к дифференциалу (3)

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)}}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_1=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\beta-\alpha}\right)^2, \quad \beta_1=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\right)^2,$$

и снова интеграл от (3) выражает в эллиптических функциях. Выясняется, что z получается из x с помощью так называемого преобразования Ландена.[1] Золотарев

[1] Об эллиптических функциях и преобразовании Ландена см., например, [166, стр. 188—214] или [116, стр. 125—238].

устанавливает новый вид условий интегрируемости: «Условие интегрируемости дифференциала

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

в логарифмах можно выразить еще таким образом: если при вычислении α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 и т. д. по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\beta-\alpha}\right)^2, \quad \alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\beta_1-\alpha_1}\right)^2, \ \ldots \\ \beta_1 &= \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\right)^2, \quad \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\alpha_1-\beta_1}\right)^2. \ \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

получаются параметры α_μ и β_μ, равные соответственно α_m и $\beta_m (\mu > m)$, то далее параметры будут уже повторяться и дифференциал

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

при некотором значении A интегрируется в логарифмах. Обратно, когда этот дифференциал интегрируется в логарифмах, параметры α и β будут повторяться периодически» [224, стр. 310]. Затем Золотарев переходит к решению основного вопроса: узнать при помощи конечного числа действий, интегрируется ли в логарифмах дифференциал (2). Золотарев делит всевозможные значения параметров α и β на 3 класса. К первому относит такие α и β, между которыми нет ни одной зависимости вида $F(\alpha, \beta) = 0$, где $F(\alpha, \beta)$ — многочлен с целыми коэффициентами. В этом случае дифференциал не интегрируется в логарифмах. Ко второму классу он относит значения α и β, между которыми имеют место только такие уравнения $F(\alpha, \beta) = 0$, которые все являются следствием одного уравнения $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ с целыми коэффициентами. В этом случае число различных систем параметров α_k, β_k, полученных по формулам (4), не превзойдет некоторого числа. Если число вычисленных систем параметров превосходит это число и периодичности не обнаруживается, значит дифференциал не интегрируется в логарифмах. К третьему классу относятся α и β, между которыми существует по крайней мере два соотношения с целыми коэффициентами: $F(\alpha, \beta)=0$ и $F_1(\alpha, \beta)=0$, где $F(\alpha, \beta)$ и $F_1(\alpha, \beta)$ не имеют общего делителя. В этом случае параметры α, β периодически повторяются. Чтобы найти верхнюю границу для числа членов периода, Золотарев пользуется своей теорией комплексных чисел. Подробное изложение этой части диссертации Золотарева дано в статье Р. О. Кузьмина [137].

Чебышев высоко оценил труды Золотарева в области интегрирования алгебраических функций. Он писал в отзыве о докторской диссертации Золотарева [30, стр. 299]: «В последней IV главе наш доцент показывает приложение теории комплексных чисел в общем виде к решению одного вопроса интегрального исчисления, а именно об интегрировании дифференциала:

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\xi}}\,.$$

«Приложение это заслуживает особенного внимания по двум причинам: во-первых, вопрос интегрального исчисления, которым занимается Е. И. Золотарев, есть тот, на котором остановилась первая часть интегрального исчисления, так как случай квадратного радикала из полинома первой и второй степени давно решен, случай же третьей и четвертой степени приводится к вопросу, рассмотренному г. Золотаревым. Во-вторых, до сих пор мы знаем очень мало приложений теории чисел к вопросам определенного анализа и эти приложения считаются весьма важными приобретениями для математики».

Исследования Чебышева и Золотарева были продолжены И. Л. Пташицким [167, 168], И. П. Долбней [169, 175]. Я. В. Успенский писал: «Известно, что русским математикам Чебышеву и Золотареву принадлежит полное решение вопроса о том, будет ли интеграл от функции, рациональной относительно x и квадратного корня из данного полинома третьей или четвертой степени, выражаться в логарифмах или нет. В названной работе [171] Андрей Андреевич [Марков] решает для частного случая в некотором смысле обратный вопрос: предполагая, что отношение $\frac{c}{d_1}$ есть число квадратичной области, найти все случаи, когда интеграл

$\int \frac{x\,dx}{(x^3+c)\sqrt[3]{x^3+d_1}}$ выражается в логарифмах» [170, стр. 25—26].

Вопросы типа решенных Золотаревым интересуют и некоторых современных математиков. Польский математик Шинцель [172] пишет, что метод решения вопроса об интегрировании дифференциалов вида $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, где $R(x)$ — многочлен 4-й степени, был дан Чебышевым, а его доказательство найдено Золотаревым; теперь может быть указан другой метод, в действительности базирующийся на той же самой идее, но быстрее приводящий к цели.

Интересные замечания, связанные с этим кругом исследований Золотарева, имеются в работах Н. Г. Чеботарева [173, 174].

Глава 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАКОНА ВЗАИМНОСТИ

Квадратичным законом взаимности простых чисел называют в теории чисел следующее утверждение: если p и q — различные простые нечетные числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Здесь $\left(\frac{p}{q}\right)$ — символ Лежандра. Он определяется для всех p, не делящихся на q. Символ Лежандра равен 1, если p — квадратичный вычет по модулю q, и равен —1, если p — квадратичный невычет.[1] К закону взаимности примыкают также два дополнительных утверждения:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Доказательств закона взаимности существует очень много. Среди них доказательства Гаусса, Коши, Эйзенштейна, Куммера, Буняковского, Золотарева. В черновых тетрадях Золотарева есть ряд записей, относящихся к закону взаимности. Еще в университете Золотарева заинтересовал этот закон. В студенческих тетрадях есть записи изложения этого вопроса в лекциях Чебышева. В тетради № 5 (1873—1874 г.) имеется «Обзор существующих доказательств закона взаимности»,[2] где перечислено несколько различных доказательств закона взаимности и излагаются различные доказательства за-

[1] См. стр. 89, примеч. 2.

[2] ААН, ф. 289, оп. 1, № 5, лл. 103 об.—108.

кона, данные Гауссом. На III съезде русских естествоиспытателей в 1871 г. Золотарев выступил с сообщением о своем доказательстве закона взаимности [192, стр. 6]. Затем, в 1872 г., это доказательство было напечатано. Изложение статьи Золотарева и комментарий к ней имеются в статье И. Г. Мельникова и И. Ш. Славутского [176]. Золотарев вводит понятие характера произвольной перестановки относительно обычного расположения чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1, \tag{1}$$

где p — простое число. Пусть

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{p-1} \tag{2}$$

— другое расположение элементов (1). Говорим, что характер перестановки (2) относительно (1) равен 1 или —1 в зависимости от того, будет ли число инверсий в расположении (2) относительно (1) четным или нечетным. Доказательство Золотарева базируется на известном алгебраическом факте: транспозиция меняет характер перестановки.[3]

Первая лемма («Лемма Золотарева»), названная известным математиком Фробениусом «интереснейшей леммой», утверждает следующее: «Пусть k — целое, не делящееся на простое p. Тогда характер перестановки, составленной из наименьших положительных вычетов чисел

$$k,\ 2k,\ \ldots,\ (p-1)k \tag{3}$$

по модулю p, относительно натуральной перестановки (1) равен символу Лежандра $\left(\frac{k}{p}\right)$». Следуя статье Мельникова и Славутского [176, стр. 214—215], изложим доказательство леммы Золотарева, найденное А. А. Киселевым.

Рассмотрим подстановку

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & l, & \ldots, & p-1 \\ k, & 2k, & \ldots, & lk, & \ldots, & (p-1)k \end{pmatrix}.$$

---

[3] Все необходимые сведения о понятиях перестановки, транспозиции, инверсии есть, например, в «Высшей алгебре» Л. Я. Окунева (М., 1958).

Здесь l переходит в kl, kl переходит в k^2l, $k^{\delta-1}l$ переходит в $k^\delta l \equiv l \pmod p$, где k принадлежит показателю δ по модулю p. Длина δ рассматриваемого цикла $(l, kl, \ldots \ldots, k^{\delta-1}l)$ не зависит от l и определяется числом k, так что указанная подстановка распадается на $\frac{p-1}{\delta}$ циклов:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & l, & \ldots, & p-1 \\ k, & 2k, & \ldots, & lk, & \ldots, & (p-1)k \end{pmatrix} = \Pi(l, lk, \ldots, lk^{\delta-1}) =$$
$$= \Pi(l, lk)(l, lk^2)\ldots(l, lk^{\delta-1}).$$

Таким образом, характер (3) относительно (1) равен $(-1)^{\frac{p-1}{\delta}(\delta-1)}$. Если теперь k — квадратичный вычет, т. е. $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$, то δ делит $\frac{p-1}{2}$, так что $\frac{p-1}{\delta}$ — четное и, следовательно, $\frac{p-1}{\delta}(\delta-1)$ — четное. Если же k — квадратичный невычет, то из $k^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ и $k^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod p$ следует, что δ делит $p-1$, но δ не делит $\frac{p-1}{2}$, т. е. δ — четное, $\frac{p-1}{\delta}$ — нечетное и, значит, $\frac{p-1}{\delta}(\delta-1)$ — нечетное число.

Доказав лемму, Золотарев рассматривает ряд

$$1, 2, \ldots, pq-1, \tag{4}$$

где p и q — различные нечетные простые числа, и ряд $q, 2q, \ldots, (p-1)q, p, p+q, p+2q, \ldots, p+(p-1)q, 2p, 2p+q, 2p+2q, \ldots, 2p+(p-1)q, \ldots, (q-1)p,$

$$(q-1)p+q, \ldots, (q-1)p+(p-1)q. \tag{5}$$

Оба ряда имеют по $pq-1$ членов, которые все несравнимы по модулю pq, так что вычеты ряда (5) по модулю pq образуют некоторую перестановку ряда (4).

Можно подсчитать число транспозиций при переходе от ряда (5) к ряду (4), осуществляемом двумя различными путями. Один способ дает число $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$, другой дает $\left(\frac{q}{p}\right)$. Отсюда и получается квадратичный закон взаимности. Существуют и другие доказательства леммы Золотарева, до сих пор привлекающей внимание математиков [177, 178].

Глава 9

ЧЕРНОВЫЕ ТЕТРАДИ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА

Черновые тетради Золотарева хранятся в Архиве Академии наук в Ленинграде и Москве. Полный обзор их содержания — дело будущего. Здесь ограничимся лишь кратким описанием и выдержками из них.

Первые из этих тетрадей относятся к 1863 г. Последняя — к 1877/78. Среди них студенческие тетради с конспектами лекций и расписаниями занятий и экзаменов. Тетради Золотарева-ученого с конспектами статей различных авторов, программами читаемых им курсов и программами собственных научных исследований. В тетрадях есть черновики печатных работ Золотарева и совместных работ Золотарева и Коркина, переводы их на французский язык.

Часто почти все рукописное наследие ученого состоит из черновиков печатных работ и подготовительных материалов к этим работам. У Золотарева дело обстоит иначе. Он умер внезапно, в расцвете творчества. Смерть прервала планы задуманных исследований и не дала закончить начатые статьи. Некоторые задачи в черновых тетрадях им только поставлены, другие находились в процессе решения, некоторые он собирался вскоре опубликовать.

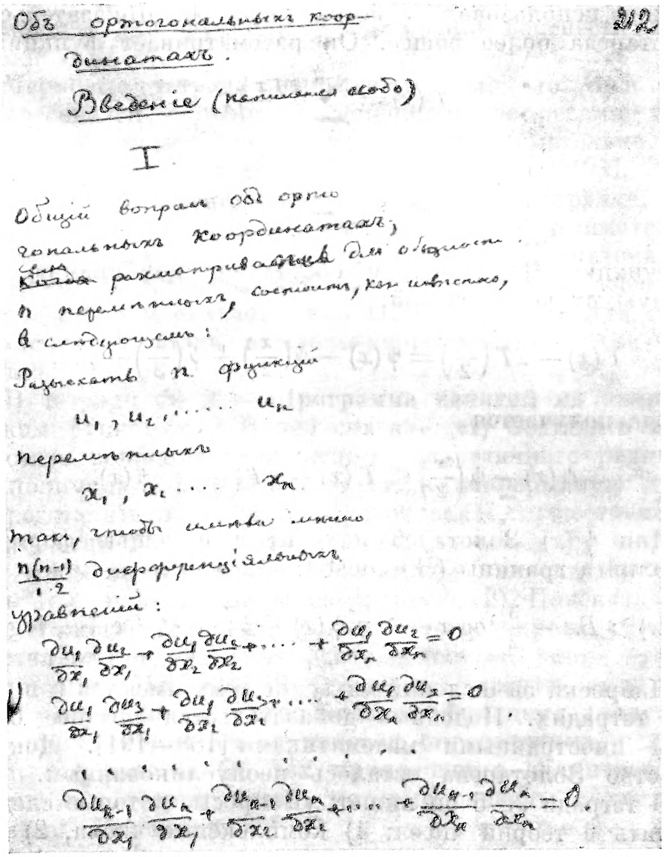
Приведем несколько примеров. В письме Коркину из Парижа Золотарев (см. стр. 34, прим. 13) пишет о том, что Эрмиту очень понравилось его доказательство одной теоремы относительно модулей эллиптических функций (см. стр. 34, прим. 12). Эрмит предложил Золотареву написать заметку об этом для «Comptes rendus», и тот обещал сделать это впоследствии, так как в то время он был занят другими вещами и «отчасти рассеян». Статья напечатана не была, а план доказательства теоремы, о которой шла речь, содержится в черновых тетрадях. В тетради № 4 приведена «Программа статьи о модулях и полных аргументах эллиптических функций:[1] начать с исследования функций $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{k'}$. Затем исследование выражений $\frac{2K}{\pi}$ через q. Различные значения этого выражения для ϖ, заключенных в формуле $\frac{a_0 + b_0\varpi}{a_1\varpi - b_1}$. Исследование K и K' как функций σ. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют эти величины. Доказательство теоремы, что для всех σ, модуль которых не больше 1, действит[ельно] существует часть $\frac{K'}{K}$ положительная. (Замет[ки] [о многочленах] Эрмита [187, стр. 81—82] в итальянском журн[але] 1869 года). Дальнейшие теоремы».

В тетради № 7 — подготовленный к печати кусок статьи «Об ортогональных координатах» (рис. 8), которой мы не обнаружили среди опубликованных работ Золотарева. Здесь же план исследований по теории ортогональных поверхностей: «Вопросы, относящиеся к теории ортогональных поверхностей: 1) выяснить себе: одним или двумя уравнениями 3-го порядка с частными производными выражаются условия, необходимые и достаточные для существования трех систем ортогональных поверхностей; 2) выяснить себе: два условия, данные мною для ортогональности, будут ли они действительно независимые, т. е. не содержится ли одно в другом; 3) составить, если возможно, условие ортогональности в общем виде; 4) геометрические и кинематические следствия условий ортогональности трех систем поверхностей; 5) разыскание систем, обладающих особенно простыми и замечательными свойствами; 6) обобщение вопроса об ортогональных поверхностях на n переменных».[2]

До сих пор не было известно, что Золотарев интересовался законом распределения простых чисел, но в тет-

---

[1] ААН, ф. 289, оп. 1, № 4, л. 214 (Л.).
[2] Там же, № 7, л. 18 об.



Объ ортогональныхъ координатахъ. 212

Введеніе (напишется особо)

I.

Общій вопросъ объ ортогональныхъ координатахъ, ~~Когда~~ если разсматривать для общности n перемѣнныхъ, состоитъ, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ:

Разыскать n функцій

$u_1, u_2, \ldots u_n$

перемѣнныхъ

$x_1, x_2 \ldots x_n$

такъ, чтобы имѣли мѣсто

$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ дифференціальныхъ

уравненій:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\frac{\partial u_2}{\partial x_n}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\frac{\partial u_3}{\partial x_n}=0$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0.$$

Начало статьи «Об ортогональных координатах» (из черновых тетрадей Е. И. Золотарева).

ради № 6 находим набросок доказательства теоремы о границах для функции Чебышева $\psi(x)$.[3]

В работе «О простых числах» [15] Чебышев существенно использовал свойства числа 30. Доказательство Золотарева более общее. Он рассматривает функцию

$$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right),$$

где

$$\psi(x)=\sum_{p^{\alpha}\leqslant x,\ \alpha\geqslant 2}\log p$$

— функция Чебышева, и составляет комбинацию, отличную от чебышевской:

$$T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)=\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)-\ldots,$$

откуда получается

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\psi(x).$$

Для $\psi(x)$ Золотарев находит с помощью формулы Стирлинга границы ($B=\mathrm{const.}$):

$$\psi(x)>Bx-\frac{3}{2}\log x-1 \text{ и } \psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)<Bx+\frac{3}{2}\log x.$$

Наброски вычислений на ту же тему имеются и в других тетрадях. Подобные доказательства позднее были даны иностранными математиками [188—191]. Доказательство Золотарева осталось неопубликованным.

В тетради № 5 он пишет: «Вопросы, которые следует изучить в теории чисел: 1) комплексные числа, 2) все, что относится к функциям больших чисел. . .».[4] Возможно, что второй пункт означает: все, что относится к асимптотическому поведению теоретико-числовых функций от n при $n\to\infty$. Тогда становится понятным, чем могли заинтересовать Золотарева сообщения Бугаева и Чебышева на заседаниях III съезда русских естествоиспытателей [28, стр. 297—301]. Н. В. Бугаев сообщил о тождествах для функции $H(n)$, означающей число

---

[3] Там же, № 6, л. 64 и дальше.

[4] Там же, № 5, л. 1 об.

натуральных чисел, не делящихся на квадраты чисел, бо́льших 1, в ряде $1, 2, 3, 4, \ldots, n$. Чебышев на следующем заседании указал границы, между которыми заключены значения $H(n)$ при $n \to \infty$. Доказательство, данное Золотаревым для функции $\psi(x)$, можно перенести и на функцию $H(x)$.

Черновые тетради открывают нам, что Золотарев интересовался самыми современными вопросами математики, например теорией групп. Он внимательно изучал только что вышедший трактат Жордана [193]. Золотарев упрощает некоторые доказательства Жордана, дает свои доказательства некоторых его теорем. Внимательно изучает Золотарев и работы английского математика А. Кэли. В тетрадях есть обзор работ этого ученого,[5] впоследствии использованный О. И. Сомовым для представления А. Кэли в члены-корреспонденты Академии наук.[6]

В тетради № 3 — «Программа занятий по эллиптическим функциям».[7] В ней сказано: «1) Составить и обработать вопрос о разложении квадратичного радикала из полинома 3-й и 4-й степени в непрерывную дробь и представить полнейшим образом связь, существующую между этим разложением и эллиптическими функциями, так чтобы из этой теории выводились как следствия результаты, полученные мною раньше. 2) Поискать геометрического построения решения того вопроса, который составляет предмет моего рассуждения pro venia legendi. [Сочинение] Понселе. 3) Обработать теорию комплексного умножения в эллиптических функциях (подумать об формулах для счета классов определенных квадратичных форм). 4) Об тех приложениях эллиптических функций к теории чисел, которые связаны с исследованиями Лиувилля. 5) О точках перегиба кривых 3-го порядка. (Подумать о связи между интегралами Aronhold'a и Brioschi). . .». В этой же тетради имеются вычисления, относящиеся к признаку сходимости Ермакова.[8]

В тетрадях много замечаний и различных соображений по поводу работ других авторов. Например, в тетради № 5

---

[5] Там же, № 4, лл. 72 об.—73.
[6] ААН, ф. 2, оп. 17, ед. хран. 6, л. 253—253 об. (Л.).
[7] ААН, ф. 289, 1872, оп. 1, ед. хран. 3, л. 3 (М.).
[8] Там же, л. 84 об.; см. [46—48].

записаны «различные соображения, являющиеся при чтении Салмона: 1) подвести известные формулы Эйлера под общие формулы составления ортогональных координат; 2) новое доказательство для выражения Сильвестеровых функций; 3) заняться приложением этих функций к теории деления круга; 4) некоторые соображения о новом способе приведения квадратичных форм в теории чисел».[9]

Есть замечания по механике; одно из них довольно большое. Здесь же имеются списки литературы, которую Золотарев собирается прочитать или захватить с собой на дачу. Они позволяют установить, к какой книге или статье относятся многие замечания Золотарева. В списках литературы отмечается 26 работ Эйлера по вопросам теории чисел, сочинения Дирихле, Гаусса, Куммера, Кронекера, Эйзенштейна, Вейерштрасса, Римана, Салмона, Лобачевского и др. В тетради № 5 — конспект мемуара Кронекера о комплексных числах, конспект статьи Куммера на ту же тему.[10]

Изложенного достаточно, чтобы показать, что тетради Золотарева представляют не только исторический интерес. Многие записи интересны и математикам.

---

[9] ААН, ф. 289, оп. 1, № 5, л. 73 об. (Л.).

[10] Там же, л. 65 об. и дальше.

Глава 10

ХАРАКТЕРИСТИКА ТВОРЧЕСТВА Е. И. ЗОЛОТАРЕВА

Егор Иванович Золотарев, один из выдающихся представителей петербургской математической школы, оставил богатое наследие. И сейчас продолжается разработка вопросов наилучшего приближения функций и теории квадратичных форм, связанных с исследованиями Золотарева. О теории целых алгебраических чисел Золотарева советский математик Н. Г. Чеботарев писал: «Интерес, который представляет теория Золотарева в настоящее время, заключается в том, что в ней впервые была развита теория, получившая в настоящее время название локальной теории идеалов. Последняя оказалась весьма плодотворной в теории полей классов, а также в теории алгебраических функций» [141, стр. 52].

До сих пор появляются новые доказательства теорем Золотарева и обобщения его результатов. «Золотаревские дуги», задачи «типа Золотарева» часто упоминаются в современных работах по конструктивной теории функций. Еще Фробениус отмечал «интереснейшую лемму» Золотарева из его статьи о законе взаимности. В последнее время появились новые доказательства этой леммы и ее обобщения. Работы Золотарева и Коркина по теории квадратичных форм оказали большое влияние на направление научного творчества многих русских математиков, в том числе А. А. и В. А. Марковых, Г. Ф. Вороного, а в советское время — Б. Н. Делоне, Б. А. Венкова и их учеников.

Результаты и методы Золотарева и совместных работ Золотарева и Коркина неоднократно использовались иностранными математиками. Продолжая исследования Золотарева и Коркина, математики нашли все предельные формы для $n=6, 7, 8, 9, 10$. Упоминания о трудах Золотарева встречаются у Дедекинда, Минковского, Девенпорта, Диксона, Риса, Морделла, Блихфельдта и др. Наряду с рассмотренными выше большими трудами Золотаревым написано несколько мелких статей по различным вопросам математики и механики. В статье «Заметка, относящаяся к одной формуле г. Лиувилля» [213] Золотарев дал доказательство одного теоретико-числового тождества Лиувилля [195], напечатанного последним без доказательства. Золотарев доказал тождество Лиувилля, используя свойства эллиптических функций. Подобные доказательства формул Лиувилля есть и в работах других русских математиков [196—200]: Бугаева, Назимова, Баскакова. Арифметические доказательства подобных формул имеются в работах Успенского.

В статье «Об уравнении $Y^2-p\left(-1\right)^{\frac{p-1}{2}}Z^2=4X$», напечатанной в «Математическом сборнике» [217] и переведенной затем на французский язык для «Nouvelles Annales» [216], Золотарев доказал, что полиномы Y и Z, удовлетворяющие данному уравнению, находятся с помощью непрерывных дробей и указал линейные уравнения, из которых получаются коэффициенты полинома Z. По Z уже легко найти Y. Во французском издании Математической энциклопедии об этой статье говорится:[1] «Золотарев дал очень удобный способ вычислять Y и Z. Этот способ дает, кстати, очень простое доказательство свойств Y и Z» [204]. Когда статья была уже напечатана, Золотарев узнал, что об этом уравнении была заметка Лиувилля, в которой полиномы Y и Z находились другим методом, и сообщил об этом в «Nouvelles Annales» [218]. В заметке «О притяжении однородных эллипсоидов» [225] Золотарев продолжает исследования Лежандра [205]. Маленькая заметка «О ряде Лагранжа» [226] была разобрана в статье П. А. Некрасова в «Математическом сборнике» [206]. Комментарий к ней есть во 2-м томе ПСС Золотарева.

---

[1] Там обозначения другие.

Сочинения Золотарева были в свое время прореферированы в иностранных журналах различными авторами, среди которых Бугаев, Коркин, Фробениус, Гамбургер, Поссе. Однако его работы по теории целых алгебраических чисел не были правильно оценены, ибо иностранные ученые знали о них в основном по его докторской диссертации (прореферированной в «Jahrbuch» и «Bull. Darboux») и не обратили должного внимания на последующие работы.

Е. И. Золотареву принадлежат литографированные курсы лекций по математике и механике, также представляющие интерес и до сих пор не оцененные и не отмеченные в обзорной литературе.

Золотарев был прекрасным педагогом и за небольшой срок своей преподавательской деятельности сумел воспитать много известных математиков.

Хотя Золотарев был учеником Чебышева, его творчество имеет ряд характерных особенностей, отличающих его от обычных методов математиков петербургской школы. В своих работах Золотарев использует современные методы теории комплексных чисел, теории групп, метод непрерывного параметра. Он часто пользуется теорией эллиптических функций, которую не очень любил Чебышев. Если для Чебышева характерно решение конкретных задач и постановка новых задач на основе некоторых практических соображений, оригинальные методы их решения, а затем новые приложения решенных задач, то для Золотарева характерно стремление к абстракции, к обобщениям. Его больше радует обоснование общей теории целых комплексных чисел, данное им в докторской диссертации, чем та цель, для которой это делалось, — трудная задача интегрального исчисления, поставленная Чебышевым и «по своей трудности оставленная им без разрешения». По поводу всякой прочитанной статьи у него возникало много соображений в отношении обобщения результатов этой статьи или возможности получения их из более общих соображений. В этой связи большой интерес представляют черновые тетради Золотарева, содержащие заметки, программы научных исследований, наброски решения различных задач, отрывки неопубликованных сочинений.

Отметим стремление Золотарева к установлению дружеских и научных связей с другими русскими и иностранными математиками. Он питал симпатию к московскому профессору Н. В. Бугаеву. Об этом говорят письма Коркина Золотареву [254, стр. 207—208] и Бугаеву и письма Золотарева и Коркина Бугаеву по поводу его учебника арифметики.[2] Оба были огорчены неблагоприятной рецензией члена Ученого комитета Дмитриева[3] на эту книгу и выразили в письмах свое несогласие с рецензией, недовольство Дмитриевым и сочувствие Бугаеву. Возможно, что если бы Золотарев прожил дольше, то связи петербургских и московских математиков укрепились бы и в научном отношении. Укрепление связей могло, между прочим, способствовать тому, что элементарное доказательство закона простых чисел дано было бы русскими математиками на основе арифметических тождеств Бугаева и аналитических приемов Чебышева—Золотарева (см. прим. 1, гл. 3). Это тем более вероятно, что, судя по черновым тетрадям, в круг интересов Золотарева входило изучение асимптотического поведения арифметических функций при $n \to \infty$.

В 1871 г. немецкий математик К. Ортман начал издавать ежегодник «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik». О значении этого реферативного журнала профессор Васильев писал: «Большое влияние на взаимное ознакомление с работами математиков различных стран имело немецкое издание, мысль которого принадлежала Ортману, но которое в течение весьма долгого времени велось неутомимым почтенным берлинским математиком Лампе: „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik". Оно начало издаваться в 1871 г., и его все более и более разрастающийся объем свидетельствует о росте и повсеместном распространении математической работы. Трудно, думаю, оценить ту громадную пользу, которую оно принесло; в частности, конечно, особенно обязана ему русская наука. При поразительном незнании нашего

---

[2] Письмо Коркина Бугаеву: «Н. В. Бугаев. Автограф», л. 32—32 об., 15 октября 1874 г., Архив Бугаева в Научной библиотеке Московского университета. Письмо Золотарева Бугаеву 13 октября 1874 г., там же, л. 38—38 об. Письмо Коркина Бугаеву 29 января 1880 г., там же, л. 34—34 об. Речь шла об учебнике Бугаева «Руководство к арифметике», состоявшем из двух частей: «Арифметика целых чисел» и «Арифметика дробных чисел». Первое издание вышло в 1874 г. 1-я часть выдержала 12 изданий, 2-я — 10.

[3] Мнения членов Ученого комитета. ЦГИАЛ, ф. 734, оп. 3. Журналы заседаний Ученого комитета МНП (начиная с 1874 г.).

языка иностранцами (и теперь, например, в Германии можно назвать только двух-трех ученых математиков, его знающих, в Италии — только одного, в Англии, я думаю, ни одного) только благодаря этому Jahrbuch'у русская математическая литература могла сделаться известной математикам других стран» [194, стр. 56—57].

Первыми русскими сотрудниками «Jahrbuch» (по математике) были Коркин и Золотарев. Они сотрудничали в нем начиная со 2-го тома (1873), где были напечатаны рефераты работ за 1869—1870 гг. С 6-го тома (1876) к ним присоединились М. А. Баранецкий и К. А. Поссе. В 7-м томе (1877) вместо А. Н. Коркина становится референтом С. Дикштейн (Варшава). В этом томе последний раз в списке референтов встречается фамилия Золотарева.

Среди иностранных сотрудников были известные математики: Фробениус, Гамбургер, Теплиц и др. Русские сотрудники публиковали рефераты работ русских ученых и таким образом знакомили европейских математиков с достижениями отечественной науки. Золотареву принадлежит 15 рефератов сочинений русских ученых: рефераты трех работ Чебышева, трех — Бугаева, четырех — Сомова, статей Буняковского, Слудского, Летникова, книги Н. Будаева, реферат статьи Ермакова, написанный совместно с Коркиным.

Вместе с другими профессорами и преподавателями университета Золотарев участвовал в «Русском энциклопедическом словаре», издававшемся И. Н. Березиным. Словарь издавался с 1873 по 1878 г. Сотрудниками словаря были профессора Бугаев, Бредихин, Бутлеров, братья Чебышевы, Менделеев, Коркин и др. — цвет тогдашнего ученого мира. К сожалению, многие статьи словаря не подписаны. В третьем томе 1-го отдела (1873) есть две статьи Золотарева:[4] «Барицентрическое исчисление» (стр. 265) и «Бесконечно большая величина» (стр. 384—385). В первой даны краткие исторические

[4] Черновики этих статей имеются в тетради Золотарева, находящейся в ААН (М.) (ф. 289, оп. 1, № 5, лл. 60—62). В определении бесконечно большой величины в печатном тексте имеется опечатка: пропущено слово «всякое» («превосходит данное число»). В черновике формулировка такая: «Бесконечно большой величиной называется переменная величина, численные значения которой превосходят всякое данное число».

сведения о барицентрическом исчислении со ссылкой на «Лексикон чистой и прикладной математики» Буняковского. Во второй даются определения бесконечно большой и бесконечно малой величин, подчеркивается значение того, что это величины переменные, даны примеры; отмечается, что «очень малых величин, собственно, нет; малость величины зависит от единицы сравнения, между тем как бесконечно малой величиной называется переменная величина, имеющая пределом нуль, т. е. подходящая к нулю так близко, как угодно».

Собрание сочинений Золотарева, вышедшее в 1931—1932 гг., не является полным. К тому же часть работ напечатана там, как и в оригинале, на французском языке. Тираж издания был небольшой (1000 экземпляров), и теперь оно становится уже библиографической редкостью. Давно пора издать полные собрания сочинений Е. И. Золотарева и А. Н. Коркина, снабженные более подробными комментариями. Напомним, что еще в 1918 г. первые советские академики-математики А. Н. Крылов и В. А. Стеклов писали: «У нас не имеется полных собраний сочинений ни нашего „русского Архимеда“ Лобачевского (так называют его англичане), ни первого русского академика-математика Остроградского, ни академика Золотарева; не закончено издание трудов профессора Коркина, работавшего частью совместно с Золотаревым. Между тем труды этих ученых имеют не только исторический интерес, но многие из них представляют непреходящую ученую ценность громадной важности, как например геометрические исследования Лобачевского, исследования Золотарева по теории чисел, совместные исследования Коркина и Золотарева по теории форм. . .» [207, стр. 743—744].

ЛИТЕРАТУРА

I. Общая литература (1—209)

1. А. А. Радонежский. Исторический очерк 5-й С.-Петербургской гимназии (1845—1873). СПб., 1874.
2. К. А. Иванов. Пятидесятилетие С.-Петербургской 5-й гимназии. СПб., 1895.
3. А. Н. Крылов. Мои воспоминания. В кн.: Воспоминания и очерки. Изд. АН СССР, 1956.
4. К. А. Тимирязев. Развитие естествознания в России в эпоху 60-х годов. Сочинения, т. 8, М., 1939.
5. С. Ашевский. Русское студенчество 60-х годов. Современный мир, тт. 6—10, 1907.
6. Университетский устав 1863 г. СПб., 1863.
7. Замечания на проект общего устава имп. российских университетов, ч. I. СПб., 1862.
8. Биографический словарь профессоров и преподавателей С.-Петербургского университета за истекшую 3-ю четверть века его существования, тт. 1, 2. СПб., 1896.
9. В. В. Григорьев. Имп. С.-Петербургский университет в течение первых пятидесяти лет его существования. СПб., 1870.
10. Ф. Ф. Петрушевский. Курс наблюдательной физики, т. 1. СПб., 1867.
11. О. А. Лежнева и Б. Н. Ржонсницкий. Эмилий Христианович Ленц. Госэнергоиздат, М., 1952.
12. А. Н. Коркин. Высшая алгебра. Курс, читанный в 1864/65 акад. г. (литогр.). СПб.
13. А. Н. Крылов. Краткий биографический очерк А. Н. Коркина. В кн.: Воспоминания и очерки. Изд. АН СССР, 1956.
14. П. Л. Чебышев. Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины. ПСС Чебышева, т. 1, стр. 173—190.
15. П. Л. Чебышев. О простых числах. Там же, стр. 191—207.
16. П. Л. Чебышев. Теория сравнений. Там же, стр. 10—172.
17. Т. Р. Никифорова. Осип Иванович Сомов. Изд. «Наука», 1964.
18. В. Г. Селиханович. Алексей Николаевич Савич, математик, астроном, педагог. Геодезиздат, М., 1957.

19. Годичный торжественный акт в имп. С.-Петербургском университете, бывший 8 февраля 1863 г. СПб., 1868. Отчет о состоянии Университета за 1867 г.
20. Краткий очерк пятидесятилетия Института гражданских инженеров (бывш. Строительного училища Министерства внутр. дел). СПб., 1892.
21. И. М. Сеченов. Автобиографические записки. Изд. АН СССР, 1945.
22. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 2-ю половину 1869/70 акад. года. СПб., 1870.
23. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 1-ю половину 1878/79 акад. года. СПб., 1879.
24. П. Л. Чебышев. Донесение о магистерской диссертации Золотарева. ПСС Чебышева, т. 5, стр. 297.
25. В. Е. Прудников. Пафнутий Львович Чебышев. Учпедгиз, 1950; изд. 2-е, 1964.
26. В. П. Ермаков. Caractère de convergence des séries. Bull. des sciences mathém. et astron., t. 2, 1871.
27. В. П. Ермаков. Отчет о путешествии за границу. Унив. изв., Киев, в. 1, 1874, стр. 1—10.
28. А. А. Киселев и Е. П. Ожигова. П. Л. Чебышев на съездах русских естествоиспытателей и врачей. ИМИ, в. 15, 1963.
29. В. А. Зморович. О признаках Н. И. Лобачевского и В. П. Ермакова сходимости знакоположительных рядов. Изв. Киевск. политехн. инст., т. 19, 1956.
30. П. Л. Чебышев. Донесение о докторской диссертации Золотарева. ПСС Чебышева, т. 5, стр. 299.
31. К. А. Поссе. Чебышев П. Л. Критико-биографический словарь Венгерова, т. 4, отд. 1, стр. 1—23.
32. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 1875/76 акад. год. СПб., 1877.
33. К. В. Борхардт. Письмо Чебышеву от 17 декабря 1879 г. ПСС Чебышева, т. 5, стр. 452.
34. К. А. Поссе. И. Л. Пташицкий (некролог). Сообщения Харьковского математического общества, т. 13, 2-я сер., 1912—1913, стр. 247—252.
35. И. Я. Депман. С.-Петербургское математическое общество. ИМИ, 1960, в. 13, стр. 11—106.
36. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 1-ю половину 1875/76 акад. года. СПб., 1876, стр. 115—116.
37. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 2-ю половину 1876/77 акад. года. СПб., 1878, стр. 34.
38. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 1877/78 акад. год. СПб., 1878, стр. 83—84.
39. А. А. Марков. Автобиография. Матер. для библиогр. словаря действ. чл. имп. Академии наук, Пгр., т. II, 1918, стр. 16—18.
40. А. М. Ляпунов. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1948, стр. 314—315.
41. Н. Ливанов. Письмо А. Н. Коркину. ПСС, т. 2, стр. 342—343.
42. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 1-ю половину 1878/79 акад. г. СПб., 1879, стр. 64—68.

43. Пятидесятилетие Института и Корпуса инженеров путей сообщения. Исторический очерк, составленный Е. Соколовским. СПб., 1859.
44. А. М. Ларионов. История Института путей сообщения. СПб., 1910.
45. Протоколы заседаний Совета СПб-ского университета за 2-ю половину 1870/71 акад. года. СПб., 1871, стр. 52—54.
46. Протоколы заседаний общего собрания имп. Академии наук за 1877/78 г. СПб.
47. Протоколы заседаний физико-математического отделения имп. Академии наук за 1877/78 г. СПб.
48. П. Л. Чебышев. Теория механизмов, известных под именем параллелограммов. ПСС Чебышева, т. 2, стр. 23—51.
49. Протоколы заседаний физико-математического отделения имп. Академии наук, § 90, 1877 г. СПб.
50. Протоколы заседаний физико-математического отделения имп. Академии наук, § 150, 1877 г. СПб.
51. E. Bonsdorf. Über das Polarsystem einer Curve dritter Ordnung. Bull. Acad. St.-Pét., t. 24, 1878.
52. E. Bonsdorf. Über die Entwickelung von einigen Covarianten der binären Formen. Ibid., pp. 320—322.
53. J. O. Backlund. Zur Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $1-2\eta U+\eta^2$. Ibid., pp. 509—517.
54. F. Minding. Einige isoperimetrische Aufgaben. Ibid., pp. 398—409.
55. Записки Академии наук, т. 31, 1878, прилож. 2.
56. В. Я. Буняковский. О новом случае делимости чисел вида $2^{2^m}+1$, сообщенном Академии отцом Первушиным. Зап. Акад. наук, т. 31, стр. 223—224; см. также: Bull. Acad. St.-Pét., t. 24, 1878, p. 559; t. 25, 1878, pp. 63—64.
57. А. Е. Раик. Уральский математик Иван Михеевич Первушин. ИМИ, в. 6, 1953, стр. 535—572.
58. И. Г. Мельников. О работах В. Я. Буняковского по теории чисел. Тр. ИИЕТ, т. 17, история физ.-матем. наук, М., 1957.
59. Протоколы заседаний физико-математического отделения Академии наук, § 94, 1878 г. СПб.
60. F. Minding. Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings. Bull. Acad. St.-Pét., t. 25, 1879, pp. 190—193.
61. Протоколы заседаний общего собрания имп. Академии наук, § 50, 1878 г. СПб.
62. Н. В. Бугаев. Учение о числовых производных. Матем. сб., тт. 5—6, М., 1870—1872.
63. A. Selberg. An elementary proof of the Prime number theorem. Annales of mathem., v. 50, 1949, pp. 305—313.
64. P. Erdös. On a new method in elementary number theory, which leads to an elementary proof of the Prime number theorem. Proc. nat. Acad. scient., USA, v. 35, 1949, pp. 374—384.
65. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд. АН СССР, 1947.
66. Б. Н. Делоне. Развитие теории чисел в России. Уч. зап. МГУ, в. 91, т. I, кн. 1, 1947, стр. 77—96.

67. Б. В. Гнеденко. Очерки по истории математики в России. М., 1946.
68. А. В. Васильев. Математика. Пгр., 1921.
69. П. С. Александров. Русская математика 19—20 веков и ее влияние на мировую науку. Уч. зап. МГУ, в. 91, т. I, кн. 1, стр. 3—33.
70. С. Н. Бернштейн. Чебышев и его влияние на развитие математики. Там же, стр. 35—45.
71. А. П. Юшкевич. Раздел «Математика» в «Истории естествознания в России», т. 2. Изд. АН СССР, 1960, стр. 41—221.
72. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
73. П. Л. Чебышев. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. ПСС Чебышева, т. 2, стр. 146—150, 151—235.
74. В. Л. Гончаров. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. ПСС Чебышева, т. 2, стр. 500.
75. А. А. Гусак. Предыстория и начало развития теории приближения функций. ИМИ, в. 14, 1961.
76. А. А. Марков. Определение некоторой функции по условию наименее уклоняться от нуля. Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при имп. Харьковском университете, т. I, Харьков, 1884, стр. 83—92.
77. А. А. Марков. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Зап. Акад. наук, т. 62, 1890.
78. А. А. Марков. Новый случай задачи Понселе о приближенном выражении квадратного корня от суммы квадратов. Изв. Акад. наук, т. 24, 1906, № 1—2.
79. А. А. Марков. К вопросу о функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Сообщения Харьковского математического общества, т. 14, № 4, 2-я сер., 1914, стр. 198—199.
80. В. А. Марков. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
81. А. П. Пшеборский. О некоторых полиномах, наименее уклоняющихся от нуля. Сообщения Харьковского математического общества, т. 14, № 1—2, 2-я сер., 1913, стр. 65—89.
82. А. П. Пшеборский. Sur une généralisation d'un problème de Tchébycheff et de Zolotareff. C. R., t. 158, 1914, pp. 619—621.
83. А. П. Пшеборский. Sur quelques polynomes qui s'écartent le moins possible de zéro dans un interval donné. C. R., t. 156, 1913, pp. 531—533.
84. Я. Л. Шохат. Исследование одного класса многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Екатеринбург, 1918 (литогр.).
85. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, тт. 1, 2, 1952, 1954.
86. Н. И. Ахиезер. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen an wenigsten von Null abweichen. Изв. Физико-

математического общества при Казанском университете, т. 3, № 22, 3-я сер., 1928, стр. 1—69.
87. Н. И. Ахиезер. Об одной задаче Е. И. Золотарева. Изв. Акад. наук, отд. физ.-мат. наук, сер. 7, № 9, 1929, стр. 919—931.
88. Н. И. Ахиезер. Об экстремальных свойствах некоторых дробных функций. ДАН, А, 1930, стр. 495—499.
89. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
90. И. П. Натансон. Об одной экстремальной задаче о возрастающих многочленах. Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех. и астрон., № 7, в. 2, 1958.
91. Е. В. Вороновская. Некоторые задачи чебышевской школы в свете современных функционально-аналитических методов. Тр. III Всесоюзн. математического съезда, т. 2, 1956.
92. Б. А. Рымаренко. Об одном неравенстве В. А. Маркова. ДАН УзбССР, т. 2, 1950.
93. Б. А. Рымаренко. К вопросу о единственности экстремальных полиномов. ДАН УзбССР, т. 7, 1952.
94. Б. А. Рымаренко. О наименьшем уклонении от нуля циклически монотонного полинома при задании двух его старших коэффициентов. ДАН, т. 83, № 2, 1952.
95. Б. А. Рымаренко. Об одной задаче, аналогичной задачам Е. И. Золотарева и Н. И. Ахиезера. Тр. Инст. мат. и мех. АН УзбССР, в. 10, ч. 2, 1953, Ташкент.
96. В. Ф. Бржечка. Об одной экстремальной задаче, аналогичной задаче Е. И. Золотарева. Научн. зап. Харьковского мех.-машиностр. инст., т. 9, в. 1, 1948.
97. Д. Г. Гребенюк. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля, коэффициенты которых удовлетворяют нескольким линейным зависимостям. Тр. Среднеазиатского унив., сер. V-а, матем., в. 18, Ташкент, 1939.
98. Д. Г. Гребенюк. Полиномы наилучшего приближения, коэффициенты которых связаны линейными зависимостями. Изд. АН УзбССР, 1960.
99. И. А. Григорьева. О некоторых экстремальных задачах для функций, монотонных на всей вещественной оси. Изв. Киевского политехн. инст., т. 16, 1956.
100. И. А. Григорьева. Об одной задаче для полиномов, монотонных в промежутке $(-a, a)$, аналогичной задаче Е. И. Золотарева. Там же.
101. И. А. Григорьева. Об одной экстремальной задаче. . . Там же, т. 19, 1956.
102. Б. А. Рымаренко и В. Н. Буров. О некоторых условно-экстремальных задачах чебышевского приближения в вещественной области. Тр. IV Всесоюзн. математического съезда, Изд. АН СССР, 1963.
103. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Физматгиз, М., 1961.
104. Г. Ш. Рубинштейн. О некоторых экстремальных задачах экономического характера, идейно-близких к задаче Чебышева о наилучшем равномерном приближении [103, стр. 342—347].

105. Г. Ш. Рубинштейн. Двойственные экстремальные задачи. ДАН, т. 152, № 2, 1963.
106. С. И. Зуховицкий и Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. Изд. «Наука», 1964.
107. Я. Л. Геронимус. Об одной экстремальной задаче Чебышева. Изв. АН СССР, 1938, в. 4, отд. матем. и естеств. наук.
108. П. Л. Чебышев. Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями. ПСС Чебышева, т. 5, стр. 244—313.
109. А. А. Марков. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. Зап. Акад. наук, физ.-матем. отд., т. IV, № 5, 1898.
110. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ УССР, Харьков, 1938.
111. М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. УМН, т. 6, 4 : 44, 1951.
112. Я. Л. Геронимус. О некоторых экстремальных задачах. Изв. АН СССР, сер. матем., № 2, 1937.
113. Я. Л. Геронимус. Об одной задаче F. Riesz'a и обобщенной задаче Чебышева—Коркина—Золотарева. Изв. АН СССР, т. 19, 1939.
114. Н. И. Ахиезер. П. Л. Чебышёв и его научное наследие. Избр. тр. П. Л. Чебышева, Изд. АН СССР, 1955, стр. 883.
115. А. А. Нудельман. Об одной минимум-проблеме типа Коркина—Золотарева. Уч. зап. Харьковского университета, т. 85, зап. матем.-мех. фак., т. 29, в. 4, 1963.
116. Ch. Hermite. Oeuvres de Ch. Hermite, v. 1, 1905; v. 2, 1908; v. 3, 1912; v. 4, 1917, Paris. (В 1-м томе большой биографический очерк, написанный Пикаром).
117. Ch. Hermite. Oeuvres, v. 1, стр. 100—163. Lettres de M. Hermite à. M. Jacobi.
118. К. Ф. Гаусс. Труды по теории чисел. Изд. АН СССР, 1959, стр. 181—183, 379—380.
119. А. А. Марков. Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. Mémoires de l'Acad. des sciences de St.-Pétersbourg, sér. VII, 1892, t. 38, № 9.
120. Г. Ф. Вороной. О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения третьей степени. Собр. соч., т. 1, Киев, 1952, стр. 25—195.
121. H. Davenport. A simple proof of Remak's theorem on product of linear forms. J. Lond. mathem. soc., v. 14, partie 1, № 53, 1939.
122. R. Dedekind. Über die Anzahl der Idealklasse in reinen kubischen Zahlkörpern. J. für die reine und angew. Mathem., Bd. 121, Heft 5, 1900; Gesammelte mathem. Werke, Bd. II, 1931.
123. H. Hasse. Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörpern auf Klassen körpertheoretisch. Grundlage. Mathem. Zs., Bd. 31, 1930.
124. А. А. Киселев. О числе классов идеалов в кубических полях. Уч. зап. Ленингр. пед. инст., т. 14, 1957, физ.-мат. фак., в. 1.

125. А. А. Марков. О бинарных квадратичных формах положительного определителя. СПб., 1880.
126. А. А. Марков. О неопределенных тройничных квадратичных формах. Изв. Акад. наук, т. 14, 1901 (перевод в «Mathem. Annalen», 1903, стр. 233—251).
127. А. А. Марков. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными. Изв. Акад. наук, т. 16, 1902.
128. А. А. Марков. О трех неопределенных тройничных квадратичных формах. Изв. Акад. наук, т. 17, № 2, 1902.
129. Г. Ф. Вороной. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собр. соч., т. 2, Киев, 1952, стр. 171—238; см. также комментарии к I—III томам.
130. Б. А. Венков. К работе «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм». Собр. соч. Вороного, т. 2, Киев, 1952, стр. 379—385.
131. Б. А. Венков. О приведении положительных квадратичных форм. Собр. соч. Вороного, т. 3, Киев, 1953, стр. 235—246.
132. N. Hofreiter. Monatshefte für Mathem. und. Physik, Bd. 40, 1933, S. 129—152.
133. H. F. Blichfeldt. The minimum values of positive quadratic forms in sex, seven and eight variables. Mathem. Zs., Bd. 39, Heft 1, 1934.
134. H. Minkowsky. Gesammelte Abhandlungen von H. Minkowsky, Bd. 1, 2, 1911, Leipzig—Berlin; Bd. 2, стр. 42—100.
135. L. Mordell. Thoughts on humber theory. J. Lond. mathem. soc., v. 21, part 1, 1946.
136. L. Mordell. The minimum of a definite ternary quadratic forms. J. Lond. mathem. soc., v. 23, part. 3, № 91, 1948.
137. Р. О. Кузьмин. Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева. УМН, т. 2, 6 : 22, 1947.
138. А. В. Васильев. Золотарев Егор Иванович. Русский биографический словарь, издаваемый имп. Русским историческим обществом, т. Ж—З, 1916, Пгр., стр. 431—434.
139. И. Г. Башмакова. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева. ИМИ, в. 2, 1949.
140. Н. Г. Чеботарев. Новое обоснование теории идеалов (по Золотареву). Изв. Казанского физико-математического общества, т. 2, в. 25, 1925.
141. Н. Г. Чеботарев. Об основании теории идеалов по Золотареву. УМН, т. 2, 6 : 22, 1947.
142. J. A. Serret. Cours d'algèbre supérieure. 3-e ed., t. 1—2, 1866, Paris; t. 2, ch. 3, pp. 121—188.
143. C. F. Gauss. Werke, Bd. 1, 2, Göttingen, 1863; Disquisitiones generales de congruentiis, Bd. 2, S. 212—240.
144. Л. Г. Шнирельман. Простые числа. М.—Л., 1940, стр. 22—29 (популярное изложение сущности теории целых комплексных чисел Гаусса).
145. G. Lamé. C. R., t. 24, 1848, pp. 310—315, 569—572, 888.
146. Au. Cauchy. C. R., t. 24, 1848; pp. 407—414, 469—481, 516—528, 633—636, 757—763, 996—999, 1022—1030, 1117—1120.
147. E. Kummer. Zur Theorie der komplexen Zahlen. J. für die reine und angew. Mathem., Bd. 36, 1847, S. 319—326.

148. E. Kummer. Über die Divisoren gewisser Formen. Ibid, Bd. 30, 1846, S. 107—116; Bd. 35, 1847, S. 227—367.
149. E. Kummer. Theorie der idealen Primfactoren der komplexen Zahlen... Sitzungsber. Berliner Akad., 1856, S. 1—47.
150. R. Dedekind. Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet, Supplement X. Braunschweig, 2 Aufl., 1871, S. 380—497 (1-е изд. было в 1863 г., в нем не было этого дополнения; 3-е изд. — 1879, 4-е изд. — 1894 г.).
151. R. Dedekind. Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Bull. de sciences mathém. et astronom., t. XI, 1876; t. I (2-я сер.), 1877; отд. оттиск, 1877, стр. 1—118.
152. E. Selling. Über die idealen Primfactoren der komplexen Zahlen, welche aus den Wurzel einer beliebigen irreductibelen Gleichung rational gebildet sind. Zs. für Mathem., 1865, S. 17—47.
153. R. Dedekind. Über die Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen (1878); Gesammelte mathem. Werke, Bd. 1, 1930, S. 202—230.
154. И. И. Иванов. Целые комплексные числа. СПб., 1891.
155. И. И. Иванов. К теории целых комплексных чисел. Прилож. к 72-му тому Зап. Акад. наук, 1893, стр. 1—12.
156. O. Ore. Примечания к статье Дедекинда [153]. Gesammelte mathem. Werke von Dedekind, Bd. 1, S. 230—232.
157. Ю. В. Сохоцкий. Начало общего наибольшего делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел. СПб., 1893.
158. Д. А. Граве. Об основных положениях теории идеальных чисел. Матем. сб., т. 32, в. 1, М., 1925; см. также в. 3, стр. 542—560.
159. Д. А. Граве. Арифметическая теория алгебраических величин, т. 1, Киев, 1910 (литогр.); т. 2, 1912; Унив. изв., Киев, 1913, № 1—3.
160. В. А. Добровольский. Научно-педагогическая деятельность Д. А. Граве (к столетию со дня рождения). ИМИ, в. 15, 1963.
161. В. П. Вельмин. Введение в теорию алгебраических чисел. Варшава, 1913.
162. N. H. Abel. Oeuvres complêtes, t. 1, 1839, Christiania, p. 33—65.
163. П. Л. Чебышев. Об интегрировании дифференциала $\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$. ПСС Чебышева, т. 2, стр. 345—356.
164. П. Л. Чебышев. Об интегрировании иррациональных дифференциалов. ПСС Чебышева, т. 2, стр. 342—344.
165. K. Weierstrass. Über die Integration algebraischer Differential vermittelst Logarithmen. Monatsber. der Akad. der Wissenschaft., Berlin, 1857; Werke, I, 1894, Berlin, S. 224—232.
166. H. Durege. Theorie der elliptischen Functionen. 3 Aufl., Leipzig, 1878.
167. И. Л. Пташицкий. Об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов. СПб., 1881.

168. И. Л. Пташицкий. Об интегрировании в конечном виде эллиптических дифференциалов. СПб., 1888.
169. И. П. Долбня (J. Dolbnia). Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. J. de mathém., 4-e sér. VI, 1890, pp. 293—311; Oeuvres mathématiques de Jean Dolbnia, Paris, 1913, pp. 36—53.
170. Я. В. Успенский. Очерк научной деятельности А. А. Маркова. Изв. Акад. наук, т. 17, 1923.
171. А. А. Марков. О псевдоэллиптических интегралах $\int \frac{xdx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+d}}$. Зап. Акад. наук, т. 74, кн. 2, 1895.
172. A. Schinzel. On some problems on the arithmetical theory of continued fractions. (2). Acta arithmetica, v. VII, № 5, 1962.
173. Н. Г. Чеботарев. О выражении Абелевых интегралов через элементарные функции. Собр. соч., т. I, М., 1949, стр. 235—254.
174. Н. Г. Чеботарев. Проблемы современной теории Галуа. Собр. соч., т. III, М., 1950, стр. 5—46 (особенно стр. 40—42).
175. В. В. Голубев. Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций. Научное наследие П. Л. Чебышева, в. I, математика, Изд. АН СССР, 1945, стр. 114.
176. И. Г. Мельников и И. Ш. Славутский. О двух забытых доказательствах закона взаимности. Тр. ИИЕТ, т. 28, история физ.-мат. наук, Изд. АН СССР, 1959.
177. И. Ш. Славутский. Одно обобщение леммы Золотарева. Rev. de mathém. pures et appl., v. 8, № 3, 1963. Румыния.
178. M. Riesz. Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadr. Mathem. Scand., t. 1, 1953.
179. А. К. Сушкевич. Материалы к истории алгебры в России. ИМИ, в. 4, 1951.
180. Н. Д. Моисеев. Общий очерк развития механики в России и в СССР. Механика в СССР за 30 лет. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
181. А. Т. Григорьян и Л. С. Полак. Очерки механики в России во второй половине 19 и начале 20 века. Тр. ИИЕТ, т. 10, история физ.-мат. наук, Изд. АН СССР, 1956.
182. Я. Л. Геронимус. Очерки о работах корифеев русской механики. ГИТТЛ, 1952.
183. А. А. Космодемьянский. Очерки по истории теоретической механики в России. Уч. зап. МГУ, т. 2, в. 122, 1948.
184. И. И. Сомов. Рациональная механика. В. 1, 1872; в. 2, 1877. Нем. перевод: Somoff. Theoretische Mechanic, Bd. 1, Leipzig, 1878.
185. Н. Будаев. Теоретическая механика. СПб., 1871.
186. Д. К. Бобылев. Механика (литогр.). 1878—1879 и др. изд.
187. Ch. Hermite. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques. . . Annali di matemat., v. 3, 1869—1870, pp. 81—82; Oeuvres de Ch. Hermite, v. II, pp. 489—491.
188. J. J. Sylvester. Amer. J. mathem., v. 4, 1881, pp. 230—247.

189. R. Doublebsky von Sterneck. Sitzungsberichte Akad. Wiss., Wien, Bd. 109, 11-a, 1900.
190. S. Ramanujan. A proof of Bertrand's postulate. Collected papers of Ramanujan, 1927, Cambrige, pp. 208—209 (работа 1919 г.).
191. Л. Г. Шнирельман. Простые числа. М.—Л., 1940, стр. 51—53.
192. Труды III съезда русских естествоиспытателей в Киеве. Киев, 1873.
193. C. Jordan. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, 1870.
194. А. В. Васильев. Математика за последние 50 лет. Матем. образование, т. 2, 1928.
195. J. Liouville. Extrait d'une lettre adressée à m. V.—A Le Besgue. J. de mathém. pures et appl., 2-e sér., v. 15, 1870.
196. Н. В. Бугаев. Некоторые приложения теории эллиптических функций к теории функций прерывных. Матем. сб., тт. 11—12, М., 1883—1885.
197. П. С. Назимов. Приложение теории эллиптических функций к теории чисел. М., 1885.
198. С. И. Баскаков. Об одном способе получения числовых тождеств и его приложение к теории числовых функций. Матем. сб., т. 10, в. 3, М., 1882.
199. Я. В. Успенский. О некоторых арифметических теоремах Stieltjes'а. Сообщения Харьковского математического общества, 2-я сер., т. 14, № 1—2, 1913, стр. 7—30.
200. Я. В. Успенский. Sur les rélations entre les nombres des classes des formes quadratiques. . . Изв. Акад. наук, 1925—1926 гг. (5 мемуаров).
201. Б. А. Венков. О приведении положительных квадратичных форм. Изв. Акад. наук, сер. матем., т. 4, 1940.
202. Б. А. Венков. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных квадратичных форм. Изв. Акад. наук, сер. матем., т. 9, 1945.
203. Б. А. Венков. О неопределенных квадратичных формах с целыми коэффициентами. Тр. МИАН, т. 38, 1951.
204. K. Vahlen. Théorie arithmétique des formes. Encycl. des sciences mathém. pures et appl. Éd. franç., t. I, v. 3, fasc. 1, 1906, pp. 201—204.
205. A. M. Legendre. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes, t. 1, 1825. Sur l'attraction des ellipsoides homogènes, pp. 539—566.
206. П. А. Некрасов. Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел. Матем. сб., т. 12, в. 1, стр. 49—88 (особенно стр. 55, 185—187); т. 12, в. 2, стр. 315—376; в. 3, стр. 481—578; в. 4, стр. 643—724.
207. А. Н. Крылов (совместно с В. А. Стекловым). Об издании трудов классиков математики. В кн.: Воспоминания и очерки. Изд. АН СССР, М., 1956, стр. 743—744.
208. Математика в СССР за 30 лет. Физматгиз, М., 1948.
209. Математика в СССР за 40 лет, тт. I—II. Физматгиз, М., 1959.

II. Сочинения Е. И. Золотарева (210—237)

210. Об интегрировании уравнений волчка. Кандидатское сочинение, 1867.

211. Об одном вопросе о наименьших величинах. Диссертация pro venia legendi (литогр.), СПб., 1868; ПСС, т. 2, стр. 130—166.

212. Об одном неопределенном уравнении 3-й степени. Магистерская диссертация, СПб., 1869; ПСС, т. I, стр. 1—62.

213. Note relative à une formule de m. Liouville. Bull. Acad. St.-Pét., 3-e sér., t. 16, 1871, pp. 85—87. Mélanges mathém. et astron., t. 4, 1872, pp. 673—675; ПСС, т. 1, стр. 63—65. Реф.: Jahrbuch über die Fortschritte der mathem., Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 65, Netto.

214. Sur les formes quadratiques positives quaternaires (совместно с А. Н. Коркиным). Mathem. Annalen, Bd. 5, 1872, S. 581—583; ПСС, т. 1, стр. 66—68. Реф.: Jahrbuch, Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 81, Netto; Собр. соч. А. Н. Коркина, т. 1, СПб., 1911, стр. 283—288.

215. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. Nouvelles Ann. de mathém., 2-e ser., t. 11, 1872, pp. 354—362; ПСС, т. 1, стр. 69—75. Реф.: Jahrbuch, Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 75—76, Frobenius.

216. Sur l'équation $Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2=4X$. Nouvelles Ann. de mathém., 2-e sér., t. 11, 1872, pp. 539—549; ПСС, т. 1, стр. 76—83. Реф.: Jahrbuch. Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 75, Netto.

217. Об уравнении $Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2=4X$ из теории деления круга. Матем. сб., т. 6, в. I, М., 1872, стр. 83—96 (в Математическом сборнике в записи уравнения допущена опечатка).

218. Extrait d'une lettre de m. G. Zolotareff. Nouvelles Ann. de mathém., 2-e sér., t. 12, 1873, pp. 183—184.

219. Sur la méthode d'intégration de m. Tchébycheff. Mathem. Annalen, Bd. 5, 1872, pp. 560—580; J. de mathém. pures et appl. (Liouville), sér. 2, v. 19, № 1, 1874, pp. 161—188; ПСС, т. 1, стр. 85—108. Реф.: Jahrbuch, Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 126, Hamburger; Jahrbuch, Bd. 5 (за 1874 г.), 1876, S. 171, Hoppe.

220. Sur les formes quadratiques (совместно с А. Н. Коркиным). Mathem. Annalen, Bd. 6, 1873, pp. 366—389; ППС, т. 1, стр. 109—137; Собр. соч. А. Н. Коркина, т. 1, СПб., 1911, стр. 289—327. Реф. Jahrbuch, Bd. 5 (за 1873), 1875, 109—110, Frobenius.

221. Барицентрическое исчисление. Русский энциклопедический словарь И. Н. Березина, т. III, отд. I, 1873, стр. 265.

222. Бесконечно большая величина. Там же, т. III, отд. I, 1873, стр. 384—385.

223. Sur un certain minimum (совместно с А. Н. Коркиным). Nouvelles Ann. de mathém., 2-e sér., t. 12, 1873, pp. 337—355; ПСС, т. 1, стр. 138—153; Собр. соч. А. Н. Коркина, т. 1, СПб., 1911, стр. 329—349. Реф.: Jahrbuch, Bd. 5 (за 1873 г.), 1875, S. 214, Frobenius.

224. Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. Докторская диссертация, СПб., 1874; ППС, т. 1, стр. 161—360. Реф.: Jahrbuch, Bd. 6 (за 1874 г.), 1876, S. 117—124, Korkine (пер. Wangerin); Bull. des sciences mathém. et astron., 2-e sér., t. 3, partie 1, 1879, pp. 472—473, Bougaief.
225. Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes. Nouvelles Ann. de mathém., 2-e sér., t. 15, 1876, pp. 416—422; ПСС, т. 1, стр. 154—158. Реф.: Jahrbuch, Bd. 8 (за 1876 г.), 1878, S. 626—627, Bruns; Bull. des sciences mathém. et astron., 2-e sér., t. 1, partie 2, 1877, p. 282 (A. L.).
226. Sur la série de Lagrange. Nouvelles Ann. mathém., 2-e sér., t. 15, 1876, pp. 422—423; ПСС, т. 1, стр. 159—160. Реф.: Jahrbuch, Bd. 8 (за 1876 г.), 1878, S. 135—136, Hamburger.
227. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. Зап. Акад. наук, т. 30, 1877, Прилож. № 5, стр. 1—71; ПСС, т. 2, стр. 1—59. Реф.: Jahrbuch, Bd. 9 (за 1877 г.), 1880, S. 343—347, Posse.
228. Sur les formes quadratiques positives (совместно с А. Н. Коркиным). Mathem. Annalen, Bd. 11, 1877, pp. 242—292; ПСС, т. 1, стр. 375—434; Собр. соч. А. Н. Коркина, т. 1, 1911, стр. 351—425. Реф.: Jahrbuch, Bd. 9 (за 1877 г.), 1880, S. 139—141, Toeplitz.
229. Sur les nombres complexes. Bull. Acad. St.-Pét., t. 24, 1878, pp. 310—317; ПСС, т. 1, стр. 361—368; Mélanges mathém. et astron., t. 5, pp. 427—437. Реф.: Jahrbuch, Bd. 9 (за 1877 г.), 1880, S. 125—126, Posse.
230. Sur l'application des fonctions elliptiques aux questions de maxima et minima. Bull. Acad. St.-Pét., 3-e sér., t. 24, 1878, pp. 305—310; Mélanges mathem. et astron., t. 5, pp. 419—426; ПСС, т. 1, стр. 369—374. Реф.: Jahrbuch, Bd. 9 (за 1877 г.), 1880, S. 343—347, Posse.
231. Об ученых трудах академика О. И. Сомова. Зап. Акад. наук, т. 31, СПб., 1878, стр. 248—266 (представлена 14 декабря 1877 г.); ПСС, т. 2, стр. 60—71.
232. Sur la théorie des nombres complexes. J. de mathém. pures et appl., 3-e sér., t. 6, 1880; pp. 51—84, 129—166; ПСС, т. 2, стр. 72—129. Реф.: Jahrbuch, Bd. 12 (за 1880 г.), 1882, S. 56, Simon; Bull. des sciences mathém. et astron., 2-e sér., t. 4, partie 2, 1880, p. 270.
233. Дифференциальное исчисление. (Литографированный курс лекций для студентов естественного разряда физико-математического факультета Петербургского университета). СПб.
234. Аналитическая геометрия. Лекции профессора Е. И. Золотарева.
235. Лекции аналитической механики, читанные в Институте путей сообщения профессором Золотаревым (издал студент В. Машевский). СПб., 1873—1874; изд. 2-е, 1874—1875; изд. 3-е, 1875—1876; изд. 4-е, 1876—1877.
236. Лекции высшей алгебры. Литографированный курс лекций, читанных в Институте инженеров путей сообщения. СПб., 1874—1875.

237. Введение в анализ. Литографированный курс лекций, читанный для студентов I курса университета. СПб., 1877—1878, изд. 2-е, 1878.

III. Рефераты, написанные Золотаревым для Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (238—253).

238. (П. Чебышев) P. Tchébycheff. Sur la détermination des fonctions par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable. (Матем. сб., т. 4, в. 4, М., 1870, стр. 231—245). Jahrbuch, Bd. 2 (за 1869—1870 гг.), 1873, S. 198—199.
239. (П. Чебышев) P. Tchébycheff. Des fonctions semblables à celles de Legendre. (Зап. Акад. наук, т. 16, 1870, стр. 131—140). Jahrbuch, Bd. 2 (за 1869—1870 гг.), 1873, S. 157—158.
240. (Н. Бугаев) N. Bougaieff. Sur les formes intégrables des équations différentielles du premier ordre. (Матем. сб., т. 4, в. 2, М., 1869, стр. 61—93). Jahrbuch, Bd. 2 (за 1869—1870 гг.), 1873, S. 166—167.
241. (И. Сомов) J. Somoff. Note sur la réctification approximative des courbes quelconques. (Зап. Акад. наук, т. 18, 1871, стр. 25—30; Mélanges mathém. et astron., t. 4, pp. 653—658; Bull. Acad. St.-Pét., t. 15, pp. 257—261). Jahrbuch, Bd. 2 (за 1869—1870 гг.), 1873, S. 461—462.
242. (В. Ермаков) V. Ermakoff. Caractère de convergence des séries. Bull. des sciences mathém. et astron., t. 2, 1871, pp. 250—256. Реф. Коркина и Золотарева в Jahrbuch, Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 99—100.
243. (И. Сомов) J. Somoff. Sur un moyen algébrique de démontrer le principe de Hamilton rélatif à l'intégration des équations de la Dynamique. Bull. Acad. St.-Pét., 16, 1871, pp. 87—97; Mélanges mathém. et astron., t. 4, 1872, pp. 677—691. Jahrbuch, Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 455—457.
244. (И. Сомов) J. Somoff. Mécanique rationnelle, partie 1. (Рациональная механика, СПб., 1872). Jahrbuch, Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 434, 435.
245. (Н. Бугаев) N. Bougaieff. La théorie des fonctions dérivées des fonctions numériques (Матем. сб., т. 5, в. 1, М., 1870, стр. 1—63). Jahrbuch, Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 75—76.
246. (Н. Будаев) N. Boudaieff. (Там опечатка: Bougaieff). Mécanique analytique, partie I. (Теоретическая механика, т. I, СПб., 1871, стр. 523). Jahrbuch, Bd. 3 (за 1871 г.), 1874, S. 436.
247. (И. Сомов). J. Somoff. Sur les vitesses virtuelles d'une figure. . . Bull. de l'Acad. des sciences de St.-Petersbourg, t. 18, 1872, pp. 161—184; Mélanges mathém. et astron., t. 4, pp. 785—817. Jahrbuch, Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 444.
248. (Ф. Слудский) F. Sloudsky. Sur les mouvements libres d'un fluide incompressible. (Матем. сб., т. 6, в. 4, М., 1873, стр. 405—412). Jahrbuch, Bd. 4 (за 1872 г.), 1875, S. 487.
249. (В. Буняковский) V. Bouniakovsky. Sur les combinaisons d'un genre particulier qui se rencontrent dans

la question sur les livres defectueuses. (Зап. Акад. наук, т. 20, 1871). Jahrbuch, Bd. 4 (да 1872 г.), 1875, S. 89.
250. (П. Чебышев) P. Tchébycheff. Sur les fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro. (Зап. Акад. наук, т. 22, прилож. № 1, 1873, стр. 1—32). Jahrbuch, Bd. 5 (за 1873 г.), 1875, S. 241.
251. (Д. Бобылев) D. Bobyleff. Sur la dispérsion de l'électricité dans les gaz et sur la distribution de l'électricité sur deux sphères. (2 работы. Магистерская диссертация, СПб., 1873). Jahrbuch, Bd. 5 (за 1873 г.), 1875, S. 573—574.
252. (А. Летников) A. Letnikoff. Recherches relatives à la théorie des intégrales de la forme $\int\limits_a^x (x-u)^{p-1}\mathrm{f}(u)\,du$. (Матем. сб., т. 7, в. 1, 1874, стр. 5—108; в. 2, 1874, стр. 109—205). Jahrbuch, Bd. 6 (за 1874 г.), 1876, S. 167—168.
253. (Н. Бугаев) N. Bougaieff. Quelques questions de l'algèbre numériques. (Матем. сб., т. 7, в. 4, М., 1875, стр. 424—436). Jahrbuch, Bd. 7 (за 1875 г.), 1877, S. 38.

---

254. Переписка Е. И. Золотарева с А. Н. Коркиным. Полное собрание сочинений Е. И. Золотарева, т. 2, 1932, Л., стр. 167—342.
255. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, тт. I—V, Изд. АН СССР, 1944—1951.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЦГИАЛ — Центральный государственный исторический архив в Ленинграде.

ГИАЛО — Государственный исторический архив Ленинградской области.

ААН — Архив Академии наук. Если имеется в виду Москва — ААН (М.), если Ленинград — ААН (Л.).

ИМИ — Историко-математические исследования.

ПСС — Полное собрание сочинений Е. И. Золотарева (Изд. Академии наук, 1931—1932).

ПСС Чебышева — Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева (Изд. Академии наук, тт. 1—5, 1945—1951).

Труды ИИЕТ — Труды Института истории естествознания и техники.

Труды МИАН — Труды Математического института им. В. А. Стеклова.

УМН — Успехи математических наук.

ИАН — Известия Академии наук.

ДАН — Доклады Академии наук.

C. R. — Comptes rendus des séances de l'Acad. des sciences (Paris).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Елена Петровна Ожигова

ЕГОР ИВАНОВИЧ ЗОЛОТАРЕВ
(1847—1878)

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Научно-биографическая литература» АН СССР

Редактор издательства *А. А. Борисов*
Художник *Д. С. Данилов*
Технический редактор *Г. А. Бессонова*
Корректор *Ф. Я. Петрова*

Сдано в набор 2/XI 1965 г. Подписано к печати 28/XII 1965 г. РИСО АН СССР № 3—202В. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Бум. л. 2,25. Печ. л. 4,5 = 7,56 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,22. Изд. № 2799. Тип. зак. № 568. М-46215. Тираж 5200. *Цена 45 коп.*

Ленинградское отделение издательства «Наука»
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1

1-я тип. издательства «Наука», Ленинград,
В-34, 9 линия, д. 12

ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
30	11 снизу	[30]	[31]
42	16 »	биноминального	биномиального
51	8 »	[194]	[184]
62	12 »	[233]	223
71	2 »	[99, стр. 425—428]	[89, стр. 425—428]
75	12 сверху	минимума их	минимумов

Е. П. Ожигова

Е. П. ОЖИГОВА

Егор Иванович Золотарев

Е. И. ЗОЛОТАРЕВ

Е. П. ОЖИГОВА

45 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»